



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações

por

Maria do Bom Conselho da Silva Beserra Freitas

2015



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações

†

por

Maria do Bom Conselho da Silva Beserra Freitas

sob orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Abril/2015

João Pessoa - PB

† Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

F866f Freitas, Maria do Bom Conselho da Silva Beserra.
As funções hiperbólicas e suas aplicações / Maria do Bom
Conselho da Silva Beserra Freitas.-- João Pessoa, 2015.
60f. : il.
Orientador: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Funções hiperbólicas. 3. Ângulos
hiperbólicos. 4. Catenária.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações

por

Maria do Bom Conselho da Silva Beserra Freitas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:



Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro-UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva - UFG



Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB

abril/2015

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família, por sua capacidade de acreditar em mim. Em especial meu esposo Robério, seu carinho, apoio e dedicação foi quem deu, em alguns momentos, força para continuar; sua presença e seu amor constante permitiram que nossas filhas não sentissem tanto minha ausência. Essa vitória não é minha, é nossa!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por todas as vitórias concedidas em minha vida e pela força que me deu para vencer todos os desafios nesses dois anos de curso.

Ao meu esposo Robério, por toda compreensão, dedicação e incentivo.

A minha mãe Irenice, por toda oração, sempre pedindo pelo meu sucesso.

As minhas filhas Riane, Renale e Rafaela, que apesar da pouca idade me apoiaram e compreenderam minha ausência, em muitos momentos importantes de suas vidas, nesses dois anos.

Ao meu professor orientador Dr. Bruno Ribeiro, pelo suporte que me deu no desenvolvimento desse trabalho.

As minhas amigas Gizele Martins, que além de me acolher em sua casa, ajudou muito nas longas madrugadas que estudamos juntas, Socorro Sousa, Antônia e Socorro Santos, pelo incentivo, apoio e ajuda sempre que precisei.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram o desenvolvimento desse curso.

A todos os professores que fizeram parte desse curso, por me proporcionar o conhecimento.

A Capes, pelo apoio financeiro, sem o qual não teria condições de realizar o PROFMAT.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.

(Marthin Luther King).

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos um estudo das Funções Hiperbólicas e suas aplicações. Iniciamos com uma análise de como essas funções são abordadas em alguns livros de cálculo diferencial comumente usados nos cursos de graduação na área de exatas, constatando que são feitas através de sua definição exponencial. Em seguida expusemos uma abordagem utilizando-se da hipérbole como curva geratriz a partir do estudo de ângulos hiperbólicos. As definições se deram paralelamente à construção das funções trigonométricas circulares, analisando suas semelhanças e diferenças. Por fim apresentamos algumas de suas aplicações, em especial e de forma mais detalhada a catenária.

Palavras-chave: Funções hiperbólicas, Ângulos hiperbólicos, Catenária.

Abstract

In this work we present a study about the Hyperbolic functions and their applications. We start with analysis of how these functions are approached in some differential calculus books commonly used in graduate courses in exact sciences, noting that are made through its exponential setting. Then we exposed an approach using hyperbole as generating curve from the study of hyperbolic angles. The definitions given it in parallel with the construction of the circular trigonometric functions, analyzing their similarities and differences. Finally we present some of its applications, in particular and in more detail the catenary shape.

Keywords: Hyperbolic functions, Hyperbolic angles, catenary.

Sumário

Introdução	1
1 Abordagem das Funções Hiperbólicas	3
1.1 Resumo do conteúdo	4
1.1.1 Livro A	4
1.1.2 Livro B	4
1.1.3 Livro C	5
1.1.4 Livro D	7
1.1.5 Livro E	7
1.2 Análise qualitativa	8
2 Estudo das Funções Hiperbólicas	11
2.1 A hipérbole	11
2.1.1 A equação canônica da hipérbole	13
2.1.2 Assíntotas da hipérbole	15
2.2 Ângulo sobre a hipérbole	16
2.3 Funções Hiperbólicas	22
2.3.1 Gráficos do cosseno hiperbólico e seno hiperbólico	30
3 Aplicações das Funções Hiperbólicas	33
3.1 A Catenária	35

3.1.1	O St. Louis Gateway Arch	43
3.1.2	Linhas de Transmissão	45
	Referências Bibliográficas	48

Introdução

A abordagem de um conteúdo matemático deve apoiar-se na conceituação, manipulações e aplicações, ou seja, definir o objeto matemático em estudo, exercitar o que foi definido e principalmente encontrar aplicações reais que estimulem e justifiquem o porquê de se estudar tal conteúdo.

Ao lermos o texto As Funções Hiperbólicas (referência[5]) nos deparamos com a frase "achei muito engraçado pensar-se em juntar duas palavras como seno e hipérbole para nomear um

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

(Sônia, 1988).

Percebemos que não se trata de um sentimento isolado e que apesar de tanto tempo a abordagem das Funções Hiperbólicas acontece da mesma maneira nos cursos de Matemática nas Universidades. E, o desejo de aprofundar o conhecimento desse conteúdo, tornando-o mais significativo foi o motivo da realização desse trabalho.

Primeiramente, mostramos que as Funções Hiperbólicas são abordadas nos livros de Cálculo I de forma igualitária a partir das exponenciais e^x e e^{-x} , essa abordagem não proporciona uma compreensão clara da relação existente entre as definições das funções com a hipérbole.

As Funções Hiperbólicas surgiram da comparação da área de uma região limitada por uma hipérbole, dando origem as definições e identidades. O matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) foi a primeira pessoa a estudar essas funções.

Visando ampliar o entendimento da conceituação dessas funções, vamos fazer uma abordagem a partir da hipérbole como curva geratriz, definindo ângulo hiperbólico e fazendo um paralelo com as definições das funções trigonométricas circulares para definir as Funções Hiperbólicas.

Por fim, desejamos instigar o estudo das Funções Hiperbólicas, mostrando algumas de suas aplicações. Como essas funções surgem fortemente nas áreas de engenharia e arquitetura, pois, trazem consigo o estudo da catenária, que descreve uma família de curvas planas semelhantes às que seriam geradas por uma corda suspensa pelas suas extremidades e sujeitas a ação da gravidade, a tensão interna formada entre os dois pontos extremos dá condições para a construção de várias obras importantes, como por exemplo, a ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília, no Brasil e o Gateway Arch, em St. Louis.

Com isso queremos contribuir para que professores e alunos possam compreender, efetuar e controlar os processos matemáticos envolvidos na conceituação, manipulações e aplicações das Funções Hiperbólicas.

Capítulo 1

Abordagem das Funções

Hiperbólicas nos livros de Cálculo

A abordagem de um determinado conteúdo matemático deve fundamentar-se em três etapas: conceituação, manipulações e aplicações.

Neste Capítulo faremos uma análise crítica de como o conteúdo Funções Hiperbólicas é abordado em livros de Cálculo .

Tendo em vista a necessidade de uma melhor compreensão dos resultados das Funções Hiperbólicas, em especial o seno hiperbólico

$$\operatorname{senh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e cosseno hiperbólico

$$\operatorname{cosh}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

voltamos a nossa atenção para os livros de Cálculo , tendo como foco a abordagem desse conteúdo nos exemplares. Foram analisadas seis obras denominadas A, B, C, D, E e F tabela 1.1, que são utilizadas direta ou indiretamente pelas Universidades nos cursos de Matemática.

Tabela 1.1: Livros analisados

LIVRO	OBRA	EDITORA	AUTORES
A	Cálculos das Funções de uma Variável	LTC	Geraldo Ávila
B	Cálculo	LTC	Mustafa A. Munem e David J. Foulis
C	Cálculo	ABDR	George B. Thomas
D	Cálculo	CENGAGE	James Stewart
E	Cálculo A	PEARSON	Diva M. Flamming e Mirian Buss Gonçalves
F	Um Curso de Cálculo	LTC	Hamilton L. Guidorizzi

1.1 Resumo do conteúdo nas obras

1.1.1 Livro A

As Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas: seno hiperbólico, co-seno hiperbólico, tangente hiperbólica e co-tangente hiperbólica, designadas pelos símbolos \sinh , \cosh , \tanh e \coth , respectivamente, são assim definidas:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

1.1.2 Livro B

As Funções Hiperbólicas

Certas combinações de funções exponenciais, que estão relacionadas com uma hipérbole aproximadamente da mesma maneira com que as funções trigonométricas estão relacionadas com o círculo, provaram ser importantes em matemática aplicada. Essas funções são chamadas funções hiperbólicas e suas semelhanças com as funções

trigonométricas são enfatizadas chamando-as de seno hiperbólico, co-seno hiperbólico, tangente hiperbólica, e assim por diante. Elas são definidas da seguinte maneira:

Definição 1: As funções hiperbólicas

$$(i) \operatorname{senhx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (ii) \operatorname{cosh} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(iii) \operatorname{tanhx} = \frac{\operatorname{senhx}}{\operatorname{coshx}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (iv) \operatorname{cothx} = \frac{\operatorname{coshx}}{\operatorname{senhx}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$(v) \operatorname{sechx} = \frac{1}{\operatorname{coshx}} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (vi) \operatorname{cschx} = \frac{1}{\operatorname{senhx}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

1.1.3 Livro C

Funções hiperbólicas

As funções hiperbólicas são formadas a partir de combinações de duas funções exponenciais e^x e e^{-x} . As funções hiperbólicas simplificam muitas expressões matemáticas e são importantes em aplicações práticas. São usadas, por exemplo, em problemas tais como calcular a tensão em um cabo suspenso pelas extremidades, no caso de uma linha de transmissão elétrica, por exemplo. Também têm papel importante na determinação de soluções para equações diferenciais. Nesta seção, faremos uma breve apresentação das funções hiperbólicas, seus gráficos, como suas derivadas são calculadas e por que elas são consideradas primitivas importantes.

As partes par e ímpar da função exponencial

Recorde as definições pares e ímpares vistas na Seção 1.2 e a simetria de seus gráficos. Uma função par f satisfaz a condição $f(-x) = f(x)$, enquanto uma função ímpar satisfaz $f(-x) = -f(x)$. Toda função f que seja definida em um intervalo centrado na origem pode ser escrita de uma maneira única como a soma de uma função par e de uma função ímpar. A decomposição é

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Se escrevermos e^x dessa maneira, teremos

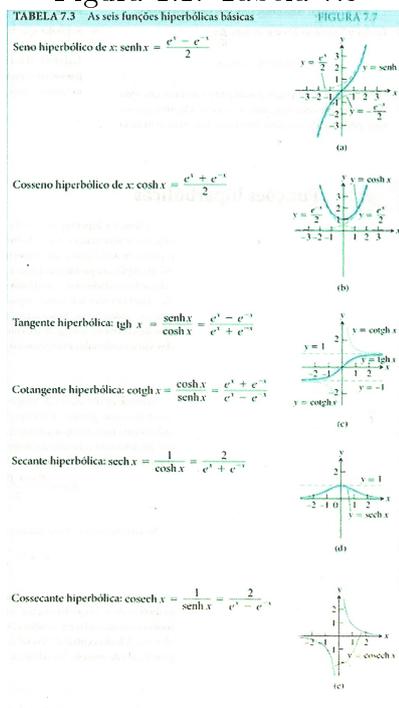
$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

As partes par e ímpar de e^x , denominada cosseno hiperbólico e seno hiperbólico de x , respectivamente, são úteis à sua maneira. Elas descrevem o movimento de ondas em sólidos elásticos e a forma dos fios suspensos da rede elétrica. A linha central do Portal do Arco do Oeste em St. Louis é uma curva ponderada de cosseno hiperbólico.

Definição e identidades

As funções de cosseno hiperbólico e seno hiperbólico são definidas pelas duas primeiras equações da Tabela 7.3. Essa tabela também apresenta as definições de tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicos. Como veremos, as funções hiperbólicas possuem uma série de similaridades com as funções trigonométricas das quais seus nomes derivam.

Figura 1.1: Tabela 7.3



1.1.4 Livro D

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Certas combinações das funções hiperbólicas e^x e e^{-x} surgem frequentemente em matemática e suas aplicações e, por isso, merecem nomes especiais. Elas são análogas, de muitas maneiras, às funções trigonométricas e possuem a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo. Por essa razão são chamadas coletivamente de **funções hiperbólicas**, e, individualmente, de **seno hiperbólico**, **cosseno hiperbólico** e assim por diante.

DEFINIÇÕES DAS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senhx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{coshx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tghx} = \frac{\operatorname{senhx}}{\operatorname{coshx}}$$

$$\operatorname{cossechx} = \frac{1}{\operatorname{senhx}}$$

$$\operatorname{sechx} = \frac{1}{\operatorname{coshx}}$$

$$\operatorname{cotghx} = \frac{\operatorname{coshx}}{\operatorname{senhx}}$$

Os gráficos do seno e cosseno hiperbólico podem ser esboçados usando uma ferramenta gráfica.

1.1.5 Livro E

Funções Hiperbólicas

As expressões exponenciais

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ e } \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ocorrem frequentemente na Matemática Aplicada.

Estas expressões definem, respectivamente, as funções seno hiperbólico de x e cosseno hiperbólico de x .

O comportamento dessas funções nos leva a fazer uma analogia com as funções trigonométricas.

SENO HIPERBÓLICO E COSSENO HIPERBÓLICO

A função seno hiperbólico, denotada por \sinh , e a função cosseno hiperbólico, denotada por \cosh , são definidas, respectivamente, por:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

e

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

O domínio e a imagem das funções \sinh e \cosh são:

$$D(\sinh) = (-\infty, +\infty),$$

$$D(\cosh) = (-\infty, +\infty),$$

$$Im(\sinh) = (-\infty, +\infty) \text{ e}$$

$$Im(\cosh) = (1, +\infty).$$

1.2 Análise qualitativa dos seis exemplares

Os livros A, B, C, D e E tratam das Funções Hiperbólicas, principalmente o seno e cosseno hiperbólicos de forma igualitária. Todos usam as funções exponenciais para defini-las, a partir dos resultados da soma e subtração de uma exponencial crescente e^x e uma exponencial decrescente e^{-x} , de forma direta, sem demonstrações, como visto nos resumos. Deixando algumas interrogações e até indagações "achei muito engraçado pensar-se em juntar duas palavras como seno e cosseno hiperbólicos para nomear um

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

(Sônia Pinto de Carvalho)[1].

Quando estudamos Funções Hiperbólicas por um desses exemplares não fica clara a associação dessas funções com a hipérbole e por isso achamos estranho e até sem

sentido o nome hiperbólico. Todos relatam a semelhança que existe entre as funções trigonométricas e as funções hiperbólicas e que a mesma relação que as funções trigonométricas tem com o círculo a hiperbólica tem com a hipérbole, no entanto, não encontramos essas semelhanças, ou seja, a única semelhança são os nomes dados acrescentados de hiperbólico.

Os livros A, D e E trazem a justificativa da nomenclatura hiperbólica a partir da identidade $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. "A identidade demonstrada no Exemplo 1(a) fornece um indício para a razão do nome função hiperbólica" (Cálculo I - James Stewart. p.238), cuja demonstração se faz a partir da substituição dos valores dados a $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

■

A partir dessa identidade os livros fazem uma comparação entre o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$ e a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$, justificando o nome hiperbólica.

Na sequência, foram analisadas as aplicações dessas funções na natureza.

Os livros A e B não mencionam nenhuma aplicação dessas funções, ou seja, por que e para que estudá-las?

C e E trazem de forma bastante resumida algumas das aplicações das Funções Hiperbólicas, como a catenária e sua importância na solução de equações diferenciais.

D tem a preocupação de mostrar que alguns fenômenos, como na ciência e na engenharia, que o decaimento de uma entidade como a luz, a velocidade, a eletricidade ou a radioatividade pode ser representado por Funções Hiperbólicas.

O livro F, não mencionado até aqui, não traz esse conteúdo. O que consideramos

uma falha, pois, como veremos no capítulo 3 desse trabalho, as Funções Hiperbólicas têm muitas aplicações, o que torna seu estudo importante.

"As funções hiperbólicas são análogas, de muitas maneiras, às funções trigonométricas e possuem a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo"(Cálculo - James Stewart. p.236).

Então por que não obtê-las utilizando-se da hipérbole como curva geratriz e fazer a análise como é feita com o círculo nas funções trigonométricas, proporcionando aos estudantes ideias e métodos que lhe permitam apreciar o valor das Funções Hiperbólicas e a sua natureza?

Capítulo 2

Estudo das Funções Hiperbólicas

2.1 A hipérbole

Definição 1 *Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano, $c = \frac{1}{2}d(F_1, F_2)$ e o número a tal que $0 < a < c$. Chama-se hipérbole a curva do plano formada pelos pontos P do plano que satisfazem a relação*

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a. \quad (2.1)$$

F_1 e F_2 são pontos da hipérbole denominados focos e as distâncias $d_1 = d(P, F_1)$ e $d_2 = d(P, F_2)$ são raios focais de ponto P . A reta que contém os focos chama-se **eixo focal**. O centro da hipérbole é o ponto médio entre F_1 e F_2 . A medida c é a **distância focal** da hipérbole, ou seja, a distância de cada foco ao centro. A reta perpendicular ao eixo focal que intersecta o centro da hipérbole é denominada **eixo normal**. Os pontos que intersectam o eixo focal são os **vértices** V_1 e V_2 .

Veja que a Equação (2.1) equivale a

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a,$$

logo, consideremos primeiramente

$$d(P, F_1) = d(P, F_2) + 2a. \quad (2.2)$$

Neste caso a distância de P ao foco F_1 é maior que a distância de P ao foco F_2 ,

$$d(P, F_1) > d(P, F_2),$$

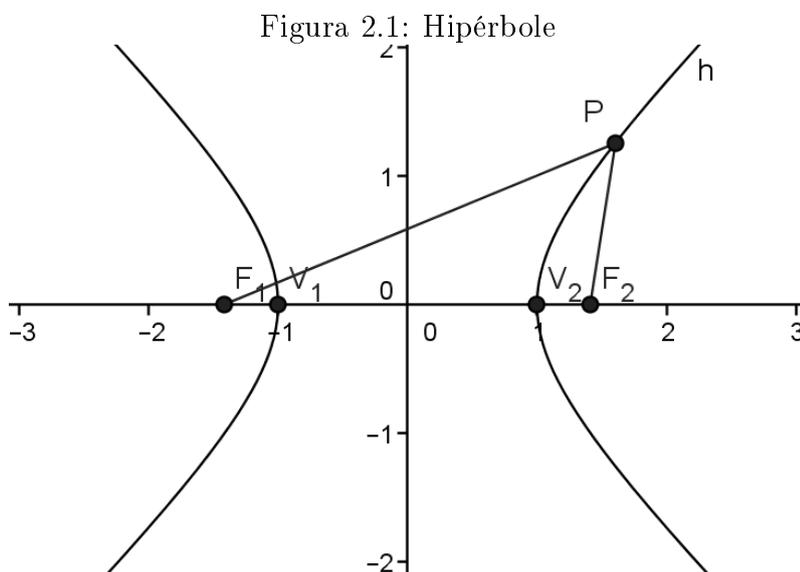
ou então podemos ter

$$d(P, F_2) = d(P, F_1) + 2a. \quad (2.3)$$

Agora, tem-se o contrário, a distância de P ao foco F_1 é menor que a distância de P ao foco F_2 ,

$$d(P, F_1) < d(P, F_2).$$

Um ponto P , não pode satisfazer simultaneamente as Equações (2.2) e (2.3). Isto é, a hipérbole é formada por dois conjuntos disjuntos de pontos como mostra a figura 2.1.



Esses conjuntos de pontos são os ramos da hipérbole. Os pontos sobre o ramo da direita satisfazem a Equação (2.2) enquanto, os pontos sobre o ramo da esquerda satisfazem a Equação (2.3).

Veja que a figura (2.1) mostra um caso especial da hipérbole, cujos eixos focal e normal coincidem com os eixos cartesianos Ox e Oy , respectivamente, logo o centro da hipérbole é a origem O dos eixos.

2.1.1 A equação canônica da hipérbole

Vamos determinar a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos OXY

Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Considerando a hipérbole da figura 2.1 cujo eixo focal e normal coincidem com os eixos cartesianos Ox e Oy respectivamente, o centro coincide com a origem $O = (0, 0)$ dos eixos coordenados, os focos terão coordenadas $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, $c > 0$. Sendo o ponto $P = (x, y)$ ponto qualquer da hipérbole, desenvolvendo a equação (2.1) temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Depois de eliminarmos os radicais, elevando ao quadrado, obtemos:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ou seja,

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

consequentemente

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando os membros dessa última igualdade ao quadrado vem,

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

portanto

$$c^2x^2 + a^4 = a^2(x^2 + c^2 + y^2),$$

então:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

como $c > a$, defina $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, logo,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2$$

dividindo ambos os membros por b^2a^2 , temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.4)$$

A Equação (2.4) é denominada **equação canônica** da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX .

Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Onde $2b$ é a distância entre os vértices e a é tal que $c^2 - b^2 = a^2$.

Neste caso, o eixo focal e normal coincidem com os eixos OY e OX respectivamente. Temos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

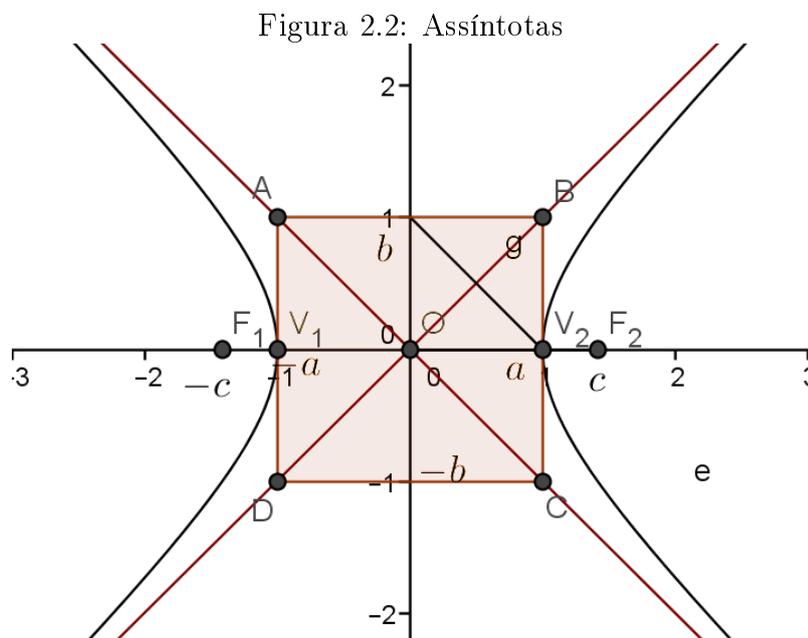
Fazendo como no caso anterior, encontramos a equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \quad (2.5)$$

A Equação (2.5) é denominada **equação canônica** da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY .

2.1.2 Assíntotas da hipérbole

O retângulo $ABCD$ abaixo de lados $2a$ e $2b$ mostrado na figura 2.2 e tangente à hipérbole nos vértices V_1 e V_2 é denominado **retângulo de base** da hipérbole.



As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as **assíntotas** da hipérbole, e têm inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação a reta focal. Em especial, quando $a = b$, as assíntotas são perpendiculares entre si. Nesse caso, a hipérbole recebe o nome de **equilátera**.

Logo, as assíntotas da hipérbole são as retas $r_1 : y = \frac{b}{a}x$ e $r_2 : y = -\frac{b}{a}x$.

Teorema 1 *As assíntotas não interceptam a hipérbole.*

Demonstração: Consideramos a assíntota $r_1 : y = \frac{b}{a}x$ da hipérbole H . Suponha que exista um ponto $Q = (x_0, y_0)$ tal que $r_1 \cap H = Q$.

Então as coordenadas de Q deve satisfazer a equação da reta r_1 , isto é,

$$y_0 = \frac{b}{a}x_0$$

e, também a equação da hipérbole

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Substituindo $y_0 = \frac{b}{a}x_0$ na equação da hipérbole, temos,

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{(\frac{b}{a}x_0)^2}{b^2} = 1,$$

o que resultará

$$1 = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} = 0$$

que é um absurdo. ■

Ou seja, não pode existir um ponto comum à assíntota e à hipérbole. O mesmo vale para r_2 .

Existem pontos da hipérbole tão próximos das assíntotas quanto queiramos, mas, jamais as assíntotas interceptarão a hipérbole.

2.2 Ângulo sobre a hipérbole

Consideremos o plano cartesiano com os eixos x e y e a partir de uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ dos eixos coordenados, obtemos mais dois eixos X e Y .

Seja M um ponto que está sobre o gráfico $xy = \frac{1}{2}$, tal que suas coordenadas são:

$$x = OP, y = OQ, X = OD \text{ e } Y = DM.$$

Assim,

$$\begin{aligned} x = OP &= OE - PE = OD \cos \frac{\pi}{4} - DM \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \end{aligned}$$

e,

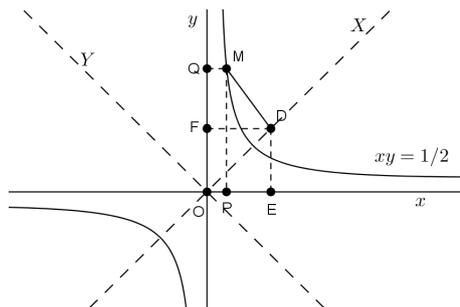
$$\begin{aligned} y = OF + FQ &= OD \cos \frac{\pi}{4} + MD \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} xy &= \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)(X + Y) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{4}(X^2 - Y^2) &= \frac{1}{2} \\ X^2 - Y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Como mostra a figura 2.3.

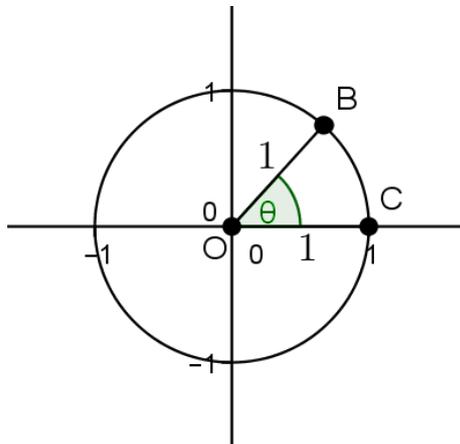
Figura 2.3: Representação gráfica da equação $xy = \frac{1}{2}$



Ou seja, o gráfico da equação $xy = \frac{1}{2}$ é uma hipérbole equilátera com $a = b = 1$.

O ângulo hiperbólico é uma figura geométrica que divide a hipérbole, tendo uma relação comum com o ângulo no círculo.

Por isso para definirmos o ângulo sobre a hipérbole vamos fazê-lo paralelo ao ângulo definido no círculo de raio 1.



A medida de um ângulo num círculo de raio 1, em radianos, mede θ radianos se o arco circular subtendido entre ele mede θ unidades de comprimento.

Sabemos também que um ângulo θ radianos pressupõe um setor circular de área $\frac{\theta}{2}$, no círculo de raio 1. Assim podemos dizer que um ângulo mede θ radianos se o setor subtendido entre ele mede $\frac{\theta}{2}$ unidades de área.

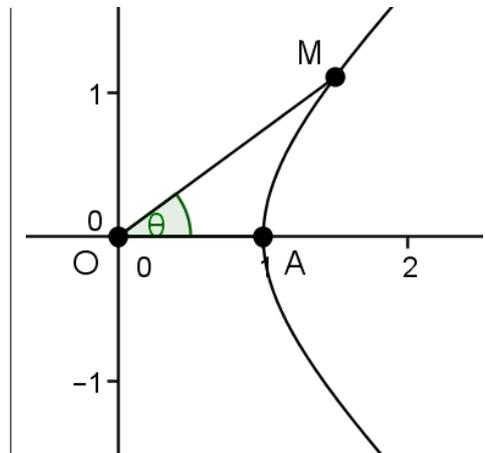
Vamos ver de forma detalhada.

Retornando aos eixos x e y , com a hipérbole $xy = \frac{1}{2}$, figura 2.4, tome M e N dois pontos quaisquer no mesmo ramo da hipérbole.

O ponto M tem coordenadas $x = OP$ e $y = OQ$.

O ponto N tem coordenadas $x = OR$ e $y = OS$.

A área dos retângulos $OPMQ$ e $ORNS$ denotaremos por:



M um ponto sobre a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$ que define um setor hiperbólico AOM e um ângulo $A\hat{O}M$ como mostra a figura.

Então o ângulo $A\hat{O}M$ mede θ quando a área de setor AOM vale $\frac{\theta}{2}$ unidades de área.

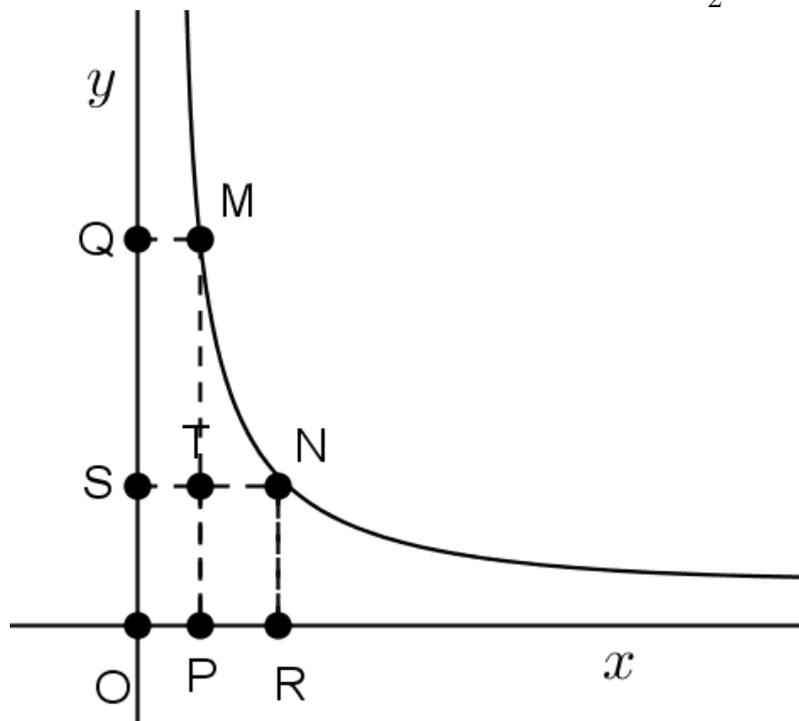
$$A_{OPMQ} = OP \times OQ = xy = \frac{1}{2},$$

e

$$A_{ORNS} = OR \times OS = xy = \frac{1}{2}$$

respectivamente.

Figura 2.4: Ramo direito da hipérbole $xy = \frac{1}{2}$



Logo, $A_{OPMQ} = A_{ORNS}$, o que implica $A_{STMQ} = A_{PRNT}$.

Para calcular a área do setor OMN , vamos girar a figura (2.4) de $\frac{\pi}{4}$ e retornar a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, figura 2.5.

Veja que

$$A_{OPM} = \frac{1}{2}A_{OPMQ} = \frac{1}{2}A_{ORNS}$$

e

$$A_{ORNM} = A_{OPM} + A_{PRNM} = A_{ORN} + A_{PRNM}.$$

Por outro lado

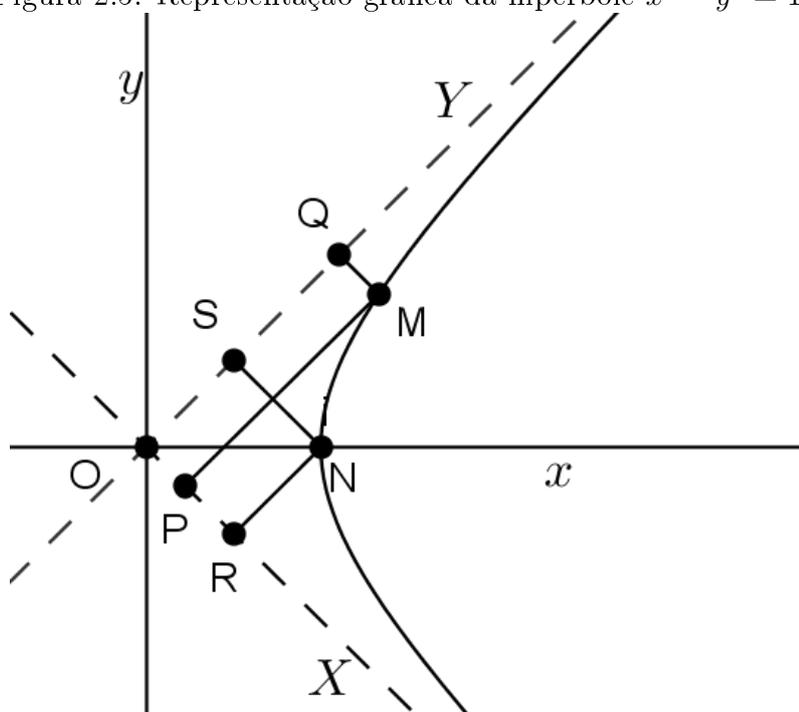
$$A_{ORNM} = A_{ORN} + A_{ONM}.$$

Logo,

$$A_{ONM} = A_{PRNM}.$$

Em um raciocínio análogo vemos que a $A_{ONM} = A_{QSNM} = A_{PRNM}$.

Figura 2.5: Representação gráfica da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.



Portanto o que precisamos definir é a área $PRNM$ que é bem mais prático na hipérbole $xy = \frac{1}{2}$ nos eixos x e y figura (2.4). A área $PRNM$ é a área sobre o gráfico de $y = \frac{1}{2x}$, compreendida entre $x = OP$ e $x = OR$.

Logo:

$$\begin{aligned}
A_{PRNM} &= \left| \int_{OP}^{OR} \frac{1}{2x} dx \right| = \frac{1}{2} |\ln OR - \ln OP| \\
&= \frac{1}{2} \left| \ln \frac{OR}{OP} \right|.
\end{aligned}$$

Se M está a esquerda de N então

$$A_{PRNM} = \frac{1}{2} \ln \frac{OR}{OP}.$$

E se M está a direita de N , então

$$A_{PRNM} = \frac{1}{2} \ln \frac{OP}{OR}.$$

De forma análoga, podemos calcular A_{SNMQ} integrando a função $x = \frac{1}{2y}$, obtendo

$$A_{SNMQ} = \frac{1}{2} \ln \frac{OS}{OQ}.$$

Observe que se $M = N$ então $A_{PRNM} = 0$ e se $M \neq N$ então $A_{PRNM} > 0$.

Quando M se afasta de N pela direita, o seguimento OP cresce indefinidamente. Assim, como o tamanho OR está fixo, $A_{PRNM} = \frac{1}{2}(\ln OP - \ln OR)$ cresce indefinidamente.

Quando M se afasta de N pela esquerda, o seguimento OP tende a zero e $\ln OP$ decresce indefinidamente. Então, $A_{PRNM} = \frac{1}{2}(\ln OR - \ln OP)$ cresce indefinidamente.

Logo, $A_{ONM} = A_{PRNM}$ varia de 0 a $+\infty$.

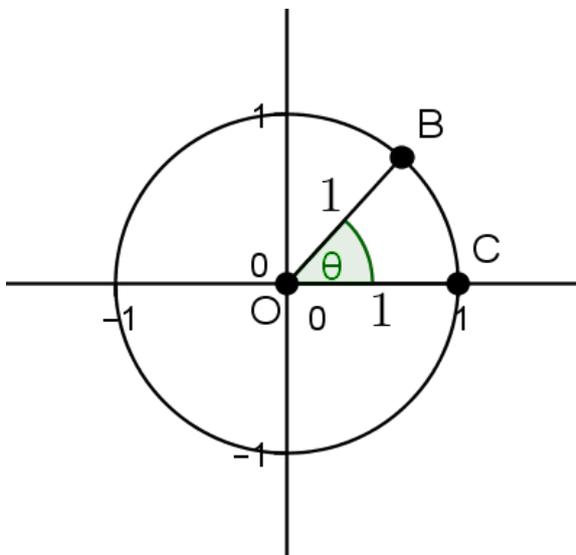
Convencionando, temos:

- Se o ponto M está acima do eixo dos X' s, o ângulo que ele define tem medida positiva.
- Se o ponto M está abaixo do eixo dos X' s, o ângulo que ele define tem medida negativa.

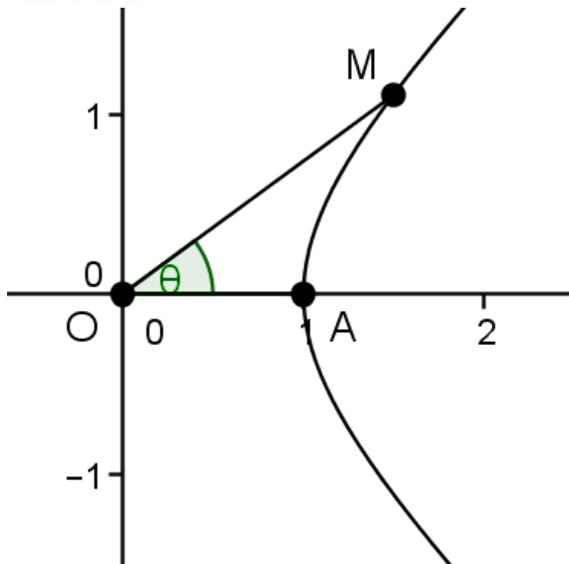
Portanto, um ângulo hiperbólico, assumirá valores entre $-\infty$ e $+\infty$.

Lembremos que isso não ocorre no círculo, esses ângulos medidos no círculo, seus valores estariam entre $-\frac{\pi}{4}$ e $+\frac{\pi}{4}$.

Apesar de várias semelhanças, existem algumas diferenças interessantes do ângulo sobre a hipérbole e o ângulo sobre a circunferência.



Na circunferência o ângulo é periódico, de período 2π radianos, pois, a circunferência tem curvatura contante. logo o ângulo é limitado.



Na hipérbole o ângulo não é periódico, uma vez que a curvatura não é constante, a área cresce indefinidamente, logo o ângulo hiperbólico é ilimitado.

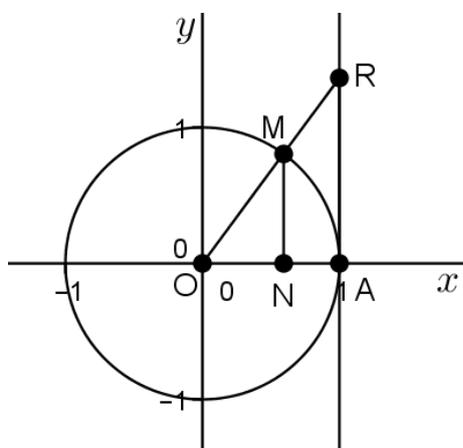
2.3 Funções Hiperbólicas

As Funções Hiperbólicas são definidas da mesma maneira que as funções trigonométricas, logo vamos fazer um estudo das Funções Hiperbólicas usando a hipérbole equilátera como curva geratriz, da mesma maneira que as trigonométricas com o círculo, ou seja, daremos as Funções Hiperbólicas o mesmo tratamento que as funções trigonométricas e desenvolveremos algumas relações.

Para ficar mais clara essa semelhança, vamos fazer o estudo de forma paralela.

Colocando os resultados sobre o círculo unitário $X^2 + Y^2 = 1$ à esquerda e os resultados sobre a hipérbole equilátera $X^2 - Y^2 = 1$ na coluna da direita.

$$X^2 + Y^2 = 1$$



Seja M um ponto sobre a circunferência de raio 1 e centro na origem dos eixos cartesianos de modo que o setor AOM tenha área $\frac{\theta}{2}$. Então o ângulo tem medida θ radianos, pois

$$A_{OAM} = \frac{\widehat{AOM}}{2} \times r^2 = \frac{\theta}{2}$$

Seja AR a reta tangente à curva em A .

Assim,

$$ON = \cos\theta, \quad NM = \sin\theta \quad \text{e} \quad AR = \operatorname{tg}\theta.$$

Portanto,

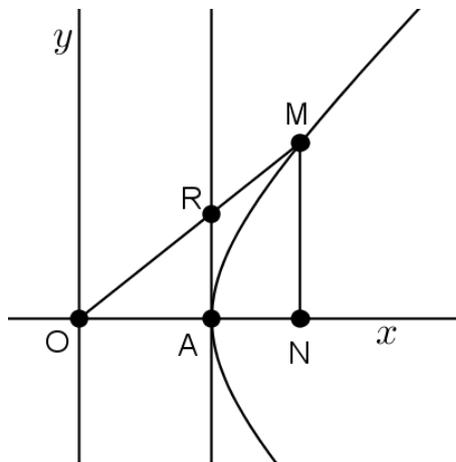
$$\operatorname{cot}\theta = \frac{1}{AR} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$\operatorname{sec}\theta = \frac{1}{ON} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\text{e } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{NM} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Temos para o ponto M , as relações.

$$X^2 - Y^2 = 1$$



Seja M um ponto sobre a curva de modo que o setor OAM tenha área $\frac{\theta}{2}$. Então o ângulo \widehat{AOM} tem medida θ .

Seja AR a reta tangente a hipérbole em A .

Assim de forma análoga definimos as funções hiperbólicas como:

$$\operatorname{cosh}\theta = ON, \quad \operatorname{senh}\theta = NM \quad \text{e} \quad \operatorname{tgh}\theta = AR$$

As demais funções hiperbólicas são:

$$\operatorname{coth}\theta = \frac{1}{AR} = \frac{1}{\operatorname{tgh}\theta} = \frac{\operatorname{cosh}\theta}{\operatorname{senh}\theta}.$$

$$\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{ON} = \frac{1}{\operatorname{cosh}\theta}$$

$$\text{e } \operatorname{cosech}\theta = \frac{1}{NM} = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}.$$

Vamos deduzir algumas relações entre estas funções.

Temos para o ponto M , pelo teorema de Pitágoras

$$X^2 + Y^2 = (ON)^2 + (NM)^2 = 1$$

e logo,

$$\cos^2\theta + \sen^2\theta = 1.$$

Sendo o triângulo ONM semelhante ao triângulo OAR , então

$$\frac{AR}{1} = \frac{NM}{ON}$$

tem-se,

$$tg\theta = \frac{\sen\theta}{\cos\theta}$$

Como,

$$\cos^2\theta + \sen^2\theta = 1$$

dividindo ambos os membros por $\cos^2\theta$

$$1 + \frac{\sen^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta},$$

ou seja,

$$1 + tg^2\theta = \sec^2\theta.$$

E se dividirmos por $\sen^2\theta$, então:

$$\frac{\cos^2\theta}{\sen^2\theta} + 1 = \frac{1}{\sen^2\theta}$$

logo,

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta.$$

Para o ponto M de coordenadas $X = ON$
 $Y = NM$, assim

$$X^2 - Y^2 = (ON)^2 - (NM)^2 = 1$$

e logo,

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1.$$

Sendo o triângulo ONM semelhante ao triângulo OAR , então,

$$\frac{AR}{1} = \frac{NM}{ON}$$

tem-se,

$$tgh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}.$$

Como,

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

dividindo ambos os membros por $\cosh^2\theta$

$$1 - \frac{\sinh^2\theta}{\cosh^2\theta} = \frac{1}{\cosh^2\theta},$$

ou seja,

$$1 - tgh^2\theta = \operatorname{sech}^2\theta.$$

E se dividirmos por $\sinh^2\theta$, então:

$$\frac{\cosh^2\theta}{\sinh^2\theta} - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta}$$

logo,

$$\coth^2\theta - 1 = \operatorname{cosech}^2\theta.$$

Apesar das funções trigonométricas e as funções hiperbólicas serem semelhantes, possuem algumas diferenças.

Vejamos algumas:

Trigonométricas

a) O $\sen\theta$ e $\cos\theta$ são periódicos, com período 2π .

Hiperbólicas

a) O \sinh e o \cosh não possuem período.

b) A função $\operatorname{sen}\theta$ é limitada, com $-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1$ e o $\operatorname{cos}\theta$ também varia entre -1 e $+1$. c) A $\operatorname{tg}\theta$ pode assumir qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$.	b) A função $\operatorname{senh}\theta$ é ilimitada, variando de $-\infty$ até $+\infty$ e o $\operatorname{cosh}\theta$ varia de $+1$ a $+\infty$. c) A $\operatorname{tgh}\theta$ é limitada, $-1 < \operatorname{tgh}\theta < 1$.
--	---

Demonstração: a) No caso das funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, não existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t + T) = f(t) \in R$. O seno hiperbólico é estritamente crescente e o cosseno hiperbólico para qualquer $T \in R$, $f(t + T) < f(t)$ ou $f(t + T) > f(t)$. Portanto essas funções não são periódicas.

b) Para $\theta \in R$ e $\theta < 0$, temos que $-\theta > 0$, sendo assim, $e^\theta < e^{-\theta}$, portanto $e^\theta - e^{-\theta} < 0$, então $\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} < 0$, logo $\operatorname{senh}\theta < 0$ *, e para $\theta \in R$ e $\theta > 0$, temos que $-\theta < 0$, sendo assim, $e^{-\theta} < e^\theta$ portanto $e^\theta - e^{-\theta} > 0$, então $\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} > 0$, logo $\operatorname{senh}\theta > 0$ **.

Então de * e **, temos que $\operatorname{senh}\theta$ é ilimitado, variando de $-\infty$ a $+\infty$.

Para $\theta = 0$, temos que $\operatorname{cosh}0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$ *, e para $\theta \in R$ e $\theta \neq 0$, temos $(e^\theta - 1)^2 > 0$, portanto $e^{2\theta} + 1 > 2e^\theta$, se $e^\theta > 0$ para qualquer $\theta \in R$, então $\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} > 1$ **.

Logo, de * e ** temos que $\operatorname{cosh}\theta$ varia de 1 a $+\infty$.

c) Para $\theta \in R$, temos $-e^{-\theta} < e^{-\theta}$, então $\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} < \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$, portanto $\operatorname{senh}\theta < \operatorname{cosh}\theta$, como $\operatorname{tgh}\theta = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{cosh}\theta}$ logo, $|\operatorname{tgh}\theta| < 1$, ou seja, $-1 < \operatorname{tgh}\theta < 1$.

■

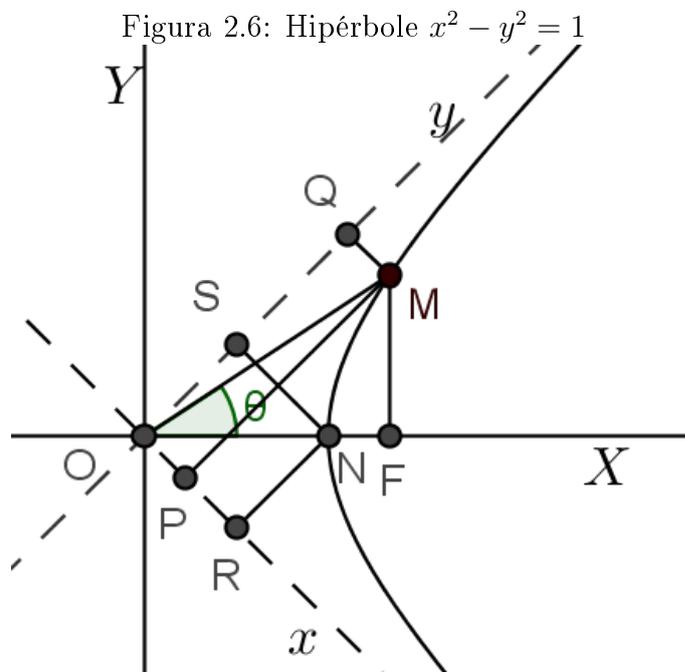
Teorema 2 As funções $\operatorname{cosh}\theta$ e $\operatorname{senh}\theta$ satisfazem as seguintes igualdades,

$$\operatorname{cosh}\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

e

$$\operatorname{senh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

Demonstração:



Conforme Figura (2.6), seja M um ponto sobre a hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, de forma que determine um ângulo de medida θ , então $A_{ONM} = \frac{\theta}{2}$. Nos eixos X e Y , o ponto M tem coordenadas

$$X = OF = \operatorname{cosh}\theta \text{ e } Y = FM = \operatorname{senh}\theta$$

nos eixos x e y , as coordenadas são:

$$x = OP \text{ e } y = OQ$$

Substituindo nas equações abaixo, temos:

$$OP = x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{cosh}\theta - \operatorname{senh}\theta)$$

e

$$OQ = y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta + \sinh\theta).$$

As coordenadas do ponto N , nos eixos X e Y

$$X = 1 \text{ e } Y = 0$$

e nos eixos x e y ,

$$x = OR = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = OS = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo podemos calcular as áreas das regiões $PRNM$ e $QSNM$ por:

$$A_{PRNM} = \frac{1}{2} \ln \frac{OR}{OP} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta - \sinh\theta)} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh\theta - \sinh\theta)$$

e

$$A_{QSNM} = \frac{1}{2} \ln \frac{OQ}{OS} = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh\theta + \sinh\theta)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln(\cosh\theta + \sinh\theta).$$

Como, $A_{ONM} = A_{PRNM}$, temos

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh\theta - \sinh\theta) \quad (2.6)$$

e como $A_{ONM} = A_{QSNM}$, temos

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \ln(\cosh\theta + \sinh\theta). \quad (2.7)$$

Aplicando a função exponencial em (2.5) e (2.6), vem

$$e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta \quad (2.8)$$

e

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta. \quad (2.9)$$

Para determinarmos o $\cosh\theta$, basta somarmos as equações (2.7) e (2.8)

$$e^\theta + e^{-\theta} = 2\cosh\theta \Rightarrow \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2},$$

e $\sinh\theta$, subtraindo (2.7) e (2.8)

$$e^\theta - e^{-\theta} = 2\sinh\theta \Rightarrow \sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

■

A partir do teorema anterior e usando as relações entre elas, podemos deduzir que:

$$\operatorname{tgh}\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}};$$

$$\operatorname{cotgh}\theta = \frac{1}{\operatorname{tgh}\theta} = \frac{1}{\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}} = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}};$$

$$\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{1}{\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}} = \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}};$$

$$\operatorname{cossech}\theta = \frac{1}{\sinh\theta} = \frac{1}{\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}} = \frac{2}{e^\theta - e^{-\theta}}.$$

Temos que, **O $\cosh\theta$ é uma função par e o $\sinh\theta$ é uma função ímpar.**

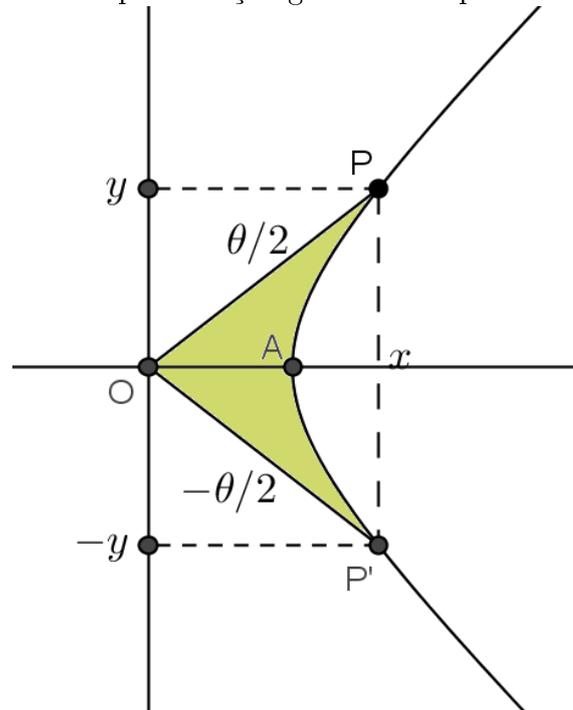
Considerando a hipérbole unitária $H : X^2 - Y^2 = 1$, seja P um ponto sobre a hipérbole figura(2.7), tome o setor OAP de área $\frac{\theta}{2}$, podemos dizer que as coordenadas de P são,

$$X = \cosh\theta \text{ e } Y = \sinh\theta.$$

Agora, vamos considerar o caso de uma área negativa, ou seja, uma área abaixo do eixo X . Para uma área $-\frac{\theta}{2}$, vamos encontrar um ponto simétrico a P , vamos chama-lo de P' .

Lembre-se que a hipérbole unitária H é simétrica em relação ao eixo X , então basta traçar uma reta paralela ao eixo Y passando por P . A intersecção dessa reta com H é o ponto P' e o setor OAP' terá área $-\frac{\theta}{2}$. As coordenadas de P' são,

Figura 2.7: Representação gráfica da hipérbole unitária



$$X = \cosh(-\theta) \text{ e } Y = \sinh(-\theta).$$

Mas, observe no gráfico (2.7) que a coordenada x de P' é igual a coordenada x de P , devido a simetria da hipérbole unitária.

Logo, o $\cosh\theta$ é uma função par, pois

$$\cosh\theta = \cosh(-\theta)$$

No caso das ordenadas y dos pontos P e P' , temos $d(O, y) = d(O, -y)$.

Logo, o $\sinh\theta$ é uma função ímpar, pois

$$\sinh\theta = -\sinh(-\theta).$$

2.3.1 Gráficos do cosseno hiperbólico e seno hiperbólico

Esboçaremos os gráficos a partir do comportamento das funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico.

Para o gráfico cosseno hiperbólico

$$\cosh x = \left\{ (x, y) : y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right\}.$$

Temos, que:

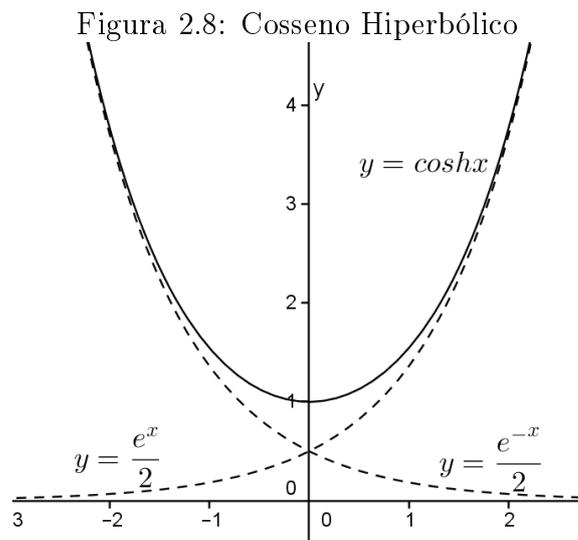
1. $\cosh(0) = 1$
2. $\cosh(-x) = \cosh(x)$, pois $y = \cosh x$ é uma função par. Assim, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos y 's.
3. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x > 0$ se $x > 0$ e $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x < 0$ se $x < 0$, portanto $y = \cosh x$ é decrescente se $x < 0$, crescente se $x > 0$ e tem um mínimo global em $x = 0$. Logo, $\cosh \geq 1$.
4. $\frac{d^2}{dx^2}(\cosh x) = \cosh x \geq 1$ e logo $y = \cosh x$ é sempre côncavo para cima.
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$, ou seja, a imagem da função $y = \cosh x$ é o intervalo $[1, +\infty)$.
6. Como $e^x > 0$, $e^{-x} > 0$ para todo x então $-e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x$. Logo $-\frac{e^{-x}}{2} < \sinh x < \frac{e^x}{2}$.
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh x - \frac{e^x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\cosh x - \frac{e^{-x}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2} = 0^+$.

Pelas propriedades analisadas, temos que: $\cosh x$ se aproxima de $\frac{e^x}{2}$ quando x cresce e se aproxima de $-\frac{e^{-x}}{2}$ quando x decresce, mas é sempre maior do que ambas.

A Figura (2.8) representa as funções

$$y = \cosh x, y = \frac{e^x}{2} \text{ e } y = -\frac{e^{-x}}{2},$$

no sistema de eixos coordenados xy .



Agora vamos analisar o comportamento e o esboço do gráfico de $y = \sinh x$

$$\sinh = \left\{ (x, y) : y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right\}.$$

Temos:

1. $\sinh(0) = 0$
2. $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, pois $y = \sinh x$ é uma função ímpar. Logo se conhecermos seu gráfico para $x > 0$ basta tomar o simétrico em relação a origem para completá-lo para $x < 0$.
3. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x > 0$ para todo x , ou seja, a função $\sinh x$ varia de $-\infty$ a $+\infty$. Uma função estritamente crescente.
4. $\frac{d^2}{dx^2}(\sinh x) = \sinh x$, pois se $x > 0$ então $y = \sinh x$ é côncavo para cima e côncavo para baixo se $x < 0$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$ ou seja, a imagem da função $y = \sinh x$ é todo intervalo $(-\infty, +\infty)$.
6. Como $e^x > 0$, $e^{-x} > 0$ para todo x então $-e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x$. Logo $-\frac{e^{-x}}{2} < \sinh x < \frac{e^x}{2}$.

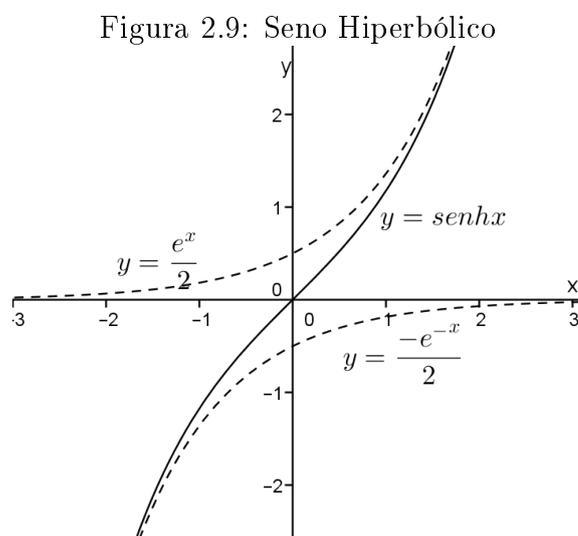
$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{senhx} - \frac{e^x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{e^{-x}}{2} = 0^- \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\operatorname{senhx} + \frac{e^{-x}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2} = 0^+.$$

Estas propriedades nos mostram que $y = \operatorname{senhx}$ se aproxima de $\frac{e^x}{2}$ quando x cresce, vindo por baixo, e se aproxima de $-\frac{e^{-x}}{2}$ quando x decresce, vindo por cima.

A Figura (2.9) representa as funções

$$y = \operatorname{senhx}, y = \frac{e^x}{2} \text{ e } y = -\frac{e^{-x}}{2}.$$

no sistema de eixos coordenados xy .



Capítulo 3

Aplicações das Funções Hiperbólicas

As Funções Hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios, dentro de sólidos elásticos e, mais genericamente, em muitos problemas da engenharia.

De acordo com a Revista *Árvore* [4] as Funções Hiperbólicas são muito eficientes, para geração de curvas de índice de local. De acordo com o método utilizado para análise e da procedência dos dados, as curvas de índice de local podem ser anamórficas ou polimórficas.

Figura 3.1: Curvas de índice de local

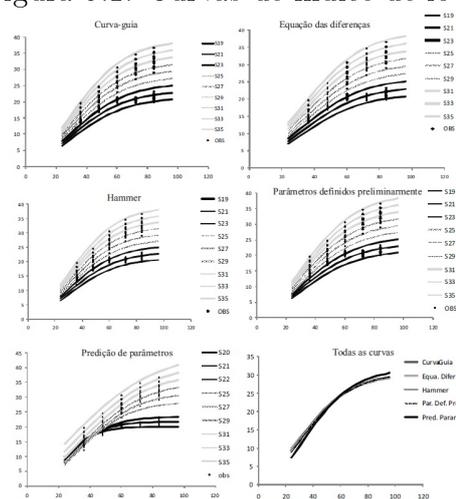


Figura 1 – Curvas de índices de local estimadas empregando diferentes métodos de construção, o modelo hiperbólico e uma idade-índice de 72 meses.
Figure 1 – Estimated site index curves estimated using different methods of construction, the hyperbolic model and index age of 72 months.

Curvas anamórficas são aquelas em que a tendência do crescimento em altura é a mesma para todos os locais. A inclinação é comum e constante, variando apenas o ponto de intersecção. Já as curvas polimórficas não apresentam a mesma tendência de incremento em altura para todos os locais. Figura (3.1).

A função mostrou-se eficiente na descrição de diferentes tendências de crescimento, figura (3.2).

Figura 3.2: Crescimento em altura dominante

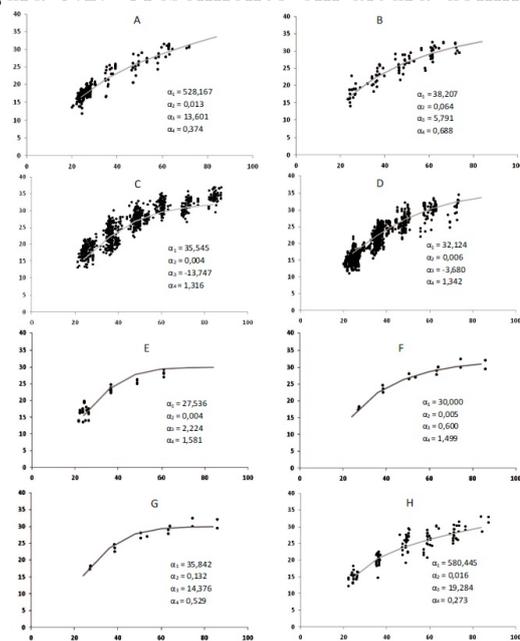


Figura 2 – Flexibilidade da função hiperbólica em expressar o crescimento em altura dominante para dados de parcelas permanentes de oito materiais genéticos distintos.
 Figure 2 – Flexibility of the hyperbolic function to express the growth in dominant height for data of permanent plots of eight different genetic materials.

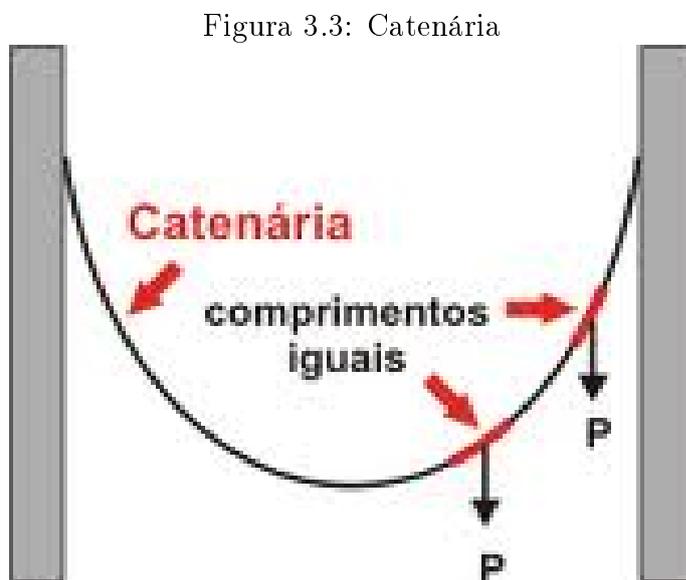
Sabe-se ainda que a Função Hiperbólica possui flexibilidade e realismo biológico adequado, para classificação da capacidade de povoamentos equiâneos (também designados por povoamentos regulares ou cutâneos), podendo ser usada com êxito.

Também ocorrem quando um cabo flexível e homogêneo é suspenso entre dois pontos, o que forma uma curva denominada catenária, a qual será analisada com mais detalhes.

3.1 A Catenária

Proposto por Leonardo da Vinci, este problema foi interpretado de forma errada por Galileu(1564-1642), supondo ter encontrado uma outra aplicação da parábola na curva de suspensão de uma corda ou cadeia flexível.

Apenas em 1690, James Bernoulli chamou atenção sobre esse problema, sendo resolvido um ano depois por Leibniz, Huyghens e Johann Bernoulli, irmão de James. Leibniz foi quem deu o nome **catenária** à curva ocupada pelo cabo (do latim catena que quer dizer corrente)



Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsf/for0203.htm

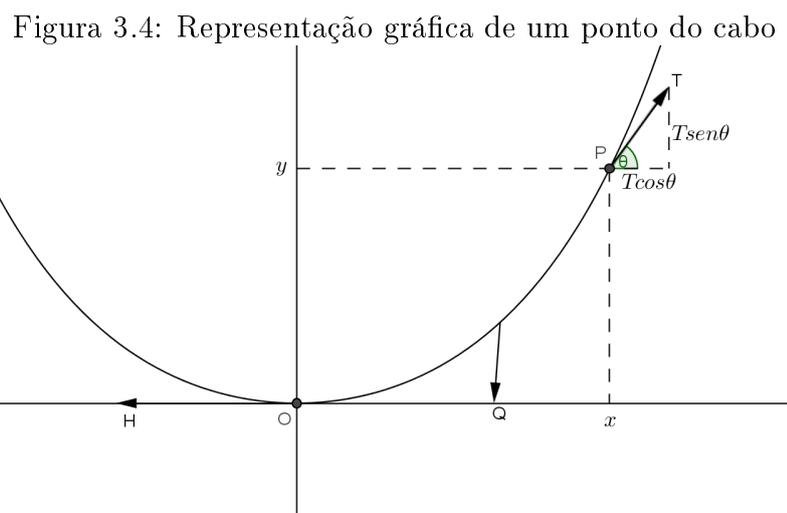
Johann Bernoulli, anos depois, escreve uma carta para um amigo contando sua proeza. Pequeno trecho da carta diz "Os esforços do meu irmão não tiveram sucesso; eu fui mais feliz, pois tive a habilidade (digo isso sem presunção, porque deveria eu esconder a verdade?) de resolver o problema e reduzi-lo à retificação da parábola. É verdade que isso me fez trabalhar durante uma noite. Isso representou muito naqueles dias e para a minha pouca idade e experiência, mas na manhã seguinte, transbordando de alegria, corri até meu irmão, que ainda estava lutando,

miseravelmente, com o nó górdio sem chegar a lugar nenhum, sempre pensando como Galileu que a catenária era uma parábola. Pare! Pare! Disse-lhe eu, não se torture mais, tentando provar a identidade de uma catenária e de uma parábola, pois isso é inteiramente falso. A parábola serve na construção da catenária, mas as duas curvas são tão diferentes que uma é algébrica e a outra transcendente".

A catenária a primeira vista aparenta a forma geral da parábola, mas não é, ela é descrita pela função cosseno hiperbólico. Como mostrado em [11].

Considere um sistema de coordenadas com origem no ponto mais baixo da curva, sendo a curva situada no plano xy e o eixo y perpendicular à curva considerada.

Atingindo o equilíbrio, é evidente que o cabo ficará contido em um plano, o plano vertical que passa por suas extremidades, veja figura (3.4).



Para determinar a equação denotemos por $P(x, y)$ um ponto qualquer da corda. Existem três forças que atuam sobre esse ponto: a força da gravidade que o empurra para baixo, e outras duas forças resultantes dos outros pontos adjacentes. Essas duas forças em parte são dirigidas para os lados, também integrando uma componente vertical, pois, os pontos adjacentes não estão no mesmo nível que o ponto P .

Essas forças associam-se para produzir uma força resultante, que atua sobre o

ponto P .

Consideremos agora o arco OP , que devido à ação das três forças estará em equilíbrio.

Definamos:

T é a tensão que atua, tangencialmente, em P e forma um ângulo θ com o eixo x .

H é a tensão da corda no ponto O , agindo horizontalmente.

Q é o peso do trecho OP da corda, cujo comprimento é s e age verticalmente.

Vamos admitir que todos os pontos da corda têm o mesmo peso, pois, se um ponto fosse mais pesado que os outros, não teríamos uma catenária. Isso implica que, se houvesse uma força resultante atuando sobre o ponto, ele aceleraria a direção dessa força, afastando-se da localização atual. No entanto vamos assumir que a corda está imóvel e atingiu uma força estável, logo, todas as forças resultantes que atuam sobre cada ponto são iguais a zero.

A força de tensão é variável ao longo da corda. Por ser flexível expressa-se matematicamente, dizendo que a força de tensão tem sempre a direção tangente à curva. Não ocorrendo forças internas, a corda não oferece nenhuma resistência para curva-se na direção da tensão.

A soma dessas três forças que agem sobre OP é nula

$$H + T + Q = 0.$$

Decompondo essa equação de equilíbrio sobre os eixos, temos:

$$-H + T \cos \theta = 0$$

$$-Q + T \sin \theta = 0.$$

Dividindo as equações membro a membro, temos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{Q}{H}.$$

Tendo $Q = ps$, p é o peso por unidades de comprimento do arco OP , logo:
 $\operatorname{tg}\theta = \frac{p}{H} \cdot s$.

Note que o peso p e a tensão H são constantes, logo $\frac{H}{p} = k$.

Sendo $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx}$, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{k} \tag{3.1}$$

Mas, o comprimento do arco OP é dado por

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

e logo

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{3.2}$$

Por outro lado, ds/dx podemos calculá-lo diferenciando ambos os lados da equação (3.1) relativamente a x , isto é

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{k} \frac{ds}{dx}$$

e então substituindo em (3.2) temos a seguinte equação diferencial

$$k \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

E esta é considerada a equação diferencial da catenária.

Para uma melhor compreensão, vamos usar um artifício, simplificando a equação,

tomamos $\frac{dy}{dx} = p$, o que nos leva a equação

$$k \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}.$$

O que vai resultar em uma equação diferencial de primeira ordem com variáveis separadas:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{k}. \quad (3.3)$$

Com integração de ambos os membros da equação (3.3), temos

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int \frac{dx}{k} \quad (3.4)$$

Resolvendo a equação do lado esquerdo, obtém-se:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \ln(p + \sqrt{1 + p^2})$$

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{k} + c$$

Para $x = 0$, temos $p(0) = y'(0) = 0$, logo, $c = 0$ e a equação acima resulta em

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{k}$$

então a solução sera da forma

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{k}}$$

ou ainda,

$$1 + p^2 = e^{\frac{2x}{k}} - 2p\sqrt{1 + p^2} - p^2,$$

e como $e^{\frac{x}{k}} - p = \sqrt{1 + p^2}$, substituindo temos:

$$1 + p^2 = e^{\frac{2x}{k}} - 2p(e^{\frac{x}{k}} - p) - p^2$$

$$1 + p^2 = e^{\frac{2x}{k}} - 2pe^{\frac{x}{k}} + 2p^2 - p^2$$

$$2pe^{\frac{x}{k}} = e^{\frac{2x}{k}} - 1$$

$$2p = \frac{e^{\frac{2x}{k}} - 1}{e^{\frac{x}{k}}}$$

$$2p = (e^{\frac{2x}{k}} - 1) \cdot e^{-\frac{x}{k}}$$

$$p = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2}.$$

Portanto, $p = \sinh\left(\frac{x}{k}\right)$.

Sabemos que $p = \frac{dy}{dx}$ e $p = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2}$, assim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2},$$

integrando ambos os membros, temos:

$$\int \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \int (e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}) dx$$

$$y(x) = \frac{1}{2}(k \cdot e^{\frac{x}{k}} + k \cdot e^{-\frac{x}{k}}) + c_1$$

$$y(x) = \frac{k}{2}(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}) + c_1$$

Para, $y(0) = b$, temos

$$y(0) = \frac{k}{2}(e^0 + e^0) + c_1$$

$$c_1 = b - k$$

chegando a solução geral na forma,

$$y(x) = \frac{k}{2}(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}) + b - k$$

$$y(x) = k \left(\frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2} \right) + b - k$$

Mas, $\cosh\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2}$, então:

$$y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right) + b - k \quad (3.5)$$

é a equação da catenária.

É bastante comum supor que $k = b$. Então a solução tem a forma

$$y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right).$$

Sendo a catenária uma curva cuja forma assumida é de um cabo suspenso pelas extremidades sob a ação do seu próprio peso, isto é, em que as tensões internas equilibram naturalmente o peso. É utilizada em diversas situações.

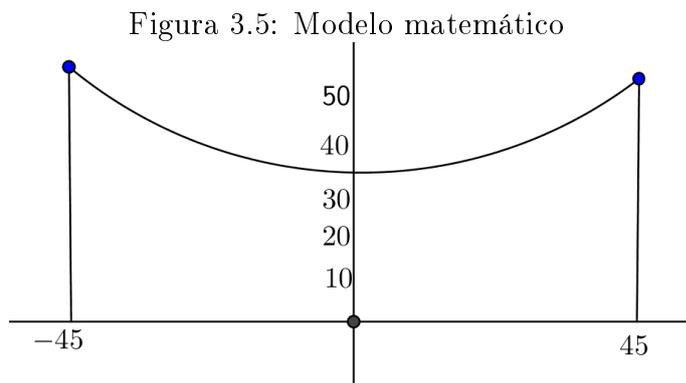
Exemplo apresentado no capítulo 7 em [2].

Exemplo 1 *Um cabo de 100 pés está preso pelas pontas no alto de dois postes de 50 pés posicionados a 90 pés de distância, veja figura(3.5). A que altura acima do solo está o ponto médio do cabo?*

Solução: *Vimos que, o cabo forma uma catenária*

$$y(x) = k \cosh\left(\frac{x}{k}\right) + b - k$$

vamos considerar $b - k = c$, onde a origem está no solo a meio caminho entre os



dois postes. Usando a fórmula do comprimento do arco OP , temos

$$\begin{aligned}
 100 &= \int_{-45}^{45} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
 &= 2 \int_0^{45} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\
 &= 2 \int_0^{45} \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx \\
 &= 2 \int_0^{45} \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{a}\right) dx \\
 &= 2a \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_0^{45} = 2a \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{45}{a}\right).
 \end{aligned}$$

Usando o recurso numérico de uma calculadora para resolver

$$100 = 2a \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{45}{a}\right)$$

em a obtemos $a \approx 56,01$. Então

$$50 = y(45) = 56,01 \cdot \operatorname{cosh}\left(\frac{45}{56,01}\right) + c \approx 75,08 + c$$

de modo que $c = -25,08$. Assim, o ponto médio do cabo está a $y(0) \approx 56,01 -$

25,08 = 30,93 pés acima do solo.

Por suas propriedades e beleza, a catenária invertida é uma excelente forma para construção de arcos monumentais que se sustentam pelo próprio peso, o que despertou a imaginação de engenheiros e arquitetos, vejamos alguns exemplos.

3.1.1 O St. Louis Gateway Arch

Gateway Arch é um monumento elegante de expansão para o oeste dos EUA. Localizado às margens do rio Mississippi, em St. Louis. Tem a forma de uma catenária invertida, que é uma estrutura muito estável.

Foi projetado pelo arquiteto finlandês Eero Saarinen em parceria com o engenheiro alemão Hannskrl Bandel em 1947 para homenagear a expansão para o Oeste durante o século XIX. Com 192 metros de altura, é o maior monumento em solo norte-americano. Sua construção teve início em 1963 e foi concluída em 1965, tendo sido inaugurada em 1968.

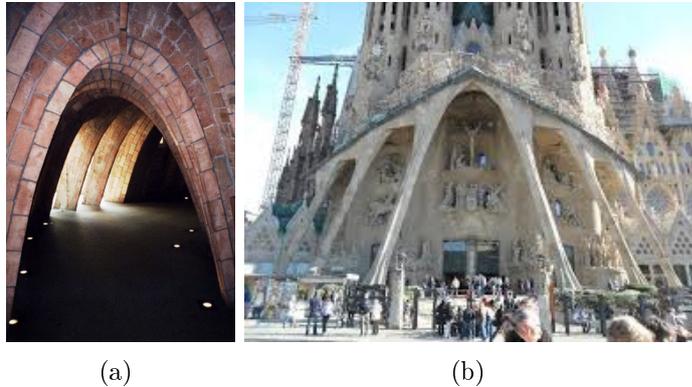
Figura 3.6: Gateway Arch



Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Gateway_Arch

Em todo o mundo encontramos construções com a catenária invertida, como as do arquiteto espanhol Antônio Gaudí (1823-1926).

Figura 3.7: (a) Arco Catenário, casa Milá e (b) Arcos na Basílica da Sagrada Família em Barcelona



Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsf/for0203.htm

No Brasil, entre outros, temos a Ponte Juscelino Kubitschek, um dos pontos turísticos de Brasília, a qual foi utilizada a equação

$$-180 \cosh\left(\frac{x}{-180}\right)$$

Figura 3.8: Ponte Juscelino Kubitschek



Fonte: <http://www.comerciojardimbotanico.com.br/pontos-turisticos-de-brasilia/>

3.1.2 Linhas de Transmissão

Suas propriedades são utilizadas também na ferrovia, a catenária é um sistema de distribuição e alimentação elétrica aérea.

Figura 3.9: Linhas de Transmissão



Fonte: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Caten C3A1ria_\(caminho_de_ferro\)](http://pt.wikipedia.org/wiki/Caten%C3%A1ria_(caminho_de_ferro))

É diferente das distribuições de alta/média/baixa tensão, pois permite uma captação direta de energia do cabo por meio de um pantógrafo. Esses cabos são fixos por tensão e trocados a cada número determinado de postes, existindo um peso superior ao de $\frac{1}{2}$ do cabo em cada extremidade que o estica até apoiar nos fixadores. Esta forma de fixação permite que haja uma superfície lisa de contato por todo o cabo. Esse sistema de distribuição já é utilizado por Trólebus, Bondes elétricos, Metrô de superfície, Locomotivas e Automotivas ferroviárias.

No Brasil os sistemas metroviários (com exceção do Metrô de São Paulo e do Rio de Janeiro), adotam o sistema de catenária com tensão de $3kVcc$.

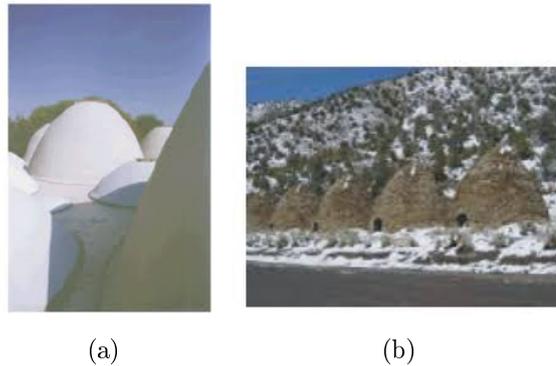
Segundo [1] essa belíssima e elegante curva é também utilizada por designs na construção de móveis (mesas, cadeiras, etc) no mundo inteiro.

Devido suas características, também é transportada para as mais diversas peças estruturais.

As principais características destas peças são:

- leves e muito estáveis;
 - bastante resistentes a ventos;
 - beleza e harmonia as peças.
- ★ **Superfícies formadas por uma revolução de catenária.**

Figura 3.10: (a) Casas de uma fazenda orgânica na Índia e (b) Fornos para cerâmica resistentes a altas mudanças de temperaturas



Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsf/for0203.htm

- ★ **Superfícies formadas por uma translação de catenária.**

Figura 3.11: (a) Cobertura esbelta com grande vão e (b) Dulles Internacional Airport- Estados Unidos



Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsf/for0203.htm

- ★ **Formas das superfícies geradas pela catenária utilizadas nos desenhos de móveis.**

Figura 3.12: Móveis



Fonte: http://alfaconnection.net/pag_avsf/for0203.htm

A catenária também está presente na natureza, como no contorno de asas de borboletas, colmeias, teias de aranhas, etc.

Referências Bibliográficas

- [1] Alfaconnection. **Equilíbrio de cabos suspensos FORO203**. Disponível em: <http://alfaconnection.net/pag_avsf/for0203.htm>. Acesso em: 02 fev. 2015.
- [2] Anton, H.; Bivens, I.; Davis, S. **Cálculo - Volume 1**, Bookman. 8ª edição. Porto Alegre, 2007.
- [3] Ávila, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável - Volume 1**, LTC. 7ª edição. Rio de Janeiro, 2006.
- [4] Binoti, D. H. Breda; Binoti, M. L. da Silva; Leite, H. Garcia. **Aplicação da função hiperbólica na construção de índice local**. Rev. Árvore, V.36, n.4, July/Aug. 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0100-67622012000400015>>. Acesso em: 14 jan. 2015.
- [5] CARVALHO, Sônia Pinto de. **As Funções Hiperbólicas**, 2005. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/comed/2005/b2005/funchiper.pdf>>. Acesso em: 19 dez. 2014.
- [6] Flamming, D. M.; Gonçalves, M. B. **Cálculo A - Volume 1**, LTC. 6ª edição. São Paulo, 2001.
- [7] Gómez, J. J. Delgado; Frenzel, K. Rosenvald; Crissaff, L. dos Santos. **Coleção PROFMAT: Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SSBM, 2013.

- [8] Guidorizzi, H. L. **Um Curso de Cálculo - Volume 1**, LTC. 5a edição. São Paulo, 2001.
- [9] Maor, E. E: **A História de um número**, Record. São Paulo, 2004.
- [10] Munem, M. A.; Foulis, D. J. **Cálculo - Volume 1**, LTC. Rio de Janeiro, 1982.
- [11] Skorulski, B. **Matemática em engenharia: a catenária**. Disponível em: <http://www.revistasolucoes.com/wp-content/uploads/2014/01/matematicaseningenieria.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2015.
- [12] Stewart, J. **Cálculo - Volume 1**, CENGAGE Learning. 6a edição. São Paulo, 2009.
- [13] Thomas, G. B. **Cálculo - Volume 1**, ABDR. 11a edição. São Paulo, 2009.