



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Gizele Justino Diniz Martins

Grafos: definições elementares e método
probabilístico

João Pessoa - PB

2015

Gizele Justino Diniz Martins

Grafos: definições elementares e método probabilístico

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas

João Pessoa - PB
2015

M386g Martins, Gizele Justino Diniz.
 Grafos: definições elementares e método probabilístico /
 Gizele Justino Diniz Martins.-- João Pessoa, 2015.
 79f. : il.
 Orientador: Alexandre de Bustamante Simas
 Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
 1. Matemática. 2. Grafos. 3. Número cromático. 4. Número
 de Ramsey. 5. Método probabilístico.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

Grafos: definições elementares e método probabilístico

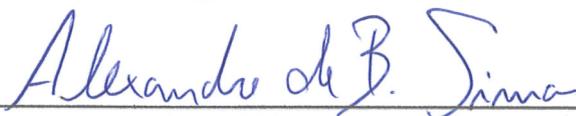
por

Gizele Justino Diniz Martins

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

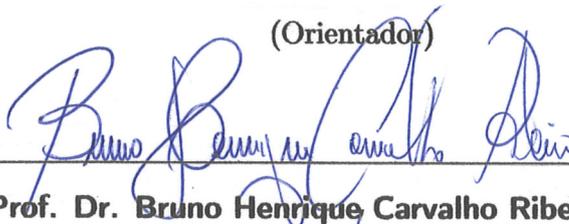
Área de Concentração: Combinatória

Aprovada por:



Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas-UFPB

(Orientador)



Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB



Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vitorio - UFPE

Abril/2015

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meu filho Rafael (atualmente com 4 anos) e desejo que a minha atitude possa servir de incentivo e exemplo, a fim de que possa ir bem mais longe que a sua mãe foi capaz.

AGRADECIMENTOS

Agradeço por este momento único com imensa felicidade e satisfação.

Em primeiro lugar, a Deus, Senhor da minha vida, que me guiou, iluminando meu caminho, concedendo-me a graça de cursar esse mestrado, com sua benção em cada semestre e na elaboração do presente trabalho.

Ao meu esposo, Mário — presente de Deus em minha vida — que sempre me incentivou, fazendo com que acreditasse em mim mesma, em minha capacidade, e que eu vislumbrasse além do horizonte. Também, pela sua parceria e compreensão enquanto companheiro e colega de estudo, proferindo considerações e críticas no decorrer do curso.

Aos meus pais, Goretti e Luiz, que me acompanharam e incentivaram em todos os momentos, ainda que sentissem a minha ausência.

Ao meu filho Rafael e as minhas irmãs, Gilmara, Paula Roberta e Jaqueline, que, por me amarem, foram razão de força e inspiração durante esses dois anos.

As minhas primas Jocelma, Bruna e Aline, que continuamente me encorajaram a seguir adiante em prol do meu sonho.

Ao meu orientador, Dr. Alexandre Bustamante, pelos ensinamentos e por toda paciência durante o desenvolvimento desta pesquisa, enriquecendo-a com seu extraordinário saber.

A todos os professores que lecionaram as disciplinas, em especial a Dr. Bruno Ribeiro — coordenador do curso e membro desta banca —, Dra. Elisandra Gloss, Ms. Gilmar Correia, Dr. Lenimar Andrade, Dr. Napoleón Tuesta, pela atenção, assistência e pelos proveitosos ensinamentos que me propiciaram. Ainda, expresso minha gratidão ao prof. Dr. Henrique Vitório por ter aceitado o convite para compor esta ilustre banca.

As minhas amigas, Maria do Bom conselho — companheira de mestrado e de madrugadas de estudo —, Lycya Coelho, Karina Camilo, Ivonete Barbosa, Ana Lúcia Leite e Liliane Braga que foram muito importantes ao termo desta formação acadêmica.

Enfim, a todos aqueles que acreditaram e oraram por mim.

Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.

(Martin Luther King).

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a teoria dos grafos, que — embora seja um conteúdo pouco difundido, inclusive em âmbito acadêmico — é de extrema importância para a resolução de inúmeros problemas matemáticos e modelos físicos. Além disso, essa temática pode ser verificada em aplicações nas mais diversas áreas, entre as quais citamos: computacional, elétrica, genética. Adotamos a investigação bibliográfica e a pesquisa exploratória para tratar o tema em questão, procurando definir e esclarecer a teoria sobredita, como também contribuir em sua difusão, o que possibilita aos integrantes da educação básica e superior terem um contato com tão importante e fecundo saber, uma vez que considerações elementares sobre grafos nos aproxima da pesquisa científica. Intercalamos os conceitos e as demonstrações de lemas e teoremas com a apresentação e resolução de problemas. Empregamos uma linguagem simples, de forma que um aluno do ensino médio possa compreender, sem, no entanto, nos distanciar do rigor matemático. Em tempo, apresentamos o teorema das quatro cores e o número de Ramsey, com demonstrações detalhadas deste último resultado. Por fim, utilizamos conceitos e resultados puramente de combinatória e probabilidade, utilizando o método probabilístico para provar a existência de grafos com determinadas propriedades — que são de difícil construção — e, por meio desta comprovação, chegar a outro grafo desejado.

Palavras-chave: Grafos. Número cromático. Número de Ramsey. Probabilidade. Variável aleatória. Método probabilístico.

ABSTRACT

In this work we study the graph theory, which — although it is somewhat widespread content, including academia — is extremely important for solving many mathematical problems and physical models. Moreover, this theme can be found in applications in several areas, including quote: computer, electrical, genetic. We adopt the bibliographic research and exploratory research to deal with the issue at hand, trying to define and clarify the aforesaid theory, but also contribute to its spread, which enables members of the basic and higher education have a contact with such an important and fruitful know, since elementary considerations graphs brings us closer to scientific research. We alternate concepts and statements of lemmas and theorems to solve problems. We use simple language, so that a high school student can understand, without, however, distancing us from mathematical rigor. In time, we present the four color theorem the number of Ramsey, with detailed statements of the latter result. Finally, we use concepts and purely combinatorial results and probability, using the probabilistic method to prove the existence of graphs with certain properties that are difficult construction and, through this evidence, get other desired graph.

Keywords: Graph, Chromatic number, Number of Ramsey, Probability, Random variable, Probabilistic methods.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Exemplos de Grafos: (a) grafo trivial, (b) grafo completo e (c) pseudografo.	16
1.2	Grafo do tabuleiro	17
1.3	Grafo problema 2	18
1.4	Exemplificando grau dos vértices e grafo r-regular	19
1.5	Grafo do exemplo 7	21
1.6	Ciclos e trilhas	23
1.7	Pontes de Königsberg	25
1.8	Grafo das pontes dde Köninigsberg	25
1.9	Grafos 1, 2 e 3	26
1.10	Grafos isomorfos	27
1.11	Grafo problema 11 b	29
1.12	Grafo problema 11c	29
1.13	Grafo bipartido	30
1.14	Exemplo de grafo bipartido	30
1.15	Grafo isomorfo ao da ilustração 1.14	31
1.16	Grafo bipartido completo	31
1.17	Árvore	31
1.18	Exemplos de Grafos: (a) grafo \mathbf{G} , (b) \mathbf{H} subgrafo gerador de G e (c) \mathbf{J} subgrafo de G	33
1.19	Grafo G	33
1.20	Grafo planar	33

2.1	Grafo das provas finais	35
2.2	Grafo dos exames finais	35
2.3	Outra representação das finais	36
2.4	Mapa do Brasil	36
2.5	Grafo relacionado ao mapa do Brasil	37
2.6	Coloração de arestas	38
2.7	Grafo relativo ao exemplo 14	39
2.8	Continuação da coloração	39
2.9	Grafo completo K_5	40
2.10	Ramsey	42
2.11	Erdos, 1992	43
3.1	Grafo com $\chi = 4$ e $g=4$	58
3.2	Grafo de Grötzsch	58

SUMÁRIO

Introdução	12
1 TEORIA DOS GRAFOS	15
1.1 Grau do vértice	18
1.2 Grafos conexos	22
1.2.1 <i>Grafo Euleriano</i>	24
1.3 Isomorfismo	27
1.4 Dois tipos especiais de grafos	30
1.4.1 <i>Grafo bipartido</i>	30
1.4.2 <i>Árvore</i>	31
1.5 Subgrafo	32
1.6 Grafo planar	33
2 COLORAÇÃO	34
2.1 Colorindo grafos planares	36
2.1.1 <i>Um pouco de história: Número cromático</i>	37
2.2 Número de Ramsey	38
2.2.1 <i>Um pouco de história: Teoria de Ramsey</i>	42
3 MÉTODO PROBABILÍSTICO	44
3.1 Variáveis aleatórias	45
3.2 Valor esperado	47

3.2.1	Soma de variáveis aleatórias e esperança da soma	49
3.3	Construção de grafos	57
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICES	76

INTRODUÇÃO

Primeiramente, apontamos que a teoria dos Grafos ganhou destaque na matemática já no século XX (referência [16]). Sendo, desta feita, uma teoria nova e pouco conhecida, mas que tem ganhado um amplo espaço em virtude de suas aplicações nos diversos campos da matemática e nas outras ciências, a exemplo das engenharias e TIC's ¹.

Um grafo pode ser simplesmente descrito como um conjunto de objetos que se conecta em pares. Os elementos (objetos) existentes nesse conjunto são chamados de vértices do grafo. As ligações (relacionamentos) entre os elementos são chamados de arestas do grafo. Percebendo que os componentes dos grafos podem está imbricados uns com os outros, torna-se evidente sua significância e utilidade nas áreas de telecomunicações, química, genética, logística, informática, engenharia elétrica, redes de computadores, conexão de voos aéreos, entre outros. Contudo, evidenciamos que essas ligações podem ser tangíveis ou não, como no caso das redes sem fio do tipo mesh ² - as WLAN, principalmente do tipo wi-fi.

Embora, a teoria dos grafos só tenha sido desenvolvida no século passado, como mencionamos acima, em 1736 tivemos a publicação do problema das Pontes de Königsberg — um importante problema dessa teoria, que será abordado no primeiro capítulo. Com a publicação dos trabalhos de Ford e Fulkerson, 1956; Berge, 1957; e Ore, 1962, cresceu o interesse no estudo dos grafos, e, a partir de 1970, temos o despontar das publicações dessa teoria. Também, as descobertas de aplicações promoveram o seu desenvolvimento, pois algoritmos computacionais se tornaram o alvo das publicações

¹ Tecnologias de Informação e Comunicação.

² Redes sem fio em malha, embora esse termo não seja muito utilizado no Brasil.

com a expansão dos computadores. ³ Os primeiros resultados sobre grafos vieram da Europa, região que surgiu a primeira escola: A húngara (com a contribuição de vários pesquisadores, entre eles, Erdos, Hajnál, Turán). Logo após nascem a escola francesa, a americana. Outros nomes importantes afloram para o desenvolvimento desta teoria na ex-União Soviética, Canadá e Inglaterra. Com a criação das escolas independentes e o grande número de trabalhos publicados em curto espaço de tempo, surge uma grande variedades de nomenclaturas, dificultando muitas vezes a compreensão. Diversidade essa que, a princípio, dificultou a construção do trabalho oriundo do estudo aqui tratado. Para ilustrar o que acabamos de dizer, poderão ser encontradas na literatura afeita definições distintas de passeios, multigrafos, caminhos e outros conceitos correlatos.

Isto posto, o primeiro capítulo tratará das definições e, concomitantemente, traremos alguns exemplos do livro *Círculos Matemáticos* ([5]), a fim de mostrar como a teoria dos grafos é útil na resolução de problemas, os quais muitas vezes nem parecem ter relação com a matéria.

Outro importante destaque deste campo matemático é a coloração de vértices e de arestas, que serão abordados no segundo capítulo. Trataremos do teorema das quatro cores, fazendo um pequeno relato histórico e apresentando aplicações. Quanto a coloração de arestas, versaremos sobre o número de Ramsey, que tornou-se de extrema relevância na combinatória, a ponto de tornar-se uma subdisciplina.

Por último, no terceiro capítulo faremos um estudo do método probabilístico, aplicando a probabilidade à teoria dos grafos, que possui elevada utilidade, pois nem sempre conseguimos criar um grafo com certas propriedades, sendo necessário lançarmos mão de teoremas que validam a sua existência, ou ainda comprovar que a probabilidade de sua ocorrência é maior que zero. Neste contexto, retornaremos ao número de Ramsey. Segundas vezes, provada a existência de um grafo com determinadas características, podemos construir o grafo que precisamos. Desenvolveremos este estudo através do texto "Probabilidade aplicada à teoria dos grafos (ver referência [17]), trabalhando os exemplos apresentados, finalizando com a demonstração de um dos Teoremas de Paul

³Informações retiradas da referência [2]

Erdos.

À vista disso, ficando dimensionada a magnitude da temática em comento, temos como **objetivo** estreitar, tornar mais alcançável e conhecida, aos partícipes da educação básica (educando e professor) as definições, conceitos e ideias sobre grafos, para que esses possam fomentar estudos futuros e proveitosos à comunidade abrangente, mas não somente. Outrossim, uma vez que a teoria dos grafos é de fácil compreensão, temos ainda como **meta** desenvolver estruturas cognitivas favoráveis à resolução de uma multiplicidade de problemas matemáticos, com base na exploração deste saber, isto é, visamos tornar esta prática uma ferramenta aprimoradora do pensamento matemático. Por fim, miramos **promover** condições para o contato inicial dos discentes com a pesquisa científica em circunstâncias anteriores ao ensino superior, dada a sua importância no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que a teoria dos grafos é frutuosa à pesquisa científica, nos aproximando expressivamente da matemática mais abstrata que é vista no ensino superior.

Capítulo 1

TEORIA DOS GRAFOS

Neste capítulo, abordaremos a teoria dos grafos, as definições e argumentos elementares fazendo um apanhado dos resultados apresentados nos capítulos 5 e 13 do livro Círculos Matemáticos, (referência [5]), com explicações e comentários, resolvendo alguns exercícios que são apresentados.

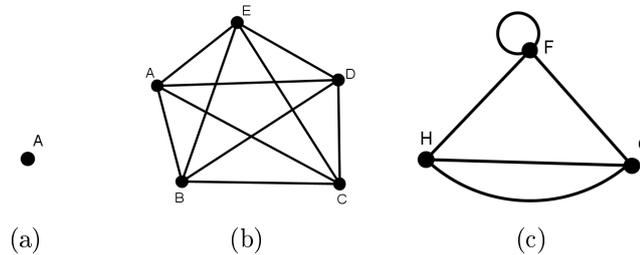
Definição 1 *Um grafo $G(V, E)$ é composto de um conjunto finito e não vazio de vértices (V), e um conjunto de pares não ordenados destes vértices (E)- chamados de arestas.*

Em outras palavras, um grafo consiste na representação de um conjunto, no qual cada um dos seus elementos se relaciona ou não com os outros elementos desse mesmo conjunto. Os elementos (objetos) contidos nesse conjunto são chamados de vértices do grafo; as ligações (relacionamentos) entre os elementos são chamados de arestas dos grafos.

Definição 2 *Um grafo formado apenas por um vértice recebe o nome de grafo trivial; veja figura 1.1 (a).*

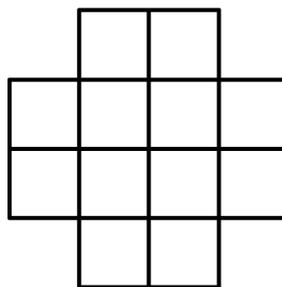
Definição 3 *Um grafo é dito completo quando todo par de vértices é ligado por uma aresta. E o denotamos por K_n . Na figura 1.1 (b) temos um grafo k_5 .*

Figura 1.1: Exemplos de Grafos: (a) grafo trivial, (b) grafo completo e (c) pseudografo.



Quando dois vértices são ligados por uma aresta dizemos que eles são adjacentes e que esta aresta é incidente aos vértices. Um arco associado ao mesmo vértice é chamado de "loop", que em português significa laço. De acordo com Harary ¹, quando um grafo possui mais de uma aresta ligando o mesmo par de vértice, sem loop, ele é denominado *multigrafo*. E se, além de múltiplas, ele possuir loop, recebe o nome de pseudografo, conforme exemplo anterior ilustrado na figura 1.1 (c); na qual temos um loop no vértice **F** e arestas múltiplas unindo os vértices **G** e **H**. Um grafo sem laços e sem arestas múltiplas é chamado de *grafo simples*.

Exemplo 1 *Um tabuleiro com a forma de uma cruz é obtido de um tabuleiro 4×4 retirando-se as quatro quinas. Um cavalo pode se mover ² neste tabuleiro de modo a parar em todos os quadrados exatamente uma vez e terminar no quadrado de onde saiu?*



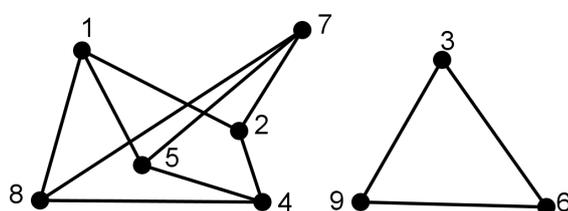
Para uma melhor compreensão, nomeemos os quadrinhos do tabuleiro da forma abaixo:

¹Nomenclatura com base na Referência [13]. Segundo outras literaturas, o grafo recebe o nome de multigrafos mesmo contendo loops.

² Os movimentos do cavalo consistem em mover-se uma única casa na horizontal, e em seguida duas casas na vertical, ou uma casa na vertical e posteriormente duas casas na horizontal.

Lembremos que para que um número seja divisível por 3, a soma de seus algarismos tem que ser um número divisível por 3. Logo, a cidade 1 está ligada a Cidade 2, 5 e 8. E a cidade 9 só está ligada a cidade 3 e a cidade 6. E a 3, apenas a 6 e a 9; e a 6, apenas a 3 e a 9. Portanto não há como ir da cidade 1 a 9. O grafo da figura abaixo representa bem este problema, mostrando que não é possível ao viajante ir da cidade 1 à cidade 9.

Figura 1.3: Grafo problema 2



O grafo desse problema é desconexo, pois não existe um caminho do vértice "9" para o "1" por exemplo. Mas, só definiremos esses conceitos na seção 1.2.

1.1 Grau do vértice

Definição 4 O grau de um vértice v é determinado pelo número de arestas que incidem nele, ou seja, é o número de vértices adjacentes a v , e é denotado por $d_g(v)$.

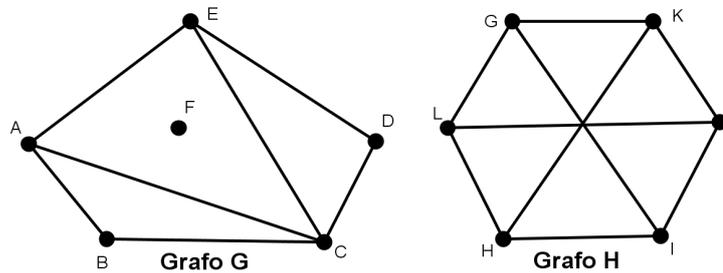
Na figura 1.4 o vértice **C** tem grau 4, o **F** tem grau 0, **B** e **D** tem grau 2, e os outros tem grau 3.

Quando todos os vértices de um grafo têm um mesmo grau r , ele recebe o nome de r -regular. O Grafo H da figura 1.4 é 3-regular.

O menor grau presente em um grafo G é denotado por $\delta(G)$; O maior grau existente em um grafo G é denotado por $\Delta(G)$. Na figura 1.4 $\delta(G) = 0$ e $\Delta(G) = 4$

Um vértice é dito vértice par se o seu grau for par, e vértice ímpar, se seu grau for ímpar.

Figura 1.4: Exemplificando grau dos vértices e grafo r-regular



Exemplo 3 *Um determinado reinado tem 100 cidades e saem quatro estradas de cada uma delas. Quantas estradas existem ao todo neste reinado?*

Em nossa modelagem, as cidades são os vértices do grafo, e as estradas, as arestas. O número de estradas que saem de cada cidade é o grau do vértice. Somando o grau de cada vértice, obtemos 400. Porém, como cada aresta liga 2 vértices (cidades), precisamos dividir por 2. Logo, esse reinado possui 200 estradas.

Teorema 1 *Em um grafo G , a soma dos graus de todos os vértices é igual a 2 vezes o número de arestas.*

Demonstração: A demonstração é imediata, como foi visto no problema anterior: Ao somar todos os graus dos vértices, estamos somando todas as arestas incidentes aos vértices, mas como cada aresta incide em 2 vértices, estas são contadas 2 vezes, ao dividirmos por 2 temos o número de arestas. ■

Exemplo 4 *É possível existirem exatamente 100 estradas em um reinado no qual existem 3 estradas saindo de cada cidade?*

Pensemos em um grafo com 100 arestas (E), não sabemos o número de vértices (V), mas cada um dos vértices tem grau 3. Logo, pelo teorema 1:

$$2 \cdot E = 3 \cdot V \Rightarrow 200 = 3 \cdot V,$$

donde decorre que V não é um número inteiro. Portanto, não é possível existirem exatamente 100 estradas nesse reinado, uma vez que o número de estradas precisa ser

um múltiplo de 3. Poderiam existir 99 estradas e, assim, teríamos 66 cidades nesse reinado.

Exemplo 5 *Em Interiorana existem 15 telefones. Eles podem ser conectados de modo que:*

(a) *cada telefone seja conectado a exatamente 7 outros;*

(b) *4 telefones estão conectados a 3 outros, 8 telefones estão conectados a 6 outros e 3 telefones estão conectados a 5 outros?*

(a) *Temos 15 telefones, cada um ligados a 7 outros. Se isso fosse possível, também seria possível um grafo com 15 vértices, cada um com grau 7. Portanto, o número de arestas é $(15 \times 7)/2$. Todavia, esse número não é inteiro. Dessa feita, a configuração telefônica discriminada no item a é impossível de ser realizada.*

(b) *Suponhamos que seja possível um grafo, no qual: 4 vértices tenham grau 3; 8 tenham grau 6; e 3 tenham grau 5. Podemos somar os graus deste grafo, conforme adiante:*

$$4 \cdot 3 + 8 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 12 + 48 + 15 = 75,$$

no entanto, pelo teorema 1, temos $2 \times E = 75$. Uma contradição, pois $E=75/2$ não é um número inteiro. Note que, esse grafo possuiria 7 vértices de grau ímpar, ou seja, um número ímpar de vértices de grau ímpar, contrariando o corolário abaixo.

Corolário 1 *O número de vértices ímpares em um grafo qualquer tem que ser par.*

Demonstração: *Suponha que isso não ocorre, digo, o número de vértices ímpares pode ser ímpar. Sendo assim, a soma dos graus dos vértices seria ímpar. Todavia, essa soma é igual a duas vezes o número de arestas ($2 \times E$), que é par; uma contradição. ■*

Após esse corolário, basta observar na questão anterior que o número de vértices ímpares seria ímpar em cada um dos grafos; desta feita, não é possível esses grafos existirem.

Resolveremos a seguir mais alguns exemplos envolvendo esses teoremas.

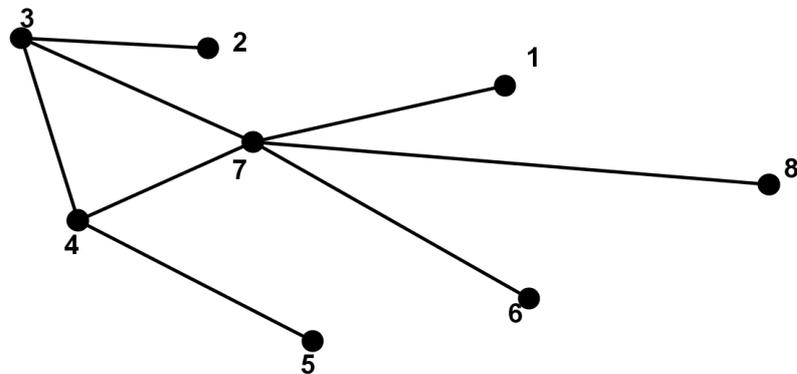
Exemplo 6 Um rei tem 19 vassalos. É possível que cada vassalo tenha ou 1, ou 5, ou 9 vassalos vizinhos?

Poderíamos perguntar se é possível um grafo com 19 vértices, de forma que cada vértice tenha grau igual ou a 1, ou a 5, ou a 9? Em qualquer dos 3 casos, temos vértices ímpares. Assim, esse grafo possuiria um número ímpar de vértices ímpares. Logo, não é possível.

Exemplo 7 João voltando da Disneylândia, disse que viu um lago encantado com 7 ilhas, cada uma delas tendo 1, 3 ou 5 pontes chegando a elas. É verdade que pelo menos uma dessas pontes tem que levar para terra firme?

Sim. As sete ilhas e a terra firme são os vértices e as pontes, as arestas. Se uma das pontes não fosse para terra firme, teríamos um grafo com número ímpar de vértices de grau ímpar. Ao considerarmos a terra firme como um vértice, teremos um número par de vértices ímpares. Na figura 1.5, representaremos por grafo uma possível condição das ilhas:

Figura 1.5: Grafo do exemplo 7



As ilhas são os vértices numerados de 1 a 7 e a terra firme é o 8. Note que de cada ilha saem 1, 3 ou 5 pontes, como determina o enunciado. Mas, existem muitas outras formas de representar o problema tratado por grafo. Essa ilustração é apenas um modelo escolhido. No entanto, em qualquer representação utilizada, pelo menos uma ponte terá que levar a terra firme.

Exemplo 8 *Prove que o número de pessoas que viveram na Terra e que apertaram mãos um número ímpar de vezes é par.*

Suponha que isso não seja verdade, por conseguinte, o número de pessoas que viveram na Terra e apertaram mãos um número ímpar de vezes é ímpar. Logo, seria possível um grafo cujo os vértices representariam as pessoas e as arestas, os apertos de mãos. Assim, o número de apertos de mãos seria o grau de cada vértice e teríamos um grafo com um número ímpar de vértices de grau ímpar, o que contradiz o corolário 1.

1.2 Grafos conexos

Veremos algumas definições necessárias:

Definição 5 *Um passeio é uma seqüência de arestas do tipo $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{(s-1)}v_s$.*

No caso em que todas as arestas são distintas, o passeio é uma Trilha. Recebendo o nome de Trilha fechada, caso $v_0 = v_s$.

Definição 6 *Caminho é um passeio onde todas as arestas e todos os vértices são distintos, podendo coincidir apenas o primeiro e o último. Se isso ocorrer, teremos um Ciclo — um caminho fechado.*

É salutar ressaltar que existem definições divergentes de passeio e caminho na literatura, conforme citamos na introdução.

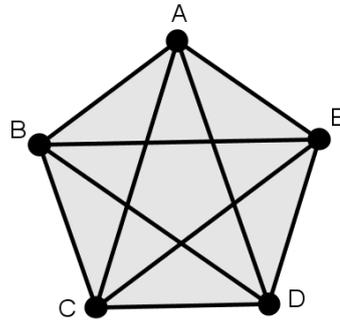
Na figura 1.6, temos diversos ciclos, um deles: ABEA, indicado pelos vértices; e trilhas fechadas, por exemplo: AB, BE, ED, DC, CE, EA.

Definição 7 *Cintura de um grafo G é o número de vértices do menor ciclo de G . Representaremos a cintura por g .*

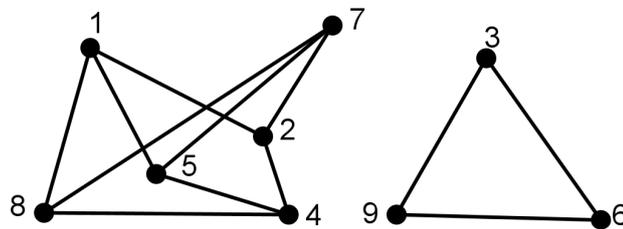
No caso do grafo da figura 1.6, temos $g = 3$.

Definição 8 *Um grafo é dito conexo se, dados dois vértices quaisquer, existe um caminho ligando os vértices. Um grafo que não é conexo, é dito desconexo.*

Figura 1.6: Ciclos e trilhas



No problema 2, comentamos que o grafo da figura 1.3 era desconexo.



Como podemos ver, não é possível ir do vértice 9 ao vértice 4, uma vez que não existe um caminho ligando esses vértices. Poderíamos olhar para esse grafo e interpretá-lo como sendo 2 grafos, mas, no caso da solução do nosso problema, temos um único grafo, cujas ligações representam que existe voo direto entre as cidades, e a ausência de arestas ligando os vértices significa que não existe voo direto entre as cidades. Já dissemos que esse grafo não é conexo; porém, ele é formado por dois "fragmentos", e em cada um deles é possível ir de um vértice a qualquer outro. Esses fragmentos são as **componentes conexas** de um grafo. Um grafo formado por apenas uma componente conexa é um grafo conexo.

O conceito de conexidade é de muita utilidade nos grafos. Mas, como podemos saber se um grafo é ou não conexo? Apresentaremos uma proposição que garante a conexidade de um grafo.

Proposição 1 *Se G é um grafo com n vértices, todos com grau maior ou igual a $\frac{(n-1)}{2}$, G é conexo.*

Demonstração: Suponha que G não é conexo. Logo existe pelo menos 2 vértices de G que não estão ligados por nenhum caminho. Por hipótese, de cada um desses vértices incide pelo menos $\frac{(n-1)}{2}$ arestas. No entanto, nenhuma delas pode está ligada ao mesmo vértice, caso isso ocorresse, existiria um caminho ligando os 2 vértices. Assim, cada uma dessas arestas está ligada a um vértice distinto. Conseqüentemente, o número de vértices do grafo é

$$\frac{(n-1)}{2} + \frac{(n-1)}{2} + 2 = n + 1.$$

Uma contradição, pois o grafo tem n vértices. A contradição é decorrente da hipótese do grafo ser desconexo. Por conseguinte, G é conexo. ■

1.2.1 Grafo Euleriano

Iniciaremos essa subseção com um problema que ficou muito famoso, sendo considerado o primeiro relato da teoria dos grafos. Embora esta teoria tenha se desenvolvido só no século passado, este relato é do século XIII. E nos ajudará a entender a definição de grafo Euleriano.

Exemplo 9 *A figura 1.7 mostra a cidade de Königsberg. A cidade é cortada por um rio que tem duas ilhas. Existem sete pontes ligando as diversas partes da cidade. É possível passear pela cidade cruzando cada ponte exatamente uma vez?*³

Esse problema foi resolvido por Euler em 1736. As ilhas e os dois lados da cidade podem ser vistos como os vértices do grafo e as pontes como as arestas. Note que para passearmos por cada ponte uma única vez, precisaríamos de um número par de arestas(pontes) incidentes em cada vértice, pois teríamos que entrar e sair de cada vértice (ilha ou parte da cidade) por arestas distintas. No entanto, como podemos ver no grafo da figura 1.8, que modela o problema, em cada vértice incide um número ímpar de arestas, o que torna o problema impossível.

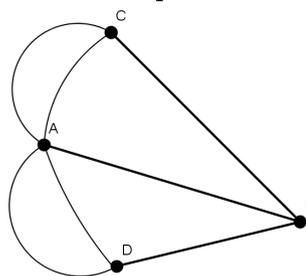
³ O primeiro e mais famoso problema em Teoria dos Grafos, resolvido por Euler em 1736. Euler transformou o problema em um problema de grafos.

Figura 1.7: Pontes de Königsberg



Fonte: OLIVEIRA, 2012

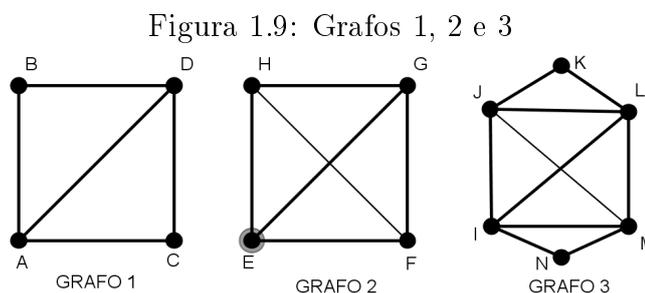
Figura 1.8: Grafo das pontes de Königsberg



Fonte: Elaborado pela autora

Vejamos se conseguimos desenhar os Grafos a seguir, sem retirar o lápis do papel, desenhando cada aresta uma única vez.

Para desenhar o grafo 1, basta seguir a sequência $ABDCAD$ (é uma das formas) — note que iniciamos e terminamos em vértices distintos; já o grafo 2, por mais que tentemos de diferentes formas não conseguimos; o Grafo 3, entre as inúmeras possibilidades, podemos seguir a sequência dos vértices: $NIJKLJMLIMN$ (neste grafo, iniciamos e terminamos no mesmo vértice). Resolvendo esse problema, podemos perceber que:



Para que um grafo seja percorrido sem levantar o lápis do papel, de forma que cada aresta só seja desenhada uma única vez, ele não pode ter mais que 2 vértices ímpares. O grafo 1 possui apenas 2 vértices ímpares, por isso conseguimos desenhá-lo, já o grafo 2 possui 4 vértices ímpares, não sendo possível desenhá-lo sob essas condições;

Para que seja possível percorrer o grafo nessas mesmas condições e voltar ao vértice inicial, é necessário que todos os vértices tenham grau par — critério utilizado por Euler no problema das Pontes de Königsberg. Percebamos que no grafo 3 todos os vértices tem grau par.

Definição 9 *Um grafo conexo com n arestas é euleriano quando possui uma trilha fechada — um circuito — de comprimento n , ou seja, quando percorremos todas as arestas uma única vez, terminando no vértice inicial. Quando o grafo possui uma trilha aberta de comprimento n - digo, quando percorremos todas as arestas do grafo uma única vez, mas não terminamos no vértice inicial - dizemos que o grafo é semieuleriano.*

O grafo 3, da figura 1.9 é euleriano, pois possui uma trilha fechada; e o grafo 1 da mesma figura é semieuleriano.

Exemplo 10 *Um grupo de ilhas estão ligadas por pontes de tal modo que é possível andar de uma ilha qualquer até qualquer outra. Um turista percorreu todas as ilhas cruzando cada ponte exatamente uma vez, tendo visitado a ilha de Tripla três vezes. Quantas pontes há em Tripla se:*

- (a) o turista não começou nem terminou seu percurso em Tripla;

(b) o turista começou seu percurso em Tripla, mas não terminou lá;

(c) o turista começou e terminou seu percurso em Tripla.

Primeiramente, analisemos o enunciado, o grupo de ilhas está ligado de modo que é possível andar de uma ilha qualquer até qualquer outra, isso dá a ideia de representação por um grafo conexo; no qual, as ilhas são os vértices e as pontes são as arestas. Como o turista foi a todas as ilhas cruzando cada ponte exatamente uma vez, temos um passeio.

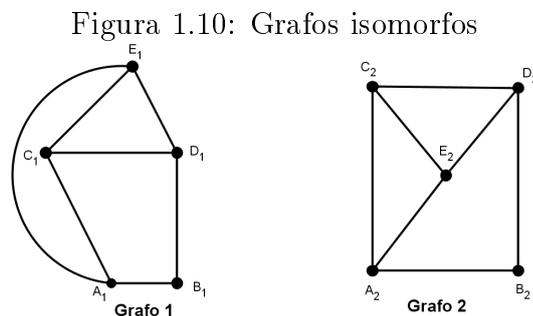
(a) Se o turista não começou nem terminou seu percurso em Tripla, e passou por ela 3 vezes, precisou de 3 pontes para entrar e 3 pontes para sair. Por conseguinte, há 6 pontes em Tripla.

(b) Se ele começou seu passeio por tripla e não terminou lá, temos um passeio aberto, que inicia no vértice e não volta a ele, como resultado esse vértice tem grau ímpar, como ele volta a Tripla 2 vezes e sai de lá, temos 5 arestas, ou seja, 5 pontes.

(c) Nessa letra c, temos uma trilha, em vista disso, o grau do vértice que representa Tripla é par. Pois o passeio inicia e termina no mesmo vértice. É necessário uma aresta para sair de Tripla, mais 2 para entrar e sair de Tripla pela segunda vez, e mais 1 para voltar, resultando em 4 arestas.

1.3 Isomorfismo

Observe os grafos da figura 1.10



Eles são parecidos? Seria possível estabelecer uma relação de bijeção entre seus vértices? Eles poderiam representar uma mesma situação?

As duas últimas perguntas são equivalentes, se dois grafos puderem representar a mesma situação, será possível estabelecer uma relação de bijeção entre seus vértices, e vice-versa. Para encontrarmos a resposta, precisamos analisar os vértices e as arestas: Verificar, entre outros, se os grafos têm o mesmo número de vértices; observar o grau dos vértices e as adjacências, ou seja, se há uma correspondência biunívoca entre os vértices dos dois grafos — a partir de uma nova rotulação dos vértices de um dos grafos, obter o outro. Na prática, podemos observar se ambos são conexos, se possuem a mesma quantidade de ciclos de mesmo comprimento, e inúmeras outras características que vamos percebendo a medida que vamos realizando os exercícios.

Vamos estabelecer uma correspondência entre os da figura 1.10.

$$\begin{aligned}
 & f : \\
 & A_1 \longrightarrow A_2 \\
 & B_1 \longrightarrow B_2 \\
 & C_1 \longrightarrow C_2 \\
 & D_1 \longrightarrow D_2 \\
 & E_1 \longrightarrow E_2
 \end{aligned}$$

É fácil ver que existe uma bijeção entre os vértices. Observemos ainda que, por exemplo, E_1 não é adjacente a B_1 , e E_2 também não é adjacente a B_2 .

Definição 10 *Dois grafos - G_1 e G_2 - são isomorfos, quando existe uma bijeção f de $V(G_1)$ em $V(G_2)$ tal que dois vértices A e B são adjacentes em G_1 se e somente se $f(A)$ e $f(B)$ são adjacentes em G_2 , em outras palavras, se eles representam a mesma situação.*

Exemplo 11 *É verdade que dois grafos têm que ser isomorfos se*

(a) *ambos têm 10 vértices e o grau de cada um deles é igual a 9?*

(b) ambos têm 8 vértices e o grau de cada um deles é igual a 3?

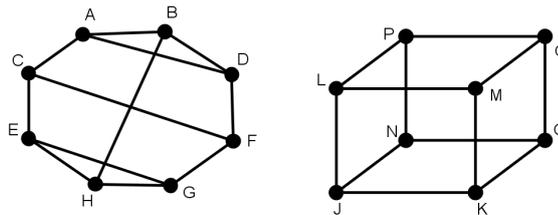
(c) ambos são conexos, sem ciclos e têm 6 arestas?

Analisaremos cada uma das alternativas

(a) É verdade, pois um grafo com 10 vértices, cada um tendo grau igual a 9, é grafo completo - K_{10} - cada vértice será adjacente aos outros 9.

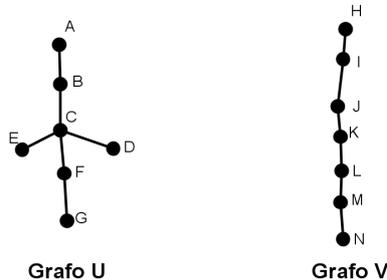
(b) Não é verdade. Basta observar o grafo da figura 1.11, ambos os grafos têm 8 vértices, cada um com grau 3; entretanto, não são isomorfos. Veja que no primeiro grafo temos o ciclo ABDA, que é um ciclo de comprimento 3, já no segundo grafo não temos nenhum ciclo de comprimento 3, o que prova que não há uma correspondência entre os vértices dos dois grafos.

Figura 1.11: Grafo problema 11 b



(c) Não é verdade. Apresentaremos 2 grafos na figura 1.12, como contraexemplo. Observe que o vértice C, do grafo U tem grau 4, já no grafo V não temos nenhum vértice com grau 4. Vemos que mesmo esses 2 grafos sendo conexos, sem ciclos e tendo ambos 6 arestas, eles não são isomorfos.

Figura 1.12: Grafo problema 11c



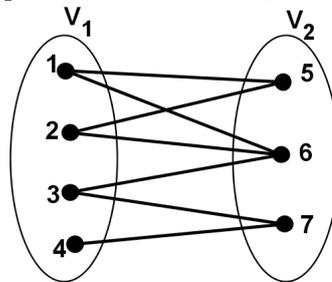
1.4 Dois tipos especiais de grafos

Já vimos alguns tipos de grafos, agora estudaremos mais dois deles:

1.4.1 Grafo bipartido

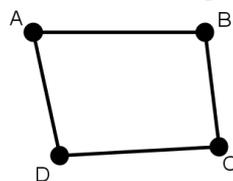
Definição 11 *Um grafo em que o conjunto V de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 , tal que toda aresta do grafo tem uma extremidade em cada um desses subconjuntos recebe o nome de grafo bipartido.*

Figura 1.13: Grafo bipartido



Atinemos que dois vértices de uma mesma partição não são adjacentes, por exemplo, o vértice 1 não é adjacente ao 2, 3 ou 4. Em alguns casos não percebemos de imediato que um grafo é bipartido, é o caso do grafo da figura 1.14:

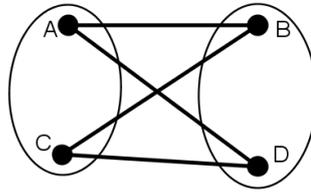
Figura 1.14: Exemplo de grafo bipartido



O vértice **A** é adjacente ao **B** e ao **D**, isto posto, **B** e **D** não podem pertencer ao subconjunto que **A** pertence. O mesmo ocorre com relação ao vértice **C**, então poderíamos representar o mesmo grafo como na figura 1.15:

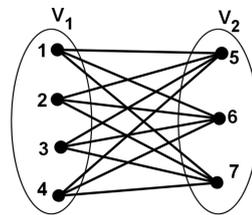
Os grafos das figuras 1.14 e 1.15 são isomorfos.

Figura 1.15: Grafo isomorfo ao da ilustração 1.14



Quando os vértices de um subconjunto estão ligados a todos os vértices do outro subconjunto, temos o **grafo bipartido completo**.

Figura 1.16: Grafo bipartido completo

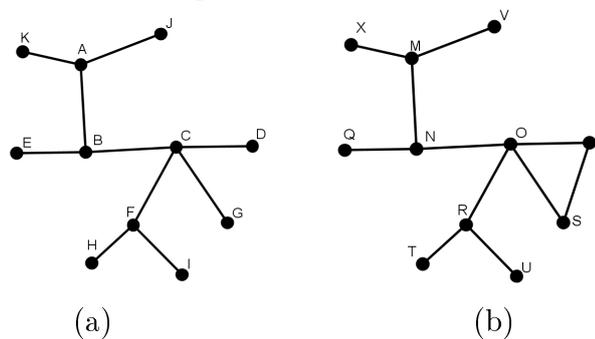


1.4.2 Árvore

Definição 12 *Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos.*

O nome árvore, vem da semelhança de alguns desses grafos com árvores. A figura

Figura 1.17: Árvore



1.17(a) traz um exemplo de árvore, enquanto a figura 1.17(b) não, pois contém um ciclo — OPSO. Em uma árvore, um vértice de grau 1 é denominado **folha**, e os vértices

de grau maior que 1, de **nó**. No grafo da figura 1.17, os vértices H, J, D, K, E, I, G são folhas.

Lema 1 *Toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos duas folhas.*

Demonstração: Seja uma árvore G , e consideremos C o maior caminho de G , $C = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$, logo u_1 e u_n são folhas. Suponha que não, assim o grau de u_1 seria maior ou igual a 2, e ele estaria ligado a outro vértice além de u_2 , digamos u_x , como árvores não contém ciclos, $u_x \neq u_3, \dots, u_n$, assim o caminho $D = (u_x, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ teria comprimento maior que C , um absurdo, pois C é o maior caminho de G . ■

Exemplo 12 *Todos os vértices de um grafo têm grau 3. Prove que o grafo tem um ciclo.*

Lembremos que para um vértice receber o nome de folha ele tem que ter grau 1; e que toda árvore com mais de um vértice tem folhas. O grafo em questão não tem folhas, e tem mais de um vértice (caso tivesse apenas um vértice, seu grau seria zero) pois todos os seus vértices têm grau 3, por conseguinte, não é uma árvore. Daí resulta que o grafo em questão terá um ciclo.

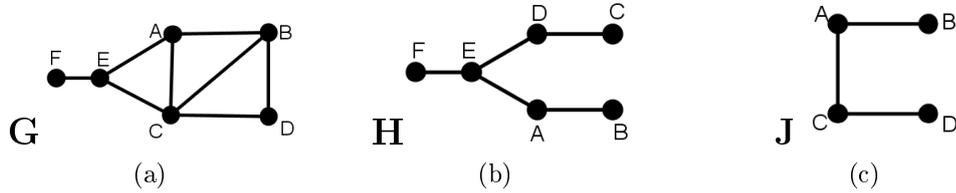
Exemplo 13 *Prove que, se uma aresta (mas não suas extremidades) é retirada de uma árvore, então o grafo resultante não é conexo.*

Suponha que ao retirar uma aresta de uma árvore, o grafo continua sendo conexo. Chamemos os vértices — ou seja, as extremidades — da aresta retirada de V_1 e V_2 . Para que o grafo seja conexo, tem que existir um caminho entre esses 2 vértices. O que garante que no grafo original, havia um ciclo, uma contradição, pois esse grafo é uma árvore.

1.5 Subgrafo

Definição 13 *Um subgrafo de G , denotado por $H \subseteq G$, é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$. Se $V(H) = V(G)$ dizemos que H é um subgrafo gerador de G .*

Figura 1.18: Exemplos de Grafos: (a) grafo G , (b) H subgrafo gerador de G e (c) J subgrafo de G .



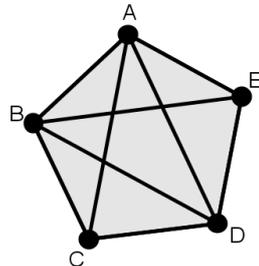
Fonte: Elaborado pela autora

1.6 Grafo planar

Definição 14 Um grafo que pode ser desenhado de modo que suas arestas não se intersectem (exceto em suas extremidades) é chamado de **grafo planar**.

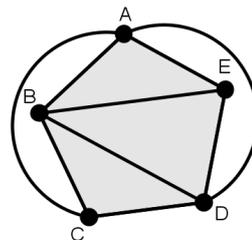
De acordo com a definição, o grafo G da figura 1.19 é planar?

Figura 1.19: Grafo G



A princípio poderíamos pensar que não, por ver que algumas arestas se intersectam, no entanto é possível desenhar esse grafo sem que isso ocorra, como foi feito na figura 1.20 que traz um grafo isomorfo ao grafo G da figura 1.19.

Figura 1.20: Grafo planar



Capítulo 2

COLORAÇÃO

Consideremos a seguinte situação hipotética: ao fim do ano escolar, pretende-se elaborar o calendário das provas finais, com o maior número possível de provas no mesmo horário, mas para isso, provas que tem alunos comuns não podem ocorrer no mesmo horário.

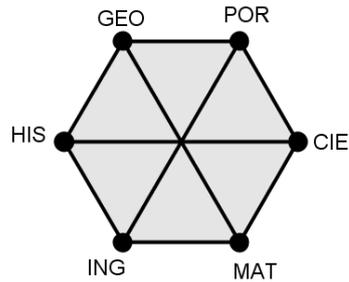
Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PORTUGUÊS	X				X				X				X	
MATEMÁTICA		X		X						X				
CIÊNCIAS						X				X			X	
GEOGRAFIA		X			X				X			X		
HISTÓRIA						X		X				X		X
INGLÊS	X			X										X

Podemos construir um grafo para modelar este problema, as disciplinas são os vértices, as que têm aluno em comum são vértices adjacentes, digo, são ligadas por arestas. Como o faremos no grafo da figura 2.1.

A coloração entra quando precisamos dividir o conjunto de vértices em subconjuntos disjuntos — os vértices de um mesmo subconjunto não são adjacentes.

Utilizamos uma cor para cada subconjunto, vértices adjacentes não podem ser pintados da mesma cor.

Figura 2.1: Grafo das provas finais

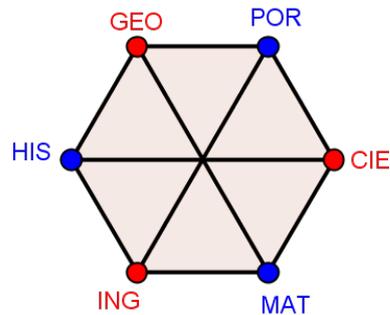


No problema acima, poderia se pintar cada vértice de uma cor, utilizando assim 6 cores, um dia para cada disciplina, contudo é possível otimizar e utilizar menos cores.

Definição 15 *O menor número de cores possível, tal que vértices adjacentes de um grafo G não possuam a mesma cor, recebe o nome de **número cromático**, ou seja, número cromático é o menor número de conjuntos independentes que podemos obter de uma partição do conjunto de vértices de um grafo. Sendo denotado por $crom(G)$.*

O grafo dos exames finais pode ser colorido, como na figura 2.2.

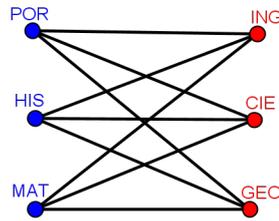
Figura 2.2: Grafo dos exames finais



São necessárias 2 cores, assim precisa-se de 2 horários distintos para realização dos exames finais. $crom(G)=2$. O grafo G , tem 2 subconjuntos disjuntos, consequentemente é bipartido; e mais, é bipartido completo, pois cada vértice de um subconjunto é adjacente a todos do outro.

É fácil ver que $crom(G)=2$, se, e somente se, G é bipartido não nulo; $crom(G)=1$, se, e somente se, G é um grafo nulo; e $crom(K_n)=n$. Mas, não se tem muito a afirmar

Figura 2.3: Outra representação das finais



sobre o número cromático de um grafo arbitrário, por exemplo quando $\text{crom}(G)=3$? ou $\text{crom}(G)=4$? Sabemos que se G tem n vértices, $\text{crom}(G) \leq n$, e se G , possui um subgrafo completo K_n , $\text{crom}(G) \geq n$.

2.1 Colorindo grafos planares

Como já vimos não temos muitos resultados de coloração para grafos arbitrários, mas se nos restringirmos aos grafos planares, temos melhores resultados.

Teorema 2 *O número cromático de um grafo planar não é maior que 4.*

Podemos recordar a definição de grafo planar na seção 1.6.

Figura 2.4: Mapa do Brasil

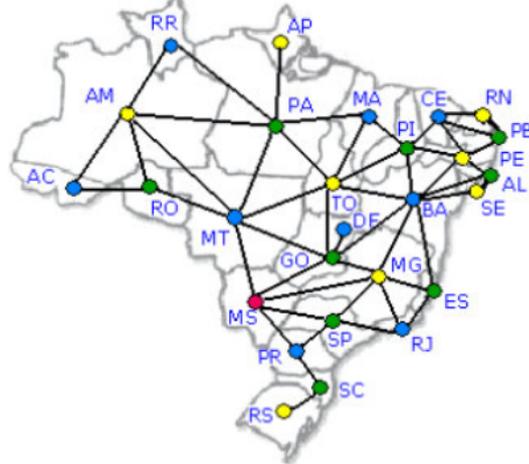


Fonte: MAPA..., 2015

Poderíamos tentar pintar o mapa do Brasil com apenas 3 cores, de forma que estados vizinhos não sejam pintados da mesma cor. O que isso tem haver com grafos? e com o teorema 2?

Uma forma seria pintar cada estado do mapa, outra seria modelar o problema através de grafos, tal que os estados representem os vértices, e as arestas ligam aqueles que fazem fronteiras. Os vértices adjacentes não podem ser pintados pela mesma cor. Assim podemos notar que o número cromático do mapa das dos estados brasileiros tem número cromático 4.

Figura 2.5: Grafo relacionado ao mapa do Brasil



Fonte: RABELO, 2010

2.1.1 *Um pouco de história: Número cromático*

Um longo caminho foi trilhado até que se conseguisse provar o teorema das 4 cores, que inicialmente foi conjecturado por Francis Guthrie, em 1852, que após alguns testes acreditou que 4 cores fossem suficientes para pintar qualquer mapa, de forma que regiões com fronteiras não tenham a mesma cor. O problema foi levado até matemático Augustus De Morgan — um conhecido matemático — que também não conseguiu solucioná-lo. Morgan escreveu para Lorde William Hamilton, a partir daí a conjectura tornou-se bastante conhecida.

Apenas no ano de 1879, comemorou-se a prova alcançada por Alfred Kempe, publicando-a na revista *Nature*. Para tanto, Kempe usou o método das correntes — criado pelo próprio. Não obstante, passado alguns anos, foram encontrados alguns erros, os quais Kempe não conseguiu corrigi-los.

Em 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, da Universidade de Illinois, utilizando, entre outros, o método das correntes, conseguiram finalmente provar a conjectura. Prova esta realizada com auxílio de um computador — que levava em torno de 1200 horas para concluir a prova — sendo assim, longa por demais para conferência à mão, o que gerou bastante polêmica na comunidade acadêmica, que, mesmo assim, acabou aceitando-a, porque até hoje não foram encontradas falhas na demonstração.

2.2 Número de Ramsey

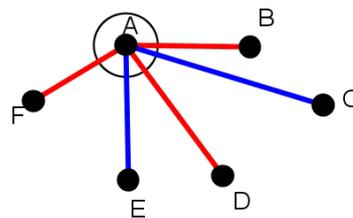
Iniciaremos com o exemplo 6 do artigo referenciado em [3], que traz uma boa motivação para nosso estudo.

Exemplo 14 *Em uma reunião, há 6 pessoas. Mostre que necessariamente existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente (admitimos que, se a conhece b , então b conhece a).*

Podemos representar essa situação através de grafos, onde as pessoas são os vértices, e cada par de vértice é unido por arestas, que podemos pintar de 2 cores — uma cor se as pessoas representadas pelo vértice se conhecem, e outra cor caso contrário— e de qualquer forma que a façamos, sempre existirá 3 pontos tais que as arestas que os unem são pintadas da mesma cor, digo, haverá sempre um triângulo de mesma cor.

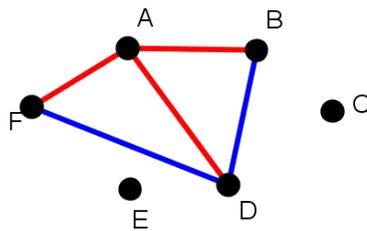
Sejam 6 vértices, escolhamos um vértice qualquer, digamos A , dele saem 5 arestas; podemos ter as 5 de uma mesma cor, 4 ou no mínimo 3 de uma mesma cor (pois utilizaremos apenas 2 cores).

Figura 2.6: Coloração de arestas



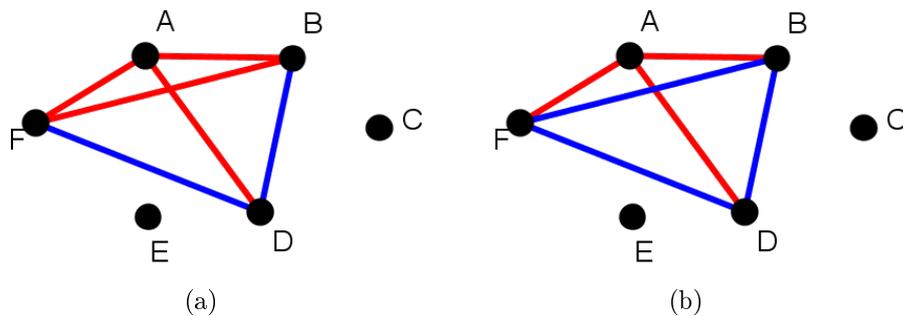
Sejam elas, AB , AF e AD , como na figura 2.6. Não precisamos nos preocupar com as arestas AC e AE , que até podem está pintada de vermelho também. Agora, para pintarmos as arestas BD e DF temos apenas uma opção: pintar de azul, caso contrário teríamos o triângulo vermelho. Veja ilustração 2.7

Figura 2.7: Grafo relativo ao exemplo 14



Falta ainda a aresta BF , que se a pintarmos de vermelho ou de azul, teremos o triângulo de mesma cor (Veja figura 2.8).

Figura 2.8: Continuação da coloração



Poderíamos ainda verificar que para que em um grupo qualquer de N pessoas tenhamos sempre 4 que se conhecem mutuamente, ou 4 que não se conhecem mutuamente, teríamos de ter $N \geq 18$.

$N \rightarrow (k, k)$ (lemos: N flecha k), se toda coloração com 2 cores de um grafo completo K_N , contém k vértices ligados dois a dois pela mesma cor; digo, um subgrafo completo, com k vértices e todas as arestas de mesma cor.

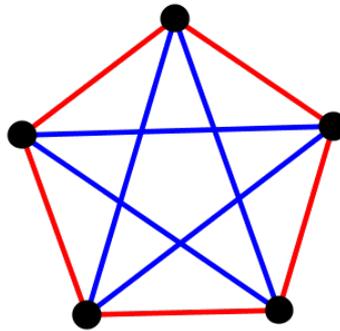
Definição 16 O número de Ramsey — $R(k, k)$ ou apenas $R(k)$ — é o menor inteiro N

tal que $N \rightarrow (k, k)$.

$$R(k, k) = \min\{N; N \rightarrow (k, k)\}.$$

Provamos que $6 \rightarrow (3, 3)$, no exemplo 14 mas para termos $R(3) = 6$, falta provar que $5 \not\rightarrow (3, 3)$ (cinco não flecha $(3,3)$). De fato, o grafo completo da ilustração 2.9 K_5 , não possui nenhum triângulo (subgrafo completo de 3 vértices) monocromático.

Figura 2.9: Grafo completo K_5



Proposição 2 Para todo k inteiro positivo existe um inteiro positivo N tal que, se pintarmos cada aresta de um grafo completo de N vértices de vermelho ou azul, garantimos sempre a existência de um subgrafo completo com k vértices, e todas as arestas pintadas todas de uma mesma cor.

Demonstração: Provaremos que $N = 2^{2k}$ satisfaz a proposição 2, logo $R(k) \leq 2^{2k}$, ou seja, para $N = 2^{2k}$ sempre teremos pelo menos um subgrafo completo com k vértices cujas arestas são monocromáticas.

Seja um grafo completo $K_{2^{2k}}$. Agora numeremos os vértices, com os números naturais de 1 a 2^{2k} . Tomemos o vértice 1, e o denotemos por x_1 , note que x_1 está ligado a $n-1$ arestas, mais especificamente, x_1 está ligado a $2^{2k} - 1$ arestas. Pelo princípio da Casa dos Pombos (ver apêndice 4), pelo menos $\lceil \frac{2^{2k}-1}{2} \rceil = 2^{2k-1}$ arestas têm a mesma cor. Consideremos A_1 um conjunto formado pelos vértices ligados a essas arestas.

¹Função Teto: Dado um número real x , define-se como Função Teto de x , o menor inteiro maior do que x . Notação $\lceil x \rceil = \min\{c \in \mathbb{Z}; c \geq x\}$

Tomemos o menor vértice pertencente a A_1 e o nomeemos de x_2 . Este x_2 está ligado a pelo menos $2^{2k-1} - 1$ vértices de A_1 e, assim, pelo princípio das casas dos pombos, no mínimo $\lceil \frac{2^{2k-1}-1}{2} \rceil$ arestas ligadas a x_2 são monocromáticas (não necessariamente da mesma cor das arestas anteriores).

Agora, seja A_2 o conjunto formado pelos vértices ligados a x_2 por estas arestas. Note que $A_1 \supset A_2$. Repetindo este processo, sempre escolhendo o menor elemento de A_i , e o indicando por x_{i+1} até escolhermos o $x_{2k} \in A_{2k-1}$, que estará conectado a pelo menos 2 outros vértices do mesmo conjunto, no qual teremos 2 arestas de uma mesma cor, ou cada uma de um cor, que formará o conjunto A_{2k} . Cada $x_i \leq x_{i+1}$, e cada conjunto $A_i \supset A_{i+1}$; além do que, se:

$$x_j > x_i \Rightarrow j > i \Rightarrow j - 1 \geq i \Rightarrow x_j \in A_i.$$

Atentemos ainda que cada aresta ligando x_i aos vértices $\in A_i$ são monocromáticas. Deste modo, pintemos os vértices x_i da cor dessas arestas. Teremos, então, $2kx_i$'s pintados, por exemplo, de azul ou de vermelho. E, mais uma vez, pelo princípio das casas dos pombos, teremos minimamente kx_i 's de uma mesma cor, digamos vermelho e os denotemos por $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}$, tal que $x_{i_1} < x_{i_2} < x_{i_3} < \dots < x_{i_k}$, garantindo que de x_{i_1} partem arestas vermelhas para todos os outros vértices citados, e mais, que para todo $j < k$, a aresta que incide de x_{i_j} para x_{i_k} tem cor vermelha.

Com isso, podemos concluir que o subgrafo completo com esses k vértices tem somente arestas vermelhas, isto é, o grafo K_{2^k} tem pelo menos um subgrafo completo de k vértices: $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}$.

Portanto $R(k) < 2^{2k}$. ■

É importante sabermos que o número de Ramsey não se limita ao $R(k) = R(k,k)$, poderemos ter o interesse de encontrar $R(s,t) = \min\{N \in \mathbb{N}; N \rightarrow (s,t)\}$, ou seja queremos saber o menor N , tal que, todo grafo com N vértices contém um subgrafo completo com s vértices ligados por uma cor, ou um subgrafo completo com t vértices ligados por uma outra cor. Em outras palavras, em uma festa com N pessoas, queremos

encontrar s pessoas tais que todas se conhecem, ou t pessoas tais que ninguém se conhece. Como também ao invés de usar 2 cores, podemos utilizar 3 cores.

2.2.1 Um pouco de história: Teoria de Ramsey

Figura 2.10: Ramsey



Fonte: FRANK..., 2015

A teoria de Ramsey tornou-se uma subdisciplina da combinatória, recebeu esse nome em homenagem a Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), um inglês, com vários trabalhos publicados na área de combinatória. Ramsey provou a existência de $R(s, t)$ em 1930, mesmo não estando desenvolvendo trabalho sobre grafos, e sim de lógica, o provou como um lema em seu artigo, vindo a morrer no mesmo ano, sem ter ideia da proporção que aquele lema teria. Essa é um campo novo do saber matemático, e apesar de inúmeros estudos realizados sobre ele, muito tem a ser investigado, com diversos problemas em aberto. Recentemente o britânico William Timothy Gowers (Reino Unido), teve a oportunidade de ganhar a medalha Fields² por trabalhos neste campo.

²Medalha Fields, oficialmente conhecida como Medalha Internacional de Descobrimientos Proeminentes em Matemática, é um prêmio concedido a dois, três ou quatro matemáticos com não mais de 40 anos de idade durante cada Congresso Internacional da União Internacional de Matemática (IMU), que acontece a cada quatro anos. O prêmio é muitas vezes visto como a maior honraria que um matemático pode receber.¹ ² A Medalha Fields e o Prêmio Abel têm sido muitas vezes descritos como o "Prêmio Nobel dos matemáticos" (mas são diferentes quanto à restrição de idade, pois a Medalha Fields é um prêmio concedido somente a jovens matemáticos de até 40 anos de idade, enquanto o Prêmio Abel leva em conta o conjunto da obra do matemático. (Fonte: Wikipédia: http://pt.wikipedia.org/wiki/Medalha_Fields).

Por exemplo, ainda persiste a interrogação em determinar ou estimar $R(k)$, para $k \geq 5$. Tudo que se sabe sobre $R(5)$ é que está entre 43 e 49; $R(6)$, entre 102 e 165; $R(7)$, entre 205 e 540; e esses intervalos só aumentam a medida que k aumenta.

Por volta de 1950, Erdős³, propôs o seguinte: Suponha que aliens invadam a terra e ameacem destruí-la dentro de um ano a menos que a raça humana descubra o valor de $R(5,5)$. Faríamos um pedido para que todas as mentes mais brilhantes se juntassem, usassem os mais rápidos computadores e talvez dentro de um ano, conseguíssemos salvar a terra. Contudo, se os aliens pedissem o valor de $R(6,6)$, a melhor solução seria pedir para eles criarem um plano para destruir os aliens. (Referência [1]) E realmente após esses anos ainda não se sabe o valor de $R(5)$ e $R(6)$.

Figura 2.11: Erdos, 1992



Fonte: PAUL..., 2014

³Paul Erdős (Budapest, 26 de março de 1913 - Varsóvia, 20 de setembro de 1996) foi um matemático húngaro. Foi o segundo matemático que mais publicou

Capítulo 3

MÉTODO PROBABILÍSTICO

Neste capítulo, estudaremos experimentos aleatórios — experimentos que ao serem realizados, mesmo sob condições semelhantes, não podemos assegurar seus resultados. Estes fenômenos são estudados por modelos probabilísticos, para tanto são necessárias algumas considerações, que faremos ao longo deste capítulo. Definiremos o modelo de probabilidade e alguns conceitos necessários para um bom entendimento deste; ademais demonstraremos com detalhes alguns teoremas e proposições que são apresentados como exercícios ou exemplos no livro de Shine (ver referencia [17]) no capítulo intitulado: "Probabilidade aplicada à teoria dos Grafos". Para tanto demonstraremos alguns lemas que são utilizados no mesmo. Apresentamos Abaixo um exemplo de Experimento aleatório ε :

ε_1 : Lançamento de uma moeda 3 vezes seguidas.

Definição 17 *Para cada experimento aleatório ε , definimos **espaço amostral** como o conjunto de todos os resultados possíveis de ε . E o representemos por Ω .*

Ω_1 : {CCC, CCK, CKC, KCC, CKK, KCK, KKC, KKK } , Ω_1 é o espaço amostral do ε_1

Definição 18 *Evento é um subconjunto de um espaço amostral.*

Perceba que tanto \emptyset , como o próprio Ω são eventos, como também qualquer resultado individual. Em outras palavras os eventos são os possíveis subconjuntos do espaço

amostral, ou melhor, são os elementos do conjunto das partes de Ω . Um exemplo de evento do espaço amostral Ω_1 acima é:

E: Ocorrência de apenas 1 cara: $\{CKK, KCK, KKC\}$

É fácil provar que o número de eventos — subconjuntos — possíveis de um conjunto Ω com n elementos é $n(\Omega) = 2^n$. Basta ver que para cada elemento do conjunto temos 2 possibilidades: pertencer ou não ao evento. Como temos n elementos, temos $(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)$ n vezes o que equivale a 2^n eventos possíveis. Mas, como mensurar quão provável é um evento de ocorrer? Neste sentido vê-se a necessidade de atribuir um número para cada evento.

Definição 19 *Seja $P(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω . Definimos a função probabilidade como $P: P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(\Omega) = 1$
4. Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5. Seja A_1, \dots, A_n ; Se $A_i \cap A_j = \emptyset$, e $i \neq j$, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Para espaços amostrais equiprováveis, temos $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

3.1 Variáveis aleatórias

Definição 20 *Seja Ω um espaço amostral finito, isto é, $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ para alguma $n \in \mathbb{N}$. Uma variável aleatória é uma função $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.*

Em outras palavras, uma variável aleatória associa um número a cada elemento de Ω . Ainda considerando o experimento ε_1 , e o seu respectivo espaço amostral Ω_1 descritos anteriormente, uma possível variável aleatória relacionada a esse experimento seria o número de ocorrências de cara. Desta forma, para cada elemento $x \in \Omega_1$ associaríamos um elemento $a = X(x) \in X(\Omega_1)$, onde $X(\Omega_1) = \{0, 1, 2, 3\}$, $X(\text{CCC}) = 3$, enquanto $X(\text{KKK}) = 0$ e $X(\text{CCK}) = X(\text{CKC}) = X(\text{KCC}) = 2$, e $X(\text{CKK}) = X(\text{KKC}) = X(\text{KCK}) = 1$;

Para calcularmos probabilidades de variáveis aleatórias, utilizamos o conceito de imagem inversa. Mais precisamente, se queremos calcular a probabilidade da variável aleatória X assumir um valor em um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, calculamos:

$$P(X \in A) := P(X^{-1}(A)),$$

onde $X^{-1}(A) = \{x \in \Omega; X(x) \in A\}$. Analogamente, escrevemos:

$$P(X = a) := P(X^{-1}(\{a\})) = P(\{x \in \Omega; X(x) = a\}).$$

Exemplo 15 Considere o experimento, lançamento de moedas. Neste caso, $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ e $P(\{\text{cara}\}) = P(\{\text{coroa}\}) = \frac{1}{2}$. Seja X a variável aleatória $X(\{\text{cara}\}) = 0$ e $X(\{\text{coroa}\}) = 1$. Então,

$$P(X = 1) = P(\{\text{coroa}\}) = \frac{1}{2}.$$

3.2 Valor esperado

Definição 21 *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória. Definimos a esperança (ou o valor esperado) de X como*

$$E(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a \cdot P(X = a).$$

Observação 1 *Note que $X(\Omega)$ contém todos os valores que a variável aleatória X pode assumir.*

Iremos provar alguns lemas que serão utilizados na próxima proposição.

Lema 2 $\forall c \in \mathbb{R}$, temos

$$E(c \cdot X) = c \cdot E(X).$$

Demonstração: Provaremos para variável aleatória discreta. De fato, seja X uma variável aleatória discreta e c uma constante real qualquer,

$$E(c \cdot X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a \cdot c \cdot P(X = a) = c \cdot \sum_{a \in X(\Omega)} a \cdot P(X = a) = c \cdot E(X).$$

■

Lema 3 *Seja $O \subset \Omega$, defina*

$$\mathbf{1}_O(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in O \\ 0, & \text{se } x \notin O \end{cases}.$$

Então, dado qualquer $A \subset \mathbb{R}$,

$$P(X \in A) = E(\mathbf{1}_{X \in A}).$$

Observação 2 *Note que $\mathbf{1}_{X \in A}$ é uma variável aleatória, pois $\mathbf{1}_{X \in A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mais precisamente $\mathbf{1}_{X \in A} : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$.*

Demonstração: Observe que

$$E(\mathbf{1}_{X \in A}) = \sum_{a \in \mathbf{1}_{X \in A}(\Omega)} a \cdot P(\mathbf{1}_{X \in A} = a) = \sum_{a \in \{0,1\}} a \cdot P(\mathbf{1}_{X \in A} = a) =$$

$$0 \cdot P(\mathbf{1}_{X \in A} = 0) + 1 \cdot P(\mathbf{1}_{X \in A} = 1) = P(X \in A).$$

Pois,

$$\mathbf{1}_{X \in A}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } X(x) \in A \\ 0, & \text{se } X(x) \notin A \end{cases}.$$

■

Lema 4 Para toda V.A. $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall A \subset \Omega$:

$$P(A) = \sum_{b \in Y(\Omega)} P(A \cap \{Y = b\}).$$

Demonstração:

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{b \in Y(\Omega)} \{Y = b\}))$$

$$= P(\bigcup_{b \in Y(\Omega)} (A \cap \{Y = b\})) = \sum_{b \in Y(\Omega)} P(A \cap \{Y = b\}).$$

Esta última igualdade decorre da união disjunta ($\Omega = \bigcup_{b \in Y(\Omega)} \{Y = b\}$) e da propriedade

5.

Se tomarmos $A = \{X = a\}$, teremos $P(X = a) = \sum_{b \in Y(\Omega)} P(X = a, Y = b)$ que será usado no próximo lema. ■

Lema 5 Sejam X, Y variáveis aleatórias, se $X \geq Y$, então $E(X) \geq E(Y)$.

Dizer que $X \geq Y$ significa que $\forall x \in \Omega$, $X(x) \geq Y(x)$.

Demonstração:

$$E(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a \cdot P(X = a) = \sum_{a \in X(\Omega)} a \cdot \sum_{b \in Y(\Omega)} P(X = a, Y = b),$$

mas, como $X=a$ e $Y=b$, segue

$$\{X = a, Y = b\} = \{x \in \Omega; X(x) = a \text{ e } Y(x) = b\}.$$

Ora, $X(x) \geq Y(x)$. Daí, $a \geq b$. Logo,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{b \in Y(\Omega)} \sum_{a \in X(\Omega)} a \cdot P(X = a, Y = b) \geq \sum_{b \in Y(\Omega)} \sum_{a \in X(\Omega)} b \cdot P(X = a, Y = b) \\ &= \sum_{b \in Y(\Omega)} b \cdot \sum_{a \in X(\Omega)} P(X = a, Y = b) = \sum_{b \in Y(\Omega)} b \cdot P(Y = b) = E(Y). \end{aligned}$$

Portanto, $X \geq Y \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$. ■

3.2.1 Soma de variáveis aleatórias e esperança da soma

Seja X uma variável aleatória, tomando valores no conjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ e Y uma Variável aleatória tomando valores no conjunto $\{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. Então, vemos que $X + Y$ também é uma variável aleatória, e é dada por:

$X + Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $(X + Y)(w) = X(w) + Y(w)$. Observe ainda que $X+Y$ toma valores no conjunto

$$Z = \{i_k + j_l; 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m\}$$

Além disso,

$$\{X + Y = z\} = \bigcup_{k=1}^n \{X = i_k \text{ e } Y = z - i_k\} = \bigcup_{l=1}^m \{Y = j_l \text{ e } X = z - j_l\}$$

Lema 6 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 E(X + Y) &= \sum_{z \in Z} z \cdot P(X + Y = z) = {}^1 \sum_{z \in Z} z \cdot P\left(\bigcup_{k=1}^n \{X = i_k, Y = z - i_k\}\right) = \\
 &= \sum_{z \in Z} \sum_{k=1}^n z \cdot P(X = i_k, Y = z - i_k) = \sum_{z \in Z} \sum_{k=1}^n (z - i_k + i_k) \cdot P(X = i_k, Y = z - i_k) = \\
 &= \sum_{z \in Z} \sum_{k=1}^n i_k \cdot P(X = i_k, Y = z - i_k) + \sum_{z \in Z} \sum_{k=1}^n (z - i_k) \cdot P(X = i_k, Y = z - i_k).
 \end{aligned}$$

Resolveremos separadamente cada um dos termos da soma acima. Seja

$$I = \sum_{z \in Z} \sum_{k=1}^n i_k \cdot P(X = i_k, Y = z - i_k)$$

$$II = \sum_{z \in Z} \sum_{k=1}^n (z - i_k) \cdot P(X = i_k, Y = z - i_k)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \sum_{k=1}^n i_k \sum_{z \in Z} P(X = i_k, Y = z - i_k) = \sum_{k=1}^n i_k P(X = i_k, \bigcup_{z \in Z} Y = z - i_k) = \\
 &= \sum_{k=1}^n i_k \cdot P(X = i_k) = E(X).
 \end{aligned}$$

Para resolver II , faça $z - i_k = y$, então, como $z \in Z$, y pode assumir os valores em $\{j_l, 1 \leq l \leq m\}$. Logo,

$$II = \sum_{z \in Z} \sum_{k=1}^n (z - i_k) \cdot P(X = i_k, Y = z - i_k) = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n j_l \cdot P(X = i_k, Y = j_l).$$

A igualdade acima significa que quando z varia em Z , Y varia em todo o conjunto de valores possíveis. Daí,

$$II = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n j_l \cdot P(X = i_k, Y = j_l) = \sum_{l=1}^m j_l P\left(\bigcup_{k=1}^n \{X = i_k, Y = j_l\}\right) =$$

¹Note que a união é disjunta

$$\sum_{l=1}^m j_l P(Y = j_l) = E(Y).$$

Logo,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y). \quad (3.1)$$

Como foi demonstrado. ■

Segue imediatamente por indução que

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

Proposição 3 *Desigualdade de Markov* - Seja X uma variável aleatória positiva, isto é $\forall x \in \Omega, X(x) \geq 0$. Então, $\forall a > 0$;

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}.$$

Estamos usando a notação $\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}$ para representar $\mathbf{1}_{\{X \in [a, +\infty)\}}$. **Demonstração:**

$$P(X \geq a) = E(\mathbf{1}_{\{X \geq a\}}) = E(\mathbf{1}_{\{1 \leq \frac{X}{a}\}}) = E(\mathbf{1}_{\{1 \leq \frac{X}{a}\}} \cdot 1).$$

Note que:

$$\mathbf{1}_{\{1 \leq \frac{X}{a}\}} \cdot 1 \leq \mathbf{1}_{\{1 \leq \frac{X}{a}\}} \cdot \frac{X}{a}.$$

Por outro lado, $\frac{X}{a} \geq 0$, daí,

$$\mathbf{1}_{\{1 \leq \frac{X}{a}\}} \frac{X}{a} \leq \frac{X}{a}.$$

Daí, pelo lema 5,

$$P(x \geq a) = E(\mathbf{1}_{\{1 \leq \frac{X}{a}\}} \cdot 1) \leq E(\mathbf{1}_{\{1 \leq \frac{X}{a}\}} \cdot \frac{X}{a}) \leq E\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{E(X)}{a}.$$

Provamos assim que $P(x \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$. ■

Demonstraremos a seguir alguns lemas que serão necessários para demonstrações das proposições e do teorema que serão apresentados após estes.

Lema 7 *Seja um experimento que gera um número inteiro entre 0 e n . Se o valor esperado deste número é menor que 1, então a probabilidade do número ser 0 é maior que zero, isto é, é possível que o número seja 0.*

Demonstração: Seja X a V.A. associada a este experimento, ou seja, X assume o valor n , com a probabilidade correspondente ao experimento: $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Assim,

$$E(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} i \cdot P(X = i) = \sum_{i=0}^n i \cdot P(X = i).$$

Provaremos por contrapositiva: Se $P(X = 0) = 0$, então $\sum_{i=1}^n P(X = i) = 1$, conseqüentemente,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n i \cdot P(X = i) \geq \sum_{i=1}^n P(X = i) = 1.$$

Logo,

$$P(X = 0) = 0 \Rightarrow E(X) \geq 1.$$

Daí, pela contrapositiva,

$$E(X) < 1 \Rightarrow P(X = 0) > 0.$$

Provamos que se a esperança de X é menor que 1 a probabilidade do número ser 0 é maior que zero. ■

Lema 8 *Seja X uma variável aleatória tomando valores no conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n\}$;*

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k).$$

Demonstração:

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k).$$

Vamos reorganizar esta soma.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k) &= 0 + P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \dots + nP(X = n) = \\ &P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = n) \\ &\quad + P(X = 2) + P(X = 3) + \dots + P(X = n) \\ &\quad \quad + P(X = 3) + \dots + P(X = n) \\ &\quad \quad \quad \cdot \\ &\quad \quad \quad + P(X = n) \\ &= P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \dots + P(X \geq n). \\ &= \sum_{k=1}^n P(X \geq k). \end{aligned}$$

Logo,

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k).$$

■

Lema 9 *Seja X uma V.A. tomando valores em $\{0, 1, \dots, n\}$. Então*

$$E(n - X) \leq a \Rightarrow P(X > 0) > 1 - a.$$

Demonstração: Note que $0 \leq n - X \leq n$. Suponha que

$$P(X > 0) \leq 1 - a.$$

Daí,

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k),$$

note que $\forall k = 1, \dots, n$,

$$P(X \geq k) \leq P(X > 0), \quad \text{pois } \{X \geq k\} \subset \{x > 0\}.$$

Logo,

$$P(X \geq k) \leq P(X > 0) \leq 1 - a.$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k) \leq \sum_{k=1}^n P(X > 0) = n \cdot P(X > 0) \leq n \cdot (1 - a).$$

$$E(X) \leq n - na \Rightarrow na \leq n - E(X) = E(n - X).$$

Em particular, $na \geq a$, pois $n \geq 1$.

Assim,

$$E(n - X) \geq na \geq a.$$

Mostramos que

$$P(X > 0) \leq 1 - a \Rightarrow E(n - X) \geq a$$

\Downarrow

$$E(n - X) < a \Rightarrow P(X > 0) > 1 - a.$$

■

Na subseção 2.2 demonstramos a existência de um limite superior para $R(k)$, nesta seção utilizaremos os conceitos de probabilidade para demonstrar a existência de um limite inferior para $R(k)$.

Proposição 4 $R(k) > \frac{k}{e \cdot \sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$.

Demonstração: Queremos provar que se $n = \frac{k}{e \cdot \sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$, é possível que um grafo com n vértices, não possua um subgrafo completo com k vértices e todas as arestas monocromáticas, quer dizer, a probabilidade de não existir esse subgrafo é maior que zero. Com este fim, tomaremos um n arbitrário e chegaremos ao n que queremos.

Consideremos um grafo K_n , e de forma aleatória pintemos cada uma de suas arestas de verde ou amarelo. Como temos duas cores, a probabilidade de pintar uma aresta com uma dentre as duas cores é de $\frac{1}{2}$. Encontremos o número esperado de subgrafos completos com k vértices e arestas de uma única cor. Para isso, precisamos da probabilidade de que isso ocorra com uma das cores. Para escolhermos k vértices, teremos $\binom{n}{k}$ possibilidades. Escolhido os vértices, o número de arestas que os ligam é: $\binom{k}{2}$, a probabilidade de serem monocromáticas é 2 vezes a probabilidade de serem de uma das cores, por exemplo, de serem verde: $\frac{1}{2} \binom{k}{2}$. Então:

$$E(n) = 2 \cdot \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

Vamos utilizar a aproximação de Stirling para $k!$ ² Precisaremos apenas do lado esquerdo da desigualdade.

$$\sqrt{2\pi} \cdot k^{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k} \leq k! \leq k^{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k}.$$

Ora,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

mas,

$$k! \geq \sqrt{2\pi} \cdot k^{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k} = k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}, \quad e \quad n^k \geq n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Daí

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \left(\frac{ne}{k}\right)^k. \quad (3.2)$$

²A aproximação para k grande é $k! = \sqrt{2\pi} \cdot k^{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k}$. A fórmula foi descoberta pela primeira vez por Abraham de Moivre, na forma $k! = cte \cdot k^{k+\frac{1}{2}} \cdot e^{-k}$ Stirling contribuiu mostrando que a constante era $\sqrt{2\pi}$. Para mais detalhes, ver referência [18].

Consequentemente,

$$E(n) \leq 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{k}} \left(\frac{ne}{k}\right)^k \cdot 2^{(-\frac{1}{2}k(k-1))} = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{ne}{k}\right)^k \cdot 2^{(-\frac{1}{2}k(k-1))}.$$

Façamos $n = \frac{k}{e} \cdot 2^x$, substituindo,

$$E(n) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{k}{e} \cdot 2^x \cdot \frac{e}{k}\right)^k 2^{(-\frac{1}{2}k(k-1))} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot 2^{(xk - \frac{1}{2}k(k-1))}.$$

Pelo lema 7, se $E(n) < 1$, a probabilidade de haver um grafo completo K_n que não contenha subgrafos completos monocromáticos é maior que zero. Basta então verificarmos se $E(n) < 1$. Neste sentido, vejamos que

$$2^{(xk - \frac{1}{2}k(k-1))} \leq 1$$

\Updownarrow

$$(xk - \frac{1}{2}k(k-1)) \leq 0 \iff xk - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} \leq 0 \iff x \leq \frac{k-1}{2},$$

em especial, se $x = \frac{k-1}{2}$; $2^{(xk - \frac{1}{2}k(k-1))} = 1$ e $n = \frac{k}{e \cdot \sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$ como queríamos. Além disso,

$$E(n) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} < 1. \quad ^3$$

Assim, para $n = \frac{k}{e \cdot \sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$, existe um grafo completo, que não possui subgrafos completos de k vértices com todas as arestas monocromáticas. Desta forma,

$$R(k) > \frac{k}{e \cdot \sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}.$$

E como já havíamos provado no capítulo anterior um limite superior, sabemos que:

$$\frac{k}{e \cdot \sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{k}{2}} < R(k) < 2^{2k}.$$

³Observe que sendo k o número de vértices de subgrafos completos monocromáticos $k \geq 2$.

■

3.3 Construção de grafos

Como já dissemos, em muitos casos precisamos do método probabilístico para provar a existência de determinados grafos. Mas, também é importante frisar que algumas vezes queremos grafos que satisfaçam a certas propriedades, e não conseguimos demonstrar diretamente essa existência, mas podemos provar que existe um grafo que mesmo não atendendo ao que procuramos, possui características úteis, e a partir dele podemos construir o grafo desejado.

Nessa seção iremos demonstrar um teorema que diz ser possível construir um grafo com número cromático e cintura arbitrariamente grandes. Este resultado é surpreendente, pois o fato de ter cintura grande, significa que localmente o grafo é uma árvore. Por exemplo, se temos um grafo com cintura 1000, qualquer subgrafo com 500 vértices será uma árvore. Isso nos diria que o número cromático desse grafo deve ser pequeno. Incrivelmente, podemos ter o número cromático tão grande quanto desejarmos. Este fato contraintuitivo nos deixa claro que é difícil provar este teorema e, além disso, que o número cromático é uma função global do grafo. Assim, o conhecimento local do grafo não ajuda a estimar corretamente o número cromático. Em outras palavras, para conhecermos o número cromático de um grafo, devemos conhecer o grafo inteiro, não apenas pedaços dele.

Provamos alguns lemas que utilizaremos para demonstrar um dos teoremas de Erdos que se seguirá. Neste mesmo sentido, segue o lema adiante:

Lema 10 *Se x_i com $i = 0, \dots, h$ é uma sequência de números tais que $x_i \leq x_{i+1}$, então*

$$\sum_{i=0}^h x_i \leq (h+1) \cdot x_h.$$

Demonstração: De fato,

$$\sum_{i=0}^h x_i = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_h,$$

mas para todo $i = 0, \dots, h$, temos que $x_i \leq x_h$. Segue que

$$\sum_{i=0}^h x_i \leq (h + 1) \cdot x_h.$$

Como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3 $\forall \chi \geq 4, g \geq 4$, existe um grafo com número cromático χ e cintura g .

Nas figuras 3.1 e 3.2 exemplificamos grafos com $\chi = 4$ e $g = 4$.

Figura 3.1: Grafo com $\chi = 4$ e $g=4$

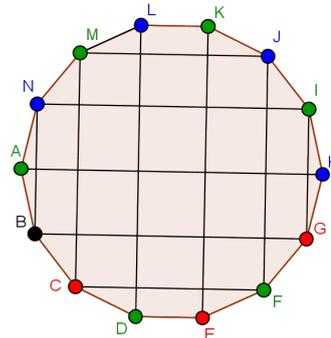
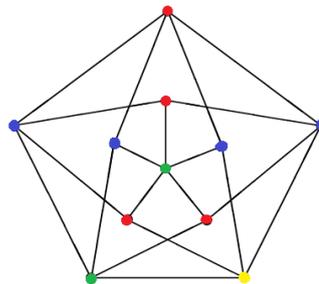


Figura 3.2: Grafo de Grötzsch



Fonte: Feofiloff, 2011

Demonstração: O grafo desejado deve ter as propriedades abaixo:

- (i) Ter cintura $\geq g$;
- (ii) Ter número cromático $\geq \chi$.

Mostraremos que existe um grafo com essas duas propriedades, e mais que o número de vértices desse grafo é no máximo $\chi^{3g} + g$. Inicialmente, consideremos um grafo com n vértices, $n = \chi^{3g}$. Com probabilidade p , ligaremos cada par de vértices aleatoriamente. O espaço amostral desses grafos é $\mathcal{G}(n; p)$ (i) Estamos inicialmente interessados em ciclos com no máximo $g-1$ vértices. Escolhamos ℓ vértices, dentre os n vértices do grafo. Temos $\binom{n}{\ell}$ possibilidades de escolher os vértices do ciclo de comprimento ℓ , com $\ell \geq 3$. Escolhido os vértices temos $\frac{(\ell-1)!}{2}$ formas de ordená-los em ciclo (dividimos por 2, pois não importa se os ciclos estão em sentido horário ou anti-horário).

Suponha que ordenemos esses grafos com ℓ vértices fixados entre os n disponíveis, possuindo um ciclo de tamanho ℓ , como $C_{\ell,1}, \dots, C_{\ell,N(\ell)}$. onde $N(\ell)$ é o total de grafos existentes nestas condições, digo, $N(\ell) = \binom{n}{\ell} \cdot \frac{(\ell-1)!}{2}$.

Defina a variável aleatória:

$$C_\ell = \sum_{i=1}^{N(\ell)} C_{\ell,i}.$$

Seja $C_{\ell,i}$ uma variável aleatória, tal que:

$$C_{\ell,i} = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo subgrafo (com } \ell \text{ vértices entre os } n \text{ fixados disponíveis)} \\ & \text{possui um ciclo de tamanho } \ell \\ 0, & \text{se não possui} \end{cases}.$$

Note que: $P(C_{\ell,i} = 1) = p^\ell$ e $E(C_{\ell,i}) = p^\ell$, pois,

$$E(C_{\ell,i}) = 1 \cdot P(C_{\ell,i} = 1) + 0 \cdot P(C_{\ell,i} = 0).$$

O número esperado de ciclos com ℓ vértices considerando o espaço amostral \mathcal{G} é:

$$E(C_\ell) = \binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{2} p^\ell = \frac{n(n-1)\dots(n-\ell+1)}{2} \leq \frac{(np)^\ell}{2\ell}.$$

Por conseguinte, o número esperado de ciclos com no máximo $g-1$ vértices é ⁴

$$\sum_{\ell=3}^{g-1} E(C_\ell) \leq \sum_{\ell=3}^{g-1} \frac{(np)^\ell}{6} \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{(np)^g - 1}{np - 1} \leq \frac{(np)^{g-1}}{3}.$$

Observemos que está última desigualdade é verdadeira, para $np \geq 2$:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{(np)^g - 1}{np - 1} \leq \frac{(np)^{g-1}}{3}$$

\Leftrightarrow

$$(np)^g - 1 \leq 2(np)^{g-1} \cdot (np - 1)$$

\Leftrightarrow

$$(np)^g - 1 \leq 2(np)^g - 2(np)^{g-1}$$

\Leftrightarrow

$$0 \leq (np)^g - 2(np)^{g-1} + 1$$

\Leftrightarrow

$$0 \leq np \cdot (np)^{g-1} - 2(np)^{g-1} + 1$$

\Leftrightarrow

$$0 \leq (np - 2) \cdot (np)^{g-1} + 1,$$

que é verdadeira desde que $np \geq 2$. Assim, basta tomarmos um valor adequado para

⁴Temos a esperança da soma das variáveis aleatórias C_ℓ , $\ell = 3, \dots, g-1$, que conforme o lema 6 é a soma das esperanças $E(C_\ell)$, $\ell = 3, \dots, g-1$.

p , digamos, $p \geq \frac{2}{n}$. Por simplicidade, seja $h = (np)^{g-1}$. Denotemos por ciclos curtos, aqueles com no máximo $g - 1$ vértices. Seja H o conjunto dos grafos com no máximo h ciclos "curtos". A partir de um desses grafos de H , retirando uma aresta de cada ciclo curto podemos obter um grafo com cintura g . Dessarte, queremos provar que $P(H) > 0$. De fato,

$$P(H) = P\left(\sum_{\ell=3}^{g-1} C_{\ell} \leq h\right).$$

Utilizaremos a desigualdade de Markov já demonstrada em 3.

$$P(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}.$$

Mas, $P(x > a) \leq P(x \geq a)$ Isto posto, podemos escrever :

$$P(x > a) \leq \frac{E(x)}{a},$$

multiplicando por (-1) e somando 1:

$$1 - P(x > a) \geq 1 - \frac{E(x)}{a},$$

Desta forma,

$$P(H) = P\left(\sum_{\ell=3}^{g-1} C_{\ell} \leq h\right) \geq 1 - \frac{E\left(\sum_{\ell=3}^{g-1} C_{\ell}\right)}{h} = 1 - \frac{\sum_{\ell=3}^{g-1} E(C_{\ell})}{h} \geq 1 - \frac{\frac{h}{3}}{h} = \frac{2}{3}.$$

Como $P(H) \geq \frac{2}{3}$, é possível encontrar grafos com ciclos de no máximo $g-1$ vértices, ou seja com no máximo h ciclos curtos. Falta mostrar que também existe grafos com a propriedade (ii), ou melhor, grafos que possuam as duas propriedades.

(ii) Como elucidamos na definição 15, o número cromático é o menor número de subconjuntos independentes dos vértices de um grafo. Seja G um grafo com número cromático $\chi(G)$. Seja $t(G)$ o número de elementos do maior conjunto independente de

G. Então,

$$\chi(G) \cdot t(G) \geq n \iff t(G) \geq \frac{n}{\chi(G)} \iff \chi(G) \geq \frac{n}{t(G)}.$$

Queremos um grafo com número cromático χ .

Defina: $T = \frac{n}{\chi}$. Se mostrarmos que G não possui conjunto independente com $T + 1$ elementos, então,

$$t(G) \leq T \implies \frac{1}{T} \leq \frac{1}{t(G)}, \quad \text{daí,} \quad \chi(G) \geq \frac{n}{t(G)} \geq \frac{n}{T} = \chi.$$

Em (i), dissemos que para obter um grafo com cintura maior ou igual a g bastava retirar h arestas. Logo, é necessário obtermos grafos, cujo número cromático se mantenha mesmo depois de retirarmos h arestas.

Seja I o conjunto de grafos com a propriedade acima: o conjunto de grafos pertencentes ao espaço amostral $\mathcal{G}(n; p)$, tais que qualquer subgrafo de $T + 1$ vértices contém pelo menos $h+1$ arestas. Queremos mostrar que $P(H \cap I) > 0$. Para isso provaremos que $P(I) \geq \frac{2}{3}$. Pois, se $P(I) \geq \frac{2}{3}$, decorre que:

$$P(H \cap I) = P(H) + P(I) - P(H \cup I) \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0. \quad (3.3)$$

Para tanto, fixemos um subgrafo com $T + 1$ vértices. Seja F o número de pares de vértices, $F = \binom{T+1}{2}$. Temos $\binom{F}{j}$ formas de dispor j arestas em $T + 1$ vértices. Defina variável aleatória $Z :=$ o número de arestas que um subgrafo escolhido ao acaso com $T + 1$ vértices possui.

$$P(Z = j) = \binom{F}{j} p^j (1-p)^{F-j}.$$

Assim,

$$P(Z \leq h) = \sum_{j=0}^h \binom{F}{j} p^j (1-p)^{F-j}.$$

Estamos interessados em subgrafos com $T+1$ vértices. Seja $\bar{n} = \binom{n}{T+1}$ o número de subgrafos com $T+1$ vértices.

Temos, então $G_1, \dots, G_{\bar{n}}$ subgrafos com $T+1$ vértices. É importante perceber

que $G_1, \dots, G_{\bar{n}}$ são grafos aleatórios cujos os vértices foram fixados, e as arestas são aleatórias.⁵ Observe que

$$P(G_i \notin I) = P(Z \leq h) = \sum_{j=0}^h \binom{F}{j} p^j (1-p)^{F-j} = \bar{p}.$$

Defina a V.A.

$$\bar{I}_i = \begin{cases} 1, & \text{se } G_i \notin I \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Seja $\bar{I} :=$ Variável aleatória dada pelo número de grafos em $\mathcal{G}(n, p)$ que não pertencem a I — grafos que possuem pelo menos um subgrafo com $T+1$ vértices, que tem h ou menos arestas. Note que

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{I}_i.$$

Além disso,

$$E(\bar{I}_i) = P(\bar{I}_i = 1) = P(G_i \notin I) = \bar{p}.$$

Logo, utilizando o lema 6

$$E(\bar{I}) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} E(\bar{I}_i) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \bar{p} = \bar{n} \cdot \bar{p}.$$

Por conseguinte o valor esperado de subgrafos não pertencentes a I é:

$$E(\bar{I}) = \binom{n}{T+1} \sum_{j=0}^h \binom{F}{j} p^j (1-p)^{F-j}. \quad (3.4)$$

Provaremos que $E(\bar{I}) < \frac{1}{3}$. Logo pelo lema 9, fazendo $n = \bar{n}$ e $X = \bar{n} - \bar{I}$. Assim, concluímos que

$$P(\bar{n} - \bar{I} > 0) > 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

⁵Quando estamos considerando grafos aleatórios, os vértices são determinísticos. As arestas são aleatórias. Então, podemos fixar vértices, e as arestas aleatórias é que fornecerão as propriedades dos grafos.

Ou seja,

$$P(\bar{I} < \bar{n}) > \frac{2}{3}.$$

Mas, com \bar{I} é o número de grafos em $\mathbf{G}(n, p)$ que não pertencem a I , ou seja os subgrafos com $T + 1$ vértices cujo número de arestas é menor ou igual a h , temos que

$$\{\bar{I} < \bar{n}\} = \{\text{existe pelo menos um grafo em } I\}.$$

Logo,

$$P(I) = P(\bar{I} < \bar{n}) > \frac{2}{3}. \quad (3.5)$$

Isto posto, resta-nos demonstrar que $E(\bar{I}) < \frac{1}{3}$. E o faremos a seguir.

Queremos majorar o somatório, para isso vamos verificar como se comportam os termos consecutivos da soma, se for monótono não decrescente, ou seja, a razão entre eles for sempre maior ou igual a 1, podemos afirmar conforme provamos no lema 10 que

$$\sum_{j=0}^h \binom{F}{j} p^j (1-p)^{F-j} \leq (h+1) \binom{F}{h} p^h (1-p)^{F-h}. \quad (3.6)$$

Ou seja, para que essa afirmação seja verdadeira, precisamos que:

$$\frac{\binom{F}{j+1} p^{j+1} (1-p)^{F-(j+1)}}{\binom{F}{j} p^j (1-p)^{F-j}} \geq 1, \text{ com } j = 0, \dots, h-1. \quad (3.7)$$

Ora,

$$\frac{\binom{F}{j+1} p^{j+1} (1-p)^{F-(j+1)}}{\binom{F}{j} p^j (1-p)^{F-j}} = \frac{\frac{F(F-1)\dots(F-j)(F-(j+1))!}{(j+1)!(F-(j+1))!} p^{j+1} (1-p)^{F-(j+1)}}{\frac{F(F-1)\dots(F-j+1)(F-j)!}{j!(F-j)!} p^j (1-p)^{F-j}}.$$

Simplificando a expressão, temos:

$$\frac{\binom{F}{j+1} p^{j+1} (1-p)^{F-(j+1)}}{\binom{F}{j} p^j (1-p)^{F-j}} = \frac{F-j}{j+1} \frac{p}{1-p} \geq \frac{F-h}{h} \frac{p}{1-p} = \left(\frac{F}{h} - 1\right) \frac{p}{1-p}. \quad (3.8)$$

Pois $j+1$ é no máximo h .

Logo, basta que

$$\left(\frac{F}{h} - 1\right) \frac{p}{1-p} \geq 1 \quad (3.9)$$

\Leftrightarrow

$$\left(\frac{F}{h} - 1\right) p \geq 1 - p$$

\Leftrightarrow

$$\frac{Fp}{h} - p \geq 1 - p$$

\Leftrightarrow

$$\frac{Fp}{h} \geq 1.$$

Mas, $F = \binom{T+1}{2} = \frac{T(T+1)}{2}$ e definimos $T = \frac{n}{\chi}$ e $n = \chi^{3g} \Rightarrow T = \frac{\chi^{3g}}{\chi} = \chi^{3g-1}$.
Consequentemente, $F = \frac{\chi^{3g-1}(\chi^{3g-1}+1)}{2}$.

Ademais $h = (np)^{g-1} = (\chi^{3g}p)^{g-1}$. Substituindo na desigualdade anterior:

$$\frac{Fp}{h} = \frac{\frac{\chi^{3g-1}(\chi^{3g-1}+1)}{2}}{(\chi^{3g}p)^{g-1}} p = \frac{(\chi^{3g-1} + 1)}{2\chi^{3g(g-1)-(3g-1)}} \frac{p}{p^{g-1}} \geq 1$$

\Leftrightarrow

$$\frac{(\chi^{3g-1} + 1)}{2\chi^{3g^2-6g+1}} \geq \frac{p^{g-1}}{p} = p^{g-2}. \quad (3.10)$$

Observe que,

$$\frac{\chi^{3g-1} + 1}{2\chi^{3g^2-6g+1}} > \frac{\chi^{3g-1}}{\chi^{3g^2-6g+2}} = \chi^{-3g^2+9g-3},$$

pois $\chi \geq 4$, logo é maior que 2. Sendo assim,

$$p^{g-2} \leq \chi^{-3g^2+9g-3} \Rightarrow p^{g-2} \leq \frac{\chi^{3g-1} + 1}{2\chi^{3g^2-6g+1}}.$$

O que garante a desigualdade 3.7.

Lembrando que em (i), temos um limite inferior para p : $p \geq 2\chi^{-3g}$. Precisamos escolher p , tal que:

$$2\chi^{-3g} \leq p \leq \chi^{\frac{-3g^2+9g-3}{g-2}}.$$

Observe que $-3g^2 + 9g - 3$ pode ser escrito como: $(-3g + 3)(g - 2) + 3$. Resultando:

$$\frac{-3g^2 + 9g - 3}{g - 2} = -3g + 3 + \frac{3}{g - 2}$$

que é um pouco maior que $-3g + 3$, por simplicidade podemos reduzir um pouco o intervalo para p :

$$2\chi^{-3g} \leq p \leq \chi^{-3g+3}.$$

Portanto, escolhendo um valor para p neste intervalo, garantimos a desigualdade 3.6:

$$\sum_{j=0}^h \binom{F}{j} p^j (1-p)^{F-j} \leq (h+1) \binom{F}{h} p^h (1-p)^{F-h}.$$

Tomemos $p = 2\chi^{-3g+2}$.

Utilizando o fato demonstrado em 3.2:

$$\binom{n}{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \left(\frac{ne}{k}\right)^k \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k,$$

e voltando a expressão da $E(\bar{I})$ da equação 3.4:

$$\begin{aligned} E(\bar{I}) &\leq \binom{n}{T+1} (h+1) \binom{F}{h} p^h (1-p)^{F-h} \\ &\leq \left(\frac{en}{T+1}\right)^{T+1} (h+1) \left(\frac{eF}{h}\right)^h p^h (1-p)^{F-h}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como $1 - p \leq e^{-p}$

$$E(\bar{I}) \leq \left(\frac{en}{T+1}\right)^{T+1} (h+1) \left(\frac{eFp}{h}\right)^h e^{-p(F-h)} < \left(\frac{en}{T}\right)^{T+1} (h+1) \left(\frac{eFp}{h}\right)^h e^{-pF+e^p h}.$$

Lembrando que $T = \chi^{3g-1}$, $p = 2\chi^{-3g+2}$, $h = (2\chi^2)^{g-1}$ obtemos: $ph = \left(\frac{2}{\chi}\right)^g$ e $pF = n + \chi = \chi^{3g} + \chi$.

Substituindo:

$$E(\bar{I}) < \left(\frac{e\chi^{3g}}{\chi^{3g-1}}\right)^{T+1} \left(\frac{e(\chi^{3g} + \chi)}{2^{g-1}\chi^{2g-2}}\right)^h e^{-n-\chi}(h+1)e^{\left(\frac{2}{\chi}\right)^g} \Rightarrow$$

$$E(\bar{I}) < (e\chi)^{T+1} \left(\frac{e(\chi^{g+2} + \chi^{3-2g})}{2^{g-1}}\right)^h e^{-n-\chi}(h+1)e^{\left(\frac{2}{\chi}\right)^g}. \quad (3.12)$$

Lembrando que $\chi \geq 4$, $g \geq 4$ e $h \geq (2 \cdot 4^2)^3$, que é bem maior que 4.

Atentemos que:

$$\frac{2}{\chi} \leq \frac{2}{4};$$

$$\left(\frac{2}{4}\right)^g \leq \left(\frac{2}{4}\right)^4, \text{ pois, } \frac{2}{4} \in (0, 1);$$

$$(h+1)e^{\left(\frac{2}{\chi}\right)^g} \leq (h+1)e^{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = (h+1)e^{\frac{1}{16}} < (h+1)4^{\frac{1}{16}} < (h+1)2 \leq 2^h. \quad ^6$$

Além disso,

$$\chi^{3-2g} < \chi^{3-2 \cdot 4} = \chi^{-5} < 1 < \frac{\chi^{g+2}}{4}.$$

Voltando a expressão 3.12

$$E(\bar{I}) < (e\chi)^{T+1} \left(\frac{e(\chi^{g+2} + \chi^{3-2g})}{2^{g-1}}\right)^h e^{-n-\chi} \cdot 2^h = (e\chi)^{T+1} \left(\frac{2e(\chi^{g+2} + \chi^{3-2g})}{2^{g-1}}\right)^h e^{-n-\chi}$$

⁶Esta última desigualdade pode ser provada por indução. Note que vale para $h=4$:

$$(4+1)2 = 10 \leq 2^4 = 16;$$

Suponhamos que vale para $h > 4$, ou seja: $(h+1)2 \leq 2^h$ e provaremos que vale para $h+1$.

Ora por hipótese, $2^h \geq (h+1)2$, multiplicando por 2, temos: $2^{h+1} \geq (h+1)2 \cdot 2 = 2(h+1) + 2(h+1) \geq 2(h+1) + 2 = 2(h+2)$. Logo por indução a desigualdade é válida para todo h maior ou igual a 4.

$$\begin{aligned} &< (e\chi)^{T+1} \left(\frac{2e \left(\chi^{g+2} + \frac{\chi^{g+2}}{4} \right)}{2^{g-1}} \right)^h e^{-n-\chi} = (e\chi)^{T+1} \left(\frac{\frac{10}{4}e \left(\chi^{g+2} \right)}{2^{g-1}} \right)^h e^{-n-\chi} \\ &= (e\chi)^{T+1} (\chi^{g+2})^h \left(\frac{10e}{2^{g+1}} \right)^h e^{-n-\chi} = e^{T+1-n-\chi} \chi^{T+1+(g+2)h} \left(\frac{10e}{2^{g+1}} \right)^h. \end{aligned}$$

Note ainda que $\left(\frac{10e}{2^{g+1}}\right) < 1$. Isto posto,

$$\begin{aligned} E(\bar{I}) &< e^{T+1-n-\chi} \chi^{T+1+(g+2)h} \\ &= e^{T+1-n-\chi} e^{\ln \chi^{T+1+(g+2)h}} \\ &= e^{T+1-n-\chi} e^{(T+1+(g+2)h) \ln \chi} \\ &= \exp(T+1-n-\chi + (T+1+(g+2)h) \ln \chi). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Vamos utilizar novamente que $\chi \geq 4 \iff \chi^{\frac{1}{2}} \geq 2$. E que $T = \frac{n}{\chi}$.

Destarte,

$$h = (2\chi^2)^{g-1} \leq \left(\chi^{\frac{1}{2}}\chi^2\right)^{g-1} = \frac{n^{\frac{5}{6}}}{\chi^{\frac{5}{2}}}.^7$$

Além disso, $\ln \chi < \frac{\chi}{2}$.

Ademais para $g \geq 4$, $g+2 \leq 2^g \leq (\chi^{\frac{1}{2}})^g = n^{\frac{1}{6}}$.

Retornando a 3.13

$$\begin{aligned} E(\bar{I}) &< \exp(T+1-n-\chi + (T+1+(g+2)h) \ln \chi) \\ &< \exp\left(\frac{n}{\chi} + 1 - n - \chi + \left(\frac{n}{\chi} + 1 - n^{\frac{1}{6}} \left(\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\chi^{\frac{5}{2}}}\right)\right) \frac{\chi}{2}\right). \end{aligned}$$

Simplificando:

$$E(\bar{I}) < \exp\left(\frac{n}{\chi} + 1 - n - \chi + \frac{n}{2} + \frac{\chi}{2} - \frac{n}{2\chi^{\frac{3}{2}}}\right) \Rightarrow$$

⁷Observe que $\frac{n^{\frac{5}{6}}}{\chi^{\frac{5}{2}}} = \frac{(\chi^{3g})^{\frac{5}{6}}}{\chi^{\frac{5}{2}}} = \frac{\chi^{\frac{5g}{2}}}{\chi^{\frac{5}{2}}} = \chi^{\frac{5g}{2} - \frac{5}{2}} = (\chi^{\frac{5}{2}})^{g-1} = (\chi^{\frac{1}{2}}\chi^2)^{g-1}$.

$$E(\bar{I}) < \exp\left(\frac{n}{\chi} + 1 - \chi - \frac{n}{2} + \frac{\chi}{2} - \frac{n}{2\chi^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Sabemos que $\chi \geq 4$ logo, $n = \chi^{3g} > 4^4 > 16$ Isto posto,

$$E(\bar{I}) < \exp\left(\frac{16}{4} + 1 - 4 - \frac{16}{2} + \frac{4}{2} - \frac{16}{2 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}\right) \Rightarrow$$

$$E(\bar{I}) < e^{-4} < \frac{1}{3}.$$

Temos $E(\bar{I}) < \frac{1}{3}$. Assim, como afirmamos em 3.5, utilizando o lema 9:

$$E(\bar{I}) < \frac{1}{3} \Rightarrow P(I) = P(\bar{I} < \bar{n}) > \frac{2}{3}.$$

E como vimos na equação 3.3

$$P(I) > \frac{2}{3} \Rightarrow P(H \cap I) \geq \frac{1}{3}.$$

Donde concluímos que existe pelo menos um grafo $G \in (H \cap I)$ com no máximo h ciclos "curtos", e seu número cromático que é maior ou igual a χ se mantém mesmo depois de retirarmos h arestas quaisquer, uma de cada ciclo. Assim o fazemos, de cada ciclo de comprimento menor que g , retiremos 1 aresta, fazendo com que esse ciclo deixe de existir. Desta feita, obtemos um grafo G com cintura maior ou igual a g . E para obtermos um grafo com número cromático exatamente χ , escolhemos um subgrafo de G com essa propriedade, para tanto, basta escolhermos um subgrafo contendo χ subconjuntos independentes, o denotemos por L . E para que tenha cintura exatamente igual a g , acrescentamos ao subgrafo L um ciclo de tamanho g , e pintemos suas arestas com 2 ou 3 cores das χ cores utilizadas. E teremos o grafo com cintura g e número cromático χ , que não terá mais que $\chi^{3g} + g$ vértices.

Desta feita, provamos que, para qualquer $\chi \geq 4$ e $g \geq 4$, é possível encontrarmos um grafo com número cromático χ e cintura g . Mesmo sendo contraintuitivo pensarmos que dado uma cintura arbitrariamente grande - de forma que localmente esse grafo parecerá

uma árvore (que tem número cromático 2) podemos ter também um número cromático tão grande quanto queiramos. ■

O método probabilístico aplicado aos grafos torna-se de grande utilidade, demonstrando que é possível existir grafos com determinadas propriedades, uma vez que a probabilidade deles existirem é maior que zero. Então podemos afirmar que existe pelo menos um grafo que corresponde ao desejado. Ao mesmo tempo, pode também ser utilizado para provar que não existe um grafo com certas características, pois a probabilidade de existir é igual a zero.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista o estudo apresentado no corpo desta produção acadêmica, em que efetuamos o compêndio bibliográfico que fundamentou nossa pesquisa, percebemos a enorme relevância da teoria dos grafos aos conceitos matemáticos, além de sua notável contribuição a outros ramos do saber humano. Neste processo, inferimos a significância de todos matemáticos e pesquisadores que, desejando desvendar o desconhecido sobre o tema aqui tratado, produziram conhecimentos fundamentais ao desenvolvimento da ciência matemática e áreas correlatas, mesmo que não tivessem a real dimensão do alcance de suas obras e conjecturas. Ademais, oportunizamos a visualização da utilidade e importância do método probabilístico aos partícipes da educação básica, mas não somente, com o emprego das demonstrações de existência de certos grafos, que contenham propriedades imprescindíveis ao trabalho em curso e que servirão de auxílio na construção de grafos derivados desses.

Para mais, compreendemos que, conquanto ainda seja infimamente difundida nos cursos superiores de matemática, notadamente, a teoria dos grafos e a de Ramsey têm se tornado um campo determinante da combinatória, despertando o interesse de numerosos pesquisadores. E isso, provavelmente, tem ampliado de modo considerável as pesquisas realizadas nos dias atuais. Outrossim, destacamos o efeito motivador às investigações matemáticas dos incontáveis problemas ainda em aberto que permeiam o assunto. Desta feita, mais cientistas têm procurado respostas para essas incógnitas. Nesse

contexto, citamos David Conlon, que em 2010, conseguiu aperfeiçoar o limite superior (demonstrado na seção 2.2) para o número de Ramsey e encontrou resultados para $R_3(s, n)$. Ainda, no corrente ano, fora publicado um artigo pelo mesmo matemático, relacionado aos números de Ramsey, os quais podem ser encontrados no endereço <http://people.maths.ox.ac.uk/conlond/>.

Isto posto, vimos quão imperiosa é a teoria dos grafos aos saberes matemáticos relacionados, em que evidenciamos a pesquisa científica bem delimitada para a consecução destes conhecimentos. Também percebemos que a edificação das noções conceituais, das ideias, do pensamento, não ocorre por mágica, senão pelo empenho em conhecer, desmitificar, solucionar o ignorado. Além do que, os estudos e as descobertas realizadas no momento hodierno podem e devem ter consequências vindouras inimagináveis. Todavia, pesquisar apenas não é suficiente, é essencial promover a divulgação do descoberto, fazendo com que a produção científica seja notória aos interessados. E, nesse sentido, considerando conjuntamente a vastidão e pertinência do tema explorado nesta atividade final de curso às atividades humanas, temos a convicção que muito mais existe a pesquisar e desvendar, a exemplo da percolação, terreno que está intimamente ligado ao conteúdo de grafos e a extração de petróleo e outros fluidos. É nesse viés que, procurando contribuir para o desenvolvimento socioeconômico do mundo em que vivemos, temos de expandir o já sabido sobre a teoria dos grafos.

REFERÊNCIAS

- [1] BENEVIDES, Fabrício S.. *Não existe desordem absoluta: Teoria de Ramsey*. YouTube, 20 de ago de 2013. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=chO-C0g9Xsw>>. Acesso em: 01 fev. 2015.
- [2] BOA VENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. *Grafos:Teoria, modelos, algoritmos*. São Paulo: Edgard BILücher, 1996. 418p.
- [3] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *O princípio das gavetas*. Eureka!, Rio de Janeiro, N°5, p.27-33, 1999. Disponível em: <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/eureka5.pdf>. Acesso em: 06 fev. de 2015.
- [4] FEOFILOFF, Paulo; KOHAYAKAWA, Yoshiharu; WAKABAYASHI, Yoshiko. *Uma introdução sucinta à teoria dos grafos*. 2011. 61p. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/pf/teoriadosgrafos/>>. Acesso em: 13 dez. 2014.
- [5] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. *Círculos matemáticos: a experiência Russa*. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 292 p.
- [6] Frank P. Ramsey. In: Wikipédia. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Frank_P._Ramsey> Acesso em: 01 fev. 2015.

- [7] JURKIEWICZ, Samuel. *Grafos - uma introdução*. OBMEP, 2009. 119p. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/docs/Apostila5-Grafos.pdf>>. Acesso em: 13 nov. 2014.
- [8] Mapa do Brasil para imprimir e colorir. In: Mundinho da criança. Disponível em: <<http://www.mundinhodacrianca.net/2011/10/mapas-do-brasil-para-imprimir-e-colorir.html>>. Acesso em 05 fev. 2015.
- [9] MELO, Gildson Soares de. *Introdução à teoria dos grafos*. 2014. 35f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. Disponível em: <<http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/1553>>. Acesso em 04 jan. 2015.
- [10] MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A. *O Teorema de Ramsey*. Eureka! Rio de Janeiro, N°6, p.23-29, 1999. Disponível em: <http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/eureka6.pdf>. Acesso em: 05 jan. de 2015.
- [11] OLIVEIRA, Anjolina Grisi *Teoria dos grafos: Introdução*. Pernambuco: UFPE, 2012. 19 slides: color Disponível em: <<http://www.cin.ufpe.br/~if670/Grafos1-Introducao.ppt>>. Acesso em: 1 dez. 2014.
- [12] Paul Erdős. In: Wikipédia. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Paul_Erd%C5%91s>. Acesso em: 05 jan. 2015.
- [13] PRESTES, Edson *Teoria dos grafos*. Rio Grande do Sul: UFRGS, 2014. Disponível em: <<http://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/GrafosA5.pdf>>. Acesso em: 15 dez. 2014.
- [14] Princípio da casa dos pombos. In: Wikipédia. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Princ%C3%ADpio_da_casa_dos_pombos> Acesso em 15 fev. 2015.
- [15] RABELO, Ariane S.; MOREIRA, Madona; RANGEL, Socorro. *O número cromático do Brasil*. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA

- APLICADA E COMPUTACIONAL, 33, 2010, Águas de Lindóia. Anais do CNMAC.Águas de Lindóia: SBMAC, 2010. v.3, P. 1081-1082.
- [16] SÁ, Carlos Correia de; ROCHA, Jorge(ed.). *Treze viagens pelo mundo da matemática*. Porto: Universidade do Porto, 2010. 566p.
- [17] SHINE, Carlos Yuzo. *21 aulas de matemática olímpica*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009. 280p.
- [18] Stirling's approximation. In: Wikipédia. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Stirling%27s_approximation> Acesso em 10 fev. 2015.
- [19] Texto_002: Princípio das Casas de Pombos. In: Clubes de matemática da OBMEP. Disponível em:<http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_002-principio-das-casas-dos-pombos/> Acesso em 10 fev. 2015.

APÊNDICE A: O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 16 *Quantas crianças são necessárias em uma sala de aula para garantirmos que pelo menos 2 fazem aniversário no mesmo mês?*

É fácil perceber que 13 crianças são suficientes, pois temos 12 meses.

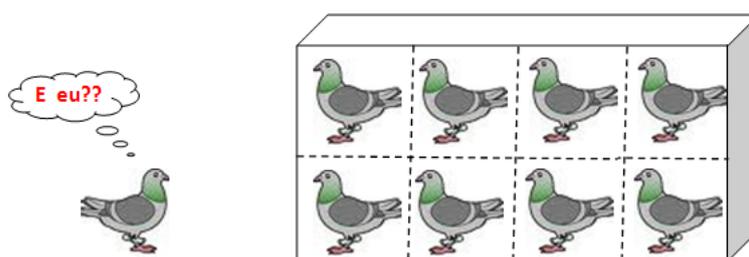
Existe um princípio na matemática muito conhecido e simples de entender e demonstrar, que serve para resoluções de muitos problemas que a princípio parecem complicados, no entanto ao utilizamos essa ferramenta se tornam simples: O princípio da casa dos pombos ou o princípio das gavetas de Dirichlet — que recebe esse nome, porque acredita-se que Dirichlet foi o primeiro a referênciar-lo em 1834, com o nome de "princípio das gavetas" — que pode ser enunciado da seguinte forma:

Se pelo menos $n+1$ objetos (pombos) devem ser organizados em n ou menos gavetas (casas), pelo menos uma gaveta (casa) conterá 2 ou mais objetos (pombos).



Fonte: PRINCÍPIO..., 2015

Demonstração: Numeremos as casas de pombos com os inteiros de 1 a n . E consideremos $n+1$ pombos. Numeremos os pombos com os números inteiros de 1 a $n+1$. Consideremos que o pombo 1 entra em uma das casas, por simplicidade digamos na casa 1; se o pombo 2 entra na mesma casa, resolvido o problema; senão, temos n casas para ele escolher, digamos que escolha a 2. Podemos repetir esse processo até que o pombo n entre na casa n . Ainda teremos o pombo $n+1$ e todas as casas já estarão ocupadas,



Fonte: TEXTO...,—

desta forma, alguma das casas terá pelo menos 2 pombos.

No exemplo 16 as crianças representam os objetos ou os pombos e os meses, as casa dos pombos ou as gavetas. Algo simples e elementar, entretanto, como já dissemos, bastante utilizado na resolução de inúmeros problemas, sejam de combinatória ou outros.

Uma forma mais generalizada de enunciar este princípio:

Se n objetos são colocados em m gavetas e $n > mk$ (onde m , n e k são números naturais) então alguma gaveta conterà pelo menos $k + 1$ objetos.

A demonstração é trivial: Consideremos inicialmente os mk elementos, se colocássemos mais de k objetos em alguma gaveta, o princípio já estaria atendido, caso contrario teremos k objetos em cada uma das m gavetas, faltando ainda $n - mk$ objetos, que é maior ou igual a 1, em qualquer uma das gavetas que sejam colocados, teremos pelo menos 1 gaveta com no mínimo $k+1$ objetos.

Exemplo 17 *Em um grupo de 39 pessoas, existem sempre 4 que fazem aniversário no mesmo mês.*

Os meses serão as gavetas, e as pessoas os objetos. Assim temos 12 gavetas e 39 objetos para fazerem aniversários nesses meses. $39 > 12 \cdot 3 = 36$. Daí teremos pelo menos $4=3+1$ objetos em alguma gaveta. Ou de outra forma: $\frac{39}{12} = 3,25$. O menor número inteiro maior ou igual a $3,25$ é 4 . (Podemos representar $\lceil 3,25 \rceil = 4$)¹. Logo um dos meses terá pelo menos 4 aniversariantes.

¹Função Teto: Dado um número real x , define-se como Função Teto de x , o menor inteiro maior do que x . Notação $\lceil x \rceil = \min\{c \in \mathbb{Z}; c \geq x\}$

APÊNDICE B: GRÁFICO DAS FUNÇÕES

