Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Poliedros regulares no Ensino Médio [†]

por

Hercules do Nascimento Silva

sob orientação da

Profª Drª Miriam da Silva Pereira

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Centro de Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba.

Agosto/2014
João Pessoa - PB

[†]O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Poliedros regulares no Ensino Médio

por

Hercules do Nascimento Silva

Trabalho de conclusão de curso apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Centro de Ciências Exatas e da Natureza, da Universidade Federal da Paraíba.

Área de Concentração: Geometria

Aprovada por:

Profª Drª Miriam da Silva Pereira -UFPB (Orientadora)

Profº Drº Flank David Morais Bezerra - UFPB (Co-orientador)

Profº Drº Carlos Bocker Neto - UFPB

Profº Drº Severino Horácio da Silva - UFCG

Agosto/2014

S586p Silva, Hercules do Nascimento.
Poliedros regulares no ensino médio / Hercules do Nascimento Silva.– João Pessoa, 2014.
57f. : il.
Orientadora: Miriam da Silva Pereira
Coorientador: Flank David Morais Bezerra
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Geometria espacial. 3. Poliedros regulares. 4. Teorema de Euler. 5. Softwares de matemática.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Agradecimentos

Os agradecimentos são inúmeros, pois foram tantas pessoas que me fizeram chegar a esse momento. Primeiramente a Deus durante esses dois anos e meio sempre esteve presente como fonte de inspiração e proteção nas tantas e tantas viagens, provas. Sei que em todos os momentos Ele estava, está e estará guiando-me.

Aos meus familiares que sempre me ajudaram nos momentos mais difíceis dessa jornada, seja com uma palavra de incentivo, com orações ou vindo comigo em dias de prova, em especial a minha tia Maria, meus irmãos Jucelo e Ionara e aos meus pais José Pedro e Hosana que sempre me apoiaram nos estudos e me ensinaram que para conquistar algo nessa vida é preciso; paciência, honestidade e dedicação.

A minha esposa Cristina certamente a pessoa que mais me incentivou nesse período, mesmo nos momentos que pensei em desistir simplesmente você falava algo e isso bastava pra me trazer ânimo e continuar.

Agradeço aos meus colegas de turma aos que chegaram até esse momento ou que por algum motivo desistiram no caminho, nas brincadeiras, nos bate papos, no estudo, principalmente aos amigos Salatiel, Félix, Doval e Neto saibam que vocês foram essenciais para essa conquista.

Aos colegas de trabalho e alunos da EREM Benedita de Morais Guerra que com palavras de incentivo, mensagens, ligações e orações foram alicerces para me manter firme em momentos de fraqueza.

À todos os professores do mestrado que com dedicação e paciência nos proporcionaram o caminho a novos conhecimentos, em especial a minha orientadora a professora Miriam, que além de paciente e dedicada, suas orientações e conselhos foram mais que fundamentais e o professor Flank que também foi de fundamental importância para a organização deste trabalho.

À todos que direta e indiretamente contribuíram para a conclusão dessa etapa de minha vida.

Dedicatória

À todos que dedicam-se para uma educação de qualidade.

.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre os poliedros regulares, comparando e discutindo os conceitos e as definições que são dadas no estudo dos poliedros regulares nos livros didáticos mais utilizados nas escolas brasileiras de Ensino Médio. Provamos o teorema de Euler, calculamos áreas de superfícies e os volumes dos poliedros regulares. Por fim, apresentamos alguns softwares matemáticos que podem ser utilizados pelos alunos e professores de Matemática nas aulas de geometria espacial como material auxiliar no processo de ensino e aprendizagem deste tema em sala de aula.

Palavras-chaves: Geometria espacial, Poliedros regulares, Teorema de Euler, Softwares de Matemática.

Abstract

In this work we present a study of the regular polyhedra, comparing and discussing the concepts and definitions given in the study of regular polyhedra in textbooks most widely used in Brazilian high schools. We prove the theorem of Euler, we calculate surface areas and volumes of regular polyhedra. Finally, we present some mathematical software that can be used by students and mathematics teachers in the spatial geometry classes as auxiliary material in the teaching and learning of this subject in the classroom.

Keywords: spatial geometry, regular polyhedra, Euler's Theorem, Mathematics Software.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Notações

Notações Gerais

- P é um poliedro convexo qualquer.
- A é o número de arestas de um poliedro convexo P.
- F é o número de faces de um poliedro convexo P.
- V é o número de vértices de um poliedro convexo P.
- F_n é a n-ésima face de um poliedro convexo.
- n_k é o k-ésimo lado de uma face.
- V_p é a p-ésima aresta que incide num vértice.
- S é a área de uma superfície das faces de um poliedro.
- S_b é a área da superfície da base de um poliedro.
- S_l é a área da superfície das faces laterais de um poliedro.
- $\mathcal{V}$ é o volume de um poliedro regular.
- $\mathcal{V}_{pir}$ é o volume de uma pirâmide.
- d é a diagonal maior do icosaedro.
- h altura de uma face ou de um poliedro.
- α é aresta de um poliedro regular.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal analisar a forma de como os poliedros regulares são vistos por alguns autores de livros didáticos para o Ensino Médio. Primeiramente foi realizada uma breve passagem por alguns fatos que podem ter dado ínicio ou marcaram a história da Geometria Espacial, nesse mesmo capítulo veremos os principais geômetras que dedicaram-se ao estudo dos sólidos geométricos dentre eles, destaca-se Platão que tem seu nome associado aos poliedros regulares.

No capítulo dois iniciamos com algumas definições para qualquer poliedro em alguns livros didáticos, depois dividimos os poliedros em dois grupos: os convexos e os não convexos (côncavos). O próximo passso foi identificar e classificar os elementos que compõem um poliedro: faces, vértices e arestas. Com esses elementos definidos podemos escrever duas relações entre eles.

O próximo capítulo utilizamos as relações entre os elementos dos poliedros para demonstrarmos o famoso teorema de Euler, que raramente é demonstrado nos livros didáticos, mas bastante trabalhado no Ensino Médio quando se estuda poliedros.

No capítulo quatro definimos poliedros regulares utilizando-se de duas definições e com o teorema de Euler demonstrado provamos a existência de apenas cinco poliedros regulares os sólidos de Platão, apresenta-se também os valores das áreas das superfícies e volumes desses cinco poliedros em função de sua aresta e ápotema. No fim do capítulo apresentamos um breve resumo de outros poliedros não regulares mas que apresentam-se de forma destacada nos livros didáticos.

Finalizamos o trabalho com uma proposta de uso dos softwares Cabri e Poly nas apresentações de conteúdos envolvendo poliedros para melhor fixação e compreensão do assunto.

Capítulo 1

Conceito Histórico

A matemática desperta o interesse das pessoas desde a antiguidade, ela é uma das ciências mais antigas e sua origem não tem data fixa, a data precisa de quando ocorreram os primeiros cálculos que envolveram um raciocínio geométrico também não é precisa, acredita-se que na pré-história o homem já desenvolvia um raciocínio matemático, contudo não havia registros de tais feitos.

Podemos citar como um dos primeiros textos matemáticos (provenientes 2000 a.C.) o papiro matemático de Rhind (matemática egípcia, cerca de 2000 - 1800 a.C.) e o Papiro Matemático de Moscovo ou Moscou (matemática egípcia, cerca de 1890 a.C.). O papiro de Moscovo que foi escrito por um escriba desconhecido contém vinte e cinco exemplos, quase todos da vida prática e não diferenciando muito do papiro Rhind. Associado ao problema 14 do papiro de Moscovo há uma figura que é parecida com um trapézio, porém os cálculos associados a ela mostram que o que se representa é um tronco de uma pirâmide (veja [5] página 14). Esse talvez seja o primeiro registro de um cálculo envolvendo Geometria Espacial.

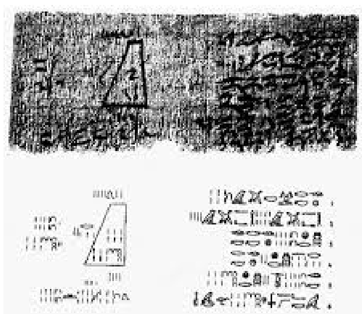


Figura 1.1: Fragmento do papiro de Moscovo.

Todavia poderíamos ter registros anteriores a esses encontrados no papiro Moscovo, contudo a ausência desses registros tornou a origem da Geometria indeterminada, porém podemos destacar algumas utilizações de conceitos de alguns povos na antiguidade, e que atualmente ainda são úteis ou servem de inspiração ou base em novas propostas de ideias geométricas; como os egípcios e o uso de áreas de terrenos na agricultura e suas construções tendo as pirâmides como exemplo, podemos também destacar outros povos antigos como os chineses e sua grande muralha, porém foi na Grécia, que a Geometria teve seu maior desenvolvimento. Os gregos perceberam em seus estudos que os egípcios foram capazes de realizar cálculos e medidas de dimensionamento da terra, eles procuraram demonstrar leis acerca do espaço, daí o nome GEOMETRIA, geo - terra e metria - medida.

Com localização privilegiada entre os mares Egeu e Jônio e colônias que se encontravam nas margens dos mares Negro e Mediterrâneo, além da ótima localização geográfica que garantia poderem viajar aos grandes centros do conhecimento da época junto a um espírito ousado e imaginativo fez com que os adquirissem informações de primeira mão sobre matemática e astronomia. E foi no Egito diz-se que aprenderam geometria. Foram muitos os geômetras gregos que podemos destacar entre eles Tales, Pitágoras, Euclides e Platão.

Tales frequentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro - originador da organização dedutiva da geometria. Não há documento que prove tal feito, o mais próximo que podemos chegar a isso digno de confiança é uma menção 1000 anos depois do tempo de Tales. Um discípulo de Aristóteles chamando Eudemo escreveu uma história da matemática, essa se perdeu porém alguém resumiu parte dela, esse resumo também perdeu-se, porém Proclus filósofo neo-platônico escreveu parte das informações do sumário de Eudemos, nele diz o seguinte sobre Tales. (veja [5] páginas 34-35).

...Primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio e instruiu seus sucessores nos príncipios que regem muitas outras...

Já Pitágoras, alguns dizem discípulo de Tales, teve também suas contribuições na geometria. Fundador da famosa escola pitagórica e do famoso teorema , provalvemente de estudos nas pirâmides do Egito, no sumário de Eudemo-Proclus lhe é atribuída a construção de "figuras cósmicas" (isto é sólidos regulares), porém existem algumas dúvidas. O hexaedro, o octaedro e o dodecaedro podiam ter sido observados em cristais, como o da pirita (dissulfito de ferro), mas em Os Elementos XIII está dito que os pitagóricos só conheciam três poliedros regulares; o tetraedro, o hexaedro e o dodecaedro. Sobre o último não seria improvável pois eles conheciam algumas propriedades do pentágono regular. (O pentagrama, símbolo especial da escola pitagórica, formada traçando as diagonais de um pentágono que é face do dodecaedro). (veja [5] página 37).

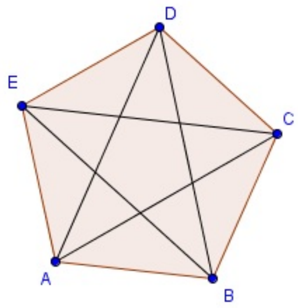


Figura 1.2: Símbolo da escola Pitagórica, o pentagrama.

Euclides de Alexandria, assim conhecido por ter ensinado matemática na cidade de Alexandria, foi outro grande geômetra grego, escritor de diversas obras (cinco sobrevivem até hoje) dentre elas destaca-se uma obra do universo matemático que até hoje tem grande contribuição e talvez seja uma das maiores obras publicadas (para alguns matemáticos a maior) é Os Elementos de Euclides, segundo Ávila [1]: "Não sabemos se Euclides escreveu Os Elementos para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos; e os Elementos foram muito usados no aprendizado da Matemática por mais de dois milênios ". O último livro (Livro XIII) é totalmente dedicado aos cinco sólidos regulares, fato que levou alguns historiadores a dizer que Os Elementos foram compostos como uma glorificação das figuras cósmicas ou platônicas.

Outro com estudos no campo da Geometria Espacial foi Platão, embora não tenha dado contribuição digna de nota a resultados matemáticos técnicos, porém seu entusiasmo pelo assunto o fez conhecido como "criador de matemáticos". Esse fascínio todo pela matemática certamente veio a partir de uma visita a um amigo na Sicília, Arquitas. Talvez à veneração dos pitagóricos pelo dodecaedro tenha sido o que levou Platão a considerá-lo como um símbolo do universo. Os cinco poliedros regulares foram constantemente chamados de "corpos cósmicos" ou "sólidos platônicos" devido a maneira pela qual Platão os aplicou para explicação de fenômenos científicos, talvez também seja responsável por alguns cálculos encontrados sobre os poliedros regulares no livro Os Elementos. (veja [5] páginas 62-63).

Tivemos outros matemáticos gregos, e claro de outros povos, que contribuíram para o desenvolvimento da Geometria Espacial, porém os gregos absolviam muitos elementos de outras culturas, de outra forma não teriam aprendido tão depressa de modo a ter passado à frente de seus predecessores, mas a tudo que tocavam davam mais vida. (veja [5] página 34).

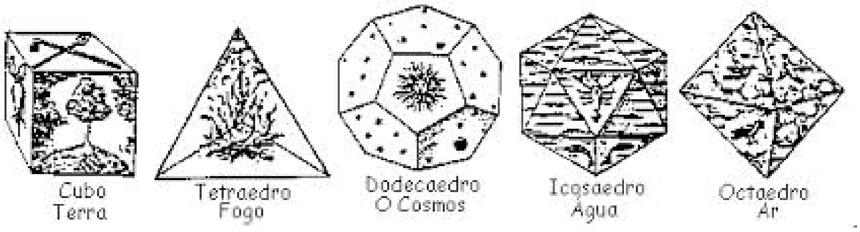


Figura 1.3: Sólidos Platônicos e seus respectivos elementos da natureza.

Dentre todos os ramos da matemática a Geometria é a que mais sofre mudanças de gosto de uma época para outra. Seu auge foi na Grécia clássica e caiu junto com Roma, teve uma recuperação na Árabia e na Europa da Renascença, no século dezessete esteve no limiar de uma nova era, mas novamente foi esquecida, ao menos pelos pesquisadores matemáticos, por quase mais dois séculos, através de esforços de Monge e Carnot houve um reavivamento da geometria pura no período da revolução Francesa, porém no século dezenove ela teve uma redescoberta como ramo vivo da matemática. (veja [5] página 387).

Hoje, como no passado, a Geometria continua a ser uma fonte de enriquecimento de raciocínio e dos hábitos de pensar, que permitem justificar as nossas afirmações (veja [14] página 306) suas aplicações são inúmeras. Os sólidos geométricos são observados, por exemplo, em diversos lugares seja em construções ou em objetos de uso diário.

Figura 1.4: Pirâmides do Egito e a Pirâmide do museu do Louvre, formas poliédricas.

Capítulo 2

Os poliedros nos livros didáticos

Várias são as definições para os poliedros dispostas nos livros didáticos.

Segundo Bianchini e Paccola [4], página 205, definimos poliedro como à região do espaço limitada por polígonos planos, e tais que cada uma das arestas desses polígonos pertença a dois e somente dois deles.

Em Barroso [3], página 164, é chamado de poliedro o sólido formado pela reunião de uma superfície fechada com todos os pontos do espaço delimitados por ela.

Em Dante [6], página 360, diz que o poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas faces e a região do espaço limitada por ela, assim como Ribeiro [15], página 68, poliedros são sólidos limitados por superfícies planas poligonais.

Para Iezzi [9], página 457, temos poliedro como sólidos limitados por porções de planos - polígonos planos - denominados faces.

As definições nem sempre são suficientes para que a maioria dos aluno tenham uma ideia sobre o que é um poliedro, a apresentação de ilustrações facilitam sua compreensão, mas ainda, é necessário um estudo das fórmulas que produzem áreas de superfícies e volumes dos poliedros, bem como o clássico teorema de Euler, que raramente é demonstrado nos livros didáticos do Ensino Médio.

Vamos utilizar as definições de Lima [12] página 283.

Definição 2.1 *Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:*

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é vértice ou é vazia.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice, ou seja, cruzando apenas arestas.

O que consideraremos como poliedro é a superfície poliédrica formada pelos polígonos não a região interna limitada por eles.

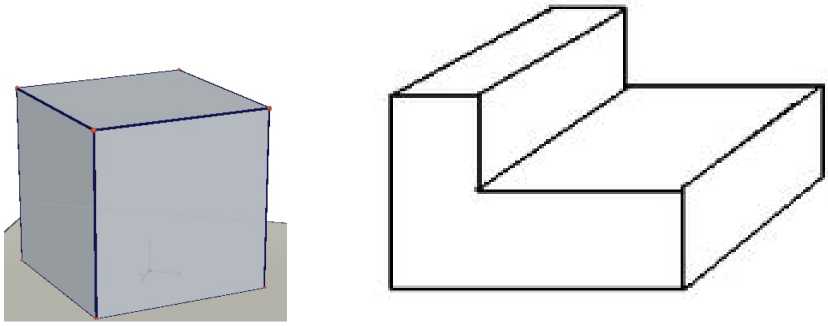


Figura 2.1: Figuras Poliédricas.

De fato é fácil encontrarmos formas poliédricas no nosso dia a dia, assim torna-se fácil para que o aluno associe a definição de poliedro, porém existem também figuras que estão no $\mathbb{R}^3$, mas não seguem algum ou alguns dos itens da Definição 2.1, chamaremos de figuras não poliédricas.

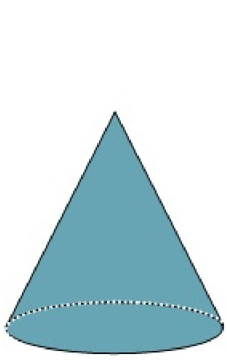


Figura 2.2: Figuras não Poliédricas.

Assim todo poliedro no sentido da Definição 2.1 limita uma região do espaço chamada interior desse poliedro, essas figuras geométricas estão no $\mathbb{R}^3$.

Na educação básica os poliedros têm maior ênfase no segundo ano do Ensino Médio, porém alguns autores já introduzem o assunto no primeiro ano com alguns conceitos básicos como elementos e classificações dos poliedros. Segundo Palhares [14] página 306, é urgente e fundamental que a Geometria reflita, porventura, hoje mais do que no passado recente, as preocupações educacionais de relevância e realismo, nomeadamente através de:

- Verdadeiros problemas do dia-a-dia que envolvam ideias geométricas, em vez de aplicações artificias;
- Exploração de formas de representação do meio ambiente, por muito complicado que isso pareça. O uso de plantas, de mapas ou de fotografias parece-nos apropriado, uma vez que no mundo onde a criança se movimenta a Geometria é, em primeiro lugar, Espacial, antes de ser plana;
- Trabalhos geométricos com o recurso às novas tecnologias.

2.1 Poliedros convexos

No ínicio desse capítulo revisamos as várias e equivalentes maneiras como os poliedros são definidos nos livros didáticos usados no Ensino Médio. A seguir, tratamos dos chamados poliedros convexos.

Conforme Janos [10], página 84, um poliedro convexo encontra-se inteiramente de um lado do plano que contém qualquer uma de suas faces. Na figura abaixo podemos observar que o poliedro não convexo apresenta um plano que contém uma de suas faces e corta outra.

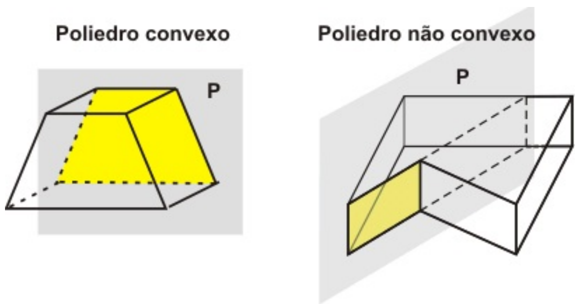


Figura 2.3: Poliedros.

Para Ribeiro [15], página 70, um poliedro é dito convexo quando um segmento de reta que liga quaisquer dois de seus pontos está inteiramente contido nele. Além disso, um poliedro é convexo se toda reta não paralela a nenhuma das faces corta suas faces em dois pontos no máximo. A figura abaixo apresenta exemplos de poliedros convexo e não convexo.

Segundo Lima [11], página 284, um conjunto C contido no plano ou no espaço, diz-se convexo, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C. Assim podemos imaginar esse conjunto C tanto no espaço tridimensional ou bidimensional, como nossa fonte de estudo é no $\mathbb{R}^3$ podemos usar a seguinte definição também proposta por Lima [11], página 284.

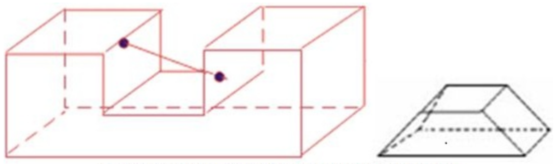


Figura 2.4: Poliedros não convexo (à esquerda) e Poliedro convexo (à direita).

Definição 2.2 *Um poliedro é dito convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.*

2.2 Elementos dos poliedros

Nesta seção veremos os elementos que compõem os poliedros.

- **Faces**

  Os polígonos 2, 3, 4 e 5 da figura abaixo são triângulos, enquanto o polígono 1 é um quadrado, podemos uní-los formando um poliedro P, ao formar o poliedro P esses polígonos limitarão uma região do espaço, assim podemos definir faces de um poliedro.

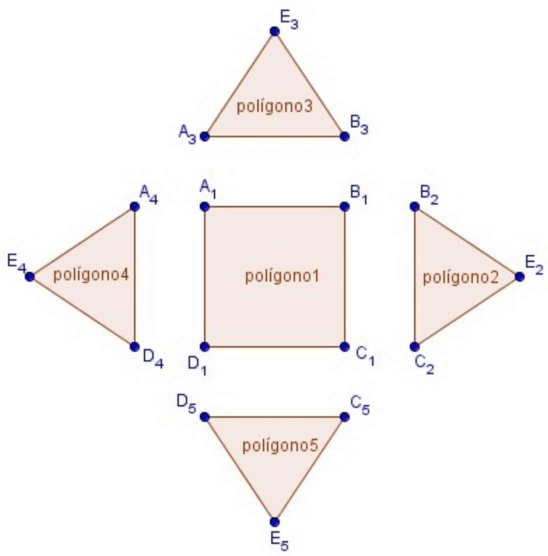


Figura 2.5: Polígonos no plano.

Definição 2.3 *As faces de um poliedro são os polígonos que limitam o poliedro.*

Conforme a Definição 2.1 os poliedros têm um número finito de faces.

- **Arestas**

  Os lados do polígono 1 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$ e $\overline{D_1A_1}$ serão comum com os lados dos polígonos 2, 3, 4 e 5 $\overline{A_3B_3}$, $\overline{B_2C_2}$, $\overline{C_5D_5}$ e $\overline{D_4A_4}$ respectivamente. Esses lados comuns formarão as arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ do poliedro P.

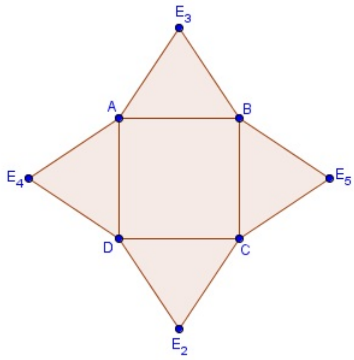


Figura 2.6: Poliedro P planificado.

Definição 2.4 *Aresta é o nome dado a cada lado da face do poliedro, a qual é comum a somente duas faces.*

- **Vértices**

  Podemos observar que na figura acima os vértices do polígono 1 serão comuns com os vértices dos polígonos 2, 3, 4 e 5; (por exemplo o vértice A_1 e B_1 do lado $\overline{A_1B_1}$ do polígono 1 serão comuns com os vértices A_3 e B_3, respectivamente, do lado $\overline{A_3B_3}$ do polígono 3).

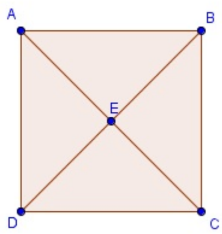


Figura 2.7: Vista superior do poliedro P.

Definição 2.5 *Vértice de um poliedro é cada um dos pontos de interseção de 3 ou mais arestas.*

O vértice de cada face também é vértice do poliedro P.

Aqui, temos algumas definições encontradas em livros didáticos do Ensino Médio, para os elementos que compõem o poliedro.

Segundo Dante [6], página 360, cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas faces e a região do limitadas por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonal é também lado de uma outra única região poligonal. A intersecção de duas faces quaisquer ou é uma lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de uma região poligonal, comum a exatamente duas faces é chamado aresta do poliedro, e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

Para Ribeiro [15], página 68, faces são os polígonos que limitam os poliedros. Todo poliedro tem uma quantidade finita de faces. Aresta é o nome que se dá a cada lado de uma face do poliedro. Cada aresta de um poliedro é comum a somente duas faces. Vértice é cada um dos pontos de intersecção de 3 ou mais arestas. O vértice de cada face também é o vértice do poliedro.

2.3 Relações entre os Elementos dos Poliedros

Podemos relacionar os elementos de um poliedro convexo qualquer. As relações descritas foram baseadas naquelas apresentadas por Lima [12], páginas 284 - 285.

Na seção anterior definimos os elementos que compõem um poliedro, vamos aqui representá-los como A, o número de arestas, V o número de vértices e por F o número de faces de um poliedro qualquer.

Podemos ainda verificar que as faces de um poliedro podem ser compostas por polígonos diferentes, representaremos por F_n o número de faces que possuem n lados, com $n \geq 3$, assim temos F_3 face triangular, F_4 face quadrangular e assim sucessivamente. Segue da Definição 2.1 que o número F de faces é finito, e além disso

$$F = F_3 + F_4 + ... + F_n.$$

Da mesma forma podemos verificar que para cada vértice V de um poliedro concorrem p arestas, como para cada vértice o menor número de arestas que concorrem para ele é três, temos que $p \geq 3$ e V_p o número de vértices que concorrem p arestas, por exemplo V_3 é o número de vértices no qual concorrem três arestas, V_4 o número de vértices no qual concorrem quatro arestas e assim sucessivamente. Podemos concluir que

$$V = V_3 + V_4 + ... + V_p.$$

2.3.1 Faces e Arestas

Vamos imaginar um poliedro com todas as suas faces separadas e dispostas sobre um plano. Se quisermos saber quantos lados possuem todos os polígonos que forma um poliedro basta multiplicarmos as faces triangulares (triângulos) por três, as faces quadrangulares (quadriláteros) por quatro, e assim sucessivamente e depois somarmos todos os resultados, porém cada aresta do poliedro é lado comum de exatamente duas faces, assim a soma de todos os lados das faces resulta o dobro de arestas. Logo,

$$\underbrace{3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots}_{nF} = 2A.$$

Podemos concluir que: $nF = 2A$, vale para todo poliedro regular, onde n é o número de lados de cada face.

2.3.2 Vértices e Arestas

Podemos também determinar o número de arestas com a observação nos vértices de um poliedro. Se contarmos quantas arestas concorrem em cada vértices vamos observar que cada aresta será contada duas vezes, em um extremo e no outro, assim se somarmos o resultado das arestas que concorrem em cada vértices teremos o dobro do número de arestas. Assim temos,

$$\underbrace{3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots}_{pV} = 2A.$$

Podemos concluir que: $pV = 2A$, vale para todo poliedro regular, onde p é o número de arestas que concorrem em cada vértice de um poliedro.

Segue das relações acima que podemos compará-las e concluírmos que:

$$2A = nF = pV.$$

2.3.3 Relação de Euler

Nesta seção será demonstrado o teorema de Euler, que pela sua aplicação simples, deixa os alunos curiosos principalmente quando eles tem em mãos um poliedro convexo qualquer e fazem a contagem dos elementos. Para tal demonstração foi utilizada a apresentada por Lima [12], páginas 287-290, vale salientar que ela seguiu quase integralmente a publicada pelo professor Azambuja Filho [2].

Teorema 2.1 *Dado um poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, tem-se*

$$V + F - A = 2.$$

Prova: Inicialmente vamos calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P, essas faces serão numeradas da seguinte forma F_1, F_2, F_3, ..., F_k e um número n que representa a quantidade de lados correspondentes as faces n_1, n_2, n_3, ..., n_k. Para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono temos $S_i = 180^\circ \cdot (n-2)$ fórmula vista no Ensino Fundamental, ou seja, $S_i = \pi(n-2)$. A soma de todos os ângulos internos do poliedro P é dada pela expressão

$$\begin{aligned} S_i &= \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + ... + \pi(n_k - 2) \\ &= \pi(n_1 + n_2 + ... + n_k) - \pi(2 + 2 + ... + 2). \end{aligned}$$

Como cada aresta de um poliedro é comum a apenas duas faces, logo a soma dos n_i's lados de um polígono é igual ao dobro do número de arestas, ou seja $(n_1 + n_2 + ... + n_k) = 2A$. O outro parêntese compostos por soma de 2 pode ser reescrito assim : $2(1 + 1 + ...1)$ onde a soma de parcelas uns é a quantidade de faces que compõem o poliedro, daí concluímos que $(2 + 2 + ... + 2) = 2F$. Então temos

$$\begin{aligned} S_i &= \pi 2A - \pi 2F \\ &= 2\pi(A - F). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para o próximo passo da demonstração vamos tomar um plano H horizontal sob o poliedro P e uma reta r perpendicular ao plano H tal que a reta r não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro P.

Colocamos sobre o poliedro P uma fonte luminosa (para melhor compreenssão do exemplo imagine o sol a pino, ou seja, o ponto mais elevado do sol) essa fonte produzirá sobre o plano H uma sombra P' do poliedro P. Essa sombra P' tem contorno de um polígono convexo K' sombra de um poligonal fechada K, a qual chamaremos de contorno aparente do poliedro P, formada por arestas de P.

Cada ponto do polígono K' é um único ponto do poliedro P, já a sombra P' é sombra de exatamente dois pontos de P. Um desses pontos fica na região iluminada de P, região que fica mais próxima da fonte luminosa a qual chamaremos de P_1 todo ponto dessa região é chamado de ponto iluminado e o outro ponto ficará na região menos iluminada de P, região que fica mais próxima do plano H, a qual chamaremos de P_2 todo ponto dessa região será chamado de ponto sombrio.

Depois dessas considerações vamos calcular novamente a soma dos ângulos internos de todas as faces de P. Devemos lembrar que a soma dos ângulos internos de uma face de P é igual soma ângulos internos da sombra dessa face.

Assim temos, $V = V_0 + V_1 + V_2$ onde V_0, V_1, V_2 são respectivamente a quantidade de vértices do contorno aparente, a quantidade de vértices de P_1 e a quantidade de vértices de P_2. Para calcular a soma dos ângulos internos do poliedro P temos $S_i = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos da região iluminada e S_2 é a soma dos ângulos internos da região sombria. Dadas por

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

Analogamente temos

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Então

$$\begin{aligned} S_i &= S_1 + S_2 \\ &= [2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)] + [2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)] \\ &= 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2) + \pi(V_0 - 2) \\ &= 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) \\ &= 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2). \end{aligned}$$

Ora, $V_1 + V_2 + V_0 = V$. Daí temos

$$S_i = 2\pi(V - 2). \tag{2.2}$$

Usando as equações (3.1) e (3.2):

$$\begin{aligned} S_i &= S_i \\ 2\pi(A - F) &= 2\pi(V - 2) \\ A - F &= V - 2 \\ V - A + F &= 2, \end{aligned}$$

dessa forma concluímos a prova.

Capítulo 3

A Relação de Euler

Neste capítulo será demonstrado o teorema de Euler, pela sua aplicação simples deixa os alunos curiosos principalmente quando eles tem em mãos um poliedro convexo qualquere fazem a contagem dos elementos. Para tal demonstração foi utilizada a apresentada por Lima [12] páginas 287-290, vale salientar que ela seguiu quase integralmente a publicada pelo professor Azambuja Filho [2].

Teorema 3.1 *Dado um poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, tem-se*

$$V + F - A = 2.$$

Prova: Inicialmente vamos calcular a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P, essas faces serão numeradas da seguinte forma F_1, F_2, F_3, ..., F_k e um número n que representa a quantidade de lados correspondentes as faces n_1, n_2, n_3, ..., n_k. Para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono temos $S_i = 180^\circ \cdot (n-2)$ vista no ensino fundamental, ou seja, $S_i = \pi(n-2)$. A soma de todos os ângulos internos do poliedro P é dada pela expressão

$$\begin{aligned} S_i &= \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + ... + \pi(n_k - 2) \\ &= \pi(n_1 + n_2 + ... + n_k) - \pi(2 + 2 + ... + 2). \end{aligned}$$

Como cada aresta de um poliedro é comum a apenas duas faces, logo a soma dos n (enes) lados de um polígono é igual ao dobro do número de arestas, ou seja $(n_1 + n_2 + ... + n_k) = 2A$. O outro parêntese compostos por 2 pode ser reescrito assim : $2(1 + 1 + ...1)$ onde a soma de parcelas uns é a quantidade de faces que compõem o poliedro, daí concluímos que $(2 + 2 + ... + 2) = 2F$. Então temos

$$\begin{aligned} S_i &= \pi 2A - \pi 2F \\ &= 2\pi(A - F). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para o próximo passo da demonstração vamos tomar um plano H horizontal sob o poliedro P e uma reta r perpendicular ao plano H tal que a reta r não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro P.

Colocamos sobre o poliedro P uma fonte luminosa (para melhor compreenssão do exemplo imagine o sol a pino) essa fonte produzirá sobre o plano H uma sombra P' do poliedro P. Essa sombra P' tem contorno de um polígono convexo K' sombra de um poligonal fechada K, a qual chamaremos de contorno aparente do poliedro P, formada por arestas de P.

Cada ponto do polígono K' é um único ponto do poliedro P, já a sombra P' é sombra de exatamente dois pontos de P. Um desses pontos fica na região iluminada de P, região que fica mais próxima da fonte luminosa a qual chamaremos de P_1 todo ponto dessa região é chamado de ponto iluminado e o outro ponto ficará na região menos iluminada de P, região que fica mais próxima do plano H, a qual chamaremos de P_2 todo ponto dessa região será chamado de ponto sombrio.

Depois dessas considerações vamos calcular novamente a soma dos ângulos internos de todas as faces de P. Devemos lembrar que a soma dos ângulos internos de uma face de P é igual soma ângulos internos da sombra dessa face.

Assim temos, $V = V_0 + V_1 + V_2$ onde V_0, V_1, V_2 são respectivamente a quantidade de vértices do contorno aparente, a quantidade de vértices de P_1 e a quantidade de vértices de P_2. Para calcular a soma dos ângulos internos do poliedro P temos $S_i = S_1 + S_2$, onde S_1 é a soma dos ângulos internos da região iluminada e S_2 é a soma dos ângulos internos da região sombria. Dadas por

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

Analogamente temos

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Então

$$\begin{aligned} S_i &= S_1 + S_2 \\ &= [2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)] + [2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)] \\ &= 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2) + \pi(V_0 - 2) \\ &= 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) \\ &= 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2). \end{aligned}$$

Ora, $V_1 + V_2 + V_0 = V$. Daí temos

$$S_i = 2\pi(V - 2). \tag{3.2}$$

Usando as equações (3.1) e (3.2):

$$
\begin{aligned}
S_i &= S_i \\
2\pi(A-F) &= 2\pi(V-2) \\
A-F &= V-2 \\
V-A+F &= 2,
\end{aligned}
$$

dessa forma concluímos a prova.

Capítulo 4

Poliedros regulares

Neste capítulo serão definidos os poliedros regulares (ou poliedros de Platão) e a demonstração da existência de somente cinco deles. Abaixo seguem duas definições de poliedros regulares, a primeira para Tizziotti [19] página 347 e a segunda de Palhares [14] página 306.

Definição 4.1 *É o poliedro no qual as faces são polígonos regulares congruentes e os ângulos poliédricos são congruentes.*

Definição 4.2 *É um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares, todos iguais e onde em cada um dos vértices concorre o mesmo número de arestas.*

Uma característica é comum para os dois autores que são as faces formadas por polígonos regulares, porém o primeiro complementa sua definição citando ângulos poliédricos, que segundo Paiva [13] página 381 são porções do espaço cuja superfície é a reunião dos ângulos das faces que têm um mesmo vértice. Enquanto o segundo cita as arestas que concorrem nos vértices.

Os poliedros regulares também são conhecidos como sólidos Platônicos.

4.1 Existência de cinco poliedros regulares

A demonstração abaixo foi baseada no livro de Dante [6] página 363.

Teorema 4.1 *Exitem somente cinco poliedros regulares.*

Prova: Vamos considerar um poliedro regular com A arestas, V vértices e F faces, onde n é o número de lados em cada face e p é o número de arestas que concorrem em cada vértice. Usando as relações dos elementos dos poliedros temos

$$2A = nF = pV.$$

Vamos escrever A e V em função de F, temos

$$A = \frac{nF}{2}. \tag{4.1}$$

e

$$V = \frac{2A}{p}. \tag{4.2}$$

Combinando (4.1) com (4.2), obtemos

$$\begin{aligned} V &= \frac{2nF}{2p} \\ &= \frac{nF}{p}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Vamos substituir as equações (4.1) e (4.3) na relação de Euler.

$$\begin{aligned} 2 &= V - A + F \\ &= \frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F \end{aligned}$$

assim temos

$$\frac{2nF - pnF + 2pF}{2p} = \frac{4p}{2p}.$$

Colocando F em evidência no primeiro membro temos

$$F(2n - pn + 2p) = 4p$$

o que implica que

$$F = \frac{4p}{2n - pn + 2p}. \tag{4.4}$$

Para que tenhamos um número F de faces precisamos ter o denominador $2n - pn + 2p > 0$, daí

$$2n > np - 2p$$

colocando p em evidência

$$\begin{aligned} &2n > p(n-2) \\ &\Rightarrow \frac{2n}{n-2} > p. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como vértice é cada um dos pontos de intersecção de 3 ou mais arestas, temos $p \geq 3$. Comparando com a equação (4.5), temos:

$$\frac{2n}{n-2} > p \geq 3$$

$$\Rightarrow n < 6.$$

Como o menor número de lados de uma face é três (face triangular), temos que $n \geq 3$, mas temos também que $n < 6$, assim os valores de n são 3, 4 e 5. Vamos substituir os valores de n na equação (4.4)

Para $n = 3$ obtemos

$$\begin{aligned} F &= \frac{4p}{2 \cdot 3 - 3p + 2p} \\ &= \frac{4p}{6-p}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Observando a equação (4.6) podemos concluir que $p < 6$ (para satisfazer a equação), como p é o número de arestas que concorrem em cada vértice e $p \geq 3$, temos $3 \leq p < 6$.

Para $p = 3$ segue que

$$F = \frac{4 \cdot 3}{6-3}$$

ou seja,

$$F = 4.$$

Como $n = 3$ (faces triangulares), $F = 4$ (quatro faces iguais) e $p = 3$ (em cada vértice concorrem três arestas) temos o **tetraedro**.

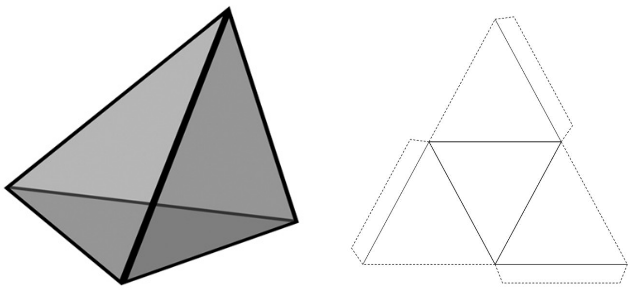


Figura 4.1: Tetraedro (esquerda) e uma representação planificada (direita).

Para $p = 4$ segue que

$$F = \frac{4 \cdot 4}{6-4}$$

temos

$$F = 8.$$

Como $n = 3$ (faces triangulares), $F = 8$ (oito faces iguais) e $p = 4$ (em cada vértice concorrem quatro arestas) temos o **octaedro**.

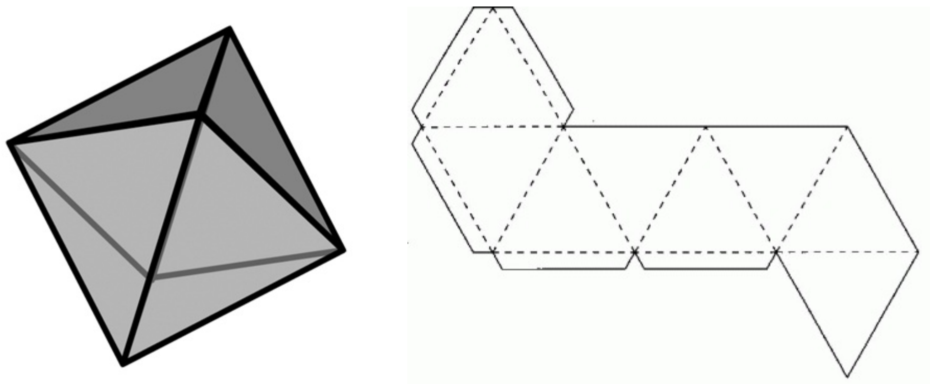


Figura 4.2: Octaedro (esquerda) e uma representação planificada (direita).

Para $p = 5$ obtemos

$$F = \frac{4 \cdot 5}{6 - 5}$$

dessa forma

$$F = 20.$$

Como $n = 3$ (faces triangulares), $F = 20$ (vinte faces iguais) e $p = 5$ (em cada vértice concorrem cinco arestas) temos o **icosaedro**.

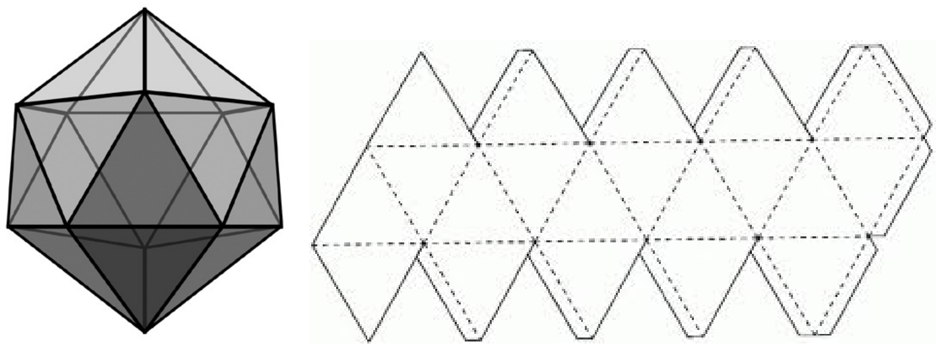


Figura 4.3: Icosaedro (esquerda) e uma representação planificada (direita).

Agora vamos verificar o valor de $n = 4$.

Para $n = 4$ obtemos

$$F = \frac{4p}{2 \cdot 4 - 4p + 2p} = \frac{4p}{8 - 2p}. \tag{4.7}$$

Observando a equação (4.7) podemos concluir que $p < 6$ (para satisfazer a equação), como p é o número de arestas que concorrem em cada vértice e $p \geq 3$, temos $3 \leq p < 6$, porém os valores $p = 4$ e $p = 5$ não satisfazem a equação $F = \dfrac{4p}{8-2p}$, pois torna F negativo, assim vamos utilizar apenas para $p = 3$.

Para $p = 3$ obtemos

$$F = \frac{4 \cdot 3}{8 - 6}$$

ou seja,

$$F = 6.$$

Como $n = 4$ (faces quadrangulares), $F = 6$ (seis faces iguais) e $p = 3$ (em cada vértice concorrem três arestas) temos o **hexaedro**.

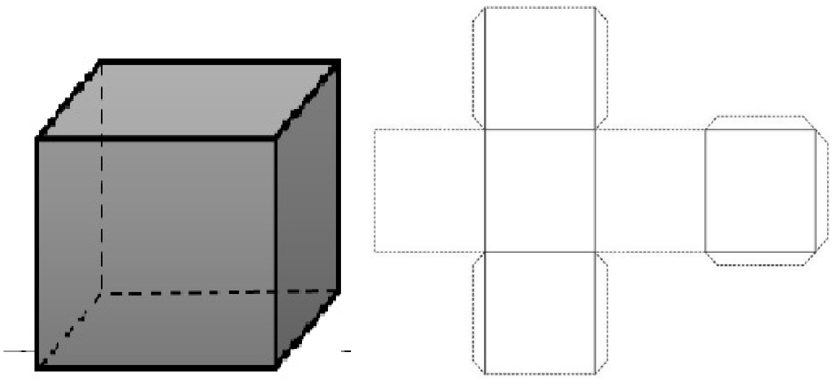


Figura 4.4: Hexaedro (esquerda) e uma representação planificada (direita).

E por fim vamos verificar o valor de $n = 5$.

Para $n = 5$

$$F = \frac{4p}{2 \cdot 5 - 5p + 2p} = \frac{4p}{10 - 3p}. \tag{4.8}$$

Assim como para $n = 4$, temos que da equação (4.8), podemos concluir que $p < 6$ (para satisfazer a equação), como p é o número de arestas que concorrem em cada vértice e $p \geq 3$, temos $3 \leq p < 6$, porém os valores $p = 4$ e $p = 5$ não satisfazem a equação $F = \dfrac{4p}{10 - 3p}$, pois torna F negativo, assim vamos testar apenas para $p = 3$.

Para $p = 3$ segue que

$$F = \frac{4 \cdot 3}{10 - 9}$$

temos

$$F = 12.$$

Como $n = 5$ (faces pentagonais), $F = 12$ (doze faces iguais) e $p = 3$ (em cada vértice concorrem três arestas) temos o **dodecaedro**.

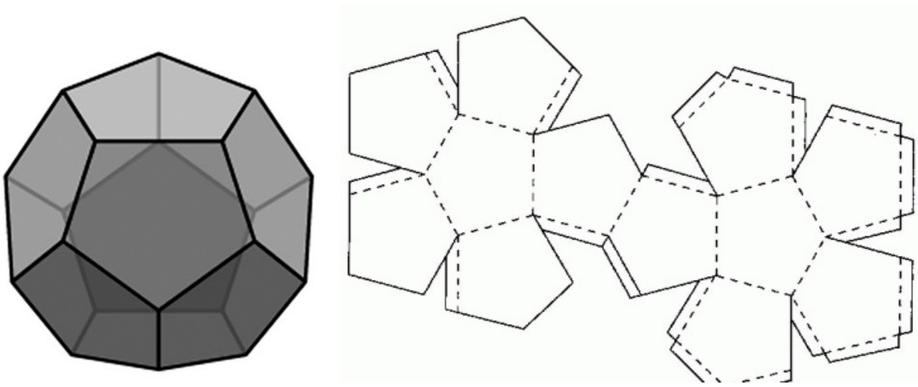


Figura 4.5: Dodecaedro (esquerda) e uma representação planificada (direita).

Assim provamos a existência de apenas cinco poliedros regulares.

A tabela abaixo mostra a quantidade de arestas (A), vértices (V), faces (F), o número de arestas que concorre em cada vértice (p) e o número de arestas em cada face (n).

Poliedro	**A**	**V**	**F**	**p**	**n**
Tetraedro	6	4	4	3	3
Hexaedro	12	8	6	3	4
Octaedro	12	6	8	4	3
Dodecaedro	30	20	12	3	5
Icosaedro	30	12	20	5	3

Tabela 4.1: Poliedros

4.2 Áreas e Volumes

Nessa seção vamos calcular os valores das áreas dos poliedros regulares e volumes das regiões do espaço delimitadas pelos poliedros regulares em função de uma aresta α.

4.2.1 Áreas

Para calcular as áreas (das superfícies) dos poliedros de faces triangulares basta calcular a área de um triângulo e depois multiplicar pelo número de faces, assim dado um triângulo DEF de lado α (aresta do poliedro) e ponto médio M do lado $\overline{EF}$ temos que para o cálculo da área do triângulo precisamos da altura $\overline{DM}$. Podemos determiná-la pelo triângulo DMF.

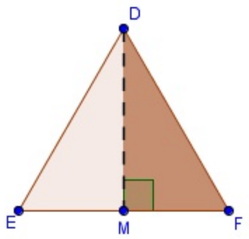


Figura 4.6: Triângulo DEF de lado α.

$$\overline{DF}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{DM}^2$$

o que implica que

$$\overline{DM}^2 = \overline{DF}^2 - \overline{MF}^2.$$

Substituindo $\overline{DF}$ por α e $\overline{MF}$ por $\dfrac{\alpha}{2}$ temos

$$\begin{aligned} \overline{DM}^2 &= \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} \\ \Rightarrow \overline{DM} &= \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\sqrt{3}. \tag{4.9}$$

Para determinar área da superfície S do triângulo de lado α, basta multiplicar α (base) pela altura (4.9) e dividir o produto por 2

$$S = \frac{\alpha . \frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{2}$$

e portanto,

$$S = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}. \tag{4.10}$$

Então para calcular a área da superfície de um tetraedro, octaedro e icosaedro de aresta α basta multiplicar por 4, 8 e 20 respectivamente (número de faces) pela equação (4.10) assim para a área do tetraedro temos que

$$S = 4 \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

e portanto

$$\boxed{S = \alpha^2\sqrt{3}.}$$

A área do octaedro é dada por

$$S = 8 \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

e portanto

$$\boxed{\mathrm{S} = 2\alpha^2\sqrt{3}.}$$

E por fim a área do icosaedro é dada por

$$S = 20 \cdot \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

e assim temos

$$\boxed{\mathrm{S} = 5\alpha^2\sqrt{3}.}$$

Para calcular a área da superfície S de um hexaedro de lado α (aresta do poliedro) basta determinar a área de uma face e multiplicar por 6.

Como as faces são quadrados temos que a área do quadrado é dada por

$$S = \overline{JG} \cdot \overline{GH}.$$

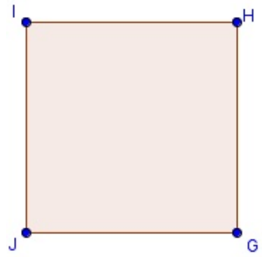


Figura 4.7: Quadrado de lado α.

Substituindo $\overline{JG}$ e $\overline{GH}$ por α temos

$$S = \alpha^2. \tag{4.11}$$

Então para calcular a área da superfície de um hexaedro basta multiplicar por 6 (número de faces) a equação (4.11), assim para a área do hexaedro temos

$$\boxed{\mathrm{S} = 6\alpha^2.}$$

E por fim, calculando a área da superfície de um dodecaedro de aresta α. Como suas faces são pentágonos vamos dividí-los em triângulos isósceles ligando os vértices ao centro da circunferência circunscrita de raio $\overline{ON} = R$ e o raio da circunferência inscrita de raio $\overline{OP} = r$, onde P é o ponto médio de um lado do pentágono.

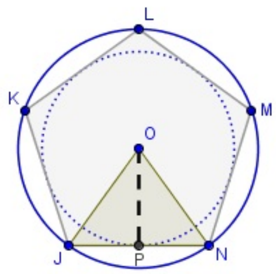


Figura 4.8: Pentágono $JKLMN$ de lado α.

Observa-se que o triângulo OPN tem como lados os segmentos $\overline{ON}$ (raio da circunferência circunscrita ao pentágono), $\overline{NP}$ (metade do lado do pentágono) e $\overline{OP}$ (raio da circunfência inscrita ao pentágono). O raio r também é chamado de apótema do pentágono. A definição de ápotema abaixo é dada por Iezzi [9] página 471.

Definição 4.3 *Apótema de um polígono regular é o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um lado.*

Observando o triângulo OJN temos: $\overline{JN}$ é a base do triângulo e $\overline{OP}$ a altura do triângulo, assim para calcularmos a área da superfície S do triângulo OJN temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{\overline{JN} \cdot \overline{OP}}{2} \\ &= \frac{\alpha \cdot r}{2}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Como queremos calcular a área da superfície S do pentágono de aresta A precisamos multiplicar a equação (4.12) por 5.

$$S = 5 \cdot \frac{\alpha \cdot r}{2}.$$

Como temos doze pentágonos no docecaedro sua área é dada por:

$$\boxed{\mathrm{S} = 30\alpha \cdot r.}$$

Como podemos observar a área da superfície do pentágono está determinada pela aresta α e pelo ápotema r esse fato deve-se por ficar mais compreensível e fácil de determiná-la, porém ela poderia ser expressa apenas com a aresta .

$$\boxed{\mathrm{S} = 3\alpha^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.}$$

4.2.2 Volumes

Os cálculos dos volumes, assim como os das áreas, também serão em função da aresta α. O volume é a região limitada pelo poliedro.

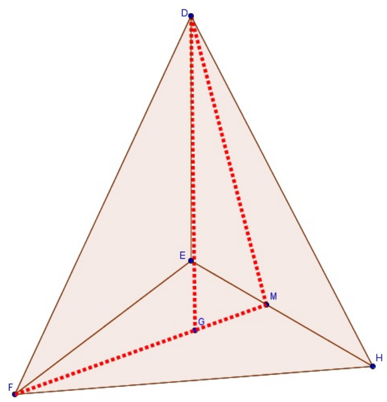


Figura 4.9: Tetraedro de aresta α.

Com o tetraedro basta multiplicar a área da base pela altura e dividir por 3, pois trata-se de uma pirâmide (ver seção 4.3). Já temos a área da base da equação (4.10).

A altura do poliedro pode ser calculada utilizando o triângulo DGF retângulo em G, onde $\overline{DG}$ segmento que corresponde a altura do poliedro, $\overline{DF} = \alpha$ e $\overline{GF} = \frac{2}{3}\alpha$, pois é o baricentro da base. Para provar $\overline{GF} = \frac{2}{3}\alpha$ basta trabalhar com o polígono que forma a base. Como o triângulo é equilátero, incentro (encontro das bissetrizes), baricentro (encontro das medianas) e ortocentro (encontro das alturas) todos se encontram num único ponto, no exemplo o ponto G.

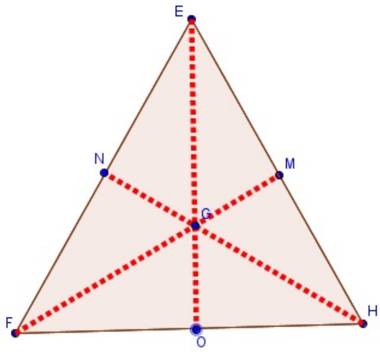


Figura 4.10: Triângulo da base do tetraedro de aresta α.

Daí temos que no triângulo formado pelos pontos F, G e O que é ponto médio do lado $\overline{FH}$. O ângulo $G\widehat{F}O$ mede 30°, pois temos uma bissetriz como reta suporte do segmento $\overline{FG}$. Utilizando-se da relação cosseno

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\overline{FG}}$$
$$\Rightarrow \overline{FG} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

Equivalente a $\frac{2}{3}$ da altura de uma face. Agora usando o triângulo DGF podemos determinar a altura do poliedro, onde

$$\begin{aligned} \overline{DF}^2 &= \overline{DG}^2 + \overline{FG}^2 \\ \Rightarrow \overline{DG}^2 &= \overline{DF}^2 - \overline{FG}^2. \end{aligned}$$

Onde substituindo os valores de $\overline{DF} = \alpha$ e $\overline{FG} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ concluímos que

$$\overline{DG} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.$$

Assim o volume do tetraedro $DEFH$ é

$$\mathcal{V} = \frac{\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\alpha\sqrt{6}}{3}}{3}$$

ou seja,

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{12}.}$$

Para o hexaedro basta multiplicarmos a área da base que já temos da equação (4.11) pela altura, que é o próprio α.

Assim o volume para um hexaedro de aresta α temos

$$\mathcal{V} = \alpha^2 \cdot \alpha$$

ou seja,

$$\boxed{\mathcal{V} = \alpha^3.}$$

Para o octaedro podemos observar que ele é formado por duas pirâmides de base quadrada, assim precisamos calcular o volume de apenas uma e logo em seguida multiplicarmos por 2.

Como a base é quadrada temos sua área da equação (4.11), precisamos apenas da altura da pirâmide, já sabemos a altura de uma face triangular regular de aresta α pela equaç ao (4.9) e o apótema da base $\overline{GM}$ será a metade da aresta α.

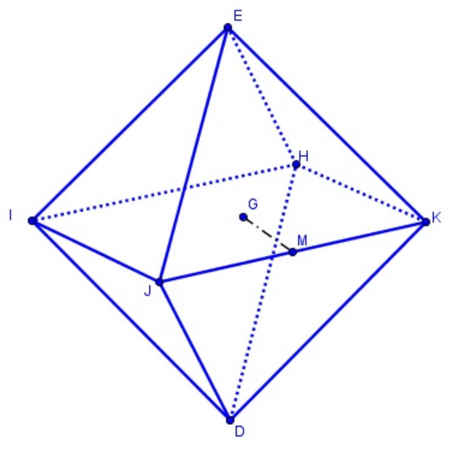


Figura 4.11: Octaedro de aresta α.

Para calcular a altura de uma das pirâmides podemos trabalhar com o triângulo DGM onde $\overline{DM} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$ e $\overline{GM} = \frac{\alpha}{2}$, assim podemos determinar $\overline{DG}$ da seguinte forma

$$\overline{DG}^2 = \overline{DM}^2 - \overline{GM}^2$$

$$\Rightarrow \overline{DG}^2 = \frac{\alpha^2 3}{4} - \frac{\alpha^2}{4}$$

logo,

$$\overline{DG} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Assim o volume de uma pirâmide é

$$\mathcal{V}_{pir} = \frac{\alpha^2 \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{3}$$

daí podemos concluir que para o volume do octaedro temos

$$\mathcal{V} = 2 \cdot \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{6}$$

ou seja,

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{3}.}$$

Agora vamos calcular o volume de um dodecaedro de aresta α, algumas informações foram utilizadas por Sérgio, (veja [16]). Primeiramente vamos dividir o dodecaedro em outros poliedros conforme ilustra a figura

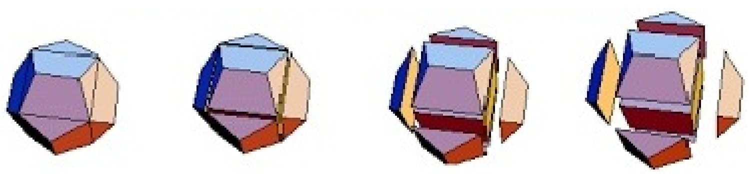


Figura 4.12: Dodecaedro decomposto em outros polígonos.

O dodecaedro fica dividido em um cubo e seis outros poliedros congruentes, primeiramente vamos determinar a aresta do cubo. Observando a divisão do dodecaedro podemos perceber que o pentágono é dividido da seguinte forma. A reta s secciona o pentágono no segmento $\overline{KM}$ no qual torna-se aresta do cubo. Para determinar $\overline{KM}$ traçamos uma perpendicular t pelo ponto L onde teremos um triângulo isósceles KLM. Como o ângulo $\widehat{K}$ tem medida igual a 108° (ângulos do pentágono)

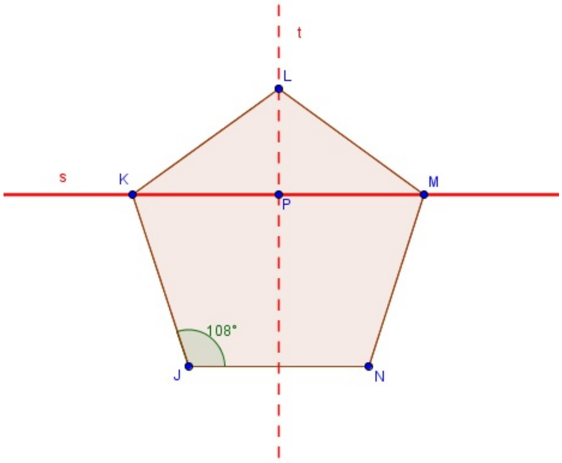


Figura 4.13: Reta s seccionando o pentágono JKLMN.

e sabendo que o triângulo KLM é isósceles concluímos que os outros dois ângulos são congruentes, cada um medindo 36°.

Agora observando o triângulo PKL onde em P temos um ângulo reto, podemos aplicar a relação do cosseno do ângulo de 36° para determinar o valor de $\overline{KP}$ que é metade de $\overline{KM}$ a aresta do cubo.

$$\cos 36^\circ = \frac{\overline{KP}}{\overline{KL}}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\overline{KP}}{\alpha},$$

logo

$$\overline{KP} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \alpha.$$

Como $\overline{KP} = \dfrac{\overline{KM}}{2}$ segue que

$$\overline{KM} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \alpha. \tag{4.13}$$

Para facilitar a manipulação dos cálculos que seguem. Vamos fazer a seguinte substituição

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \beta \tag{4.14}$$

segue que

$$\overline{KM} = \beta \cdot \alpha. \tag{4.15}$$

Agora precisamos determinar o volume dos outros poliedros, para melhorar a compreensão vamos determinar apenas o volume de um dos poliedros, o resultado podemos multiplicar por 6. Vamos dividí-los em outros poliedros. Um prisma reto e as duas partes laterais que juntas formam uma pirâmide. Agora precisamos escrever o volume desses polígonos em função da aresta do dodecaedro α. Vamos determinar $\overline{JT}$ (ou $\overline{NU}$) altura da pirâmide de base $IKMO$.

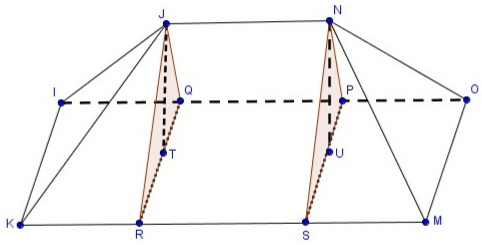


Figura 4.14: Prisma reto no meio e a junção dos poliedros das laterais formam uma pirâmide.

Antes vamos escrever os segmentos envolvidos por letras, apenas para facilitar os cálculos, segue que $\overline{KM} = c$, $\overline{KR} = \overline{SM} = b$, $\overline{RS} = \overline{JN} = \alpha$, $\overline{JT} = \overline{NU} = h$, $\overline{JR} = \overline{JQ} = \overline{NS} = \overline{PN} = d$. Daí temos

$$b = \frac{c - \alpha}{2}. \tag{4.16}$$

$$\alpha^2 = b^2 + d^2. \tag{4.17}$$

Da equação (4.17) isolando d^2 e substituindo b por (4.16) ficamos com

$$\begin{aligned} d^2 &= \alpha^2 - b^2 \\ &= \alpha^2 - \left(\frac{c-\alpha}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Agora vamos utilizar a equação

$$d^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2. \tag{4.19}$$

Isolando h^2 e substituindo o valor da equação

$$h^2 = \alpha^2 - \left(\frac{c-\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

desenvolvendo as potências no segundo membro e agrupando os termos semelhantes ficamos com

$$h^2 = \frac{3 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot c^2 + 2 \cdot \alpha \cdot c}{4},$$

mas $c = \overline{KM}$ e pela equação (4.15) temos que

$$h^2 = \frac{3 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot (\beta \cdot \alpha)^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \alpha}{4}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{\alpha^2}{4} \cdot [3 - 2 \cdot \beta(\beta - 1)]$$

onde podemos substituir β verificando a equação (4.14). Depois agrupando os termos semelhantes e resolvendo as operações chegamos a

$$h = \frac{\alpha}{2}. \tag{4.20}$$

Como temos o valor da altura h podemos calcular os valores do volume do cubo $\mathcal{V}_1$, dos seis prismas $\mathcal{V}_2$ e das seis pirâmides $\mathcal{V}_3$ em função da aresta α que formam o dodecaedro. Assim o volume do dodecaedro $\mathcal{V}$ será igual a

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + 6 \cdot \mathcal{V}_2 + 6 \cdot \mathcal{V}_1. \tag{4.21}$$

Escrevendo os volumes dos outros poliedros em função do valor de α e β temos que

$$\mathcal{V}_1 = (\alpha \cdot \beta)^3 \tag{4.22}$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\alpha^3 \cdot \beta}{4} \tag{4.23}$$

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\alpha^3 \cdot \beta(\beta - 1)}{6} \tag{4.24}$$

Substituindo na equação (4.21) os valores de $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ e $\mathcal{V}_3$ das equações (4.22), (4.23) e (4.24), respectivamente, ficaremos com

$$\mathcal{V} = (\alpha \cdot \beta)^3 + 6 \cdot \frac{\alpha^3 \cdot \beta}{4} + 6 \cdot \frac{\alpha^3 \cdot \beta(\beta - 1)}{6}$$

$$\Rightarrow \mathcal{V} = \alpha^3 \cdot \beta^3 + \frac{3 \cdot \alpha^3 \cdot \beta}{2} + \alpha^3 \cdot \beta(\beta - 1)$$

assim temos que

$$\mathcal{V} = \alpha^3 \cdot \beta \left(\beta^2 + \beta + \frac{1}{2} \right).$$

Para finalizar basta substituírmos o valor de β da equação (4.14)

$$\mathcal{V} = \alpha^3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right].$$

resolvendo as operações e agrupando os termos semelhantes temos que o volume de um dodecaedro em função da aresta α.

$$\boxed{\mathcal{V} = \alpha^3 \left(\frac{15 + 7\sqrt{15}}{4} \right).}$$

E por fim vamos determinar o volume de um icosaedro de aresta α, algumas partes da demonstração foram baseadas em Granja e Costa (veja [8]). Para tal vamos dividir o icosaedro em 20 pirâmides de bases formadas pelas faces do icosaedro (triângulos equiláteros) e arestas laterais que tocam no ponto C no centro do icosaedro, esse ponto está na maior diagonal do icosaedro e divide essa diagonal ao meio.

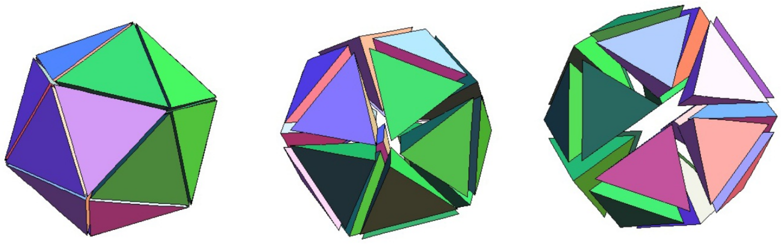


Figura 4.15: Dividindo o icosaedro em 20 pirâmides.

Para isso vamos observar a poligonal $KPQRMS$ formada pelas alturas h das faces e arestas α e o pentágono regular $JKLMN$. Já temos o valor do segmento $\overline{KM}$ da equação (4.13).

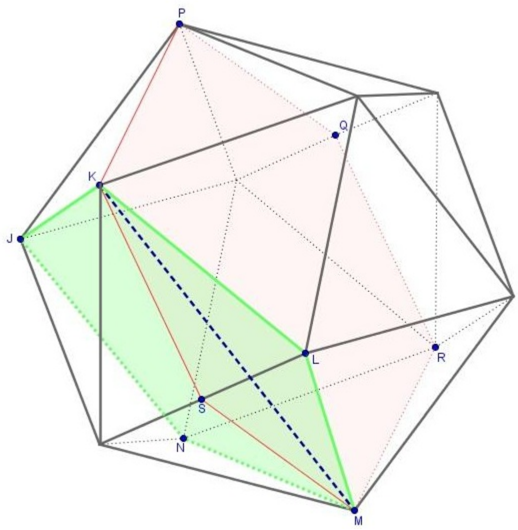


Figura 4.16: Poligonal $KPQRMS$ e pentágono regular $JKLMN$.

Assim pela poligonal $KPQRMS$ podemos calcular o valor da diagonal d do icosaedro.

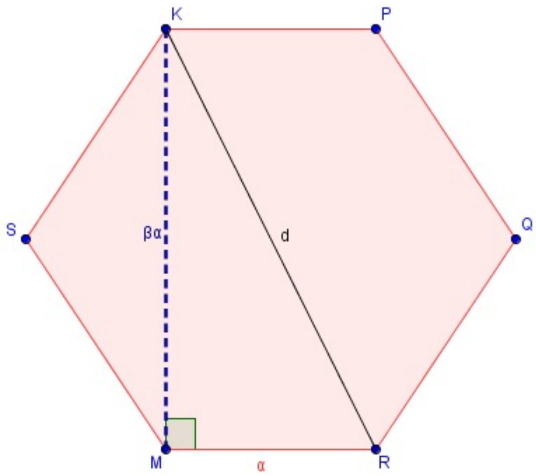


Figura 4.17: Diagonal d do icosaedro.

Pelo teorema de Pitágoras temos que

$$\begin{aligned} d^2 &= (\beta \cdot \alpha)^2 + \alpha^2 \\ &= \alpha^2(\beta^2 + 1). \end{aligned}$$

Substituindo o valor de β da equação (4.14) ficamos com

$$d^2 = \alpha^2 \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + 1 \right]$$

Resolvendo parênteses, cochetes e isolando d chegamos ao valor da diagonal do icosaedro.

$$d = \alpha \left(\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2} \right).$$

Já sabemos que as arestas A das pirâmides têm valores $\frac{d}{2}$, ou seja

$$A = \alpha \left(\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4} \right).$$

Agora calculando o valor do volume de uma das 20 pirâmides que formam o icosaedro. Como a base é face do icosaedro temos um triângulo KLT equilátero de lado α e altura $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, porém ainda falta calcular o valor da altura da pirâmide, mas podemos utilizar o triângulo KGC, onde $\overline{KG}$ é $\dfrac{2}{3}$ da altura do tetraedro ou $\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ (visto no cálculo do volume do tetraedro). Temos que $\overline{CG}$ é a altura do tetraedro

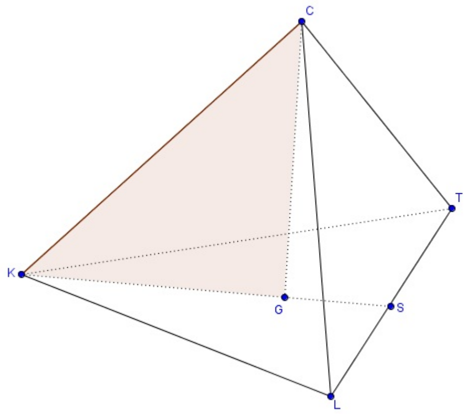


Figura 4.18: Altura CG de uma das 20 pirâmides que formam o icosaedro de aresta α.

e $\overline{CK}$ aresta lateral A da pirâmide, por uma das relações métricas do triângulo retângulo podemos afirmar que

$$\overline{CK}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{KG}^2$$

$$\Rightarrow \overline{CG}^2 = \overline{CK}^2 - \overline{KG}^2$$

substituindo os valores ficamos com

$$\overline{KG}^2 = \left[\alpha\left(\frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}\right)\right]^2 - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

Resolvendo as operações necessárias obtemos

$$\overline{KG} = \alpha\left(\frac{\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}}{12}\right).$$

Calculando o volume de uma pirâmide (um terço da área da base vezes a altura), temos

$$\mathcal{V}_{pir} = \frac{\left(\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\alpha\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}}{12}\right)}{3}$$

resolvendo as operações obtemos o volume de uma pirâmide vale

$$\mathcal{V}_{pir} = \alpha^3 \left(\frac{\sqrt{2(7+3\sqrt{5})}}{48} \right).$$

Assim o volume do icosaedro é 20 vezes o volume de uma pirâmide, portanto teremos

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= 20 \cdot \alpha^3 \left(\frac{\sqrt{2(7+3\sqrt{5})}}{48} \right) \\ &= 5 \cdot \alpha^3 \left(\frac{\sqrt{(14+6\sqrt{5})}}{12} \right).\end{aligned}$$

Porém

$$14 + 6\sqrt{5} = 9 + 6\sqrt{5} + 5 = (3+\sqrt{5})^2.$$

Portanto temos que o volume do icosaedro de aresta α é

$$\boxed{\mathcal{V} = 5 \cdot \alpha^3 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{12} \right).}$$

4.3 Outros Poliedros

Os capítulos e seções anteriores apresentaram história, definições, elementos e relações entre eles e planificações dos poliedros convexos regulares, porém alguns poliedros convexos mas não regulares são bem importantes e estudados tanto quanto os poliedros regulares, aqui faremos um breve comentário sobre esses poliedros.

- **Poliedros Semirregulares**

  Neste capítulo estudamos os poliedros que possuem suas faces formadas apenas por um único tipo de polígono regular, porém existem outros poliedros que são formados não necessariamente com um único tipo, esses poliedros são chamados de poliedros semirregulares. A definição abaixo é dada por Janos [10] página 87.

  Definição 4.4 *Um poliedro é dito semirregular quando é formado por polígonos regulares, mas pode existir mais um tipo de polígono em cada poliedro (geralmente dois tipos).*

Um dos estudiosos desse grupo de poliedros foi Arquimedes, ele descobriu 13 poliedros com essas características, eles podem ser obtidos realizando cortes nos poliedros de Platão e considerando que as superfícies obtidas sejam polígonos regulares. Alguns objetos apresentam semelhança ou aplicações como os da figura abaixo. Um utilizado como assento, principalmente para crianças, pois os triângulos equiláteros e octaedros que o compõem quando coloridos chamam a atenção, já o outro tem a semelhança (já que usa os mesmos polígonos) com a bola utilizada na copa de 70.

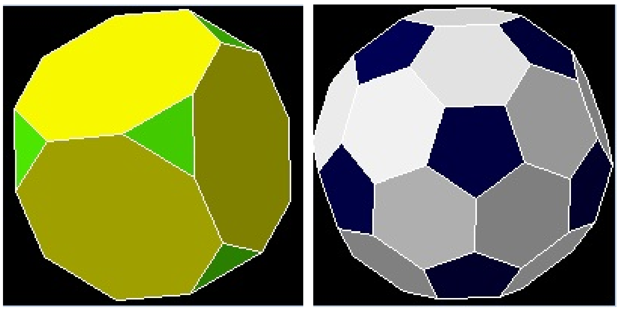


Figura 4.19: Poliedros Semirregulares

- **Pirâmides**

Definição 4.5 *Considere uma região poligonal, por exemplo $ABCDE$, contida em um plano H e um ponto V exterior ao plano da região poligonal. Traçamos os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$. Cada dois vértices consecutivos de $ABCDE$ determinam como V uma região triangular. Essa regiões triangulares, juntamente com a região poligonal $ABCDE$, determinam um poliedro chamado pirâmide de base $ABCDE$ e vértice V.*

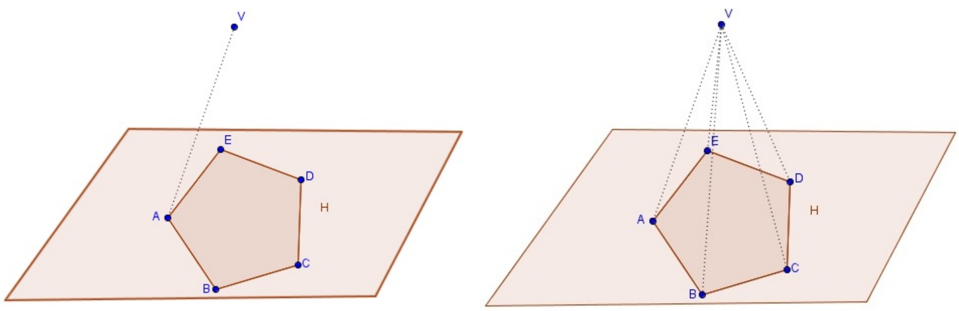


Figura 4.20: Pirâmide

A definição 4.5 de Dante [6] página 373 nos mostra o exemplo de uma pirâmide de base pentagonal, assim classificamos as pirâmides de acordo com a poligonal formada, (triangular, quadrangular, pentagonal, e assim sucessivamente).

As pirâmides exercem fascínio sobre o ser humano desde a Antiguidade, a forma piramidal tem ressurgido na aquitetura moderna em edifícios de grande imponência. As pirâmides do Egito, a pirâmide do museu do Louvre ou mesmo pirâmides decorativas, são belos exemplos desse sólido no nosso cotidiano. (veja [3] página 183)

Área	$S_b + S_l$
Volume	$\dfrac{S_b \cdot h}{3}$

Tabela 4.2: Área e volume de uma pirâmide.

- **Prismas**

  A definição a seguir foi baseada no livro de Dante [6] página 364.

Definição 4.6 *Considere uma região poligonal, por exemplo $ABCDE$, contida em uma plano H. Escolha um ponto A' qualquer não pertencente a H. Por A' trace o plano J paralelo a H. Pelos demais pontos B, C, D, E trace retas paralelas a AA' que cortam J nos pontos B', C', D', E'. Essas retas são paralelas entre si.*

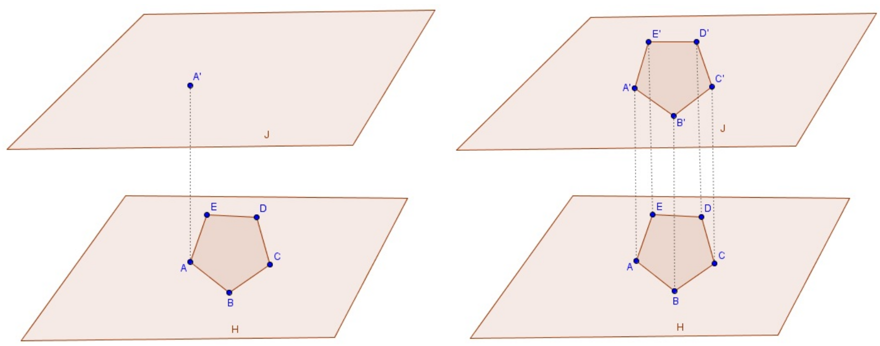


Figura 4.21: Prisma

Tome dois segmentos consecutivos assim determinados, por exemplo $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$. O quadrilátero $AA'BB'$ é plano, pois seus lados AA' e BB' são paralelos. Isso acarreta que $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ também são paralelos (pois estão contidos em retas coplanares que não se intersectam por estarem contidas em planos paralelos). Logo, o quadrilátero $AA'BB'$ é um paralelogramo. As regiões limitadas *por paralelogramos assim determinados, juntamente com as regiões poligonais $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$, determinam um poliedro chamado prisma de bases $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$.*

Assim como nas pirâmides, os prismas têm suas classificações baseadas nas poligonais formadas nas bases (triangular, quadrangular, pentagonal, e assim sucessivamente), no exemplo acima temos um prisma de base pentagonal.

Os prismas são os poliedros que talvez sejam um dos mais facéis de visualização no dia dia, desde uma caixa para sapatos, leite, suco a um cômodo de uma casa ou um prédio são exemplos de prismas.

Área	$2 \cdot S_b + S_l$
Volume	$S_b \cdot h$

Tabela 4.3: Área e volume de um prisma.

Capítulo 5

Prospostas de Softwares

Por mais que algumas pessoas resistam é inegável que a tecnologia criou um grande leque de oportunidades de aprendizagem. Na matemática como em qualquer outra área do conhecimento não foi diferente, podemos tomar como exemplo mais simples a calculadora, que antes tinha uso restrito, hoje de acesso fácil, pode ser usada como uma grande ferramenta para dicentes e docentes. A proposta desse capítulo é apresentar algumas dessas novas ferramentas que podem ser utilizadas na apredizagem do aluno.

5.1 Cabri

Cabri-Geometry é um software de construção em geometria desenvolvido pelo Institut d'Informatiqe et de Mathematiques Appliquees em Grenoble (IMAG) e é o resultado da colaboração constante de cientistas da informática, especialistas em educação e professores.

Software Cabri foi distribuído em todo o mundo há mais de 20 anos. Conhecido por seu foco pedagógico, os produtos de software Cabri já são usados por mais de 100 milhões de usuários. Desenvolvido para o ensino médio e os alunos do ensino médio, este software permite que os alunos a manipular diretamente os objetos matemáticos (álgebra, análise, geometria, trigonometria...) ou objetos físicos (mecânica, óptica.) Para que os alunos possam mais facilmente compreender os conceitos.

As informações do software estão disponíveis no endereço eletrônico http:www.cabri.com [17], lá encontramos versões disponíveis para download, treinamento on-line, apoio entre outras informações que ajudam na instalação e uso do softaware.

Existem várias versões do cabri aqui utilizamos o cabri 3D, nele podemos construir vários poliedros convexos, na barra de ferramentas encontramos algumas janelas, nelas teremos toda as informações para construírmos um poliedro.

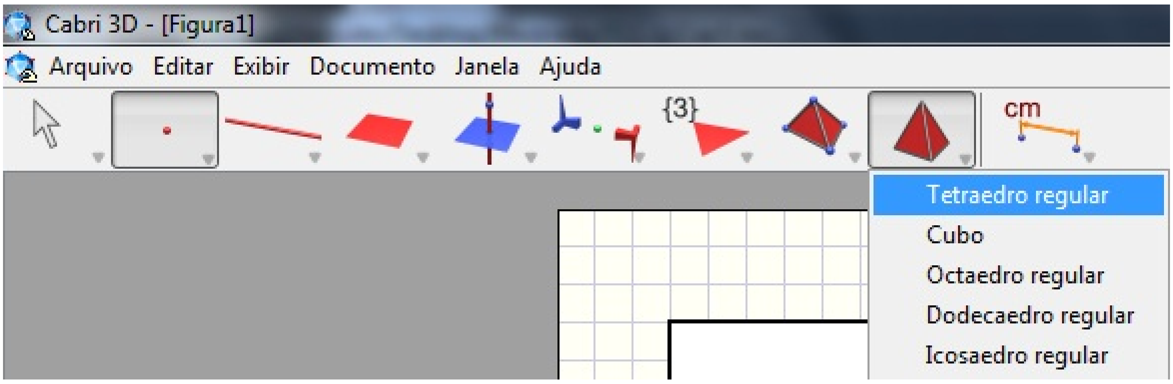


Figura 5.1: Janelas do Cabri 3D.

Na figura observamos que a janela selecionada foi a dos poliedros regulares, nela encontramos todos os cinco poliedros, selecionando algum deles podemos observar seus vértices, arestas, faces, planificações entre outras informações que facilitam a compreensão dos elementos e relações encontradas nos poliedros.

Na figura 5.2 vemos um hexaedro (cubo), podemos planificá-lo, rotacioná-lo entre outras opções, é interessante que o aluno possa manusear (principalmente os que têm maior dificuldade) caso apenas o professor tiver acesso ao software de forma a perceber características na formação do poliedro.

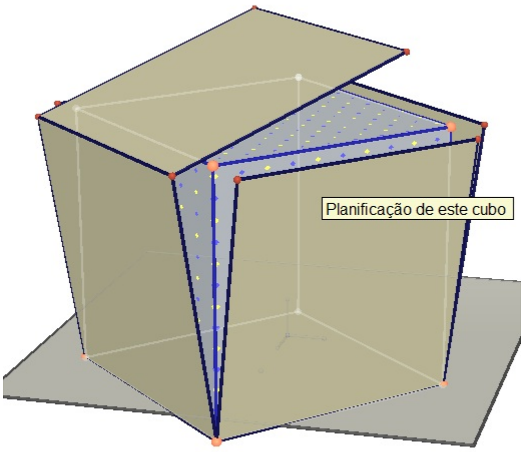


Figura 5.2: Planificando o cubo.

5.2 Poly

Outro software capaz de mostrar os poliedros de maneira bem dinâmica é o Poly. As informações sobre o softaware estão disponíveis em http://www.peda.com/poly

[18] nele encontramos como fazer download do software, informações sobre a empresa entre outros produtos oferecidos.

Poly é um programa shareware (que está disponível de forma gratuita e, muitas vezes informalmente distribuído para avaliação, após o qual a taxa pode ser solicitada para uso continuado), para exploração e construção de poliedros . Com Poly, é possível manipular os sólidos poliédricos no computador em uma variedade de formas. A manipulação do Poly é bem fácil nele temos uma barra de ferramentas com poucas opções, mas com muitas possibilidades para visualizações.

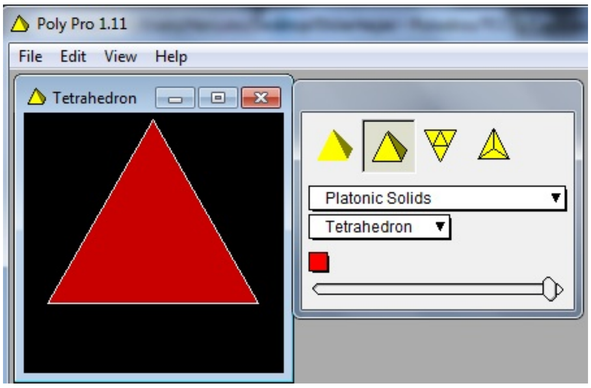


Figura 5.3: Barra de ferramentas do Poly.

Nela temos todos os polígonos regulares, semirregulares, prismas e anti-primas entre outros poliedros, opções de planificações como da figura abaixo.

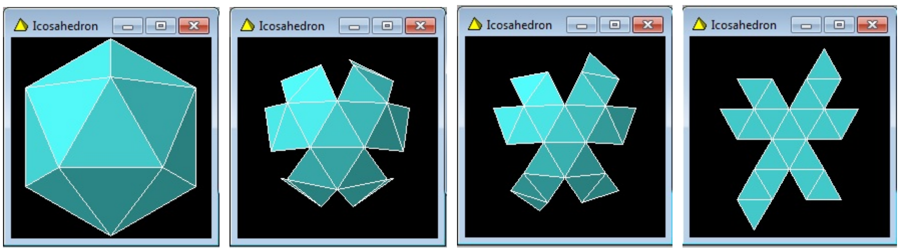


Figura 5.4: Planificando o icosaedro.

5.3 Outros Softwares

Além do Cabri e Poly (e suas versões) temos outros softwares capazes de auxiliar no trabalho em sala de aula tanto na Geometria Plana e Espacial as informações foram colhidas no site da UFRGS [7], nele temos como realizar o download dos softwares entre outras informações. Alguns exemplos:

- CINDERELA - Software de construção em geometria desenvolvido por Jürgen Richter-Gebert & Ulrich Kortenkamp comercializado por Sun Microsystems, Inc. É um software de construção que nos oferece "régua e compasso eletrônicos", semelhante ao Cabri. Um diferencial deste software é que permite que se trabalhe também em geometria hiperbólica e esférica. E mais: tem a opção de salvar como página da web automaticamente.

- DR GEO - Software de construção em geometria desenvolvido por Hilaire Fernande Grenoble e que nos oferece "régua e compasso eletrônicos", sendo a interface de menus de construção em linguagem clássica da Geometria. Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem e mantêm estabilidade sob o movimento.

- GEOSPACE - Software de construção e exploração em geometria que trabalha os conceitos espaciais. Desenvolvido pelo Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Ensignement des Mathématiques CREEM.

- GREAT STELLA - Software que trabalha com a visualização, rotação e construção de poliedros convexos e não convexos.

- SKETCHPAD - Software de construção em geometria desenvolvido por N. Jackiw e S.Steketee comercializado por Key Curriculum Press, nos oferece "régua e compasso eletrônicos", sendo a interface de menus de construção em linguagem clássica da Geometria. Os desenhos de objetos geométricos são feitos a partir das propriedades que os definem e mantêm estabilidade sob o movimento. É possível converter seus arquivos em linguagem JAVA, de maneira que sejam disponibilizados na rede.

- WINGEOM - Software que permite construções geométricas bidimensionais e tridimensionais.

Trazemos aqui algumas questões que podem servir para verificação de aprendizagem do aluno, claro que o professor pode adequá-la de acordo com a necessidade de sua turma, algumas das questões podem ser resolvidas com o uso de software e claro que se o aluno tiver acesso a um deles deixar que ele manusei.

1. Defina Poliedros

2. Com auxílio de uma régua desenhe um polígono convexo e outro não convexo que tenham a mesma quantidade de lados.

3. Cite os nomes dos cinco Poliedros Regulares

4. Complete a tabela:

Poliedro	**Tipo de Face**	**Número de arestas que incidem em um vértice**
Tetraedro		
Hexaedro		
Octaedro		
Dodecaedro		
Icosaedro		

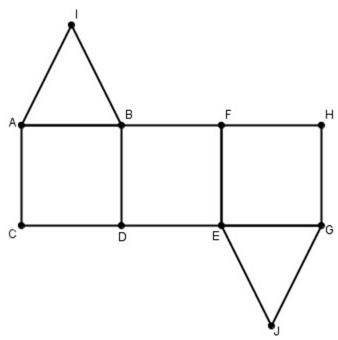
5. Planifique de dois modos diferentes um cubo.

6. Uma pessoa que observa um objeto que está numa sala e verifica que esse é um poliedro convexo e que todas as faces são triangulares e que em cada vértice incidem quatro arestas, esse objeto tem a forma de um:
a) octaedro
b) prisma de base pentagonal
c) dodecaedro
d) prisma de base octogonal
e) icosaedro

7. Sabendo que um poliedro possui duas faces pentagonais e cinco faces retangulares, determine quantos vértices possue esse poliedro.

8. Um poliedro convexo possue seis arestas a mais que o número de vértices, quantos vértices esse poliedro possue sabendo que ele tem 4 faces hexagonais e 4 faces triangulares.

9. Observe a planificação abaixo:



Analisando a planificação podemos afirmar que trata-se de:
a) uma pirâmide de base triangular
b) um prisma de base triangular
c) uma pirâmide de base quadrangular

d) um prisma de base quadrangular
e) um poliedro regular

10. Determine a área da superfície de um octaedro e um icosaedro de arestas 5 cm e 2,25 cm respectivamente.

11. Calcule a área da superfície e o volume de uma pirâmide que tem como base um triângulo equilátero de medida 8 cm e arestas laterais com 10 cm.

12 Uma caixa dágua tem forma de um cubo de aresta 2,5 m calcule a capacidade máxima, em litros, de armazenamento dessa caixa.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista Professor de Matemática*, São Paulo. Sociedade Brasileira de Matemática, № 45, 2001

[2] AZAMBUJA FILHO, Z. Demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo. Sociedade Brasileira de Matemática, № 3, p. 15-17, 1983.

[3] BARROSO, Julliane Matsubara, *Conexões com a Matemática*. São Paulo. 1.ed., Moderna, 2010. 440p.

[4] BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval; *Matemática 2*. São Paulo. 2.ed., Moderna, 1995. 346p.

[5] BOYER, C. B.,*História da Matemática*. SP, Edgar Blucher Ltda. Tradução de Elza F. Gomide. 1974. 488p.

[6] DANTE, Luiz Roberto, *Matemática, volume único*, São Paulo. 1. ed.,Ática, 2005. 504p.

[7] EDUCACÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIA INFORMÁTICA, Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/soft_geometria.php. Acesso em: 13 jul. 2014

[8] GRANJA, C.E.S.C.; COSTA, M.P.M.. A Fórmula do Volume do Icosaedro *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo. Sociedade Brasileira de Matemática, apoio USP. № 74, 2011.

[9] IEZZI, Gelson, et.al., *Matemática, volume único*. São Paulo. Atual, 2002. 658p.

[10] JANOS, Michel, *Matemática para pais e interessados, volume 2*, São Paulo. 1.ed., Livraria da Física, 2011. 440p.

[11] LIMA, Elon Lages, *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Rio de Janeiro. IMPA. 1991.

[12] LIMA, Elon Lages, et.al., *A Matemática no Ensino Médio, volume 2*, Rio de Janeiro. 6.ed., SBM, 2006. 373p.

[13] PAIVA, Manoel, *Matemática, volume único*, Sáo Paulo. 1.ed., Moderna. 2005. 578p.

[14] GOMES, Alexandra; RALHA, Elfrida; PALHARES, Pedro(Org.) *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*, Lisboa-Porto. Lidel, 2004. 413p.

[15] RIBEIRO, Jackson, *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia.* São Paulo. 1.ed., Scipione, 2010. 376p.

[16] SÉRGIO, P., *Fatos Matemáticos.* Disponível em: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/04/o-volume-do-dodecaedro-regular.html. Acesso em: 16 jul. 2014.

[17] SOFTWARE CABRI, Disponível em: http://www.cabri.com/cabrilog.html. Acesso em: 20 jun. 2014.

[18] SOFTWARE POLY, Disponível em: http://www.peda.com/poly/. Acesso em: 26 jun. 2014.

[19] TIZZIOTTI, José Guilherme, *Matemática.* São Paulo. Ática, 1944. 496.