



Universidade Federal de Goiás  
Regional Catalão  
Unidade Acadêmica Especial de  
Matemática e Tecnologia  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# Um Estudo das Transformações Geométricas no Plano via Congruência e Semelhança de Figuras Planas

*RICARDO GOMES ASSUNÇÃO*

Catalão/GO  
2015



**Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás-UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações - BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**      **Dissertação**      **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor(a):	Ricardo Gomes Assunção		
E-mail:	ricamat@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo Empregatício do autor	Professor do Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí		
Agência de fomento:	CAPES	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO
		CNPJ:	00.889.834-0001/08
Título:	Um Estudo das Transformações Geométricas no Plano via Congruência e Semelhança de Figuras Planas		
Palavras-chave:	Congruência de figuras geométricas, isometrias, homotetias, semelhança de figuras geométricas		
Título em outra língua:	A Study of Geometric Transformations on the Plane via Congruence and Similarity of Plane Figures		
Palavras-chave em outra língua:	Congruence of geometric figures, isometries, homotheties, similarity of geometric figures		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa:	27/05/2015		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT		
Orientador(a):	Dr. Paulo Roberto Bergamaschi		
E-mail:	prbergamaschi@gmail.com		
Co-orientador(a):	-----		
E-mail:	-----		

**3. Informações de acesso ao documento:**

Liberação para disponibilização?<sup>1</sup>                                      total                      parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: \_\_\_\_\_

Outras restrições: \_\_\_\_\_

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Ricardo Gomes Assunção  
Assinatura do(a) autor(a)

Data: 05/06/2015

<sup>1</sup> Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

Ricardo Gomes Assunção

Um Estudo das Transformações  
Geométricas no Plano via Congruência e  
Semelhança de Figuras Planas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Área de Concentração:** Matemática do Ensino Básico.

**Orientador:** Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.

Catalão/GO

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Assunção, Ricardo Gomes

Um estudo das transformações geométricas no plano via  
congruência e semelhança de figuras planas [manuscrito] / Ricardo  
Gomes Assunção. - 2015.

xvi, 95 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional  
Catalão, Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática  
(PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras.

1. Congruência de figuras geométricas. 2. Isometrias. 3.  
Homotetias. 4. Semelhança de figuras geométricas. I. Bergamaschi,  
Paulo Roberto, orient. II. Título.

**Ricardo Gomes Assunção**

**Um Estudo das Transformações Geométricas  
no Plano Via Congruência e Semelhança de  
Figuras Planas**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de Maio de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi**

Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG  
Presidente da Banca



---

**Profa. Dra. Bianka Carneiro Leandro**  
PUC/GO



---

**Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior**  
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Ricardo Gomes Assunção** graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - Campus Avançado de Catalão em 2005 e especializou-se em Matemática pela Universidade de Brasília em 2008. Atualmente é professor da educação básica, técnica e tecnológica no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Urutaí.

*Dedico este trabalho à Rainha da Aritmética por toda a ajuda a mim prestada no decorrer do curso e pela sua incrível superação para chegar ao fim dessa louca jornada. Ela com certeza deixa um grande exemplo para todos nós.*

# Agradecimentos

Sou grato aos meus pais pelo apoio e compreensão durante este percurso. Obrigado a vocês pela confiança e por acreditarem nas minhas habilidades, além das palavras importantes, em momentos difíceis. Essa conquista, embora tardia, é devida integralmente a vocês.

Sou grato também ao meu irmão, pelo apoio dado no decorrer do curso, principalmente pela ajuda na época da defesa.

Ao meu orientador, professor Paulo Roberto Bergamaschi, pela oportunidade de conhecer um pouco mais sobre esse fantástico mundo da geometria.

Aos meus familiares pela torcida, em especial à tia Drika e família, pelas conversas e pelo apoio de sempre.

Aos meus colegas de turma, pelas contribuições que tanto foram úteis para que eu obtivesse êxito nas disciplinas do curso, principalmente em aritmética, tópicos de teoria dos números e probabilidade e estatística. Em especial, agradeço ao Ali, Alexandre, Adriana e Michele.

Aos meus colegas de trabalho do Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí, que muito contribuíram para que o curso fosse realizado em paralelo ao trabalho docente. De forma especial, gostaria de agradecer ao professor Aderval Alves e à professora Agda Lovato, que muito ajudaram na ocasião da aplicação das atividades, à professora Eliane Mota, pela indicação de algumas referências bibliográficas em Educação Matemática, ao professor Marcelo Bezerra, pela colaboração valiosa com o LaTeX e ao professor Leonardo Guimarães, por todas as traduções para o inglês.

Aos meus alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí, pela inspiração diária. Em especial, às minhas alunas Paula Núbia, Silvânia Luiza e Thatiany Santos, pela colaboração na ocasião da aplicação das atividades.

À coordenação nacional do PROFMAT, por oportunizar esse curso de mestrado.

Aos professores e funcionários da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, pela implantação e empenho na realização do PROFMAT. Agradeço principalmente aos professores que ministraram disciplinas durante esses dois anos, pelo comprometimento e conhecimento oportunizado. Em especial ao professor Thiago Porto, pelo suporte matemático no desenvolvimento do segundo capítulo e ao professor Porfírio Azevedo dos Santos Júnior, por ter aceito o convite de fazer parte da banca de defesa desse trabalho.

Pelo mesmo motivo, agradeço também à professora Bianka Carneiro Leandro.

A TODOS os meus queridos amigos, em especial ao Doc, Copélia, Xuxis, Loka, Wyg, Gers, Gust, Diva, Gil, Luciana, Gisele, Blenda e Rey. Muito obrigado por me apoiarem e torcerem pelo meu sucesso.

A Deus, pela oportunidade de superar as dificuldades e pelo bom andamento desse curso.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

*“O que adquire entendimento ama a sua alma; o que cultiva a inteligência achará o bem.”*

*Provérbios 19,08*

# Resumo

Este trabalho visa estudar as isometrias e homotetias, conhecidas transformações geométricas do plano, por meio da congruência e semelhança de figuras geométricas planas. Afim de explorar e facilitar o entendimento dos conceitos dessas duas transformações geométricas, algumas atividades com figuras geométricas congruentes e semelhantes são propostas num material didático manipulável criado para esse fim, denominado *plano isométrico*, e, também, no *software* GeoGebra. Essas atividades foram aplicadas para uma turma de primeiro ano de ensino médio do Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí, e, alguns comentários (resultados observados) acerca dessa aplicação, são apresentados.

**Palavras-chave:** congruência de figuras geométricas, isometrias, homotetias, semelhança de figuras geométricas.

# Abstract

The aim of this paper is to study the isometries and homotheties, known geometric transformations of the plane, by means of the congruence and similarity of plane geometric figures. In order to explore and facilitate the understanding of the concepts of these two geometric transformations, some activities with congruent and similar geometric figures are proposed in a manageable teaching materials which were created for this purpose, called *isometric plane*, and also in GeoGebra *software*. These activities were applied to a first-year high school class of the Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí, and some comments (observed results) about this application, they are presented.

**Keywords:** congruence of geometric figures, isometries, homotheties, similarity of geometric figures.

# Lista de Figuras

1.1	Figura plana não poligonal. . . . .	9
1.2	$F'$ é resultado do deslocamento horizontal de $F$ . . . . .	10
1.3	$F'$ é a reflexão de $F$ em relação a reta $r$ . . . . .	11
1.4	$F'$ é a rotação de $F$ sob ângulo de $90^\circ$ em torno do ponto $P$ . . . . .	11
1.5	$F'$ é uma reflexão seguida de uma translação de $F$ . . . . .	13
1.6	$XX'$ é resultado de uma translação de $AB$ . . . . .	14
1.7	$Q$ é obtido pela translação de $P$ segundo $\vec{v}$ . . . . .	15
1.8	$D$ é obtido por uma composição de translações. . . . .	15
1.9	$XX'$ é resultado de uma reflexão de $X$ em relação à $r$ . . . . .	16
1.10	$XX'$ é resultado de uma rotação de $AB$ ao redor do ponto $O$ . . . . .	16
1.11	$X'$ é resultado da translação seguida da reflexão em relação a $r$ de $X$ . . .	17
1.12	$F'$ é resultado de uma ampliação de $F$ . . . . .	20
2.1	Ilustração representativa para demonstração da Proposição 2.3. . . . .	23
2.2	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.4. . . . .	24
2.3	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.9. . . . .	26
2.4	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.10, para o caso em que $XY$ é paralelo à reta $r$ . . . . .	27
2.5	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.10, para o caso em que $X$ e $Y$ estão em um mesmo lado de $r$ , mas $XY$ não é paralelo a $r$ . . . . .	27

2.6	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.10, para o caso em que $X$ e $Y$ estão em lados opostos de $r$ e sobre uma reta perpendicular a $r$ . . . . .	28
2.7	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.10, para o caso em que $X$ e $Y$ estão em lados opostos de $r$ e não estão sobre uma reta perpendicular a $r$ . . . . .	29
2.8	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.11. . . . .	30
2.9	Figura F4 como resultado de isometrias aplicadas na figura F1. . . . .	31
2.10	Mosaico de figuras geométricas. Fonte: <a href="http://pt.made-in-china.com/covoglusmosaic/product-Polished-Decoration-Long-Hexagon-Tile-Stone-Mosaic-Marble-eygsnishg.html">http://pt.made-in-china.com/covoglusmosaic/product-Polished-Decoration-Long-Hexagon-Tile-Stone-Mosaic-Marble-eygsnishg.html</a> . . . . .	32
2.11	Pavimentação do plano: calçadão de Copacabana. Fonte: <a href="http://coisasdagil.blogspot.com.br/2011/03/rio-de-janeiro-calcada-de-copacabana.html">http://coisasdagil.blogspot.com.br/2011/03/rio-de-janeiro-calcada-de-copacabana.html</a> . . . . .	32
2.12	Arte: translações na obra de Escher. Fonte: <a href="http://www.educ.fc.ul.pt/cm/icm2000/icm33/Escher.htm">http://www.educ.fc.ul.pt/cm/icm2000/icm33/Escher.htm</a> . . . . .	32
2.13	Pavimentação do plano: cerâmicas. Fonte: <a href="http://www.crq4.org.br/quimicaviva-ceramica-boschi">http://www.crq4.org.br/quimicaviva-ceramica-boschi</a> . . . . .	33
2.14	Arte: mandalas .Fonte: <a href="http://www.premaspace.com/mandalas/">http://www.premaspace.com/mandalas/</a> . . . . .	33
2.15	Arte: kirigamis. Fonte: <a href="https://www.flickr.com/photos/62572859N08/8389353417/">https://www.flickr.com/photos/62572859N08/8389353417/</a> . . . . .	33
2.16	Construção civil: vitral da Catedral de Notre-dame. Fonte: <a href="https://poder-secreto.wordpress.com/category/civilizacoes-antigas-2/page/2/">https:// poder-secreto.wordpress.com/category/civilizacoes-antigas-2/page/2/</a> . . . . .	34
2.17	Arte: pavimentação Escher. Fonte: <a href="http://ma-tematica.blogspot.com.br/">http://ma-tematica.blogspot.com.br/</a> . . . . .	34
2.18	Arte: origamis. Fonte: <a href="http://www.ikuzoorigami.com/standard-origami-modular-star/">http://www.ikuzoorigami.com/standard-origami-modular-star/</a> . . . . .	34
2.19	Pavimentações do plano. Fonte: <a href="https://sites.google.com/site/nemesvv/pavimentações">https://sites.google.com/site/nemesvv/pavimentações</a> . . . . .	35

2.20	Arte: caleidoscópios. Fonte: <a href="http://jdieckmann.blogspot.com.br/2012-09-01-archive.html">http://jdieckmann.blogspot.com.br/2012-09-01-archive.html</a> . . . . .	35
2.21	Logomarcas. Fonte: <a href="http://jornalestrada.blogspot.com.br/20070819archive.html">http://jornalestrada.blogspot.com.br/20070819archive.html</a> . . . . .	35
2.22	Paisagismo e urbanismo: eixo monumental de Brasília. Fonte: <a href="http://viajarpelomundo.com.br/brasil-ia-principais-pontos-turisticos/">http://viajarpelomundo.com.br/brasil-ia-principais-pontos-turisticos/</a> . . . . .	36
2.23	Natureza: borboleta. Fonte: <a href="http://efacarregaldosal.blogspot.com.br/2010/10/matematica-e-natureza.html">http://efacarregaldosal.blogspot.com.br/2010/10/matematica-e-natureza.html</a> . . . . .	36
2.24	Fonte: <a href="https://catiaosorio.wordpress.com/2011/02/">https://catiaosorio.wordpress.com/2011/02/</a> . . . . .	36
2.25	Fonte: <a href="http://www.atractor.pt/simetria/matematica/materiais/exercicios.htm">http://www.atractor.pt/simetria/matematica/materiais/exercicios.htm</a> . . . . .	36
2.26	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.14, para a situação em que os pontos $A$ , $A'$ e $A''$ não são colineares. . . . .	37
2.27	Situação em que os pontos $A$ e $B' = \varphi(A'')$ estão do mesmo lado da reta $r$ . . . . .	38
2.28	Situação em que os pontos $A$ e $B = \varphi(A'')$ estão em lados opostos da reta $r$ . . . . .	38
2.29	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.14, para o caso em que os pontos $A$ , $A'$ e $A''$ são colineares. . . . .	39
2.30	Situação em que o ponto $B$ está fora da reta $t$ . . . . .	39
2.31	Situação em que $B$ e $B' = \varphi(B)$ estão em um mesmo lado da reta $t$ . . . . .	40
2.32	Situação em $B'$ e $B'' = \varphi(B)$ estão em lados opostos em relação à reta $t$ . . . . .	40
2.33	Ilustração representativa do caso em que $A$ e $A''$ são coincidentes. . . . .	41
2.34	$ABC$ é congruente a $EFG$ . . . . .	42
2.35	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.18. . . . .	44
2.36	$X'$ é resultado de uma homotetia em $X$ para o caso $k > 1$ . . . . .	46
2.37	Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.25. . . . .	46
2.38	$A'B'C'$ é semelhante a $ABC$ por uma homotetia. . . . .	47
2.39	$X'$ é resultado da homotetia inversa em $X$ . . . . .	48

2.40	$X'Y'Z'$ é semelhante a $XYZ$ por uma homotetia inversa. . . . .	48
2.41	Homotetias de circunferências. . . . .	49
2.42	Arte: pavimetações de Escher. Fonte: <a href="http://somenteboasnoticias.wordpress.com/2012/03/27/o-mundo-magico-de-escher-rj-a-exposicao-mais-vista-do-mundo-em-2011/">http://somenteboasnoticias.wordpress.com/2012/03/27/o-mundo-magico-de-escher-rj-a-exposicao-mais-vista-do-mundo-em-2011/</a> . . . . .	49
2.43	Fractais: triângulo de Sierpinski. Fonte: <a href="http://shadowlotus.wordpress.com/2007/05/29/fractales/">http://shadowlotus.wordpress.com/2007/05/29/fractales/</a> . . . . .	50
2.44	$ABCD$ é semelhante a $EFGH$ . . . . .	51
2.45	Translação em coordenadas. . . . .	52
2.46	Reflexão em relação a uma reta horizontal. . . . .	52
2.47	Reflexão em relação a uma reta vertical . . . . .	53
2.48	Reflexão em relação a uma reta que passa na origem. . . . .	54
2.49	Reflexão em relação a uma reta que não passa na origem. . . . .	55
2.50	Rotação em coordenadas na origem do sistema. . . . .	56
2.51	Rotação em coordenadas ao redor de um ponto fora da origem do sistema. . . . .	57
2.52	Homotetia com centro na origem do sistema coordenado . . . . .	58
2.53	Homotetia com centro fora da origem do sistema coordenado . . . . .	58
3.1	O <i>plano isométrico</i> . . . . .	61
3.2	Atividade proposta no <i>plano isométrico</i> que trabalha a translação. . . . .	65
3.3	Atividade proposta no <i>plano isométrico</i> que trabalha a reflexão deslizante. . . . .	65
3.4	Atividade proposta no <i>plano isométrico</i> que trabalha rotação e translação. . . . .	66
3.5	Atividade proposta no <i>plano isométrico</i> que trabalha rotação-translação-reflexão . . . . .	66
3.6	Atividade proposta no <i>plano isométrico</i> que trabalha a reflexão. . . . .	67
3.7	$ABC$ é congruente a $EFG$ via translação. . . . .	71
3.8	$ABC$ é semelhante a $EFG$ via homotetia. . . . .	71
3.9	Aba das isometrias e da homotetia no GeoGebra. . . . .	72

3.10	EFG é resultado de uma translação de ABC. . . . .	73
3.11	EFG é resultado de uma homotetia de ABC. . . . .	74
3.12	A figura FGHIJ é reflexão da figura ABCDE. . . . .	76
3.13	A figura EFGH é rotação da figura ABCD. . . . .	76
3.14	Atividade 1 de congruências aplicada no GeoGebra. . . . .	77
3.15	Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.14. . . . .	77
3.16	Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.14. . . . .	78
3.17	Atividade 2 de congruências aplicada no GeoGebra. . . . .	78
3.18	Resultado da atividade proposta na Figura 3.17. . . . .	79
3.19	Atividade 3 de congruências aplicada no GeoGebra. . . . .	79
3.20	Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.19. . . . .	80
3.21	Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.19. . . . .	80
3.22	Atividade 4 de congruências aplicada no GeoGebra. . . . .	81
3.23	Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.22. . . . .	81
3.24	Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.22. . . . .	82
3.25	Quadrilátero ABCD é semelhante ao quadrilátero EFGH. . . . .	84
3.26	Atividade 1 de semelhanças aplicada no GeoGebra. . . . .	84
3.27	Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.26. . . . .	85
3.28	Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.26. . . . .	85
3.29	Atividade 2 de semelhanças aplicada no GeoGebra. . . . .	86
3.30	Resultado da atividade proposta na Figura 3.29. . . . .	86
3.31	Atividade 3 de semelhanças aplicada no GeoGebra. . . . .	87
3.32	Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.31. . . . .	87
3.33	Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.31. . . . .	88
3.34	Atividade 4 de semelhanças aplicada no GeoGebra. . . . .	88
3.35	Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.34. . . . .	89
3.36	Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.34. . . . .	89

# Índice

Introdução	1
<b>1 Congruência e semelhança de figuras geométricas planas</b>	<b>5</b>
1.1 Congruência de figuras geométricas planas . . . . .	7
1.2 Semelhança de figuras geométricas planas . . . . .	17
<b>2 Isometrias e homotetias no plano</b>	<b>21</b>
2.1 Isometrias no plano . . . . .	22
2.2 Homotetias no plano . . . . .	43
2.2.1 A transformação semelhança . . . . .	43
2.2.2 As homotetias . . . . .	45
2.3 As isometrias e homotetias enquanto coordenadas no plano . . . . .	51
<b>3 Propostas de atividades que exploram as isometrias e as homotetias no plano</b>	<b>60</b>
3.1 Trabalhando isometrias no <i>plano isométrico</i> . . . . .	61
3.2 Trabalhando isometrias e homotetias no GeoGebra . . . . .	68
3.2.1 Trabalhando isometrias no GeoGebra . . . . .	75
3.2.2 Trabalhando homotetias no GeoGebra . . . . .	83
Considerações Finais	91
Referências Bibliográficas	94

# Introdução

Um fato sobre o trabalho de conclusão de curso que eu deveria fazer para finalizar o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e que aqui apresento: ele trataria de um tema na área de geometria. Primeiro, porque sou um amante dessa área e, segundo, porque essa área tem sido um pouco esquecida pelos professores de matemática na educação básica. Sei que esse não é o momento e nem o espaço adequado para travar uma discussão sobre os motivos que levam o professor de matemática a não ensinar geometria na educação básica, mas, é indiscutível, que em qualquer um dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) do Ministério da Educação (MEC), seja do ensino fundamental ou do médio, conteúdos de geometria estão inseridos nos conteúdos de matemática que devem ser trabalhados junto aos alunos, em todas as séries.

Outro fato sobre esse trabalho de conclusão de curso é que eu deveria trazer propostas de materiais concretos para que fossem trabalhados com o tema escolhido da área de geometria. A justificativa é imediata, eu acredito que a utilização de materiais desse tipo nas aulas, auxiliam no processo de aprendizagem dos alunos.

Então, depois de pesquisar diversos temas dentro da área de geometria e depois de inúmeras conversas com o professor orientador, ele sugeriu um assunto pouco conhecido por mim, mas que achei muito interessante e que me chamou a atenção de imediato. Ao ler um pouco mais sobre esse assunto, percebi que os dois fatos sobre meu trabalho de conclusão do curso, acima citados, poderiam acontecer no estudo desse tema.

E esse tema é: congruência e semelhança de figuras geométricas planas, por meio

de transformações geométricas no plano. Para ser mais específico, congruência e semelhança de figuras geométricas planas, por meio de isometrias e homotetias no plano.

Num primeiro momento, a proposta era estudar a congruência e a semelhança das figuras geométricas, por meio dessas transformações geométricas no plano. Porém, com o andamento da pesquisa a proposta foi invertida, isto é, ela mudou para o estudo dessas transformações geométricas no plano, por meio da congruência e semelhança de figuras planas.

O que mais chamou a atenção nesse tema foi a possibilidade de entender a congruência e a semelhança de triângulos, de forma mais abrangente do que aquela que geralmente aparece nos livros didáticos do ensino básico e da qual estamos mais habituados, na qual dois triângulos são congruentes se tem os lados e ângulos internos correspondentes congruentes. Com essa abordagem, dois triângulos são congruentes, se for possível deslocar um deles continuamente pelo plano, até coincidir com o outro. O mesmo vale para o caso da semelhança de triângulos, acrescentando o movimento de ampliação ou de redução. O que torna possível deslocar e ampliar/reduzir uma figura até outra, são duas operações geométricas no plano, as isometrias e homotetias, conceitos que não são muito explorados no ensino de geometria, principalmente na educação básica, mas que apresentam muitas aplicabilidades. Algumas delas são citadas no decorrer do trabalho.

Perceba que usamos a palavra triângulos no parágrafo anterior. Isso porque também estamos habituados a atribuir congruência e semelhança somente a triângulos. Esse trabalho procura “quebrar” essa imagem, ao trabalhar a congruência e a semelhança de outras figuras planas também.

Afim de facilitar a compreensão dos conceitos dessas duas operações geométricas, as isometrias e as homotetias, algumas atividades envolvendo pares de figuras congruentes e semelhantes foram elaboradas.

Essas atividades, que foram posteriormente aplicadas, foram desenvolvidas para serem trabalhadas em duas frentes: uma que utiliza um material didático manipulável,

que foi desenvolvido pelo autor e chamado de *plano isométrico*, e outra que utiliza o computador, mais especificamente, o *software* GeoGebra<sup>1</sup>. Assim como defendemos a utilização de materiais concretos no ensino de matemática, também defendemos a utilização de tecnologias de informática no ensino de matemática.

Assim sendo, no Capítulo 1, as definições de congruência e semelhança de figuras planas, via isometrias e homotetias, são apresentadas, confrontando com as definições das quais estamos habituados. As isometrias e as homotetias também são apresentadas nesse capítulo.

Porém, é no Capítulo 2, que essas isometrias e essas homotetias são detalhadamente exploradas. Nele, as principais propriedades, bem como algumas aplicabilidades, são apresentadas. Primeiramente, as isometrias são abordadas e, em seguida, as homotetias. Ao final do capítulo, uma rápida discussão dessas transformações geométricas enquanto coordenadas do plano é apresentada.

Esses dois primeiros capítulos não apresentam maiores novidades sobre o tema, pois tratam de um apanhado bibliográfico sobre as transformações geométricas no plano envolvendo congruências e semelhanças de figuras planas. Na verdade, chamar de apanhado bibliográfico é até um abuso de expressão, dado que os trabalhos que deram a base para esses dois capítulos, foram os de Lima (2006, 2007, 2008 e 2013).

As novidades aparecem no Capítulo 3, em que algumas atividades para que essas transformações geométricas sejam trabalhadas são propostas. Julgamos importante ressaltar novamente a dinâmica dessas atividades: dois pares de figuras congruentes, ou semelhantes, são dados, e os alunos tem que identificar quais são as isometrias e/ou homotetias que “garantem” essa congruência, ou semelhança.

Basicamente falando, esse capítulo está dividido em duas partes bem definidas. Inicialmente, o *plano isométrico*, material concreto desenvolvido para trabalhar especificamente com isometrias, é apresentado. Uma discussão acerca das atividades propostas

---

<sup>1</sup>*Software* livre de matemática dinâmica que foi elaborado por Markus Hohenwarter e equipe, que reúne elementos de geometria, álgebra e cálculo.

nesse material e os resultados obtidos vem em seguida. Num segundo momento, as atividades no GeoGebra são apresentadas. O objetivo dessas atividades é trabalhar as isometrias e também as homotetias. Claramente que uma discussão acerca da aplicação dessas atividades também é apresentada nesse capítulo.

De antemão, podemos dizer que os resultados obtidos pela ocasião da aplicação dessas atividades foram, digamos.... Não! Melhor não! Melhor não dizer nada agora. Sinta-se convidado a descobrir que resultados foram esses, ou, antes disso, que atividades foram essas, chegando até às considerações finais desse trabalho, cujo objetivo principal, é ensinar as isometrias e homotetias no plano, por meio da congruência e semelhança de figuras planas, tendo como ferramentas para esse fim, o *plano isométrico* e o *software* GeoGebra.

# Capítulo 1

## Congruência e semelhança de figuras geométricas planas

Neste capítulo serão apresentadas definições de congruência e semelhança de figuras planas, a partir de transformações geométricas do plano. Logo, as transformações geométricas no plano serão aqui apresentadas.

Nesse momento, não haverá a preocupação de formalização dos conceitos ou, até mesmo, demonstração de algumas propriedades que serão citadas. Tal formalização virá logo em seguida, no Capítulo 2.

Antes de começarmos, porém, faz-se necessário, para facilitar a leitura, apresentar algumas das notações que serão empregadas no decorrer do texto, embora elas sigam o padrão da maioria dos livros de geometria encontrados na literatura.

Nesse sentido, serão utilizadas letras maiúsculas e minúsculas do nosso alfabeto, o latino, para designar pontos e retas, respectivamente, e letras minúsculas do alfabeto grego para designar planos. Essas últimas também serão utilizadas para designar ângulos.

No caso dos segmentos de reta, utilizaremos os pontos de suas extremidades para indicá-los. Como exemplo, se um segmento de reta tem  $P$  e  $Q$  como extremos, então  $PQ$  será a notação para esse segmento. Claro que se um ponto  $A$  pertence a esse segmento e difere de  $P$  e  $Q$ , então  $A$  está entre os pontos  $P$  e  $Q$ , cuja indicação será  $P^*A^*Q$ . Assim sendo, o símbolo  $*$  (asterisco) sempre será utilizado para indicar a ordenação dos pontos,

seja numa reta, num segmento de reta ou numa semirreta. Falando em semirretas, sua indicação levará em conta o ponto de origem e o ponto que dá sentido a ela. Como exemplo, a semirreta que tem o ponto  $P$  como origem e tem o sentido do ponto  $Q$  será indicada por  $S_{PQ}$ .

Ao considerarmos duas semirretas de mesma origem, estamos falando de ângulos, que, como já foi citado anteriormente, tem letras gregas minúsculas por notação. Porém, utilizaremos também outra notação para indicar ângulos, que envolvem os pontos indicadores das semirretas que o compõe. Se, por exemplo, o ângulo é formado pelas semirretas  $S_{OA}$  e  $S_{OB}$ , então o indicaremos por  $A\hat{O}B$ . Vale esclarecer que, geralmente, as letras gregas são empregadas para indicar a medida do ângulo, embora, nesse trabalho, elas não terão especificamente essa função.

Por falar em medidas, sempre que o segmento aparecer com uma barra sobre as letras que o denominam, então estaremos tratando da medida do segmento (ou do comprimento do segmento). Assim sendo,  $\overline{PQ}$  representa o comprimento do segmento  $PQ$ . Claramente que o comprimento de um segmento e a distância entre os pontos extremantes desse segmento representam a mesma medida (mesmo número). Inclusive, a distância entre dois pontos sempre será indicada por  $d$ . No nosso exemplo anterior,  $d(P, Q)$  será a distância de  $P$  até  $Q$  e, ainda,  $d(P, Q) = \overline{PQ}$ .

Caso dois segmentos ou dois ângulos tenham a mesma medida, então eles são congruentes e, a notação para congruentes, será o símbolo  $\equiv$ . Logo, supondo que os segmentos  $AB$  e  $PQ$  tenham a mesma medida, então significa que  $AB$  é congruente com  $PQ$ , ou seja,  $AB \equiv PQ$  (ou, equivalentemente,  $\overline{AB} = \overline{PQ}$ , ou, ainda,  $d(AB) = d(PQ)$ ). Da mesma forma, se dois ângulos  $A\hat{O}B$  e  $P\hat{E}Q$  têm a mesma medida, dizemos que eles são congruentes, e denotamos por  $A\hat{O}B \equiv P\hat{E}Q$ .

Claro que o conceito de congruência não se resume apenas a segmentos ou ângulos, mas a qualquer figura geométrica, incluindo os polígonos e, para indicar polígonos (triângulos, quadrados, pentágonos, etc), vamos utilizar os pontos que representam os

seus vértices. Afim de exemplificar, um triângulo que tem por vértices os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , será indicado por  $ABC$ ; um quadrilátero que tem por vértices os pontos  $M$ ,  $N$ ,  $O$  e  $P$ , será indicado por  $MNOP$ ; e assim sucessivamente.

Ainda sobre a congruência de triângulos, vale ressaltar aqui os casos de congruência, uma vez que alguns deles serão utilizados no decorrer do texto. São eles, LAL (Lado-Ângulo-Lado), LLL (Lado-Lado-Lado), ALA (Ângulo-Lado-Ângulo) e LAA (Lado-Ângulo-Ângulo), além, claro, do caso especial de congruência de triângulos retângulos, CH (Cateto-Hipotenusa).

Impossível falar de congruência de triângulos e não se lembrar da semelhança de triângulos, cuja representação para semelhante será o símbolo  $\sim$ . Logo, a notação  $ABC \sim EFG$  nos diz que o triângulo de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  é semelhante ao triângulo de vértices  $E$ ,  $F$  e  $G$ . Assim como na congruência, vale lembrar os casos de semelhança de triângulos, AA (Ângulo-Ângulo), PPP (Lado proporcional-Lado proporcional-Lado proporcional) e PAP (Lado proporcional-Ângulo-Lado proporcional).

E, para fechar essa parte de terminologias, falaremos da notação vetorial, uma vez que vetores vão aparecer com certa frequência no decorrer do texto. Para tal, utilizaremos a notação usual  $\vec{v}$ , isto é, a “setinha” para indicar o vetor. Caso se queira indicar o vetor que tem origem num ponto e extremidade num outro ponto, por exemplo, origem no ponto  $A$  e extremidade no ponto  $B$ , então a representação será  $\overrightarrow{AB}$ .

Circunferências e outras figuras (não poligonais) não terão representações específicas nesse texto e, caso alguma terminologia diferente das anteriormente apontadas apareça, ela será devidamente apresentada.

## 1.1 Congruência de figuras geométricas planas

Geralmente o conceito de congruência de figuras planas aparece na literatura de forma restrita à congruência de triângulos. E, em praticamente todos os livros didáticos de geometria, esse conceito de congruência de triângulos é formalizado via congruência

dos lados e ângulos internos do triângulo.

Afim de exemplificar, Barbosa (2006), define a congruência de triângulos como: “dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes” (p. 45). A partir dessa definição, os casos de congruência de triângulos passam a ser explorados, depois de admitir o caso ‘LAL’ como um axioma.

E, mesmo na educação básica, essa forma de definir congruência de triângulos é a que prevalece. Como exemplo, basta olhar a definição dada por Dolce e Pompeo (2005):

“Um triângulo é congruente (símbolo  $\equiv$ ) a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que: seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro e seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.” (DOLCE e POMPEO, 2005, p. 38)

Já Muniz Neto (2013 a), apresenta uma definição um pouco diferente: “dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles pelo espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro” (p. 25). Logo após essa definição, os casos de congruência de triângulos são abordados.

Diante dessa pluralidade de definições, fomos buscar uma definição dada pelo próprio Euclides<sup>1</sup>. Para isso, buscamos um registro mais antigo: ‘Os elementos’ de Euclides. Nele, Euclides não define a congruência de triângulos, mas no decorrer do Livro I, cita proposições relativas aos casos de congruência de triângulos, bem como apresenta a demonstração. Segundo ele:

---

<sup>1</sup>Matemático grego, que foi diretor da área de Matemática do Museu de Alexandria. Considerado o maior geômetra de todos os tempos, ensinou geometria e escreveu ‘Os Elementos’ (livro mais famoso da matemática), além de outros títulos, por volta de 300 a. C..

“Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais.” (EUCLIDES, 2009, p. 101)

A demonstração é apresentada em seguida, desse que seria o caso ‘LAL’ de congruência de triângulos. Perceba que o ‘igual’ que aparece na proposição tem o sentido de congruência.

Citamos essa proposição para dizer que, embora Euclides não tenha definido a congruência de triângulos, a escrita dessa proposição sugere que ele entendia a congruência de triângulos como a definida por Barbosa (2006), anteriormente citada. Repetindo, a escrita SUGERE. Trata-se aqui de uma opinião particular.

Ainda no âmbito de opinião particular, consideramos que a definição dada por Muniz Neto (2013 a) se torna mais adequada, uma vez que com ela, o conceito de congruência pode ser expandido para todo o grupo de figuras planas. Isso porque a definição que utiliza a congruência de lados e ângulos pode ser utilizada apenas a polígonos, desconsiderando, por exemplo, figuras como a Figura 1.1 <sup>2</sup>.

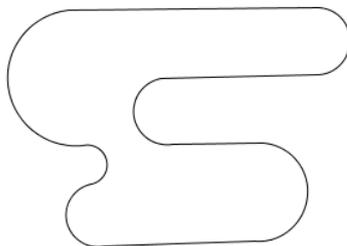


Figura 1.1: Figura plana não poligonal.

Assim sendo, segue a definição de congruência de figuras geométricas planas que consideramos ser a mais adequada e que será usada nesse trabalho:

---

<sup>2</sup>As figuras desse trabalho, com exceção das fotos e das imagens retiradas da internet, foram confeccionadas no GeoGebra pelo autor, adaptadas de [6], [8] e [9].

**Definição 1.1.** Duas figuras geométricas planas são ditas *congruentes* se, por meio de movimentações livres pelo espaço, for possível mover uma delas, sem deformá-la, até fazê-la coincidir com a outra.

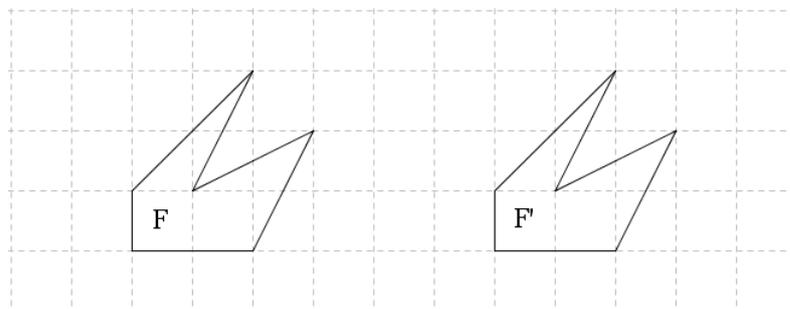


Figura 1.2:  $F'$  é resultado do deslocamento horizontal de  $F$ .

A definição fica clara quando é observada a Figura 1.2. Nela, o polígono  $F$  é congruente com o polígono  $F'$ , pois é fácil perceber que basta fazer um pequeno deslocamento horizontal de  $F$  para fazê-la, sem deformá-la, coincidir com  $F'$ .

Surge, então, uma pergunta natural: Como fazer para movimentar figuras? Existem, basicamente, três maneiras de movimentar figuras sem deformá-las, a saber, elas podem ser transladadas, refletidas ou rotacionadas. Vale salientar que outros tipos de movimentos podem ser efetuados, mas como veremos mais adiante, trata-se de composições desses três movimentos. Vamos, então, conhecer cada um deles.

**Definição 1.2.** Quando todos os pontos de uma figura geométrica sofrem um deslocamento de mesma distância, direção e sentido, então o movimento dado à figura é denominado *translação*.

Perceba que esse foi exatamente o movimento efetuado de  $F$  para  $F'$  na Figura 1.2.

**Definição 1.3.** Quando todos os pontos de uma figura geométrica são refletidos em relação a uma reta fixa, então o movimento dado à figura é denominado *reflexão* em relação à reta em questão.

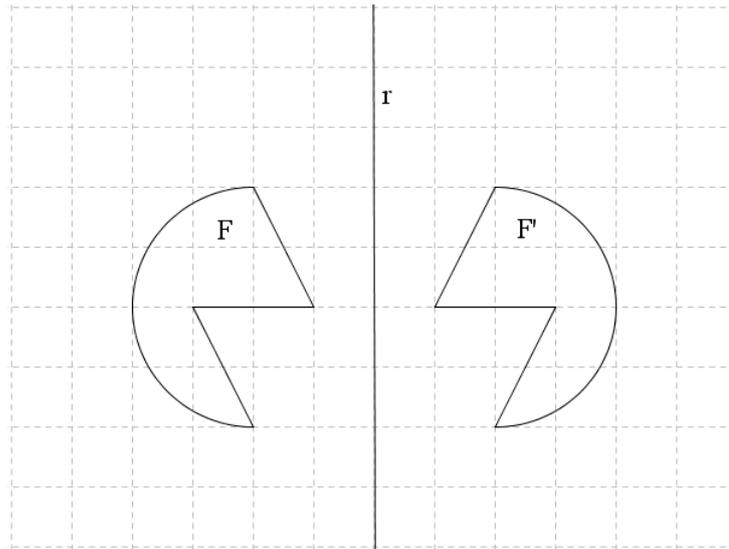


Figura 1.3:  $F'$  é a reflexão de  $F$  em relação a reta  $r$ .

A Figura 1.3 apresenta a figura geométrica  $F'$  como resultado de uma reflexão em relação à reta  $r$ , da figura geométrica  $F$ .

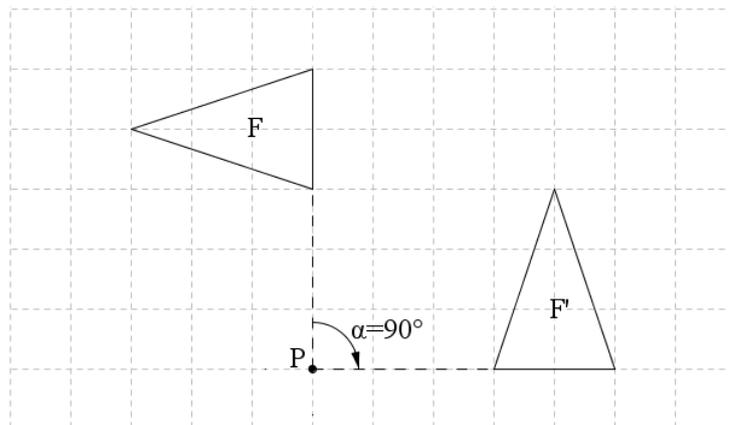


Figura 1.4:  $F'$  é a rotação de  $F$  sob ângulo de  $90^\circ$  em torno do ponto  $P$ .

**Definição 1.4.** Quando todos os pontos de uma figura rodam um mesmo ângulo em torno de um ponto fixo, preservando as distâncias em relação a este ponto, então o movimento dado à figura é denominado *rotação*.

Observe que na Figura 1.4, considerando o ponto fixo  $P$ , o triângulo  $F$  sofre uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário, resultando no triângulo  $F'$ .

Note que cada um desses movimentos levam pontos do plano em outros pontos

do plano, sob determinada condição. Logo, esses movimentos são pensadas como transformações (ou funções) do plano no plano. Essas são ditas transformações geométricas no plano.

**Definição 1.5.** Uma *transformação geométrica no plano* é uma função que faz corresponder a cada ponto do plano outro ponto do plano. Em outras palavras, dado o plano  $\pi$ , uma transformação geométrica é uma função  $\varphi : \pi \rightarrow \pi$ , que associa a cada ponto  $P \in \pi$  outro ponto  $Q = \varphi(P) \in \pi$ .

Na definição acima,  $Q$  é a *imagem* de  $P$  pela transformação  $\varphi$ . Nesse sentido, cada uma das figuras  $F'$  das Figuras 1.2, 1.3 e 1.4, anteriormente apresentadas, são as imagens de uma transformação geométrica aplicada nos pontos correspondentes das figuras  $F$ .

Assim sendo, torna-se importante conhecer um pouco mais sobre essas transformações geométricas. Começamos dizendo que uma transformação geométrica  $\varphi$  no plano  $\pi$  pode ser classificada como:

- Definição 1.6.** i) *Injetiva*: quando dois pontos distintos quaisquer  $P, P_1 \in \pi$  sempre tem imagens  $\varphi(P)$  e  $\varphi(P_1)$  distintas, isto é, se  $P \neq P_1$ , então  $\varphi(P) \neq \varphi(P_1)$ . Equivalentemente,  $\varphi$  é injetiva quando  $\varphi(P) = \varphi(P_1)$ , então  $P = P_1$ .
- ii) *Sobrejetiva*: quando todo ponto  $P_1 \in \pi$  é imagem de pelo menos um ponto  $P \in \pi$ , isto é, para qualquer ponto  $P_1 \in \pi$ , existe um ponto  $P \in \pi$ , tal que  $\varphi(P) = P_1$ .
- iii) *Bijetiva*: quando  $\varphi$  é injetiva e sobrejetiva, isto é, para qualquer ponto  $P_1 \in \pi$ , existe um único ponto  $P \in \pi$ , tal que  $\varphi(P) = P_1$ .

Toda transformação bijetiva do plano admite uma transformação inversa, a qual é apresentada na próxima definição.

**Definição 1.7.** Dada uma transformação geométrica bijetiva  $\varphi : \pi \rightarrow \pi$ , a *transformação inversa*  $\varphi^{-1} : \pi \rightarrow \pi$  é tal que para qualquer ponto  $P_1 \in \pi$ , sua imagem  $\varphi^{-1}(P_1)$  é um único ponto  $P \in \pi$ , sendo que  $\varphi(P) = P_1$ .

Um exemplo de transformação do plano bijetiva é a *transformação identidade*, indicada por  $I$ , onde para qualquer ponto  $P \in \pi$ , a imagem de  $P$  por  $I$  é o próprio  $P$ , isto é,  $I : \pi \longrightarrow \pi$  é tal que  $I(P) = P$ , para todo  $P \in \pi$ .

**Definição 1.8.** Dadas duas transformações  $\varphi, \psi : \pi \longrightarrow \pi$  no plano, a *composta*  $\varphi \circ \psi : \pi \longrightarrow \pi$  é a transformação que associa a cada ponto  $P$  de  $\pi$  o ponto  $\varphi(\psi(P))$  de  $\pi$ , isto é,  $(\varphi \circ \psi)(P) = \varphi(\psi(P))$ .

Claramente que se uma transformação  $\varphi : \pi \longrightarrow \pi$  é bijetiva, então  $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = I$ , sendo  $I$  a transformação identidade.

Perceba que é a composição dessas transformações quem viabiliza “aumentar” o número de movimentos das figuras no plano, fato que já tinha sido anteriormente mencionado.

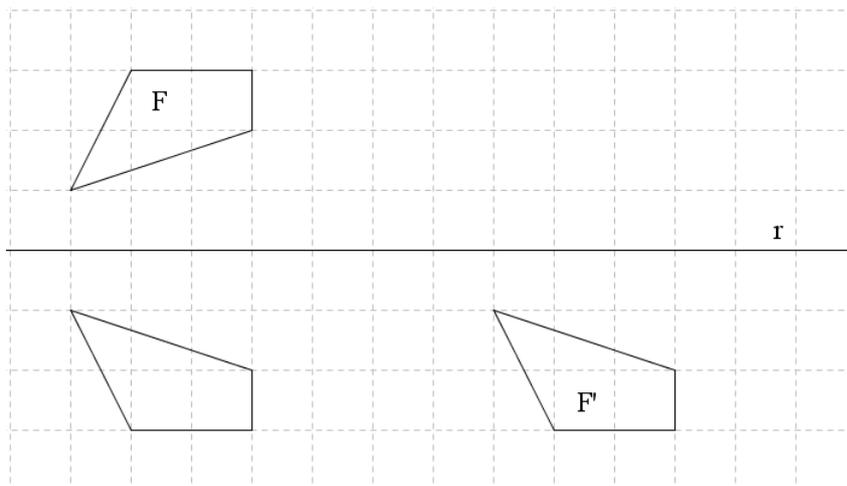


Figura 1.5:  $F'$  é uma reflexão seguida de uma translação de  $F$ .

Na Figura 1.5, o polígono  $F'$  é imagem de uma composição de uma reflexão do polígono  $F$  em relação à reta  $r$ , seguida de uma translação horizontal. Essa composição, que é bastante recorrente nas movimentações de figuras no plano, recebe um nome especial.

**Definição 1.9.** Quando todos os pontos de uma figura geométrica sofrem uma reflexão em relação a uma reta dada, seguida de uma translação, então o movimento dado à figura é denominado *reflexão deslizante*.

Nosso trabalho agora, será redefinir a translação, a reflexão, a rotação e reflexão deslizante, levando em conta essa nova linguagem das transformações geométricas no plano. Assim sendo, vamos reescrever a translação como sendo a transformação geométrica  $T_{AB} : \pi \rightarrow \pi$  do plano  $\pi$ , onde dado  $X \in \pi$ , sua imagem  $X' = T_{AB}(X)$  é o quarto vértice do paralelogramo que tem  $AB$  e  $AX$  como lados.

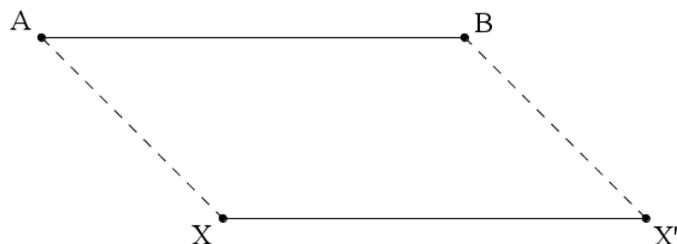


Figura 1.6:  $XX'$  é resultado de uma translação de  $AB$ .

Ressaltamos que  $T_{AB}(X)$  assim definida vale apenas para o caso em que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $X$  são não colineares, embora, no caso em que eles são colineares, trata-se ainda de uma translação, só que na reta. Nesse trabalho não trataremos das translações na reta, logo, para maiores detalhes, sugerimos [8].

Outro fato importante que deve ser observado na definição da  $T_{AB}$ , é que a ordem em que os pontos  $A$  e  $B$  foram mencionados deve ser levado em consideração, dado que  $T_{AB}$  é diferente da  $T_{BA}$ , embora  $AB = BA$ . Nesse caso,  $T_{BA} = (T_{AB})^{-1}$ .

Outra forma de pensar a translação, é utilizar a notação vetorial para caracterizá-la, isto é, ao considerar o vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , então podemos admitir  $T_{AB} = T_{\vec{v}}$ . Uma justificativa para essa notação vetorial da translação é que dados o segmento orientado  $AB$  e o ponto  $P$ ,  $P \notin AB$ , no plano  $\pi$ , existe um único ponto  $Q \in \pi$  tal que os segmentos orientados  $AB$  e  $PQ$  são equipolentes, isto é,  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$  (que é a definição de vetores). Geometricamente falando,  $Q$  é o quarto vértice do paralelogramo que tem  $AB$  e  $AP$  como lados. Logo podemos escrever  $Q = P + \vec{v}$ , o que significa que o vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  transportou o ponto  $P$  para a posição  $Q$ , ou seja,  $Q = T_{AB}(P) = T_{\vec{v}}(P)$ .

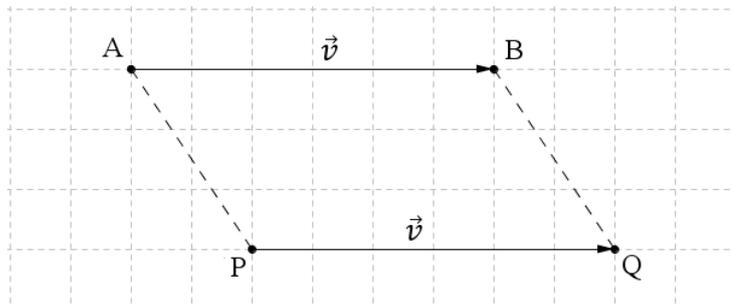


Figura 1.7: Q é obtido pela translação de P segundo  $\vec{v}$ .

Como sabemos, dois vetores no plano podem ser somados e subtraídos e, geometricamente falando, essa soma e essa subtração (em módulo) representam as diagonais do paralelogramo formado por esses dois vetores. Diante disso, fica fácil entender como funciona a composição das translações no plano. Dados os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , então o ponto D, tal que  $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$ , é o quarto vértice do paralelogramo formado pelo vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Logo  $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$ .

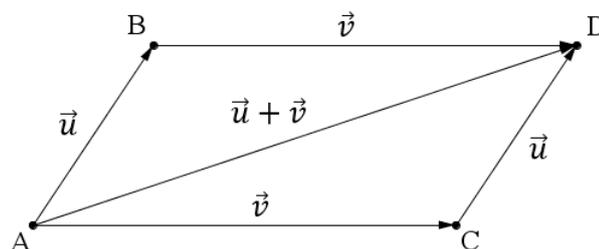


Figura 1.8: D é obtido por uma composição de translações.

Perceba que, por definição, se  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , então  $\overrightarrow{CA} = -\vec{v}$ , logo, é natural conceber que  $(T_{\vec{v}})^{-1} = T_{-\vec{v}}$ .

Passamos agora a tratar da reflexão em relação a uma reta, que, uma vez fixada uma reta  $r$  de  $\pi$ , será a transformação geométrica  $R_r : \pi \rightarrow \pi$ , onde  $R_r(X) = X$ , se  $X \in r$ , e  $R_r(X) = X'$ , se  $X \notin r$  e a reta  $r$  é mediatriz do segmento  $XX'$ .

Note na Figura 1.9 que o ponto Y, interseção de  $XX'$  e  $r$ , é o ponto médio de  $XX'$ , dado que  $r$  é a mediatriz do mesmo. Note também que  $R_r(R_r(X)) = X$ , isto é,  $R_r \circ R_r = I$ , sendo  $I$  a transformação identidade. Logo, isso é equivalente a dizer que

$$R_r^{-1} = R_r.$$

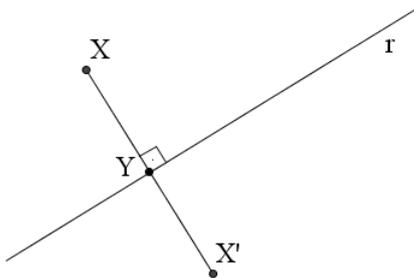


Figura 1.9:  $XX'$  é resultado de uma reflexão de  $X$  em relação à  $r$ .

Antes de fechar essa parte, é importante dizer que o ponto  $X'$ , obtido pela reflexão de  $X$  em relação à  $r$ , pode ser também chamado de simétrico de  $X$  em relação à  $r$ . Na reta, podemos encontrar o simétrico de um ponto, em relação a outro ponto distinto desse.

Para redefinir a rotação, vamos considerar um ponto  $O$  do plano  $\pi$  e  $\alpha = \widehat{AOB}$  um ângulo com vértice em  $O$ . Assim, a rotação do ângulo  $\alpha$  em torno do ponto  $O$  será a transformação geométrica  $\rho_{O,\alpha} : \pi \rightarrow \pi$ , onde  $\rho_{O,\alpha}(O) = O$  e, para todo ponto  $X \neq O$ ,  $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$  é o ponto de  $\pi$  tal que  $d(X, O) = d(X', O)$ ,  $\widehat{XOX'} = \alpha$  e o “sentido de rotação” de  $X$  para  $X'$  é o mesmo de  $A$  para  $B$ .

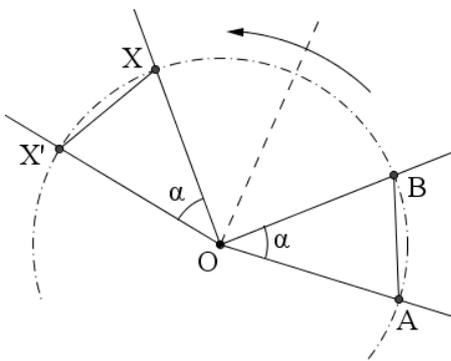


Figura 1.10:  $XX'$  é resultado de uma rotação de  $AB$  ao redor do ponto  $O$ .

É importante esclarecer sobre o sentido de rotação acima citado, que está intimamente ligado à ordem das semiretas  $S_{OA}$  e  $S_{OB}$ . Ao considerar  $S_{OA}$  como sendo a primeira e  $S_{OB}$  como sendo a segunda, então o ângulo  $\alpha = \widehat{AOB}$  torna-se orientado de

$S_{OA}$  para  $S_{OB}$  e a rotação segue nesse sentido de orientação. Geometricamente falando, dizer que a rotação deve ter o mesmo sentido, significa dizer que os ângulos  $X'\widehat{OA}$  e  $X\widehat{OB}$  devem ter a mesma bissetriz.

Também é importante ressaltar que ao considerar a orientação contrária da estabelecida, isto é, ao considerar primeiramente  $S_{OB}$ , então o ângulo que estabelece a orientação passa a ser o ângulo  $B\widehat{OA}$ , que indicaremos por  $-\alpha$  e, assim,  $\rho_{O,-\alpha} = (\rho_{O,\alpha})^{-1}$ .

Falta então, ver como fica a definição da reflexão deslizante. Para isso, sejam  $\vec{v}$  um vetor não-nulo e  $r$  uma reta paralela a  $\vec{v}$  no plano  $\pi$ . Assim, a reflexão deslizante é a transformação geométrica  $TR = T_{\vec{v}} \circ R_r : \pi \rightarrow \pi$ , obtida fazendo a translação  $T_{\vec{v}}$  seguir-se à reflexão  $R_r$ . A Figura 1.11 mostra o ponto  $X'$ , imagem de  $X$  pela  $TR$ .

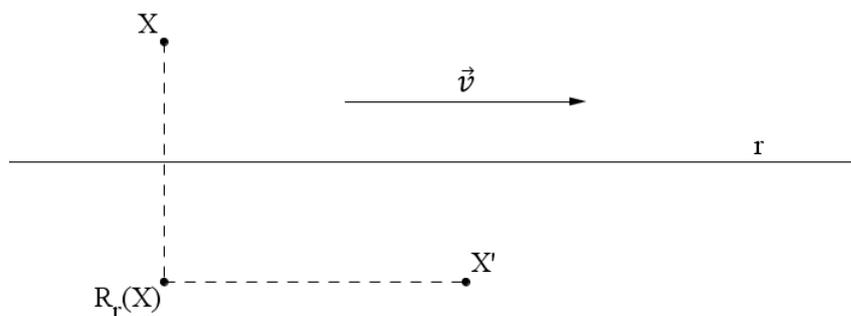


Figura 1.11:  $X'$  é resultado da translação seguida da reflexão em relação a  $r$  de  $X$ .

É importante dizer que  $T_{\vec{v}} \circ R_r = R_r \circ T_{\vec{v}}$ , devido ao fato de que  $\vec{v}$  é paralelo a  $r$  e, com essa informação, fechamos as “redefinições” das transformações geométricas que possibilitam fazer movimentações de figuras pelo plano.

Na verdade, dizemos que essas transformações geométricas no plano tratam-se, na realidade, de isometrias no plano, assunto que será abordado no próximo capítulo.

## 1.2 Semelhança de figuras geométricas planas

Assim como no caso da congruência de figuras planas, a semelhança também aparece na literatura de forma restrita à semelhança de triângulos. E, da mesma forma que na congruência, em praticamente todos os livros didáticos de geometria, o conceito

de semelhança de triângulos é formalizado via congruência dos ângulos internos e a proporcionalidade dos lados do triângulo.

Vamos novamente tomar como exemplo, Barbosa (2006). Nele, o autor define a semelhança de triângulos como: “diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais” (p. 109). A partir dessa definição, os casos de semelhança de triângulos passam a ser explorados.

Recorremos novamente a Dolce e Pompeo (2005), para verificar que na educação básica a definição de semelhança também é dada como anteriormente. Segundo eles: “dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais” (p. 198).

Será que Muniz Neto (2013 a) apresenta uma a definição de semalhança diferenciada, como foi no caso da congruência? Segundo o autor:

“Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um triângulo e o outro de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.” (MUNIZ NETO, 2013 a, p. 148)

Depois que essa definição é apresentada, os casos de semelhança de triângulos são explorados. Ou seja, mesmo Muniz Neto (2013 a), que havia apresentado uma definição de congruência de triângulos diferenciada, a definição de semelhança segue como nos demais livros. Porém, logo depois da definição, o autor faz um comentário interessante, a saber: “fisicamente, dois triângulos são semelhantes se pudermos dilatar e/ou girar e/ou refletir e/ou transladar um deles, obtendo o outro ao final de tais operações” (p. 148). Veja que esse comentário apresenta algumas transformações geométricas que já foram aqui trabalhadas.

Em ‘Os elementos’ de Euclides, no livro VI, o autor, diferentemente da congruência de triângulos, dá uma definição de semelhança de triângulos. Segundo ele, “figuras retilíneas semelhantes são quantas têm tantos os ângulos iguais, um a um, quantos os lados ao redor dos ângulos iguais em proporção” (p. 231). Perceba então, que a definição dada por Euclides, vai a encontro da definição que aparece nos livros didáticos atuais, porém, abrangendo um conjunto maior de figuras, que seriam as figuras retilíneas.

No Livro I de ‘Os elementos’, Euclides dá a seguinte definição para figuras retilíneas:

“Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três lados, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.” (EUCLIDES, 2009, pg. 98)

Em linguagem atual, essas figuras retilíneas são os polígonos. Mas e as figuras que não são retilíneas, como a Figura 1.1? Afim de contemplar todos os tipos de figuras, segue, como fizemos no caso da congruência de triângulos, a definição de semelhança de figuras geométricas planas que consideramos ser a mais adequada:

**Definição 1.10.** Se duas figuras planas ficam exatamente uma sobre a outra por meio de movimentações livres e/ou ampliações e reduções sobre as figuras, então elas são ditas *semelhantes*.

A definição fica clara quando é observada a Figura 1.12. Nela, o polígono F é semelhante ao polígono F’, pois é fácil perceber que F foi ampliado continuamente até obtermos F’. Perceba que isso vai a encontro do comentário feito por Muniz Neto (2013 a).

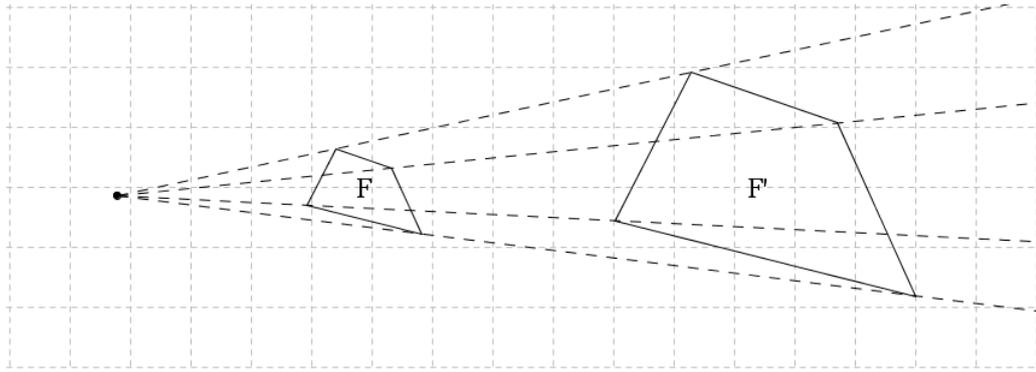


Figura 1.12:  $F'$  é resultado de uma ampliação de  $F$ .

Surge então a necessidade de estudar melhor essas “ampliações” ou “reduções” no plano, que, a exemplo das movimentações no plano estudadas na seção anterior, são transformações geométricas no plano. Essas transformações geométricas que tem a função de dilatar ou reduzir continuamente as figuras, recebem o nome de homotetias, que serão detalhadamente estudadas no próximo capítulo.

# Capítulo 2

## Isometrias e homotetias no plano

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos de isometrias e homotetias no plano, os quais abrangem tudo que foi apresentado no capítulo anterior.

Na seção 2.1, trataremos especificamente das isometrias no plano, buscando formalizar o conceito de congruência apresentado anteriormente. A seguir, na seção 2.2, vamos conhecer as homotetias no plano que, como veremos, trata-se de um caso especial da transformação semelhança no plano. Claramente que essa seção visa dar sentido à definição de semelhança de figuras dada no capítulo anterior. Na seção 2.3 que fecha o capítulo, veremos as isometrias e as homotetias tratadas de forma analítica, isto é, enquanto coordenadas do plano.

Gostaria de ressaltar que esse capítulo trata-se de uma interpretação livre dos livros [8] e [9] do Elon Lages Lima, embora, algumas demonstrações foram modificadas para facilitar o entendimento das mesmas. Inclusive nesses livros, é possível encontrar resultados sobre as isometrias na reta que serão utilizados no decorrer do texto, mas não serão nele apresentados.

Várias demonstrações que serão apresentadas no decorrer do capítulo utilizam diversos resultados da geometria Euclidiana plana que não serão aqui apresentados, porém eles podem ser encontrados em [1], [11] e [12]. O mesmo vale para os conceitos e resultados de geometria analítica que vão aparecer no final do capítulo, que podem ser encontrados

nos livros [6] e [7] do Elon Lages Lima.

## 2.1 Isometrias no plano

**Definição 2.1.** Uma *isometria no plano*  $\pi$  é uma transformação geométrica  $\varphi : \pi \longrightarrow \pi$  que preserva distâncias. Em outras palavras, sendo  $A$  e  $B$  pontos distintos de  $\pi$ , então  $d(A, B) = d(A', B')$ , onde  $A' = \varphi(A)$  e  $B' = \varphi(B)$  também são pontos distintos de  $\pi$ .

Equivalentemente, para quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $B$  de  $\pi$ , tem-se  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .

**Proposição 2.2.** *Toda isometria  $\varphi : \pi \longrightarrow \pi$  transforma retas em retas.*

**Demonstração.** Com efeito, considere uma reta  $r$  em  $\pi$  e sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos de  $r$ . Considere também a reta  $r'$  que contém os pontos distintos  $A' = \varphi(A)$  e  $B' = \varphi(B)$ . Qualquer ponto  $X$  de  $r$  é tal que um dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $X$  está entre os outros dois. Vamos supor, sem perda de generalidade, que  $X^*A^*B$ , então  $\overline{XB} = \overline{XA} + \overline{AB}$ . Logo, fazendo  $X' = \varphi(X)$ , então  $\overline{X'B'} = \overline{XB} = \overline{XA} + \overline{AB} = \overline{X'A'} + \overline{A'B'}$ , o que significa que  $X'^*A'^*B'$  e, portanto, concluímos que  $X'$ ,  $A'$  e  $B'$  são colineares. Logo, qualquer  $X$  em  $r$  implica  $X'$  em  $r'$ , o que mostra que a restrição  $\varphi$  a  $r$  é uma isometria entre  $r$  e  $r'$ . Mas como toda isometria na reta é sobrejetiva (ver a parte de isometrias na reta referência [8]), segue que  $\varphi(r) = r'$ . ■

**Proposição 2.3.** *Toda isometria  $\varphi : \pi \longrightarrow \pi$  transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

**Demonstração.**

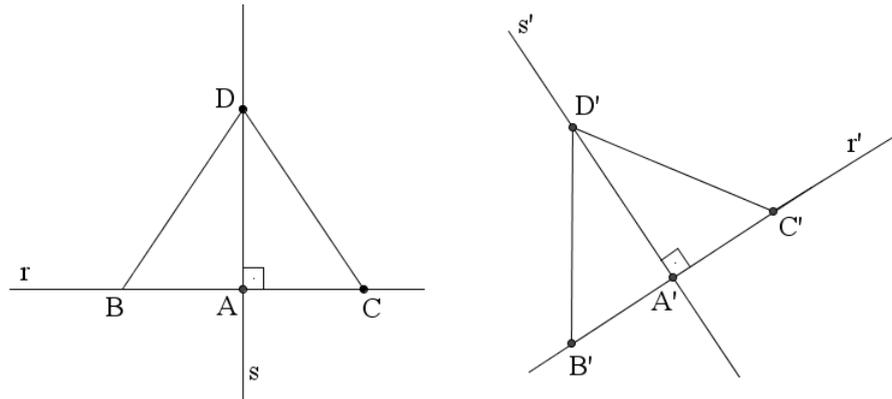


Figura 2.1: Ilustração representativa para demonstração da Proposição 2.3.

Consideremos as retas perpendiculares  $r$  e  $s$  no plano  $\pi$ , cuja interseção entre as duas é o ponto  $A$ . Tome os pontos  $B$  e  $C$  em  $r$ , ambos equidistantes de  $A$  e tome também o ponto  $D$  em  $s$ , diferente do ponto  $A$ . Observe que é formado o triângulo  $BCD$ , isósceles de base  $BC$ , com  $DA$  sendo sua altura (bissetriz e mediana) relativa à base. A isometria  $\varphi$  leva o triângulo isósceles  $BCD$  no triângulo isósceles  $B'C'D'$ , sendo que  $B' = \varphi(B)$  e  $C' = \varphi(C)$  estão contidos em uma reta  $r'$ . Além disso,  $\varphi$  transforma a mediana  $DA$  na mediana  $D'A'$  do triângulo  $B'C'D'$ , com  $D' = \varphi(D)$  e  $A' = \varphi(A)$ . Note que  $A'$  pertence à reta  $r'$  (pois a isometria transforma retas em retas), e ele juntamente com  $D'$  determinam a reta  $s'$ . Como  $D'A'$  é também altura de  $B'C'D'$  e,  $D'A'$  está contido em  $s'$ , segue que  $s'$  é perpendicular a  $r'$ . ■

**Proposição 2.4.** *Toda isometria  $\varphi : \pi \rightarrow \pi$  é bijetiva, cuja inversa  $\varphi^{-1} : \pi \rightarrow \pi$  é ainda uma isometria.*

**Demonstração.** Vamos mostrar inicialmente que  $\varphi$  é injetiva. De fato, se tomarmos dois pontos  $X$  e  $Y$  em  $\pi$ , distintos, então  $\overline{XY} > 0$ . Como  $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ , sendo  $X' = \varphi(X)$  e  $Y' = \varphi(Y)$  pontos distintos de  $\pi$ , então  $\overline{X'Y'} > 0$ . Segue que  $X' \neq Y'$  e, portanto, segue que  $\varphi$  é injetiva.

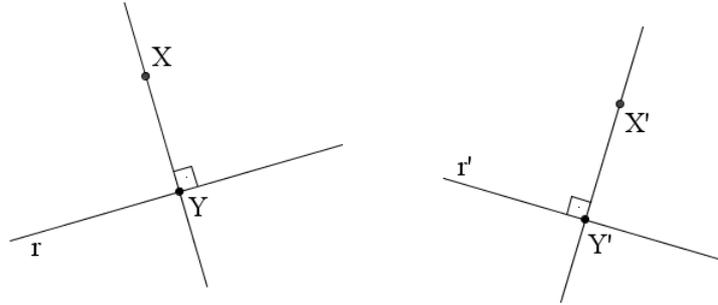


Figura 2.2: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.4.

Para mostrar que  $\varphi$  é sobrejetiva, vamos tomar um ponto  $X' \in \pi$  e encontrar um outro ponto  $X \in \pi$ , tal que  $X' = \varphi(X)$ . Considere uma reta  $r$  no plano  $\pi$ . Pela Proposição 2.2, a imagem de  $r$  pela  $\varphi$  é uma reta  $r'$  também de  $\pi$ . Se  $X' \in r'$ , então existe um  $X$  em  $r$ , tal que  $X' = \varphi(X)$ . No caso em que  $X' \notin r'$ , considere a reta  $s'$  perpendicular a  $r'$ , passando por  $X'$ . Seja  $Y'$  o ponto de interseção de  $s'$  e  $r'$ . Como  $Y' \in r'$ , então existe um ponto  $Y$  em  $r$ , tal que  $Y' = \varphi(Y)$ . Seja  $s$  a reta perpendicular a  $r$ , passando por  $Y$ . Pela Proposição 2.3, a imagem de  $s$  pela  $\varphi$  é uma reta perpendicular a  $r'$ , que contém  $Y'$ . Logo, devido a unicidade da perpendicular a  $s'$  pelo ponto  $Y'$ ,  $\varphi(s) = s'$ . Como  $X' \in s'$ , existe  $X \in s$ , tal que  $X' = \varphi(X)$ . Isso prova a sobrejetividade de  $\varphi$ . Portanto, sendo  $\varphi$  injetiva e sobrejetiva, então  $\varphi$  é bijetiva. ■

Sobre a composição de isometrias no plano, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.5.** *A composição de duas isometrias  $\varphi, \psi : \pi \mapsto \pi$ ,  $\psi \circ \varphi$ , é ainda uma isometria.*

**Demonstração.** De fato, dados os pontos  $X$  e  $Y$  em  $\pi$ , distintos, então pela  $\varphi$  obtemos os pontos distintos  $X'$  e  $Y'$ , com  $X' = \varphi(X)$  e  $Y' = \varphi(Y)$ . Como  $\varphi$  é isometria, então  $d(X, Y) = d(X', Y')$ . Pela  $\psi$ , aplicada nos pontos  $X'$  e  $Y'$ , obtemos os pontos distintos  $X'' = \psi(X')$  e  $Y'' = \psi(Y')$ . Como  $\psi$  é isometria, então  $d(X', Y') = d(X'', Y'')$ . Segue que  $d(X, Y) = d(X'', Y'')$ ,  $X'' = \psi(\varphi(X))$  e  $Y'' = \psi(\varphi(Y))$ . Portanto,  $\psi \circ \varphi$  é isometria. ■

Os resultados a seguir configuram algumas propriedades das isometrias no plano.

**Proposição 2.6.** *Toda isometria  $\varphi : \pi \rightarrow \pi$  transforma retas paralelas em retas paralelas.*

**Demonstração.** Com efeito, sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas de  $\pi$ . As imagens de  $r$  e  $s$  pela  $\varphi$  são as retas  $r'$  e  $s'$ , que também são paralelas, pois se não o forem,  $r'$  e  $s'$  interceptariam num ponto  $P_1$ ,  $P_1 = \varphi(P)$ ,  $P \in r$ , e  $P_1 = \varphi(Q)$ ,  $Q \in s$ . Mas  $\varphi$  é injetiva, logo, obrigatoriamente,  $P = Q$  e, portanto,  $r$  e  $s$  teriam um ponto em comum, contrariando o fato de serem paralelas. ■

**Proposição 2.7.** *Toda isometria  $\varphi : \pi \rightarrow \pi$  preserva circunferências.*

**Demonstração.** De fato, uma circunferência de centro  $O$  e raio  $a$  é a união de todos os pontos  $X$  de  $\pi$ , tais que  $\overline{OX} = a$ . Sua imagem pela  $\varphi$  são todos os pontos  $X'$  do plano  $\pi$  tais que  $\overline{O'X'} = \overline{OX} = a$ ,  $O' = \varphi(O)$ . Logo, temos uma circunferência de centro  $O'$  e raio  $a$ . ■

**Proposição 2.8.** *Toda isometria  $\varphi : \pi \rightarrow \pi$  preserva quaisquer ângulos.*

**Demonstração.** De fato, seja  $\widehat{ABC}$  um ângulo qualquer do plano  $\pi$ . As imagens dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pela  $\varphi$  são os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Como uma isometria preserva distâncias, então os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes pelo caso ‘LLL’. Portanto  $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$ . ■

Fica claro que, pela demonstração da Proposição 2.8, uma isometria sempre leva um triângulo num outro triângulo congruente a ele. Na realidade isso vai acontecer com qualquer polígono convexo, uma vez que a isometria preserva as distâncias.

O comentário desse parágrafo nos chama a atenção pelo fato de estarmos estudando as isometrias no plano. Lembre-se que no capítulo anterior, quando o assunto congruência foi tratado, algumas transformações geométricas que viabilizam as movimentações das figuras geométricas pelo plano foram apresentadas, lembrando, a translação, a reflexão, a rotação e a reflexão deslizante. Fechamos o capítulo anterior

dizendo que essas transformações na verdade tratavam-se de isometrias, fato que será demonstrado nas quatro proposições a seguir.

**Proposição 2.9.** *A translação  $T_{AB} : \pi \rightarrow \pi$  é uma isometria.*

**Demonstração.** Sejam  $X$  e  $Y$  dois pontos de  $\pi$  distintos entre si e distintos de  $A$  e  $B$  e sejam  $X' = T_{AB}(X)$  e  $Y' = T_{AB}(Y)$  suas imagens. Devemos mostrar que  $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ . Consideremos a reta  $r$  que passa por  $X$  e  $Y$  e a reta  $s$  que passa por  $A$  e  $B$ . Temos dois casos a considerar. Primeiramente, se  $r$  for igual ou paralela a  $s$ , então  $T_{AB}$  será restrita a  $r$ , o que configura uma isometria na reta  $r$  (ver [8]). Caso  $r$  e  $s$  não sejam nem paralelas e nem coincidentes, então, teremos formado os paralelogramos  $ABY'Y$  e  $ABX'X$ .

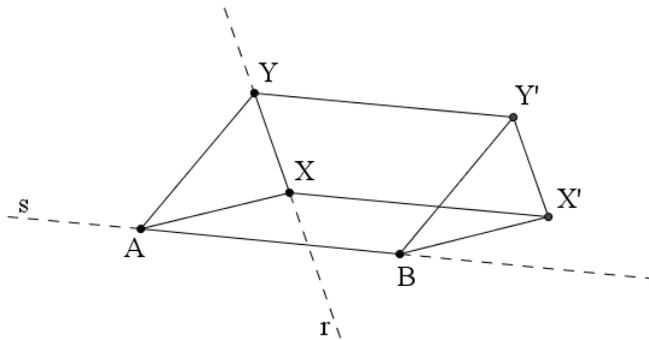


Figura 2.3: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.9.

Por serem paralelogramos, então  $YY' \equiv AB$  e  $AB \equiv XX'$ , onde segue que  $XX' \equiv YY'$ . Temos ainda que  $YY'$  é paralelo a  $XX'$ , dado que  $YY'$  é paralelo a  $AB$  e  $AB$  é paralelo a  $XX'$ . Logo, por esses dois motivos, o quadrilátero  $YY'X'X$  também é um paralelogramo<sup>1</sup> e, portanto,  $XY \equiv X'Y'$ , isto é,  $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ . ■

**Proposição 2.10.** *A reflexão  $R_r : \pi \rightarrow \pi$  é uma isometria.*

**Demonstração.** Dada a reta  $r$ , devemos considerar os casos em que  $X$  e  $Y$ , pontos distintos de  $\pi$ , estão em um mesmo lado de  $r$  e o caso em que  $X$  e  $Y$  estão em lados opostos de  $r$ . Em qualquer um desses casos, sejam  $X'$  e  $Y'$ , os pontos que são obtidos da

<sup>1</sup>Proposição sobre paralelogramos cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados em BARBOSA, 2006, pg. 92.

reflexão de  $X$  e  $Y$  em relação à  $r$ . Devemos mostrar que  $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ . Começamos com o caso em que  $X$  e  $Y$  estão em um mesmo lado de  $r$ . Nesse caso,  $X'$  e  $Y'$  também estão em um mesmo lado de  $r$ , porém, no lado oposto ao lado em que estão  $X$  e  $Y$ . Aqui, temos duas possibilidades a considerar, quando o segmento  $XY$  é paralelo a  $r$  e quando  $XY$  não é paralelo a  $r$ . Quando  $XY$  é paralelo a  $r$ , então o segmento  $X'Y'$  também o será e, assim, o quadrilátero  $XY Y'X'$  é um retângulo ( $r$  é mediatriz de  $XX'$  e de  $YY'$ ) e, portanto,  $XY \equiv X'Y'$ , ou seja,  $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ .

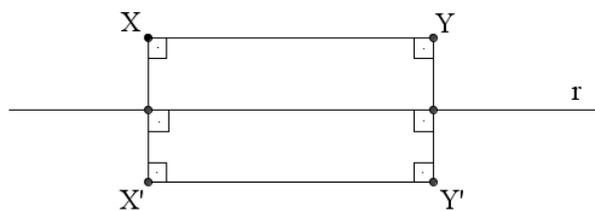


Figura 2.4: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.10, para o caso em que  $XY$  é paralelo à reta  $r$ .

Por outro lado, quando  $XY$  não é paralelo a  $r$ , então podemos tomar os pontos  $A$  e  $A' = R_r(A)$ , no segmento  $YY'$ , tais que  $XA$  e  $X'A'$  sejam paralelos a  $r$ .

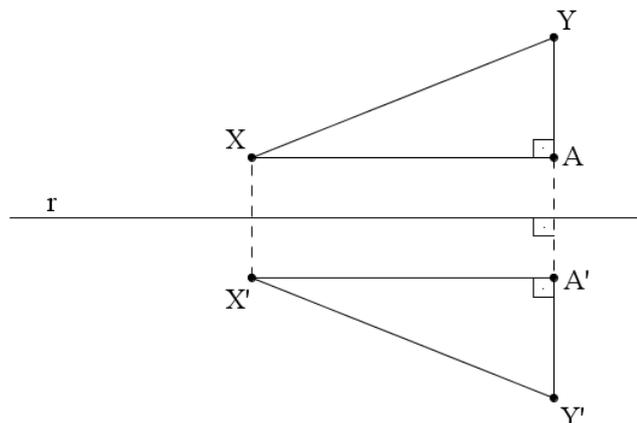


Figura 2.5: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.10, para o caso em que  $X$  e  $Y$  estão em um mesmo lado de  $r$ , mas  $XY$  não é paralelo a  $r$ .

Observe que são formados os triângulos  $XAY$ , retângulo em  $\hat{A}$ , e  $X'A'Y'$ , retângulo em  $\hat{A}'$ , congruentes pelo caso 'LAL', pois  $\overline{XA} = \overline{X'A'}$  (caso anterior),  $\hat{A} \equiv \hat{A}' = 90^\circ$  e  $\overline{YA} = \overline{Y'A'}$  (pois  $r$  é também mediatriz de  $AA'$ ). Segue que  $XY \equiv X'Y'$ , ou  $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ .

Passamos agora ao caso em  $X$  e  $Y$  estão em lados opostos de  $r$ . Pela  $R_r$ ,  $X'$  e  $Y'$  também estarão em lados opostos de  $r$ , com  $X$  e  $Y'$  em um mesmo lado de  $r$ , assim como  $X'$  e  $Y$ . Novamente temos duas possibilidades a considerar, caso  $XY$  seja perpendicular a  $r$  e caso  $XY$  não seja perpendicular a  $r$ . Na primeira possibilidade,  $X$ ,  $Y$ ,  $X'$  e  $Y'$  serão colineares, todos contidos numa reta  $s$ , que intercepta  $r$  perpendicularmente num ponto  $A$ .

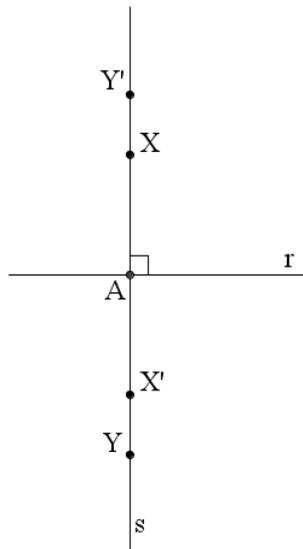


Figura 2.6: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.10, para o caso em que  $X$  e  $Y$  estão em lados opostos de  $r$  e sobre uma reta perpendicular a  $r$ .

Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $Y' * X * X' * Y$ . Como  $r$  é mediatriz de  $XX'$  e de  $YY'$ , então  $\overline{AX} = \overline{AX'}$  e  $\overline{AY} = \overline{AY'}$ . Daí,  $\overline{XY'} = \overline{AY'} - \overline{AX} = \overline{AY} - \overline{AX'} = \overline{X'Y}$ . Assim,  $\overline{XY} = \overline{XX'} + \overline{X'Y} = \overline{XX'} + \overline{XY'} = \overline{X'Y'}$ .

No outro caso, agora onde  $XY$  não é perpendicular a  $r$ , o segmento  $XX'$  intercepta  $r$  perpendicularmente no ponto  $B$ ,  $XY$  intercepta  $r$  no ponto  $A$  e  $Y'Y$  intercepta  $r$  perpendicularmente no ponto  $C$ . Consideremos ainda os segmentos  $X'A$  e  $AY'$ . Perceba que são formados os triângulos retângulos  $XBA$  e  $X'BA$ , que são congruentes pelo caso 'LAL', pois  $\overline{XB} = \overline{BX'}$ ,  $\widehat{XBA} \equiv \widehat{X'BA} = 90^\circ$  (ambos pelo fato de  $r$  ser mediatriz de  $XX'$ ) e  $BA$  é um segmento comum aos dois triângulos. Segue que  $XA \equiv X'A$ . De forma análoga, mostra-se que triângulos retângulos  $ACY$  e  $ACY'$  também são congruentes e,

então,  $AY \equiv AY'$ .

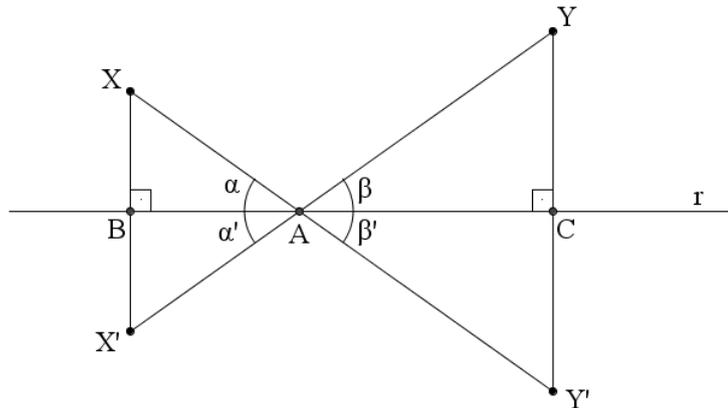


Figura 2.7: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.10, para o caso em que  $X$  e  $Y$  estão em lados opostos de  $r$  e não estão sobre uma reta perpendicular a  $r$ .

Com essas informações, podemos dizer que os triângulos  $XX'A$  e  $YY'A$  são isósceles de bases  $XX'$  e  $YY'$ , respectivamente. Como  $AB$  e  $AC$  são as alturas desses triângulos, logo, também são as bissetrizes dos ângulos  $X\hat{A}X'$  e  $Y'\hat{A}Y$ . Segue daí que  $\alpha \equiv \alpha'$  e  $\beta \equiv \beta'$  (denotamos  $\alpha = X\hat{A}B$ ,  $\alpha' = X'\hat{A}B$ ,  $\beta = Y'\hat{A}C$  e  $\beta' = Y\hat{A}C$ ). Por outro lado, observe que  $\alpha \equiv \beta'$ , por serem ângulos opostos pelo vértice em  $A$ . Assim sendo, obtemos que  $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$ . De posse dessas informações,  $X'\hat{A}Y' = \alpha + \alpha' + X\hat{A}Y' = \beta + \beta' + X\hat{A}Y' = X\hat{A}Y = 180^\circ$ , o que mostra que  $X'$ ,  $A$  e  $Y'$  são colineares. Portanto,  $\overline{X'Y'} = \overline{X'A} + \overline{AY'} = \overline{XA} + \overline{AY} = \overline{XY}$ . ■

**Proposição 2.11.** *A rotação  $\rho_{O,\alpha} : \pi \rightarrow \pi$  é uma isometria.*

**Demonstração.** Sejam  $O$  um ponto de  $\pi$  e  $\alpha$  um ângulo com vértice em  $O$ . Consideremos os pontos  $X$  e  $Y$ , distintos e diferentes de  $O$ , e sejam  $X'$  e  $Y'$  suas imagens pela  $\rho_{O,\alpha}$ . Devemos mostrar que  $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ .

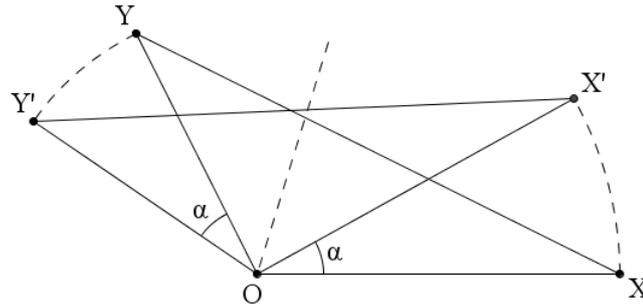


Figura 2.8: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.11.

Ao considerarmos os segmentos  $XY$  e  $X'Y'$ , são formados os triângulos  $Y'OX'$  e  $YOX$ , que são congruentes pelo caso ‘LAL’, dado que  $OY' \equiv OY$  (fato decorrente da rotação  $\rho_{O,\alpha}$ ),  $Y'\widehat{OX}' \equiv Y\widehat{OX} = \alpha + Y\widehat{OX}'$  e  $OX' \equiv OX$  (fato que também decorre da rotação  $\rho_{O,\alpha}$ ). Segue daí que  $Y'X' \equiv YX$ , ou,  $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$ . ■

**Proposição 2.12.** *A reflexão deslizante  $TR = T_{\vec{v}} \circ R_r : \pi \rightarrow \pi$  é uma isometria.*

**Demonstração.** Vimos na Proposição 2.5 que a composição de isometrias é uma isometria e como já mostramos que a translação  $T_{\vec{v}}$  e a reflexão  $R_r$  são isometrias, o resultado segue. ■

Vale salientar mais uma vez que existem outras isometrias no plano obtidas a partir da composição das quatro isometrias anteriormente citadas. Inclusive, mais adiante, no fechamento dessa seção, vamos mostrar que existem apenas essas quatro isometrias no plano. Antes porém, gostaria de dizer que as isometrias podem ser divididas em dois grandes grupos, próprias e impróprias.

**Definição 2.13.** Uma isometria  $\varphi : \pi \rightarrow \pi$  no plano é dita *própria*, quando é a etapa final de um movimento no plano. Por outro lado,  $\varphi$  será *imprópria* quando nenhum movimento do plano termina com  $\varphi$ .

Geometricamente falando, uma isometria é própria quando é possível, apenas com movimentos no plano, movimentar uma figura até a outra. Logo, se para chegar de uma figura até a outra for necessário “sair” do plano, então a isometria é imprópria. Ao observar a Figura 2.9, essa ideia fica bem clara.

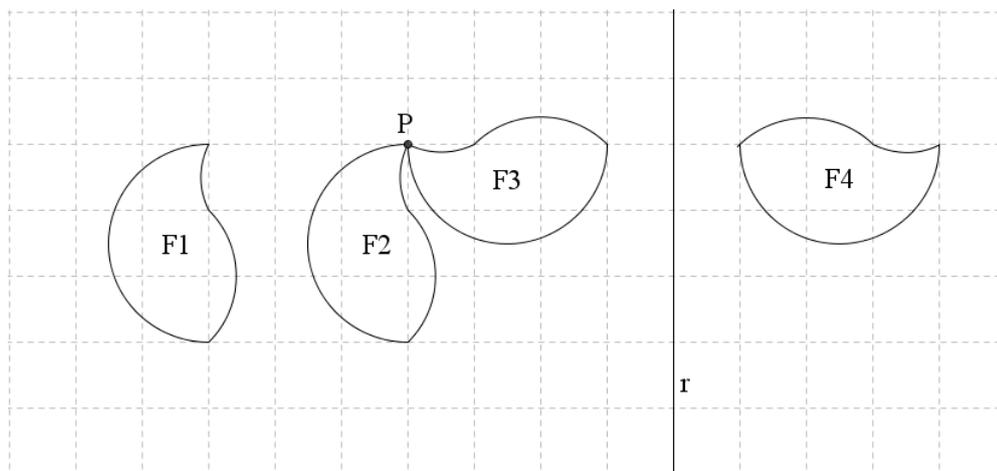


Figura 2.9: Figura F4 como resultado de isometrias aplicadas na figura F1.

Perceba que é intuitivamente plausível aceitar que podemos transladar a figura F1 até a figura F2, sem sair do plano. Também é fácil aceitar que a figura F3 é resultado de uma rotação da figura F2, em torno do ponto  $P$ , de  $90^\circ$  no sentido anti-horário, sem sair do plano. Já a figura F4, que é resultado de uma reflexão da figura F3 em relação à reta  $r$ , não é possível de ser obtida, sem “tirar” a figura F3 do plano.

Assim sendo, as translações e as rotações são isometrias próprias e as reflexões em relação a uma reta e as reflexões deslizantes são isometrias impróprias (na verdade, mostra-se isso. Para mais detalhes, ver [8]). Também mostra-se que a composição de isometrias próprias é própria, a composição de uma isometria própria com uma isometria imprópria é imprópria e a composição de isometrias impróprias é própria (ver os detalhes também em [8]).

Agora que conhecemos as isometrias, gostaríamos de chamar a atenção para o fato de que não é muito difícil de observá-las no nosso meio. Na verdade, as isometrias são muito mais comuns no nosso cotidiano do que imaginamos. Afim de darmos alguns exemplos, vamos apresentar a seguir algumas imagens em que podemos perceber a presença de algumas delas. Começamos exibindo algumas imagens onde é possível perceber translações.



Figura 2.10: Mosaico de figuras geométricas. Fonte: <http://pt.made-in-china.com/covoglusmosaic/product-Polished-Decoration-Long-Hexagon-Tile-Stone-Mosaic-Marble-eygsnishg.html>.

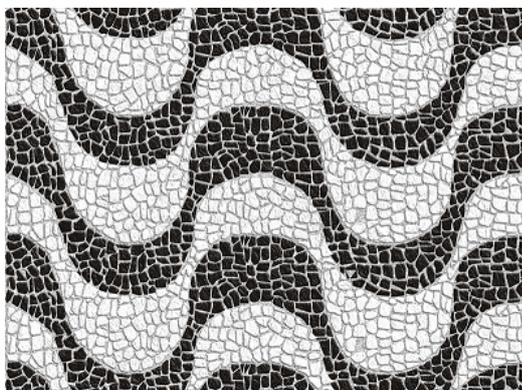


Figura 2.11: Pavimentação do plano: calçada de Copacabana. Fonte: <http://coisasdagil.blogspot.com.br/2011/03/rio-de-janeiro-calcada-de-copacabana.html>.

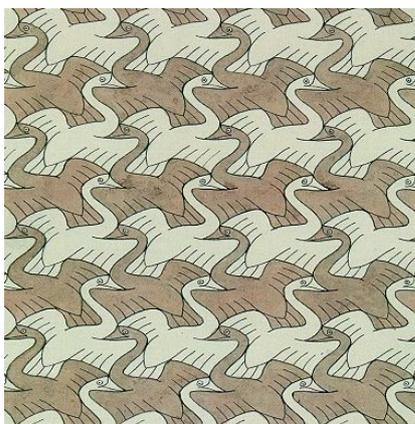


Figura 2.12: Arte: translações na obra de Escher. Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/cm/icm2000/icm33/Escher.htm>.



Figura 2.13: Pavimentação do plano: cerâmicas. Fonte: <http://www.crq4.org.br/quimi-caviva-ceramica-boschi>.

A seguir veremos algumas imagens onde aparecem as rotações.

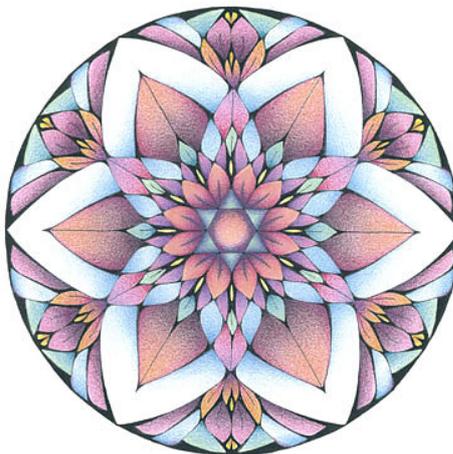


Figura 2.14: Arte: mandalas .Fonte: <http://www.premaspace.com/mandalas/>.



Figura 2.15: Arte: kirigamis. Fonte: <https://www.flickr.com/photos/62572859N08/8389353417/>.

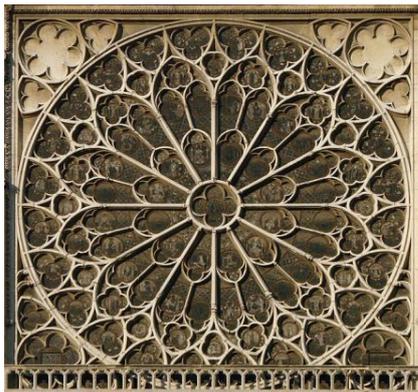


Figura 2.16: Construção civil: vitral da Catedral de Notre-dame. Fonte: [https:// poder-secreto.wordpress.com/category/civilizacoes-antigas-2/page/2/](https://poder-secreto.wordpress.com/category/civilizacoes-antigas-2/page/2/).

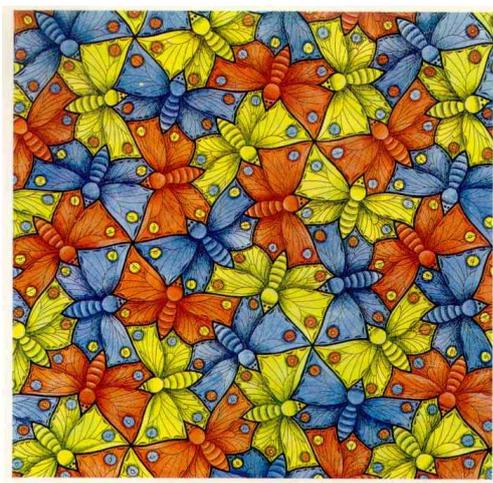


Figura 2.17: Arte: pavimentação Escher. Fonte: <http://ma-tematica.blogspot.com.br/>.



Figura 2.18: Arte: origamis. Fonte: <http://www.ikuzoorigami.com/standard-origami-modular-star/>.

Algumas imagens com reflexões são apresentadas a seguir.



Figura 2.19: Pavimentações do plano. Fonte: <https://sites.google.com/site/nemesvv/pavimentações>.



Figura 2.20: Arte: caleidoscópios. Fonte: <http://jdieckmann.blogspot.com.br/2012-09-01-archive.html>.



Figura 2.21: Logomarcas. Fonte: <http://jornalestrada.blogspot.com.br/20070819archive.html>.



Figura 2.22: Paisagismo e urbanismo: eixo monumental de Brasília. Fonte: <http://viajarpelomundo.com.br/brasilia-principais-pontos-turisticos/>.



Figura 2.23: Natureza: borboleta. Fonte: <http://efacarregaldosal.blogspot.com.br/2010/10/matematica-e-natureza.html>

Os frisos são principais exemplos de reflexão deslizante. A seguir temos alguns exemplos.



Figura 2.24: Fonte: <https://catiaosorio.wordpress.com/2011/02/>.



Figura 2.25: Fonte: <http://www.atractor.pt/simetria/matematica/materiais/exercicios.htm>.

Uma vez familiarizados com as isometrias, vamos mostrar que, a menos de composições, só existem esses quatro tipos de isometrias no plano. Em outras palavras, existem outras isometrias no plano além das quatro anteriormente vistas, porém, todas elas são obtidas pela composição desses quatro tipos.

**Proposição 2.14.** *Existem apenas quatro tipos de isometrias no plano, além da identidade, que geram todas as isometrias do plano. A saber: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante.*

**Demonstração.** De fato, seja  $\varphi : \pi \rightarrow \pi$  uma isometria no plano  $\pi$ , diferente da identidade, e seja  $A$  um ponto de  $\pi$ . Logo, existe um ponto  $A' \neq A$  em  $\pi$ ,  $A' = \varphi(A)$ . Considere  $A'' = \varphi(A')$ . Como  $\varphi$  é isometria, então  $\overline{A'A''} = \overline{AA'}$ . Sobre as posições de  $A$ ,  $A'$  e  $A''$ , temos três casos a considerar:  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  são distintos e não colineares,  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  são distintos e colineares e  $A$  e  $A''$  são coincidentes.

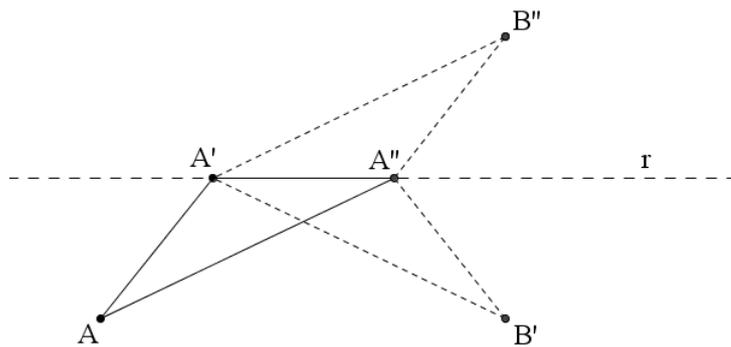


Figura 2.26: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.14, para a situação em que os pontos  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  não são colineares.

No primeiro caso, os pontos distintos  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  formam o triângulo  $AA'A''$ , cuja imagem pela isometria  $\varphi$  será um triângulo congruente a esse e que terá  $A'$  e  $A''$  como vértices. Logo existem duas possibilidades para o terceiro vértice  $\varphi(A'')$ : o ponto  $B'$ , que fica do mesmo lado de  $A$ , relativamente à reta  $r$  que contém  $A'$  e  $A''$  e o ponto  $B''$ , que relativamente à reta  $r$ , fica no lado oposto ao ponto  $A$ , conforme exibido na Figura 2.26.

Na primeira possibilidade,  $B'$  forma com  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  um quadrilátero (ver Figura 2.27) em que  $\overline{AA'} = \overline{A'A''} = \overline{A''B'}$  e  $\widehat{AA'A''} \equiv \widehat{A'A''B'}$  (fatos decorrentes da congruência dos triângulos  $AA'A''$  e  $A'A''B'$  pelo caso ‘LLL’). Note que ao considerarmos as diagonais  $AA''$  e  $A'B'$ , obtemos  $\widehat{AA'B'} \equiv \widehat{AA''B'}$ , pois  $\widehat{AA'B'} \equiv \widehat{AA''B'}$  pelo caso ‘LLL’. Decorre

daí que  $AA'A''B'$  pode ser inscrito numa circunferência<sup>2</sup> de raio de medida  $\overline{OA}$ , onde  $O$  é obtido pela interseção das mediatrizes dos segmentos  $AA'$ ,  $A'A''$  e  $A''B'$ . Seja  $O' = \varphi(O)$ . Como  $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$ , então  $\overline{O'A} = \overline{O'A'} = \overline{O'A''}$  e, portanto,  $O'$  pertence às mediatrizes dos segmentos  $AA'$  e  $A'A''$ . Como a interseção dessas mediatrizes é o ponto  $O$ , segue que  $O' = O$ . Logo, se considerarmos a rotação  $\rho$  de centro  $O$  e ângulo  $\alpha = \widehat{AOA'}$ , teremos  $\rho_{O,\alpha}(A) = A' = \varphi(A)$ ,  $\rho_{O,\alpha}(A') = A'' = \varphi(A')$  e  $\rho_{O,\alpha}(A'') = B' = \varphi(A'')$ . Isto é, nesse caso,  $\varphi = \rho$  é uma rotação.

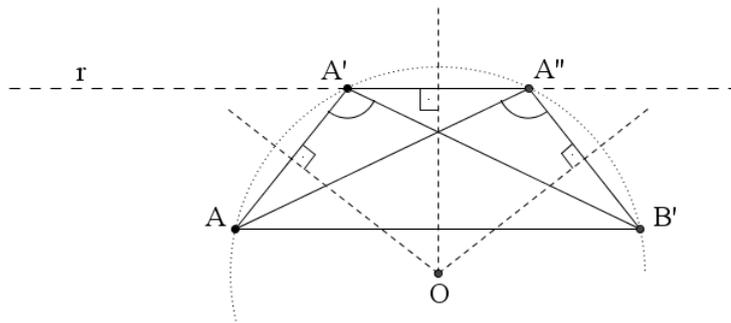


Figura 2.27: Situação em que os pontos  $A$  e  $B' = \varphi(A'')$  estão do mesmo lado da reta  $r$ .

Já na segunda possibilidade,  $B''$  forma com  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  um paralelogramo em que  $AA'$  e  $A''B''$  são lados opostos, assim como os lados  $AA''$  e  $A'B''$  (portanto, congruentes).

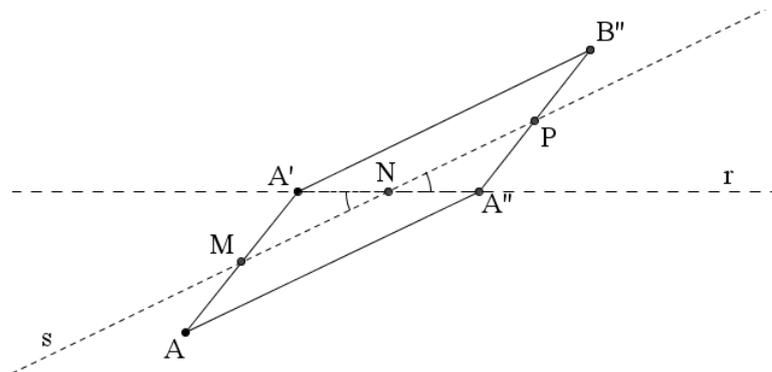


Figura 2.28: Situação em que os pontos  $A$  e  $B = \varphi(A'')$  estão em lados opostos da reta  $r$ .

Note que  $A'A''$  é uma de suas diagonais. Consideremos os pontos médios  $M$ ,  $P$  e  $N$  dos lados  $AA'$  e  $A''B''$  e da diagonal  $A'A''$ , respectivamente. Observemos que os triângulos  $MA'N$  e  $PA''N$  são congruentes pelo caso 'LLL' ( $MA' \equiv A''P$ , pois  $AA' \equiv A''B''$  e  $M$

<sup>2</sup>Proposição sobre quadriláteros inscritíveis cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados em MUNIZ NETO, 2013 b, p. 137.

e  $P$  foram tomados como pontos médios desses segmentos;  $A'N \equiv NA''$ , pois  $N$  é o ponto médio de  $A'A''$  e  $MN \equiv NP$  por serem as bases médias dos triângulos  $AA'A''$  e  $A'A''B''$ , cujas bases  $AA''$  e  $A'B''$  são congruentes). Logo,  $A'\widehat{N}M \equiv A''\widehat{N}P$ . De posse desse fato e observando que  $A'\widehat{N}B'' \equiv A''\widehat{N}M$  (opostos pelo vértice), então  $M\widehat{N}P = M\widehat{N}A' + A'\widehat{N}P = A''\widehat{N}P + M\widehat{N}A'' = M\widehat{N}P = 180^\circ$ , o que significa que os pontos  $M$ ,  $N$  e  $P$  são colineares. Seja  $s$  a reta que passa por esses três pontos. Se considerarmos a isometria  $TR = T_{MN} \circ R_s : \pi \mapsto \pi$  (obtida fazendo a translação  $T_{MN}$  seguir-se à reflexão  $R_s$  em torno de  $s$ ), então,  $TR(A) = A' = \varphi(A)$ ,  $TR(A') = A'' = \varphi(A')$  e  $TR(A'') = B'' = \varphi(A'')$ . Logo, nesse caso,  $\varphi = TR$  é uma reflexão delizante. Portanto, nesse primeiro caso, em que  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  são distintos e não colineares,  $\varphi$  é uma rotação ou uma reflexão deslizante.

Passamos então ao segundo caso, onde  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  são pontos distintos e colineares a uma reta  $t$ .



Figura 2.29: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.14, para o caso em que os pontos  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  são colineares.

Como  $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$ , então  $A'$  será o ponto médio do segmento  $AA''$  e assim, ao considerarmos a translação  $T_{AA'} : t \mapsto t$  (trata-se de uma isometria na reta, ver [9]), então  $T_{AA'}(A) = A' = \varphi(A)$  e  $T_{AA'}(A') = A'' = \varphi(A')$ . Logo,  $\varphi = T_{AA'}$  é uma translação.

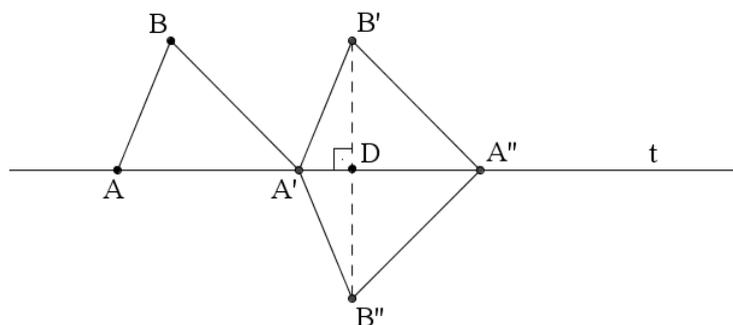


Figura 2.30: Situação em que o ponto  $B$  está fora da reta  $t$ .

Consideremos  $B$  um ponto fora de  $t$ . O triângulo  $AA'B$  é transformado pela

isometria  $\varphi$  num outro triângulo congruente a ele e que tem  $A'$  e  $A''$  como vértices. Assim como no primeiro caso, temos novamente duas possibilidades para a posição do terceiro vértice  $\varphi(B)$ : o ponto  $B'$ , que fica do mesmo lado de  $B$  relativamente a  $t$  e o ponto  $B''$ , que fica, relativamente a  $t$ , no lado oposto ao ponto  $B$ .

Claramente que  $B''$  é simétrico de  $B'$  em relação a  $t$  (fato que segue ao olharmos as alturas congruentes dos triângulos  $A'A'B'$  e  $A'A''B''$ , que tem o mesmo pé da perpendicular  $D$  em  $t$ ).

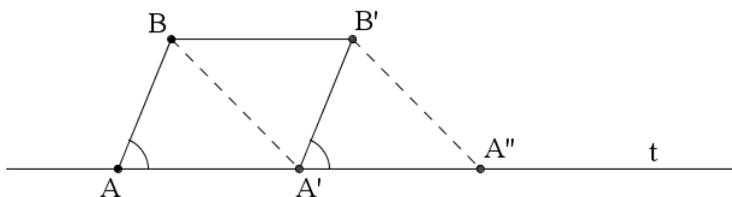


Figura 2.31: Situação em que  $B$  e  $B' = \varphi(B)$  estão em um mesmo lado da reta  $t$ .

Na primeira possibilidade, ao considerarmos o segmento  $BB'$ , formamos o quadrilátero  $AA'B'B$ . Da congruência dos triângulos  $AA'B$  e  $A'A''B'$ , segue que  $\widehat{B\hat{A}A'} \equiv \widehat{B'\hat{A}''A''}$ . Logo, pensando na reta  $t$  como uma transversal à reta que passa por  $A$  e  $B$  e à reta que passa por  $A'$  e  $B'$ , então esses ângulos são correspondentes e, conseqüentemente, os segmentos  $AB$  e  $A'B'$  são paralelos. Aliado ao fato deles também serem congruentes, segue que  $AA'B'B$  é um paralelogramo. Portanto, considerando a translação  $T_{AA'} : \pi \mapsto \pi$ , então  $T_{AA'}(A) = A' = \varphi(A)$ ,  $T_{AA'}(A') = A'' = \varphi(A')$  e  $T_{AA'}(B) = B' = \varphi(B)$  e, assim, conclui-se que  $\varphi = T_{AA'}$  é uma translação.

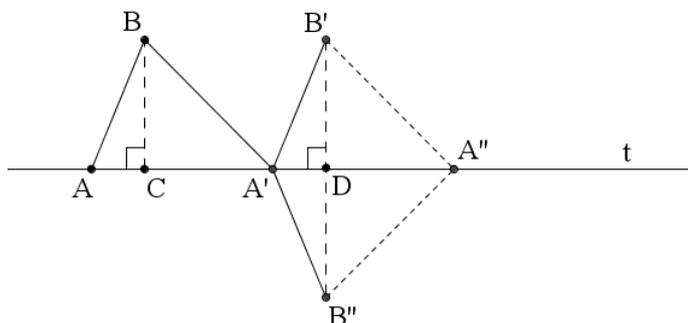


Figura 2.32: Situação em  $B'$  e  $B'' = \varphi(B)$  estão em lados opostos em relação à reta  $t$ .

Já para a segunda possibilidade, devemos também considerar a altura  $BC$  do triângulo  $AA'B$ , em relação ao lado  $AA'$ . Como triângulos congruentes tem alturas con-

gruente, fica evidente que  $ABC \equiv A'B'D$  pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos 'CH'. Segue daí que  $AC \equiv A'D$  e, conseqüentemente, os segmentos  $AA'$  e  $CD$  serão congruentes (já que  $CA'$  é comum aos dois). Logo, diante desse fato e uma vez observado que  $B''$  é simétrico de  $B'$  em relação a  $t$ , basta considerar a reflexão deslizante  $TR = T_{AA'} \circ R_t : \pi \mapsto \pi$ , pois assim,  $TR(A) = A' = \varphi(A)$ ,  $TR(A') = A'' = \varphi(A')$  e  $TR(B) = B'' = \varphi(B)$ . Logo,  $\varphi = TR$  é uma reflexão deslizante. Portanto, nesse segundo caso em que  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  são distintos e colineares,  $\varphi$  é uma translação ou uma reflexão deslizante.

Para fechar a demonstração da proposição, resta-nos ver o terceiro caso em que  $A$  e  $A''$  são coincidentes. Como eles são coincidentes, então  $\varphi$  transforma  $AA'$  em si mesmo (pois  $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$ ). Segue daí que se  $M$  é o ponto médio de  $AA'$ , então  $\varphi(M) = M$  (pois ele seria levado no ponto médio de  $A'A''$ , que é congruente a  $AA'$ ). Além disso, pelo mesmo motivo, a mediatriz  $v$  de  $AA'$  (que passa por  $M$ ), é transformada nela mesma pela  $\varphi$ .

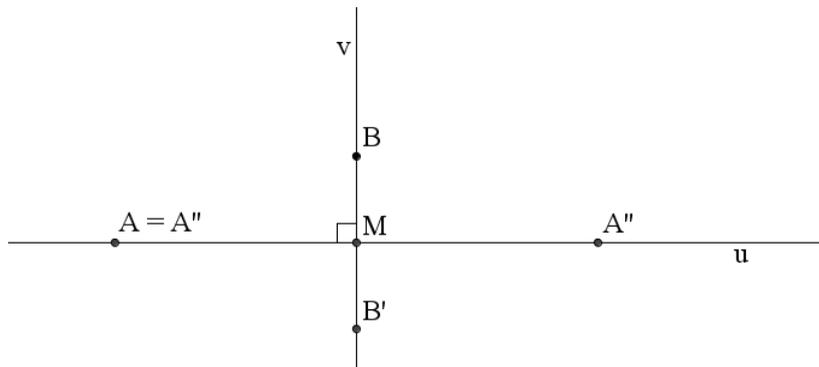


Figura 2.33: Ilustração representativa do caso em que  $A$  e  $A''$  são coincidentes.

Seja  $B$  um ponto de  $v$ , diferente de  $M$ . Temos duas possibilidades para o ponto  $\varphi(B)$ : o próprio  $B$  (devido ao fato da mediatriz ser levada nela mesma) ou o ponto  $B'$  pertencente a  $v$  e simétrico de  $B$  em relação à reta  $u$ , que é a reta que passa por  $A$  e  $A'$ . Na primeira possibilidade, ao considerar a reflexão  $R_v : \pi \mapsto \pi$ , então  $R_v(A) = A' = \varphi(A)$ ,  $R_v(A') = A'' = A = \varphi(A')$  e  $R_v(B) = B = \varphi(B)$ . Logo  $\varphi = R_v$  é uma reflexão.

Agora na segunda possibilidade, observe que considerando a rotação  $\rho_{M,180^\circ} : \pi \mapsto \pi$  (isto é, a rotação em torno de  $M$  com ângulo de  $180^\circ$ ), então  $\rho_{M,180^\circ}(A) = A' = \varphi(A)$ ,  $\rho_{M,180^\circ}(A') = A'' = A = \varphi(A')$  e  $\rho_{M,180^\circ}(B) = B' = \varphi(B)$ . Logo,  $\varphi = \rho_{M,180^\circ}$  é uma rotação e portanto, para esse terceiro e último caso, em que

$A = A''$ , distinto de  $A'$ ,  $\varphi$  é uma translação ou uma rotação. ■

É importante frizar, novamente, que existem outras isometrias no plano além das quatro citadas na proposição anterior, porém, todas elas são obtidas pela composição desses quatro tipos. Aliás, são essas composições que viabilizam a movimentação de figuras geométricas pelo plano, as quais, como já vimos, viabilizam a definição de congruência de figuras geométricas dada no primeiro capítulo.

Inclusive, fechamos a seção relembrando essa definição de congruência, agora usando a linguagem de isometrias.

**Definição 2.15.** Duas figuras planas são ditas *congruentes*, quando uma é imagem da outra pela aplicação de uma isometria ou uma composição de isometrias.

Afim de exemplificar, basta observar que o triângulo ABC da Figura 2.24 é congruente ao triângulo EFG, uma vez que esse último é resultado das seguintes isometrias sobre o triângulo ABC: uma reflexão deslizante (em relação à reta  $r$ ) seguida de uma rotação de  $90^\circ$ , no sentido horário, ao redor do ponto G (imagem do ponto C com a aplicação da reflexão deslizante).

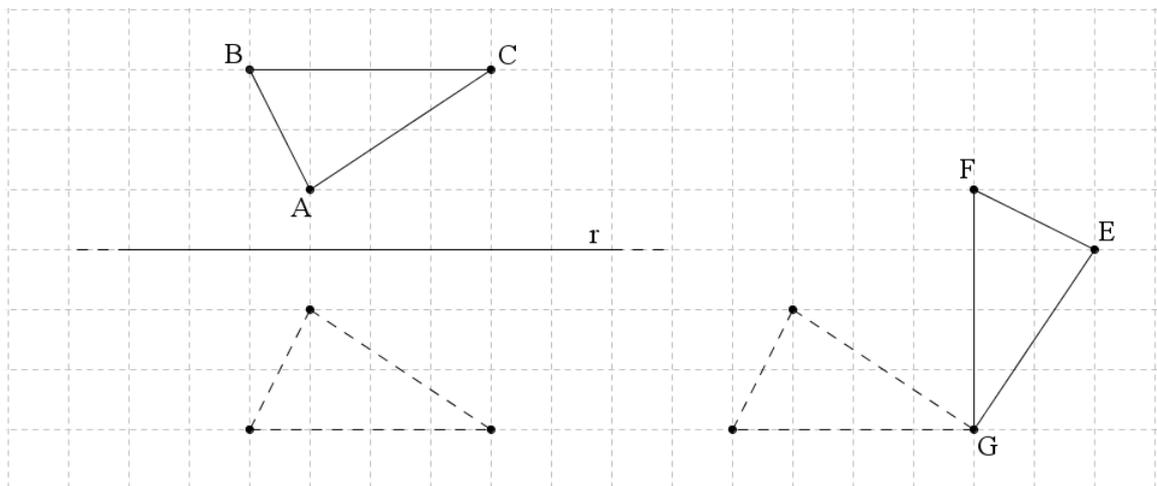


Figura 2.34: ABC é congruente a EFG

Esse exemplo serve de motivação para a construção de um material didático, o qual estamos chamando de *plano isométrico*, para, através de congruência de figuras planas, estudar as isometrias no plano. Esse material concreto será o assunto abordado no Capítulo 3.

Antes de passarmos para as homotetias, porém, chamamos a atenção para o fato de que como uma isometria preserva distâncias e ângulos, então faz todo o sentido

darmos a definição de congruência de triângulos como sendo aquela vista no Capítulo 1 que aparece em praticamente todos os livros didáticos de geometria plana.

## 2.2 Homotetias no plano

Homotetias são transformações geométricas que “ampliam” (ou “reduzem”) de forma contínua qualquer figura geométrica. Antes porém, faz-se necessário formalizarmos a transformação geométrica semelhança no plano, já apresentada no Capítulo 1, uma vez que ela vai auxiliar no desenvolvimento do estudo das homotetias.

### 2.2.1 A transformação semelhança

**Definição 2.16.** Seja  $k$  um número real positivo. Uma *semelhança de razão  $k$*  no plano  $\pi$  é uma transformação  $\sigma : \pi \rightarrow \pi$  que multiplica por  $k$  a distância entre quaisquer dois pontos distintos  $A$  e  $B$  de  $\pi$ . Em outras palavras,  $d(A', B') = k \cdot d(A, B)$ , sendo  $A' = \sigma(A)$  e  $B' = \sigma(B)$  também pontos distintos de  $\pi$ .

Equivalentemente, quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  distintos de  $\pi$ , tem-se  $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$  e, geometricamente falando, a semelhança  $\sigma$  vai “ampliar” (ou “reduzir”) o segmento  $AB$  continuamente até o segmento  $A'B'$ , de tal forma que os seus comprimentos sejam proporcionais.

Caso a semelhança  $\sigma$  tenha razão  $k = 1$ , então ela trata-se de uma isometria no plano (assunto tratado na seção anterior). Logo, serão abordadas nessa seção as semelhanças cuja razão  $k$  é diferente de 1.

**Proposição 2.17.** *Toda semelhança  $\sigma : \pi \rightarrow \pi$  transforma retas em retas.*

**Demonstração.** Considere uma reta  $r$  em  $\pi$  e sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos de  $r$ . Considere também a reta  $r'$  que contém os pontos distintos  $A' = \sigma(A)$  e  $B' = \sigma(B)$ , com  $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$ . Vamos tomar um ponto  $X$  de  $r$  e mostrar que o ponto  $X' = \sigma(X)$  pertence à reta  $r'$ . Com efeito, se  $X \in r$ , então ele é tal que um dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $X$  está entre os outros dois. Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $A^*X^*B$ . Logo  $\overline{AB} = \overline{AX} + \overline{XB}$ , com  $\overline{A'X'} = k \cdot \overline{AX}$  e  $\overline{X'B'} = k \cdot \overline{XB}$ . Assim,  $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB} = k(\overline{AX} + \overline{XB}) = k(\overline{AX}) + k(\overline{XB}) = \overline{A'X'} + \overline{X'B'}$ . Segue que  $A'^*X'^*B'$  e, portanto,  $X' \in r'$ . ■

**Proposição 2.18.** *Toda semelhança  $\sigma : \pi \rightarrow \pi$  transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

**Demonstração.** Consideremos as retas perpendiculares  $r$  e  $s$  no plano  $\pi$ , cujo ponto de interseção das duas é o ponto  $A$ . Tomemos os pontos  $B$ , em  $r$ , e  $C$ , em  $s$ , ambos distintos de  $A$ . Observemos que é formado o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ . A semelhança  $\sigma$ , de razão  $k$ , leva o triângulo  $ABC$  no triângulo  $A'B'C'$ , sendo  $A' = \sigma(A)$ ,  $B' = \sigma(B)$  e  $C' = \sigma(C)$  e, também,  $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$ ,  $\overline{A'C'} = k \cdot \overline{AC}$  e  $\overline{B'C'} = k \cdot \overline{BC}$ . Afirmamos que  $A'B'C'$  é retângulo em  $A'$ .

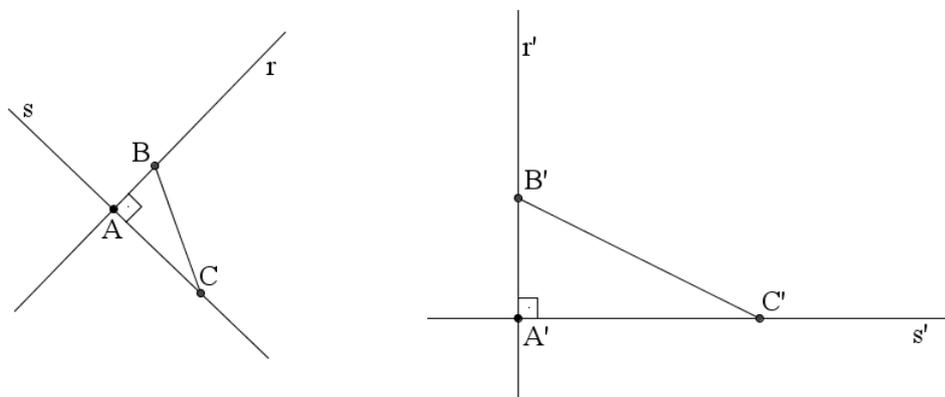


Figura 2.35: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.18.

Com efeito,  $(\overline{B'C'})^2 = (k\overline{BC})^2 = k^2(\overline{BC})^2$ . Pelo Teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo  $ABC$ ,  $(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2$ . Logo,  $(\overline{B'C'})^2 = k^2(\overline{BC})^2 = k^2((\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2) = k^2(\overline{AB})^2 + k^2(\overline{AC})^2 = (k(\overline{AB}))^2 + (k(\overline{AC}))^2 = (\overline{A'B'})^2 + (\overline{A'C'})^2$ . Segue da recíproca do Teorema de Pitágoras, que  $A'B'C'$  é retângulo em  $A'$ . Logo,  $\sigma$  leva as retas perpendiculares  $r$  e  $s$  nas retas perpendiculares  $r'$  e  $s'$ , sendo  $r'$  a reta que passa por  $A'$  e  $B'$  e  $s'$  a reta que passa por  $A'$  e  $C'$ . ■

**Proposição 2.19.** *Toda semelhança  $\sigma : \pi \rightarrow \pi$  é bijetiva, cuja inversa  $\sigma^{-1} : \pi \rightarrow \pi$  é ainda uma semelhança.*

A demonstração dessa proposição utiliza argumentações análogas aos utilizados na demonstração da Proposição 2.4, que versa sobre a bijetividade das isometrias no plano. Algo importante a se dizer aqui, é que se a semelhança  $\sigma$  tiver razão  $k$ , então a semelhança inversa  $\sigma^{-1}$  terá razão  $\frac{1}{k}$ . Geometricamente, haverá uma “redução” da figura no plano, isso se  $k > 1$ . Caso  $k < 1$ , então haverá uma “ampliação” da figura.

**Proposição 2.20.** *Toda semelhança  $\sigma : \pi \rightarrow \pi$  transforma retas paralelas em retas paralelas.*

A demonstração dessa proposição é idêntica à demonstração da Proposição 2.6, no caso em que isometrias no plano levam retas paralelas em retas paralelas.

**Proposição 2.21.** *Toda semelhança  $\sigma : \pi \rightarrow \pi$  preserva quaisquer ângulos.*

**Demonstração.** De fato, seja  $\widehat{ABC}$  um ângulo qualquer de  $\pi$ . As imagens dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pela  $\sigma$ , de razão  $k$ , são os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , de modo que  $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$ ,  $\overline{A'C'} = k \cdot \overline{AC}$  e  $\overline{B'C'} = k \cdot \overline{BC}$ . Decorre daí que  $ABC \sim A'B'C'$  pelo caso ‘PPP’. Portanto  $B'\widehat{A'}C' = B\widehat{A}C$ . ■

Fica claro que, pela demonstração da Proposição 2.21, uma semelhança sempre leva um triângulo num outro triângulo semelhante a ele. Na realidade isso vai acontecer com qualquer polígono convexo, devido ao fato de semelhança transformar segmentos em outros segmentos proporcionais a estes.

**Proposição 2.22.** *Toda semelhança  $\sigma : \pi \rightarrow \pi$  de razão  $k$  transforma uma circunferência de raio  $a$  numa circunferência de raio  $ka$ .*

**Demonstração.** De fato, consideremos a circunferência de centro  $O$  e raio  $a$ . Essa circunferência é a união de todos os pontos  $X$  de  $\pi$ , tais que  $\overline{OX} = a$ . Sua imagem pela  $\sigma$  são todos os pontos  $X'$  do plano tais que  $\overline{O'X'} = k \cdot \overline{OX}$ , em que  $O' = \varphi(O)$ . Segue que  $\overline{O'X'} = ka$ , que representa a circunferência de centro  $O'$  e raio  $ka$ . ■

**Definição 2.23.** Dadas duas semelhanças  $\sigma, \omega : \pi \rightarrow \pi$  no plano, de razões  $k$  e  $k'$ , a composta  $\sigma \circ \omega : \pi \rightarrow \pi$  será uma semelhança de razão  $kk'$ , que associa a cada ponto  $P \in \pi$  o ponto  $\sigma(\omega(P)) \in \pi$ , isto é,  $(\sigma \circ \omega)(P) = \sigma(\omega(P))$ .

Essa definição, na verdade quer nos dizer que a semelhança é uma transformação transitiva, com o detalhe que  $\sigma \circ \sigma^{-1} = I$ , sendo  $I$  a transformação identidade. E, dentre todos os exemplos de semelhanças no plano, as homotetias são os exemplos mais simples.

### 2.2.2 As homotetias

**Definição 2.24.** Seja  $k$  um número real positivo e seja  $O$  um ponto do plano  $\pi$ . Uma *homotetia de centro  $O$  e razão  $k$*  é uma transformação  $\mu : \pi \rightarrow \pi$  tal que  $\mu(O) = O$  e, para todo ponto  $X \neq O$ ,  $X' = \mu(X)$  é o ponto da semirreta  $S_{OX}$ , tal que  $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$ .



Figura 2.36:  $X'$  é resultado de uma homotetia em  $X$  para o caso  $k > 1$ .

Decorre da definição que uma homotetia  $\mu$  transforma toda semirreta de origem no ponto  $O$  em si mesma e, evidentemente, transforma toda reta que passa por  $O$  em si mesma.

**Proposição 2.25.** *Toda homotetia  $\mu : \pi \rightarrow \pi$  de centro  $O$  e razão  $k \neq 1$  transforma toda reta que não contém  $O$  numa reta paralela a ela.*

**Demonstração.**

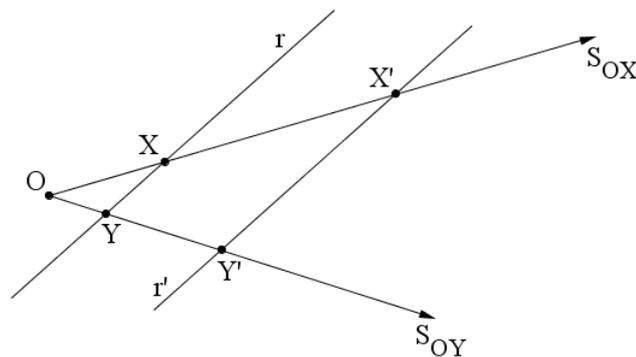


Figura 2.37: Ilustração representativa para a demonstração da Proposição 2.25.

De fato, seja  $X$  um ponto diferente de  $O$ . Temos que  $X' = \mu(X)$  é tal que  $X' \in S_{OX}$  e  $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$ . Tomemos um ponto  $Y \notin S_{OX}$ . Logo existe  $Y' \in S_{OY}$ , tal que  $Y' = \mu(Y)$  e  $\overline{OY'} = k \cdot \overline{OY}$ . Claramente que  $Y' \notin S_{OX}$ . Consideremos as retas  $r$ , que passam por  $X$  e  $Y$ , e  $r'$ , que passa por  $X'$  e  $Y'$ . Observe que nenhuma delas contém o ponto  $O$ . Como  $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$  e  $\overline{OY'} = k \cdot \overline{OY}$ , segue que as retas  $r$  e  $r'$  são paralelas pela recíproca do Teorema de Tales<sup>3</sup>. ■

Outro fato que pode ser observado na Figura 2.37 é que  $OXY \sim OX'Y'$  pelo caso 'PAP', uma vez que o ângulo  $\widehat{O}$  é comum aos dois triângulos e os lados  $OX$  e  $OX'$ , assim como  $OY$  e  $OY'$ , são proporcionais. Logo, os lados  $XY$  e  $X'Y'$  também são proporcionais e, portanto,  $\overline{X'Y'} = k \cdot \overline{XY}$ .

<sup>3</sup>Corolário do Teorema de Tales cujo enunciado e demonstração podem ser encontrados em MUNIZ NETO, 2013 b, p. 154.

Isso demonstra que, de fato, toda homotetia é uma semelhança. Logo, toda homotetia  $\mu : \pi \rightarrow \pi$ , de centro  $O$  e razão  $k$ , é bijetiva e sua inversa  $\mu^{-1}$  é a homotetia de centro  $O$  e razão  $\frac{1}{k}$ . Além disso, toda homotetia leva um triângulo num outro triângulo semelhante a ele.

Pela Proposição 2.25,  $AB$  e  $A'B'$  são paralelos, assim como  $AC$  e  $A'C'$  e também  $BC$  e  $B'C'$ . Logo, a homotetia leva um triângulo num triângulo semelhante a ele, com o detalhe de que os lados correspondentes são paralelos (ver Figura 2.38). Isso vai acontecer também com qualquer polígono.

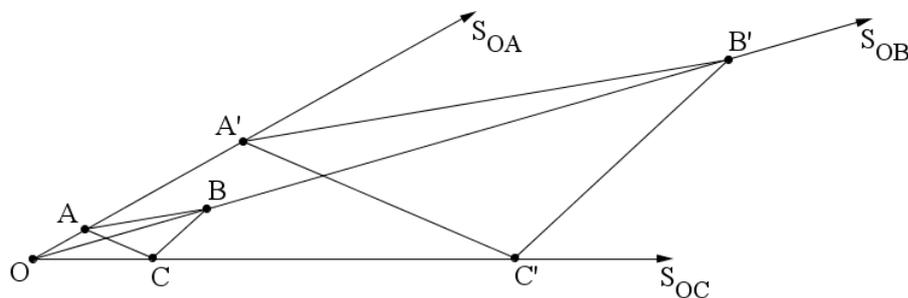


Figura 2.38:  $A'B'C'$  é semelhante a  $ABC$  por uma homotetia.

É importante ressaltar que a aplicação da homotetia ocasionou uma “ampliação” contínua do triângulo  $ABC$  no triângulo  $A'B'C'$ . Isso sempre vai acontecer com qualquer figura geométrica quando  $k > 1$ . Quando  $0 < k < 1$ , a homotetia vai causar uma “redução” contínua da figura, que, aproveitando esse mesmo exemplo, basta olhar a redução do triângulo  $A'B'C'$  até o triângulo  $ABC$ . No caso em que  $k = 1$ , a homotetia reduz-se à transformação identidade e no caso em que  $k = 0$ , temos um caso degenerado da homotetia, que reduz-se a um ponto, a saber, o centro da homotetia.

Às vezes, é conveniente considerar transformações  $\lambda : \pi \rightarrow \pi$ , que consistem numa homotetia  $\mu$  de centro  $O$  e razão  $k > 0$ , seguida de uma rotação de  $180^\circ$  em torno de  $O$ . Nesse caso,  $\lambda$  será também uma homotetia, a qual é abordada na próxima definição.

**Definição 2.26.** Seja  $k$  um número real positivo e seja  $O$  um ponto do plano  $\pi$ . Uma *homotetia inversa de centro  $O$  e razão  $-k$*  é uma transformação  $\lambda : \pi \rightarrow \pi$  tal que  $\lambda(O) = O$  e, para todo ponto  $X \neq O$ ,  $X' = \lambda(X)$  é o ponto da semirreta oposta a  $S_{OX}$ , tal que  $\overline{OX'} = -k \cdot \overline{OX}$ .

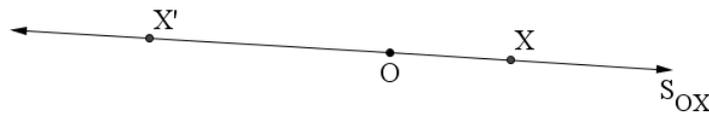


Figura 2.39:  $X'$  é resultado da homotetia inversa em  $X$ .

Pensando em triângulos, a imagem pela homotetia inversa de um triângulo será um triângulo semelhante a ele, de razão  $k$ , porém ele estará “invertido” em relação ao outro.

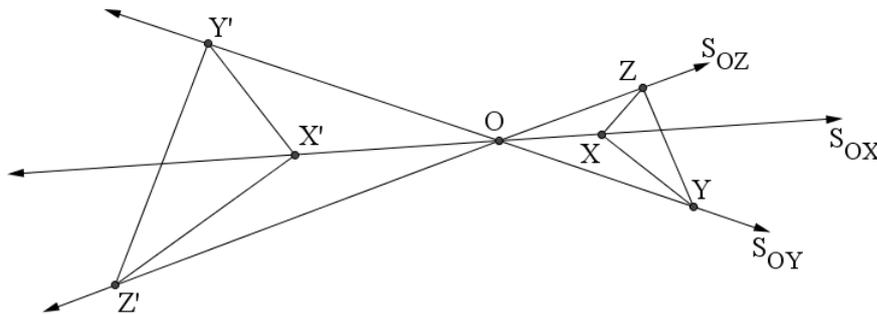


Figura 2.40:  $X'Y'Z'$  é semelhante a  $XYZ$  por uma homotetia inversa.

Observe na Figura 2.40, que triângulo “invertido”  $X'Y'Z'$  sofreu uma ampliação do triângulo  $XYZ$ . Isso sempre vai acontecer com qualquer figura geométrica no plano quando a homotetia inversa tiver razão  $k < -1$ . Quando  $-1 < k < 0$ , a homotetia inversa vai causar uma redução na figura. No caso em que  $k = -1$ , a homotetia inversa será uma isometria, no caso, uma rotação de  $180^\circ$  em torno do centro da homotetia. E se  $k = 0$ , temos o mesmo caso degenerado da “homotetia normal”.

Esse fenômeno de “inverter” as figuras na homotetia inversa vai acontecer com qualquer figura geométrica, incluindo circunferências. Por falar em circunferências, sempre vai existir uma homotetia que relaciona duas delas, desde que elas não sejam concêntricas. Algo mais interessante vai acontecer quando tomamos duas circunferências distintas, onde uma não é interior à outra e não existe ponto de interseção entre elas.

Nesse caso, vão existir duas homotetias que as relacionam, uma “normal” e uma inversa e, para encontrar os dois pontos  $O$  e  $\tilde{O}$  dessas duas homotetias, basta considerar os pontos de interseção das retas tangentes comuns às circunferências. Note que em relação ao ponto  $O$  (ponto de interseção de uma das duas possibilidades de retas tangentes comuns às duas circunferências), a circunferência  $C_2$  é resultado de uma homotetia

“normal” sobre a circunferência  $C_1$ . Agora, em relação ao ponto  $\tilde{O}$  (ponto de interseção da outra possibilidade de retas tangentes comuns às duas circunferências), a circunferência  $C_2$  é resultado de uma homotetia inversa aplicada à circunferência  $C_1$ .

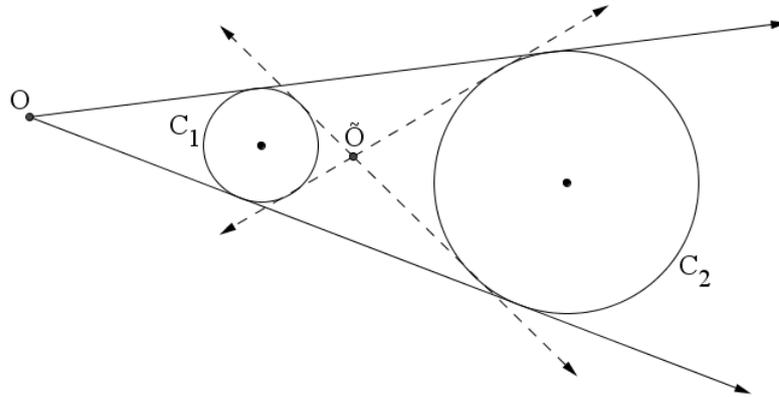


Figura 2.41: Homotetias de circunferências.

Agora, diferentemente das isometrias, as homotetias não são facilmente observadas ao nosso redor, embora elas aparecem em alguns casos. A seguir temos dois exemplos onde elas podem ser observadas.

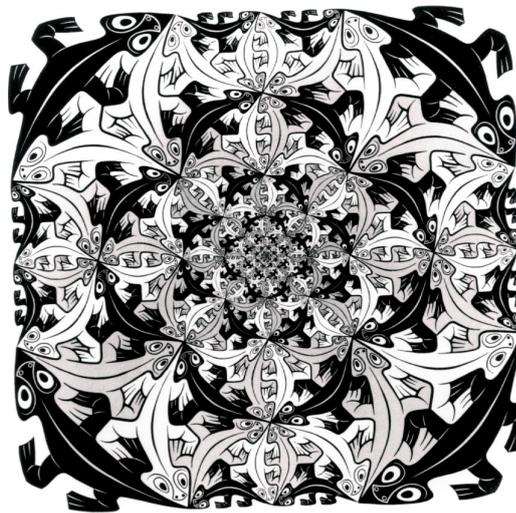


Figura 2.42: Arte: pavimentações de Escher. Fonte: <http://somenteboasnoticias.wordpress.com/2012/03/27/o-mundo-magico-de-escher-rj-a-exposicao-mais-vista-do-mundo-em-2011/>.

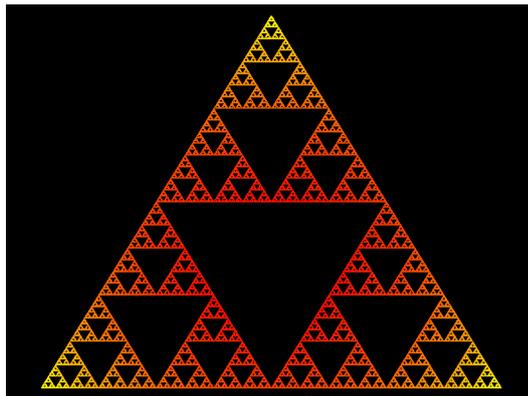


Figura 2.43: Fractais: triângulo de Sierpinski. Fonte: <http://shadowlotus.wordpress.com/2007/05/29/fractales/>.

Para fechar essa seção, apresentamos a proposição a seguir, que relaciona tudo o que estudamos até agora.

**Proposição 2.27.** *Toda semelhança  $\sigma : \pi \longrightarrow \pi$  é igual a uma isometria seguida de uma homotetia.*

**Demonstração.** Seja  $\sigma : \pi \longrightarrow \pi$  uma semelhança de razão  $k$ . Fixado um ponto  $O$  de  $\pi$ , considere a homotetia  $\mu : \pi \longrightarrow \pi$ , de centro  $O$  e razão também  $k$ , cuja inversa, como sabemos, é a homotetia  $\mu^{-1} : \pi \longrightarrow \pi$ , de razão  $\frac{1}{k}$ . A composta  $\eta = \mu^{-1} \circ \sigma$  é uma semelhança de razão  $\frac{1}{k} \cdot k = 1$ , ou seja,  $\eta$  é uma isometria. Logo, aplicando  $\mu$  em ambos os membros de  $\eta = \mu^{-1} \circ \sigma$ , obtemos  $\sigma = \mu \circ \eta$ . ■

Ou seja, é essa proposição que nos inspira a dar a definição de semelhança de figuras geométricas dada no primeiro capítulo, que pode ser reescrita como na próxima definição, agora em linguagem de homotetias e isometrias.

**Definição 2.28.** Duas figuras planas são ditas *semelhantes*, quando uma é imagem da outra pela aplicação de uma isometria (ou uma composição de isometrias) seguida de uma homotetia.

Claramente que em alguns casos, devemos considerar apenas homotetias. Logo, nesse caso, a isometria seria a transformação identidade e a definição continuaria contemplada.

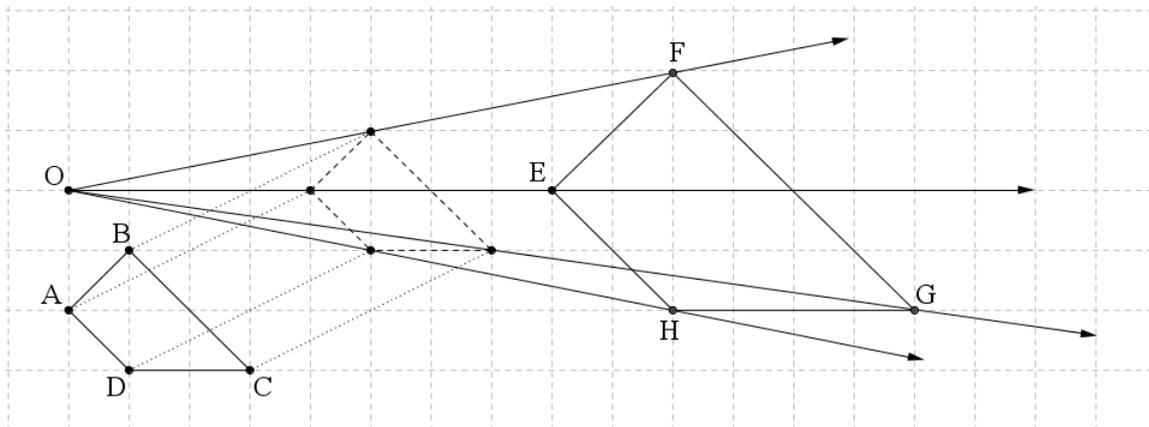


Figura 2.44:  $ABCD$  é semelhante a  $EFGH$

A título de exemplo, observe que, na Figura 2.44, o quadrilátero  $ABCD$  é semelhante ao quadrilátero  $EFGH$ , pois este é resultado de uma translação seguida de uma homotetia do quadrilátero  $ABCD$ . Esse exemplo, aliás, é a motivação para as atividades com o GeoGebra que serão propostas no próximo capítulo, afim de se utilizar semelhança de figuras planas para se estudar homotetias no plano.

Gostaríamos de chamar a atenção, antes de fecharmos essa seção, para o fato de como uma homotetia transforma segmentos em segmentos proporcionais e preserva ângulos, então, faz-se todo o sentido dar a definição de semelhança de triângulos como sendo a que aparece na maioria dos livros didáticos de geometria plana, definição esta já citada no Capítulo 1.

## 2.3 As isometrias e homotetias enquanto coordenadas no plano

O objetivo principal dessa seção é estudar as isometrias e homotetias no plano  $\pi$ , agora pensado como um sistema de eixos ortogonais  $OX$  e  $OY$ , que tem a mesma origem  $O$ . Nesse plano, que denominaremos por  $XOY$ , cada ponto  $P$  será representado por suas coordenadas  $x$  e  $y$ , sendo  $x$ , que se encontra no eixo  $OX$ , a abscissa e  $y$ , que se encontra no eixo  $OY$ , a ordenada. Assim sendo, cada ponto  $P$  de  $\pi$  será representado pelo par ordenado  $P = (x, y)$ .

Iniciamos falando das isometrias. A primeira delas será a translação  $T_{\vec{v}} : \pi \rightarrow \pi$ , que como vimos no Capítulo 1, é a transformação geométrica do plano que associa cada

ponto  $P$  do plano ao ponto  $Q = T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$ .

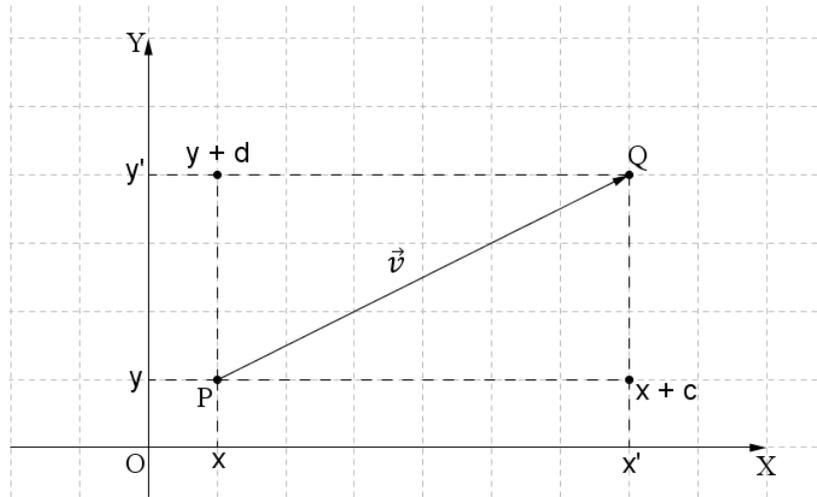


Figura 2.45: Translação em coordenadas.

Se as coordenadas de  $\vec{v}$  são  $(c, d)$ , então, para cada ponto  $P = (x, y)$  de  $\pi$ , as coordenadas  $(x', y')$  de  $Q$  serão  $Q = T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v} = (x, y) + (c, d) = (x + c, y + d)$ . De forma geral, toda figura  $F$  do plano é transformada numa figura  $F' = T_{\vec{v}}(F)$ , cujos pontos  $P + \vec{v}$  de  $F'$  são obtidos transformando-se todos os pontos  $P$  de  $F$  pela mesma  $T_{\vec{v}}$ .

Passamos agora a tratar da reflexão  $R_r : \pi \rightarrow \pi$ , cujo objetivo é encontrar as coordenadas de  $Q = (x', y')$ , resultado da reflexão de  $P = (x, y)$ , não pertencente a  $r$ , em relação à reta  $r$ . Aqui vamos analisar quatro casos, que correspondem às possibilidades das posições de  $r$  no plano.

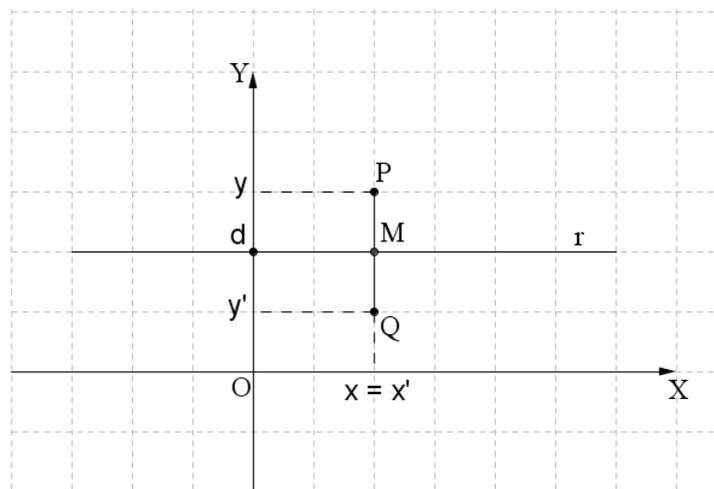


Figura 2.46: Reflexão em relação a uma reta horizontal.

Inicialmente, vamos tratar do caso em que a reta  $r$  seja horizontal, isto é, coincidente ou paralela ao eixo  $OX$ . Nesse caso, a reta  $r$  tem equação  $y = d$ ,  $d \in \mathbb{R}$  (Figura 2.46). Decorre da definição da reflexão que  $M = (x, d)$  é ponto médio do segmento  $PQ$ . Logo,  $PM \equiv MQ$ . Então, para encontrar as coordenadas de  $Q$ , basta fazermos uma translação de  $M$  pelo vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{PM} = M - P = (x, d) - (x, y) = (0, d - y)$ . Assim,  $Q = T_{\vec{v}}(M) = M + \vec{v} = (x, d) + (0, d - y) = (x, 2d - y)$ .

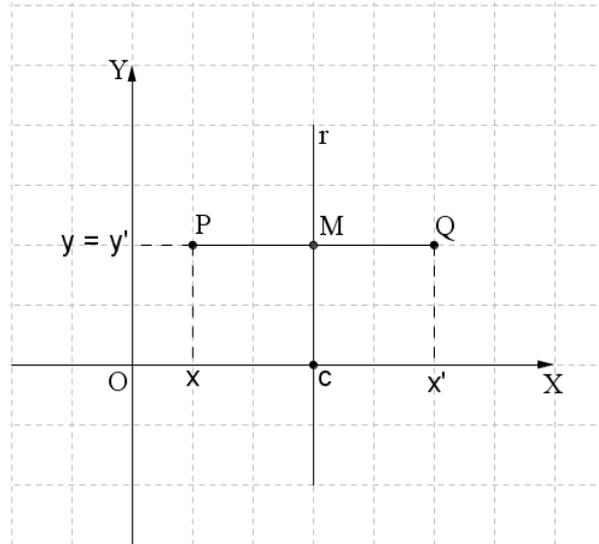


Figura 2.47: Reflexão em relação a uma reta vertical

Agora vamos considerar  $r$  como sendo uma reta vertical, isto é, paralela ou coincidente com o eixo  $OY$ , de equação  $x = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Assim, como no caso anterior, para encontrar as coordenadas de  $Q$ , basta, também, fazer uma translação de  $M$ , pelo vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{PM} = M - P = (c, y) - (x, y) = (c - x, 0)$ . Logo,  $Q = T_{\vec{v}}(M) = M + \vec{v} = (c, y) + (c - x, 0) = (2c - x, y)$ .

Vamos agora, considerar uma reta  $r$ , não-vertical e não-horizontal, de equação  $y = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , que passa pela origem do sistema coordenado e faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $OX$  (Figura 2.48).

Como  $r$  é mediatriz de  $PQ$ , então  $PM \equiv MQ$  e  $\widehat{PMO} \equiv \widehat{QMO} = 90^\circ$ . Isso, aliado ao fato de o lado  $OM$  ser comum aos triângulos  $OPM$  e  $OQM$ , podemos dizer, pelo caso 'LAL', que  $OPM \equiv OQM$ . Segue que  $OP \equiv OQ$ . Porém,  $\overline{OP} = d(O, P) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Da mesma forma,  $\overline{OQ} = d(O, Q) = \sqrt{(x' - 0)^2 + (y' - 0)^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ . Segue que  $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \implies x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ . (1)

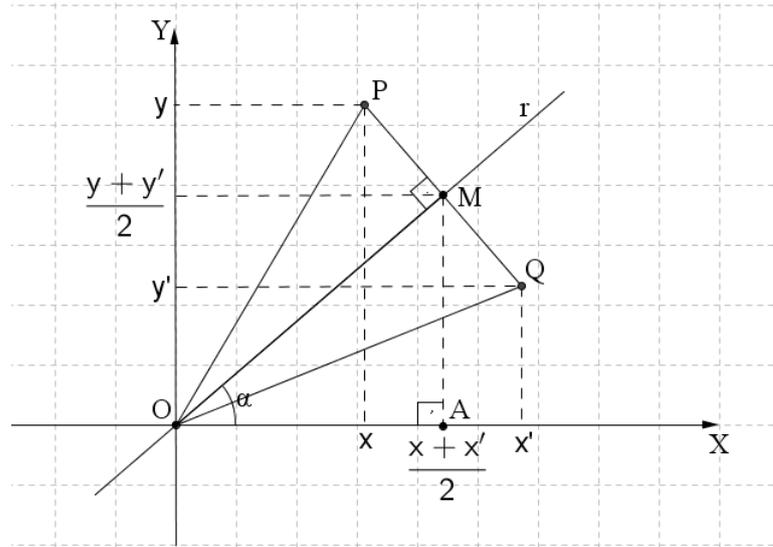


Figura 2.48: Reflexão em relação a uma reta que passa na origem.

Por outro lado, observando o triângulo  $OAM$ , retângulo em  $\hat{A}$ , temos que  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}}$ . Como  $M$  é ponto médio de  $PQ$ , então  $M = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ . Assim sendo,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{y+y'}{2}}{\frac{x+x'}{2}} = \frac{y+y'}{x+x'}. \text{ Mas } \operatorname{tg}\alpha = a, \text{ que é o coeficiente angular da reta } r. \text{ Segue que, } \frac{y+y'}{x+x'} = a \implies y+y' = a(x+x') \implies y+y' = ax+ax' \implies y'-ax' = ax-y. \quad (2)$$

Conclusão, as coordenadas  $(x', y')$  de  $Q$  são tais que satisfazem as equações dadas em (1) e (2), isto é, devem satisfazer o sistema formado por essas duas equações. A equação (1) pode ser reescrita como  $x^2 - x'^2 = y'^2 - y^2$  e, como  $P \notin r$ , então  $x \neq x'$  e, portanto,  $x^2 - x'^2 \neq 0$ , o que significa que podemos dividir  $x^2 - x'^2 = y'^2 - y^2$  por  $x^2 - x'^2$ , obtendo  $\frac{y'^2 - y^2}{x^2 - x'^2} = 1$ .

Essa equação pode ser reescrita como  $\frac{(y' - y)(y' + y)}{(x - x')(x + x')} = 1$ . Segue, do fato de  $\frac{y+y'}{x+x'} = a$ , que  $\frac{y' - y}{x - x'} a = 1 \implies x - x' = a(y' - y) \implies x - x' = ay' - ay \implies ay' + x' = x + ay. \quad (3)$

Logo,  $x'$  e  $y'$  são tais que satisfazem as equações dadas em (2) e (3). A solução única desse sistema é  $x' = \frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}y$  e  $y' = \frac{2a}{1+a^2}x - \frac{1-a^2}{1+a^2}y$ , que são as coordenadas de  $Q$ , que, lembrando, é resultado da reflexão de  $P = (x, y)$  em relação a  $r$  de equação  $y = ax$ .

Resta, então, considerar a reta  $r$  de equação  $y = ax + b$ ,  $a$  e  $b$  reais e diferentes de

zero, que representam uma reta não-vertical e não-horizontal, que não passa na origem do sistema cartesiano. Vale lembrar que o coeficiente  $b$  é o coeficiente linear de  $r$ , que é o valor da interseção de  $r$  com o eixo  $OY$ . Logo, para encontrar as coordenadas do ponto  $Q$ , reflexão de  $P$  em relação a  $r$ , basta fazer uma translação vertical de  $P$  sob um vetor de módulo  $b$ , depois uma reflexão em relação à reta  $s$ , de equação  $y = ax$ , paralela a  $r$  e que passa pela origem, e, finalmente, fazer outra translação vertical, também de módulo  $b$ , porém de sentido contrário à translação anteriormente feita.

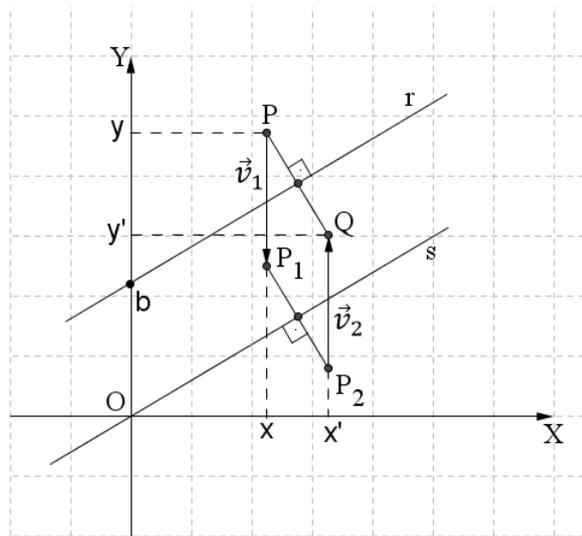


Figura 2.49: Reflexão em relação a uma reta que não passa na origem.

Temos que  $P_1 = T_{\vec{v}_1}(P)$ , onde  $\vec{v}_1 = (0, -b)$ . Logo,  $P_1 = P + \vec{v}_1 = (x, y) + (0, -b) = (x, y - b)$ . Já  $P_2$  é a reflexão de  $P$  em relação a  $s$ . Como visto anteriormente,  $P_2 = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}(y-b), \frac{2a}{1+a^2}x - \frac{1-a^2}{1+a^2}(y-b)\right)$ . Finalmente,  $Q = T_{\vec{v}_2}(P_2)$ , onde  $\vec{v}_2 = (0, b)$ . Logo  $Q = P_2 + \vec{v}_2 = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}(y-b), \frac{2a}{1+a^2}x - \frac{1-a^2}{1+a^2}(y-b)\right) + (0, b) = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}(y-b), \frac{2a}{1+a^2}x - \frac{1-a^2}{1+a^2}(y-b) + b\right)$ , que são as coordenadas de  $Q$ , reflexo de  $P$  em relação a  $r$  de equação  $y = ax + b$ . Perceba que  $PP_1P_2Q$  é um paralelogramo, e isso justifica toda a construção feita para encontrar as coordenadas  $(x', y')$  de  $Q$ .

De posse dessas coordenadas da reflexão e uma vez entendido a translação, fica bastante simples exprimirmos as coordenadas de uma reflexão deslizante, onde, para tal, basta somarmos as coordenadas do vetor que estabelece a translação às coordenadas do ponto obtido pela reflexão em relação à reta. Só lembrando que esse vetor em questão é paralelo à reta utilizada na reflexão.

Resta-nos então, falarmos da rotação  $\rho_{O,\alpha} : \pi \rightarrow \pi$ . Inicialmente, fixamos  $O$  como sendo a origem do sistema de coordenadas  $XOY$  e  $\alpha$  um ângulo qualquer de rotação. Seja  $P = (x, y)$  um ponto qualquer do plano e seja  $Q = \rho_{O,\alpha}(P)$ . Vamos encontrar as coordenadas  $Q = (x', y')$ .

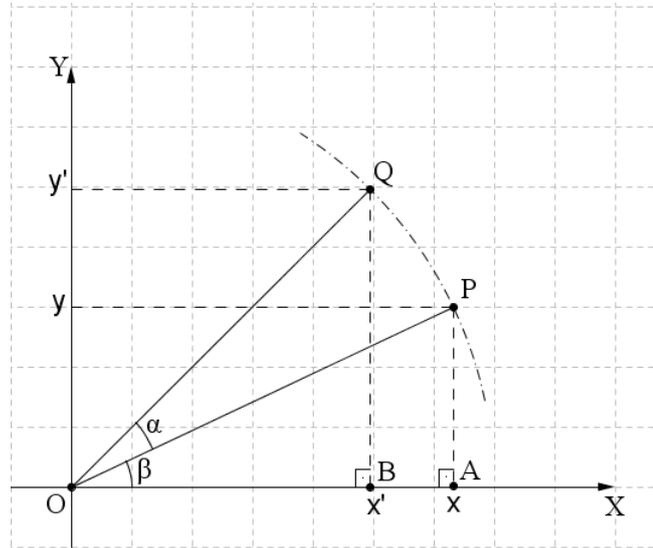


Figura 2.50: Rotação em coordenadas na origem do sistema.

Observe que são formados os triângulos  $OAP$ , retângulo em  $\hat{A}$ , e  $OBQ$ , retângulo em  $\hat{B}$ , sendo que, no triângulo  $OAP$ , temos:

$$\blacktriangleright \operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \implies \operatorname{sen}\beta = \frac{y}{\overline{OP}} \implies y = \overline{OP} \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\blacktriangleright \operatorname{cos}\beta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \implies \operatorname{cos}\beta = \frac{x}{\overline{OP}} \implies x = \overline{OP} \cdot \operatorname{cos}\beta.$$

Por outro lado, agora no triângulo  $OBQ$ :

$$\blacktriangleright \operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}} \implies \operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \frac{y'}{\overline{OQ}} \implies y' = \overline{OQ} \cdot \operatorname{sen}(\beta + \alpha).$$

$$\blacktriangleright \operatorname{cos}(\beta + \alpha) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OQ}} \implies \operatorname{cos}(\beta + \alpha) = \frac{x'}{\overline{OQ}} \implies x' = \overline{OQ} \cdot \operatorname{cos}(\beta + \alpha).$$

Assim, a partir dessas equações e observando que  $OP \equiv OQ$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \blacktriangleright x' &= \overline{OQ} \cdot \operatorname{cos}(\beta + \alpha) = \overline{OQ}(\operatorname{cos}\beta \cdot \operatorname{cos}\alpha - \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha) = \\ &= \overline{OP} \cdot \operatorname{cos}\beta \cdot \operatorname{cos}\alpha - \overline{OP} \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha = \\ &= x \cdot \operatorname{cos}\alpha - y \cdot \operatorname{sen}\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacktriangleright y' &= \overline{OQ} \cdot \text{sen}(\beta + \alpha) = \overline{OQ}(\text{sen}\beta \cdot \text{cos}\alpha + \text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\beta) = \\
&= \overline{OQ} \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{cos}\alpha + \overline{OQ} \cdot \text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\beta = \overline{OP} \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{cos}\alpha + \overline{OP} \cdot \text{cos}\beta \cdot \text{sen}\alpha = \\
&= y \cdot \text{cos}\alpha + x \cdot \text{sen}\alpha = x \cdot \text{sen}\alpha + y \cdot \text{cos}\alpha.
\end{aligned}$$

Conclusão,  $Q = (x \cdot \text{cos}\alpha - y \cdot \text{sen}\alpha, x \cdot \text{sen}\alpha + y \cdot \text{cos}\alpha)$ , isso, lembrando,  $O$  foi tomado como a origem do sistema coordenado. Agora, tomando  $O = (c, d)$ ,  $c$  e  $d$  reais e não simultaneamente nulos, e  $\alpha$  um ângulo de rotação qualquer, vamos determinar as coordenadas de  $Q = \rho_{O,\alpha}(P) = (x', y')$ .

Inicialmente, vamos fazer uma translação do segmento  $O'P$ , segundo o vetor  $\vec{v}_1 = (-c, -d)$ , que vai resultar no segmento  $OP_1$ , onde  $O = T_{\vec{v}_1}(O') = O' + \vec{v}_1 = (c, d) + (-c, -d) = (0, 0)$  é a origem do sistema de coordenadas  $XOY$  e  $P_1 = T_{\vec{v}_1}(P) = P_1 + \vec{v}_1 = (x, y) + (-c, -d) = (x - c, y - d)$ . Fazendo a rotação de  $P_1$ , fixado o ponto  $O$  e segundo o ângulo  $\alpha$ , obtemos o ponto  $P_2 = \rho_{O,\alpha}(P_1)$ , que, como anteriormente visto, terá coordenadas  $((x - c) \cdot \text{cos}\alpha - (y - d) \cdot \text{sen}\alpha, (x - c) \cdot \text{sen}\alpha + (y - d) \cdot \text{cos}\alpha)$ .

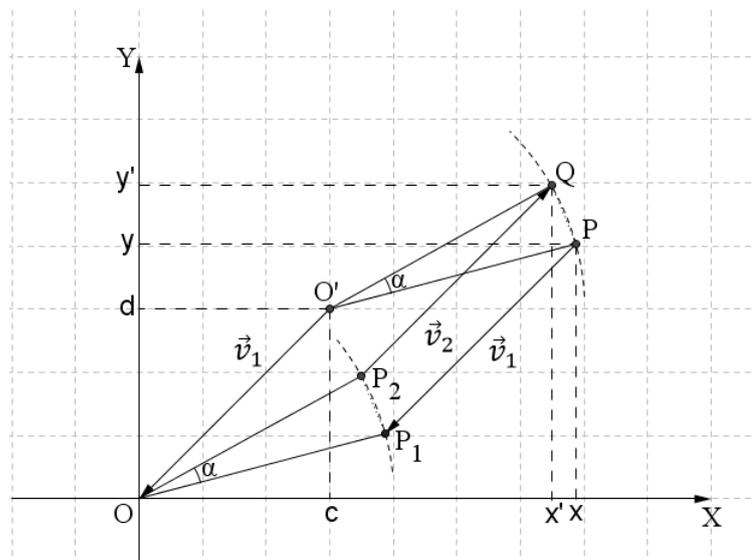


Figura 2.51: Rotação em coordenadas ao redor de um ponto fora da origem do sistema.

Ao transladar  $P_2$  segundo o vetor  $\vec{v}_2 = (c, d)$ , obtemos o ponto  $Q$ , que juntamente com os pontos  $O'$ ,  $O$  e  $P_2$ , formam um paralelogramo. Como  $O'PP_1O$  é também um paralelogramo, assim como  $QPP_1P_2$ , então os triângulos  $P_2OP_1$  e  $QO'P$  são congruentes pelo caso 'LLL', o que resulta que  $\widehat{P_2OP_1} \equiv \widehat{QO'P} = \alpha$ . Assim sendo,  $Q$  pode ser interpretado como a rotação de  $P$ , fixado o ponto  $O'$  e segundo o ângulo  $\alpha$ , isto é,  $Q = \rho_{O,\alpha}(P)$ . Logo, suas coordenadas  $(x', y')$ , as quais estamos procu-

rando, são  $Q = T_{\vec{v}_2}(P_2) = P_2 + \vec{v}_2 = ((x - c) \cdot \cos\alpha - (y - d) \cdot \operatorname{sen}\alpha, (x - c) \cdot \operatorname{sen}\alpha + (y - d) \cdot \cos\alpha) + (c, d) = ((x - c) \cdot \cos\alpha - (y - d) \cdot \operatorname{sen}\alpha + c, (x - c) \cdot \operatorname{sen}\alpha + (y - d) \cdot \cos\alpha + d)$ .

Com isso fechamos essa parte de coordenadas de isometrias no plano e, para encerrarmos a seção, vamos ver como fica a homotetia enquanto coordenadas no plano. Para isso, seja  $\mu$  uma homotetia de centro  $O$  e razão  $k$ . Vamos inicialmente supor que  $O$  seja a origem do sistema coordenado  $XOY$ .

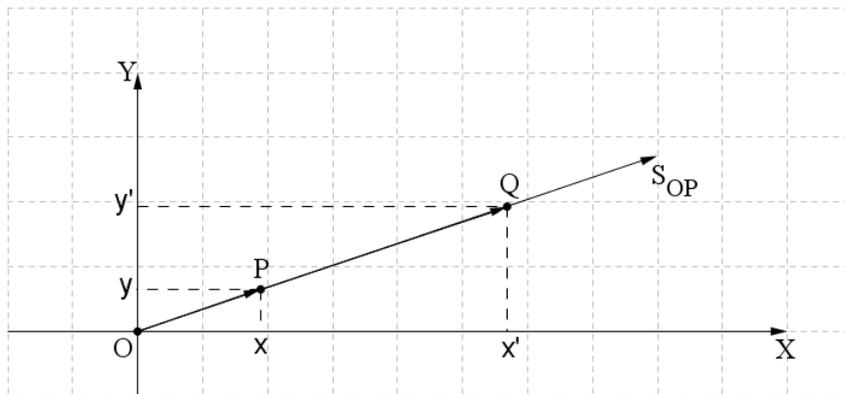


Figura 2.52: Homotetia com centro na origem do sistema coordenado

Para qualquer  $P = (x, y)$  do plano, as coordenadas  $(x', y')$  de  $Q = \mu(P)$  serão tais que  $\overline{OQ} = k \cdot \overline{OP}$ . Isso é equivalente a dizer que  $\overline{OQ} = k \cdot \overline{OP} \implies Q - O = k(P - O) \implies (x', y') - (0, 0) = k((x, y) - (0, 0)) \implies (x', y') = k(x, y) \implies (x', y') = (kx, ky)$ , isto é,  $Q = (kx, ky)$ .

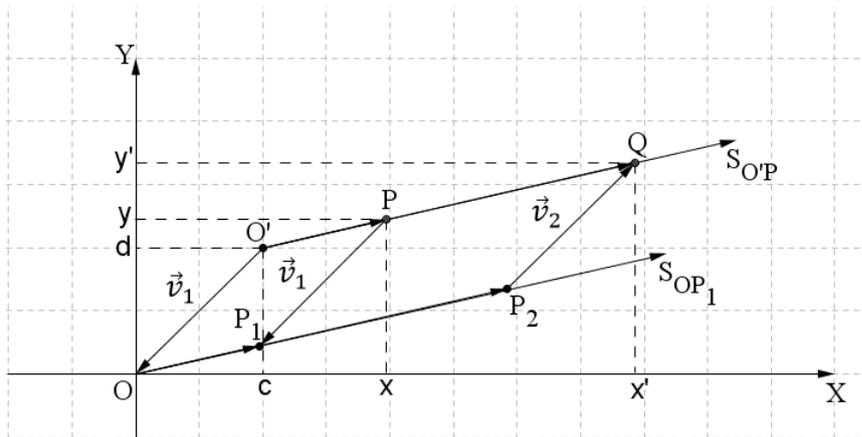


Figura 2.53: Homotetia com centro fora da origem do sistema coordenado

Caso  $O$  seja tomado fora do sistema coordenado, basta fazermos uma translação que o faça coincidir com o centro do sistema e basta procedermos como foi feito na rotação, quando o ponto foi tomado diferente da origem do sistema coordenado. Suponhamos,

então, que  $O' = (c, d)$ ,  $c$  e  $d$  números reais e não simultaneamente nulos, seja o centro da homotetia  $\mu$ . Note que  $O'P$  é levado no segmento  $OP_1$ , pela translação segundo o vetor  $\vec{v}_1 = (-c, -d)$ , sendo  $O$  a origem do sistema coordenado e  $P_1 = (x - c, y - d)$ . A homotetia  $\mu$  leva  $P_1$  no ponto  $P_2 = (k(x - c), k(y - d))$  e, finalmente,  $Q = T_{\vec{v}_2}(P_2)$ , com  $\vec{v}_2 = (c, d)$ , coincide com a homotetia de centro  $O'$  aplicada em  $P$ . Logo, as coordenadas  $(x', y')$  de  $Q = \mu(P)$  são  $Q = T_{\vec{v}_2}(P_2) = P_2 + \vec{v}_2 = (k(x - c), k(y - d)) + (c, d) = (k(x - c) + c, k(y - d) + d)$ . Perceba que, mais uma vez, são paralelogramos que viabilizam essas conclusões.

Antes de finalizarmos, vale um comentário. Como provamos na Proposição 2.27, que toda semelhança é uma isometria seguida de uma homotetia e, sabendo as coordenadas das isometrias e das homotetias, então é sempre possível, também, determinar as coordenadas de uma semelhança no plano.

## Capítulo 3

# Propostas de atividades que exploram as isometrias e as homotetias no plano

Esse capítulo tem por objetivo propor algumas atividades para que as isometrias e homotetias sejam exploradas por meio das congruências e semelhanças de figuras planas. Basicamente, são propostas duas atividades: 1) atividades num material concreto para se trabalhar isometrias e 2) atividades no GeoGebra para se trabalhar isometrias e homotetias.

Na seção 3.1, serão apresentadas atividades para se explorar isometrias no plano via congruência de figuras geométricas. Serão propostas duas atividades, uma que será desenvolvida num material concreto que desenvolvemos, e que chameamos de *plano isométrico*, e outra que será desenvolvida no GeoGebra. Discussões acerca da aplicação dessas atividades serão apresentadas nessa seção.

Na seção 3.2, que fecha o capítulo, apresentaremos algumas atividades no GeoGebra que trabalham homotetias via semelhança de figuras geométricas, bem como, algumas considerações acerca da aplicação dessas atividades.

É importante destacar que as considerações que são feitas acerca da aplicação dessas atividades são opiniões particulares que foram observadas no decorrer da aplicação. Claramente que essas atividades, independente das nossas considerações, ficam como sugestões para que os professores da educação básica, aliás, das licenciaturas em matemática, inclusive, possam utilizá-las para o ensino das isometrias e homotetias no plano.

### 3.1 Trabalhando isometrias no *plano isométrico*

O *plano isométrico* é um material didático manipulável por nós desenvolvido, cujo objetivo é incentivar os alunos, por meio de movimentações livre de figuras geométricas no plano, descobrir qual ou quais isometrias caracterizam a congruência das figuras planas apresentadas.

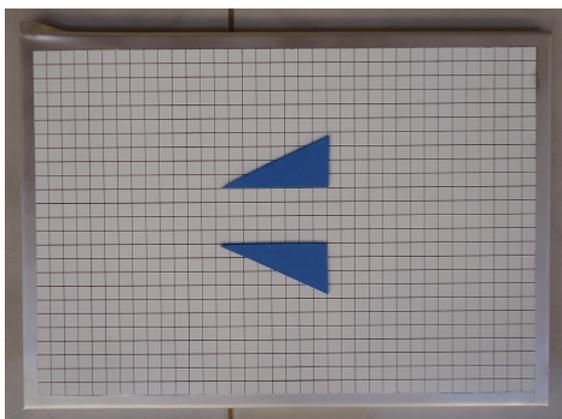


Figura 3.1: O *plano isométrico*.

Ele é constituído, basicamente, de uma placa de metal, de dimensões 38 cm por 27 cm, pintada em cinza, e um adesivo, de dimensões 37 cm por 26 cm, cuja estampa branca é um quadriculado preto de 1 cm por 1 cm, como um sistema de coordenadas, fixada na placa de metal.

Observe que na Figura 3.1 dois triângulos azuis estão fixados no plano de metal. Esses triângulos, assim como várias outras figuras geométricas que foram confeccionadas, também fazem parte do material didático manipulável. Essas figuras foram feitas em folhas de Espuma Vinílica Acetinada (EVA), de diversas cores, que tem na parte inferior, um adesivo imantado fixado. É esse adesivo que faz com que a figura fique “presa” no plano de metal.

Mas porque uma barra de metal e figuras imantadas? O material foi pensado assim para que as figuras, ao serem deslocadas pelo plano, não se “desprendam” do plano, garantindo que a movimentação das figuras de fato aconteça. Além disso, a ideia é trabalhar com o plano na vertical, como se ele fizesse o papel do quadro negro.

Voltando à Figura 3.1, note que para se chegar de um triângulo no outro, basta fazer uma reflexão. Esse exemplo simples mostra claramente a metodologia das atividades propostas no *plano isométrico*. São dadas duas figuras congruentes no plano e o estudante

tem que deslocar uma figura até coincidir com a outra e, anotar como esse deslocamento foi realizado. É importante dizermos que, dependendo da configuração das figuras no plano, pode existir mais de uma maneira de se levar uma figura na outra. O estudante deve anotar todas as isometrias ou composições das mesmas que ele observar.

É fato que cada uma dessas configurações foram previamente pensadas, exatamente para que todas as isometrias possam ser exploradas pelo estudante. Inclusive foram pensadas configurações com várias possibilidades de caminhos. O objetivo dessas atividades é evidente, uma vez manipulando e descobrindo quais isometrias caracterizam a congruência das figuras planas, o estudante fixa o conceito das diversas isometrias.

Essas atividades foram aplicadas numa turma de primeiro ano do ensino médio, composta por trinta e nove alunos, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - Campus Urutaí. Essa turma foi escolhida porque esperava que o conceito de congruência de triângulos fosse trabalhado até o nono ano do ensino fundamental. Na verdade, não foi isso que foi constatado nessa turma. Apenas três alunos estudaram congruência de triângulos no ensino fundamental. Detalhe, os estudantes dessa turma vivem em dez cidades diferentes, dos estados de Goiás, Minas Gerais e Mato Grosso.

Isso não parece assustar tanto, porque é sabido que a geometria muitas vezes não é ensinada pelos professores no ensino fundamental. Mas deixando essa discussão para uma outra oportunidade, devido ao fato de os estudantes não conhecerem congruência de triângulos, foi feita uma explanação desse conceito “tradicional” que aparece na maioria dos livros didáticos (conceito apresentado no Capítulo 1). Alguns exemplos foram feitos até que o conceito fosse apreendido. Em seguida, apresentamos o conceito de congruência de triângulos que utilizam movimentações livres no plano (conceito também apresentado no Capítulo 1).

Evidente que cada uma dessas movimentações foram apresentadas a eles e, finalmente, formalizadas como isometrias no plano. Esse momento de explanação termina quando o conceito de congruência de triângulos é generalizado para congruência de figuras geométricas via isometrias (Definição 2.15).

Afim de fixar os conceitos das diversas isometrias apresentados na explanação, os *planos isométricos* foram distribuídos entre os estudantes e, em duplas, eles realizaram várias atividades em que deveriam descobrir qual ou quais isometrias determinavam as congruências de pares de figuras geométricas planas congruentes, distribuídas em diversas

configurações diferentes no plano.

Porém, antes de apresentarmos as configurações que foram propostas e as respectivas discussões acerca dos resultados observados, julgamos necessário dizer da importância da utilização de materiais didáticos manipuláveis desse tipo, cujo princípio central é que o aluno possa aprender fazendo. Passos (2012) diz que:

“Reys (apud Matos Serrazina, 1996) define materiais manipuláveis como “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia”. Os materiais manipuláveis são caracterizados pelo desenvolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa.”(PASSOS, 2012, p. 78)

Diante desse exposto, com a utilização desses materiais em sala de aula, o aluno deixa de ser um receptor de informações e passa a ser o agente de descoberta dessas informações, uma vez que ainda é notório que a educação brasileira funciona como o professor, que detém o conhecimento, é quem passa esse conhecimento para o aluno, que de forma passiva, o recebe, sem que esse conhecimento faça sentido para ele. Quando o assunto é matemática então, vemos que essa prática de que o professor passa “verdades matemáticas” para o aluno, acontece ainda com mais frequência.

Segundo Lorenzato (2012):

“para o aluno, mais importante que conhecer essas verdades matemáticas, é obter a alegria de descoberta, a percepção da sua competência, a melhoria da autoimagem, a certeza de que vale a pena procurar soluções e fazer constatações, a satisfação do sucesso, e compreender que a matemática, longe de ser um bicho-papão, é um campo de saber onde ele, o aluno, pode navegar.”(LORENZATO, 2012, p. 25)

Fica evidente que deve haver uma mudança de postura por parte dos professores de matemática. Essa mudança também é defendida por D’Ambrosio (1996). Segundo

ele, “o professor que insistir no seu papel de fonte de transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral” (pg. 73). Isso sem citar Paulo Freire, que a muito tempo nos chama atenção sobre essa prática de transmitir conhecimentos por parte dos professores.

É nesse cenário, que vemos na utilização de materiais manipuláveis, claro que de forma preparada e bem direcionada pelo professor, uma forma bem sucedida de provocar nos alunos a experimentação e a consequente construção do conhecimento que se deseja, isto é, vemos nessa prática, uma ruptura com a metodologia de transmissão de conhecimento. Claramente que o professor que se propor a realizar atividades dessa natureza, deve elaborar o material com objetivos muito bem definidos e conduzir as atividades com amplo preparo, para que os resultados pretendidos sejam alcançados, afinal de contas, o material em si, não substitui o professor, ele apenas serve como mediador no processo professor/aluno/ensino/aprendizagem.

Sobre a melhor forma de preparar materiais desse tipo, Passos (2012) sugere alguns critérios para elaboração ou seleção de materiais manipuláveis que devem ser levados em consideração. Segundo ela:

“os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas; os materiais devem representar claramente o conceito matemático; os materiais devem ser motivadores; os materiais, se possível, devem ser apropriados para usar quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de formação de conceitos; os materiais devem proporcionar uma base para a abstração; os materiais devem proporcionar manipulação individual.” (PASSOS, 2012, p. 88)

Tomamos esses critérios como norte para a construção do material manipulável que estamos propondo, o *plano isométrico* e, todas as atividades que foram propostas, foram elaboradas com objetivos bem definidos para aquele fim, no caso, para explorar aquela ou aquelas determinadas isometrias.

Assim sendo, a seguir, passamos a descrever as atividades que foram propostas e algumas considerações sobre os resultados observados. No total, foram dez atividades, que representam dez configurações com as figuras, para que os alunos pudessem descrever

as isometrias que garantiam a congruência de triângulos. Cada configuração foi pensada para que uma isometria, ou uma composição específica de isometrias, fosse trabalhada.

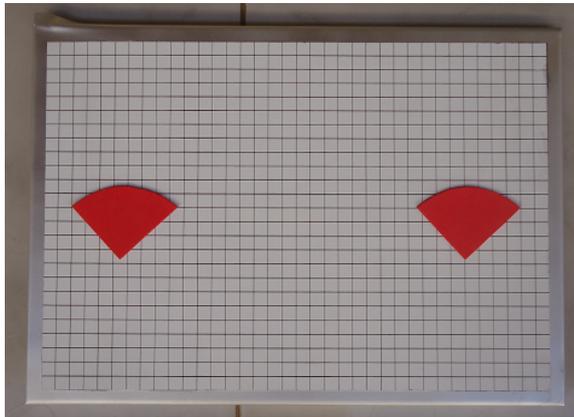


Figura 3.2: Atividade proposta no *plano isométrico* que trabalha a translação.

Na configuração proposta na Figura 3.2, o objetivo é que os alunos percebam que a isometria que garante a congruência dessas figuras é uma simples translação. Já na Figura 3.3, o objetivo é que os alunos percebam que uma reflexão deslizante leva um triângulo no outro. O fato é que em todas as dez configurações propostas, todos os alunos da sala conseguiram, com certa facilidade, movimentar as figuras no *plano isométrico* e identificar a ou as isometrias pensadas para aquele caso. O que nos surpreendeu, foi o fato de, em algumas configurações, os alunos perceberam caminhos diferentes para levar uma figura até a outra, diferente do caminho pensado para aquela atividade.

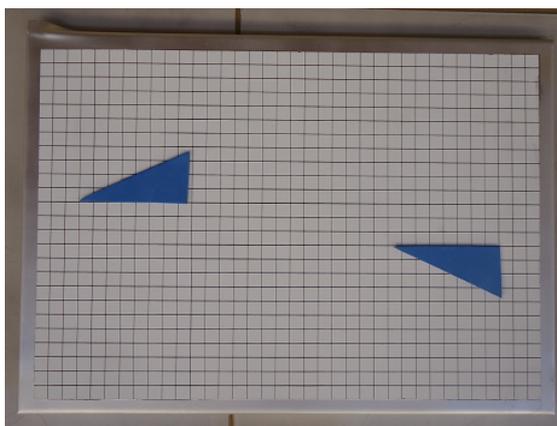


Figura 3.3: Atividade proposta no *plano isométrico* que trabalha a reflexão deslizante.

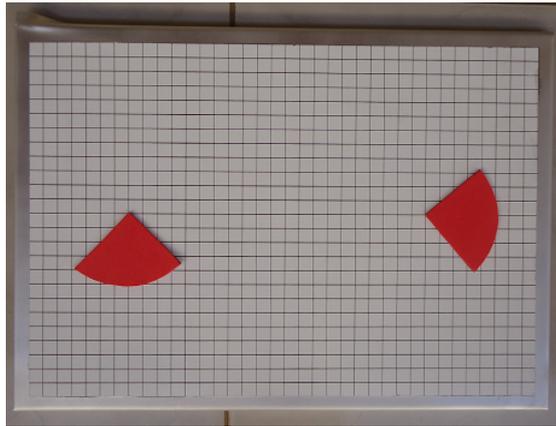


Figura 3.4: Atividade proposta no *plano isométrico* que trabalha rotação e translação.

Na Figura 3.4, a configuração é pensada para o aluno realizar uma translação e uma rotação (usaremos a notação: translação-rotação). Além dessa configuração, alguns alunos perceberam uma reflexão deslizante, uma rotação-reflexão e ainda, uma rotação-translação-reflexão.

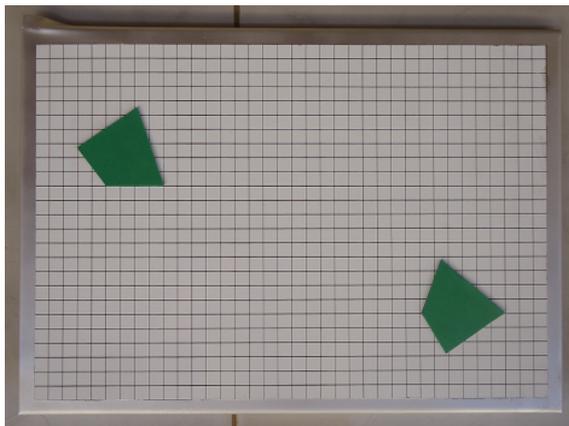


Figura 3.5: Atividade proposta no *plano isométrico* que trabalha rotação-translação-reflexão

O mesmo aconteceu com a configuração da Figura 3.5, uma configuração mais sofisticada, cujo objetivo pensado é uma translação-rotação-reflexão. Porém, os alunos constataram outras configurações que permutam essas três, como rotação-translação-reflexão, por exemplo.

Encerro essa parte mostrando mais uma configuração na Figura 3.6, cujas isometria a ser percebida era uma simples reflexão. Porém, poucos alunos a perceberam. A maioria percebeu uma rotação-translação-reflexão, ou uma permutação delas. Também perceberam uma translação-reflexão.

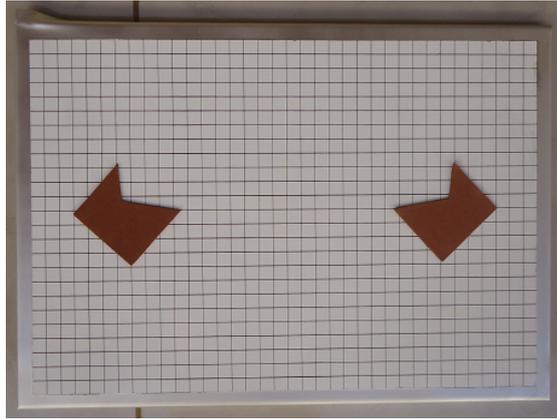


Figura 3.6: Atividade proposta no *plano isométrico* que trabalha a reflexão.

A dica para os professores que se interessarem por esse material didático manipulável, é que eles façam diversas figuras geométricas diferentes, bem como várias configurações, algumas mais sofisticadas, para que todas as isometrias e composição delas, sejam trabalhadas. Quando dizemos para que figuras diferentes sejam feitas, é para desvincular a congruência somente dos triângulos.

Fazendo um relato de experiência, achei bastante significativo a aplicação dessas atividades. Ao meu ver, os alunos se envolveram na atividade, se sentiram motivados e entenderam bem as isometrias, que era o principal objetivo.

Essa minha opinião é compartilhada pelos alunos da turma onde a atividade foi aplicada. Eles relataram que gostaram muito da atividade, do material e aprenderam as isometrias. Disseram também que mais aulas assim deveriam acontecer, pois torna o aprendizado mais interessante.

Na aplicação dessa atividade, contamos com a colaboração de três alunas do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí. Elas também acharam a atividade significativa e, inclusive, se interessaram em fazer trabalhos de conclusão de curso que proponham materiais didáticos manipuláveis que possam ser utilizados no ensino de geometria.

Além delas, o professor de matemática da turma, que gentilmente cedeu o horário para a aplicação das atividades, também acompanhou toda a aula. Segundo ele, “atividades com materiais assim, concretos, ajudam no ensino do assunto de matemática, o que facilita sua formalização depois, num segundo momento. Acho importante os alunos aprender o assunto mexendo no material”. Inclusive, numa conversa posterior, ele sugere

riu vários conteúdos em que esse plano metálico pode ser trabalhado, como por exemplo, conteúdos de geometria analítica.

Também estava presente na sala de aula, uma professora que acompanha um aluno público alvo da educação especial. No caso, ele tem uma deficiência motora. A professora, que auxiliou o aluno durante as atividades, relatou que ficou surpresa com a desenvoltura e participação do aluno nas mesmas. Ela disse que tem “total certeza que ele conseguiu aprender o conteúdo que estava sendo proposto. Eu até parabeno a iniciativa sua de propor um material assim. Para os alunos portadores de necessidades específicas, é fundamental para a aprendizagem esse tipo de material. Percebo que isso falta muito nas aulas de matemática”.

E, a exemplo do professor de matemática da turma, ela disse que, na sua vasta experiência em acompanhar alunos público alvo da educação especial nas aulas de matemática, esse material pode ser aproveitado para ensinar outros assuntos de matemática.

Ela ainda disse que seria melhor se a atividade fosse aplicada individualmente, e não em duplas como aconteceu. Explicamos que a atividade aconteceu em duplas, porque a turma tinha quase quarenta alunos e foram confeccionados apenas vinte *planos isométricos*. Esse número reduzido se deve ao fato de, primeiro, se tratar de um material experimental, portanto, não havia a necessidade de muitos, e, segundo, devido ao custo dos materiais para a confecção. Inclusive, esse é o único ponto negativo, se podemos assim dizer, que conseguimos identificar em todo o processo que transcorreu desde a elaboração até a aplicação dessas atividades. Claro que a agitação dos alunos frente a uma atividade diferenciada também pode ser tratada como ponto negativo, embora essa agitação pode ser utilizada no processo metodológico.

## 3.2 Trabalhando isometrias e homotetias no GeoGebra

Nessa seção, mais algumas atividades envolvendo isometrias serão apresentadas, porém, agora, no GeoGebra. Além dessas atividades, também serão apresentadas atividades que trabalham homotetias, via semelhança de figuras geométricas planas.

Como citamos na introdução do trabalho, o GeoGebra é um *software* livre de matemática dinâmica que trabalha, principalmente, geometria. Por ter uma plataforma

simples e com diversas opções, inclusive no espaço, o GeoGebra vem sendo bastante utilizado em sala de aula e em diversas pesquisas, realizadas por pesquisadores e professores em todo o mundo. Devido a essa facilidade de manuseio, *softwares* que trabalham geometria como o Régua e Compasso<sup>1</sup> e o Cabri-Geometry<sup>2</sup> vem caindo em desuso pelos profissionais da educação, devido a essa pequena desvantagem em relação ao GeoGebra.

Porém, trabalhar com *softwares* em sala de aula é uma prática que divide opiniões entre os educadores. Tem alguns que defendem que novas tecnologias informáticas podem sim ser utilizadas num ambiente educacional, assim como tem aqueles que descartam o uso dessas tecnologias em suas aulas. Nós compartilhamos do grupo que defende a utilização da informática na educação. Para nós, assim como no caso dos materiais concretos manipuláveis, a utilização da informática na educação possibilita novas metodologias e se apresentam como uma tentativa de resolver problemas da prática do ensino tradicional que, como já falei anteriormente, ainda vigora no Brasil.

Para Borba e Penteado (2010), “uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento” (p. 45). Ainda segundo eles, essa prática de utilização de novas tecnologias informáticas,

“está também em harmonia com uma visão de construção de conhecimento que privilegia o processo e não o produto-resultado em sala de aula, e com uma postura epistemológica que entende o conhecimento como tendo sempre um componente que depende do sujeito.” (BORBA e PENTEADO, 2010, p. 46)

Claramente que a utilização dessas tecnologias informáticas, como a utilização de um *software* matemático, por exemplo, exige preparação por parte do professor. Assim como no caso dos materiais manipuláveis, o professor tem que elaborar as atividades focadas naquele objetivo que se deseja alcançar. Segundo Borba e Penteado (2010),

---

<sup>1</sup>*Software* livre de geometria dinâmica que foi elaborado por René Grothmann e equipe, que explora principalmente construções geométricas com régua e compasso.

<sup>2</sup>*Software* de construção em geometria desenvolvido por cientistas da informática, especialistas em educação e professores do Institut d’Informatique et de Mathematiques Appliquees em Grenoble (IMAG).

“quando decidimos que a tecnologia informática vai ser incorporada em nossa prática, temos que, necessariamente, rever a relevância da utilização de tudo o mais que se encontra disponível. Certamente, ao fazermos nossas opções, corremos o risco de deixar de lado certas coisas que julgávamos importante. Mas, aqui, novamente, é preciso considerar qual é o objetivo da atividade que queremos realizar e saber se ela não pode se desenvolvida com maior qualidade pelo uso, por exemplo, de um *software* específico. Não significa que vamos abandonar as outras mídias, mas temos que refletir sobre sua adequação.” (BORBA e PENTEADO, 2010, p. 64)

Conclusão, ao se pensar numa mídia para se trabalhar determinado assunto, não só o aluno passa por um período de aprendizagem, mas o professor também, que tem que dominar detalhadamente aquele determinado *software* para o qual a atividade está sendo proposta.

Esse seria o gargalo e a justificativa principal para a resistência de alguns professores em utilizar essas tecnologias nas salas de aula. Para eles, essas atividades demandam tempo e principalmente, atualização contínua, pois as novidades nessa área de informática sugerem a cada dia num ritmo muito veloz. Na verdade, existe um despreparo por parte dos professores em trabalhar com computadores, embora, isso tem melhorado a cada dia.

Além desse problema, os professores criticam bastante os laboratórios de informática nas escolas, que, quando existem, apresentam problemas estruturais e máquinas ultrapassadas. Claramente que esse problema existe, mas é notório que, cada vez mais, os governos têm investido na construção de laboratórios de informática nas escolas e na manutenção dos mesmos, principalmente por causa da *internet*, que de uma forma ou de outra, já faz parte das nossas vidas e é inegável que está completamente inserida no ambiente educacional.

Enfim, é diante dessas reflexões expostas, e apesar dos problemas existentes, que enxergamos na utilização das tecnologias de informática, aliados na educação, principalmente na matemática. Pense como é bem mais simples visualizar gráficos de determinadas funções no computador, por exemplo. Mas é importante dizer que, assim como no caso dos materiais manipuláveis, o computador não substitui o professor, ele é apenas um instrumento mediador dessa complicada relação ensino/aprendizagem. É nesse contexto,

que propomos o GeoGebra como ferramenta para trabalhar as isometrias (ou homotetias), cujas atividades propostas seguem a mesma dinâmica das atividades realizadas no *plano isométrico*.

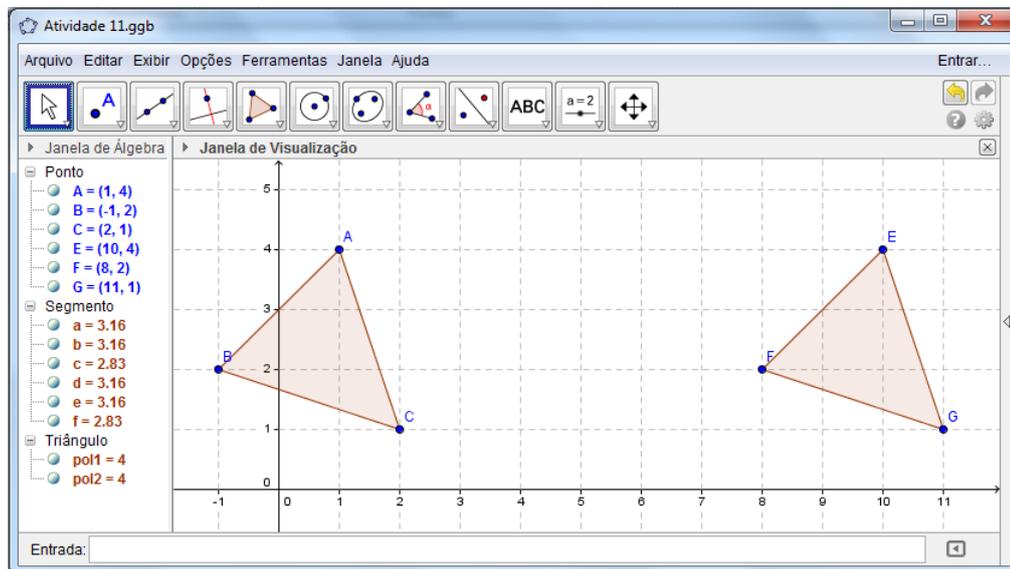


Figura 3.7: ABC é congruente a EFG via translação.

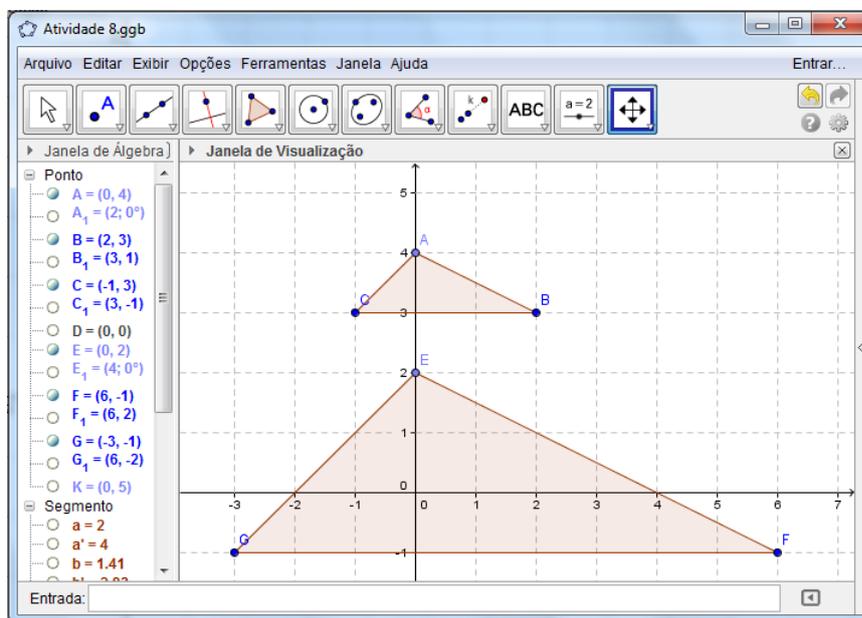


Figura 3.8: ABC é semelhante a EFG via homotetia.

Basicamente, algumas configurações de figuras geométricas congruentes (ou semelhantes) são propostas no GeoGebra e, o estudante, tem que deslocar uma figura até a outra, descobrindo quais isometrias (ou homotetias) foram utilizadas para esse fim. Afim

de exemplificar, o triângulo ABC é congruente ao triângulo EFG na Figura 3.7. O estudante deve perceber que uma simples translação horizontal leva um triângulo no outro. Já na Figura 3.8, os triângulos ABC e EFG semelhantes. O estudante deve perceber que uma homotetia de razão  $k = 3$  e com centro no ponto  $O(0,5)$ , garante essa semelhança.

Para realizar a movimentação das figuras, assim como a “ampliação” ou “redução” delas no Geogebra, o estudante deve utilizar ferramentas que trabalham as isometrias e a homotetia que se encontram na nona aba da barra de ferramentas horizontal, localizada na parte superior da janela de visualização do GeoGebra. Essa aba é representada por dois pontos, um vermelho e um azul, separados por uma reta.

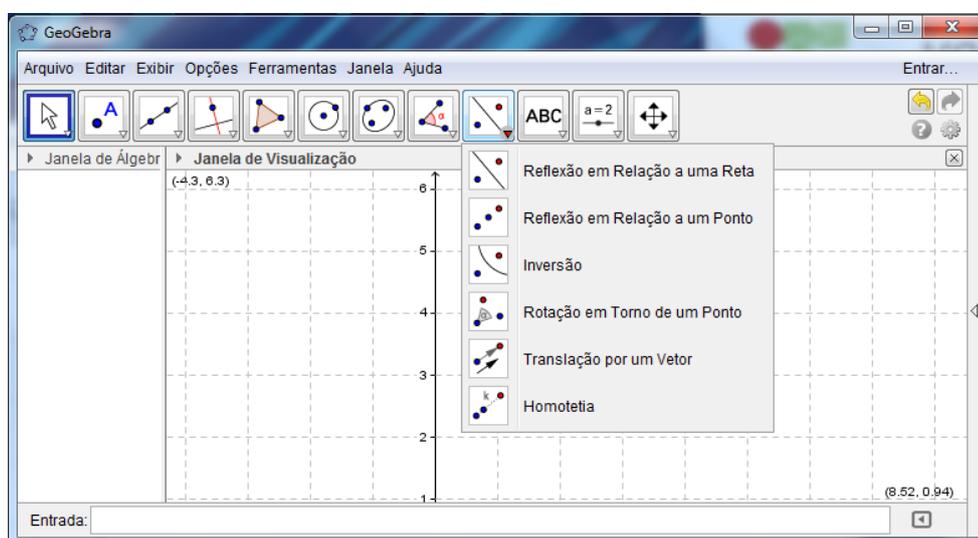


Figura 3.9: Aba das isometrias e da homotetia no GeoGebra.

Ao clicar na seta que se encontra no canto inferior direito dessa aba, aparecem seis opções dispostas numa barra vertical, que trabalham as isometrias e a homotetia. Dessas seis opções, quatro serão utilizadas na aplicação das atividades. A primeira delas, que é a primeira opção da barra vertical, cuja representação são dois pontos separados por uma reta, trata-se da reflexão em torno de uma reta. Para realizar a reflexão, o objeto a ser refletido é selecionado e, em seguida, a reta de reflexão também é selecionada. Feito isso, o objeto selecionado aparece refletido em relação à reta selecionada.

Vale ressaltar que a reta que vai possibilitar a reflexão deve ser construída e, o que possibilita a construção de retas no GeoGebra, é a terceira aba da barra de ferramentas horizontal da janela de visualização do GeoGebra, cuja representação é uma reta com dois pontos azuis. Assim para construir uma reta, basta selecionar essa aba e, depois,

selecionar dois pontos distintos no plano cartesiano<sup>3</sup>.

A segunda opção que será utilizada, aparece na quarta aba da barra vertical, cuja representação são dois pontos e um ângulo. Trata-se claramente da rotação em torno de um ponto. Para efetuar a rotação, três elementos devem ser selecionados: o objeto a ser rotacionado, o ponto que será o vértice do ângulo de rotação e, claro, o ângulo de rotação. Ao final dessas indicações, o objeto selecionado aparece rotacionando.

Para construir pontos no GeoGebra, o estudante deve utilizar a segunda aba da barra de ferramentas horizontal, cuja representação é um ponto azul com a letra A. Ao clicar nessa aba, o estudante basta clicar no local em que se deseja construir o ponto no plano cartesiano.

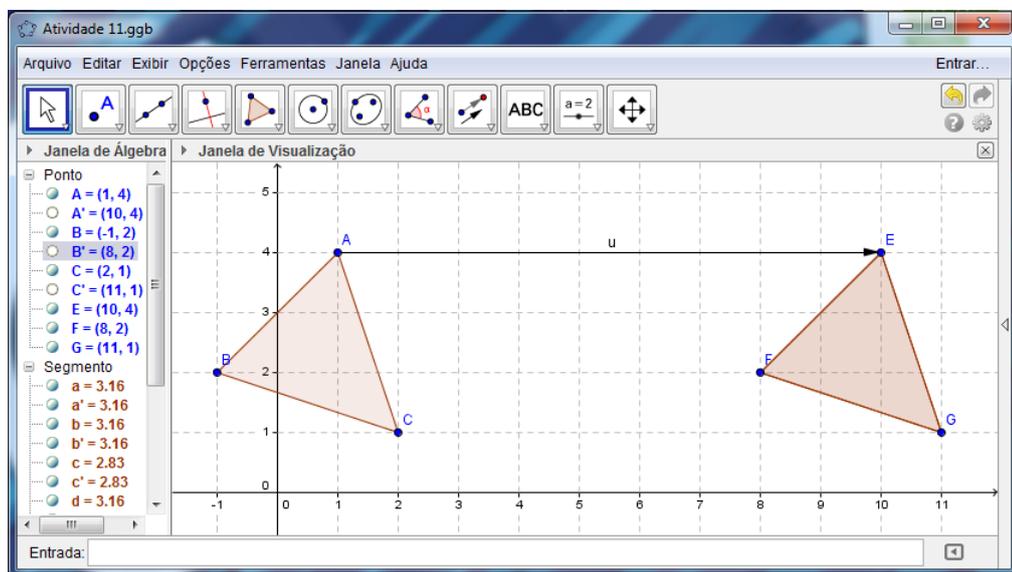


Figura 3.10: EFG é resultado de uma translação de ABC.

A terceira opção, que se encontra na quinta aba da barra vertical e tem dois pontos e dois vetores por representação, trata-se da translação. Para efetuar a translação, o objeto a ser transladado deve ser selecionado e, em seguida, o vetor que possibilitará a translação deve ser informado. O resultado, claro, será o objeto selecionado transladado segundo o vetor indicado. Para facilitar na visualização, vimos na Figura 3.7, que uma simples translação horizontal leva o triângulo ABC no triângulo EFG. Ao observar a figura 3.10, podemos ver como essa translação é efetuada, onde o triângulo ABC foi selecionado e um vetor  $\vec{u}$  foi deslocado do ponto A até o ponto E, culminado no deslocamento do triângulo ABC até o triângulo EFG.

<sup>3</sup>Axioma de Determinação da geometria plana: por dois pontos distintos, passa uma única reta.

Por fim, a quarta opção que será utilizada nas atividades, encontra-se na sexta aba da barra de ferramentas vertical. Essa aba trata-se das homotetias e tem por representação, dois pontos azuis e um vermelho e a letra  $k$ . Para realizar a homotetia, o estudante deve selecionar o objeto que vai sofrer a homotetia, o ponto que será o centro da homotetia e a razão  $k$ . Para exemplificar, dissemos que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo EFG na Figura 3.8. Note que a Figura 3.11 traz a sequência que leva um triângulo no outro, onde, para isso, o triângulo ABC foi selecionado, em seguida o ponto  $O(0,5)$  foi marcado e selecionado para ser o centro da homotetia e a razão  $k = 3$  foi indicada.

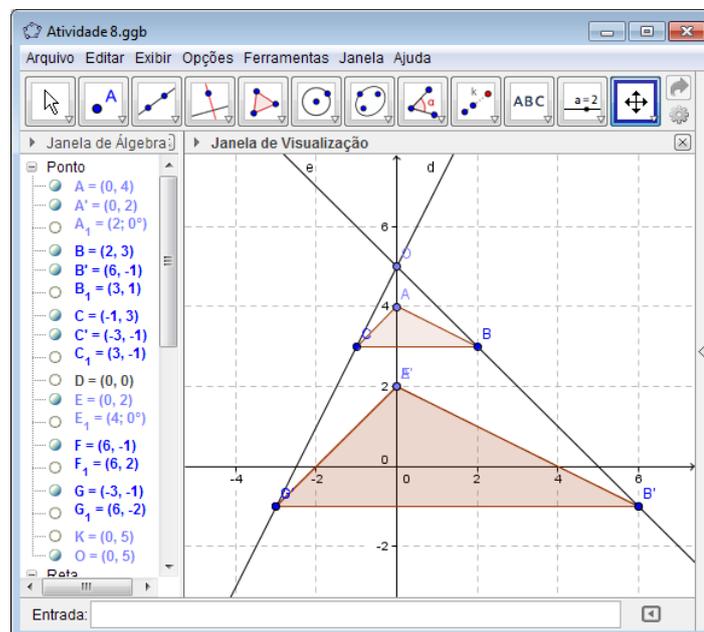


Figura 3.11: EFG é resultado de uma homotetia de ABC.

Claramente que existe uma dificuldade em identificar o ponto que será o centro da homotetia, bem como a razão da mesma. O mesmo pode acontecer quando o estudante for encontrar o ponto que será o vértice do ângulo de rotação, bem como o ângulo de rotação. A escolha dos pontos que determinam a reta de reflexão pode também não ser simples mas, os comandos para realização dessas ações no GeoGebra, como anteriormente mostrados, são bastante simples para o estudante.

Temos clareza que essa rápida explanação sobre os comandos no GeoGebra não foram suficientes para aqueles que ainda não conhecem o *software*. Sugerimos que o interessado em conhecer o *software*, bem como fazer o download, acesse o site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), onde tutoriais explicativos que versam sobre suas ferramentas e sua utilização, podem

ser encontrados.

Voltando às atividades propostas, antes de qualquer atividade ser aplicada, os comandos no GeoGebra que seriam utilizados foram apresentados aos estudantes e trabalhados até que eles conseguissem ter o total domínio deles. Somente depois é que as atividades foram propostas. E detalhe, cada configuração seguinte apresentava um nível de dificuldade maior que a anterior, exatamente para ver até onde eles conseguiam identificar as isometrias e/ou homotetias que caracterizavam as congruências ou semelhanças dos pares de figuras geométricas propostas.

A aplicação das atividades aconteceram nas dependências do laboratório de informática do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Goiano - Câmpus Urutaí. Contamos com a colaboração de duas alunas desse curso na aplicação dessas atividades que, claro, foram aplicadas para os mesmos alunos que trabalharam com as atividades no *plano isométrico*. Por se tratar de uma turma numerosa e devido ao fato do laboratório de informática ter apenas vinte e quatro computadores, a turma foi dividida em duas e as atividades foram aplicadas ao longo de quatro aulas, durante duas semanas. Primeiramente foram trabalhadas as isometrias e depois, as homotetias.

Resumido tudo que foi falado até agora, as atividades seguiram a seguinte sequência didática: explanação sobre congruência/semelhança de figuras planas; exploração dos comandos que trabalham as isometrias e homotetias no GeoGebra (juntamente com outros comandos envolvidos, como a criação de pontos, retas e ângulos), por meio atividades simples preparadas para esse fim; aplicação das atividades (configurações com duplas de figuras congruentes/semelhantes, como foi feito no *plano isométrico*) e discussão dos resultados acerca da aplicação das atividades.

Nas seções seguintes, algumas dessas atividades, bem como algumas considerações sobre a aplicação delas, serão apresentadas.

### 3.2.1 Trabalhando isometrias no GeoGebra

Com o simples objetivo de ensinar os comandos no Geogebra que realizam cada uma das isometrias, quatorze atividades iniciais foram propostas para os alunos. Cada uma dessas atividades foram pensadas para que uma única isometria fosse trabalhada.

Afim de exemplificar, as Figuras 3.12 e 3.13 foram configurações propostas. A primeira representa uma simples reflexão em relação à reta  $x = 7$ , enquanto que a segunda

representa uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário, em relação à origem do sistema.

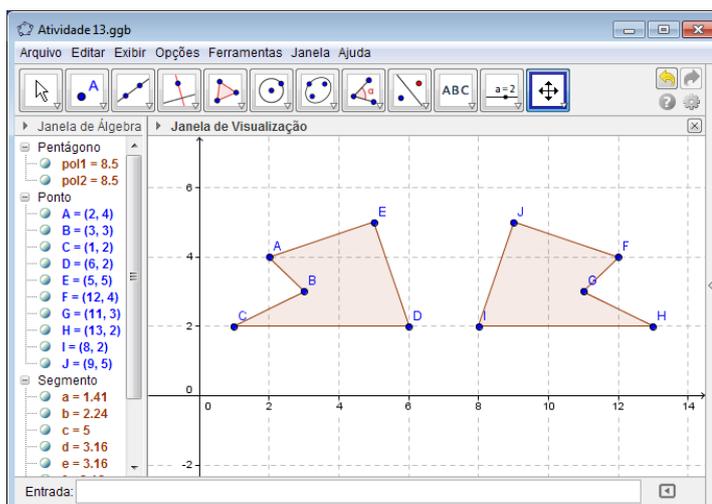


Figura 3.12: A figura FGHIJ é reflexão da figura ABCDE.

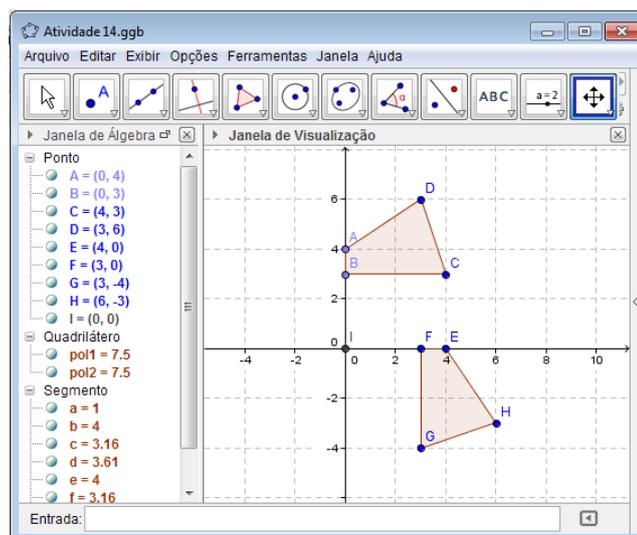


Figura 3.13: A figura EFGH é rotação da figura ABCD.

Uma vez entendido os comandos no GeoGebra, quatro configurações foram propostas para que os alunos pudessem identificar as isometrias que garantiam a congruência do par de figuras geométricas propostas e, em todas as atividades propostas, praticamente todos os alunos conseguiram “levar” uma figura na outra, sem apresentar muitas dificuldades e, detalhe, várias formas diferentes de solução foram apresentadas.

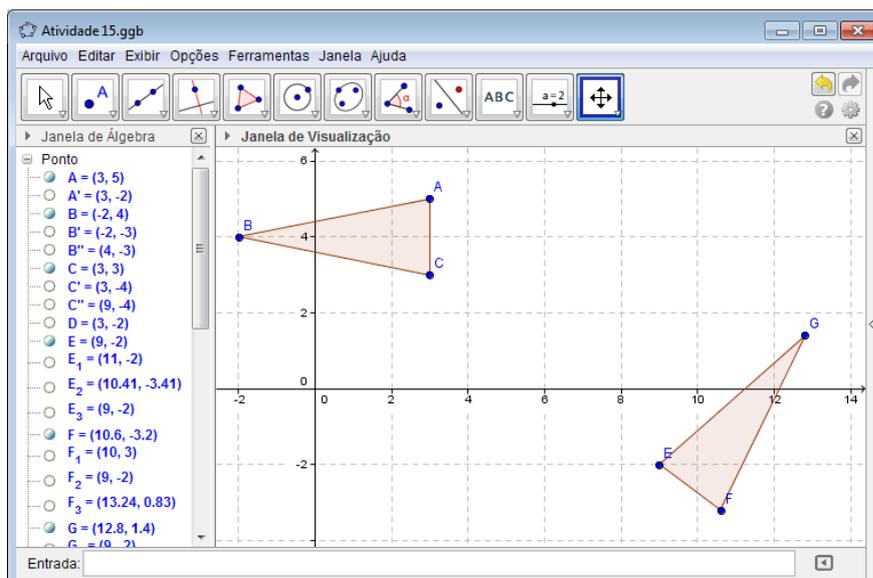


Figura 3.14: Atividade 1 de congruências aplicada no GeoGebra.

A Figura 3.14, que traz o triângulo ABC congruente ao triângulo EFG, foi a primeira configuração proposta. Ela foi pensada para que o aluno pudesse trabalhar com uma translação e uma rotação. Dos trinta e nove alunos participantes, trinta e seis alunos apresentaram translações e rotações em suas respostas, como a resposta representada na Figura 3.15.

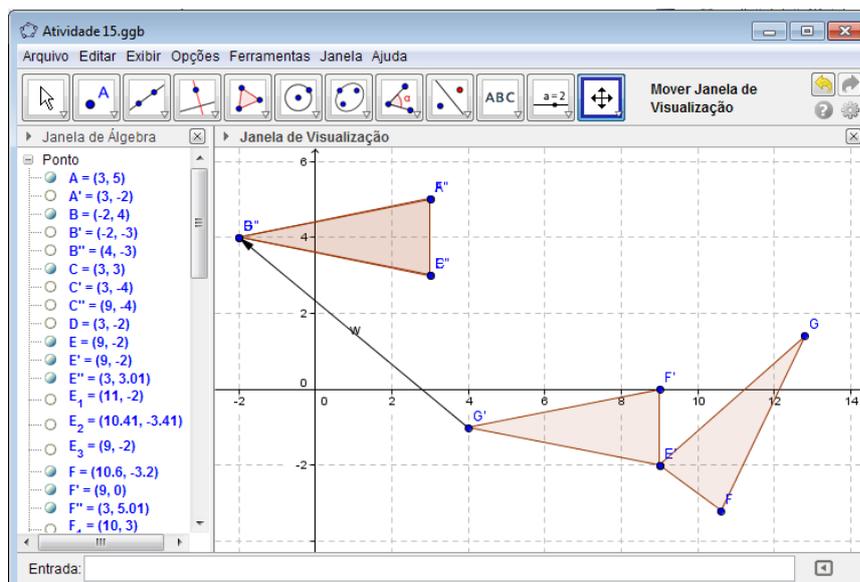


Figura 3.15: Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.14.

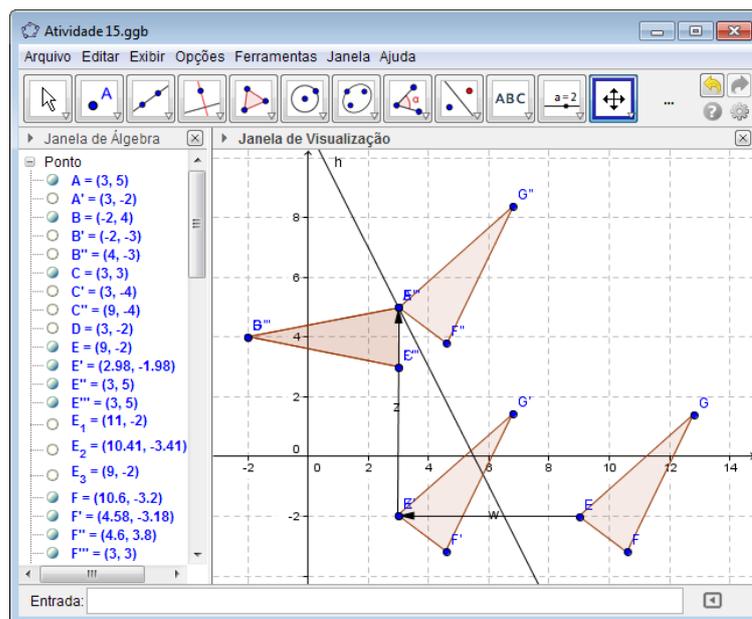


Figura 3.16: Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.14.

Dois alunos apresentaram respostas que continham translações e reflexões, como a resposta representada na Figura 3.16 e apenas um aluno não conseguiu realizar a atividade.

A segunda atividade proposta, cuja configuração pode ser vista na figura 3.17, traz o polígono ABCDE congruente ao polígono FGHIJ. Essa configuração foi pensada para que, novamente, a congruência das figuras fosse garantida por uma translação e uma rotação.

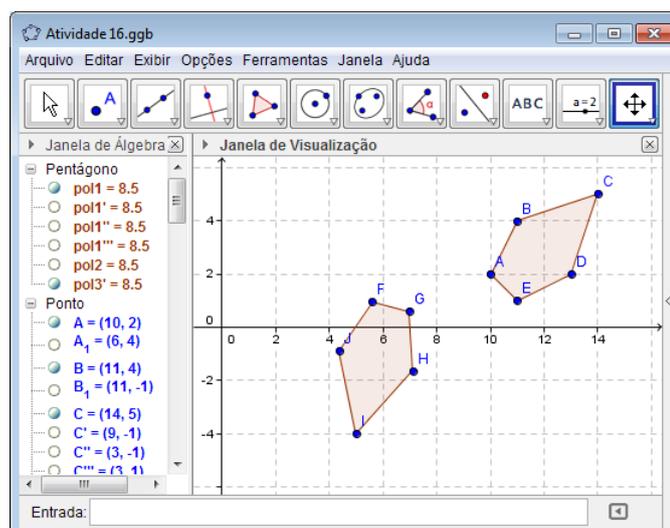


Figura 3.17: Atividade 2 de congruências aplicada no GeoGebra.

Diferentemente da primeira atividade proposta, todos os alunos conseguiram realizar essa atividade utilizando, a menos de ordem, translações e rotações. A Figura 3.18 apresenta a resposta que mais apareceu nas respostas dadas pelos alunos. Só a título de curiosidade, grande parte dos alunos utilizaram a função de ângulos do GeoGebra (oitava aba da barra de ferramentas horizontal) para descobrir qual o ângulo de rotação que deveria ser utilizado.

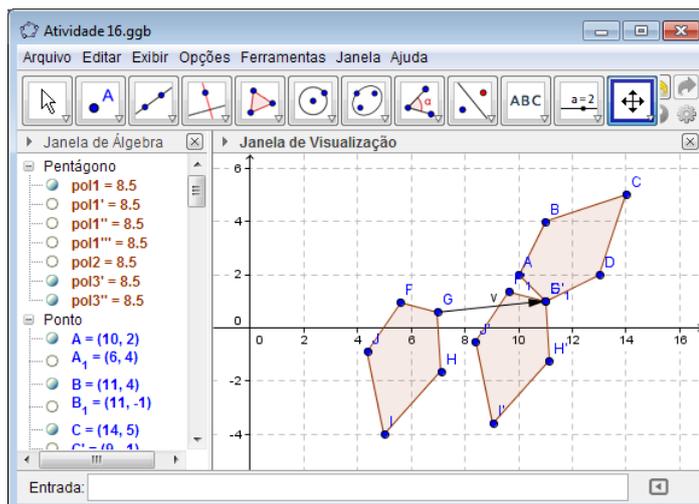


Figura 3.18: Resultado da atividade proposta na Figura 3.17.

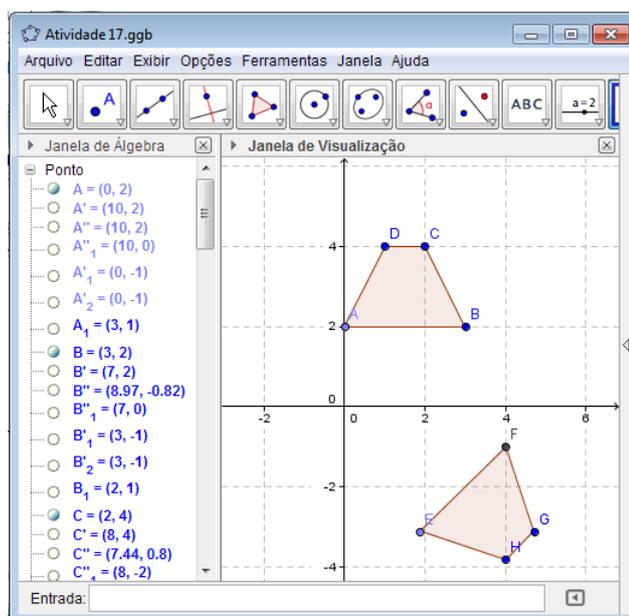


Figura 3.19: Atividade 3 de congruências aplicada no GeoGebra.

A Figura 3.19 traz a terceira configuração proposta. Nela, os quadriláteros ABCD e EFGH são congruentes e, uma simples reflexão garante essa congruência. Porém, diante

de todas as respostas apresentadas, nenhum aluno percebeu que uma simples reflexão garante a congruência. A Figura 3.20 apresenta a resposta dada por vinte e seis alunos, que utilizaram translações e rotações para “levar” um quadrilátero no outro.

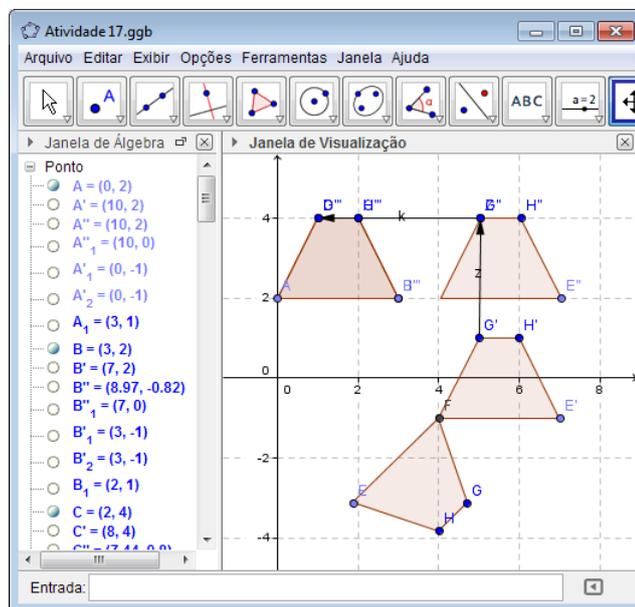


Figura 3.20: Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.19.

Já onze alunos utilizaram rotações, translações e reflexões. Um dessas respostas pode ser vista na Figura 3.21. Dois alunos não conseguiram realizar a atividade.

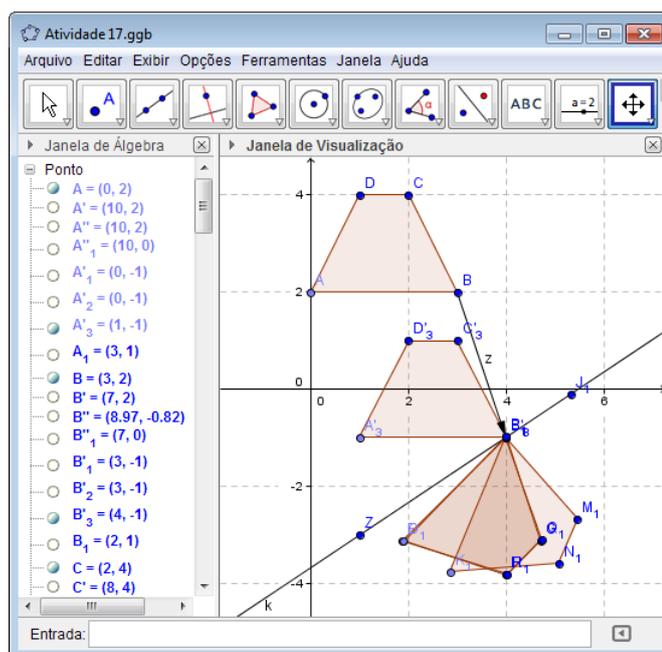


Figura 3.21: Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.19.

A quarta e última atividade proposta, um pouco mais sofisticada, pode ser conferida na Figura 3.22. Nela, os polígonos ABCDEF e GHIJKL são congruentes. Para garantir essa congruência, translações, reflexões e rotações são necessárias.

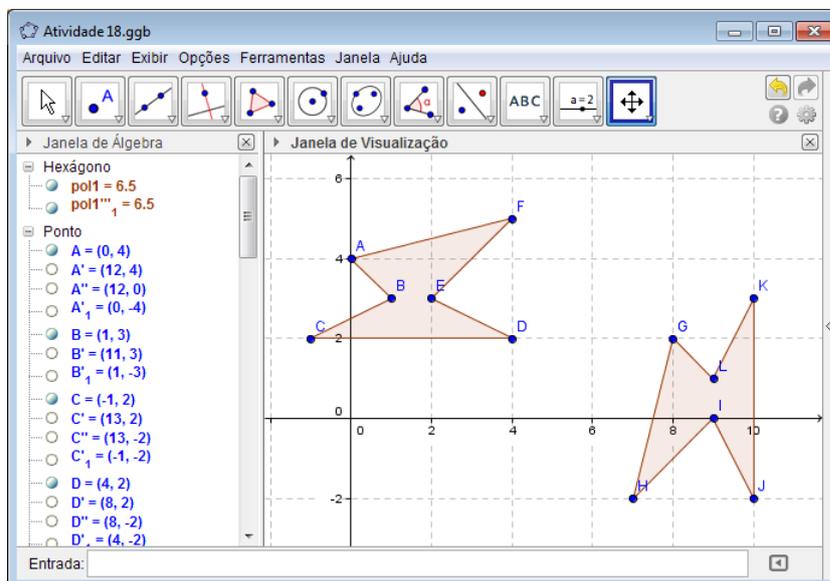


Figura 3.22: Atividade 4 de congruências aplicada no GeoGebra.

Dentre todos os alunos, apenas um não conseguiu realizar a atividade. Os demais conseguiram, utilizando-se de translações, reflexões e rotações, “levar” uma figura na outra.

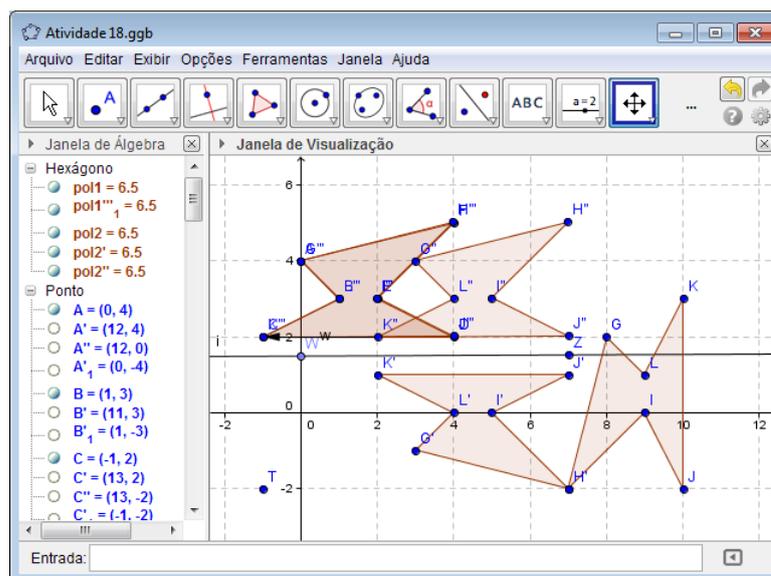


Figura 3.23: Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.22.

As Figuras 3.23 e 3.24 trazem as respostas que mais foram dadas pelos alunos.

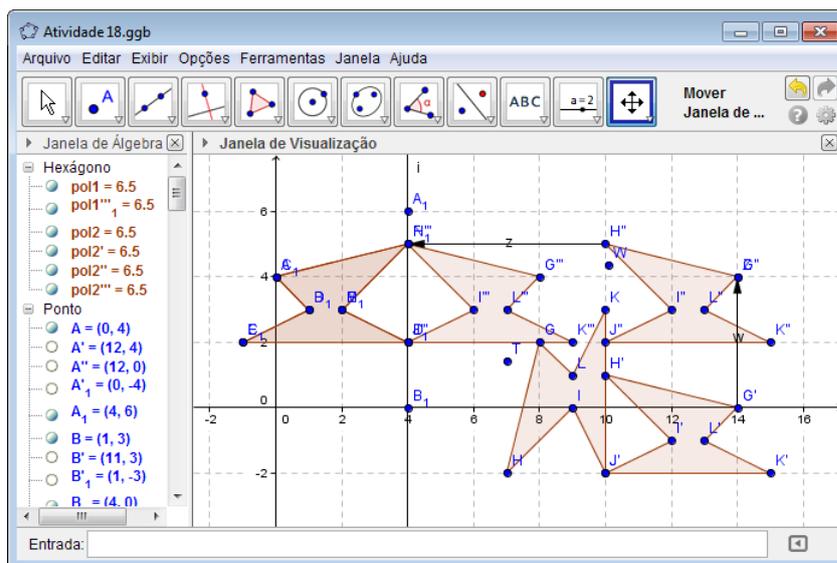


Figura 3.24: Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.22.

Devido ao pequeno número de alunos que não conseguiram completar as atividades e pela pluralidade de respostas apresentadas, julgamos que o objetivo foi alcançado e que eles conseguiram entender cada uma das isometrias, assim como o conceito de congruência de figuras geométricas. Essa opinião também é compartilhada pelo professor da turma que acompanhou a aplicação das atividades, bem como pelas alunas do curso de Licenciatura em Matemática, que auxiliaram na aplicação das mesmas. A professora acompanhante do aluno público alvo de educação especial, também considerou as atividades satisfatórias. Ela ainda salientou que “o computador vem sendo utilizado cada vez mais nas escolas e tem se tornado um elemento fundamental quando o assunto é a inclusão dos alunos na escola”.

O fato é que todos os alunos, a exemplo do que aconteceu na aplicação das atividades no *plano isométrico*, se sentiram motivados e participaram das atividades, o que mostra que, de fato, atividades devem sim ser desenvolvidas no laboratório de informática das escolas. Aproveitamos a oportunidade para perguntar sobre as instalações dos laboratórios de informática das escolas que eles cursaram o ensino fundamental. O que motivou essa rápida pesquisa, foi a fato deles terem vindo de regiões diferentes de três estados, fato que já havíamos mencionado nesse capítulo.

As respostas deles vêm confirmar a suspeita de que os laboratórios, quando existem nas escolas, estão com muitas máquinas defeituosas e que os professores de matemática geralmente não utilizam o laboratório.

Antes de fechar essa seção, gostaríamos de deixar uma sugestão para os professores que se interessarem em aplicar atividades como essa no GeoGebra, para trabalhar isometrias via congruências de figuras geométricas. A sugestão é que façam as configurações de modo que elas explorem ao máximo cada uma das isometrias. É importante que figuras geométricas de diversas formas sejam utilizadas, exatamente para quebrar a imagem que temos de que somente triângulos são congruentes, e que as configurações apresentem um grau de dificuldade cada vez maior. Também é importante que os comandos do GeoGebra sejam muito bem trabalhados junto aos alunos antes da aplicação das atividades, pois julgamos que, em parte, essa foi a causa de alguns alunos não terem concluído as atividades propostas nesse trabalho.

### 3.2.2 Trabalhando homotetias no GeoGebra

As atividades propostas no GeoGebra para trabalhar homotetias seguem a mesma dinâmica das atividades propostas para se trabalhar isometrias. Isto é, configurações com duas figuras geométricas semelhantes são apresentadas e o aluno tem que identificar quais isometrias e qual homotetia possibilitam essa semelhança.

Porém, antes de passar propriamente para as atividades, uma explanação sobre semelhança de figuras planas foi feita, a exemplo de como foi feito quando as atividades sobre congruências foram aplicadas no *plano isométrico*. O conceito de homotetia foi apresentado, assim como, a Definição 2.28 do Capítulo 2. É importante ressaltar que somente dois alunos já haviam estudado superficialmente as semelhanças de triângulos.

Depois dessas considerações iniciais sobre a semelhança, foram aplicadas onze atividades que continham configurações de pares de diversas figuras geométricas semelhantes, para que os alunos pudessem conhecer e familiarizar o comando do Geogebra que trabalha com homotetias. Já é sabido por nós que, nesse comando, o aluno deve identificar e informar o centro da homotetia, bem como a razão da mesma.

A configuração apresentada na Figura 3.25, por exemplo, foi uma configuração proposta para os alunos, onde o quadrilátero EFGH, semelhante ao quadrilátero ABCD, é obtido deste, via uma homotetia de centro na origem do sistema e razão  $k = 2$ .

Uma vez familiarizados com o comando da homotetia no GeoGebra e, de posse dos comandos que trabalham as isometrias, quatro atividades que apresentam duas figuras geométricas semelhantes foram propostas, para que os alunos pudessem identificar as

isometrias e a homotetia que “levam” uma figura na outra.

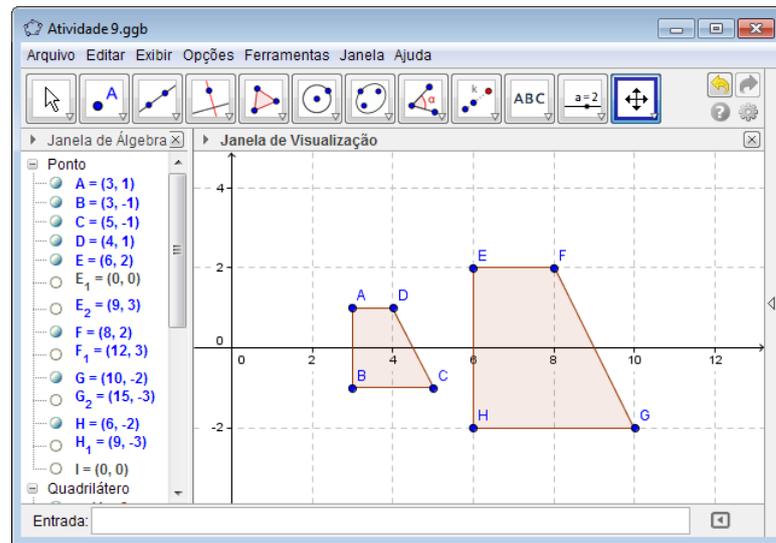


Figura 3.25: Quadrilátero ABCD é semelhante ao quadrilátero EFGH.

A primeira atividade proposta pode ser vista na Figura 3.26. Nela, os polígonos ABCDEF e GHIJKL são semelhantes e, foi pensado numa reflexão em relação à reta  $x = 1$ , seguida de uma homotetia de razão  $k = 4$  e centro no ponto  $O(2, -3)$ , para que ABCDEF fosse “levado” em GHIJKL. Todos os alunos conseguiram “levar” uma figura na outra, porém, nenhum, realizou a movimentação da forma como foi inicialmente pensada, embora a reflexão tenha sido a isometria que mais apareceu nas respostas dos alunos.

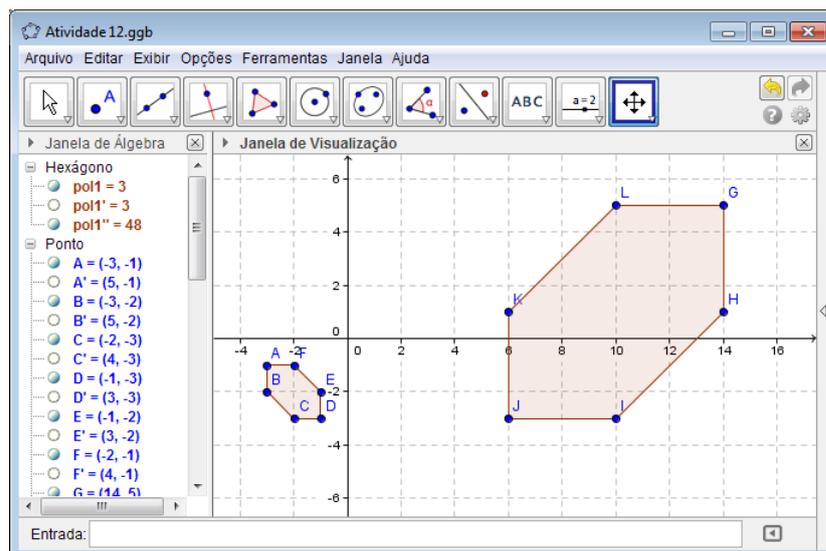


Figura 3.26: Atividade 1 de semelhanças aplicada no GeoGebra.

A Figura 3.27 traz a resposta que mais se repetiu, onde a reflexão e, claro, a

homotetia, foram utilizadas. No total, vinte e uma respostas foram dadas com essas duas operações geométricas.

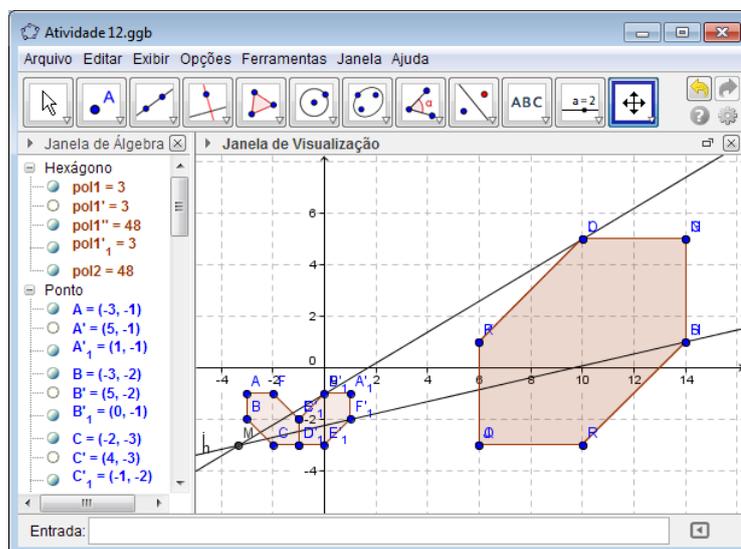


Figura 3.27: Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.26.

Em segundo lugar, treze respostas similares, que utilizam translações, reflexões e homotetias, foram dadas. Um exemplo é dado na Figura 3.28.

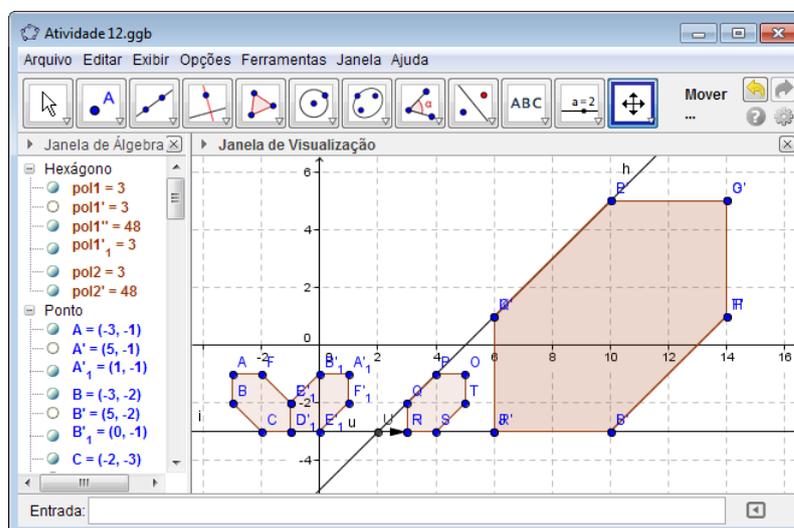


Figura 3.28: Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.26.

A segunda atividade proposta pode ser vista na Figura 3.29. Nela, uma simples homotetia com centro no ponto  $O(-8, 5, -4)$  e razão  $k = 3$ , aplicada no quadrilátero ABCD, configura a semelhança entre os dois quadriláteros.

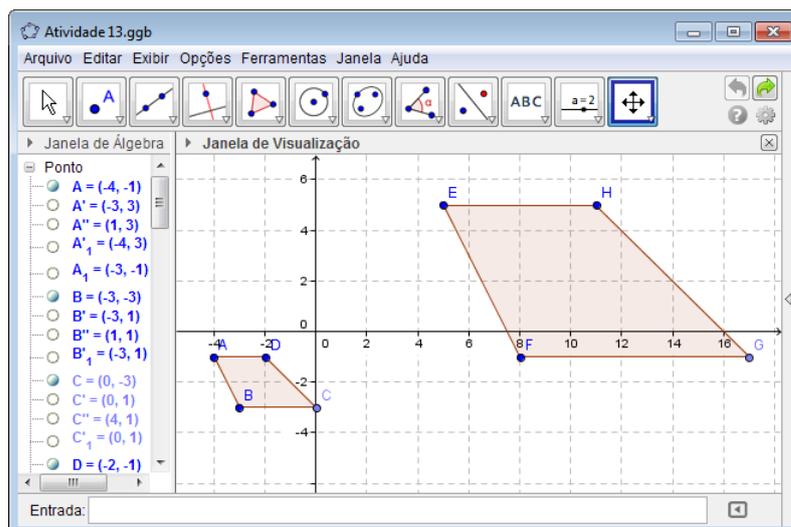


Figura 3.29: Atividade 2 de semelhanças aplicada no GeoGebra.

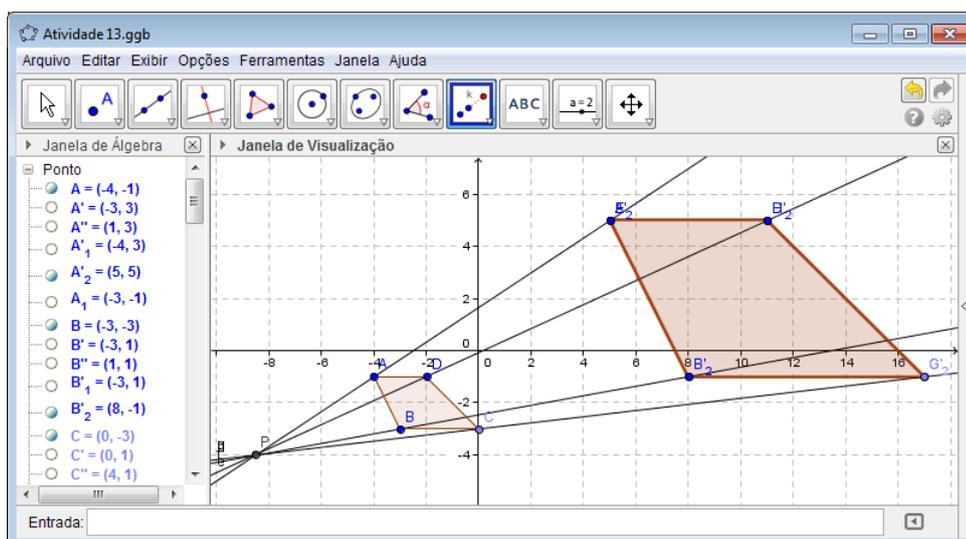


Figura 3.30: Resultado da atividade proposta na Figura 3.29.

Para essa configuração, a resposta foi unânime. Na Figura 3.30 é possível ver a resposta de um dos alunos. Aqui vale um comentário interessante sobre essa atividade. Os alunos descobriram o centro da homotetia ao considerar as retas que passam pelos vértices correspondentes das duas figuras. E percebemos que foi esse o método utilizado pelos alunos para descobrir o centro da homotetia em todas as atividades propostas.

A terceira atividade proposta, que pode ser vista na Figura 3.31, traz o triângulo ABC semelhante ao triângulo EFG. Essa semelhança acontece devido a uma rotação de  $45^\circ$  em relação a C no sentido horário, seguida de uma homotetia de razão  $k = 3$  e centro no ponto  $O(-2, -2, 5)$ .

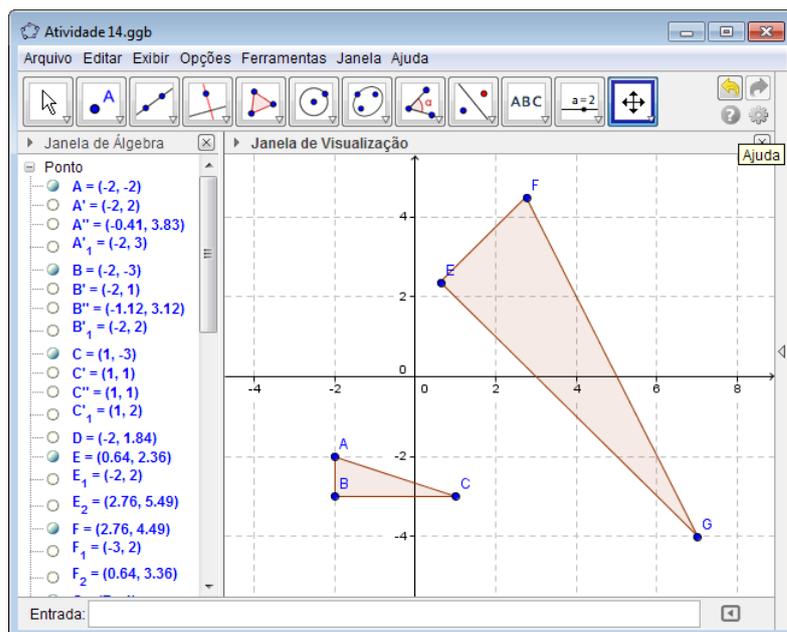


Figura 3.31: Atividade 3 de semelhanças aplicada no GeoGebra.

Somente um aluno não conseguiu completar a atividade. Dos demais, dezessete alunos apresentaram a resposta como a que foi pensada. A Figura 3.32 traz uma dessas respostas.

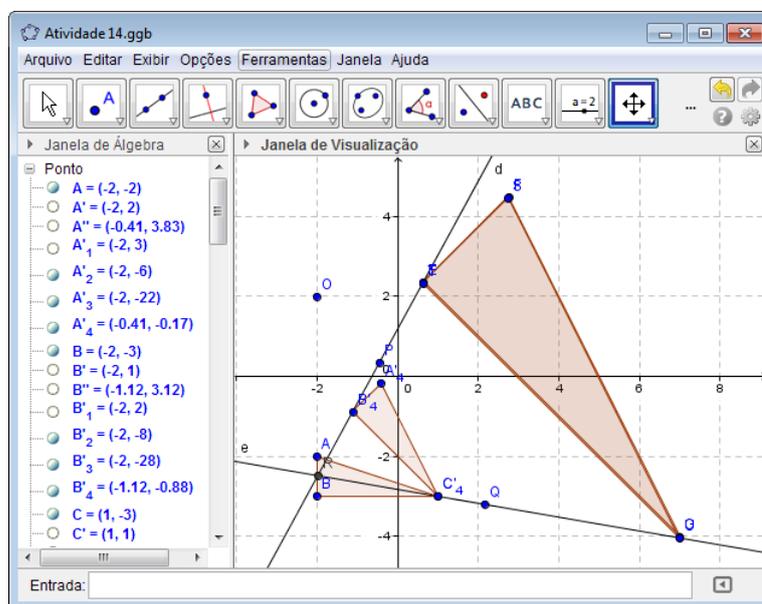


Figura 3.32: Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.31.

As demais respostas dos alunos, embora diferentes da anterior, apresentaram rotações seguidas de homotetias. A Figura 3.33 traz a solução que foi dada com maior frequência.

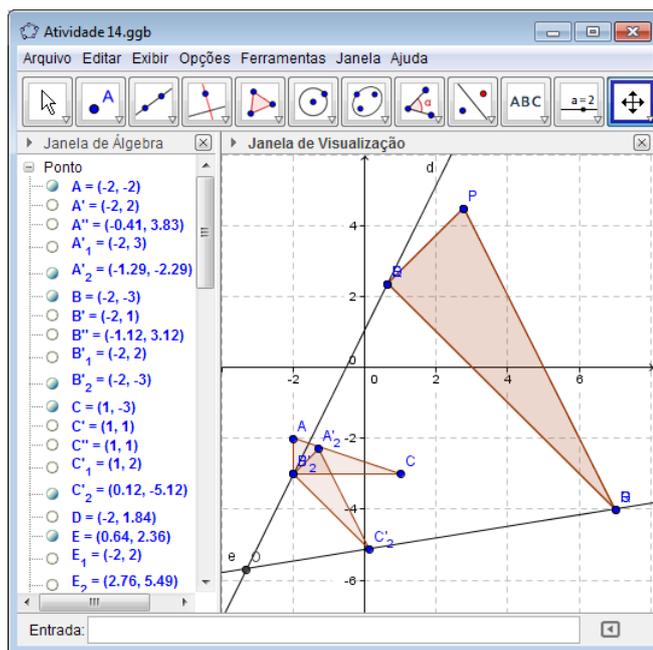


Figura 3.33: Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.31.

A Figura 3.34 mostra a quarta e última configuração que foi proposta. Nessa configuração, um pouco mais sofisticada, ABCDE é semelhante a FGHIJ e, foi pensada, para que uma reflexão, uma rotação e uma homotetia fossem feitas para “levar” uma figura na outra.

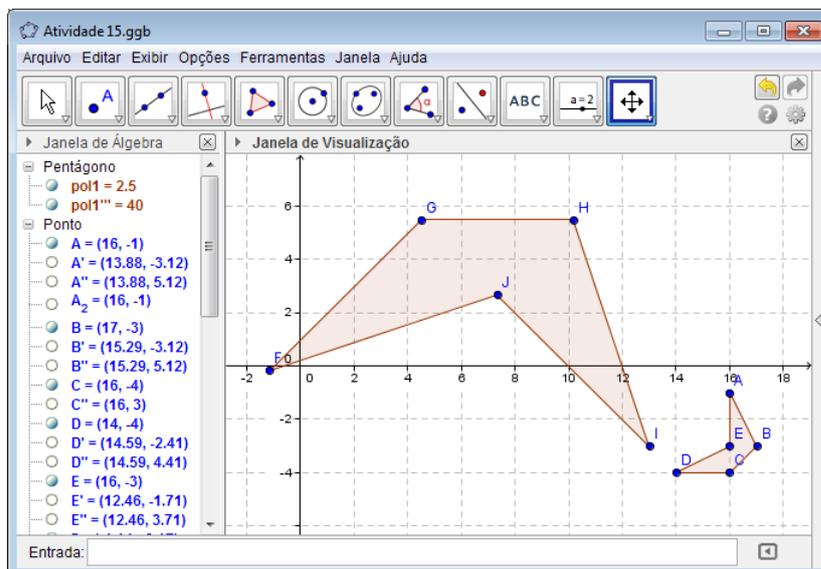


Figura 3.34: Atividade 4 de semelhanças aplicada no GeoGebra.

Dos trinta e nove alunos, três não completaram a atividade. Os demais apresentaram inúmeras respostas, porém, em todas elas, as reflexões, rotações e, claro, homotetias,

aparecem.

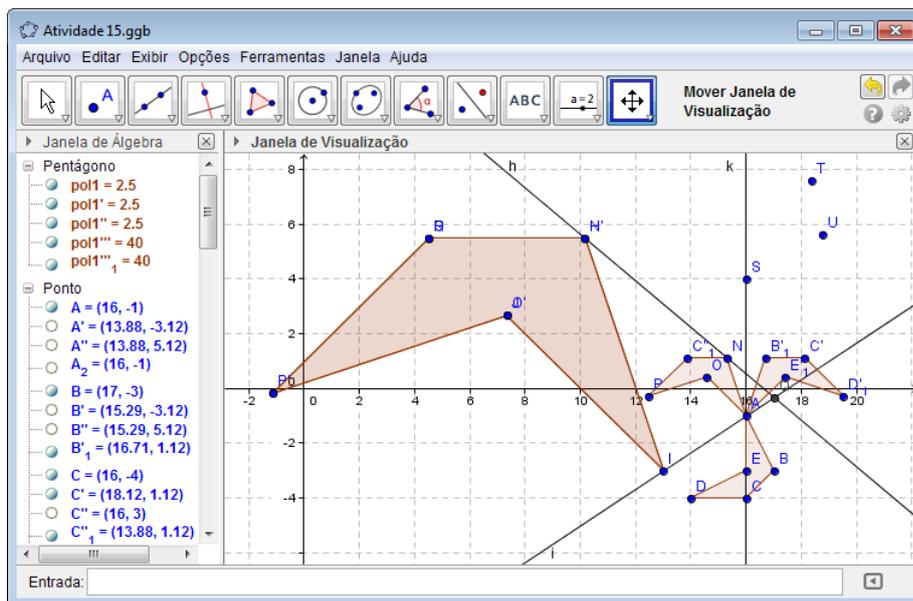


Figura 3.35: Resultado 1 da atividade proposta na Figura 3.34.

Na Figura 3.35 é possível observar a resposta que apareceu com maior frequência e, na Figura 3.36, a resposta com a segunda maior frequência.

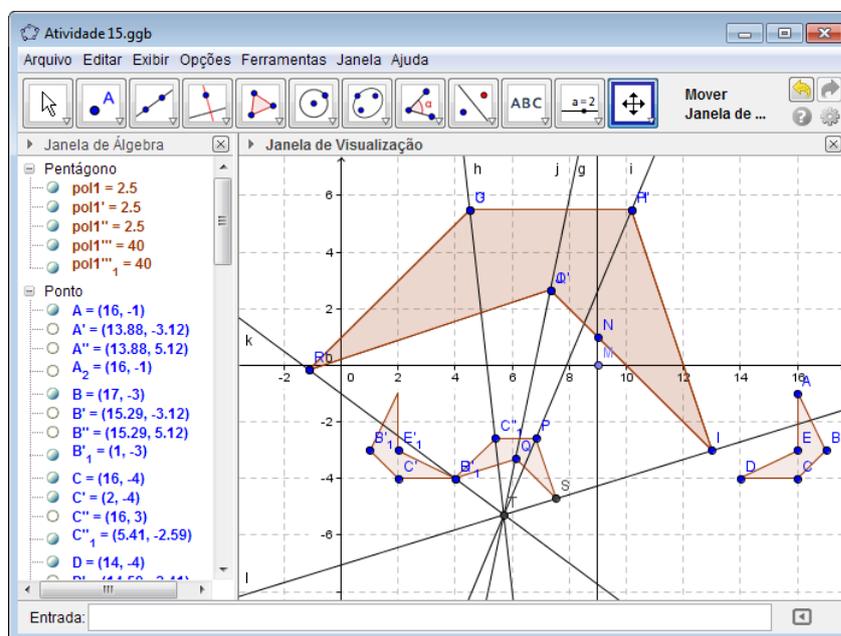


Figura 3.36: Resultado 2 da atividade proposta na Figura 3.34.

Ao término da aplicação dessas atividades que trabalham semelhanças, julgamos que elas, a exemplo do que aconteceu com as atividades sobre congruências, alcançaram

o objetivo pretendido e os alunos conseguiram assimilar as homotetias e o conceito de semelhança de figuras planas.

Mais uma vez os alunos se envolveram nas atividades e, a menos de alguns casos, eles conseguiram realizar com sucesso as atividades propostas. A dispersão de alguns alunos pode acontecer no decorrer da aplicação das atividades, mas isso não acaba sendo um fator que atrapalha o processo.

Deixamos novamente a sugestão aos professores que se interessarem em trabalhar com essas atividades, para que elaborem configurações bem definidas sobre a homotetia que se deseja trabalhar. Fazer figuras geométricas diversas também é importante para quebrar a idéia de que somente existe semelhança de triângulos.

E claro, uma vez aplicada as atividades e, na certeza de que os alunos compreenderam cada uma das isometrias e homotetias, é chegada a hora de formalizar esses conceitos, a exemplo do que foi feito no Capítulo 2, pois, as atividades são somente um componente inicial na exploração de um determinado conteúdo.

# Considerações Finais

Diante de tudo que foi exposto no terceiro capítulo, frente aos resultados observados pela ocasião da aplicação das atividades propostas, podemos inferir que o objetivo proposto para esse trabalho (só lembrando: propostas de atividades que exploram as isometrias e as homotetias no plano por meio da congruência e semelhança de figuras geométricas planas) foi alcançado e que ele se apresenta com certa relevância para o ensino das transformações geométricas no plano, bem como para o ensino de congruência e de semelhança de figuras geométricas planas.

Foi notável o envolvimento dos alunos nas atividades propostas e a consequente compreensão do tema proposto. Julgamos que eles compreenderam que congruência e semelhança vão além da congruência e da semelhança de triângulos e que as isometrias e homotetias no plano são operações geométricas simples e de fácil aplicabilidade. Esse julgamento se concretiza frente à quantidade diferente de soluções para cada uma das configurações propostas nas atividades.

Esse trabalho também serviu para apimentar a discussão sobre a utilização, ou não, de materiais didáticos manipuláveis e/ou tecnologias de informática na prática do professor em sala de aula. E, sem querermos parecer generalistas, pelo menos para esse conteúdo, a utilização desses materiais mostrou-se completamente útil na aprendizagem dos alunos.

E se nos perguntarem qual das metodologias foi melhor, o material didático manipulável ou a tecnologia de informática, diremos que as duas foram relevantes para aquilo que foi proposto, cada uma com sua particularidade.

Outro ponto que julgamos importante citar sobre esse trabalho, é que ele propõe atividades sobre assuntos de geometria, disciplina que, como já havíamos mencionado no início desse trabalho, vem sendo “deixada de lado” pelos professores de matemática da educação básica. E isso fica evidente quando acontece de numa turma de trinta e nove

alunos do primeiro ano do ensino médio, apenas três saberem o que é uma congruência, ou uma semelhança de triângulos, que são conteúdos que deveriam ser trabalhados no ensino fundamental. A pergunta natural que surge é: a geometria está sendo trabalhada no ensino fundamental? E se está sendo trabalhada, é de forma adequada?

Afim de amenizar essa problemática vigente quanto ao ensino de geometria, acreditamos que, a exemplo do que foi proposto nesse trabalho, atividades diferenciadas com temas de geometria, chamam a atenção do aluno para o assunto e podem, definitivamente, trazer a geometria de volta para a sala de aula.

Gostaríamos de salientar, mais uma vez, que essas atividades devem ser bem elaboradas e bem conduzidas pelo professor, para que elas alcancem o objetivo para o qual foram inicialmente pensadas. Temos total clareza que elas exigem tempo e dedicação do professor, mas o resultado que elas podem alcançar junto aos alunos, podem compensar aulas e mais aulas teóricas sem muita compreensão por parte dos estudantes.

Quanto às atividades no computador, outros *softwares* matemáticos, diferentes do GeoGebra, podem ser utilizados. Sugerimos o GeoGebra pela facilidade de manipulação e pela pluralidade de ferramentas. Quanto ao *plano isométrico*, atividades que envolvem homotetias também podem ser pensadas. Inclusive, pesquisas futuras que apontem atividades para esse fim serão realizadas.

Outras atividades, como as que envolvem as coordenadas dos vértices das figuras geométricas, podem ser pensadas. Embora as coordenadas das isometrias e homotetias tenham sido exploradas no Capítulo 2, nesse trabalho não foi proposta nenhuma atividade com essa finalidade, devido ao fato dos alunos da turma em que as atividades foram aplicadas ainda não terem o domínio do conteúdo de geometria analítica. Esse conteúdo só é ministrado no terceiro ano do ensino médio e essa série não era o foco desse trabalho.

Além de atividades que envolvem as coordenadas, sugerimos que, no GeoGebra, atividades com homotetias que tenham razões inteiras negativas e também razões não inteiras (positivas e negativas) sejam realizadas, pois nesse trabalho só foram realizadas homotetias com razões inteiras positivas. O tempo de elaboração e realização do trabalho aparece como a principal justificativa, embora, atividades com essas razões serão propostas futuramente.

Pensando no ensino superior, disciplinas como a Geometria Euclidiana Plana ou a Geometria Analítica, de cursos de Licenciatura em Matemática, por exemplo, algumas

atividades, tanto no *plano isométrico*, como no GeoGebra, podem ser aplicadas para os alunos, mostrando que, em qualquer nível, do fundamental ao superior, as atividades propostas nesse trabalho podem ser utilizadas pelos professores na sua prática docente.

E por falar em prática docente, enquanto professores, não poderíamos finalizar esse trabalho, sem dizermos o quanto ele nos foi significativo. Primeiro, porque tivemos a oportunidade de aprimorarmos nossos conhecimentos em geometria e, segundo, porque atestamos que novas possibilidades metodológicas podem ser utilizadas com êxito no ensino de geometria.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, João L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do professor de matemática, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2006. 222 p.
- [2] BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Mirian G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte-MG, Autêntica, 2010. 103 p.
- [3] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática da Teoria à Prática**. Campinas-SP, Papirus, 1996. 120 p.
- [4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Geometria Plana**. Coleção fundamentos de matemática elementar, volume 09, São Paulo-SP, Atual, 2005. 456 p.
- [5] EUCLIDES. Introdução e tradução: BICUDO, Irineu. **Os Elementos Euclides**. São Paulo-SP, UNESP, 2009. 593 p.
- [6] LIMA, Elon L. colaboração CARVALHO, Paulo C. P. e GUIMARÃES FILHO, Florêncio F. **Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios**. Coleção do professor de matemática, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2013. 373 p.
- [7] LIMA, Elon L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Coleção matemática universitária, Rio de Janeiro-RJ, IMPA, 2008. 323 p.
- [8] LIMA, Elon L. **Isometrias**. Coleção do professor de matemática, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2007. 94 p.
- [9] LIMA, Elon L. **Media e Forma em Geometria comprimento, área, volume e semelhança**. Coleção do professor de matemática, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2006. 116 p.

- [10] LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais manipuláveis. In: LORENZATO, Sergio. (organizador) **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Coleção formação de professores, Campinas-SP, Autores Associados, 2012. 178 p.
- [11] MUNIZ NETO, Antonio, C. **Geometria**. Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2013 a. 502 p.
- [12] MUNIZ NETO, Antonio C. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção tópicos de matemática elementar, volume 02, Rio de Janeiro-RJ, SBM, 2013 b. 448 p.
- [13] PASSOS, Cármem L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sergio. (organizador) **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Coleção formação de professores, Campinas-SP, Autores Associados, 2012. 178 p.