



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT



Aplicações da Trigonometria †

por

Egdemos Brilhante de Oliveira

sob orientação do

Prof.Dr. Napoleón Caro Tuesta

Trabalho apresentado como requisito para a conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional PROFMAT-CCEN-UFPB do período 2013.1.

Abril/2015
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Aplicações da Trigonometria

por

Egdemos Brilhante de Oliveira

Trabalho apresentado como requisito para a conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional PROFMAT-CCEN-UFPB do período 2013.1.

Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)

Prof. João Bosco Batista Lacerda - UFPB

Prof. Turíbio José Gomes do Santos - UNIPÊ

Abril/2015

Agradecimentos

A meu Deus Jesus Cristo, pela benção que me foi atribuída tornando-me capaz de concluir este trabalho. Ao professor Doutor orientador Napoleón Caro Tuesta pela dedicação a mim concedida para realização do mesmo, a professora Tuca e amigos por aceitarem, prontamente, o convite para participarem desse TCC, Yolanda esposa, Irmãos Sonia, Miguel (em memória) e Geraldo (Cunhado) por me incentivarem em tudo que faço.

Dedicatória

A prof. Tuca e amigos que de forma direta ou indiretamente tiveram uma participação fundamental para que esse trabalho pudesse se tornar realidade; e em especial a Yolanda (esposa), Sonia Maria (irmã), Geraldo (cunhado) e Miguel (irmão em Memória) por serem pessoas de uma Importância indispensável em tudo que faço na vida.

Resumo

Aplicações da trigonometria Traz como foco:

- Contexto histórico: resgatando um pouco as contribuições de povos antigos e alguns nomes de pessoas que com suas descobertas contribuíram para o desenvolvimento teórico da trigonometria;
- Fundamentação teórica: visando explicitar relações trigonométricas utilizadas nas escolas públicas de nível médio, bem como, fortalecer a importância desta matemática básica para assuntos de nível superior.
- As aplicações: visando atender ao questionamento feito pela sociedade em relação às aplicações da trigonometria básica.

Abstract

Trigonometry applications brings focus on: Historical context, rescuing some contrubtions of ancient peoples and some names of people with their findings contributed to the theoretical developament of trigonometry; Theoretical framework: aiming eplicit trigonometric ratios used in the average level of public schools, as well as strengthe the importance of basic math for top-level issues; Applications: to meet the challengs raised by the company in relation to application of basic trigonometry.

Sumário

1	Contexto Histórico	1
1.1	Gregos e Egípcios	1
1.2	Trigonometria esférica e planar	3
2	Fundamentação Teórica	6
2.1	Postulado do Transporte de Segmentos	6
2.2	Postulado do Transporte de Ângulos	7
2.3	Congruência de Triângulos	7
2.3.1	Caso de Congruência LAL	8
2.3.2	Caso de Congruência ALA	8
2.4	Semelhança de Triângulos	8
2.4.1	Caso de Semelhança (AA)	9
2.5	Triângulo Retângulo	9
2.5.1	Elementos Notáveis	9
2.5.2	Teorema de Pitágoras (enunciado)	10
2.5.3	Demonstração do Teorema de Pitágoras	11
2.6	Declividade ou Inclinação de uma Rampa	12
2.7	Razões Trigonométricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo	13
2.7.1	Tangente de um Ângulo Agudo	13
2.7.2	Seno e Cosseno de um Ângulo Agudo	14
2.7.3	Arco de Circunferência	14
2.7.4	Unidade de Medida Grau(Notação:°)	15
2.7.5	Unidade de Medida 1 Radiano (Notação: 1 Rad)	15
2.7.6	Conversão: Grau e Radiano	15
2.8	Trigonometria na Circunferência	16
2.8.1	Circunferência Trigonométrica	16
2.8.2	Seno e Cosseno	16
2.8.3	Tangente	17
2.8.4	Outras Relações Trigonométricas	17
2.8.5	Relações Trigonométricas Para a Soma de Dois Arcos	21
2.8.6	Funções Seno, Cosseno, Tangente no Campo Real e Suas Inversas	25

2.8.7	Tabela de Valores Notáveis de $[0, 2\pi]$.	26
2.8.8	Gráficos e Suas Propriedades	26
2.8.9	Funções Inversas Trigonométricas	28
2.8.10	Função Arco Seno	30
2.8.11	Função Arco Cosseno	31
2.8.12	Função Arco Tangente	32
2.9	Exp(x) e Relação de Euler	33
2.9.1	Propriedade Multiplicativa	33
2.9.2	Relação de Euler para x Real	34
2.9.3	Senos e Cossenos Complexos	34
2.9.4	Noções Para Série de Fourier	34
3	Aplicações	36
3.1	Arco soma e função trigonométrica inversa	36
3.2	Equações trigonométricas no campo complexo	38
3.3	Identidades	39
3.4	Igualdades	40
3.5	Aplicação 1 para a Série de Fourier	41
3.6	Aplicação 2 para a Série de Fourier	42
3.7	Lei do cosseno e Lei do seno	43
3.8	Aplicação da Lei do cosseno e Lei do seno	45
3.9	Razões trigonométricas e teorema de Pitágoras	48
	Referências Bibliográficas	50

Lista de Figuras

1.1	hexágono regular	2
1.2	Pirâmide	2
1.3	Inclinação da pirâmide	2
1.4	Hiparco de Bitínia	3
1.5	Calendário do Zodíaco	3
1.6	Triângulo Esférico ABC	3
1.7	Menelau de Alexandria	4
1.8	Nasir al-Din al-Tusi	4
2.1	Segmentos Congruentes	6
2.2	Ângulos Congruentes	7
2.3	Triângulos Congruentes	7
2.4	Congruência LAL	8
2.5	Congruência ALA	9
2.6	Triângulos Semelhantes	9
2.7	Triângulos Retângulo ABC	10
2.8	Altura \overline{AD} Relativa a Hipotenusa no Triângulo ABC	10
2.9	Aplicação do Teorema de Pitágoras	11
2.10	Elementos Notáveis no Triângulo Retângulo	11
2.11	Rampa e suas Variações	12
2.12	Rampa	13
2.13	Triângulo ABC com Ângulo Fixo θ	14
2.14	Ângulo Fixo θ no Triângulo ABC	14
2.15	Arco AB	15
2.16	Circunferência Trigonométrica de Centro O e Raio 1	16
2.17	Ponto P e Suas Projeções Ortogonais	17
2.18	Reta t Paralela ao Eixo oy	18
2.19	Triângulos Semelhantes OPQ e OTA	18
2.20	Triângulos Semelhantes OPQ e OBT'	19
2.21	Reta s Tangente no Ponto P e Triângulos Semelhantes OPQ e OPS .	20
2.22	Reta s' Tangente no Ponto P e Triângulos Semelhantes OPQ e OPS'	21
2.23	Projeções Ortogonais dos Pontos D e E	22

2.24	Ângulo Fixo α no Triângulo EHD	23
2.25	Ângulo Fixo β no Triângulo OED	23
2.26	Triângulo Retângulo OFE	23
2.27	Triângulo Retângulo DHE	24
2.28	Triângulo Retângulo OFE	24
2.29	Circunferência Trigonométrica de Centro O	26
2.30	Eixo das Tangentes t	26
2.31	Senóide	27
2.32	Cossenóide	27
2.33	Tangentóide	28
2.34	Paridade Ímpar no Eixo das Tangentes	29
2.35	Projeção Ortogonal no Eixo dos Senos	29
2.36	Sentido Inverso da Projeção da Figura 2.35	30
2.37	Função Seno de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$	30
2.38	Arco Seno	31
2.39	Função Cosseno de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$	31
2.40	Função arco-cosseno	32
2.41	Função Tangente de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$	32
2.42	Função arco-tangente	33
3.1	Onda Quadrada	43
3.2	Triângulo Acutângulo ABC com Ângulo Agudo Fixo em A	44
3.3	Triângulo Obtusângulo ABC com Ângulo Obtuso Fixo em A	44
3.4	Triângulo Inscrito ABC no Circulo de Centro O e Raio R	44
3.5	Ilhas C e D	46
3.6	Segmento AB	46
3.7	Quadrilátero $ABCD$	46
3.8	Triângulo ABC Interno na Figura 3.7	47
3.9	Triângulo ABD Interno na Figura 3.7	47
3.10	Triângulo ACD Interno na Figura 3.7	47
3.11	Triângulo $A'BC$ com Ângulo Fixo θ	48

Lista de Tabelas

2.1	Tabela de Valores Notáveis	27
-----	--------------------------------------	----

Notações

Notações Gerais

- α (alfa); β (beta); θ (teta) para representação angular.
- Exp (e^x) para função exponencial.
- \sum (somatório) para série de funções.
- \int como símbolo para integração.
- \widehat{AB} para representar um arco de extremos A e B .

Introdução

Aplicações da trigonometria em um trabalho voltado para alunos de escolas públicas de nível médio. Tem por objetivo revisar alguns tópicos importantes, bem como, buscar incentivar os alunos a dedicarem um pouco mais de tempo de seus estudos para a trigonometria.

Para justificar a utilidade dela mesma, estão incluídos:

- No primeiro capítulo um contexto histórico, no qual civilizações egípcias, gregas, mesopotâmicas e indianas são lembradas devido à contribuições para a humanidade. Astrônomos como Hiparco, Ptolomeu e Menelau são lembrados por contribuições para a astronomia e para a trigonometria;
- No capítulo dois encontraremos definições e relações trigonométricas com uso frequente no nível médio, bem como, definições de temas utilizados no nível superior como Série de Funções e Série de Fourier;
- No capítulo três encontraremos aplicações para diversas relações vistas no capítulo anterior, cuja finalidade é mostrar, na prática, a importância da trigonometria básica, tanto no nível médio, quanto no superior.

Capítulo 1

Contexto Histórico

Neste capítulo, recordaremos aplicações da trigonometria feitas por civilizações a.C.. Destacaremos contribuições de astrônomos como Hiparco, considerado o pai da trigonometria, Ptolomeu, pioneiro em realizar melhoras nos trabalhos deixados por Hiparco, e Menelau de Alexandria, o pioneiro na definição para a trigonometria esférica. Povos indianos, árabes e hindus, embora de forma breve, serão mencionados neste trabalho por terem contribuído no avanço da trigonometria aperfeiçoando as criações deixadas pelos egípcios e gregos.

1.1 Gregos e Egípcios

Segundo [11], a trigonometria é o ramo da matemática que trata do cálculo de ângulos, particularmente em triângulos retângulos. Até o século 16, ela era realmente uma parte da geometria, mas desde então ela passou a ser considerada uma área independente da matemática.

Como qualquer polígono pode ser reduzido a um número de triângulos, a trigonometria permite aos matemáticos trabalhar com todas as áreas ou superfícies que sejam limitadas por linhas retas (ver figura 1.1). A trigonometria plana trata de áreas, ângulos e distâncias em um plano. A trigonometria esférica trata de ângulos e distâncias no espaço tridimensional.

Os egípcios tinham algum conhecimento de trigonometria, como demonstra a construção de suas pirâmides. O papiro de *Ahmes* inclui um problema que determina a *seked*, a inclinação da pirâmide (Ver figura 1.2) a partir da altura e da base (ver figura 1.3). Ela era expressa como a relação oposta de nossa medida do gradiente. Porém, os egípcios não eram rigorosos em seu estudo de triângulos. Como em outras áreas da matemática, eles estavam interessados em aplicações práticas e não na trigonometria pura.

Os antigos matemáticos indianos também sabiam alguma coisa sobre trigonometria. Os *Sulba sutras*, no contexto da descrição de altares, contém um cálculo do

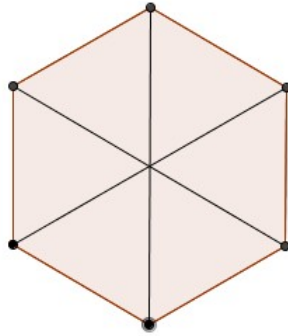


Figura 1.1: hexágono regular

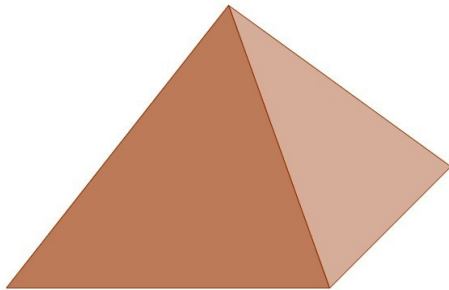


Figura 1.2: Pirâmide

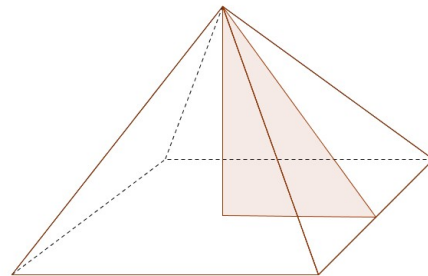


Figura 1.3: Inclinação da pirâmide

seno de 45° como $\frac{1}{\sqrt{2}}$. No entanto, ficou por conta dos gregos o desenvolvimento apropriado da trigonometria. Os gregos tomaram a linha reta e o círculo como base de sua geometria e a partir daí desenvolveram a trigonometria.

A convenção de 360° em um círculo e 60 minutos em um grau teve origem na matemática helênica, aparentemente, já estava em uso no tempo de *Hiparco da Bitínia* (c. 190-120 a.C) (figura 1.4). Provavelmente, teve origem na divisão astronômica babilônica do zodíaco (ver figura 1.5) em 12 signos ou 36 decanos e o círculo anual de, aproximadamente, 360 dias.

O sistema superior usado pelos babilônicos para representar frações o tornou mais útil do que os sistemas egípcios ou gregos e *Ptolomeu* (c. 90-168 d.C) usou o sistema de base 60 ao dividir em graus e minutos (*partes minutae primae*) e cada minuto em 60 segundos (*partes minutae secundae*).



Figura 1.4: Hiparco de Bitínia



Figura 1.5: Calendário do Zodíaco

1.2 Trigonometria esférica e planar

Enquanto um triângulo planar está sobre uma superfície plana, um triângulo esférico está sobre a superfície de uma esfera. Ele é composto pelos arcos de três círculos que se intercepta ao redor da esfera, ou planos que cortam a esfera (ver figura 1.6).

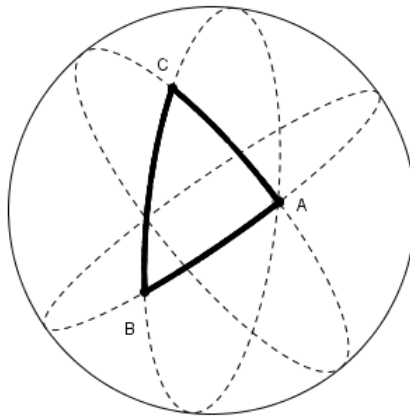


Figura 1.6: Triângulo Esférico ABC

A primeira definição de um triângulo esférico é encontrada em um trabalho do egípcio *Menelau de Alexandria* (c.100 d.C.) (figura 1.7). Ele desenvolveu os equivalentes dos princípios de Euclides da trigonometria planar, mas os aplicou a triângulos

esféricos. Os triângulos esféricos são, claramente, essenciais na astronomia, na náutica e navegação.



Figura 1.7: Menelau de Alexandria

Enquanto os ângulos de um triângulo planar totalizam 180° , os ângulos de um triângulo esférico totalizam mais de 180° . Há também outras diferenças fundamentais: até por volta de 1250 e do trabalho de *Nasir al-Din al-Tusi* (1201-74) (Figura 1.8), a trigonometria esférica esteve sempre integrada com a astronomia.



Figura 1.8: Nasir al-Din al-Tusi

Al-Tusi foi o primeiro a listar seis tipos distintos de triângulos retângulos em uma superfície esférica e o primeiro a tratar a trigonometria como uma disciplina discreta. Ele desenvolveu a trigonometria esférica na sua forma atual.

Hiparco foi o primeiro a compilar tabelas de funções trigonométricas. Seu interesse era por triângulos imaginários "traçados" sobre a esfera imaginária do céu à noite, relacionando os corpos celestes uns com os outros de maneira que ele podia calcular e prever as posições dos planetas.

Cláudio Ptolomeu Expandiu o trabalho de Hiparco, ao criar melhores tabelas trigonométricas e definições aproximadas para as funções trigonométricas inversas arco-seno e arco-cosseno.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo trataremos de definições, propriedades, teoremas acompanhados de suas demonstrações, critérios, relações, postulados e algumas funções trigonométricas e suas respectivas inversas que são trabalhadas nas escolas de nível médio, como também, a definição para $\exp(x)$ vista no curso de cálculo. Recordaremos a relação de Euler para x real, definiremos cosseno e seno no campo complexo e encerraremos com noções para Série de Fourier.

2.1 Postulado do Transporte de Segmentos

Definição 2.1 *Dados um segmento \overline{AB} e uma semirreta de origem A' , existe sobre esta semirreta um único ponto B' tal que $\overline{A'B'}$ seja congruente a \overline{AB} .*

Observação 2.1 *A congruência (símbolo \equiv) de segmento ou de ângulo é uma noção primitiva que satisfaz os postulados da reflexividade, simetria e transitividade.*

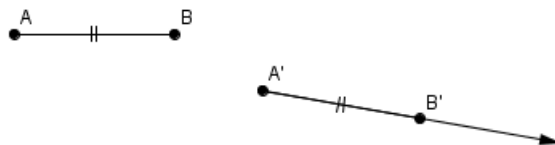


Figura 2.1: Segmentos Congruentes

2.2 Postulado do Transporte de Ângulos

Definição 2.2 Dado um ângulo $A\hat{O}B$ e uma semirreta $\overrightarrow{O'A'}$ de um plano, existe sobre este plano, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\hat{O}'B'$ congruente do ângulo $A\hat{O}B$.

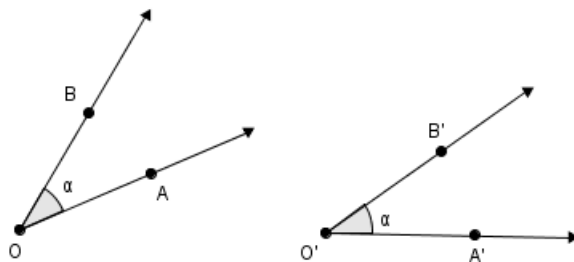


Figura 2.2: Ângulos Congruentes

2.3 Congruência de Triângulos

Definição 2.3 Dois triângulos T_1 e T_2 são congruentes (Notação $T_1 \equiv T_2$) se, e somente se, existir uma correspondência entre seus vértices de modo que: os lados e os ângulos do primeiro triângulo T_1 sejam ordenadamente congruentes, respectivamente, aos lados e aos ângulos do triângulo T_2 .

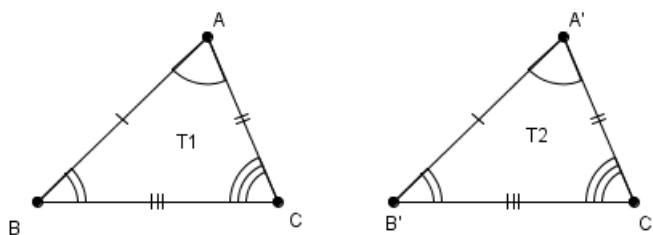


Figura 2.3: Triângulos Congruentes

$$\Delta_{ABC} \equiv \Delta_{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} & \text{e } \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} & \text{e } \hat{B} = \hat{B}' \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} & \text{e } \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

2.3.1 Caso de Congruência LAL

Esta Definição é postulado e diz que:

Definição 2.4 *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes*

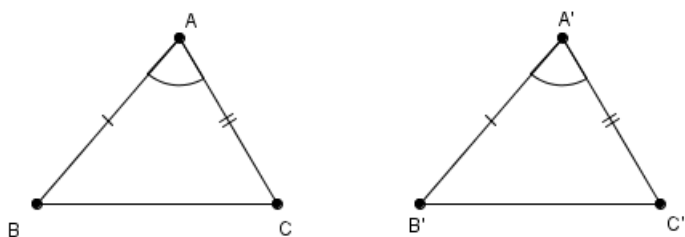


Figura 2.4: Congruência LAL

$$\text{Se } \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{ABC} \equiv \Delta_{A'B'C'}$$

2.3.2 Caso de Congruência ALA

Definição 2.5 *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então, esses triângulos são congruentes.*

2.4 Semelhança de Triângulos

Definição 2.6 *Dois triângulos são semelhantes (simbologia \sim) se, e somente se, os ângulos de um são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro e os lados opostos à ângulos iguais (ou homólogos) são proporcionais.*

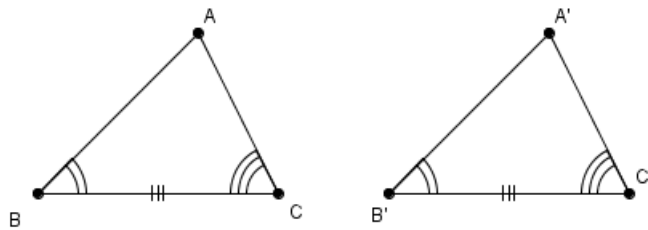


Figura 2.5: Congruência ALA

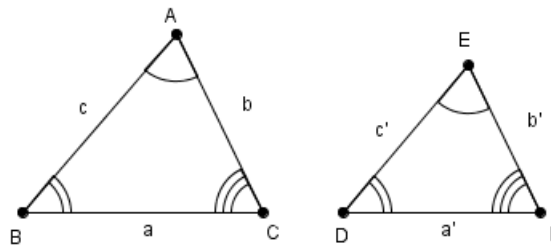


Figura 2.6: Triângulos Semelhantes

$$\Delta_{ABC} \sim \Delta_{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

2.4.1 Caso de Semelhança (AA)

Definição 2.7 Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então, eles são semelhantes.

2.5 Triângulo Retângulo

Definição 2.8 Triângulo retângulo, é todo triângulo no qual um de seus ângulos internos é reto (medida em graus 90 ou $\hat{A} = 90^\circ$)

2.5.1 Elementos Notáveis

No triângulo ABC (reto em A), figura 2.8

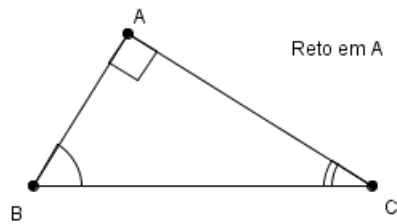


Figura 2.7: Triângulos Retângulo ABC

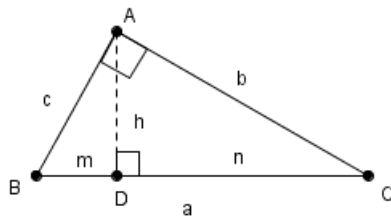


Figura 2.8: Altura \overline{AD} Relativa a Hipotenusa no Triângulo ABC

Adotaremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BC} = a \quad (\text{hipotenusa}). \\ \overline{AC} = b \quad (\text{cateto}). \\ \overline{AB} = c \quad (\text{cateto}). \\ \overline{BD} = m \quad (\text{projeção do cateto } c \text{ sobre a hipotenusa}). \\ \overline{CD} = n \quad (\text{projeção do cateto } b \text{ sobre a hipotenusa}). \\ \overline{AD} = h \quad (\text{altura relativa à hipotenusa}). \end{array} \right.$$

Percebe-se também que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{ACB} = 90^\circ - \hat{ABC} = \hat{DAB} \\ \hat{ABC} = 90^\circ - \hat{ACB} = \hat{DAC} \end{array} \right.$$

2.5.2 Teorema de Pitágoras (enunciado)

O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Observação 2.2 *Unidade de medida em metros (m)*

De acordo com o Teorema de Pitágoras:

2.5. TRIÂNGULO RETÂNGULO

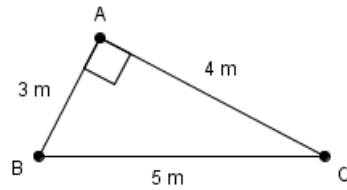


Figura 2.9: Aplicação do Teorema de Pitágoras

$$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$25 = 9 + 16$$

$$25 = 25$$

2.5.3 Demonstração do Teorema de Pitágoras

Na figura abaixo, apresentamos um triângulo ABC , reto em A , e seus elementos notáveis.

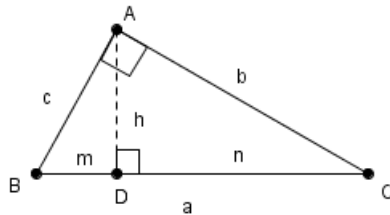


Figura 2.10: Elementos Notáveis no Triângulo Retângulo

Mais ainda:

$$\begin{cases} \hat{A}CB = 90^\circ - \hat{A}BC = \hat{D}AB \\ \hat{A}BC = 90^\circ - \hat{A}CB = \hat{D}AC \end{cases}$$

Nota-se também que:

(i) $m + n = a$

(ii) Por semelhança (caso AA):

- $ABC \sim DBA$, logo: $\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$

- $ABC \sim DAC$, logo: $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n(II_i)$

Fazendo $II_i + II_{ii}$, vem:

$$c^2 + b^2 = a \cdot (m + n). \text{ Como, por (i) } m + n = a, \text{ conclui-se que:}$$

$$c^2 + b^2 = a \cdot a \Rightarrow c^2 + b^2 = a^2 \text{ (Teorema de Pitágoras)}$$

2.6 Declividade ou Inclinação de uma Rampa

Definição 2.9 A declividade é a razão entre a variação vertical e a variação horizontal.

Veja o esquema: seja a rampa na figura seguinte.

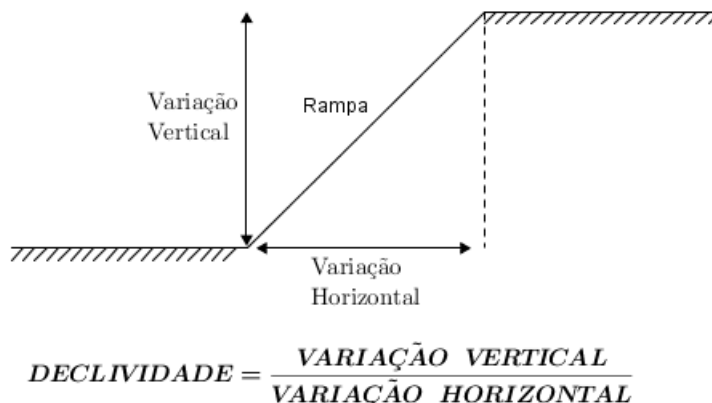


Figura 2.11: Rampa e suas Variações

Exemplo: O que significa uma declividade de 5% (unidade de medida usada em um município de São Paulo para representar inclinação de rampa)? \diamond

Solução: 2.1 A declividade de 5% equivale a razão $\frac{1}{20}$, isto é:

$$5\% = \frac{5}{100} \Rightarrow 5\% = \frac{1}{20}.$$

2.7. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Significando que, quando houver uma variação de 1 unidade de comprimento (u.c.) na vertical, causará uma variação de 20 unidade de comprimento (u.c.) na horizontal.

Veja no esquema onde uma variação de 1 (u.c.) na vertical corresponde uma variação de 20 (u.c.) na horizontal.

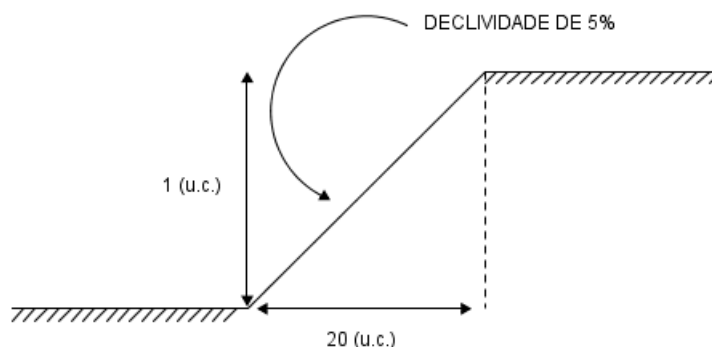


Figura 2.12: Rampa

2.7 Razões Trigonômétricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo

2.7.1 Tangente de um Ângulo Agudo

Definição 2.10 Em um Triângulo Retângulo, a tangente de um ângulo agudo θ (notação $\text{tg } \theta$) é dada pela razão entre a medida do cateto oposto a θ e a medida do cateto adjacente a θ .

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{medida do cateto adjacente a } \theta}$$

Exemplo: Seja o triângulo ABC retângulo em A , cujos catetos \overline{AB} e \overline{AC} medem 6 cm e 8 cm, respectivamente. \diamond

Sendo o ângulo θ agudo, determine o valor para $\text{tg } \theta$?

Solução: 2.2 $\text{tg } \theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

2.7. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

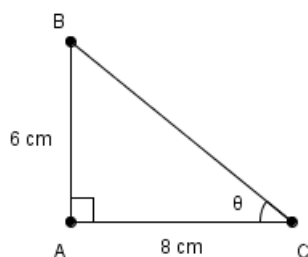


Figura 2.13: Triângulo ABC com Ângulo Fixo θ

2.7.2 Seno e Cosseno de um Ângulo Agudo

Definição 2.11 Considerando a Figura 2.14 e fixando o θ , a cada 8 cm de deslocamento horizontal (ou a cada 6 cm de deslocamento vertical) o Teorema de Pitágoras garante um deslocamento, sobre a hipotenusa, de 10 cm.

Relacionando essas grandezas por meio das seguintes razões, definiremos que:

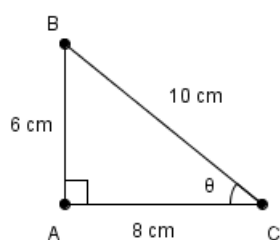


Figura 2.14: Ângulo Fixo θ no Triângulo ABC

$$* \frac{6}{10} = \frac{\text{deslocamento vertical}}{\text{deslocamento sobre a hipotenusa}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \text{sen } \theta$$

$$** \frac{8}{10} = \frac{\text{deslocamento horizontal}}{\text{deslocamento sobre a hipotenusa}} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \text{cos } \theta$$

2.7.3 Arco de Circunferência

Definição 2.12 Qualquer parte da circunferência limitada por dois de seus pontos.

Arco AB , Notação: \widehat{AB}

Observação 2.3 caso os pontos coincidam, teremos um arco nulo ou arco de uma volta.

2.7. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

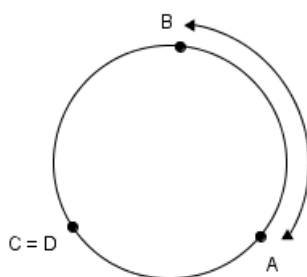


Figura 2.15: Arco AB

2.7.4 Unidade de Medida Grau (Notação: $^\circ$)

O arco de um Grau (1°) é igual a $\frac{1}{360}$ do arco de uma volta. Logo, o arco de uma volta mede 360° .

2.7.5 Unidade de Medida 1 Radiano (Notação: 1 Rad)

Arco de medida 1 Radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido. Para sabermos quantos radianos têm o arco de uma volta, tomaremos da geometria plana para o comprimento de uma circunferência de raio r o valor de $2\pi r$. Logo, usando a regra de três simples e direta:

Medida do arco		Comprimento do Arco
1 Rad	\longleftrightarrow	r
θ	\longleftrightarrow	$2\pi r$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
 r \cdot \theta &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 1 \Rightarrow \\
 \theta &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} \cdot 1 \Rightarrow \\
 \theta &= 2 \cdot \pi (rad).
 \end{aligned}$$

2.7.6 Conversão: Grau e Radiano

Na transformação de grau para radianos, ou vice-versa, faremos uso da regra de três:

Medida do Arco (em rad)		Medida do Arco (em grau)
$2 \cdot \pi$	\longleftrightarrow	360°
x	\longleftrightarrow	θ

2.8 Trigonometria na Circunferência

2.8.1 Circunferência Trigonométrica

Consideremos num plano um sistema de coordenadas cartesianas xoy e uma circunferência com centro na origem e raio unitário (veja figura 2.16).

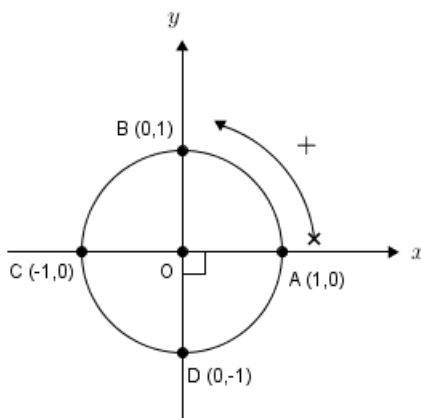


Figura 2.16: Circunferência Trigonométrica de Centro O e Raio 1

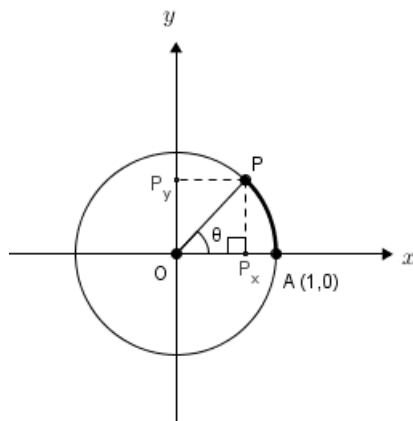
Convencionamos o ponto A como origem para a contagem dos arcos e que os arcos percorridos no sentido anti-horário a partir do ponto A terá medida positiva. Essa circunferência orientada será denominada circunferência trigonométrica.

2.8.2 Seno e Cosseno

Na circunferência trigonométrica tomemos um ponto P extremidade do arco \widehat{AP} (Ver Figura 2.17)

Nota-se que:

(X_P, Y_P) coordenadas do ponto P e que para o triângulo OPP_x , o $\cos \theta = X_P$ e $\sin \theta = Y_P$. Logo, concluímos que o cosseno de θ é a abscissa do ponto P e o seno de θ é a sua ordenada.

Figura 2.17: Ponto P e Suas Projeções Ortogonais

Observação 2.4 O Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo OPP_x , diz que:

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1.$$

Esta relação é conhecida como **RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA**.

2.8.3 Tangente

Tracemos a reta t tangente à circunferência pelo ponto A (ver Figura 2.18)

Prolongando o segmento \overline{OP} até tocar a reta t num ponto (T). Para o triângulo retângulo OAT é conhecida a relação:

$$\text{tg } \theta = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}.$$

2.8.4 Outras Relações Trigonômétricas

i) $\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)

Na Figura 2.19:

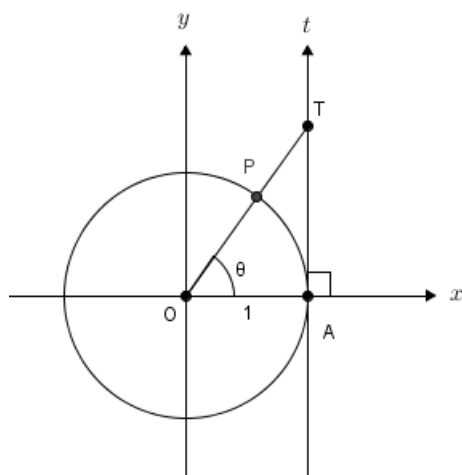


Figura 2.18: Reta t Paralela ao Eixo oy

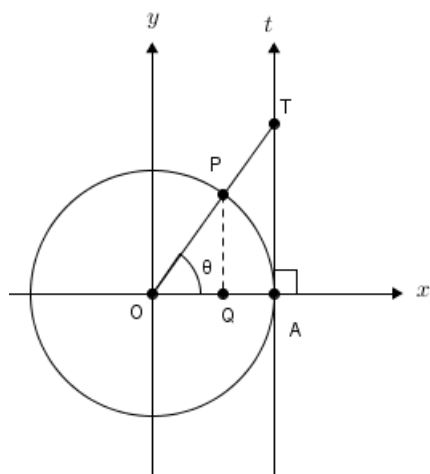


Figura 2.19: Triângulos Semelhantes OPQ e OTA

Os triângulos OPQ e OTA são semelhantes (caso AA). Então:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}.$$

2.8. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

$$\text{Mas: } \begin{cases} \overline{PQ} = \text{sen } \theta \\ \overline{OQ} = \text{cos } \theta \\ \overline{OA} = 1 \\ \overline{TA} = \text{tg } \theta \end{cases} \quad \text{Logo, } \frac{\text{sen } \theta}{\text{tg } \theta} = \frac{\text{cos } \theta}{1} \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$

ii) Cotangente de θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)

Na Figura 2.20:

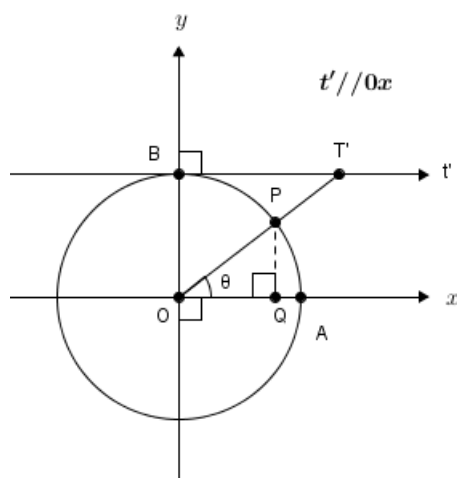


Figura 2.20: Triângulos Semelhantes OPQ e OBT'

A reta t' é tangente à circunferência no ponto B . T' é o ponto que a reta t' intercepta a reta \overleftrightarrow{OP} . Os triângulos retângulos PQO e OBT' são semelhantes (caso AA), então:

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{BT'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BO}}.$$

$$\text{Mas: } \begin{cases} \overline{OQ} = \text{cos } \theta \\ \overline{PQ} = \text{sen } \theta \\ \overline{BO} = 1 \end{cases} \quad \text{Logo, } \frac{\text{cos } \theta}{\overline{BT'}} = \frac{\text{sen } \theta}{1} \Rightarrow \overline{BT'} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}.$$

definiremos a razão $\frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$ como sendo cotangente de θ , daí:

$$\text{cotg } \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}.$$

2.8. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

iii) Secante de θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)

Na Figura 2.21:

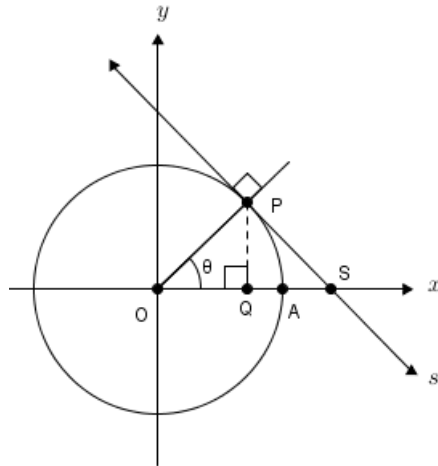


Figura 2.21: Reta s Tangente no Ponto P e Triângulos Semelhantes OPQ e OPS

A reta s é tangente à circunferência no ponto P . S é o ponto que a reta s intercepta o eixo $0x$. Os triângulos retângulos OPS e OQP são semelhantes (caso AA), então:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}.$$

$$\text{Mas: } \begin{cases} \overline{OP} = 1 \\ \overline{OQ} = \cos \theta \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\overline{OS}}{1} = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \overline{OS} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

definiremos a razão $\frac{1}{\cos \theta}$ como sendo a secante de θ , daí:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

iv) Cossecante de θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) na Figura 2.22:

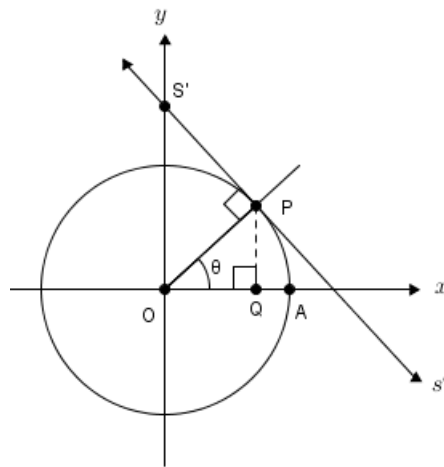


Figura 2.22: Reta s' Tangente no Ponto P e Triângulos Semelhantes OPQ e OPS'

A reta s' é tangente à circunferência no ponto P . S' é o ponto que a reta s' intercepta o eixo $0y$. Os triângulos retângulos OPQ e $S'OP$ são semelhantes (caso AA), então:

$$\frac{\overline{OS'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}.$$

Mas:
$$\begin{cases} \overline{OP} = 1 \\ \overline{PQ} = \text{sen } \theta \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\overline{OS'}}{1} = \frac{1}{\text{sen } \theta} \Rightarrow \overline{OS'} = \frac{1}{\text{sen } \theta}.$$

definiremos a razão $\frac{1}{\text{sen } \theta}$ como sendo a cossecante de θ , daí:

$$\text{cossec } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

2.8.5 Relações Trigonométricas Para a Soma de Dois Arcos

i) $\text{sen}(\alpha + \beta)$

Na Figura 2.23:

2.8. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

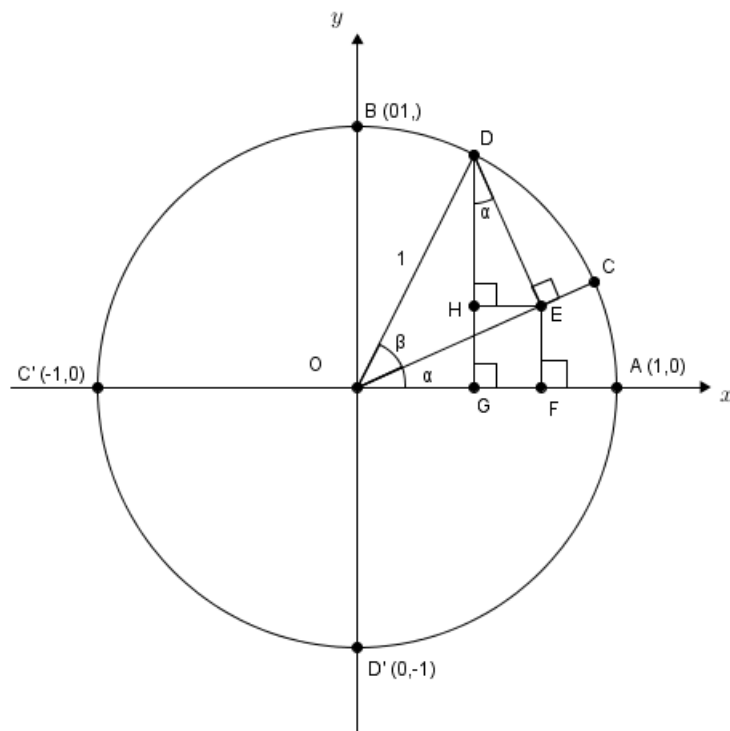


Figura 2.23: Projeções Ortogonais dos Pontos D e E

\overline{HE} foi traçado paralelo a \overline{GF} . Logo, $\overline{HE} = \overline{GF}$ (1), o ângulo \widehat{HDE} também mede α , pois os seus lados são perpendiculares aos do ângulo \widehat{FOE} .

o $\overline{sen}(\alpha + \beta)$ procurado corresponde à medida do segmento \overline{DG} , onde $\overline{DG} = \overline{DH} + \overline{HG}$.

- Buscando \overline{DH}

No triângulo HDE da Figura 2.24 note que $\overline{DH} = \overline{cos} \alpha \overline{sen} \beta$ (2), pois, $\overline{DE} = \overline{sen} \beta$.

- Buscando \overline{HG} .

No triângulo OED da Figura 2.25, temos que $\overline{OE} = \overline{cos} \beta$.

No triângulo OFE da Figura 2.26 (onde, $\overline{OE} = \overline{cos} \beta$), temos: $\overline{EF} = \overline{sen} \alpha \overline{cos} \beta$, como $\overline{EF} = \overline{HG}$, temos $\overline{HG} = \overline{sen} \alpha \overline{cos} \beta$ (3).

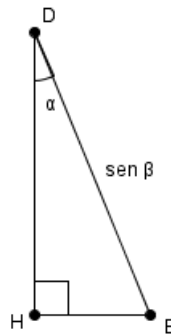


Figura 2.24: Ângulo Fixo α no Triângulo EHD

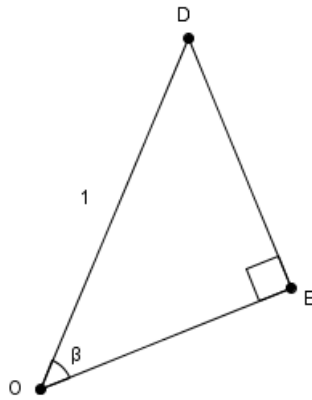


Figura 2.25: Ângulo Fixo β no Triângulo OED

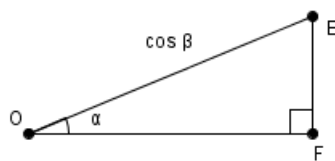


Figura 2.26: Triângulo Retângulo OFE

Portanto, como $\text{sen}(\alpha + \beta) = \overline{DE}$ e $\overline{DE} = \overline{DH} + \overline{HG}$, vem:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha.$$

Note que a partir dessa fórmula, podemos encontrar outras também muito importantes, como: $\text{sen}(\alpha - \beta)$, $\text{sen}(2\alpha)$, $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e etc.

ii) $\cos(\alpha + \beta)$

O $\cos(\alpha + \beta)$ corresponde à medida do segmento \overline{OG} , onde $\overline{OG} = \overline{OF} - \overline{GF}$ na figura 2.23.

- Buscando $\overline{GF} = \overline{HE}$ (lados oposto no retângulo $GFEH$).

No triângulo HDE da Figura 2.27 note que $\overline{HE} = \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$ ou, como $\overline{HE} = \overline{GF}$, temos $\overline{GF} = \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$ (4).

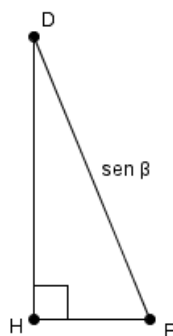


Figura 2.27: Triângulo Retângulo DHE

- Buscando \overline{OF}

No triângulo OFE da Figura, temos: $\overline{OF} = \cos \alpha \cos \beta$ (5).

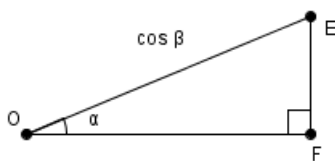


Figura 2.28: Triângulo Retângulo OFE

Portanto, de (5) - (4), vem:

$$\overline{OG} = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ ou, } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta.$$

Note que a partir dessa fórmula, podemos encontrar outras, também muito importantes, como: $\cos(\alpha - \beta)$, $\cos 2\alpha$, $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e etc.

iii) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

A tangente procurada corresponde a razão $\frac{\overline{DG}}{\overline{OG}} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ na Figura 2.23. Portanto:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

Como $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ ($0^\circ < \alpha, \beta, (\alpha + \beta) < 90^\circ$), a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ é equivalente a:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}},$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}.$$

Portanto, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Note que a partir dessa fórmula, podemos encontrar outras como $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ e etc.

2.8.6 Funções Seno, Cosseno, Tangente no Campo Real e Suas Inversas

Definição 2.13 Dado um número real x , seja o ponto $P(\cos x, \operatorname{sen} x)$ sua imagem na circunferência trigonométrica (ver Figura 2.29).

Denominaremos função seno, a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$. Para a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ denominaremos função cosseno.

Consideremos agora o eixo das tangentes (ver Figura 2.30).

\overline{OT} é o prolongamento do segmento \overline{OP} até tocar o eixo das tangentes no ponto T . uma vez que $\overline{AT} = \operatorname{tg} x$ para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k inteiro), definiremos a função tangente como a função $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ onde $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

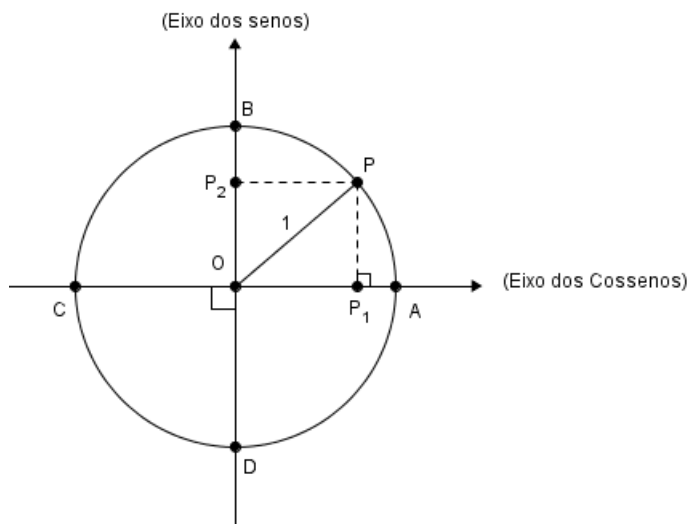


Figura 2.29: Circunferência Trigonométrica de Centro O

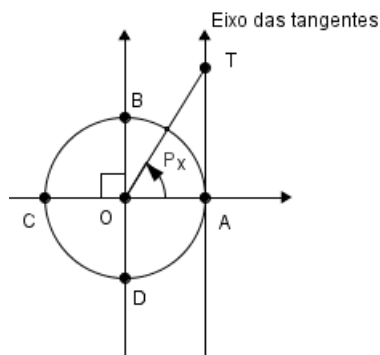


Figura 2.30: Eixo das Tangentes t

2.8.7 Tabela de Valores Notáveis de $[0, 2\pi]$.

Observação 2.5 *As definições de cada função torna evidente cada valor usado no preenchimento da tabela 2.1.*

2.8.8 Gráficos e Suas Propriedades

Função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen } x$

2.8. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Grau ou Rad	0 ou 2π	90° ou $\frac{\pi}{2}$	180° ou π	270° ou $\frac{3\pi}{2}$
Seno	0	1	0	-1
Cosseno	1	0	-1	0
Tangente	0	Não está definida	0	Não está definida

Tabela 2.1: Tabela de Valores Notáveis

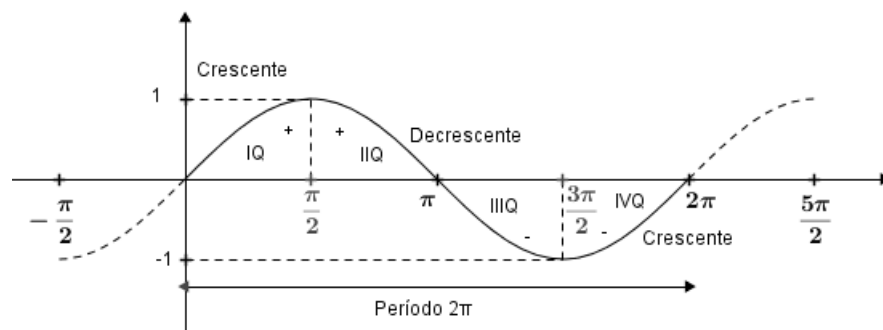


Figura 2.31: Senóide

Período: $P = 2\pi$;

Sinais: IºQ (+); IIºQ (+); IIIºQ (-); IVºQ (-);

Paridade: Função Ímpar (Gráfico Simétrico em Relação à Origem).

Função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$.

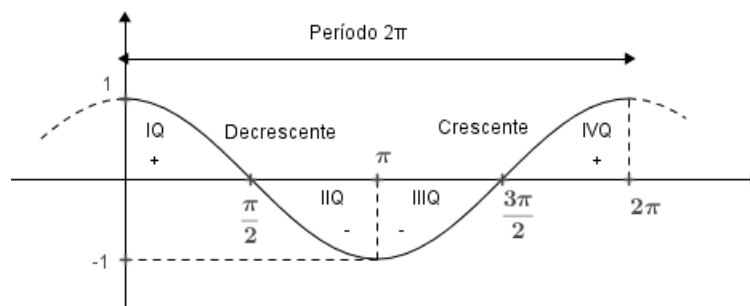


Figura 2.32: Cossenóide

Período: $P = 2\pi$;

Sinais: IºQ (+); IIºQ (-); IIIºQ (-); IVºQ (+);

2.8. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Paridade: Função Par (Gráfico Simétrico em Relação ao Eixo 0Y).

Função $f : \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$

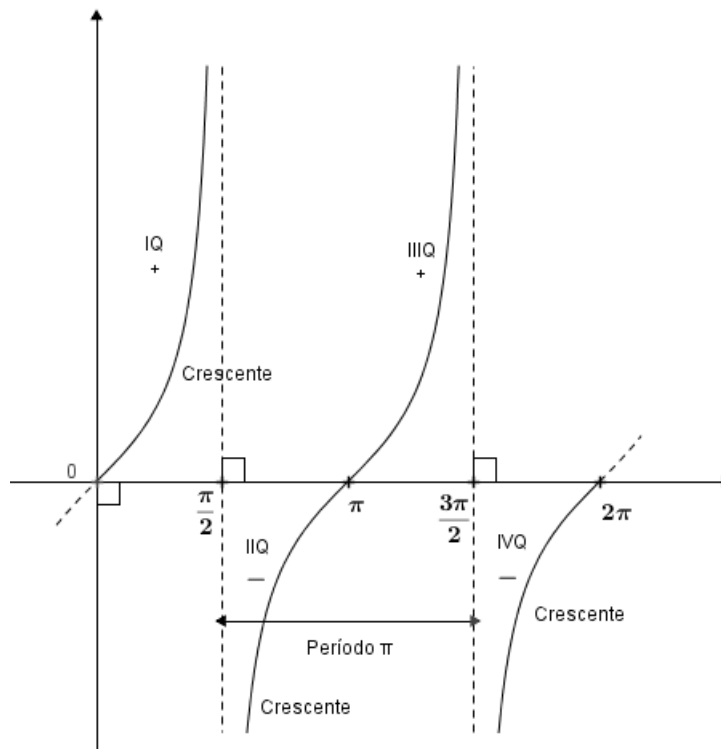


Figura 2.33: Tangentóide

Período: $P = \pi$;

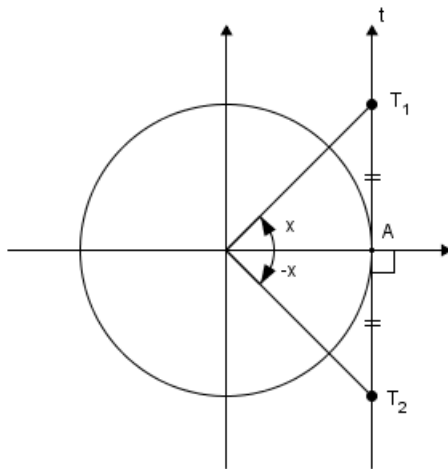
Sinais: IQ (+); IIQ(-); IIIQ(+); IVQ(-);

Paridade: Função Ímpar (Ver Figura 2.34).

2.8.9 Funções Inversas Trigonômétricas

Até agora, a partir da medida do ângulo x (ou arco), determinávamos os valores do seno, cosseno e tangente deste ângulo (ou arco).

Agora, percorreremos o sentido inverso



$$\begin{cases} \overline{AT_2} & = -\overline{AT_1} \\ f(x) + f(-x) & = 0 \end{cases}, \text{ daí } f(x) = -f(-x), \text{ isto é: a função tangente é ímpar.}$$

Figura 2.34: Paridade Ímpar no Eixo das Tangentes

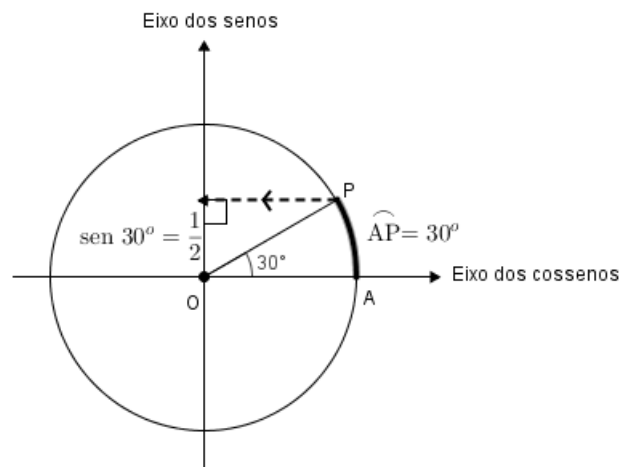


Figura 2.35: Projeção Ortogonal no Eixo dos Senos

Para encontrarmos o valor do ângulo x (ou arco), definiremos as funções trigonométricas inversas.

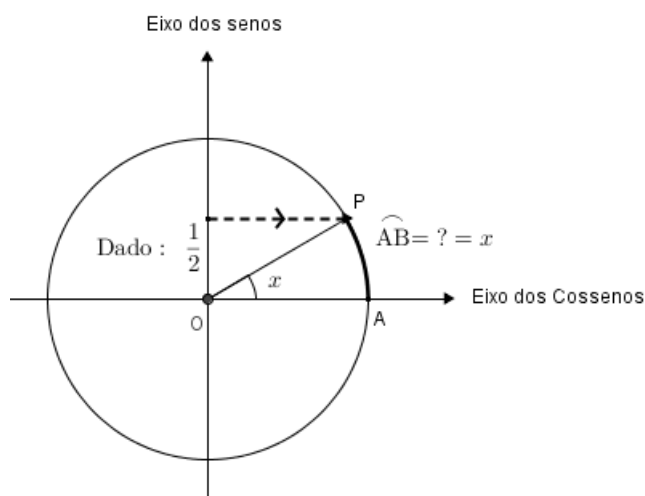


Figura 2.36: Sentido Inverso da Projeção da Figura 2.35

2.8.10 Função Arco Seno

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen } x$ não é bijetiva (não admite inversa), caso contrário, existiria algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen } x = 3$. Porém, considerando $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ (ver Figura 2.37), tal que $f(x) = \text{sen } x$

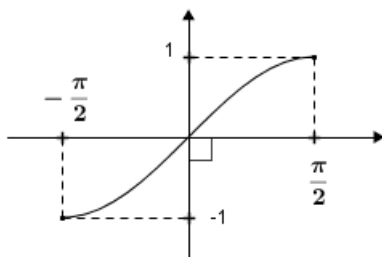


Figura 2.37: Função Seno de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

f é bijetiva. Assim, denominaremos f^{-1} ou arco-seno como a função inversa da função f . Nota-se que:

f^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a cada $x \in [-1, 1]$ corresponde a um só $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que y é um arco cujo seno é x , em símbolos:

$$y = \arcsen x \Leftrightarrow \sen y = x \text{ e } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Graficamente fica:

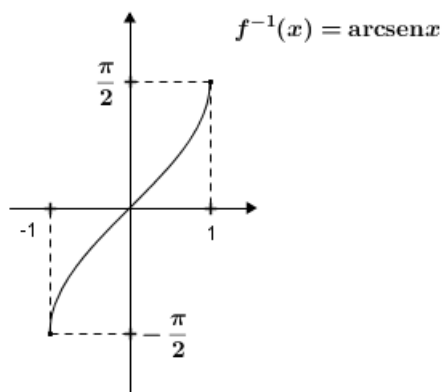


Figura 2.38: Arco Seno

2.8.11 Função Arco Cosseno

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ não é bijetiva ($\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = 4$). Porém, considerando $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ tal que $f(x) = \cos x$ (ver Figura 2.39).

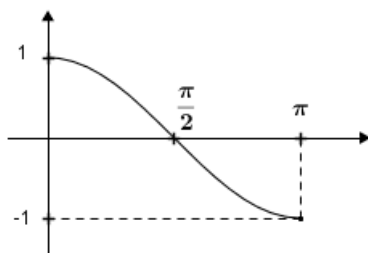


Figura 2.39: Função Cosseno de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

f é bijetiva e f^{-1} ou função arco-cosseno passará a ser a sua função inversa.

Nota-se que: $[-1, 1]$ é o domínio de f^{-1} , $[0, \pi]$ é o contradomínio e o fato de que a cada $x \in [-1, 1]$ corresponde a um só $y \in [0, \pi]$ tal que y é um arco cujo cosseno é x é simbolicamente escrito como, $y = \arccos x \iff \cos y = x$ e $y \in [0, \pi]$.

Graficamente fica:

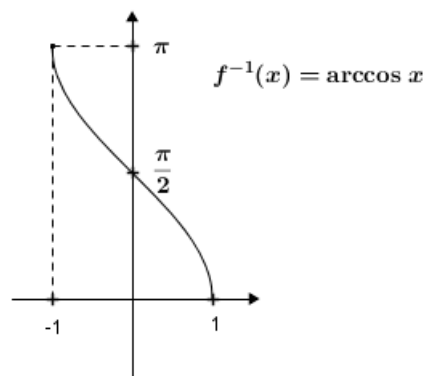


Figura 2.40: Função arco-cosseno

2.8.12 Função Arco Tangente

A função $f : \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ Tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ não é bijetiva (já que $0^\circ \neq \pi$ e $\operatorname{tg} 0^\circ = \operatorname{tg} \pi$). Se considerarmos $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ (ver Figura 2.41).

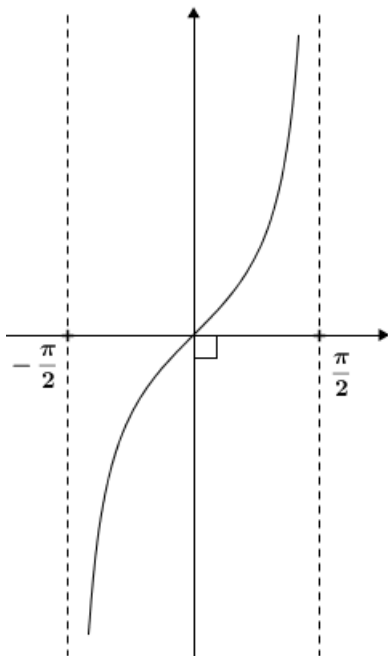


Figura 2.41: Função Tangente de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

f é bijetiva e f^{-1} ou função Arco-tangente passará a ser a sua função inversa.

Note que: \mathbb{R} é o domínio de f^{-1} , $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ o contradomínio e a cada $x \in \mathbb{R}$ corresponde uma só $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tal que y é um arco cuja tangente é x , em símbolos:

$$y = \operatorname{arctg} x \iff \operatorname{tg} y = x \text{ e } y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

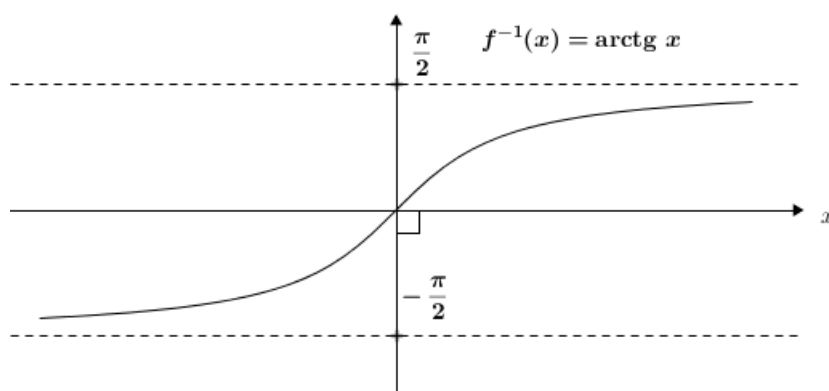


Figura 2.42: Função arco-tangente

2.9 Exp(x) e Relação de Euler

Definição 2.14 No curso de cálculo define-se a função e^x ($x \in \mathbb{R}$) como:

$$\operatorname{Exp}(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

ou seja, uma soma infinita (Série infinita) com domínio de convergência o conjunto dos números Reais.

2.9.1 Propriedade Multiplicativa

$$e^{t_1} \cdot e^{t_2} = e^{t_1+t_2}, \quad t_1 \in \mathbb{R} \text{ e } t_2 \in \mathbb{R}$$

2.9.2 Relação de Euler para x Real

$$e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$$

e para

$$e^{-i \cdot x} = \cos(-x) + i \cdot \operatorname{sen}(-x).$$

Como a função cosseno é par e a função seno é ímpar, vem:

$$e^{-i \cdot x} = \cos(x) - i \cdot \operatorname{sen}(x).$$

2.9.3 Seno e Cosseno Complexo

$$(1) e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x \quad (x \in \mathbb{R})$$

como:

$$(2) e^{-i \cdot x} = \cos(x) - i \cdot \operatorname{sen}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Fazendo:

(1) + (2) e (1) - (2), segue-se que:

$$\text{De (1) + (2), vem: } \cos x = \frac{e^{i \cdot x} + e^{-i \cdot x}}{2}$$

$$\text{De (1) - (2), vem: } \operatorname{sen} x = \frac{e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}}{2 \cdot i}.$$

Para cada $z = x + y \cdot i$ com x e y Reais, definamos:

$$\begin{cases} \cos(z) = \frac{e^{i \cdot z} + e^{-i \cdot z}}{2} \\ \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{i \cdot z} - e^{-i \cdot z}}{2 \cdot i} \end{cases}, \text{ com o seno e cossenos complexos.}$$

2.9.4 Noções Para Série de Fourier

Definição 2.15 (*Série de Funções*) Uma Série $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$, (m natural), na qual cada f_m é uma função denominaremos Série de funções.

Exemplo:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (n natural), x variável real, com $|x| < 1$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}$ (k natural), x variável real.

c) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$, a_n e b_n números reais dados e n natural ($n \geq 1$)
(Série trigonométrica)

◇

Observação 2.6 Dizemos que a Série de funções $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ converge uniformemente, em um domínio D , à função $t : D \rightarrow \mathbb{R}$ se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um natural n_0 tal que, para todo $x \in D$, $n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{m=0}^{\infty} f_m - t(x) \right| < \epsilon$. Não devemos esquecer da existência de critérios como de Cauchy e o de Weierstrass, bastante utilizados para decidir se uma convergência é uniforme ou não.

Definição 2.16 (Coeficientes de Fourier em uma Função g) Sendo $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ e g integrável os números $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx$ para $n \geq 1$ e $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$ para $n \geq 1$ (n natural), são denominados coeficientes de Fourier de g .

Definição 2.17 (Série de Fourier de uma função g) A Série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ onde a_n e b_n são coeficientes de Fourier de g , é dita Série de Fourier de g .

Observação 2.7 Lembraremos neste momento de certas integrais com uso frequente nas Séries de Fourier, bem como, a regra de integração por partes.

- $\int \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n} + w$ (w constante real, $n \geq 1$ natural)
- $\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n} + w$
- $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$

Admitamos as funções f e g deriváveis, contínuas e integráveis em um intervalo I .

Capítulo 3

Aplicações

Conviveremos neste capítulo com situações cujo desenvolvimento dependerá do uso de uma ou mais das fundamentações teóricas vista no capítulo anterior.

3.1 Arco soma e função trigonométrica inversa

- 01) Utilizando a fórmula $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$ e a equivalência $\operatorname{arctg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = y$ (x e y reais e diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, k inteiro). Verifique que $\frac{\pi}{4} = 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{9}{46}$.

Solução: 3.1 Seja $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} a$.

Fazendo:

$$\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \\ e \\ y = \operatorname{arctg} a \end{array} \iff \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \\ e \\ \operatorname{tg} y = a \end{array} (*)$$

Portanto, da igualdade: $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} a$, vem:

$\frac{\pi}{4} = x + y \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}(x + y)$. Como $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$ e $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, segue-se que:

$1 = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$. Mas, por (*) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$ e $\operatorname{tg} y =$

a. Substituindo, Vem:

$$\frac{1}{5} + a = 1 - \frac{1}{5}a \Rightarrow 1 + 5a = 5 - a \Rightarrow a = \frac{2}{3}.$$

3.1. ARCO SOMA E FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA INVERSA

Logo, como: $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} a \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ (Afirmação 1)

Seja:

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} b.$$

Fazendo:

$$\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \\ e \end{array} \iff \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \\ e \end{array}, \left(t \in \mathbb{R} \text{ e } t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) (**).$$

$$t = \operatorname{arctg} b \quad \operatorname{tg} t = b$$

Portanto, da igualdade: $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} b$, vem:

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = x + t \iff \operatorname{tg}(x + t) = \frac{2}{3}.$$

Daí:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg} t = 2 - 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} t. \text{ Mas, por } (**) \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \text{ e } \operatorname{tg} t = b. \text{ Substituindo, vem:}$$

$$\frac{3}{5} + 3 \cdot b = 2 - \frac{2}{5} \cdot b \Rightarrow 3 + 15 \cdot b = 10 - 2 \cdot b \Rightarrow b = \frac{7}{17}.$$

Logo, como: $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ (Afirmação 1).

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{17} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{17} \text{ (Afirmação 2)}.$$

Seja:

$$\operatorname{arctg} \frac{7}{17} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} c.$$

Fazendo:

$$\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \\ e \end{array} \iff \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \\ e \end{array}, \left(w \in \mathbb{R} \text{ e } w \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) (***)$$

$$w = \operatorname{arctg} c \quad \operatorname{tg} w = c$$

Portanto, da igualdade: $\operatorname{arctg} \frac{7}{17} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} c$, vem:

$$\operatorname{arctg} \frac{7}{17} = x + w \iff \operatorname{tg}(x + w) = \frac{7}{17}.$$

Daí:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} w} = \frac{7}{17} \Rightarrow 17 \operatorname{tg} x + 17 \operatorname{tg} w = 7 - 7 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} w. \text{ Mas, por } (**)$$

*) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$ e $\operatorname{tg} w = c$. Substituindo, vem:

$$\frac{17}{5} + 17c = 7 - \frac{7}{5}c \Rightarrow 17 + 85c = 35 - 7c \Rightarrow c = \frac{9}{46}.$$

Logo, como $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{17}$ (Afirmação 2)

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{9}{46} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{9}{46}$$

Observação 3.1 Procedendo desta forma, John Machin (1680 - 1751) calculou para π uma aproximação com 100 casas decimais. O mesmo procedimento foi utilizado por William Shanks (1812 - 1882) Calculando para π uma aproximação com 707 casas decimais.

3.2 Equações trigonométricas no campo complexo

- 02) Verifique no campo complexo o número de soluções para a equação $\operatorname{sen} z = 3$, onde $z = x + yi$ (x e y reais).

Solução: 3.2 $\operatorname{sen} z = 3$ (por definição $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$), daí:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 6i \Leftrightarrow e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} - 6i = 0 \text{ (multiplicando ambos os membros por } e^{iz}\text{), vem:}$$

$(e^{iz})^2 - 6i(e^{iz}) - 1 = 0$ (fazendo $e^{iz} = w$), temos: $w^2 - 6iw - 1 = 0$ (equação do segundo grau em w). Logo:

$$\Delta = (-6i)^2 - 4(1)(-1)$$

$$\Delta = 36i^2 + 4 \text{ (como } 4 = -4i^2\text{)}$$

$$\Delta = 36i^2 - 4i^2$$

$$\Delta = 32i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot i^2}$$

$$\sqrt{\Delta} = 4i\sqrt{2}. \text{ Como: } w = \frac{6i \pm 4i\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow w = (3 \pm 2\sqrt{2})i.$$

Porém, como $e^{iz} = w$, vem:

$$e^{(x+yi)i} = (3 \pm 2\sqrt{2})i (z = x + yi) \Leftrightarrow e^{xi+yi^2} = (3 \pm 2\sqrt{2})i \Leftrightarrow e^{-y} \cdot e^{xi} = (3 \pm 2\sqrt{2})i \text{ (propriedade multiplicativa)} \Leftrightarrow e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = (3 \pm 2\sqrt{2})i \text{ (relação de Euler)}$$

Analisando cada possibilidade

I) $e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = (3 + 2\sqrt{2})i$. Note que o número no segundo membro da igualdade é Imaginário puro, logo:

$$\cos x = 0, \text{ isto é, } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } e^{-y} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -y = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow y = -\ln(3 + 2\sqrt{2}). \text{ Logo: números complexos da forma } z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) - i \ln(3 + 2\sqrt{2}) \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ satisfazem a equação } \operatorname{sen} z = 3.$$

II) $e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = (3 - 2\sqrt{2})i$. Note que $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (por motivos análogo a solução anterior) e $e^{-y} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = 3 - 2\sqrt{2}$, daí:

$$-y = \ln(3 - 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow y = -\ln(3 - 2\sqrt{2}). \text{ Logo: números complexos da forma } z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) - i \ln(3 - 2\sqrt{2}) \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ satisfazem a equação } \operatorname{sen} z = 3. \text{ Portanto, no campo dos números complexos, a equação } \operatorname{sen} z = 3 \text{ possui infinitas soluções.}$$

3.3 Identidades

03) Usando argumentos trigonométricos, prove cada identidade abaixo para m e n inteiros:

a) $\operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

b) $\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$

c) $\operatorname{sen}(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$

Solução: 3.3 De fato:

$$\text{De } \cos(m+n)x = \cos(mx) \cos(nx) - \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) \text{ (*)}$$

Trocando n por $-n$ e sendo ímpar a função seno e par a função cosseno, escrevemos:

$$\cos(m-n)x = \cos(mx) \cos(nx) + \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) (**).$$

Fazendo: $(**) - (*)$ e $(**) + (*)$, vem:

$\cos(m-n)x - \cos(m+n)x = 2 \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx)$ e $\cos(m-n)x + \cos(m+n)x = 2 \cos(mx) \cos(nx)$. Daí:

$$[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \cdot \frac{1}{2} = \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) \text{ e } [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] \cdot \frac{1}{2} = \cos(mx) \cos(nx).$$

De $\operatorname{sen}(m+n)x = \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) + \operatorname{sen}(nx) \cos(mx)$ (1).

De modo análogo ao exercício anterior, escrevemos:

$$\operatorname{sen}(m-n)x = \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) - \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) \text{ (2)}.$$

Fazendo: (1) + (2), vem:

$$\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x = 2 \operatorname{sen}(mx) \cos(nx). \text{ Daí: } [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x] \cdot \frac{1}{2} = \operatorname{sen}(mx) \cos(nx).$$

3.4 Igualdades

04) Mostre que:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx$; Para $m \neq n$ inteiros

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0$; para todo m e n (inteiros)

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx$ para $m = n$ (inteiro).

Solução: 3.4 a) $m \neq n$, daí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{(m+n)} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = 0, \text{ e:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx \text{ de modo análogo, temos:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0.$$

b) Primeiro caso $m \neq n$, vem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x] \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(m+n)x}{(m+n)} + \frac{-\cos(m-n)x}{(m-n)} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) \, dx = 0$$

Segundo caso $m = n$, vem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}(2nx)}{2} \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}(2nx)] \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2nx)}{2n} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) \, dx = 0.$$

c) Para $m = n$, vem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) \, dx \quad e \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx.$$

Daí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos^2(nx)] \, dx \quad e \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2nx) \right) \, dx.$$

Segue-se que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) \, dx = 2\pi - \left(\pi + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \quad e \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

Portanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) \, dx = \pi \quad e \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = \pi.$$

3.5 Aplicação 1 para a Série de Fourier

- 05) Seja $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}^*$). Ache a Série de Fourier de $f(x)$.

Solução: 3.5 I) *coeficientes de Fourier.*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax \, dx \text{ e } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax \cdot \cos(nx) \, dx$$

($n \geq 1$). *como ax e $ax \cdot \cos(nx)$ são funções ímpares, temos $a_0 = 0$ e $a_n = 0$.*

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax \cdot \text{sen}(nx) \, dx \text{ (} n \geq 1 \text{)}. \text{ como } ax \cdot \text{sen}(nx) \text{ é função par, temos:}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} ax \cdot \text{sen}(nx) \, dx.$$

Integrando por partes, segue-se que:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\left(-\frac{ax}{n} \cos(nx) \right) \Big|_0^{\pi} + \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) \, dx \right].$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[(-1) \left(\frac{a\pi}{n} \right) (-1)^n + \frac{a}{n} \left(\frac{\text{sen}(nx)}{n} + w \right) \Big|_0^{\pi} \right].$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[(-1)^{n+1} \frac{a\pi}{n} \right] = (-1)^{n+1} \frac{2a}{n}.$$

Logo, a Série de Fourier procurada é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2a}{n} \cdot \text{sen}(nx), \quad n \geq 1.$$

3.6 Aplicação 2 para a Série de Fourier

- 06) Uma onda quadrada é uma função periódica simples de forma analítica $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$. Esta forma de onda Básica é encontrada frequentemente nas áreas da eletrônica e do processamento de sinais, ela alterna regularmente e instantaneamente entre dois níveis. Na figura 3.1, tem-se um exemplo de uma onda quadrada.

Determine a Série de Fourier da onda exposta na figura 3.1.

Solução: 3.6 *Os coeficientes de Fourier:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

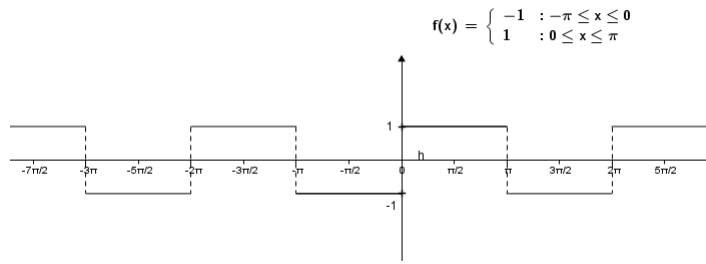


Figura 3.1: Onda Quadrada

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -1 \, dx + \int_0^{\pi} 1 \, dx \right)$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -\cos(nx) \, dx + \int_0^{\pi} \cos(nx) \, dx \right)$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -\operatorname{sen}(nx) \, dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \, dx \right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{-\cos(nx)}{n} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(\frac{-\cos(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\left(-\frac{1}{n} + \frac{\cos(n\pi)}{n} \right) + \left(-\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{n} - \frac{2 \cos(n\pi)}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

Logo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \operatorname{sen}(nx)$ é a Série de Fourier da função $f(x)$.

3.7 Lei do cosseno e Lei do seno

07) Prove que:

3.7. LEI DO COSSENO E LEI DO SENO

- a) Em um triângulo qualquer (ver figuras 3.2 3.3), vale a relação: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$.

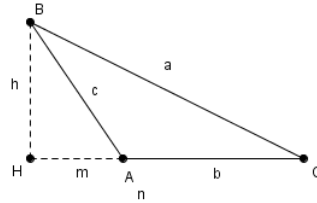
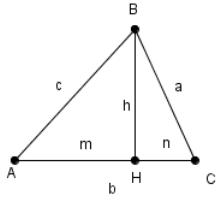


Figura 3.2: Triângulo Acutângulo ABC com Ângulo Agudo Fixo em A Figura 3.3: Triângulo Obtusângulo ABC com Ângulo Obtuso Fixo em A

- b) Em um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência de raio R (ver figura 3.4), vale a relação: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$

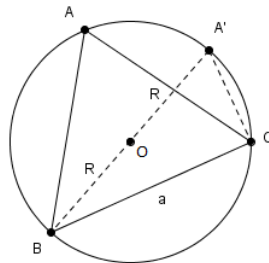


Figura 3.4: Triângulo Inscrito ABC no Circulo de Centro O e Raio R

Solução: 3.7 a) *Caso* $\hat{A} < 90^\circ$

- Do Δ_{AHB} ; vem: $c^2 = h^2 + m^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - m^2$ (1)
- Do Δ_{CHB} ; vem: $a^2 = h^2 + n^2$ (2)
- Do Δ_{ABC} ; vem: $m + n = b \Leftrightarrow n = b - m$ (3).

Substituindo em (2) os valores de h^2 e n escritos em (1) e (3), temos:

$$a^2 = c^2 - m^2 + (b - m)^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 - m^2 + b^2 - 2bm + m^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm.$$

mas, $m = c \cdot \cos(\hat{A})$. Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$$

Caso $90^\circ < A < 180^\circ$

$$\rightarrow \text{Do } \Delta_{AHB}; \text{ vem: } c^2 = h^2 + m^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - m^2 \quad (1)$$

$$\rightarrow \text{Do } \Delta_{BHC}; \text{ vem: } a^2 = h^2 + n^2 \quad (2).$$

Como $n = b + m$ (3) e substituindo os valores de h^2 e n encontrados em (1) e (3) em (2), vem:

$$a^2 = c^2 - m^2 + (b + m)^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm. \text{ mas, } m = c \cdot \cos(180^\circ - A) \text{ ou } m = -c \cdot \cos \hat{A}. \text{ Logo:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}.$$

b) Do $\Delta_{A'CB}$, vem: $\hat{C} = 90^\circ$ (ângulo inscrito tendo como lado oposto um diâmetro da circunferência e $\hat{A} = \hat{A}'$) ângulos inscritos na mesma circunferência correspondentes a arcos de mesma medida.

Logo:

$$a = 2R \cdot \sen \hat{A}' \Leftrightarrow a = 2R \cdot \sen \hat{A} \Leftrightarrow \frac{a}{\sen \hat{A}} = 2R.$$

3.8 Aplicação da Lei do cosseno e Lei do seno

08) De um ponto P a beira mar, Egdemos avista duas ilhas C e D (ver figura 3.5)

Para ele a questão é: como procederia um topografo dispondo de trenas, teodolito e fazendo uso de conceitos básicos de trigonometria, para calcular a distância que separa essas ilhas sem recorrer à medição direta?

Solução: 3.8 • *Primeiro passo:*

Escolhem-se na praia dois pontos A e B , de onde se possam ver as ilhas. usando a trena calcula-se a distância AB (digamos x).

3.8. APLICAÇÃO DA LEI DO COSSENO E LEI DO SENO

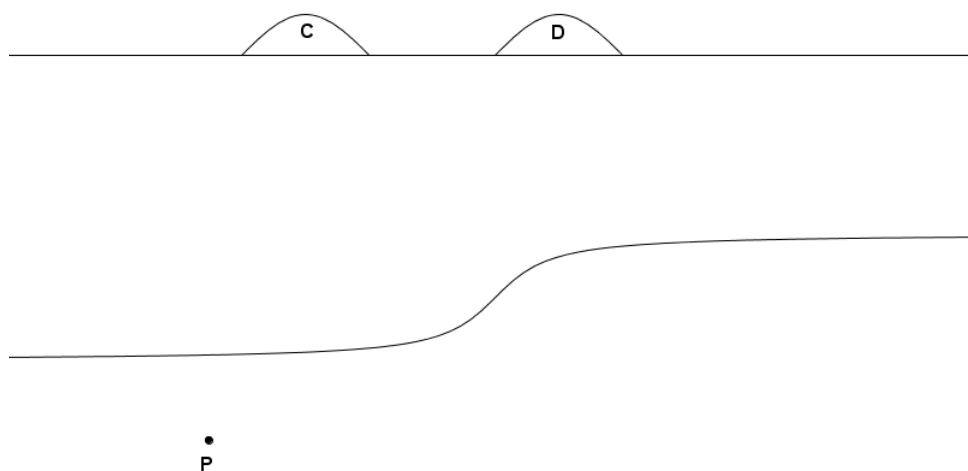


Figura 3.5: Ilhas C e D

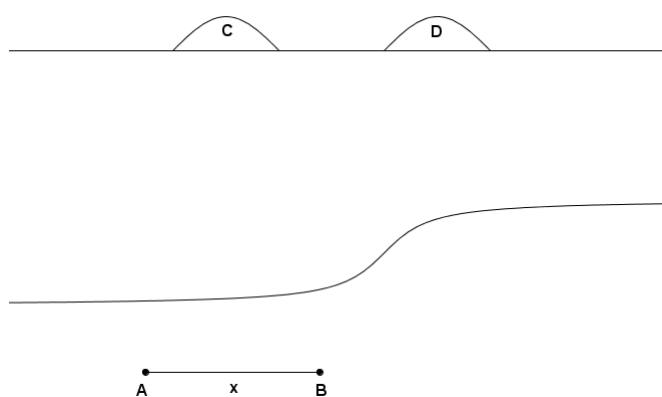


Figura 3.6: Segmento AB

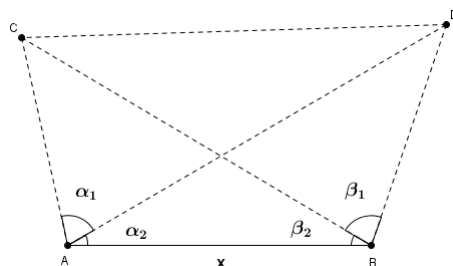


Figura 3.7: Quadrilátero $ABCD$

- Segundo passo:

3.8. APLICAÇÃO DA LEI DO COSSENO E LEI DO SENO

Medem-se os ângulos α_1 , α_2 , β_1 , β_2 com o teodolito (ver figura 3.7).

- Terceiro passo:

Destaquemos dois triângulos (Δ_{ABC} e Δ_{ABD}).

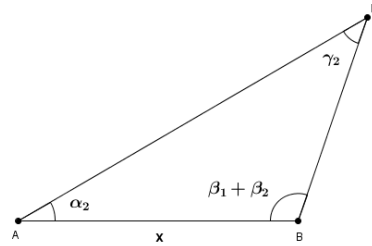
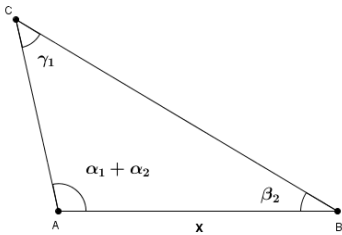


Figura 3.8: Triângulo ABC Interno na Fi-
gura 3.7

Figura 3.9: Triângulo ABD Interno na Fi-
gura 3.7

Mas: $\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2)$

Pela lei dos senos

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } \beta_2} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \gamma_1} \Leftrightarrow \overline{AC} = x \cdot \frac{\text{sen } \beta_2}{\text{sen } \gamma_1} \quad (1)$$

Mas: $\gamma_2 = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2)$ pela lei dos senos $\frac{\overline{AD}}{\text{sen}(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \gamma_2} \Leftrightarrow$

$$\overline{AD} = x \cdot \frac{\text{sen}(\beta_1 + \beta_2)}{\text{sen } \gamma_2} \quad (2)$$

- Quarto passo (final)

Destaquemos o triângulo ACD :

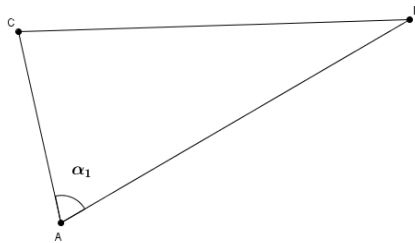


Figura 3.10: Triângulo ACD Interno na Figura 3.7

Note que são conhecidas as medidas de \overline{AC} , \overline{AD} e α_1 . Pela lei dos cosenos:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \alpha_1 \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \alpha_1}$$

3.9 Razões trigonométricas e teorema de Pitágoras

- 09) Suponha que uma pessoa está deitada em uma praia observando o pôr do sol em um oceano tranquilamente, a pessoa liga um cronômetro assim que a ponta mais alta do sol desaparece. A pessoa então fica em pé, eleva seus olhos de uma altura h , e para o cronômetro quando a parte mais alta do sol desaparece novamente. Se o tempo decorrido no relógio é t segundos, determine um valor aproximado para o raio da Terra usando $h = 1,70 \text{ m}$ e $t = 11,1$ segundos.

Solução: 3.9 Lembre-se que, à medida que o sol desaparece, a linha de visão do observador até a parte de cima do sol é tangente à superfície da Terra.

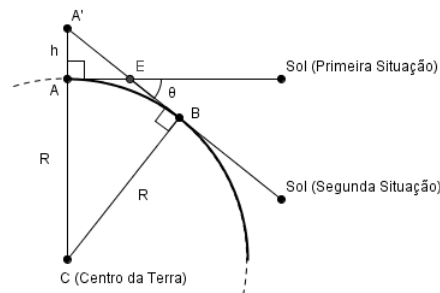


Figura 3.11: Triângulo $A'BC$ com Ângulo Fixo θ

Do $\Delta_{A'BC}$ Retângulo, vem:

$(R+h)^2 = (\overline{A'B})^2 + R^2$ e $\overline{A'B} = R \cdot \text{tg } \theta$. Mas como o ângulo θ é o ângulo descrito pelo sol em torno da Terra durante o tempo medido $t = 11,1$ segundos e durante um dia inteiro (aproximadamente 24 horas), o sol descreve um ângulo de 360° em torno da Terra, isto sugere uma regra de três simples e direta:

3.9. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS E TEOREMA DE PITÁGORAS

Tempo	Ângulo
24 horas	360°
11,1 segundos	θ (graus)

$$\text{Daí: } \theta = \frac{(11,1) \cdot (360^\circ)}{24 \cdot 60 \cdot 60}$$

$\theta = 0,04625^\circ$. Portanto, de: $(R+h)^2 = (\overline{A'B})^2 + R^2$ e $\overline{A'B} = R \cdot \text{tg } \theta$, temos, $R^2 + 2Rh + h^2 = (R \text{tg } \theta)^2 + R^2 \Leftrightarrow 2Rh + h^2 = R^2 \cdot \text{tg}^2 \theta$. Como h é bem menor que o raio da Terra, então h^2 é bem menor em relação a $2Rh$, podendo ser desprezado a sua medida. Daí:

$2Rh = R^2 \text{tg}^2 \theta \Leftrightarrow \frac{2h}{\text{tg}^2 \theta} = R$. Mas: $h = 1,70 \text{ m}$ e $\theta = 0,04625^\circ$. Substituindo, vem:

$$R = \frac{2(1,70 \text{ m})}{\text{tg}^2(0,04625^\circ)} \text{ (usando uma calculadora científica)}$$

$R \cong 5.220.000 \text{ m}$ (o valor aceito para o raio (médio) da Terra é $6.370.000 \text{ m}$, cujo resultado anterior não difere mais que 20% deste valor).

Referências Bibliográficas

- [1] Willian G. MacCallum - Álgebra : Forma e Função / produzido pelo Calculus Consortium e Financiado inicialmente por uma bolsa da National Science Foundation; tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio - Rio de Janeiro : LTC, 2011
- [2] Antunes, Fernando do Coltro - Matemática por assunto - Trigonometria - São Paulo: Scipione 1988
- [3] GOMES, Carlos A. - Pode um seno ser maior do que 1? - RPM revista do professor de matemática. Ed. 81, ano 31. 2013. Grafica e Editora Cruzado Ltda.
- [4] Gidorizzi, Hamilton Luiz - Um Curso de Cálculo - 2 ed vol 4 - Rio de Janeiro: 1997
- [5] Dante, Luiz Roberto - Matemática: Contexto e Aplicações - 2 ed - São Paulo: 2013
- [6] Iezzi, Gelson, 1939 - Fundamentos de Matemática elementar, 3 : Trigonometria - 7 ed - São Paulo : Atual 1993
- [7] Júnior, Francisco Ramalho, 1940 - Júnior, Nicolau Gilberto Ferraro, Paulo Antônio de Toledo Soares - Os Fundamentos da Física / 5ª edição - São Paulo : Moderna 1988
- [8] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszanjn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida - Matemática: Ciência e aplicações, Volume 1: ensino médio - 7 ed - São Paulo : Saraiva 2013
- [9] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszanjn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida - Matemática: Ciência e aplicações, Volume 2: ensino médio - 7 ed - São Paulo : Saraiva 2013
- [10] Neto, Aref Antar - Geometria Analítica: 2º grau - São Paulo: Moderna 1980

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [11] Rooney, Anne - A História da Matemática - Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. 2012 - São Paulo - M.Books do Brasil Editora LTDA.
- [12] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. - Fundamentos de Física - 6 ed - Rio d Janeiro: Editora LTC. 2002
- [13] Wiley, John; Inc, Sons. - Livros Técnicos e Científicos : Contexto e Aplicações - 2 ed - Rio de Janeiro: Editora S.A. 2002