



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional PROFMAT



# Números Mórficos<sup>†</sup>

por

**Ronaebson de Carvalho Ferreira**

sob orientação de

**Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro**

**Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Abril/2015  
João Pessoa - PB

---

<sup>†</sup>O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

# Números Mórficos

por

**Ronaebson de Carvalho Ferreira**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro -UEPB**

---

**Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas - UEPB**

---

**Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva - UFG**

**Abril/2015**

# Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente à Deus, que me tem dado força para caminhar e sabedoria para enfrentar as adversidades dessa vida.

A meus pais, José Ronaiibe Ferreira e Izabel de Carvalho Ferreira, por todo amor e dedicação, por me conduzirem no caminho dos estudos.

A minha esposa Ingrid Sttefanny Melo Ferreira, pelo apoio e companheirismo.

A meu filho Samuel, por compreender e partilhar comigo um pouco dos sacrifícios dessa jornada.

Ao aluno Rodrigo Marques do IFPB, por ter me questionado sobre o tema e suscitado em mim a curiosidade pelo mesmo.

As professores do PROFMAT, que compartilharam seus conhecimentos de maneira tão brilhante e clara.

Aos professores Bruno e Flank, pela orientação, paciência e palavras de estímulo.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, à todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para realização deste trabalho

# Dedicatória

*A Samuel, meu filho, que tem sido paciente e compreensivo, e na vida me tem dado muita alegria.*

# Resumo

Os números mórficos são números relacionados à forma e que, de alguma maneira, estabelecem uma concepção de beleza, estética e harmonia. Esses números possuem uma série de aplicações em vários ramos do conhecimento, como geometria, aritmética, arquitetura e engenharia. Existem apenas dois números mórficos, o número de ouro e o número plástico, o primeiro deles é estudado desde a antiga Grécia e o segundo passou a ser estudado no século XX, o que torna o assunto relativamente novo. Traremos neste trabalho uma coleção de informações acerca desses números, sejam propriedades aritméticas, algébricas ou geométricas, estabelecendo um paralelo muito forte entre os mesmos e também como eles se relacionam com as sequências de Fibonacci e Padovan.

**Palavras-chave:** números mórficos, número de ouro, número plástico, Padovan e Fibonacci.

# Abstract

Morphic numbers are numbers related to the form and, somehow, they establish a conception of beauty, aesthetics and harmony. These numbers have important applications in various branches of knowledge, such as geometry, arithmetic, architecture, and engineering. There are only two morphic numbers, the golden number and the plastic number. The first one has been studied since ancient Greece, and the second one has only become a subject of interest in the twentieth century, what makes the plastic number a relatively new branch of research. In this work, we will analyze a data collection concerning arithmetic, algebraic or geometric properties of these numbers, by establishing a straight relation between the morphic numbers and the Fibonacci and Padovan sequences.

**Keyword:** morphic numbers, golden number, plastic number, Padovan and Fibonacci.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Números Mórficos</b>	<b>3</b>
1.1 Números Mórficos . . . . .	4
<b>2 Número de Ouro</b>	<b>11</b>
2.1 Número de Ouro . . . . .	11
2.1.1 Propriedades Algébricas . . . . .	12
2.1.2 Propriedades Geométricas . . . . .	15
2.2 Sequência de Fibonacci . . . . .	18
2.2.1 Propriedades . . . . .	22
2.2.2 A Sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal . . . . .	29
2.2.3 Fórmula de Binet . . . . .	34
2.2.4 Potências de $\varphi$ . . . . .	39
2.2.5 Função Geradora . . . . .	41
2.2.6 Matrizes e a Sequência de Fibonacci . . . . .	42
2.2.7 Aplicações à Combinatória . . . . .	45
<b>3 Número Plástico</b>	<b>47</b>
3.1 Número Plástico . . . . .	48
3.1.1 Propriedades Algébricas . . . . .	50
3.1.2 Propriedades Geométricas . . . . .	54
3.2 Sequência de Padovan . . . . .	58
3.2.1 Propriedades . . . . .	61
3.2.2 Sequência de Padovan e o Triângulo de Pascal . . . . .	68
3.2.3 Fórmula Posicional . . . . .	71
3.2.4 Potências de $\psi$ . . . . .	74
3.2.5 Função Geradora . . . . .	75
3.2.6 Matrizes e a Sequência de Padovan . . . . .	76
3.2.7 Aplicações à Combinatória . . . . .	78
<b>Apêndice</b>	<b>79</b>





# Lista de Figuras

1.1	Escala geométrica cuja razão é o número de ouro . . . . .	5
1.2	Escala geométrica cuja razão é o número plástico . . . . .	5
1.3	Gráfico das funções do tipo $f_m(x) = x^m - x - 1$ . . . . .	6
1.4	Gráfico das funções do tipo $g_n(x) = x^n - x^{n-1} - 1$ . . . . .	7
1.5	Raízes do polinômio $x^m - x^{m-1} - 1$ cuja distância à origem e ao número real 1 é 1. . . . .	9
2.1	Divisão de um segmento na razão extrema e média . . . . .	15
2.2	Retângulo Áureo . . . . .	16
2.3	Auto-propagação do Retângulo Áureo . . . . .	17
2.4	Espiral Áurea . . . . .	17
2.5	Rotação do Retângulo Áureo . . . . .	18
2.6	Elipse de Ouro . . . . .	19
2.7	Coelhos de Fibonacci . . . . .	20
2.8	Construção geométrica da Sequência de Fibonacci . . . . .	21
2.9	Espiral de Fibonacci . . . . .	22
2.10	Os primeiros 160 inteiros (no eixo X) dividido em representação Zekendorf. A cor de cada retângulo corresponde a um número de Fibonacci e sua altura corresponde com o valor do número. . . . .	30
3.1	Hans van der Laan . . . . .	47
3.2	Gráfico da função dada por $f(x) = x^3 - x - 1$ . . . . .	50
3.3	Gráfico da função $f(x) = \psi^x$ . . . . .	52
3.4	Gráfico das funções dadas por $f(x) = x^3 - x - 1$ e $g(x) = x^5 - x^4 - 1$ . . . . .	53
3.5	Divisão de um segmento em três partes por Van der Laan . . . . .	54
3.6	Construção do Pentágono Plástico . . . . .	55
3.7	Construção de um pentágono plástico a partir de outro . . . . .	55
3.8	Auto-propagação do pentágono plástico . . . . .	56
3.9	Espiral Plástica . . . . .	56
3.10	Paralelepípedo Plástico . . . . .	57
3.11	Construção geométrica da Sequência de Padovan . . . . .	59
3.12	Espiral de Padovan . . . . .	60

3.13 Interpretação espacial para Sequência de Padovan . . . . .	61
---	----

# Lista de Tabelas

2.1	Razão entre números de Fibonacci consecutivos . . . . .	36
2.2	Relação entre as potências de $\varphi$ e os números de Fibonacci . . . . .	39
3.1	Comportamento das dimensões dos paralelepípedos . . . . .	60
3.2	Razão entre números de Padovan consecutivos . . . . .	73
3.3	Relação entre as potências de $\psi$ e os números de Padovan . . . . .	74

# Notações

## Notações Gerais

- $\varphi$  é o Número de Ouro.
- $\phi$  é o oposto do inverso do Número de Ouro.
- $\psi$  é o Número Plástico.
- $(a_n)$  é uma sequência de números com o índice  $n \in \mathbb{N}$ .
- $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo da sequência  $(a_n)$ .
- $f_n$  é o  $n$ -ésimo termo da sequência de Fibonacci.
- $P_n$  é o  $n$ -ésimo termo da sequência de Padovan.
- $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .
- $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$  é o número binomial  $n$  sobre  $p$ .
- $\lceil x \rceil$  é o menor inteiro maior do que ou igual a  $x$ .
- $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro menor do que ou igual a  $x$ .

# Introdução

No presente trabalho trataremos sobre os Números Mórficos e suas relações com as sequências de Fibonacci e Padovan. O tema é, em partes, relativamente novo, pois alguns assuntos começaram a ser estudados no século passado, apesar de outros terem suas origens na Grécia antiga. No que diz respeito à literatura brasileira, o tema ainda foi pouco explorado, e por esta razão, com o intuito de contribuir com mais um tema tão interessante para que os professores do ensino médio e até mesmo de disciplinas como Aritmética e Teoria dos Números trabalhem em suas aulas, é que escrevemos este trabalho.

Os números mórficos são números que, de alguma forma, estão associados à concepção de beleza e harmonia, mais precisamente, eles estão relacionados com a ideia da clareza de percepção. Assim, esses números possuem várias aplicações na geometria, o que torna o tema ainda mais interessante. Foi provado que existem dois, e apenas dois números mórficos, a saber, o Número de Ouro e o Número Plástico. Nesse sentido dividimos o trabalho em três capítulos.

O primeiro capítulo trata da natureza dos números mórficos, trazendo a definição e a prova de que existem apenas dois deles. Procuramos trazer uma demonstração formal para tal resultado, mas também uma demonstração (ou, pelo menos, uma pesquisa acerca do mesmo) mais intuitiva, para que o leitor o compreendesse sem que precisasse de resultados mais complexos associados a equações polinomiais.

O segundo capítulo é para tratar do Número de Ouro, número este que é estudado desde a Grécia antiga. Traremos um pouco de história, algumas de suas propriedades algébricas e geométricas. Também falaremos sobre a sequência de Fibonacci, suas propriedades e suas relações com o número de ouro.

O terceiro e último capítulo é dedicado ao Número Plástico, que passou a ser estudado no século passado por arquitetos e matemáticos. Vale ressaltar que alguns matemáticos o tratam como um número negligenciado ou esquecido, isso por que, comparado ao número de ouro, este último se sobressai e fica sempre em evidência. Mas, traremos aqui, que o número plástico assume, no espaço, o papel que o número de ouro assume no plano. Abordaremos um pouco da história desse número, suas propriedades algébricas e geométricas. Também falaremos sobre a sequência de Padovan, suas propriedades e como ela se relaciona com o número plástico.

Os dois últimos capítulos foram construídos numa mesma perspectiva, assim o

---

leitor pode estar, a todo momento, estabelecendo comparações entre o número de ouro e o número plástico, também o pode fazer para as sequências de Fibonacci e Padovan. Dispomos no apêndice deste trabalho uma seção sobre o Princípio da Indução Finita, pois muitas demonstrações foram feitas utilizando esse princípio, mas sempre que possível, procuramos trazer demonstrações alternativas para alguns resultados, algumas delas, por exemplo, usando manipulações algébricas.

Segundo Djairo Guedes de Figueiredo, *a grande relevância da Matemática jaz no fato de que, além de sua vida própria como ciência, com suas teorias e seus problemas, ela tem a característica ímpar de poder penetrar, como uma arma importante e, às vezes, imprescindível em muitos outros ramos do conhecimento humano*. Assim, enaltecemos o tema como algo motivador para o estudo da matemática, despertando no aluno o interesse e a curiosidade, mais ainda, levando o aluno do ensino médio, por exemplo, a estudar uma matemática um pouco mais rebuscada e elegante. Desta forma, sugerimos ao professor do ensino médio, que, se possível, aborde o tema em suas aulas, fazendo as devidas adaptações, outro sim, levando para as aulas de preparação para olimpíadas de matemática.

# Capítulo 1

## Números Mórficos

Existem várias escalas de comparação de grandezas dos números, poderíamos dizer também sistemas de medidas, algumas delas são as sequências em que a diferença entre dois termos consecutivos é constante, este é o caso das progressões aritméticas, cuja importância é tamanha. Outras progressões, não aritméticas, também influenciaram bastante na arte ocidental, a saber, a sequência de Fibonacci, a qual descreveremos ao longo do trabalho. No entanto, quando comparamos medidas geométricas no plano ou no espaço somos remetidos, de maneira muito intuitiva, às progressões geométricas, onde o quociente entre dois termos consecutivos é sempre constante, mais ainda, o quociente  $(q^{n+1} - q^n)/(q^{n+1} + q^n)$  independe do valor de  $n$ .

Sendo  $q$  o número de ouro, o qual descreveremos mais adiante, a progressão geométrica assume outras duas propriedades curiosas:

- A soma entre dois elementos consecutivos é igual ao próximo elemento da sequência, isto é,  $q^{n-1} + q^n = q^{n+1}$ , donde  $1 + q = q^2$ ;
- A diferença entre dois elementos consecutivos é igual ao elemento anterior, ou seja,  $q^{n+1} - q^n = q^{n-1}$ , donde  $q - 1 = q^{-1}$ .

A presença e o protagonismo da divina proporção na arquitetura e no desenho se deve, especialmente, porque se pode definir um sistema de medidas baseado no número de ouro e, nesse sentido, tomaremos um sistema de medidas como uma sequência de segmentos de comprimentos em progressão geométrica de razão  $p > 1$ , com a condição de que se “adicionarmos” ou “subtraímos” duas medidas consecutivas do sistema, obtemos uma outra medida do sistema, ou seja,

$$\begin{cases} p^{i+1} + p^i = p^j \\ p^{i+1} - p^i = p^k, \end{cases}$$

com  $i, j, k \in \mathbb{Z}$  e  $j > i + 1$  e  $k < i$ , daí, se dividirmos ambas as equações por  $p^i$  e

fizemos  $j - i = m$  e  $k - i = -n$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos:

$$\begin{cases} p + 1 = p^m \\ p - 1 = p^{-n} \end{cases} .$$

Sendo assim, a partir das propriedades supracitadas referentes a razão áurea e das condições para se ter o sistema de medidas em questão, somos levados ao seguinte questionamento:

“Para que números reais  $p > 1$  existem números naturais  $m$  e  $n$  de modo que  $p - 1 = p^{-n}$  e  $p + 1 = p^m$ ?”

Hans Van der Laan designou as soluções do referido problema como *Números Mórficos* e segundo ele, os números mórficos constituiriam as escalas geométricas ideais para a concepção de objetos espaciais.

## 1.1 Números Mórficos

Esta seção é dedicada a definição de números mórficos e a demonstração de que existem dois e apenas dois deles, para tanto, tomamos como referência [1] e [4].

**Definição 1.1** *Um número real  $p > 1$  é chamado número mórfico quando existem números naturais  $m$  e  $n$  tais que:*

$$p + 1 = p^m \quad e \quad p - 1 = p^{-n}.$$

Se substituirmos  $m$  e  $n$  por 2 e 1, respectivamente, obteremos o número de ouro. Vejamos:

$$\begin{cases} p + 1 = p^2 \\ p - 1 = p^{-1} \end{cases} \implies p^2 - p - 1 = 0,$$

cujas raízes são  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ou  $p = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Como  $p > 1$ , temos que  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (Razão Áurea).

Veja a ilustração na figura 1.1 e note que a razão áurea, de fato, satisfaz as condições para o sistema de medida definido por Van der Laan.

Se substituirmos  $m$  e  $n$  por 3 e 4, respectivamente, obteremos o número plástico. Vejamos:

$$\begin{cases} p + 1 = p^3 \\ p - 1 = p^{-4} \end{cases} \implies \begin{cases} p^3 - p - 1 = 0 \\ p^5 - p^4 - 1 = 0 \end{cases} ,$$

cuja única raiz real é  $p = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}$  (Número Plástico).



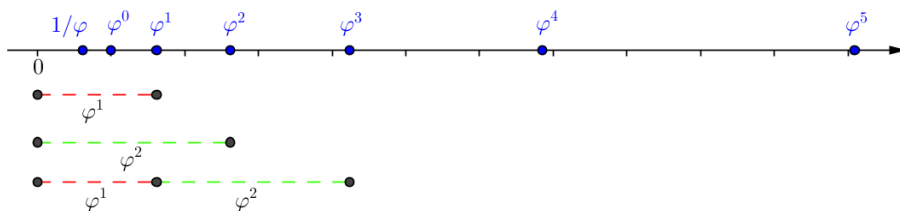


Figura 1.1: Escala geométrica cuja razão é o número de ouro

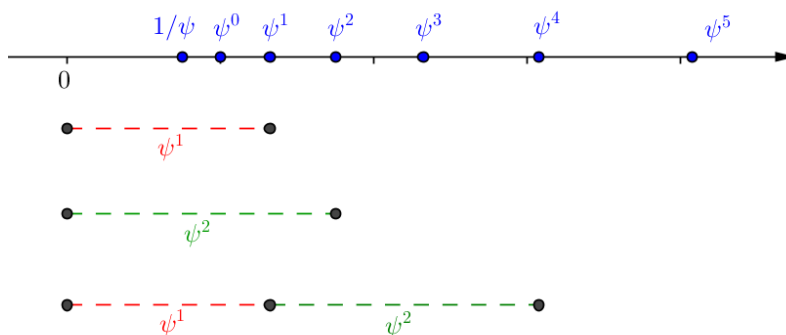


Figura 1.2: Escala geométrica cuja razão é o número plástico

Veja a ilustração na figura 1.2 e note que o número plástico, de fato, também satisfaz as condições para o sistema de medida definido por Van der Laan.

Continuando a investigação, quando trabalhamos com valores para  $m$  maiores do que 3, o processo começa a ficar um pouco mais difícil e trabalhoso. Mesmo assim, com a ajuda de uma calculadora gráfica (usaremos aqui o GEOGEBRA) podemos investigar se para  $m = 4$ , por exemplo, existe um  $n$  natural, tal que o sistema de equações da Definição 1.1 tem uma única solução. Para tanto, percebamos inicialmente que a raiz de uma equação do tipo  $p + 1 = p^m$  é raiz da função  $f_m(x) = x^m - x - 1$  e essa função não tem raiz para  $m = 1$ , mas para  $m = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  tem sempre uma única raiz irracional<sup>1</sup> maior que 1. Apenas para fins de ilustração, na figura 1.3, perceba que ao passo que  $m$  aumenta, as raízes positivas maiores do que 1 convergem para o 1.

Voltando então para o caso  $m = 4$ , temos que a solução real e maior do que 1 da equação  $x^4 - x - 1 = 0$  é 1,220744084.... Agora o processo é inverso, temos que descobrir qual o valor de  $n$  para o qual a função  $g_n = x^n - x^{n-1} - 1$  tem o mesmo zero, isto é, qual das equações

$$x - 1 = x^{-1}, x - 1 = x^{-2}, x - 1 = x^{-3}, x - 1 = x^{-4}, x - 1 = x^{-5}, x - 1 = x^{-6}, \dots,$$

<sup>1</sup>Não há raízes racionais, pois se houvesse, deveria ser igual a  $\pm 1$ , pelo teorema das raízes racionais para um polinômio de coeficientes inteiros.

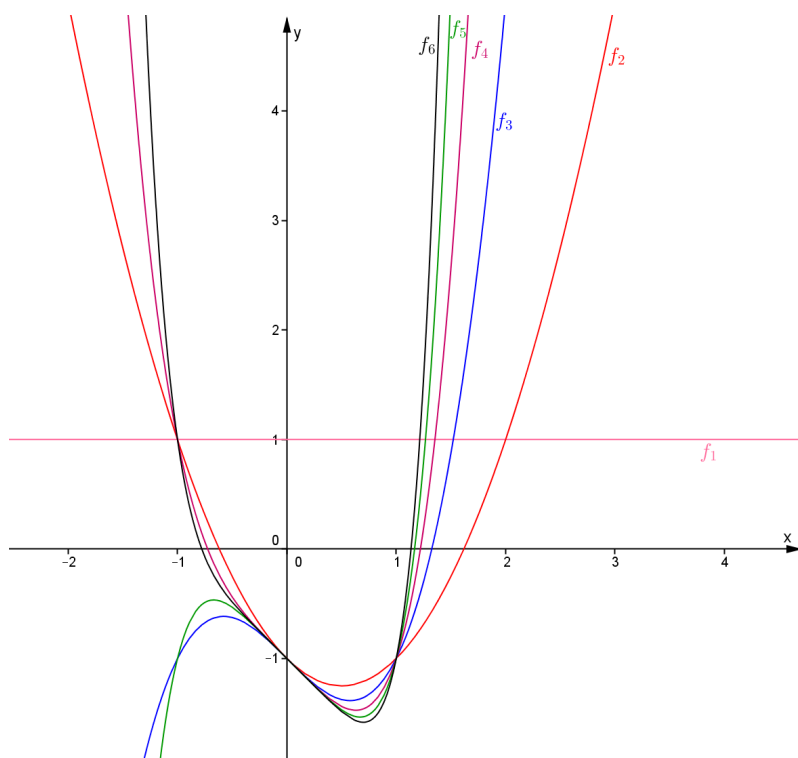


Figura 1.3: Gráfico das funções do tipo  $f_m(x) = x^m - x - 1$

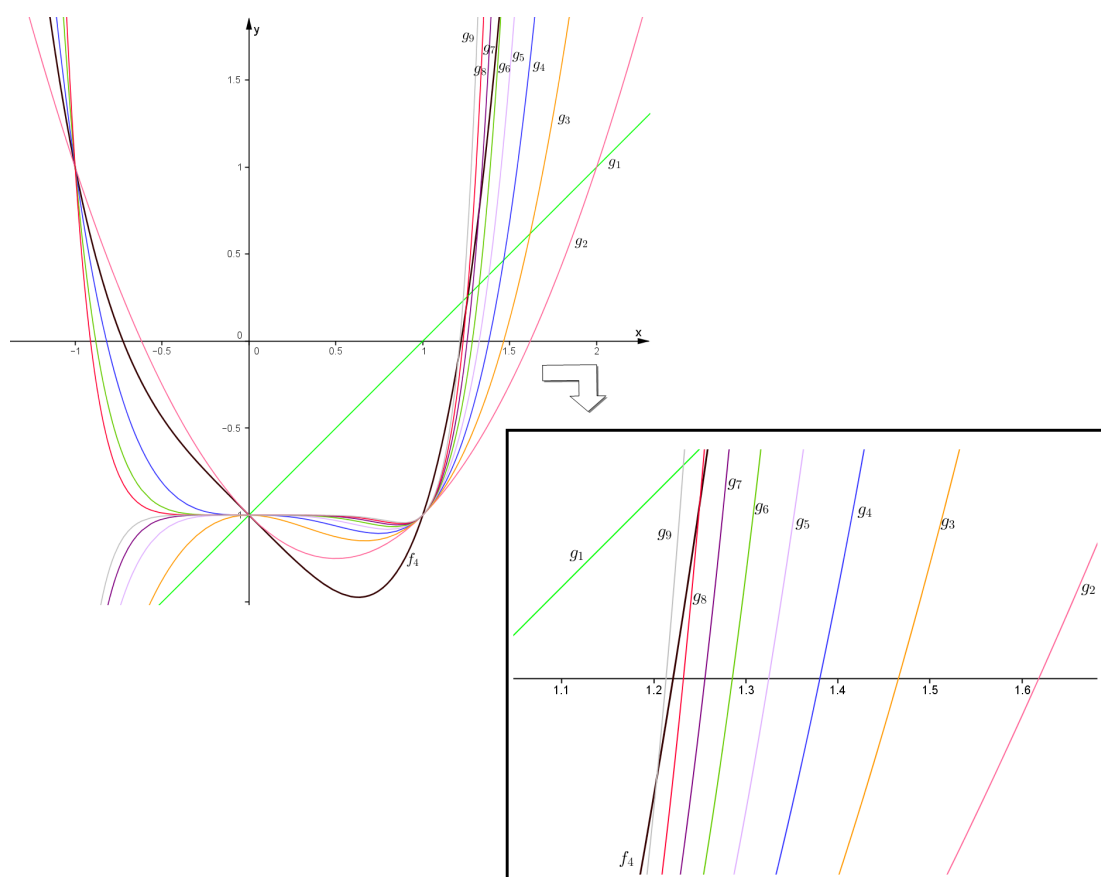


Figura 1.4: Gráfico das funções do tipo  $g_n(x) = x^n - x^{n-1} - 1$

tem a mesma solução. Para isto, representemos no gráfico da figura 1.4 a função  $f_4 = x^4 - x - 1$  e as funções  $g_n = x^n - x^{n-1} - 1$ , com  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ .

Observe que para  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  as raízes de  $g_n$  são maiores do que  $1,220744084$  e a partir de  $n = 9$ , essas raízes serão menores, de modo que, as raízes de  $g_n$ , a medida que  $n$  cresce, formam uma sucessão estritamente decrescente. Sendo assim, não existe nenhum número mórfico associado a  $m = 4$ . Para os demais valores de  $m$ , poderíamos prosseguir da mesma forma na investigação, todavia não teríamos como encontrar, caso houvesse, todos os outros números mórficos associados a esse valores de  $m$ .

Resta-nos saber agora se existem outros números, além do número de ouro e do número plástico, que satisfazem a Definição 1.1.

Em 1998, Kruijtzter em [8] conjecturou que existiriam apenas dois números mórficos, a saber, o número de ouro e número plástico, mas foi apenas em 2001 que Jan Aarts, Robbert Fokkink e Godfried Kruijtzter mostraram em [1] que tal conjectura era de fato verdadeira. Para que possamos demonstrar que existem apenas

dois números mórficos, notemos, inicialmente, que um número mórfico é solução das seguintes equações:

$$x^m - x - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^n - x^{n-1} - 1 = 0.$$

Em ambas as equações, o primeiro membro corresponde a um trinômio. Selmer provou em [20], que o trinômio  $x^n - x - 1$ , com  $n \geq 3$ , é irredutível, isto é, não pode ser decomposto como um produto de grau inferior que não seja a unidade e ele próprio. Posteriormente, Tverberg, em [21], estendeu este resultado para trinômios do tipo  $x^m \pm x^k \pm 1$ , com  $m \geq 3$  e  $1 < k < m$ . De modo que este trinômio ou é irredutível ou pode ser escrito como produto de dois polinômios, neste último caso, o primeiro é irredutível (ou constante) e o segundo polinômio tem raízes de módulo 1. Sendo assim, a partir do exposto e das referências [20] e [21], podemos enunciar o seguinte resultado:

**Lema 1.1** *Os polinômios do tipo  $x^m - x^{m-1} - 1$ , com  $m \geq 3$ , são irredutíveis ou escritos como produto de um irredutível pelo polinômio  $x^2 - x + 1$ .*

**Prova:** Se o trinômio  $x^m - x^{m-1} - 1$  for irredutível, não há o que fazer. Entretanto, se o trinômio  $x^m - x^{m-1} - 1$  for redutível, pelo resultado de Tverberg em [21], ele pode ser escrito como um produto de um polinômio irredutível por um polinômio cujas raízes têm módulo igual a 1. Assim sendo, essas raízes satisfazem a equação

$$x^{m-1}(x - 1) - 1 = 0,$$

ou equivalentemente,

$$|x|^{m-1} = \frac{1}{|x - 1|}.$$

Daí, se  $\varrho$  é uma raiz do polinômio  $x^m - x^{m-1} - 1$  e ela tem módulo 1, então sua distância até a origem é 1, e pela equação acima, sua distância ao número real 1 também é 1, isto é,

$$|\varrho| = 1 \quad \text{e} \quad |\varrho - 1| = 1,$$

sendo  $\varrho = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a - 1)^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Veja a figura 1.5.

Logo,

$$\varrho = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

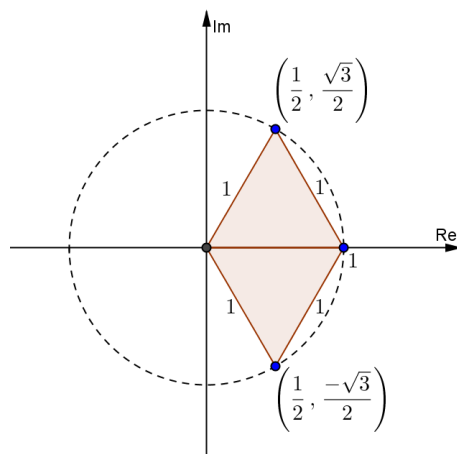


Figura 1.5: Raízes do polinômio  $x^m - x^{m-1} - 1$  cuja distância à origem e ao número real 1 é 1.

e, portanto, o trinômio é divisível por

$$\left[ x - \left( \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \right] \cdot \left[ x - \left( \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \right] = x^2 - x + 1.$$

■

Agora, de posse do Lema 1.1, podemos mostrar o teorema a seguir:

**Teorema 1.1** *Existem dois, e somente dois, números mórficos, a saber, o número de ouro e o número plástico.*

**Demonstração:** O que estamos investigando é se existem números reais maiores que 1 que são raízes dos polinômios  $x^m - x - 1$  e  $x^n - x^{n-1} - 1$ . Para o caso em que  $m = n = 2$ , os polinômios são idênticos e suas raízes são o número de ouro  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e o simétrico do seu inverso  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Entretanto, para o caso em que  $m$  e  $n$  são maiores ou iguais a 3, afim de termos para os polinômios uma raiz comum, os trinômios devem ter um fator comum, mas como o primeiro é irredutível, isto só poderá acontecer se o primeiro dividir o segundo, e pelo Lema 1.1, temos

$$(x^m - x - 1) \cdot (x^2 - x + 1) = x^n - x^{n-1} - 1.$$

Efetuando, portanto, o desenvolvimento do lado esquerdo, temos a identidade

$$x^{m+2} - x^{m+1} + x^m - x^3 - 1 = x^n - x^{n-1} - 1,$$

e a partir dela, constatamos que  $m = 3$  e  $n = 5$ , e, neste caso, a solução é o número plástico. ■

Para mais informações acerca das equações referentes aos números mórnicos, o leitor também pode consultar [19]. Nos próximos dois capítulos trataremos uma abordagem mais detalhada de cada um dos números mórnicos e suas relações com as sequências de Fibonacci e Padovan.

# Capítulo 2

## Número de Ouro

O número de ouro, desde a antiguidade, tem intrigado bastante os homens pelas propriedades aritméticas que possui, assim como pelas muitas propriedades geométricas, trazendo a ideia de beleza e harmonia. O número de ouro tem uma propriedade muito particular chamada ubiquidade, que está relacionada com o poder de estar presente em diversos lugares, de modo que o mesmo aparece no corpo humano, na natureza, nas espirais, na geometria, na arquitetura, na música, etc.

Esse número, também conhecido como Número Áureo, Razão Áurea, Secção Área, Proporção Divina ou Divina Proporção, em 1899, foi indicado pelo matemático americano Mark Barr pela letra grega phi ( $\varphi$ ) em homenagem ao escultor grego Phídias que viveu entre 490 e 430 a.C., pois o mesmo usou tal número em algumas de suas obras, como por exemplo o Phartenon e a estátua de Zeus.

### 2.1 Número de Ouro

Dedicaremos esta seção ao número de ouro, trazendo propriedades aritméticas e geométricas.

**Definição 2.1** *O número de ouro é definido como sendo a raiz real positiva da equação polinomial do 2º grau*

$$x^2 - x - 1 = 0$$

e ele é expresso por

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,6180339887498948482045868\dots$$

Vamos inicialmente resolver a equação  $x^2 - x - 1 = 0$ . O discriminante da mesma é  $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$  e suas raízes são

$$\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ e } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

sendo esta última o número de ouro. É imediato perceber as seguintes relações entre  $\varphi$  e  $\phi$ :

$$\phi = 1 - \varphi \text{ e } \phi = \frac{-1}{\varphi}.$$

### 2.1.1 Propriedades Algébricas

**Proposição 2.1** *O número de ouro pode ser representado pela interação de infinitas raízes quadradas pela expressão:*

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

**Demonstração:** De fato, elevando os dois membros da equação supracitada ao quadrado, temos:

$$\varphi^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \implies \varphi^2 = 1 + \varphi$$

Logo,  $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$  é uma raiz real positiva da equação  $x^2 - x - 1 = 0$ , sendo, portanto, o número de ouro. Tal manipulação só é possível, pois a sequência  $(x_n)$  dada pela recorrência  $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$ , com  $x_1 = 1$  é convergente. Com efeito, a sequência é monótona crescente, pois  $x_1 = 1 < \sqrt{1 + 1} = x_2$  e, supondo  $x_{n-1} < x_n$ , temos  $x_n^2 = 1 + x_{n-1} < 1 + x_n = x_{n+1}^2$ , donde  $x_n < x_{n+1}$ . Além disso,  $(x_n)$  é limitada. É fácil ver que é limitada inferiormente, pois seus termos são positivos. Agora, se  $\varphi$  é a raiz positiva da equação  $x^2 - x - 1 = 0$ , ou seja,  $\varphi^2 = 1 + \varphi$ , tem-se  $x_n < \varphi$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto é verdade para  $n = 1$  e, de  $x_n < \varphi$ , temos  $x_{n+1}^2 = 1 + x_n < 1 + \varphi = \varphi^2$ , logo  $x_{n+1} < \varphi$ . Portanto  $(x_n)$  é convergente. Fazendo  $n \rightarrow \infty$  na igualdade  $x_{n+1}^2 = 1 + x_n$  vê-se que  $\lim x_n = \varphi$ . ■

**Proposição 2.2** *O número de ouro pode ser representado através de frações contínuas pela expressão*

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

**Demonstração:** De fato, pois

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} \implies \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \implies \varphi^2 = \varphi + 1,$$

sendo, portanto,  $\varphi$  a raiz real positiva da equação  $x^2 - x - 1 = 0$ . Tal manipulação só é possível, pois a sequência  $(x_n)$  dada pela recorrência  $x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$ , com  $x_1 = 1$ , é



convergente. Com efeito, observe que  $x_n \geq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pois vale para  $n = 1$  e, supondo a validade para  $n$ , então vale para  $n + 1$ , pois  $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ . Observe também que  $|x_{n+1} \cdot x_n| \geq 2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pois substituindo  $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ , temos

$$|x_{n+1} \cdot x_n| = \left| \left( 1 + \frac{1}{x_n} \right) \cdot x_n \right| = |x_n + 1| \geq 2.$$

Segue então que

$$\left| \frac{1}{x_{n+1} \cdot x_n} \right| \leq \frac{1}{2},$$

multiplicando ambos os membros por  $|x_{n+1} - x_n|$ , temos:

$$\left| \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}x_n} \right| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2},$$

daí,

$$\left| \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right| = \left| \left( \underbrace{1 + \frac{1}{x_{n+1}}}_{x_{n+2}} \right) - \left( \underbrace{1 + \frac{1}{x_n}}_{x_{n+1}} \right) \right| \leq \frac{|x_{n+1} - x_n|}{2}$$

e assim

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \cdot |x_{n+1} - x_n|$$

e conseqüentemente a seqüência é de Cauchy <sup>1</sup> e portanto, convergente <sup>2</sup>. Sendo  $\lim x_n = L$ , temos

$$L = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0$$

daí

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

■

Da identidade  $\varphi^2 = \varphi + 1$ , temos várias outras relações envolvendo potências de  $\varphi$  que usaremos no decorrer deste trabalho, são elas:

---

<sup>1</sup>Para ver mais sobre Sequência de Cauchy, ver página 125 de [9]

<sup>2</sup>Uma outra demonstração para a convergência desta seqüência, ver página 173 de [10]

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \quad (2.1)$$

$$\text{multiplicando (2.1) por } \varphi : \quad \varphi^3 = \varphi^2 + \varphi \quad (2.2)$$

$$\text{multiplicando (2.2) por } \varphi : \quad \varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 \quad (2.3)$$

⋮

$$\text{multiplicando (2.1) por } \varphi^{n-1} : \quad \varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1} \quad (2.4)$$

$$\text{multiplicando (2.1) por } \varphi^n : \quad \varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n \quad (2.5)$$

$$\text{fazendo (2.5) - (2.4) : } \quad \varphi^{n+2} - \varphi^{n+1} = \varphi^{n+1} - \varphi^{n-1} \quad (2.6)$$

$$\text{de (2.6) e (2.4) : } \quad \varphi^{n+2} - \varphi^{n+1} = \varphi^n \quad (2.7)$$

**Proposição 2.3** *Seja  $\varphi$  o número de ouro, as seguintes afirmações envolvendo soma infinita de potências negativas de  $\varphi$  são verdadeiras:*

$$i. \quad \varphi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi^k}$$

$$ii. \quad \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2k}}$$

$$iii. \quad \frac{\varphi^2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{3k}}$$

**Demonstração:** Lembre-se que a série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} = \frac{1}{q^0} + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Assim:

$$i. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi^k} = \frac{1}{\varphi^0} + \frac{1}{\varphi^1} + \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\varphi}} = \frac{\varphi}{\varphi - 1} = \frac{\varphi}{\varphi^{-1}} = \varphi^2$$

$$ii. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{2k}} = \frac{1}{\varphi^0} + \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4} + \frac{1}{\varphi^6} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\varphi^2}} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2 - 1} = \frac{\varphi^2}{(\varphi + 1)(\varphi - 1)} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2 \varphi^{-1}} = \varphi$$

$$iii. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{3k}} = \frac{1}{\varphi^0} + \frac{1}{\varphi^3} + \frac{1}{\varphi^6} + \frac{1}{\varphi^9} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\varphi^3}} = \frac{\varphi^3}{\varphi^3 - 1} = \frac{\varphi^3}{(\varphi - 1)(\varphi^2 + \varphi + 1)} = \frac{\varphi^3}{\varphi^{-1} \cdot 2\varphi^2} = \frac{\varphi^2}{2}$$

■

**Proposição 2.4** *Mais geralmente, temos:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi^{nk}} = \frac{1}{\varphi^0} + \frac{1}{\varphi^n} + \frac{1}{\varphi^{2n}} + \frac{1}{\varphi^{3n}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\varphi^n}} = \frac{\varphi^n}{\varphi^n - 1}$$

### 2.1.2 Propriedades Geométricas

Geometricamente, o número de ouro foi definido pela primeira vez há 300 anos a.C. por Euclides, quando, no livro VI de *Os Elementos de Euclides de Alexandria*, ele chamou esse número de “razão extrema e média”.

**Definição 2.2** *Diz-se que um linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.*

Pela definição acima e observando a Figura 2.1, temos que  $AC > AB > BC$  e

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

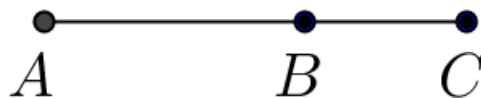


Figura 2.1: Divisão de um segmento na razão extrema e média

Fazendo  $AB = a$  e  $BC = b$ , queremos determinar  $\varphi = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{b}$ . Assim:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

Dividindo a última equação por  $(b^2)$  e fazendo  $w = \frac{a}{b}$ , temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0 \Rightarrow w^2 - w - 1 = 0$$

cujas raízes já determinamos e são  $w_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $w_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Como  $\frac{a}{b}$  é positivo, temos que  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  é a razão áurea.

O matemático grego Endoxus percebeu dentre os retângulos que um deles trazia uma relação entre seus lados de notável harmonia, de modo a chamar mais atenção

dos que os outros, ele o denominou de retângulo áureo. Atualmente, o formato dos cartões de crédito, dos outdoors, de revistas, fotografias, têm como referência o retângulo áureo, por, de alguma forma, se tornar mais belo aos nossos olhos.

**Definição 2.3** *Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo tal que, se dele suprimirmos um quadrado cujo lado é o menor dos lados do retângulo, o retângulo restante será semelhante ao retângulo original. Mais precisamente, o retângulo áureo é o retângulo cujas medidas dos lados estão na razão áurea.*

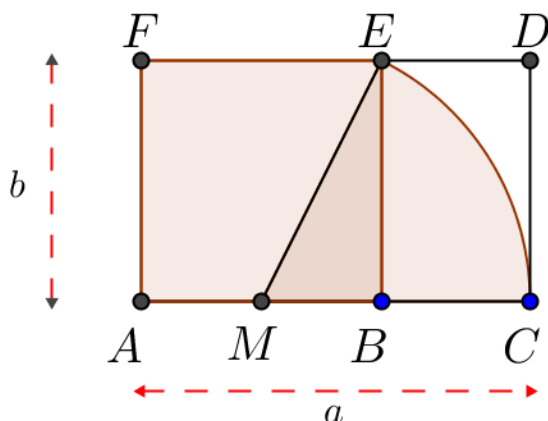


Figura 2.2: Retângulo Áureo

Para construirmos o retângulo áureo, acompanhe a figura 2.2, basta construir um quadrado  $ABEF$  de lado  $b$ , tomar o ponto médio  $M$  do lado  $AB$ , traçar um arco de centro  $M$  e raio  $ME$  determinando o ponto  $C$  no prolongamento de  $\overline{AB}$ , sendo  $\overline{AC}$  e  $\overline{AF}$  os lados do retângulo  $ACDF$  procurado.

Note então que, pelo Teorema de Pitágoras,  $ME = \frac{b\sqrt{5}}{2}$ , logo

$$a = AC = AM + MC = \frac{b}{2} + \frac{b\sqrt{5}}{2} = b \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

sendo assim, a razão  $a/b$  entre os lados do retângulo é igual a razão áurea  $\varphi$ . Veja também que se suprimirmos o quadrado  $ABEF$  do retângulo  $ACDF$ , obtemos o retângulo  $CDEB$  que é semelhante a  $ACDF$ , pois

$$\frac{CD}{BC} = \frac{b}{a-b} = \frac{b}{b \cdot (\varphi - 1)} = \varphi.$$

Prosseguindo assim nessa tarefa, isto é, suprimindo agora um quadrado do retângulo áureo  $BCDE$ , obtemos um outro retângulo áureo interior a este, e assim,

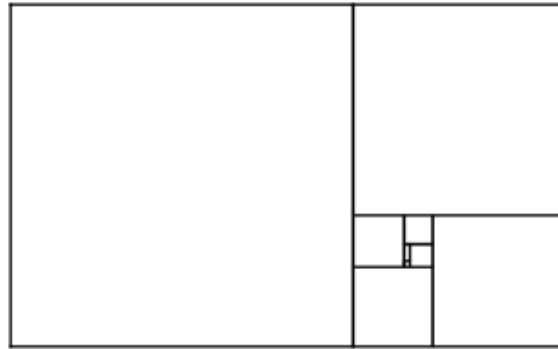


Figura 2.3: Auto-propagação do Retângulo Áureo

realizando este procedimento infinitas vezes, através do que chamamos de *auto-propagação*, construiremos infinitos retângulos áureos como se vê na figura 2.3.

Em ([11], p. 104), a referida sequência de retângulos continuamente decrescentes converge para um ponto que, devido as propriedades “divinas” atribuídas à Razão Áurea, o matemático Clifford A. Pickover se referiu ao mesmo como “O Olho de Deus”.

Veja também que a partir dessa sequência infinita de retângulos áureos, podemos construir uma curva formada pelos infinitos arcos de  $1/4$  de volta inscritos em cada um dos quadrados (com centros nos vértices desses quadrados) e concordantes entre si. A esta curva damos o nome de Espiral Áurea. Ver a figura 2.4.

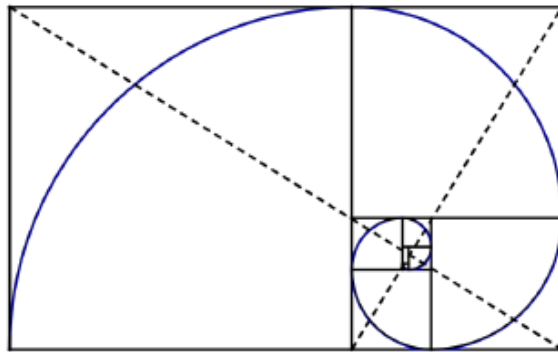


Figura 2.4: Espiral Áurea

Uma propriedade interessante envolvendo o retângulo áureo é vista na proposição a seguir:

**Proposição 2.5** *Seja  $\mathcal{R}$  um retângulo de base  $a$  e altura  $b$  ( $a > b$ ) e seja  $\mathcal{R}'$  o retângulo obtido rotacionando  $\mathcal{R}$  em torno de  $P$  de um ângulo reto no sentido horário*

de modo que  $b$  se torne a base. A condição necessária e suficiente para que os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$  estejam alinhados é que  $\mathcal{R}$  seja um retângulo áureo. (Figura 2.5)

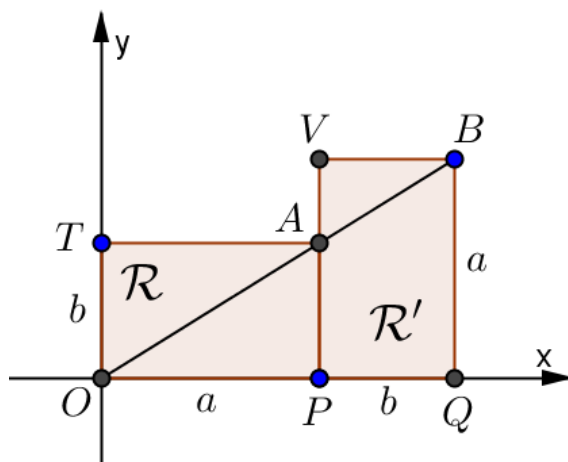


Figura 2.5: Rotação do Retângulo Áureo

**Demonstração:** De fato, os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$  estão alinhados se, e somente se,

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

que nos conduz, como já vimos, a razão  $a/b = \varphi$ , ou seja, o retângulo  $\mathcal{R}$  é um retângulo áureo. ■

Uma outra propriedade envolvendo a razão áurea é dada na proposição a seguir:

**Proposição 2.6** *Consideremos uma elipse de semieixos  $a$  e  $b$  ( $a > b$ ) e dois círculos de raios  $a$  e  $b$ , respectivamente, sendo a elipse e os círculos concêntricos. A fim de que a área da elipse seja equivalente a diferença entre as áreas dos dois círculos é necessário e suficiente que a elipse seja uma elipse de ouro, isto é,  $a/b = \varphi$ .*

**Demonstração:** Sabendo que a área de uma elipse de semieixos  $a$  e  $b$  é dada por  $\pi \cdot a \cdot b$ , queremos que

$$\pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot a^2 - \pi \cdot b^2,$$

que por sua vez nos fornece a equação  $a^2 - ab - b^2 = 0$  e como já vimos, isto nos proporciona  $a/b = \varphi$ . ■

## 2.2 Sequência de Fibonacci

Nascido na Itália, em 1175, na cidade de Pisa, Leonardo Fibonacci foi um grande matemático da Idade Média. Fibonacci não era seu sobrenome propriamente dito,

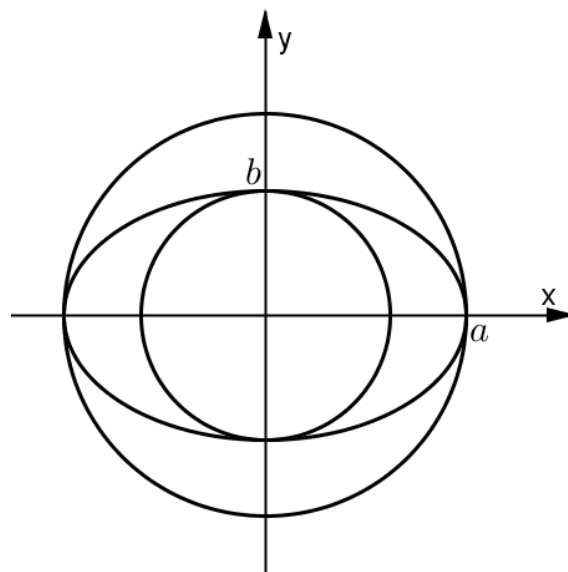


Figura 2.6: Elipse de Ouro

mas o diminutivo de “Fillius Bonacci”, que significava “filho de Bonaccio”. Também conhecido com Leonardo de Pisa, Fibonacci fez muitas viagens, após regressar de uma delas, escreveu as seguintes obras referentes a seus estudos: *Liber Abbaci* (1202), *Practica Geometrie* (1220), *Liber Quadratorum* (1225) e *Flos* (1225).

Segundo [24], no livro *Liber Abacci* de Leonardo, no capítulo 12 (*De solutionibus multarum positarum questionum*), temos o **problema da reprodução de coelhos**, provavelmente oriundo do papiro de Rhind, que motivou a construção da sequência de Fibonacci.

*“Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?”*

Considerando as condições do problema, analisemos o processo de reprodução mês a mês:

- ↪ 1º Mês: O casal inicial é filhote, temos, portanto, um casal de coelho.
- ↪ 2º Mês: Temos ainda o mesmo casal de coelho, mas já adulto, e portanto, fértil.
- ↪ 3º Mês: Temos o casal acima mais um casal de filhotes que é gerado por eles. Assim, temos dois casais de coelhos.

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

- ~ 4º Mês: Temos o casal adulto inicial, mais o casal jovem do mês anterior, que já é fértil, e mais um novo casal do primeiro casal de adultos. Temos assim, três casais de coelhos.
- ~ 5º Mês: Temos o casal inicial de adultos, que produz um novo casal de filhotes, o segundo casal de adultos, que produz outro casal de filhotes e o casal de filhotes produzidos no mês anterior que se torna fértil. Temos, portanto, cinco casais de coelhos.
- ~ 6º Mês: Temos três casais de adultos que produzirão três casais de filhotes, mais dois casais de filhotes. Logo, teremos oito casais de coelhos.
- ~ 7º Mês: Teremos 13 casais de coelhos.

...

Como ilustração da situação descrita, ver figura<sup>3</sup> 2.7.

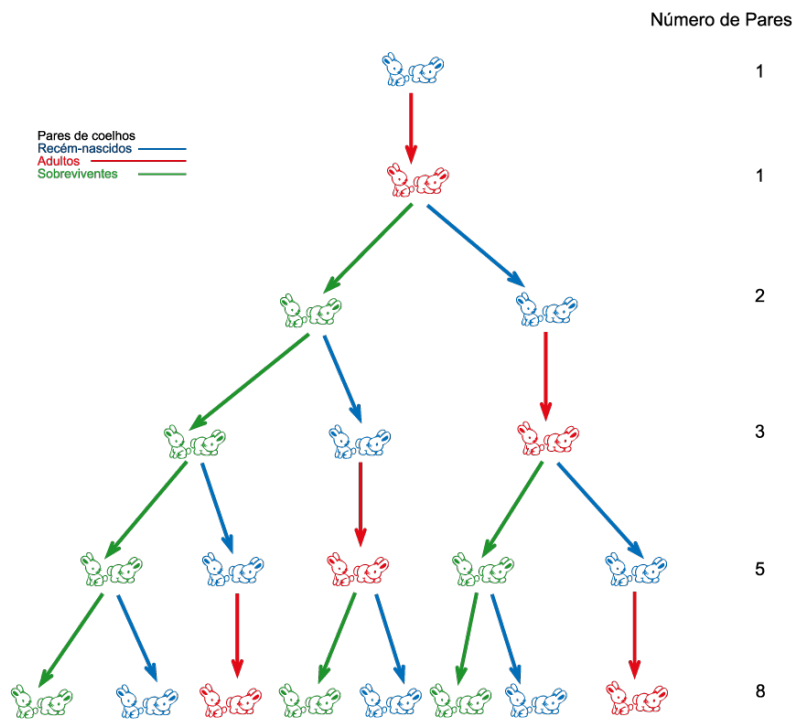


Figura 2.7: Coelhos de Fibonacci

<sup>3</sup>Figura extraída de <http://infinito-matematica.co/curiosidades/>, acesso em 11.03.2015, às 15:33.



## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

Note assim que, a partir do terceiro mês, o número de casais de coelhos num certo mês é exatamente igual à soma do número de casais dos dois meses anteriores. Logo, obtemos a sequência, onde cada elemento representa o número de casais de coelhos e sua posição na sequência representa o mês:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144).$$

E isso levou Fibonacci a definir a sequência que, mais adiante, no século XIX, o matemático francês Edoard Lucas (1842-1891) a denotaria por Sequência de Fibonacci.

**Definição 2.4** *Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida por*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$$

onde os termos dessa sequência chamam-se números de Fibonacci, os quais denotaremos por  $f_n$  como sendo o número de Fibonacci encontrado na posição  $n$ . Note então, que a sequência de Fibonacci pode ser definida recursivamente por:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Podemos ainda fazer uma construção geométrica que ilustra de maneira simples e prática o crescimento dos termos dessa sequência como se pode ver na figura 2.8, de modo que os lados dos quadrados são os termos da sequência de Fibonacci e os retângulos gerados trazem sempre como seus lados dois termos consecutivos da mesma sequência. E assim, pela Proposição 2.13 que provaremos mais adiante, os retângulos gerados convergem para o retângulo áureo.

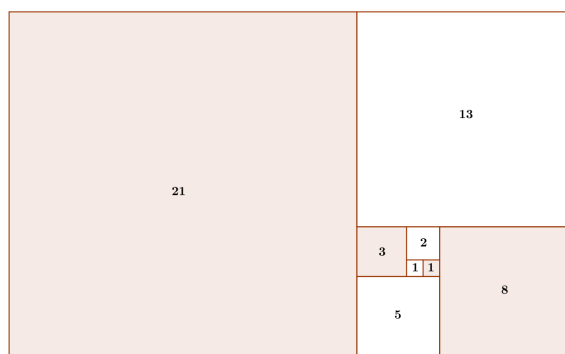


Figura 2.8: Construção geométrica da Sequência de Fibonacci

Observe também que a partir dessa construção podemos construir a Espiral de Fibonacci, tal qual fizemos com a Espiral Áurea. Ver figura 2.9.

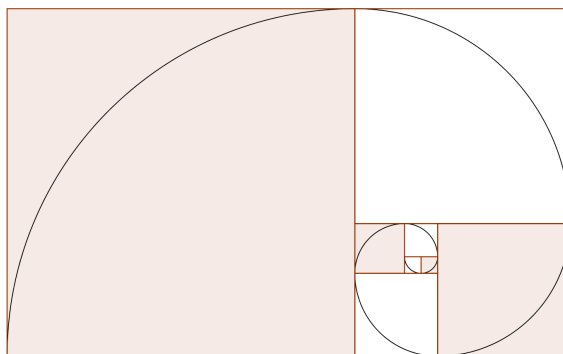


Figura 2.9: Espiral de Fibonacci

### 2.2.1 Propriedades

**Proposição 2.7 (Identidade de Cassini)** <sup>4</sup> Seja  $(f_n)$  a sequência de Fibonacci, então, para todo  $n \geq 2$ , vale a relação

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

**Demonstração:** Faremos essa prova por indução sobre  $n$ .

A identidade é verdadeira para  $n = 2$ , pois

$$f_{2-1} \cdot f_{2+1} - f_2^2 = f_1 \cdot f_3 - f_2^2 = 1 \cdot 2 - 1^2 = 1 = (-1)^2.$$

Temos, portanto, a base da indução. Agora, suponhamos, como hipótese de indução, que a afirmação é verdadeira para  $n = k$ , ou seja,

$$f_{k-1} \cdot f_{k+1} - f_k^2 = (-1)^k,$$

e provemos que ela também vale para  $n = k + 1$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} f_{k+1-1} \cdot f_{k+1+1} - f_{k+1}^2 &= f_k \cdot f_{k+2} - f_{k+1}^2 \\ &= f_k \cdot f_{k+2} - f_{k+1} \cdot f_{k+1} \\ &= f_k \cdot f_{k+2} - f_{k+1} \cdot (f_k + f_{k-1}) \\ &= f_k \cdot f_{k+2} - f_{k+1} \cdot f_k - f_{k+1} \cdot f_{k-1} \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned} f_{k+1-1} \cdot f_{k+1+1} - f_{k+1}^2 &= f_k \cdot f_{k+2} - f_{k+1} \cdot f_k - f_k^2 - (-1)^k \\ &= f_k \cdot f_{k+2} - f_k(f_{k+1} + f_k) + (-1)^{k+1} \\ &= f_k \cdot f_{k+2} - f_k \cdot f_{k+2} + (-1)^{k+1} \\ &= (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Jean Dominique Cassine descobriu essa identidade em 1680, ver [5]

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

Logo, pelo princípio da indução matemática, a identidade de Cassini é verdadeira para todo natural  $n \geq 2$ .

Uma outra demonstração para identidade de Cassini será dada a partir do Teorema 2.4. ■

**Teorema 2.1** *Sejam  $f_n$  os números de Fibonacci, então, dados  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , com  $n \geq 2$ , é verdade que*

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}.$$

**Demonstração:** Uma demonstração clássica para esta proposição seria usando o Princípio da Indução Matemática, todavia, daremos uma demonstração alternativa para a mesma.

Sejam  $y_m = f_{n+m}$  e  $z_m = f_m f_{n-1} + f_{m+1} f_n$ . Temos que  $(y_n)$  e  $(z_n)$  satisfazem a recorrência  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado,  $y_0 = f_n$ ,  $y_1 = f_{n+1}$ ,  $z_0 = 0 \cdot f_{n-1} + 1 \cdot f_n = f_n = y_0$  e  $z_1 = 1 \cdot f_{n-1} + 1 \cdot f_n = f_{n+1} = y_1$ , e portanto, como antes,  $z_n = y_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . ■

**Corolário 2.1** *Do Teorema 2.1 temos:*

a.  $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$

b.  $f_{2n-1} = f_{n-1}^2 + f_n^2.$

c.  $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3.$

**Demonstração:** Fazendo  $m = n$  na expressão do Teorema 2.1 temos:

$f_{n+n} = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} = f_n(f_{n+1} + f_{n-1}) = (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n+1} + f_{n-1}) = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$   
E isso prova (a). Note ainda, que  $f_{2n}$  é divisível por  $f_n$ .

Agora, fazendo  $m = n - 1$  na expressão do Teorema 2.1, temos:

$f_{n+n-1} = f_{n-1}f_{n-1} + f_n f_{n-1+1} = f_{n-1}^2 + f_n^2.$  E isso prova (b).

Entretanto, se fizermos  $m = 2n$  e utilizarmos as relações (a)) e (b) deste corolário, teremos:

$f_{3n} = f_{n+2n} = f_{n-1}f_{2n} + f_n f_{2n+1} = f_{n-1}(f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2) + f_n(f_n^2 + f_{n+1}^2) = f_{n-1}f_{n+1}^2 - f_{n-1}^3 + f_n^3 + f_n f_{n+1}^2 = f_{n+1}^2(f_{n-1} + f_n) + f_n^3 - f_{n-1}^3 = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3.$  ■

**Proposição 2.8** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 2$ , valem as relações*

i.  $\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}}.$

ii.  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1.$

**Demonstração:**

i.  $\frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}} = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{f_{n-1}f_n f_{n+1}} = \frac{f_n}{f_{n-1}f_n f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}}.$

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

$$\text{ii. } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \frac{1}{f_1f_3} + \frac{1}{f_2f_4} + \frac{1}{f_3f_5} + \dots = \left( \frac{1}{f_1f_2} - \frac{1}{f_2f_3} \right) + \left( \frac{1}{f_2f_3} - \frac{1}{f_3f_4} \right) + \left( \frac{1}{f_3f_4} - \frac{1}{f_4f_5} \right) + \dots = \frac{1}{f_1f_2} = 1$$

Obviamente, a manipulação feita nesta última etapa só é permitida, pois a sequência de somas parciais  $(S_n)$  dada por

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{f_{k-1}f_{k+1}}$$

é convergente. Com efeito, note que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{f_1f_3} + \frac{1}{f_2f_4} + \frac{1}{f_3f_5} + \dots + \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} \\ &= \left( \frac{1}{f_1f_2} - \frac{1}{f_2f_3} \right) + \left( \frac{1}{f_2f_3} - \frac{1}{f_3f_4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{f_n f_{n+1}} \end{aligned}$$

E pelo Lema 2.3 que veremos mais adiante, temos que  $\varphi^{n-2} \leq f_n \leq \varphi^n$ , ou seja,

$$\frac{1}{\varphi^n} \leq \frac{1}{f_n} \leq \frac{1}{\varphi^{n-2}},$$

o que implica

$$\frac{1}{\varphi^{2n+1}} \leq \frac{1}{f_n f_{n+1}} \leq \frac{1}{\varphi^{2n-3}},$$

e assim, fazendo  $n \rightarrow \infty$ , temos

$$\frac{1}{f_n f_{n+1}} \rightarrow 0$$

e, portanto,  $S_n \rightarrow 1$ . ■

**Proposição 2.9** *Seja  $(f_n)$  a sequência de Fibonacci. Então, para todo  $n \geq 0$ , valem as propriedades:*

$$\text{i. } \sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}.$$

$$\text{ii. } \sum_{i=1}^n f_{2i} = f_{2n+1} - 1.$$

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

$$\text{iii. } \sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1.$$

**Demonstração:** Da recorrência  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , temos:

$$\begin{array}{rcl} f_3 & = & f_2 + f_1 \\ f_4 & = & f_3 + f_2 \quad \times(-1) \\ f_5 & = & f_4 + f_3 \\ f_6 & = & f_5 + f_4 \quad \times(-1) \\ & \vdots & \vdots \\ f_{2n-1} & = & f_{2n-2} + f_{2n-3} \\ f_{2n} & = & f_{2n-1} + f_{2n-2} \quad \times(-1) \\ f_{2n+1} & = & f_{2n} + f_{2n-1} \\ \hline f_3 + (f_5 - f_4) + (f_7 - f_6) + \dots + (f_{2n+1} - f_{2n}) & = & f_{2n} + f_1 \end{array}$$

Assim,

$$f_2 + f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n} + 1$$

e portanto,

$$f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}$$

e isso prova (i).

Da recorrência inicial, temos ainda que:

$$\begin{array}{rcl} f_3 & = & f_2 + f_1 \quad \times(-1) \\ f_4 & = & f_3 + f_2 \\ f_5 & = & f_4 + f_3 \quad \times(-1) \\ f_6 & = & f_5 + f_4 \\ & \vdots & \vdots \\ f_{2n-1} & = & f_{2n-2} + f_{2n-3} \quad \times(-1) \\ f_{2n} & = & f_{2n-1} + f_{2n-2} \\ f_{2n+1} & = & f_{2n} + f_{2n-1} \quad \times(-1) \\ f_{2n+2} & = & f_{2n+1} + f_{2n} \\ \hline (f_4 - f_3) + (f_6 - f_5) + \dots + (f_{2n+2} - f_{2n+1}) & = & f_{2n+1} - f_1 \end{array}$$

Assim,

$$f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

e portanto,

$$\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}$$

e isso prova (ii). Para provamos (iii) usaremos (i) e (ii). Inicialmente vamos dividir a demonstração em dois casos:

1º *Caso:* Se  $n$  for par, temos:

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

$$\sum_{i=1}^n f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{n-1} + f_n = (f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1}) + (f_2 + f_4 + \dots + f_n) =$$

$$f_n + f_{n+1} - 1 = f_{n+2} - 1.$$

2º Caso: Se  $n$  for ímpar, temos:

$$\sum_{i=1}^n f_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{n-1} + f_n = (f_1 + f_3 + \dots + f_n) + (f_2 + f_4 + \dots + f_{n-1}) =$$

$$f_{n+1} + f_n - 1 = f_{n+2} - 1.$$

E isso encerra a demonstração de (iii).

■

**Proposição 2.10** *Seja  $(f_n)$  a sequência de Fibonacci. Então, para todo  $n \geq 1$ , valem as propriedades:*

$$i. \sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}.$$

$$ii. \sum_{i=1}^{2n} f_i \cdot f_{i+1} = f_{2n+1}^2 - 1.$$

$$iii. \sum_{i=1}^{2n-1} f_i \cdot f_{i+1} = f_{2n}^2.$$

**Demonstração:**

i. Inicialmente, observemos que

$$f_k \cdot f_{k+1} - f_{k-1} \cdot f_k = f_k^2.$$

De fato, pois  $f_k \cdot f_{k+1} - f_{k-1} \cdot f_k = f_k \cdot (f_{k+1} - f_{k-1}) = f_k \cdot f_k = f_k^2$ . Agora vejamos:

$$\begin{array}{rcl} f_1^2 & = & f_1 f_2 \\ f_2^2 & = & f_2 f_3 - f_1 f_2 \\ f_3^2 & = & f_3 f_4 - f_2 f_3 \\ f_4^2 & = & f_4 f_5 - f_3 f_4 \\ & \vdots & = \quad \quad \quad \vdots \\ f_n^2 & = & f_n f_{n+1} - f_{n-1} f_n \\ \hline f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \dots + f_n^2 & = & f_n f_{n+1} \end{array}$$

e portanto  $\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$ .

ii. Podemos reescrever a identidade de Cassini, vista na Proposição 2.7, como

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n \Rightarrow (f_{n+1} - f_n)f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

↓

$$f_{n+1}^2 - f_n^2 - (-1)^n = f_n f_{n+1}.$$

A partir desta última igualdade, podemos fazer:

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &= f_2^2 - f_1^2 - (-1)^1 \\ f_2 f_3 &= f_3^2 - f_2^2 - (-1)^2 \\ f_3 f_4 &= f_4^2 - f_3^2 - (-1)^3 \\ f_4 f_5 &= f_5^2 - f_4^2 - (-1)^4 \\ &\vdots = \vdots \\ f_{2n-1} f_{2n} &= f_{2n}^2 - f_{2n-1}^2 - (-1)^{2n-1} \\ f_{2n} f_{2n+1} &= f_{2n+1}^2 - f_{2n}^2 - (-1)^{2n} \end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações acima, temos:

$$\sum_{i=1}^{2n} f_i \cdot f_{i+1} = f_{2n+1}^2 - f_1^2 = f_{2n+1}^2 - 1.$$

iii. Usando um procedimento análogo ao do item (ii), excluindo apenas a última equação da lista inicial, teremos, ao somar membro a membro,

$$\sum_{i=1}^{2n-1} f_i \cdot f_{i+1} = f_{2n}^2 - f_1^2 + 1 = f_{2n}^2.$$

Estes resultados também poderiam ser demonstrados por indução matemática.

■

Um resultado surpreendente envolvendo soma de números de Fibonacci e números naturais é dado por Zeckendorf<sup>5</sup>, quando ele afirma que qualquer número inteiro positivo pode ser claramente representado como a soma de um ou mais números de Fibonacci distintos, de tal forma que a soma não inclui quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos. A essa representação damos o nome de *representação Zeckendorf* de  $m$ . Por exemplo, a representação Zeckendorf de 100 é  $89 + 8 + 3$ , note

---

<sup>5</sup>Edouard Zeckendorf (1901-1983) nascido na Bélgica, graduou-se em medicina pela Universidade de Liège, serviu ao exército belga no corpo médico e no meio matemático ficou conhecido por seu trabalho envolvendo números de Fibonacci.

também que, apesar de existirem outras formas de representar 100 como a soma de números de Fibonacci, por exemplo,  $89 + 8 + 2 + 1$  ou  $55 + 34 + 8 + 3$ , elas não são representações Zeckendorf, haja vista, 1 e 2 serem números de Fibonacci consecutivos, tal qual, 34 e 55.

**Teorema 2.2 (Zeckendorf)** *Todo número natural pode ser unicamente escrito como a soma de números de Fibonacci de índices maiores que 1 e não consecutivos, mais precisamente, se  $m$  é um número inteiro positivo, existem naturais  $t_i \geq 2$ , com  $t_{j+1} - t_j > 1$ , tal que*

$$m = \sum_{i=1}^r f_{t_i} = f_{t_1} + f_{t_2} + \dots + f_{t_r},$$

onde  $f_n$  é o  $n$ -ésimo número de Fibonacci

**Demonstração:** Vamos dividir o resultado em duas etapas, provaremos primeiro a existência depois a unicidade da representação em questão. Façamos a prova por indução sobre  $m$ . Para  $m = 1, 2, 3$  o resultado é imediato. Suponha então que, para um certo  $n \geq 3$ , todo  $m \leq f_n$  possa ser escrito unicamente da maneira pedida e tome  $f_n < m < f_{n+1}$ . Se  $m = f_{n+1}$  nada há a fazer. Do contrário,

$$0 < m - f_n < f_{n+1} - f_n = f_{n-1} < f_n.$$

Pela hipótese de indução, existem  $r \geq 1$  e inteiros  $1 < t_1 < \dots < t_r < n$  tais que

$$m - f_n = f_{t_1} + \dots + f_{t_r},$$

com  $t_{j+1} - t_j > 1$  para  $1 \leq j < r$ . Daí,  $m = f_{t_1} + \dots + f_{t_r} + f_n$  e afirmamos sem qualquer problema que  $n - t_r > 1$ . De fato, se  $n - t_r = 1$  teríamos

$$m \geq f_n + f_{t_r} = f_n + f_{n-1} = f_{n+1},$$

o que contradiz o fato de  $m$  ser menor que  $f_{n+1}$ . Assim, garantimos, por indução, a existência de uma representação de todo natural como descrito.

Passemos, agora, à prova da unicidade da representação, a qual também será feita por indução sobre  $m$ . Por hipótese de indução podemos supor que se  $m \leq f_n$ , então a representação descrita anteriormente é única. Para garantirmos a unicidade da representação para os  $m \in \mathbb{N}$  tais que  $f_n < m \leq f_{n+1}$ , consideremos dois casos:

a.  $m = f_{n+1}$ : há dois subcasos. Primeiro, suponha

$$f_{n+1} = f_{t_1} + f_{t_2} + \dots + f_{t_r},$$

onde  $r \geq 1$ ,  $1 < t_1 < t_2 < \dots < t_r < n$  e  $t_{j+1} - t_j > 1$  para  $1 \leq j < r$ . Então



$$\begin{aligned}
 f_{n+1} &= f_{t_1} + f_{t_2} + \dots + f_{t_r} < f_{t_1-1} + f_{t_1} + f_{t_2} + \dots + f_{t_r} \\
 &= f_{t_1+1} + f_{t_2} + \dots + f_{t_r} < f_{t_2-1} + f_{t_2} + f_{t_3} + \dots + f_{t_r} \\
 &= f_{t_2+1} + f_{t_3} + \dots + f_{t_r} < f_{t_3-1} + f_{t_3} + \dots + f_{t_r} \quad , \\
 &= \dots \\
 &< f_{t_r+1} \leq f_n < f_{n+1}
 \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Agora, se  $f_{n+1} = f_{t_1} + \dots + f_{t_r} + f_n$ , então

$$f_{t_1} + \dots + f_{t_r} = f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$$

e, pela unicidade da representação de  $f_{n-1}$ , teríamos que outra representação de  $f_{n+1}$  seria  $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ , a qual não satisfaz as condições do enunciado.

- b.  $f_n < m < f_{n+1}$ : mostremos que  $f_n$  é necessariamente um termo da representação. Com efeito, se

$$m = f_{t_1} + f_{t_2} + \dots + f_{t_r},$$

com  $t_r < n$ , então um argumento análogo ao do primeiro subcaso do caso (a) nos daria o absurdo de que  $m \leq f_n$ . Portanto, para uma representação de  $m$  como no enunciado, devemos ter, forçosamente,

$$m = f_{t_1} + f_{t_2} + \dots + f_{t_r} + f_n,$$

com  $t_r < n - 1$ . Daí, como  $m - f_n < f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ , a unicidade da representação de  $m$  segue da unicidade da representação de  $m - f_n$ .

■

**★ Observação 2.1** *Para qualquer inteiro positivo dado, uma representação que satisfaz as condições do teorema de Zeckendorf pode ser encontrada usando um “algoritmo guloso”, escolhendo o maior número possível de Fibonacci em cada etapa. Para mais informações, ver [25].*

### 2.2.2 A Sequência de Fibonacci e o Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal recebeu este nome em homenagem ao matemático e filósofo francês Blaise Pascal (1623-1662), pois foi ele o primeiro escrever um tratado sobre o triângulo aritmético, o *Traité du triangle arithmétique* (1653), nele Pascal descreveu um triângulo tabular infinito e simétrico formado por números inteiros expressos por coeficientes binomias. Este triângulo aritmético também é ficou conhecido como Triângulo de Tartaglia, pseudônimo do italiano Niccolò Fontana (1500-1557), pois foi ele um dos primeiros a publicar na Europa.

Este triângulo aritmético é repleto de propriedades, algumas bem intrigantes, uma delas relaciona os termos da sequência de Fibonacci com a soma de coeficientes

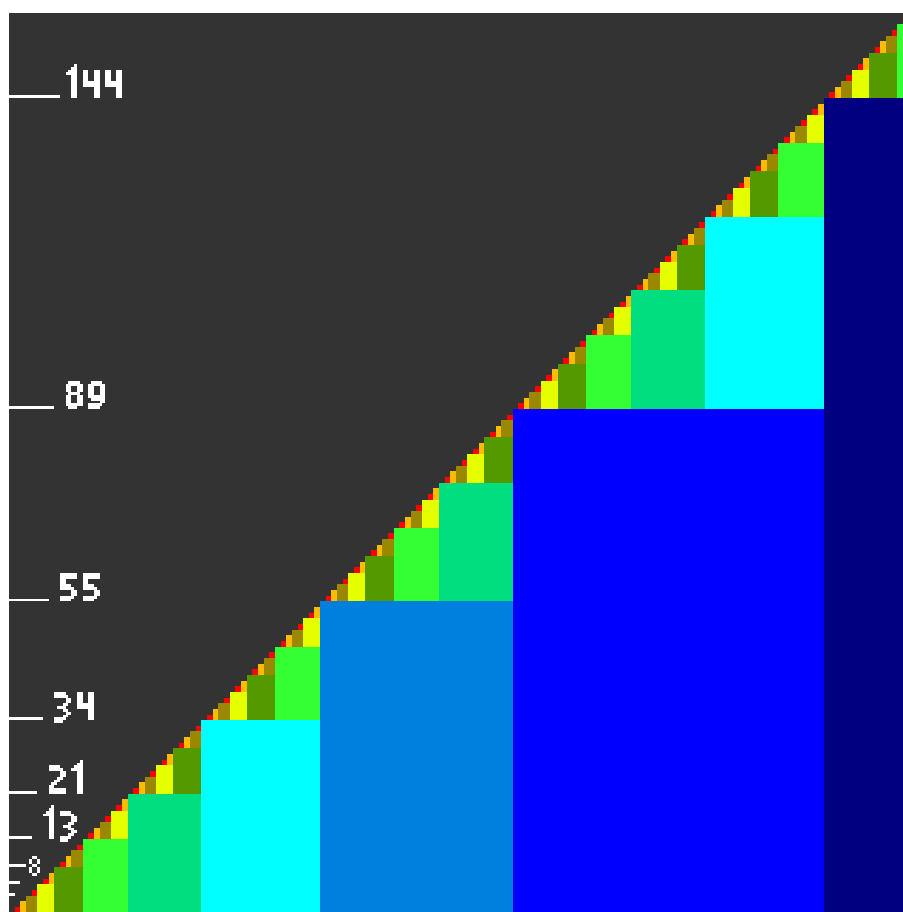


Figura 2.10: Os primeiros 160 inteiros (no eixo X) dividido em representação Zeckendorf. A cor de cada retângulo corresponde a um número de Fibonacci e sua altura corresponde com o valor do número.

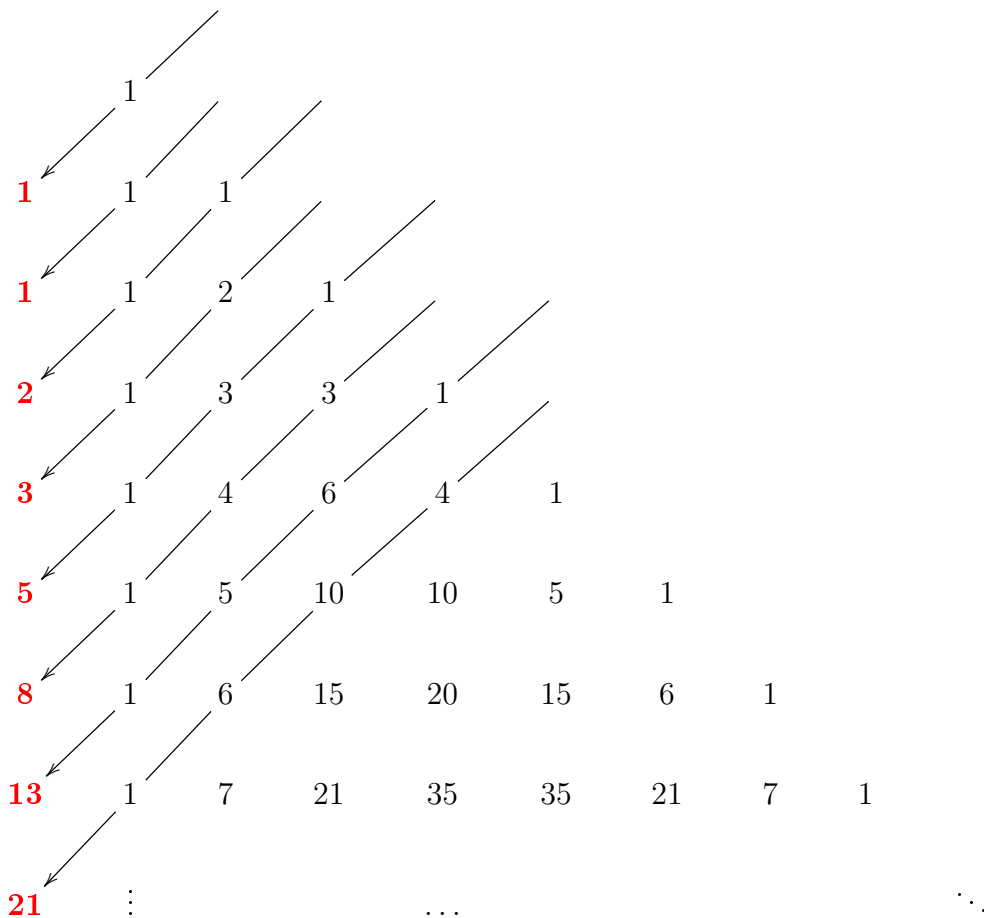
## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

binomiais, a saber, em 1876, F. Édouard A. Lucas mostrou que cada número de Fibonacci  $f_n$  é definido como a soma dos elementos da  $n$ -ésima “diagonal inversa” do Triângulo de Pascal, isto é:

$$f_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{n-j}{j-1} + \binom{n-j-1}{j}$$

onde  $j$  é o maior inteiro que é menor do que ou igual a  $(n-1)/2$ .



**Proposição 2.11 (Teorema de Lucas)** *Para qualquer  $n > 1$ , os termos da sequência de Fibonacci são dados por*

$$f_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k-1},$$

onde  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  representa o maior inteiro menor ou igual a  $\frac{n+1}{2}$ .

Obviamente, quando  $n$  é par, temos  $f_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k-1}$  e quando  $n$  é ímpar, temos

$$f_n = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-1}.$$

**Demonstração:** A prova será feita utilizando o Princípio da Indução Finita. Evidentemente a relação é válida para  $n = 1$  e  $n = 2$ , pois:

$$f_1 = \sum_{k=1}^{\frac{1+1}{2}} \binom{1-k}{k-1} = \binom{0}{0} = 1$$

e

$$f_2 = \sum_{k=1}^{\frac{2}{2}} \binom{2-k}{k-1} = \binom{1}{0} = 1.$$

Suponhamos agora que a relação valha para  $1, 2, \dots, n$ . Queremos mostrar que a mesma também vale para  $n + 1$ , isto é,  $f_{n+1} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} \binom{n+1-k}{k-1}$ , para tanto consideremos os seguintes casos:

1º *Caso:* Para  $n$  par, temos  $n - 1$  e  $n + 1$  ímpares e assim:

$$\begin{aligned} f_{n+1} = f_{n-1} + f_n &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{p=1}^{\frac{n-1+1}{2}} \binom{n-1-p}{p-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{p=1}^{\frac{n}{2}} \binom{(n-1)-p}{p-1} \end{aligned}$$

Fazendo  $p = k - 1$  e considerando  $\binom{\lfloor n/2 \rfloor - 1}{n/2} = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} f_{n+1} = f_{n-1} + f_n &= \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{2}} \binom{n-k}{(k-1)-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n+2}{2}} \left[ \binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{k-2} \right], \end{aligned}$$

pela Relação de Stifel, temos:

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n = \sum_{k=1}^{\frac{(n+1)+1}{2}} \binom{(n+1)-k}{k-1}$$

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

e isso encerra o primeiro caso.

2º *Caso*: Para  $n$  ímpar, temos  $n - 1$  e  $n + 1$  pares e assim:

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{p=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1-p}{p-1}$$

Fazendo  $p = k - 1$ , temos:

$$\begin{aligned} f_{n+1} = f_{n-1} + f_n &= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k}{(k-1)-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \left[ \binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{k-2} \right] \end{aligned}$$

Pela Relação de Stifel, temos:

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n = \sum_{k=1}^{\frac{(n+1)+1}{2}} \binom{(n+1)-k}{k-1}$$

e isso encerra o segundo caso.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita temos que a relação é verdadeira para todos os naturais.

Outra demonstração para este resultado pode ser feita via Polinômios de Bell (ver [3]). ■

Um outro resultado bem interessante envolvendo coeficientes binomiais e os números de Fibonacci é apresentado na proposição a seguir:

**Proposição 2.12** *Seja  $f_n$  os números de Fibonacci, com  $f_0 = 0$  e  $f_1 = 1$ , as identidades a seguir são verdadeiras:*

- a.  $\binom{n}{0}f_0 + \binom{n}{1}f_1 + \binom{n}{2}f_2 + \cdots + \binom{n}{n}f_n = f_{2n}$
- b.  $\binom{n}{0}f_1 + \binom{n}{1}f_2 + \binom{n}{2}f_3 + \cdots + \binom{n}{n}f_{n+1} = f_{2n+1}$

**Demonstração:** Faremos a demonstração das duas proposições ao mesmo tempo por indução sobre  $n$ . Esse artifício é conhecido como indução simultânea. Obviamente as identidades são verdadeiras para  $n = 1$  e  $n = 2$ , pois, para  $n = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \binom{1}{0}f_0 + \binom{1}{1}f_1 &= 1 = f_2 = f_{2 \cdot 1}, \\ \binom{1}{0}f_1 + \binom{1}{1}f_2 &= 2 = f_3 = f_{2 \cdot 1 + 1}, \end{aligned}$$

e para  $n = 2$ , temos

$$\binom{2}{0}f_0 + \binom{2}{1}f_1 + \binom{2}{2}f_2 = 3 = f_4 = f_{2,2},$$

$$\binom{2}{0}f_1 + \binom{2}{1}f_2 + \binom{2}{2}f_3 = 5 = f_5 = f_{2,2+1}.$$

Supondo agora que as relações sejam válidas para um número natural  $n$  maior que 2 e usando a Relação de Stifel, temos para a primeira relação:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0}f_0 + \binom{n+1}{1}f_1 + \binom{n+1}{2}f_2 + \cdots + \binom{n+1}{n}f_n + \binom{n+1}{n+1}f_{n+1} = \\ \binom{n}{0}f_0 + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]f_1 + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]f_2 + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]f_n + \binom{n}{n}f_{n+1} = \\ \left[\binom{n}{0}f_0 + \binom{n}{1}f_1 + \binom{n}{2}f_2 + \cdots + \binom{n}{n}f_n\right] + \left[\binom{n}{0}f_1 + \binom{n}{1}f_2 + \binom{n}{2}f_3 + \cdots + \binom{n}{n}f_{n+1}\right] = \\ f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} = f_{2 \cdot (n+1)}. \end{aligned}$$

Agora, a segunda identidade:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0}f_1 + \binom{n+1}{1}f_2 + \binom{n+1}{2}f_3 + \cdots + \binom{n+1}{n}f_{n+1} + \binom{n+1}{n+1}f_{n+2} = \\ \binom{n}{0}f_1 + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]f_2 + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]f_3 + \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right]f_{n+1} + \binom{n}{n}f_{n+2} = \\ \left[\binom{n}{0}f_1 + \binom{n}{1}f_2 + \binom{n}{2}f_3 + \cdots + \binom{n}{n}f_{n+1}\right] + \left[\binom{n}{0}f_2 + \binom{n}{1}f_3 + \binom{n}{2}f_4 + \cdots + \binom{n}{n-1}f_{n+1} + \binom{n}{n}f_{n+2}\right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2n+1} + \binom{n}{0}(f_0+f_1) + \binom{n}{1}(f_1+f_2) + \binom{n}{2}(f_2+f_3) + \cdots + \binom{n}{n-1}(f_{n-1}+f_n) + \binom{n}{n}(f_n+f_{n+1}) = \\ f_{2n+1} + \left[\binom{n}{0}f_0 + \binom{n}{1}f_1 + \binom{n}{2}f_2 + \cdots + \binom{n}{n}f_n\right] + \left[\binom{n}{0}f_1 + \binom{n}{1}f_2 + \binom{n}{2}f_3 + \cdots + \binom{n}{n}f_{n+1}\right] = \end{aligned}$$

$$f_{2n+1} + f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} + f_{2n+1} = f_{2n+3} = f_{2(n+1)+1}.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, as relações (a) e (b) são verdadeiras para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ . ■

### 2.2.3 Fórmula de Binet

Quando é dada uma recorrência, um problema importante é determinar uma fórmula para o termo geral da sequência, uma fórmula posicional, sem recorrer aos termos anteriores. Nesse sentido nos questionamos se é possível encontrar uma fórmula fechada que expresse um termo qualquer da sequência de Fibonacci em função apenas de sua posição.

A resposta foi dada por Abraham de Moivre<sup>6</sup> (1667-1764) em 1718, mas ficou conhecida como Fórmula de Binet, em homenagem ao matemático francês Jacques Phillipe Marie Binet<sup>7</sup> (1786-1856) que a redescobriu em 1843.

**Teorema 2.3** *Os termos  $f_n$  da sequência de Fibonacci podem ser obtidos pela fórmula posicional*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (2.8)$$

---

<sup>6</sup>Abraham de Moivre (1667-1764) foi um matemático francês que ficou conhecido pela Fórmula de De Moivre, a qual relaciona os números complexos e a trigonometria, e por seus trabalhos sobre distribuição normal e teoria das probabilidades.

<sup>7</sup>Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856) foi um matemático francês precursor nos estudos dos fundamentos da teoria matricial.

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

**Demonstração:** O polinômio característico da fórmula de recorrência  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  é  $x^2 = x + 1$  cujas raízes são  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Então existem constantes  $a$  e  $b$  tais que  $f_n = a \cdot \varphi^n + b \cdot \phi^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Essas constantes devem satisfazer as condições iniciais  $f_1 = f_2 = 1$ , desta forma podemos encontrá-las resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a\varphi + b\phi = 1 \\ a\varphi^2 + b\phi^2 = 1 \end{cases}$$

Assim, multiplicando a primeira equação por  $-\phi$  e somando com a segunda, obtemos:

$$a(\varphi^2 - \varphi\phi) = 1 - \phi \Rightarrow a = \frac{1-\phi}{\varphi^2+1} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Agora, multiplicando a primeira equação por  $-\varphi$  e somando com a segunda, obtemos:

$$b(\phi^2 - \varphi\phi) = 1 - \varphi \Rightarrow b = \frac{1-\varphi}{\phi^2+1} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Portanto,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \phi^n \Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot [\varphi^n - \phi^n]$$

■

Note que, apesar da sequência ter sua definição recursiva extremamente simples, a fórmula posicional se apresenta bastante complicada e mesmo não sendo algo trivial de se visualizar, o lado direito da equação 2.8 é um número inteiro.

**Lema 2.1** *Sejam  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , então  $\left| \frac{\phi}{\varphi} \right| < 1$ .*

**Prova:** Note inicialmente que  $\phi = 1 - \varphi$ ,  $\varphi > 0$  e  $\phi < 0$  e assim:

$$\left| \frac{\phi}{\varphi} \right| = \frac{-\phi}{\varphi} = \frac{\varphi-1}{\varphi} = 1 - \frac{1}{\varphi} < 1. \quad \blacksquare$$

**Proposição 2.13 (Kepler)** *Seja  $(f_n)$  a sequência de Fibonacci e  $\varphi$  o número de ouro, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^{n+1} - \phi^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\varphi^n - \phi^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{\phi}{\varphi}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\varphi} \cdot \left[1 - \left(\frac{\phi}{\varphi}\right)^n\right]} \\ &= \varphi \end{aligned}$$

■

Veja a Tabela 2.1.

$n$	$f_{n+1}$	$f_n$	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$
1	1	1	1
2	2	1	2
3	3	2	1,5
4	5	3	1,666666...
5	8	5	1,6
6	13	8	1,625
7	21	13	1,615384...
8	34	21	1,619047...
9	55	34	1,617647...
10	89	55	1,618181...
11	144	89	1,617977...
12	233	144	1,618055...
13	377	233	1,618025...
14	610	377	1,618037...
15	987	610	1,618032...
16	1597	987	1,618034...
17	2584	1597	1,618033...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n \rightarrow \infty$			$\frac{f_{n+1}}{f_n} \rightarrow \varphi$

Tabela 2.1: Razão entre números de Fibonacci consecutivos

A partir da Fórmula de Binet, podemos demonstrar outros resultados interessantes como os das proposições a seguir:

**Proposição 2.14** *Seja  $f_n$  os números de Fibonacci, então*

$$f_3 + f_6 + f_9 + \dots + f_{3n} = \frac{f_{3n+2} - 1}{2}.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} f_3 + f_6 + f_9 + \dots + f_{3n} &= \frac{\varphi^3 - \phi^3}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^6 - \phi^6}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^9 - \phi^9}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{\varphi^{3n} - \phi^{3n}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\varphi^3 + \varphi^6 + \dots + \varphi^{3n} - \phi^3 - \phi^6 - \dots - \phi^{3n}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{\varphi^{3n+3} - \varphi^3}{\varphi^3 - 1} - \frac{\phi^{3n+3} - \phi^3}{\phi^3 - 1} \right] \end{aligned}$$



## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

Lembrando que  $\varphi^3 = 2\varphi + 1$ ,  $\phi^3 = 2\phi + 1$  e  $\varphi \cdot \phi = -1$ , temos:

$$\begin{aligned}
 f_3 + f_6 + f_9 + \cdots + f_{3n} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{\varphi^{3n+3} - \varphi^3}{2\varphi} - \frac{\phi^{3n+3} - \phi^3}{2\phi} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{\phi\varphi^{3n+3} - \phi\varphi^3 - \varphi\phi^{3n+3} + \varphi\phi^3}{2\varphi\phi} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{-\varphi^{3n+2} + \varphi^2 + \phi^{3n+2} - \phi^2}{-2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\varphi^{3n+2} - \phi^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\varphi^2 - \phi^2}{\sqrt{5}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} (f_{3n+2} - f_2) \\
 &= \frac{1}{2} (f_{3n+2} - 1)
 \end{aligned}$$

■

Também é oportuno analisar a rapidez com que crescem os números de Fibonacci  $f_n$  a medida que o índice  $n$  aumenta. E nesse sentido a Fórmula de Binet também nos é bastante útil. Assim, os lemas seguintes nos darão uma boa comparação dos termos da sequência de Fibonacci com as potências de  $\varphi$ .

**Lema 2.2** *O número de Fibonacci  $f_n$  é o inteiro mais próximo ao número  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ , ou seja, é o inteiro mais próximo do  $n$ -ésimo termo da progressão geométrica cujo primeiro termo é  $\frac{\varphi}{\sqrt{5}}$  e cuja razão é  $\varphi$ .*

**Demonstração:** Basta mostrar que o valor absoluto da diferença entre  $f_n$  e  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$  é sempre menor que  $1/2$ . Mas

$$\left| f_n - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\varphi^n - \phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|\phi|^n}{\sqrt{5}}.$$

Dado que  $\phi = -0,61803\dots$ , temos que  $|\phi| < 1$ , mais ainda,  $|\phi|^n < 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , e portanto  $\frac{|\phi|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$  já que  $\sqrt{5} > 2$ . E assim finalizamos a demonstração.

■

Desta forma, podemos encontrar  $f_n$  por arredondamento, ou através das funções:

$$f_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \text{ ou } f_n = \left\lceil \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rceil, \text{ com } n \geq 0.$$

**Lema 2.3** *Seja  $f_n$  um número de Fibonacci qualquer, então vale a estimativa:*

$$\varphi^{n-2} \leq f_n \leq \varphi^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

**Demonstração:** Provemos as desigualdades pela segunda forma do Princípio da Indução Matemática. Note inicialmente que as desigualdades valem para  $n = 1$  e  $n = 2$ , pois:

$$\text{para } n = 1: \varphi^{1-2} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} < \frac{2}{1+1} = 1 = f_1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi^1$$

$$\text{para } n = 2: \varphi^{2-2} = \varphi^0 = 1 = f_2 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \varphi^2.$$

Agora suponhamos que  $\varphi^{n-2} \leq f_k \leq \varphi^n$ ,  $\forall k \leq n$ . Queremos mostrar que as desigualdades valem para  $n + 1$ . De fato,

$$\varphi^{n-3}(\varphi + 1) = \varphi^{n-2} + \varphi^{n-3} \leq f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \leq \varphi^n + \varphi^{n-1} = \varphi^{n-1}(\varphi + 1),$$

como  $\varphi^2 = \varphi + 1$ , temos

$$\varphi^{n-1} = \varphi^{n-3}\varphi^2 \leq f_{n+1} \leq \varphi^{n-1}\varphi^2 = \varphi^{n+1}.$$

Logo, pelo princípio da indução matemática,

$$\varphi^{n-2} \leq f_n \leq \varphi^n$$

é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

Uma dúvida que pode surgir é se um dado número inteiro positivo  $x$  é ou não um número de Fibonacci. Para responder este questionamento, é necessário atentar para o fato de que  $x$  será um número de Fibonacci se, e somente se, um ou ambos  $5x^2 + 4$  ou  $5x^2 - 4$  é um quadrado perfeito <sup>8</sup>, do contrário, o logaritmo da equação 2.9 sequer é um número racional.

Agora façamos o seguinte rearranjo na Fórmula de Binet:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot [\varphi^n - \phi^n] \implies \sqrt{5} \cdot f_n = \varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n \implies \sqrt{5} \cdot f_n = \varphi^n \pm \frac{1}{\varphi^n},$$

multiplicando a última igualdade por  $4\varphi^n$ , temos:

$$4\varphi^n \cdot f_n \cdot \sqrt{5} = 4\varphi^{2n} \pm 4 \implies 4\varphi^{2n} - 4\varphi^n \cdot f_n \cdot \sqrt{5} = \pm 4,$$

somando  $5 \cdot f_n^2$  a ambos os membros da última equação, temos:

$$4\varphi^{2n} - 4\varphi^n \cdot f_n \cdot \sqrt{5} + 5 \cdot f_n^2 = 4\varphi^{2n} \pm 4 + 5 \cdot f_n^2 \implies (2\varphi^n - f_n\sqrt{5})^2 = 5 \cdot f_n^2 \pm 4,$$

---

<sup>8</sup>não trataremos a demonstração deste resultado nesse texto, para vê-la, o leitor pode consultar [22]

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

extraíndo a raiz quadrada de ambos os membros da última igualdade e, sabendo que  $2\varphi^n - f_n\sqrt{5} \geq 0$  (ver Lema 2.2), temos:

$$\sqrt{5 \cdot f_n^2 \pm 4} = 2\varphi^n - f_n \cdot \sqrt{5} \implies \varphi^n = \frac{f_n \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5 \cdot f_n^2 \pm 4}}{2}$$

e portanto

$$n = \log_{\varphi} \frac{f_n \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5 \cdot f_n^2 \pm 4}}{2}. \quad (2.9)$$

Posto isso, é possível encontrar a posição do número  $x$  na sequência de Fibonacci pela equação 2.9.

### 2.2.4 Potências de $\varphi$

Ainda estabelecendo uma correspondência entre as potências de  $\varphi$  e a sequência de Fibonacci, encontramos uma relação bem curiosa que decompõe potências de  $\varphi$  como combinação linear de potências mais baixas, a saber  $\varphi$  e 1, por exemplo. Para tanto, calculemos algumas potências de  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

- $\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$ ;
- $\varphi^3 = \varphi^2 \cdot \varphi = (1 + \varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi$ ;
- $\varphi^4 = \varphi^3 \cdot \varphi = (1 + 2\varphi)\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1 + \varphi) = 2 + 3\varphi$ ;
- $\varphi^5 = \varphi^4 \cdot \varphi = (2 + 3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1 + \varphi) = 3 + 5\varphi$ ;
- $\varphi^6 = \varphi^5 \cdot \varphi = (3 + 5\varphi)\varphi = 3\varphi + 5\varphi^2 = 3\varphi + 5(1 + \varphi) = 5 + 8\varphi$ ;
- $\varphi^7 = \varphi^6 \cdot \varphi = (5 + 8\varphi)\varphi = 5\varphi + 8\varphi^2 = 5\varphi + 8(1 + \varphi) = 8 + 13\varphi$ ;

Observe agora os dados obtidos organizados na Tabela 2.2.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	...
$\varphi^n$	$0 + \varphi$	$1 + \varphi$	$1 + 2\varphi$	$2 + 3\varphi$	$3 + 5\varphi$	$5 + 8\varphi$	$8 + 13\varphi$	...
$f_n$	$f_0 + f_1\varphi$	$f_1 + f_2\varphi$	$f_2 + f_3\varphi$	$f_3 + f_4\varphi$	$f_4 + f_5\varphi$	$f_5 + f_6\varphi$	$f_6 + f_7\varphi$	...

Tabela 2.2: Relação entre as potências de  $\varphi$  e os números de Fibonacci

Assim percebemos que os termos constantes e os coeficientes de  $\varphi$ , na ordem em que aparecem, correspondem aos termos da sequência de Fibonacci. Sendo assim enunciemos a proposição a seguir:

**Proposição 2.15** Para todo número natural  $n \geq 1$ , vale a identidade

$$\varphi^n = f_{n-1} + f_n \cdot \varphi,$$

onde  $f_n$  representa os números de Fibonacci e, convenientemente,  $f_0 = 0$ .

**Demonstração:** Provemos essa proposição usando a indução matemática sobre  $n$ . É óbvio que a relação vale para  $n = 1$ , pois  $\varphi^1 = f_0 + f_1\varphi = 0 + 1\varphi = \varphi$ . Suponhamos agora que a igualdade seja verdadeira para  $n = k$ , ou seja,  $\varphi^k = f_{k-1} + f_k \cdot \varphi$  e mostremos que a mesma vale para  $n = k + 1$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1} &= \varphi^k \cdot \varphi \\ &= (f_{k-1} + f_k \cdot \varphi)\varphi \\ &= f_{k-1}\varphi + f_k\varphi^2 \\ &= f_{k-1}\varphi + f_k(1 + \varphi) \\ &= f_{k-1}\varphi + f_k + f_k\varphi \\ &= f_k + (f_{k-1} + f_k)\varphi \\ &= f_k + f_{k+1} \cdot \varphi \end{aligned}$$

Portanto  $\varphi^{k+1} = f_k + f_{k+1} \cdot \varphi$  e pelo princípio da indução finita, a igualdade é verdadeira para todo natural  $n \geq 1$ .

Uma outra demonstração para esta relação pode ser feita usando a Fórmula de Binet

$$f_n = \frac{\varphi^n - \phi^n}{\sqrt{5}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} f_{n-1} + f_n \cdot \varphi &= \frac{\varphi^{n-1} - \phi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \varphi \cdot \frac{\varphi^n - \phi^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot [\varphi^{n-1} - \phi^{n-1} + \varphi^{n+1} - \varphi\phi\phi^{n-1}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot [\varphi^{n-1} - \phi^{n-1} + \varphi^{n+1} + \phi^{n-1}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \varphi^n \left( \underbrace{\varphi + \frac{1}{\varphi}}_{\sqrt{5}} \right) \right] \\ &= \varphi^n. \end{aligned}$$

■

### 2.2.5 Função Geradora

*“Uma função geradora é uma corda de estender em que penduramos uma sucessão de números para mostrá-los.”*

Herbert Wilf

No tratamento de sequências de números, uma maneira poderosa de fazê-lo é manipulando séries que geram tais sequências. Esse tratamento teve sua origem nos trabalhos de Abraham De Moivre, onde utilizou as funções geradoras para mostrar como encontrar diretamente os números de Fibonacci, sem ser necessário calcular todos os números que o precedem, sendo também muito usado por Leonhard Euler (1707-1783), Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Nikolaus Bernoulli (1687-1759).

Uma função geradora de números é uma série formal cujos coeficientes codificam informações sobre uma sucessão  $(a_n)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , mais precisamente é uma função  $G(a_n, x)$  definida pela série:

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \dots$$

Nesse sentido, as funções geradoras são expressões fechadas num argumento formal  $x$ , e por serem séries formais, não consideramos nem analisamos sua convergência para todos os valores de  $x$ , entretanto podemos estudá-la num valor específico de  $x$ . Sendo assim, vale observar que as funções geradoras não são realmente funções no sentido usual, ou seja, não estabelece propriamente uma relação entre dois conjuntos.

**Proposição 2.16** *A função geradora da sequência de Fibonacci<sup>9</sup> é*

$$G(f_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

**Demonstração:**

$$G(f_n, x) = f_0 + f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + f_3 \cdot x^3 + f_4 \cdot x^4 + f_5 \cdot x^5 + \dots \quad (2.10)$$

$$x \cdot G(f_n, x) = f_0 \cdot x + f_1 \cdot x^2 + f_2 \cdot x^3 + f_3 \cdot x^4 + f_4 \cdot x^5 + \dots \quad (2.11)$$

$$x^2 \cdot G(f_n, x) = f_0 \cdot x^2 + f_1 \cdot x^3 + f_2 \cdot x^4 + f_3 \cdot x^5 + \dots \quad (2.12)$$

Fazendo 2.10 - [2.11 + 2.12], temos:

$$G(f_n, x) \cdot (1 - x - x^2) = f_0 + (f_1 - f_0) \cdot x + (f_2 - f_1 - f_0) \cdot x^2$$

---

<sup>9</sup>Utilizaremos, por uma questão de conveniência,  $f_0 = 0$ .

$$G(f_n, x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

■

Um exemplo prático para o uso da função geradora da sequência de Fibonacci é um problema da Olimpíada Brasileira de Matemática.

**Exemplo:** [OBM-2003] Na sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 13, 21, 34, 55, ... cada termo, a partir do terceiro termo, é igual à soma dos dois termos anteriores. Quanto vale a soma infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{8}{16} + \dots$$

onde o  $n$ -ésimo termo é o  $n$ -ésimo termo da sequência de Fibonacci dividido por  $2^n$ ?

Para resolvermos este problema, vamos usar a função geradora da sequência de Fibonacci fazendo  $x = 1/2$ , ou seja,

$$G\left(f_k, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{8}{16} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_k}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

◇

**★ Observação 2.2** *A fórmula de Binet para os números de Fibonacci também pode ser demonstrada usando funções geradoras, assim para ver esta demonstração e para um estudo mais aprofundado sobre o funções geradoras, sugiro a leitura [23].*

### 2.2.6 Matrizes e a Sequência de Fibonacci

O que iremos investigar agora são propriedades dos números de Fibonacci em relação com matrizes, isto é, investigaremos propriedades concernentes a sequência de Fibonacci a partir de matrizes especiais de segunda ordem.

Por exemplo, o que ocorreria se calculássemos as potências da matriz  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ?

Vejamos:

$$\begin{aligned}
 Q^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 Q^2 &= Q \times Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 Q^3 &= Q \times Q^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 Q^4 &= Q \times Q^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
 Q^5 &= Q \times Q^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \\
 \vdots & & & & \vdots
 \end{aligned}$$

Pelo que observamos, as potências de  $Q$  trazem consigo os números de Fibonacci, de modo que somos levados a crer que  $Q^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$ , e isso é o que provaremos no teorema seguinte.

**Teorema 2.4** *Seja  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , então  $Q^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$ .*

**Demonstração:** Usaremos o Princípio da Indução Finita sobre  $n$ . Para  $n = 1$  o resultado é verdadeiro, pois:

$$Q^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix}$$

Suponhamos agora que a relação seja válida para  $n = k$ , isto é,

$$Q^k = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix}$$

Devemos mostrar então que a relação vale para  $n = k + 1$ . Sabendo que  $Q^{k+1} = Q^k \times Q$ , temos:

$$\begin{aligned}
 Q^{k+1} = Q^k \times Q &= \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Portanto, o resultado vale para  $n = k + 1$  e pelo Princípio da Indução Finita o relação é verdadeira para todo  $n \geq 1$ . ■

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

A partir deste resultado envolvendo Q-Matriz de Fibonacci podemos obter uma outra demonstração para a Identidade de Cassine como descrito na Proposição 2.7. Passando o determinante na identidade provada no Teorema 2.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix},$$

temos pelo Teorema de Binet para determinantes que

$$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \right) = \det \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow (-1)^n = f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2.$$

Um outra situação muito interessante ocorre quando compomos uma matriz quadrada de ordem dois de modo que o elemento  $a_{11}$  seja um número de Fibonacci qualquer, o elemento seguinte da sequência de Fibonacci seja o elemento  $a_{12}$  da matriz, o próximo número de Fibonacci seja o elemento  $a_{21}$  e o seguinte seja o elemento  $a_{22}$ , isto é, uma matriz do tipo

$$A_n = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+2} & f_{n+3} \end{bmatrix}$$

Daí, temos, por exemplo:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ f_5 & f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \\ A_4 &= \begin{bmatrix} f_4 & f_5 \\ f_6 & f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sendo  $D_n$  o determinante da matriz  $A_n$ , observa-se que os dois possíveis resultados para  $D_n$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$ , são 1 e o  $-1$ , como se vê nos exemplos supracitados:

$$D_1 = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$$

$$D_2 = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1$$

$$D_3 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1$$

$$D_4 = 3 \cdot 13 - 5 \cdot 8 = -1$$

Do exposto temos a afirmação a seguir:



**Afirmção 2.1** *Seja a matriz  $A_n = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+2} & f_{n+3} \end{bmatrix}$ , o determinante  $D_n$  da matriz  $A_n$  assume apenas os valores, 1 e  $-1$ , mais precisamente,  $D_n = (-1)^{n+1}$ . Equivalentemente, vale a relação  $f_n \cdot f_{n+3} - f_{n+1} \cdot f_{n+2} = (-1)^n$ .*

**Prova:** Primeiramente, devemos lembrar da Identidade de Cassine, vista na Proposição 2.7, donde

$$f_n^2 = f_{n-1}f_{n+1} - (-1)^n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+2} & f_{n+3} \end{vmatrix} = f_n \cdot f_{n+3} - f_{n+1} \cdot f_{n+2} \\ &= f_n(f_{n+1} + f_{n+2}) - f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) \\ &= f_n f_{n+1} + f_n f_{n+2} - f_{n+1} f_n - f_{n+1}^2 \\ &= f_n(f_n + f_{n+1}) - f_{n+1}^2 \\ &= f_n^2 + f_n f_{n+1} - f_{n+1}^2 \\ &= f_{n-1} f_{n+1} - (-1)^n + f_n f_{n+1} - f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1}(f_{n-1} + f_n) - f_{n+1}^2 - (-1)^n \\ &= f_{n+1}^2 - f_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

■

Se, entretanto, estendermos a construção que acabamos de fazer para matrizes quadradas de ordem superior ou igual a 3, isto é, se dispusermos os elementos da sequência de Fibonacci numa matriz quadrada de ordem maior do que ou igual a 3, de modo a obedecer a sequência por linhas, de cima para baixo, e em cada linha, da esquerda para a direita, onde o elemento  $a_{11}$  da matriz é um elemento qualquer da sequência de Fibonacci, o determinante dessas matrizes será sempre igual a zero, pois sempre teremos uma fila como combinação linear de outras duas da matriz. Por exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 & 144 \\ 233 & 377 & 610 & 987 \end{bmatrix}$$

### 2.2.7 Aplicações à Combinatória

Nesta seção traremos algumas situações envolvendo contagem cujas soluções podem ser dadas através de recorrências, especialmente a recorrência de Fibonacci. Entretanto, deixamos a cargo do leitor demonstrar tais resultados, para mais, vide [7] e [12].

1. Uma escadaria tem  $n$  degraus. Você sobe tomando um ou dois a cada vez. O número de maneiras que você pode subir é  $f_{n+1}$ .

## 2.2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

---

2. Temos  $n$  reais para gastar. Todo dia compramos um picolé por  $R\$1,00$ , ou um sorvete por  $R\$2,00$ . O número de maneiras que podemos gastar o dinheiro é  $f_{n+1}$ .
3. O número de subconjuntos do conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  que não contém dois inteiros consecutivos é  $f_{n+2}$ .
4. O número de maneiras que podemos cobrir um tabuleiro de xadrez de  $2 \times n$  usando dominós é  $f_{n+1}$ .

## Capítulo 3

# Número Plástico

O holandês Hans van der Laan (1904-1991), começou a estudar arquitetura em 1923, em Delft, sob orientação do professor Granpé-Molière e decidiu abonar os estudos em 1927 para se dedicar a religião, se tornando um monge da ordem beneditina da abadia de Oosterhout. Em 1928, pouco depois de ter abandonado seus estudos de arquitetura, Hans van der Laan construiu um novo sistema de medidas, diferente de todos os outros sistemas de proporções arquitetônicas anteriores em vários aspectos fundamentais. Sua construção tem como base um número irracional que ele denominou de “Número Plástico”, número este, que segundo Padovan ([18], p. 96), foi descoberto em 1924 por Gérard Cordonnier, um francês estudante de arquitetura, o qual chamou-o “Número Radiante” e usou a letra  $\psi$ . Entretanto, foi Hans van der Laan quem explicou como este número se relaciona com a percepção humana de diferenças de tamanhos entre objetos tridimensionais, de modo que sua derivação de uma equação cúbica, e não de uma quadrática como o número de ouro, se torna uma resposta tridimensional ao nosso mundo, sendo sua principal premissa a relação do mesmo ser verdadeiramente estética no sentido grego original, ou seja, que sua preocupação não é “beleza”, mas a clareza de percepção.



Figura 3.1: Hans van der Laan

## 3.1 Número Plástico

**Definição 3.1** O número plástico é definido como sendo a única solução real da equação cúbica

$$x^3 = 1 + x$$

e ele é expresso por

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} \cong 1,3247179572447460259609085\dots$$

**Proposição 3.1** A equação polinomial  $x^3 = 1 + x$  possui uma única raiz real  $\psi$  e duas raízes complexas  $x_1 = \alpha$  e  $x_2 = \beta$  conjugadas dadas por:

$$x_k = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{i \cdot 2k\pi}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{i \cdot 2k\pi}{3}}.$$

Onde a raiz real  $\psi$  é chamada número plástico e é denotada por:

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}}.$$

**Demonstração:** Fazendo a substituição de Viète  $x = z + 1/(3z)$ , temos:

$$\begin{aligned} x^3 - x - 1 = 0 &\iff \left(z + \frac{1}{3z}\right)^3 - z + \frac{1}{3z} - 1 = 0 \\ &\iff z^3 + 3z^2 \frac{1}{3z} + 3z \left(\frac{1}{3z}\right)^2 + \left(\frac{1}{3z}\right)^3 - z - \frac{1}{3z} - 1 = 0 \\ &\iff z^3 + z + \frac{1}{3z} + \frac{1}{27z^3} - z - \frac{1}{3z} - 1 = 0 \\ &\iff z^3 + \frac{1}{27z^3} - 1 = 0 \quad (\text{Multiplicando a equação por } 27z^3) \\ &\iff 27z^6 - 27z^3 + 1 = 0 \quad (\text{Fazendo } z^3 = w) \\ &\iff 27w^2 - 27w + 1 = 0 \quad (\text{Aplicando a Fórmula de Bháskara}) \\ &\iff w = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{18} \\ &\iff z^3 = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^3 - x - 1 = 0 &\iff z_k = \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{2k\pi}{3}}, \quad \text{com } k = 0, 1, 2 \\
 &\iff x_k = \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{2k\pi}{3}} + \frac{1}{3 \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{2k\pi}{3}}} \\
 &\iff x_k = \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{2k\pi}{3}} + \frac{\sqrt[3]{\frac{9 \mp \sqrt{69}}{18}} e^{-\frac{2k\pi}{3}}}{3 \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{2k\pi}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{9 \mp \sqrt{69}}{18}} e^{-\frac{2k\pi}{3}}} \\
 &\iff x_k = \sqrt[3]{\frac{9 \pm \sqrt{69}}{18}} e^{\frac{2k\pi}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9 \mp \sqrt{69}}{18}} e^{-\frac{2k\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

Assim,  $x_k = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} e^{\frac{2k\pi}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} e^{-\frac{2k\pi}{3}}$ , com  $k = 0, 1, 2$ . Logo,  
 para  $k = 0 \implies x_0 = \psi = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}$  (Número Plástico)

para  $k = 1 \implies x_1 = \alpha = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} e^{\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} e^{-\frac{2\pi}{3}}$

para  $k = 2 \implies x_2 = \beta = \sqrt[3]{\frac{9+\sqrt{69}}{18}} e^{\frac{4\pi}{3}} + \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}} e^{-\frac{4\pi}{3}}$

Note que  $x_1 = \alpha$  e  $x_2 = \beta$  são números complexos conjugados, isto é,  $\beta = \bar{\alpha}$ .

■

**★ Observação 3.1** *Este resultado também poderia ser demonstrado usando a famosa fórmula de Cardano, onde, dada uma equação do tipo  $x^3 + px + q = 0$ , suas raízes são dadas por  $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ . Assim, na equação  $x^3 - x - 1 = 0$ , temos:*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-1)}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}}$$

Daí,

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(-1)}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(-1)}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{23}}{3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{23}}{3}} \dots$$

$$x = \psi = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}}$$

### 3.1. NÚMERO PLÁSTICO

A soma das raízes cúbicas reais indicadas fornece a raiz real da equação  $x^3 - x - 1 = 0$ . As raízes complexas são obtidas combinando apropriadamente as raízes cúbicas complexas.

★ **Observação 3.2** Analisando o gráfico da função polinomial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3 - x - 1$ , temos:

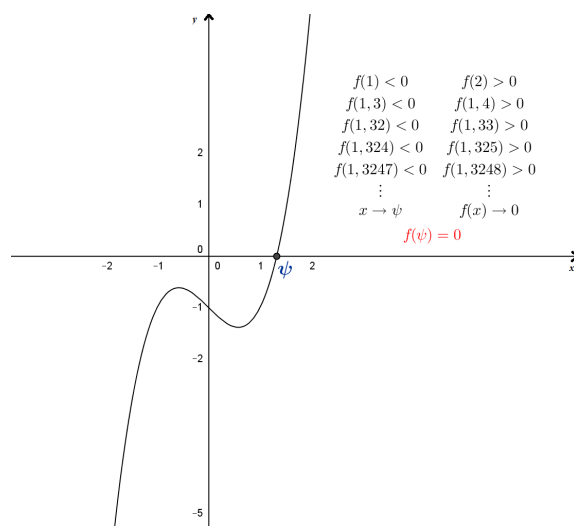


Figura 3.2: Gráfico da função dada por  $f(x) = x^3 - x - 1$

#### 3.1.1 Propriedades Algébricas

**Proposição 3.2** O número plástico pode ser representado através da interação de infinitas raízes cúbicas pela expressão:

$$\psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}$$

**Demonstração:** De fato, elevando os dois membros da equação supracitada ao cubo, temos:

$$\psi^3 = 1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}} \implies \psi^3 = 1 + \psi$$

Logo,  $\psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}$  é um número real que satisfaz a equação  $x^3 = 1 + x$  e, portanto, é o número plástico. Tal manipulação só é possível, pois a sequência  $(x_n)$  dada pela recorrência  $x_n = \sqrt[3]{1 + x_{n-1}}$ , com  $x_1 = 1$  é convergente. Com efeito, a sequência é monótona crescente, pois  $x_1 = 1 < \sqrt[3]{1 + 1} = x_2$  e, supondo  $x_{n-1} < x_n$ , temos  $x_n^3 = 1 + x_{n-1} < 1 + x_n = x_{n+1}^3$ , donde  $x_n < x_{n+1}$ . Além disso,  $(x_n)$  é limitada.

É fácil ver que é limitada inferiormente, pois seus termos são positivos. Agora, se  $\psi$  é a raiz real positiva da equação  $x^3 - x - 1 = 0$ , ou seja,  $\psi^3 = 1 + \psi$ , tem-se  $x_n < \psi$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto é verdade para  $n = 1$  e, de  $x_n < \psi$ , temos  $x_{n+1}^3 = 1 + x_n < 1 + \psi = \psi^3$ , logo  $x_{n+1} < \psi$ . Portanto  $(x_n)$  é convergente. Fazendo  $n \rightarrow \infty$  na igualdade  $x_{n+1}^3 = 1 + x_n$ , vê-se que  $\lim x_n = \psi$ . ■

★ **Observação 3.3** Não traremos aqui o número plástico na forma de fração contínua, como fizemos no capítulo anterior para o número de ouro, pois a mesma não pode ser periódica, tendo em vista que Joseph Louis Lagrange (1736-1813) provou que um número é irracional quadrático <sup>1</sup> se, e somente se, sua decomposição em frações contínuas é periódica (não necessariamente periódica pura).

Da indentidade  $\psi^3 = 1 + \psi$ , temos:

$$\psi^3 = \psi + 1 \quad (3.1)$$

multiplicando (3.1) por  $\psi$  :  $\psi^4 = \psi^2 + \psi \quad (3.2)$

multiplicando (3.2) por  $\psi$  :  $\psi^5 = \psi^3 + \psi^2 \quad (3.3)$

sustituindo (3.1) em (3.3) :  $\psi^5 = \psi^2 + \psi + 1 \quad (3.4)$

fazendo (3.3) - (3.2) :  $\psi^5 - \psi^4 = \psi^3 - \psi$

de (3.1) :  $\psi^5 - \psi^4 = 1 \quad (3.5)$

dividindo ambos os membros por  $\psi^4$  :  $\psi^{-4} = \psi - 1 \quad (3.6)$

Mais geralmente, podemos obter as seguintes relações:

$$\psi^{n+3} = \psi^{n+1} + \psi^n \quad (3.7)$$

$$\psi^{n+5} = \psi^{n+2} + \psi^{n+1} + \psi^n \quad (3.8)$$

onde a equação 3.7 pode ser ilustrada no gráfico da figura 3.3.

**Proposição 3.3** O número plástico  $\psi$  é a única raiz real da função polinomial  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = x^5 - x^4 - 1$ .

**Demonstração:** Note inicialmente que, da equação 3.5, temos:

$$\psi^5 - \psi^4 = 1 \implies \psi^5 - \psi^4 - 1 = 0 \implies g(\psi) = 0,$$

isso mostra que  $\psi$  é raiz de  $g$ . Fatorando  $g(x)$ , temos:

$$g(x) = x^5 - x^4 - 1 = \overbrace{(x^3 - x - 1)}^{f(x)} \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\delta(x)}$$

---

<sup>1</sup>Um número irracional quadrático é um número algébrico irracional que é solução de uma equação quadrática de coeficientes racionais

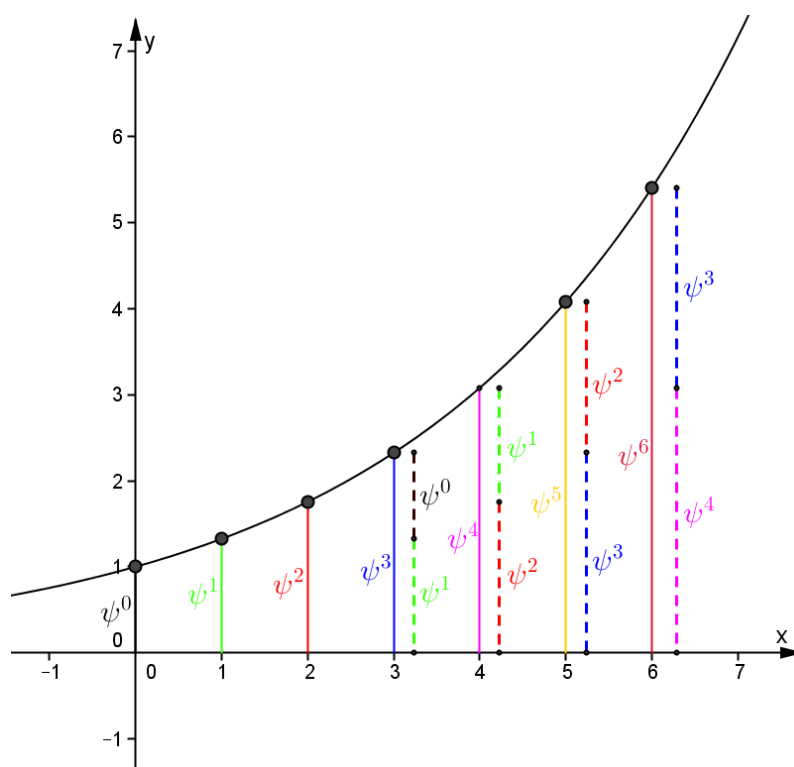


Figura 3.3: Gráfico da função  $f(x) = \psi^x$

Ora, sabemos que  $\psi$  é a única raiz real de  $f(x)$  e a função  $\delta(x)$  não tem raiz real, pois seu discriminante é negativo ( $\Delta = (-1)^2 - 4.1.1 = -3 < 0$ ), logo  $\psi$  é a única raiz real de  $g(x)$ . ■

Observe agora o gráfico da figura 3.4.

**Proposição 3.4** *Seja  $\psi$  o número plástico, as seguintes afirmações envolvendo soma infinita de potências negativas de  $\psi$  são verdadeiras:*

$$i. \psi^5 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi^k}$$

$$ii. \psi^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi^{2k}}$$

$$iii. \psi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi^{3k}}$$



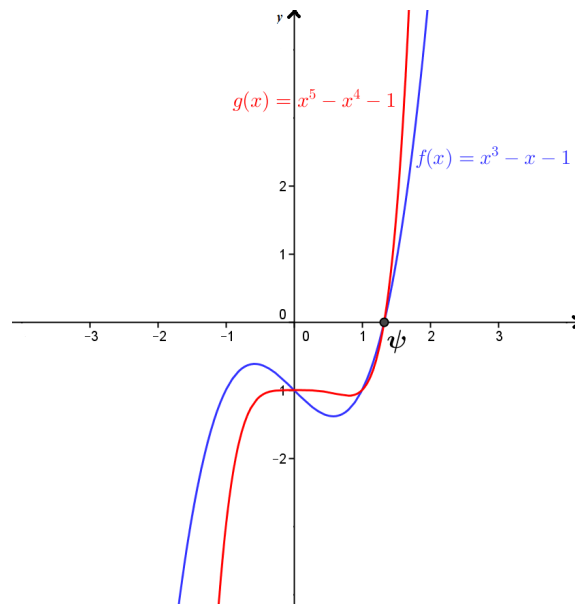


Figura 3.4: Gráfico das funções dadas por  $f(x) = x^3 - x - 1$  e  $g(x) = x^5 - x^4 - 1$

**Demonstração:** Lembre-se que a série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k} = \frac{1}{q^0} + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Assim:

i. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi^k} = \frac{1}{\psi^0} + \frac{1}{\psi^1} + \frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{\psi^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\psi}} = \frac{\psi}{\psi - 1} = \frac{\psi}{\psi^{-4}} = \psi^5$$

ii. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi^{2k}} = \frac{1}{\psi^0} + \frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{\psi^4} + \frac{1}{\psi^6} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\psi^2}} = \frac{\psi^2}{\psi^2 - 1} = \frac{\psi^2}{(\psi + 1)(\psi - 1)} = \frac{\psi^2}{\psi^3 \psi^{-4}} = \psi^3$$

iii. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi^{3k}} = \frac{1}{\psi^0} + \frac{1}{\psi^3} + \frac{1}{\psi^6} + \frac{1}{\psi^9} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\psi^3}} = \frac{\psi^3}{\psi^3 - 1} = \frac{\psi^3}{\psi} = \psi^2$$

■

**Proposição 3.5** *Mais geralmente, temos:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi^{nk}} = \frac{1}{\psi^0} + \frac{1}{\psi^n} + \frac{1}{\psi^{2n}} + \frac{1}{\psi^{3n}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\psi^n}} = \frac{\psi^n}{\psi^n - 1}$$

### 3.1.2 Propriedades Geométricas

O número plástico também pode ser caracterizado geometricamente. Hans van der Laan tinha como base para suas pesquisas a razão áurea, um antigo axioma estético. Entretanto, esta razão funciona bem no plano (em duas dimensões), mas não consegue gerar relações harmoniosas dentro e entre objetos tridimensionais. Assim, ele eleva a ideia do número de ouro em termos de dimensões espaciais, tendo como referência a partir de então o número plástico. No capítulo anterior, fizemos a divisão de um segmento  $\overline{AB}$  em duas partes na média e extrema razão, Van der Laan dividiu o segmento  $\overline{AB}$  de modo semelhante, mas em três partes, de modo que a divisão fosse feita, não na razão áurea, mas no que chamarei de razão plástica.

**Definição 3.2** *Um segmento  $\overline{AB}$  é dividido em três partes pelos pontos  $C$  e  $D$  na razão plástica quando*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BD}.$$

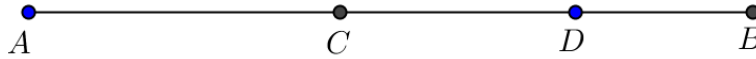


Figura 3.5: Divisão de um segmento em três partes por Van der Laan

Fazendo  $AB = 1$ ,  $AD = w$ ,  $BC = z$ , teremos  $AC = 1 - z$ ,  $BD = 1 - w$  e  $CD = z - 1 - w$ . Substituindo na equação da Definição 3.2, temos:

$$\frac{1}{w} = \frac{w}{z} = \frac{z}{1-z} = \frac{1-z}{z-1-w} = \frac{z-1+w}{1-w},$$

daí,  $w^2 = z$  e  $z^2 = w(1-z)$ , logo:

$$w^4 = w(1-w^2) \Rightarrow w^3 = 1-w^2$$

dividindo a última equação obtida por  $(w^3)$  e fazendo  $\frac{1}{w} = x$ , temos a equação plástica

$$x^3 - x - 1 = 0$$

cujas únicas raízes reais são o número plástico  $\psi$  e assim

$$\psi = \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{BD},$$

isto é, a razão entre dois segmentos dos determinados, de modo que o segundo seja o imediatamente menor que o primeiro escolhido é a constante plástica  $\psi$ .

### 3.1. NÚMERO PLÁSTICO

Ao passo que construímos o retângulo áureo, que está intimamente ligado ao número de ouro, podemos construir o que chamaremos de pentágono plástico.

Tomemos inicialmente um paralelogramo  $ABCD$  de lados medindo  $1 + \psi$ ,  $\psi^2 + \psi$ ,  $\psi^3 = 1 + \psi$  e  $\psi^4 = \psi^2 + \psi$  e o ângulo  $\widehat{ABC}$  de medida  $60^\circ$  e em seguida retiramos o triângulo equilátero  $FBG$  de lado  $\psi$ . Temos assim o pentágono plástico  $AFGCD$  como ilustrado na figura 3.6.

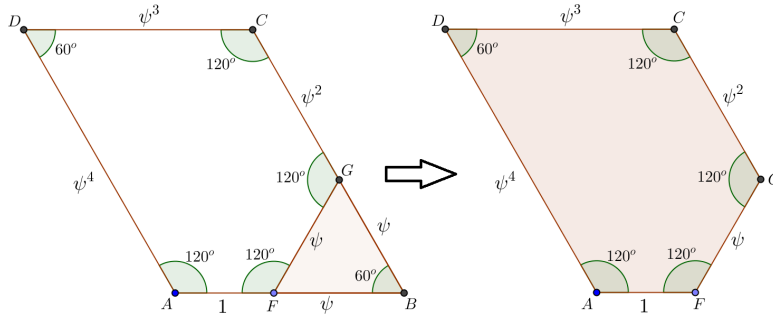


Figura 3.6: Construção do Pentágono Plástico

**Definição 3.3** *O pentágono plástico é o pentágono que possui um ângulo interno medindo  $60^\circ$  e os demais medindo  $120^\circ$ , além disso, os seus lados formam uma progressão geométrica crescente de razão  $\psi$ .*

Uma característica presente no pentágono plástico é que, se dele suprimirmos um triângulo equilátero, obtemos um novo pentágono plástico, obviamente, semelhante ao primeiro. E este procedimento pode ser realizado infinitas vezes, gerando a auto-propagação do pentágono plástico (ver figura ). Na figura 3.7, tomamos como exemplo o pentágono plástico  $HFGCD$  de lados  $\psi$ ,  $\psi^2$ ,  $\psi^3$ ,  $\psi^4$  e  $\psi^5 = \psi^4 + 1$ , suprimindo o triângulo equilátero  $HAD$  de lado  $\psi^4$ , obtemos o também pentágono plástico  $AFGCD$  de lados  $1$ ,  $\psi$ ,  $\psi^2$ ,  $\psi^3$  e  $\psi^4$ . A semelhança dos dois pentágonos se dá pelo fato deles possuírem ordenadamente os mesmos ângulos e seus lados correspondentes serem proporcionais.

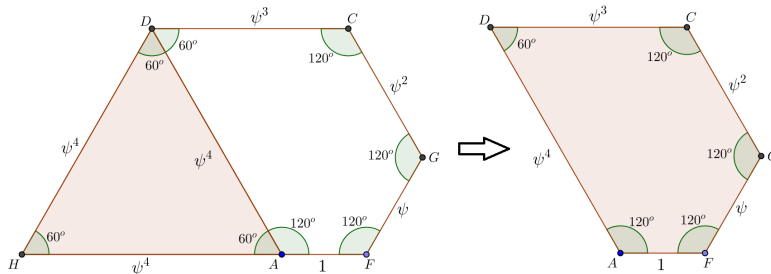


Figura 3.7: Construção de um pentágono plástico a partir de outro

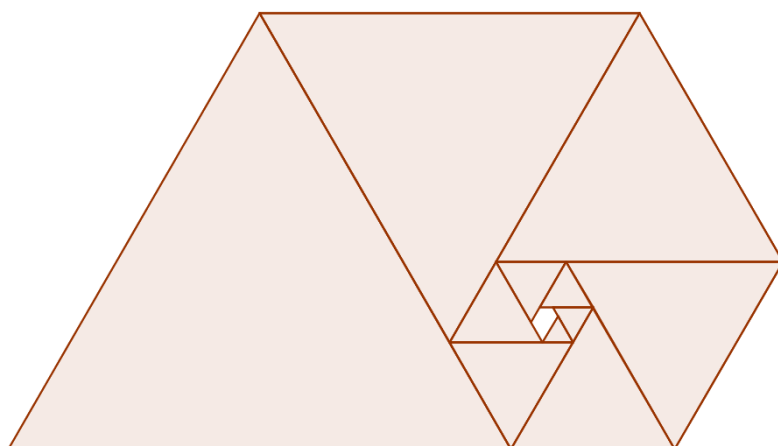


Figura 3.8: Auto-propagação do pentágono plástico

Observe ainda que a partir dessa sequência de pentágonos plásticos, podemos construir uma curva formada por arcos de  $1/6$  de volta com centro nos vértices dos triângulos equiláteros suprimidos passando pelos outros dois vértices e concordantes entre si como ilustra a figura 3.9. Denotaremos essa curva por Espiral Plástica.

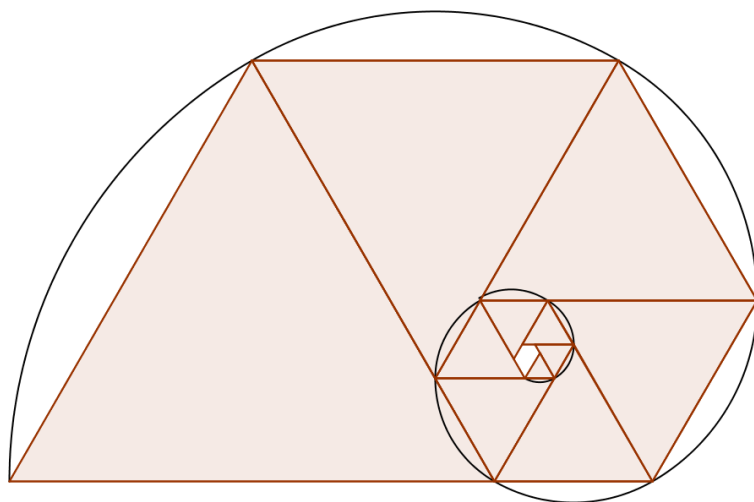


Figura 3.9: Espiral Plástica

**Definição 3.4** Definimos como paralelepípedo plástico, o paralelepípedo reto-retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com  $a > b > c$ , tais que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \psi.$$

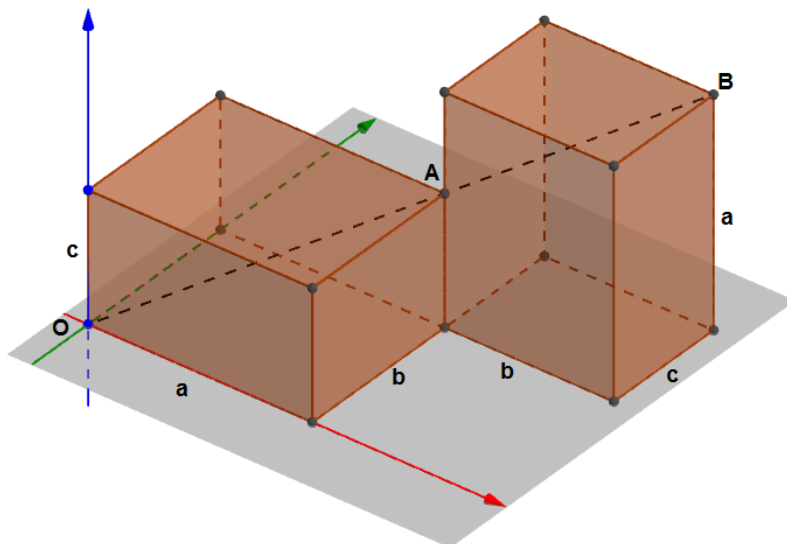


Figura 3.10: Paralelepípedo Plástico

**Proposição 3.6** *Seja um paralelepípedo  $\mathcal{P}$  de arestas  $a$ ,  $b$  e  $c$  ( $a \geq b \geq c$ ) de modo que  $a$  e  $b$  são os lados do retângulo da base. Seja  $\mathcal{P}'$  o paralelepípedo obtido rotacionando o paralelepípedo  $\mathcal{P}$  de modo que  $c$  e  $b$  sejam os lados do retângulo da base, como mostra a figura 3.10. A fim de que os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{P}'$  estejam alinhados é necessário e suficiente que*

$$\frac{a+b}{a} = \frac{b+c}{b} = \frac{a}{c}. \quad (3.9)$$

**Demonstração:** O resultado pode ser facilmente demonstrado utilizando semelhança de triângulos. ■

Note agora que a equação 3.9 é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ bc + c^2 = ab \end{cases}.$$

Dividindo a segunda equação do sistema por  $(c^2)$ , temos:

$$\frac{b}{c} + 1 = \frac{ab}{c^2} \Rightarrow \frac{b}{c} + 1 = \frac{acb}{c^3} \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^3 = 1 + \frac{b}{c},$$

resultando, portanto, na equação plástica de incógnita  $\frac{b}{c}$ , cuja solução real é o número plástico  $\psi$ . Assim:

$$\frac{b}{c} = \psi \Rightarrow b = \psi \cdot c$$

e, conseqüentemente,

$$a = \psi \cdot b = \psi \cdot c^2,$$

isto é, as arestas  $a$ ,  $b$  e  $c$  do paralelepípedo  $\mathcal{P}$  são tais que

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \psi.$$

**Proposição 3.7** *Se considerarmos uma elipse de semieixos  $a$  e  $b$  ( $a > b$ ), o volume do elipsoide gerado após a rotação da elipse em torno do eixo maior é equivalente ao volume da porção do espaço compreendida entre duas esferas concêntricas com a elipse de raios  $a$  e  $b$  se, e somente se,  $\frac{a}{b} = \psi$ .*

**Demonstração:** Sabendo que o volume de um elipsoide de semieixos  $a$ ,  $b$  e  $c$  é dado por  $\frac{4}{3}\pi abc$ , temos pelas condições impostas

$$\frac{4}{3}\pi ab^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi b^3,$$

dividindo toda a equação por  $\frac{4}{3}\pi b^3$  temos a equação plástica de incógnita  $\frac{a}{b}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

cuja solução real é o número plástico  $\psi$ , isto é,  $\frac{a}{b} = \psi$ . ■

## 3.2 Sequência de Padovan

Nascido em 1935, o britânico Richard Padovan estudou arquitetura na Associação de Arquitetura de Londres (1952-1957). Desde então, ele tem aliado a prática, a escrita e ensino sobre arquitetura. Ela acredita, no entanto, que seus conhecimentos arquitetônicos realmente começaram quando ele se deparou com os trabalhos de Van der Lans, em 1974. Sua tradução do trabalho Architectonic Space (Espaço Arquitetônico, tradução livre) de Van der Laan foi publicada em 1983, seguida pela monografia Dom Hans van der Laan, Modern Primitive, em 1994. Em 1999, ele publicou o livro Proportion: Science, Philosophy, Architecture.

A sequência de Padovan, cujo nome é em sua homenagem, apesar dele mesmo ter atribuído, em 1994, em “Dom Hans van der Laan, Modern Primitive”, a Van der Laan, é uma sucessão de números com propriedades semelhantes aos números de Fibonacci, de tal forma que ela está relacionada com o número plástico tal qual a

### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

sequência de Fibonacci se relaciona com a razão áurea. Assim, será exibida e provada uma coleção de relações envolvendo os números de Padovan, de modo que possamos fazer um paralelo com as relações entre os números de Fibonacci e o número de ouro vistos no capítulo anterior.

**Definição 3.5** *Chama-se sequência de Padovan a sequência definida por*

$$(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, \dots)$$

onde os termos dessa sequência chamam-se números de Padovan, os quais denotaremos por  $P_n$  como sendo o número de Padovan encontrado na posição  $n$ . Note então, que a sequência de Padovan pode ser definida recursivamente por:

$$\begin{cases} P_0 = P_1 = P_2 = 1 \\ P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \forall n \geq 3. \end{cases}$$

Podemos ainda fazer uma construção geométrica que ilustra de maneira simples e prática o crescimento dos termos dessa sequência como se pode ver na figura 3.11 de modo que os lados dos triângulos são os termos da sequência de Padovan e os pentágonos gerados ao final de cada etapa trazem sempre como seus lados termos consecutivos da mesma sequência. E assim, pela Proposição 3.13, que provaremos mais adiante, os pentágonos gerados convergem para o pentágono plástico.

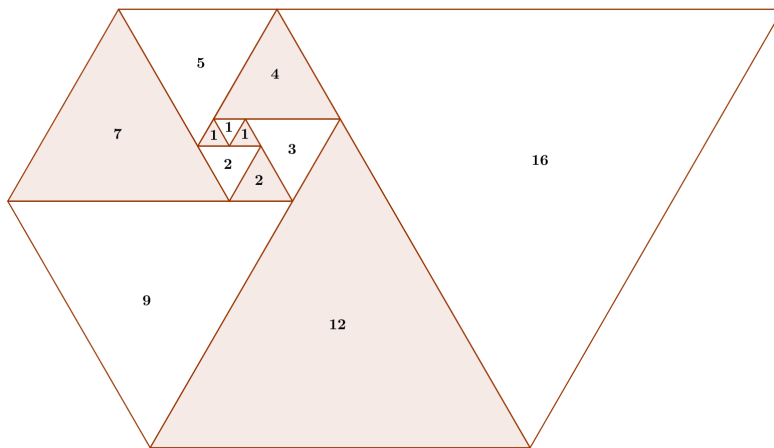


Figura 3.11: Construção geométrica da Sequência de Padovan

Observe ainda que a partir dessa construção podemos construir a Espiral de Padovan, tal qual fizemos com a Espiral Plástica. Ver figura 3.12.

Outra construção que nos proporciona uma interpretação geométrica da sequência de Padovan é descrita em [4]. A partir de um cubo de aresta 1 construímos

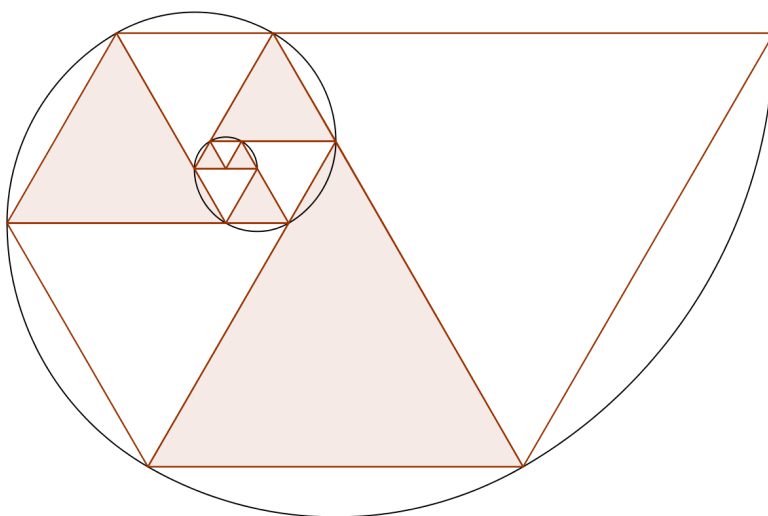


Figura 3.12: Espiral de Padovan

uma sucessão de caixas (paralelepípedos) por um procedimento como mostra a figura 3.13. Primeiro observe que as caixas são adicionadas seguindo a sequência: “à direita”, “à frete”, “abaixo”, “à direita”, “à frete”, “abaixo”, ... Começando com um cubo, adicionamos outro cubo à direita e obtemos uma caixa  $1 \times 1 \times 2$ . A este adicionamos à frente outra  $1 \times 1 \times 2$  e obtemos uma casa  $1 \times 2 \times 2$ . E assim sucessivamente.

Vamos admitir que as dimensões estão em ordem crescente, os seja, da forma  $a \times b \times c$ , com  $a \leq b \leq c$ . Assim, podemos organizar os dados numa tabela, como descrito na Tabela 3.1.

Caixa Inicial	Caixa Adicionada	Caixa Final	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{b}$
$1 \times 1 \times 1$	$1 \times 1 \times 1$	$1 \times 1 \times 2$	$1/1$	$2/1$
$1 \times 1 \times 2$	$1 \times 1 \times 2$	$1 \times 2 \times 2$	$2/1$	$2/2$
$1 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 3$	$2/2$	$3/2$
$2 \times 2 \times 3$	$2 \times 2 \times 3$	$2 \times 3 \times 4$	$3/2$	$4/3$
$2 \times 3 \times 4$	$3 \times 3 \times 4$	$3 \times 4 \times 5$	$4/3$	$5/4$
$3 \times 4 \times 5$	$4 \times 4 \times 5$	$4 \times 5 \times 7$	$5/4$	$7/5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.1: Comportamento das dimensões dos paralelepípedos

Note, portanto, que, com exceção das quatro primeiras, todas as caixas iniciais são do tipo  $a \times b \times c$ , com  $a < b < c$ , sendo todas as faces retangulares. Em cada passo adicionamos a uma das faces de maior área, ou seja, a uma das faces do tipo



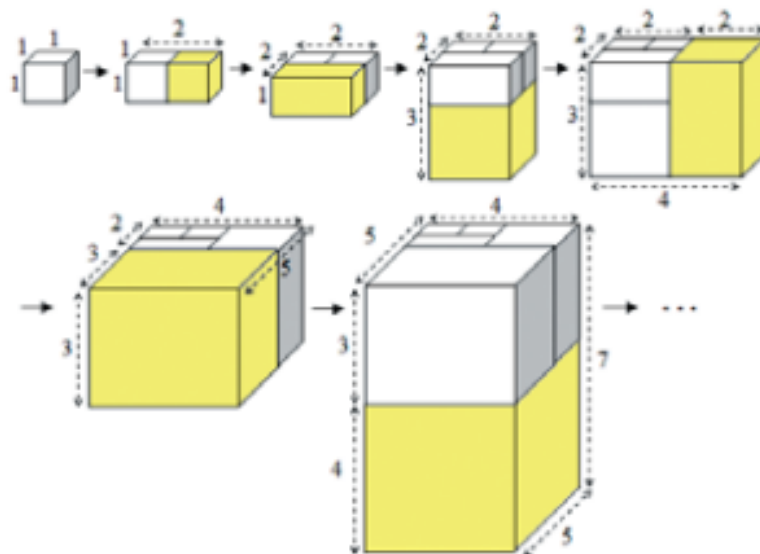


Figura 3.13: Interpretação espacial para Sequência de Padovan

$b \times c$ , uma caixa de dimensões  $b \times b \times c$ . O resultado obtido é uma caixa final de dimensões  $b \times c \times (a + b)$ , que, por sua vez, se torna a casa inicial da etapa seguinte.

Observe agora, na Tabela 3.1, a coluna das caixas finais. Se eliminarmos o primeiro termo da sequência de Padovan, obteremos a sucessão das dimensões menores. Se eliminarmos os dois primeiros termos da sequência de Padovan, obteremos as dimensões intermediárias. E se eliminarmos os três primeiros termos, obteremos as dimensões maiores. Logo, as caixas finais  $a \times b \times c$  sempre têm suas dimensões iguais a três termos consecutivos da sucessão de Padovan, assim, ao fazer o número de interações tender para infinito, os quocientes  $b/a$  e  $c/b$  convergem para o número plástico. Deste modo, os paralelepípedos obtidos convergem para o paralelepípedo plástico.

### 3.2.1 Propriedades

**Lema 3.1** *A sequência de Padovan também pode ser definida recursivamente pela expressão*

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-5}.$$

**Prova:** Da recorrência original, temos:

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-2} + P_{n-3} \\ &= P_{n-4} + P_{n-5} + P_{n-1} - P_{n-4} \\ &= P_{n-1} + P_{n-5} \end{aligned}$$

■

**Lema 3.2** *A sequência de Padovan também satisfaz as relações de recorrência:*

i.  $P_n = P_{n-2} + P_{n-4} + P_{n-8}$ .

ii.  $P_n = P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-5}$ .

iii.  $P_n = P_{n-4} + P_{n-5} + P_{n-6} + P_{n-7} + P_{n-8}$ .

**Prova:** Utilizando o Lema 3.1 e a recorrência original de Padovan, temos:

i.

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + P_{n-5} \\ &= P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-7} + P_{n-8} \\ &= (P_{n-3} + P_{n-7}) + P_{n-4} + P_{n-8} \\ &= P_{n-2} + P_{n-4} + P_{n-8}. \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + P_{n-5} \\ &= P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-7} + P_{n-8} \\ &= P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-5}. \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + P_{n-5} \\ &= P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-7} + P_{n-8} \\ &= P_{n-3} + P_{n-4} + P_{n-5} \\ &= P_{n-4} + P_{n-5} + P_{n-6} + P_{n-7} + P_{n-8} \end{aligned}$$

■

**Proposição 3.8** *Seja  $(P_n)$  a sequência de Padovan. Então,  $\forall n \geq 0$ , valem as propriedades:*

a.  $\sum_{k=0}^n P_k = P_{n+5} - 2$

b.  $\sum_{k=0}^n P_{2k} = P_{2n+3} - 1$

$$c. \sum_{k=0}^n P_{2k+1} = P_{2n+4} - 1$$

$$d. \sum_{k=0}^n P_{3k} = P_{3n+2}$$

$$e. \sum_{k=0}^n P_{3k+1} = P_{3n+3} - 1$$

$$f. \sum_{k=0}^n P_{3k+2} = P_{3n+4} - 1$$

$$g. \sum_{k=0}^n P_{5k} = P_{5n+1}$$

**Demonstração:**

(a) Da recorrência  $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ , temos:

$$P_3 = P_1 + P_0$$

$$P_4 = P_2 + P_1$$

$$P_5 = P_3 + P_2$$

$$P_6 = P_4 + P_3$$

$$\vdots = \quad \quad \quad \vdots$$

$$P_{n-2} = P_{n-4} + P_{n-5}$$

$$P_{n-1} = P_{n-3} + P_{n-2}$$

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

---


$$P_n + P_{n-1} + P_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} P_k + P_1 + P_2$$

Somando a ambos os membros  $P_{n-1}$  e  $P_n$ , temos:

$$P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + P_n + P_{n-1} = \sum_{k=0}^n P_k + P_1 + P_2$$

$$P_n + P_{n+1} + P_{n+2} = \sum_{k=0}^n P_k + 1 + 1$$

$$P_{n+3} + P_{n+2} = \sum_{k=0}^n P_k + 2$$

$$\sum_{k=0}^n P_k = P_{n+5} - 2 \quad \blacksquare$$

Outra forma de demonstramos o item (a) é usando o Princípio da Indução Finita. Note, inicialmente, que a relação vale para  $k = 0$ . De fato,

$$\sum_{k=0}^0 P_k = P_0 = 1 = 3 - 2 = P_5 - 2$$

Suponhamos agora que a relação vale para um dado  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,  $\sum_{k=0}^n P_k = P_{n+5} - 2$ . Assim:

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_k = \sum_{k=0}^n P_k + P_{n+1} = P_{n+5} - 2 + P_{n+1}$$

Do Lema 3.1, temos:

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_k = P_{n+6} - 2 = P_{(n+1)+5} - 2$$

Logo, a relação vale para  $n + 1$  e pelo Princípio da Indução Finita, temos que a relação vale para todos  $n \in \mathbb{N}$ .  $\blacksquare$

- (b) Inicialmente, note que a relação vale para  $n = 0$ , isto é,  $\sum_{k=0}^0 P_{2k} = P_0 = 1 = 2 - 1 = P_3 - 1$ . Suponhamos agora que o resultado vale para um determinado  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$\sum_{k=0}^n P_{2k} = P_{2n+3} - 1.$$

Provemos agora que a identidade vale para  $n + 1$ :

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_{2k} = \sum_{k=0}^n P_{2k} + P_{2(n+1)} = P_{2n+3} - 1 + P_{2n+2} = P_{2n+5} - 1 = P_{2(n+1)+3} - 1$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita,  $\sum_{k=0}^n P_{2k} = P_{2n+3} - 1$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .  $\blacksquare$

- (c) Dos itens (a) e (b), temos, respectivamente que

$$\sum_{k=0}^{2n+1} P_k = P_{2n+6} - 2 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^n P_{2k} = P_{2n+3} - 1.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} P_k &= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{2n} + P_{2n+1} \\ \sum_{k=0}^{2n+1} P_k &= (P_0 + P_2 + \dots + P_{2n}) + (P_1 + P_3 + \dots + P_{2n+1}) \\ \sum_{k=0}^{2n+1} P_k &= \sum_{k=0}^n P_{2k} + \sum_{k=0}^n P_{2k+1} \\ P_{2n+6} - 2 &= P_{2n+3} - 1 + \sum_{k=0}^n P_{2k+1} \\ \sum_{k=0}^n P_{2k+1} &= P_{2n+6} - P_{2n+3} - 1 \\ \sum_{k=0}^n P_{2k+1} &= P_{2n+4} + P_{2n+3} - P_{2n+3} - 1 \\ \sum_{k=0}^n P_{2k+1} &= P_{2n+4} - 1 \end{aligned}$$

E isso encerra a demonstração do item (c). ■

(d) Vamos provar isto por indução sobre  $n$ . É óbvio que a afirmação vale para  $n = 0$ , pois  $\sum_{k=0}^0 P_{3k} = P_0 = 1 = P_2$ .

Suponhamos, agora, que  $\sum_{k=0}^n P_{3k} = P_{3n+2}$ , para um dado  $n \in \mathbb{N}$ . Escrevamos:

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_{3k} = \sum_{k=0}^n P_{3k} + P_{3(n+1)} = P_{3n+2} + P_{3n+3} = P_{3n+5}.$$

Logo a identidade também vale para  $n + 1$  e isto encerra a demonstração. ■

(e) Vamos provar isto também por indução sobre  $n$ . É óbvio que a afirmação vale para  $n = 0$ , pois  $\sum_{k=0}^0 P_{3k+1} = P_1 = 1 = 2 - 1 = P_3 - 1$ . Suponhamos, agora,

### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

---

que  $\sum_{k=0}^n P_{3k+1} = P_{3n+3} - 1$ , para um dado  $n \in \mathbb{N}$ . Escrevamos:

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_{3k+1} = \sum_{k=0}^n P_{3k+1} + P_{3(n+1)+1} = P_{3n+3} - 1 + P_{3n+4} = P_{3n+6} - 1 = P_{3(n+1)+3} - 1. \blacksquare$$

(f) Este item pode ser facilmente demonstrado usando os itens (a), (d) e (e). Vejamos:

$$\sum_{k=0}^{3n+2} P_k = \sum_{k=0}^n P_{3k} + \sum_{k=0}^n P_{3k+1} + \sum_{k=0}^n P_{3k+2}$$

Daí,

$$P_{3n+7} - 2 = P_{3n+2} + P_{3n+3} - 1 + \sum_{k=0}^n P_{3k+2}$$

$$\sum_{k=0}^n P_{3k+2} = P_{3n+7} - P_{3n+5} - 1 = P_{3n+4} - 1 \blacksquare$$

(g) Vamos provar isto por indução sobre  $n$ . É obvio que a afirmação vale para  $n = 0$ , pois  $\sum_{k=0}^0 P_{5k} = P_0 = 1 = P_1$ . Suponhamos, agora, que  $\sum_{k=0}^n P_{5k} = P_{5n+1}$  para um dado  $n \in \mathbb{N}$ . Escrevamos:

$$\sum_{k=0}^{n+1} P_{5k} = \sum_{k=0}^n P_{5k} + P_{5(n+1)} = P_{5n+1} + P_{5n+5} = P_{5n+6}$$

A última igualdade é devido ao Lema (3.1). E portanto a relação vale para  $n + 1$ , o que conclui nossa demonstração.

■

**Proposição 3.9** *Seja  $(P_n)$  a sequência de Padovan. Então,  $\forall n \geq 3$ , vale a relação:*

$$\sum_{k=0}^n P_k^2 = P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2$$

**Demonstração:** Vamos provar isto pelo Princípio da Indução Finita. Para tanto, note inicialmente, que a relação é verdadeira para  $n = 3$ , pois

$$\sum_{k=0}^3 P_k^2 = P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1 + 1 + 1 + 2 = 5 = 3^2 - 1^2 - 1^1 = P_5^2 - P_2^2 - P_0^2.$$

### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

Suponhamos agora, como hipótese da indução, que a relação  $\sum_{k=0}^n P_k^2 = P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2$  é válida para um dado  $n \in \mathbb{N}$ . Queremos mostrar que a relação também vale para  $n + 1$ , isto é,  $\sum_{k=0}^{n+1} P_k^2 = P_{n+3}^2 - P_n^2 - P_{n-2}^2$ . Vejamos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n+1} P_k^2 &= \sum_{k=0}^n P_k^2 + P_{n+1}^2 \\
 &= P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2 + P_{n+1}^2 \\
 &= (P_{n+2}^2 - P_{n-3}^2) + (P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2) \\
 &= (P_{n+2} + P_{n-3})(P_{n+2} - P_{n-3}) + (P_{n+1} + P_{n-1})(P_{n+1} - P_{n-1}) \\
 &= (P_{n+2} + P_{n-3})P_{n+1} + (P_{n+1} + P_{n-1})P_{n-2} \\
 &= (P_{n+2} + P_n - P_{n-2})P_{n+1} + P_{n+1}P_{n-2} + P_{n-1}P_{n-2} \\
 &= (P_n + P_{n-1} + P_{n+3} - P_{n+1})(P_{n+3} - P_n) + P_{n-1}P_{n-2} \\
 &= [(P_{n+3} + P_n) + (P_{n-1} - P_n + 1)](P_{n+3} - P_n) + P_{n-1}P_{n-2} \\
 &= (P_{n+3} + P_n)(P_{n+3} - P_n) - P_{n-2}(P_{n+3} - P_n) + P_{n-1}P_{n-2} \\
 &= P_{n+3}^2 - P_n^2 - P_{n-2}(P_{n+3} - P_n - P_{n-1}) \\
 &= P_{n+3}^2 - P_n^2 - P_{n-2}(P_{n+1} + P_n - P_n - P_{n-1}) \\
 &= P_{n+3}^2 - P_n^2 - P_{n-2}(P_{n+1} - P_{n-1}) \\
 &= P_{n+3}^2 - P_n^2 - P_{n-2}^2
 \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita  $\sum_{k=0}^n P_k^2 = P_{n+2}^2 - P_{n-1}^2 - P_{n-3}^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $n > 2$ . ■

**Proposição 3.10** *Seja  $(P_n)$  a sequência de Padovan. Então,  $\forall n \geq 0$ , valem as relações:*

$$\begin{aligned}
 a. \quad \sum_{k=0}^n P_k^2 \cdot P_{k+1} &= P_n \cdot P_{n+1} \cdot P_{n+2} \\
 b. \quad \sum_{k=0}^n P_k \cdot P_{k+2} &= P_{n+2} \cdot P_{n+3} - 1
 \end{aligned}$$

**Demonstração:** Usaremos o indução sobre  $n$  para ambos os itens. É fácil ver que as relações são verdadeiras para  $n = 0$ . Supondo então, como hipótese de indução,

### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

---

que as relações valem para  $n = m$ , isto é,

$$\sum_{k=0}^m P_k^2 \cdot P_{k+1} = P_m \cdot P_{m+1} \cdot P_{m+2}$$

e

$$\sum_{k=0}^m P_k \cdot P_{k+2} = P_{m+2} \cdot P_{m+3} - 1$$

mostremos que elas também valem para  $n = m + 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} P_k^2 \cdot P_{k+1} &= \sum_{k=0}^m P_k^2 \cdot P_{k+1} + P_{m+1}^2 \cdot P_{m+2} \\ &= P_m \cdot P_{m+1} \cdot P_{m+2} + P_{m+1}^2 \cdot P_{m+2} \\ &= P_{m+1} \cdot P_{m+2} (P_m + P_{m+1}) \\ &= P_{m+1} \cdot P_{m+2} \cdot P_{m+3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} P_k \cdot P_{k+2} &= \sum_{k=0}^m P_k \cdot P_{k+2} + P_{m+1} \cdot P_{m+3} \\ &= P_{m+2} \cdot P_{m+3} - 1 + P_{m+1} \cdot P_{m+3} \\ &= P_{m+3} \cdot (P_{m+2} + P_{m+1}) - 1 \\ &= P_{m+3} \cdot P_{m+4} - 1 \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, as relações (a) e (b) são verdadeiras para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ■

#### 3.2.2 Sequência de Padovan e o Triângulo de Pascal

Tal qual fizemos para a sequência de Fibonacci, podemos mostrar que cada número  $P_n$  da sequência de Padovan é definido como a soma dos elementos do que particularmente defini como  $n$ -ésima “entre diagonal inversa” do Triângulo de Pascal.

**Proposição 3.11** *Os termos da sequência de Padovan estão relacionados com a soma de coeficientes binomiais pela seguinte identidade:*

$$P_{k-2} = \sum_{2m+n=k} \binom{m}{n}$$



### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

---

ou, equivalentemente, para  $n \geq 1$ ,

$$P_{n-1} = \sum_{\lceil \frac{n-2}{3} \rceil \leq j \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{j+1}{n-1-2j}.$$

Por exemplo, para  $k = 12$  na primeira expressão, os pares  $(m, n)$  com  $2m+n = 12$  que nos fornecem coeficientes binomiais são  $(6, 0)$ ,  $(5, 2)$  e  $(4, 4)$ , logo:

$$\sum_{2m+n=12} \binom{m}{n} = \binom{6}{0} + \binom{5}{2} + \binom{4}{4} = 12 = P_{10}$$

Se tomarmos, por exemplo,  $n = 13$  na segunda expressão, teremos:

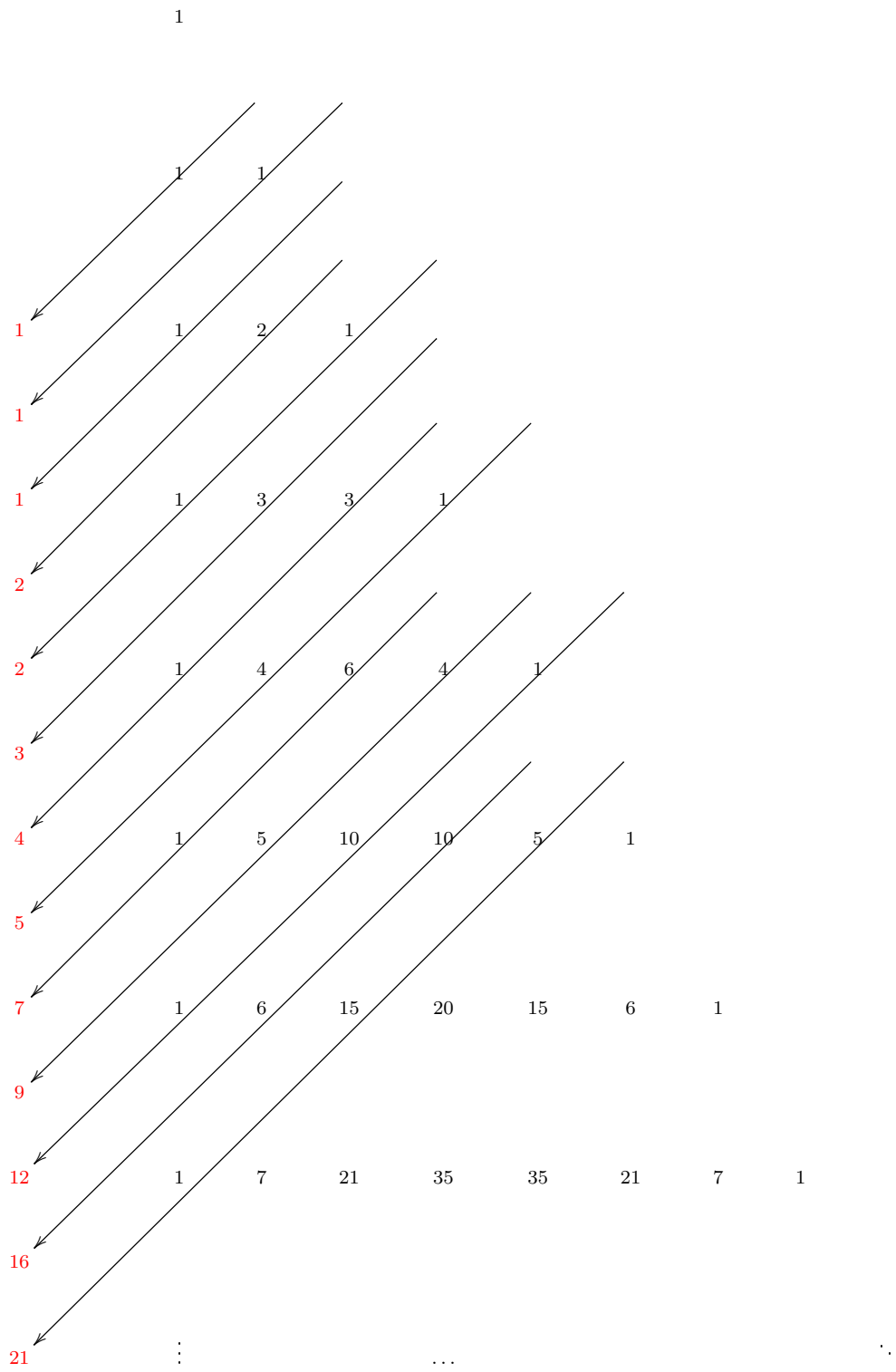
$$\sum_{\lceil \frac{10}{3} \rceil \leq j \leq \lfloor 6 \rfloor} \binom{j+1}{n-1-2j} = \sum_{4 \leq j \leq 6} \binom{j+1}{n-1-2j} = \binom{5}{4} + \binom{6}{2} + \binom{7}{0} = 21 = P_{12}$$

Este resultado pode ser demonstrado de maneira análoga ao que fizemos na Proposição 2.11 do capítulo anterior usando o princípio da indução matemática. Outra demonstração para este resultado pode ser feita via Polinômios de Bell (ver [3]).

Veja, como ilustração do resultado, o Triângulo de Pascal na página seguinte.

### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

---



### 3.2.3 Fórmula Posicional

Depois de conhecermos os números de Padovan e algumas das várias relações entre eles, nos questionamos se é possível construir uma fórmula posicional como a fórmula de Binet para os números de Fibonacci, ou seja, uma fórmula fechada que nos forneça cada termo da sequência de Padovan em função apenas de sua posição. Assim, tal qual fizemos no capítulo anterior, vamos desenvolver, a partir de recorrências lineares, esta fórmula.

**Proposição 3.12** *Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\psi$  as raízes da equação  $x^3 - x - 1 = 0$ , como definidas na proposição (3.1). Então os termos  $P_n$  da sequência de Padovan são dados por*

$$P_n = a \cdot \psi^n + b \cdot \alpha^n + c \cdot \beta^n \quad (3.10)$$

onde:

$$a = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(\psi-\alpha)(\psi-\beta)}, \quad b = \frac{(1-\psi)(1-\beta)}{(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)} \quad e \quad c = \frac{(1-\psi)(1-\alpha)}{(\beta-\psi)(\beta-\alpha)},$$

isto é,

$$P_n = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(\psi-\alpha)(\psi-\beta)} \cdot \psi^n + \frac{(1-\psi)(1-\beta)}{(\alpha-\psi)(\alpha-\beta)} \cdot \alpha^n + \frac{(1-\psi)(1-\alpha)}{(\beta-\psi)(\beta-\alpha)} \cdot \beta^n.$$

**Demonstração:** O polinômio característico da fórmula de recorrência  $P_{n+2} = P_n + P_{n-1}$  é  $x^3 = x + 1$  e suas raízes são  $\psi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Então existem constantes  $a$ ,  $b$ , e  $c$  tais que  $P_n = a \cdot \psi^n + b \cdot \alpha^n + c \cdot \beta^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Essas constantes devem satisfazer as condições iniciais  $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ , desta forma podemos encontrá-las resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a\psi + b\alpha + c\beta = 1 \\ a\psi^2 + b\alpha^2 + c\beta^2 = 1 \end{cases}$$

Pela Regra de Cramer e aplicando a Regra de Vandermonde para o cálculo dos determinantes, temos:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \alpha & \beta \\ \psi^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(\alpha-\beta)}{(\psi-\alpha)(\psi-\beta)(\alpha-\beta)} = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(\psi-\alpha)(\psi-\beta)}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & \beta^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \alpha & \beta \\ \psi^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\psi - 1)(\psi - \beta)(1 - \beta)}{(\psi - \alpha)(\psi - \beta)(\alpha - \beta)} = \frac{(1 - \psi)(1 - \beta)}{(\alpha - \psi)(\alpha - \beta)}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \alpha & \beta \\ \psi^2 & \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\psi - \alpha)(\psi - 1)(\alpha - 1)}{(\psi - \alpha)(\psi - \beta)(\alpha - \beta)} = \frac{(1 - \psi)(1 - \alpha)}{(\beta - \psi)(\beta - \alpha)}$$

Assim:

$$P_n = \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{(\psi - \alpha)(\psi - \beta)} \cdot \psi^n + \frac{(1 - \psi)(1 - \beta)}{(\alpha - \psi)(\alpha - \beta)} \cdot \alpha^n + \frac{(1 - \psi)(1 - \alpha)}{(\beta - \psi)(\beta - \alpha)} \cdot \beta^n$$

e isso completa nossa demonstração.

Evidentemente, para obtermos a expressão final de  $P_n$ , basta substituímos  $\psi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  pelos seus respectivos valores. Mas fica claro também que seria extremamente inconveniente tal representação. ■

**Lema 3.3** *Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\psi$  definidos na proposição (3.1), então  $\left|\frac{\alpha}{\psi}\right| < 1$  e  $\left|\frac{\beta}{\psi}\right| < 1$ .*

**Prova:** Como  $\psi$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes do polinômio  $x^3 - x - 1$ , temos:

$$\begin{aligned} x^3 - x - 1 &= (x - \psi)(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= x^3 - (\psi + \alpha + \beta)x^2 + (\psi\alpha + \psi\beta + \alpha\beta)x - \psi\alpha\beta \end{aligned}$$

Então  $\psi + \alpha + \beta = 0$ ,  $\psi\alpha + \psi\beta + \alpha\beta = -1$  e  $\psi\alpha\beta = 1$ . Daí,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\alpha}{\psi}\right| &= \frac{\sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}}}{\psi} = \frac{\sqrt{\alpha \cdot \beta}}{\psi} \\ &= \frac{\sqrt{-1 - \psi\alpha - \psi\beta}}{\psi} = \sqrt{\frac{-1 - \psi(\alpha + \beta)}{\psi^2}} \\ &= \sqrt{\frac{-1 + \psi^2}{\psi^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\psi^2}} < 1 \end{aligned}$$

Como  $|\beta| = |\bar{\alpha}| = |\alpha|$ , temos que  $\left|\frac{\beta}{\psi}\right| = \left|\frac{\alpha}{\psi}\right| < 1$ . ■

### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

---

**Proposição 3.13** *Seja  $(P_n)$  a sequência de Padovan e  $\psi$  a constante plástica, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \psi^{n+1} + b \cdot \alpha^{n+1} + c \cdot \beta^{n+1}}{a \cdot \psi^n + b \cdot \alpha^n + c \cdot \beta^n} \\ &\quad \text{(Dividindo o numerador e denominador por } \psi^n \text{)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot \psi + b \cdot \left(\frac{\alpha}{\psi}\right)^n + c \cdot \left(\frac{\beta}{\psi}\right)^n}{a + b \cdot \left(\frac{\alpha}{\psi}\right)^n + c \cdot \left(\frac{\beta}{\psi}\right)^n} \\ &= \psi \end{aligned}$$

■

Veja a Tabela 3.2.

$n$	$P_{n+1}$	$P_n$	$\frac{P_{n+1}}{P_n}$
0	1	1	1
1	1	1	1
2	2	1	2
3	2	2	1
4	3	2	1,5
5	4	3	1,333333...
6	5	4	1,25
7	7	5	1,4
8	9	7	1,285714...
9	12	9	1,333333...
10	16	12	1,333333...
11	21	16	1,3125
12	28	21	1,333333...
13	37	28	1,321428...
14	49	37	1,324324...
15	65	49	1,326530...
16	86	65	1,323076...
⋮	⋮	⋮	⋮
$n \rightarrow \infty$			$\frac{P_{n+1}}{P_n} \rightarrow \psi$

Tabela 3.2: Razão entre números de Padovan consecutivos

### 3.2.4 Potências de $\psi$

No que tange as relações entre  $\psi$  e os números de Padovan, da mesma forma que fizemos para a razão áurea e a sequência de Fibonacci na seção 2.2.4, vamos estabelecer uma correspondência entre as potências de  $\psi$  e os números de Padovan, de modo que essas potências sejam escritas como uma combinação linear de potências mais baixas, em particular, 1,  $\psi$  e  $\psi^2$ . Vejamos inicialmente alguns resultados:

- $\psi^3 = 1 + 1 \cdot \psi$
- $\psi^4 = \psi + \psi^2$
- $\psi^5 = \psi^2 + \psi^3 = 1 + \psi + \psi^2$
- $\psi^6 = \psi^3 + \psi^4 = 1 + \psi + \psi + \psi^2 = 1 + 2\psi + \psi^2$
- $\psi^7 = \psi^4 + \psi^5 = \psi + \psi^2 + 1 + \psi + \psi^2 = 1 + 2\psi + 2\psi^2$
- $\psi^8 = \psi^5 + \psi^6 = 1 + \psi + \psi^2 + 1 + 2\psi + \psi^2 = 2 + 3\psi + 2\psi^2$
- $\psi^9 = \psi^6 + \psi^7 = 1 + 2\psi + \psi^2 + 1 + 2\psi + 2\psi^2 = 2 + 4\psi + 3\psi^2$
- $\psi^{10} = \psi^7 + \psi^8 = 1 + 2\psi + 2\psi^2 + 2 + 3\psi + 2\psi^2 = 3 + 5\psi + 4\psi^2$

Observe agora os dados organizados na Tabela 3.3.

$n$	$\psi^n$	$\psi^n$
5	$1 + 1 \cdot \psi + 1 \cdot \psi^2$	$P_0 + P_2 \cdot \psi + P_1 \cdot \psi^2$
6	$1 + 2 \cdot \psi + 1 \cdot \psi^2$	$P_1 + P_3 \cdot \psi + P_2 \cdot \psi^2$
7	$1 + 2 \cdot \psi + 2 \cdot \psi^2$	$P_2 + P_4 \cdot \psi + P_3 \cdot \psi^2$
8	$2 + 3 \cdot \psi + 2 \cdot \psi^2$	$P_3 + P_5 \cdot \psi + P_4 \cdot \psi^2$
9	$2 + 4 \cdot \psi + 3 \cdot \psi^2$	$P_4 + P_6 \cdot \psi + P_5 \cdot \psi^2$
10	$3 + 5 \cdot \psi + 4 \cdot \psi^2$	$P_5 + P_7 \cdot \psi + P_6 \cdot \psi^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.3: Relação entre as potências de  $\psi$  e os números de Padovan

### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

---

Note então, que os termos constantes, os coeficientes de  $\psi$  e os coeficientes de  $\psi^2$ , na ordem em que aparecem, correspondem aos termos da sequência de Padovan. Logo, somos motivados a seguinte afirmação:

**Afirmção 3.1** *Para todo número natural  $n \geq 5$ , vale a identidade*

$$\psi^n = P_{n-5} + P_{n-3} \cdot \psi + P_{n-4} \cdot \psi^2,$$

onde  $P_n$  representa os números de Padovan.

**Prova:** Provemos essa afirmação usando indução matemática sobre  $n$ . Como já exposto, a relação vale para  $n = 5$ . Suponhamos agora que a igualdade seja verdadeira para  $n = k$ , isto é,  $\psi^k = P_{k-5} + P_{k-3} \cdot \psi + P_{k-4} \cdot \psi^2$ , e provemos que a mesma vale para  $n = k + 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} \psi^{k+1} &= \psi^k \cdot \psi \\ &= (P_{k-5} + P_{k-3} \cdot \psi + P_{k-4} \cdot \psi^2) \cdot \psi \\ &= P_{k-5} \cdot \psi + P_{k-3} \cdot \psi^2 + P_{k-4} \cdot \psi^3 \\ &= P_{k-5} \cdot \psi + P_{k-3} \cdot \psi^2 + P_{k-4} \cdot (1 + \psi) \\ &= P_{k-4} + (P_{k-5} + P_{k-4}) \cdot \psi + P_{k-3} \cdot \psi^2 \\ &= P_{k-4} + P_{k-2} \cdot \psi + P_{k-3} \cdot \psi^2 \\ &= P_{(k+1)-5} + P_{(k+1)-3} \cdot \psi + P_{(k+1)-4} \cdot \psi^2 \end{aligned}$$

Portanto a identidade vale para  $n = k+1$  e pelo princípio da indução matemática, a igualdade é verdadeira para todo natural  $n \geq 5$ . Desta forma, acabamos de provar que a afirmação feita é verdadeira. ■

#### 3.2.5 Função Geradora

Como fizemos no capítulo anterior para a sequência de Fibonacci, vamos identificar uma função Geradora para os termos da sequência de Padovan.

**Proposição 3.14** *A função geradora da sequência de Padovan é*

$$G(P_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot x^n = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}.$$

**Demonstração:**

$$G(P_n, x) = P_0 + P_1 \cdot x + P_2 \cdot x^2 + P_3 \cdot x^3 + P_4 \cdot x^4 + P_5 \cdot x^5 + \dots \quad (3.11)$$

$$x^2 \cdot G(P_n, x) = P_0 \cdot x^2 + P_1 \cdot x^3 + P_2 \cdot x^4 + P_3 \cdot x^5 + \dots \quad (3.12)$$

$$x^3 \cdot G(P_n, x) = P_0 \cdot x^3 + P_1 \cdot x^4 + P_2 \cdot x^5 + \dots \quad (3.13)$$

Fazendo (3.11) - [(3.12) + (3.13)], temos:

$$G(P_n, x) \cdot (1 - x^2 - x^3) = P_0 + P_1 \cdot x + (P_2 - P_0) \cdot x^2$$

$$G(P_n, x) = \frac{1 + x}{1 - x^2 - x^3}$$

■

A partir da função geradora da sequência de Padovan podemos provar identidades envolvendo produto dos termos da sequência de Padovan com termos de um Progressão Geométrica.

**Exemplo:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{\mu^n} = \frac{1 + \frac{1}{\mu}}{1 - (\frac{1}{\mu})^2 - (\frac{1}{\mu})^3} = \frac{\mu^2(\mu + 1)}{\mu^3 - \mu - 1}$$

Em particular, para  $\mu = 2$ , temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{2^n} = \frac{12}{5}$$

◇

Uma outra aplicação para a função geradora da sequência de Padovan é que a partir dela também podemos deduzir a fórmula posicional dos termos dessa sucessão.

### 3.2.6 Matrizes e a Sequência de Padovan

O que iremos investigar agora são propriedades dos números de Padovan em relação com matrizes, isto é, investigaremos propriedades concernentes a sequência de Padovan a partir de matrizes especiais de terceira ordem.

**Teorema 3.1** *Seja*  $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , *então*  $Q^{n+4} = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}$  *para*

*todo*  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$ .

**Demonstração:** Usaremos o Princípio da Indução Finita sobre  $n$ .

Para  $n = 1$  é imediato que:

$$Q^{1+4} = Q^5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_3 & P_2 \\ P_2 & P_4 & P_3 \end{bmatrix}$$

Suponhamos agora que a relação seja válida para um dado  $n = k$ , isto é,

$$Q^{k+4} = \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k+2} & P_{k+1} \\ P_{k+1} & P_{k+3} & P_{k+2} \end{bmatrix}$$



### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

---

Devemos mostrar então que a relação vale para  $n = k + 1$ . Ora, sabendo que  $Q^{(k+1)+4} = Q^{k+4} \times Q$ , temos:

$$\begin{aligned}
 Q^{k+5} = Q^{k+4} \times Q &= \begin{bmatrix} P_{k-1} & P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k+2} & P_{k+1} \\ P_{k+1} & P_{k+3} & P_{k+2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_k & P_{k-1} + P_k & P_{k+1} \\ P_{k+1} & P_k + P_{k+1} & P_{k+2} \\ P_{k+2} & P_{k+1} + P_{k+2} & P_{k+3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_k & P_{k+2} & P_{k+1} \\ P_{k+1} & P_{k+3} & P_{k+2} \\ P_{k+2} & P_{k+4} & P_{k+3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} P_{(k+1)-1} & P_{(k+1)+1} & P_{k+1} \\ P_{k+1} & P_{(k+1)+2} & P_{(k+1)+1} \\ P_{(k+1)+1} & P_{(k+1)+3} & P_{(k+1)+2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Portanto, o resultado é verdadeiro para todo  $n \geq 1$ . ■

A partir do resultado provado no teorema anterior sobre Q-Matriz de Padovan podemos obter novas relações como as descritas na proposição a seguir.

**Proposição 3.15** *Para todos inteiros  $m$  e  $n$ , com  $0 < m < n$ , temos as seguintes relações:*

$$(a) \quad P_n = P_{m-1} \cdot P_{n-m} + P_{m+1} \cdot P_{n-m+1} + P_m \cdot P_{n-m+2}$$

$$(b) \quad P_n = P_m \cdot P_{n-m-1} + P_{m+2} \cdot P_{n-m} + P_{m+1} \cdot P_{n-m+1}$$

**Demonstração:** Pelo Teorema 3.1 e as propriedades relacionadas a potências de matrizes quadradas, temos:

$$Q^{n+8} = Q^{m+4} \cdot Q^{n-m+4}$$

e assim,

$$\begin{bmatrix} P_{n+3} & P_{n+5} & P_{n+4} \\ P_{n+4} & P_{n+6} & P_{n+5} \\ P_{n+5} & P_{n+7} & P_{n+6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} & P_{m+1} & P_m \\ P_m & P_{m+2} & P_{m+1} \\ P_{m+1} & P_{m+3} & P_{m+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{n-m-1} & P_{n-m+1} & P_{n-m} \\ P_{n-m} & P_{n-m+2} & P_{n-m+1} \\ P_{n-m+1} & P_{n-m+3} & P_{n-m+2} \end{bmatrix}.$$

Efetuada a multiplicação das matrizes e igualando os elementos correspondentes, temos

$$P_{n+4} = P_{m-1} \cdot P_{n-m} + P_{m+1} \cdot P_{n-m+1} + P_m \cdot P_{n-m+2}$$

e

$$P_{n+4} = P_m \cdot P_{n-m-1} + P_{m+2} \cdot P_{n-m} + P_{m+1} \cdot P_{n-m+1}$$

■

Note que, na Proposição 3.15 (a), fazendo  $m = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} P_{n+4} &= P_0 \cdot P_{n-1} + P_2 \cdot P_n + P_1 \cdot P_{n+1} \\ &= P_{n-1} + P_n + P_{n+1} \\ &= P_{n+2} + P_{n+1} \end{aligned}$$

Da mesma forma, se fizermos  $m = 0$  na Proposição 3.15 (b) também obteremos um resultado semelhante, que, na verdade, é a relação de recorrência da sequência de Padovan. Obviamente, podemos obter uma série de outras relações com manipulações semelhantes.

### 3.2.7 Aplicações à Combinatória

Nesta seção trataremos algumas situações envolvendo contagem cujas soluções podem ser dadas através de recorrências, especialmente a recorrência de Padovan. Entretanto, deixamos a cargo do leitor demonstrar tais resultados.

- a. O número de maneiras de escrever  $n + 2$  como uma soma ordenada, em que cada termo é 2 ou 3 é  $P_n$ .
- b. O número de maneiras de escrever  $n$  como uma soma ordenada, na qual 2 não figura como uma das parcelas, é  $P_{2n-2}$ .
- c. O número de maneiras de escrever  $n$  como uma soma palindrômica ordenada no qual nenhuma das parcelas é 2 é  $P_n$ .
- d. O número de maneiras de escrever  $n$  como uma soma ordenada, em que cada termo é ímpar e maior que 1 é  $P_{n-5}$ .
- e. O número de maneiras de escrever  $n$  como uma soma ordenada, em que cada parcela  $x$  é tal que,  $x \equiv 2 \pmod{3}$ , é  $P_{n-4}$ .

# Apêndice

Trazemos aqui um resultado de complementação do texto.

## Princípio da Indução Finita

Como nos é muito útil em uma série de demonstrações, trataremos do Princípio da Indução Finita, ferramenta que aumenta em muito nossa capacidade de elaborar demonstrações.

Para compreendermos o funcionamento do Princípio da Indução Finita, considere um conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$  tal que  $1 \in \mathcal{A}$ . Suponha agora que saibamos que toda vez que um certo número natural  $k$  estiver em  $\mathcal{A}$ , então  $k + 1$  também estará em  $\mathcal{A}$ . Então,  $1 \in \mathcal{A}$  nos garante que  $2 \in \mathcal{A}$ . Por sua vez,  $2 \in \mathcal{A}$  nos assegura que  $3 \in \mathcal{A}$ . Prosseguindo assim, concluímos que  $\mathcal{A}$  contém todos os naturais, ou seja,  $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ . Tal discussão pode ser formalizada no axioma conhecido como Princípio da Indução Finita.

**Axioma 1** *Seja  $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$  um conjunto satisfazendo as seguintes condições:*

- i.  $1 \in \mathcal{A}$ .*
- ii. Se  $k \in \mathcal{A}$ , então  $k + 1 \in \mathcal{A}$ .*

*Então  $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ .*

Obviamente, uma dúvida natural é: como aplicar o princípio da indução para demonstrar algo em matemática? Para responder a essa pergunta, suponhamos uma propriedade  $P(n)$  do natural  $n$ , a qual queremos provar ser verdadeira para todo natural  $n$ . Definimo um conjunto  $\mathcal{A}$  pondo

$$\mathcal{A} = \{k \in \mathbb{N}; P(k) \text{ é verdadeira}\}$$

e observamos que

$$\mathcal{A} = \mathbb{N} \iff P(n) \text{ é verdadeira para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a fim de mostrar que  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ , basta mostrar que  $\mathcal{A} = \mathbb{N}$  pelo princípio da indução, ou seja,

### 3.2. SEQUÊNCIA DE PADOVAN

---

- $1 \in \mathcal{A}$ ;
- $k \in \mathcal{A} \implies k + 1 \in \mathcal{A}$

ou, equivalentemente, basta mostrar que

- $P(1)$  é verdadeira;
- $P(k)$  verdadeira  $\implies P(k + 1)$  verdadeira.

Mais sobre esse princípio, pode ser encontrado em [7], [12] e [14].

# Referências Bibliográficas

- [1] Aarts, J., Fokkink, R. J., Kruijtzter, G. *Morphic Numbers*, Nieuw Archief voor Wiskunder. 5-2, Maart, pp. 56-58, (2001).
- [2] Audet, D. *Le nombre plastique, cousin négligé du nombre d'or*, Association mathématique du Quebec. Vol. LIII-01, pp. 29-36, Mars (2013).
- [3] Birmajer, D., Gil, J. B., Weiner, M. D., *Linear Recurrence Sequences via Bell Polynomials*, J. Integer Seq. 18, arXiv:1405.7727v2 [math.CO], (2014).
- [4] Buitrago, A. R., *Los números mórficos en secundaria*, SUMA, 59, pp. 7-16, Noviembre (2008).
- [5] Cassine, J.D., *Une nouvelle progression de nombres*. Histoire de l'Academie Royale des Sciences, 1. Paris. (1733).
- [6] Choulet, R., Fresnel, L. A., *Après le nombre d'or, quels nombres aussi riches inventer?*, Mathématique et Pédagogie, 166, pp. 3-30, (2008).
- [7] Hefez, A. *Elementos de Aritmética*, SBM, Rio de Janeiro, (2005).
- [8] Kruijtzter, G., *Ruimter e Getal Het plastische Getal en het gulden-Snedegetal*, Architectura & Natura, Amsterdam (1998).
- [9] Lima, E. L., *Curso de Análise*; v.1., 14.ed., IMPA, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2013.
- [10] Lima, E. L., *Análise Real volume 1. Funções de uma variável*; v.1., 8.ed., IMPA, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, 2006.
- [11] Lívio, M., *Razão Áurea: a história do  $\Phi$ , um número surpreendente*. Tradução: Marco Shinobu Matsumura. 6. ed. Record, Rio de Janeiro (2011).
- [12] Lovász, L., Pelikán, J., Vesztergombi, K. *Matemática Discreta*. SBM, Rio de Janeiro, (2003).

- [13] Martinez, F. B., Moreira, C. G., Saldanha, N., Tengan, E., *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. SIAM J. Math. Anal., 38 pp. 1423-1449, (2006/2007).
- [14] Muniz Neto, A. C., *Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais*, SBM. Rio de Janeiro, (2013).
- [15] Muniz Neto, A. C., *Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória*, SBM. Rio de Janeiro, (2012).
- [16] Muniz Neto, A. C., *Tópicos de Matemática Elementar: Teoria dos Números*, SBM. Rio de Janeiro, (2012).
- [17] Laan, H. van der, *Le Nombre Plastique; quinze Leçons sur l'Ordonnance architectonique*. Brill, Leiden, (1960).
- [18] Padovan, R. *Dom Hans van der Laan, Modern Primitive*, Amsterdam, (1994).
- [19] Rodrigo, J., López, M. D., *Generalizaciones de los números de oro y Padovan*. Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid, (2014). Disponível em: <http://www2.caminos.upm.es/departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/SEGUNDO/028%20Generalizaciones.pdf>
- [20] Selmer, E. S., *On the irreducibility of certain trinomials*, Mathematica Scandinavica. pp. 287-302, (1956).
- [21] Tverberg, H., *On the irreducibility of the polynomials  $x^n \pm x^m \pm 1$* , Mathematica Scandinavica. pp. 121-126, (1960).
- [22] Whitney, R. E., *Advanced Problems and Solutions*, Lock Haven State College. Pennsylvania. pp. 417-419, (1972).
- [23] Wilf, H. S., *Generatingfunctionology*, Philadelphia: Academic press. (1992).
- [24] Zahn, M., *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, (2011).
- [25] Zeckendorf, E. *Représentation des nombres naturels par une Somme de nombres de Fibonacci Ou de nombres de Lucas*. Bull. Soc. R. Sci. Liège, 41. pp. 179-182 (1972).