UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ELION SOUZA DA SILVA

PROBLEMAS DE MAXIMOS E MINIMOS E DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

Fortaleza – Ceará

2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ELION SOUZA DA SILVA

PROBLEMAS DE MAXIMOS E MINIMOS E DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

Fortaleza – Ceará
2013

S586p Silva, Elion Souza da

Problemas de máximos e mínimos e desigualdades geométricas / Elion Souza da Silva. – 2013.

CD-ROM. 46f. : il. (algumas color) ; 4 ¾ pol.

“CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 cm x 14 cm x 7 mm)”.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Fortaleza, 2013.

Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Desigualdades. 2. Máximos. 3. Mínimos. 4. Problemas isoperimétricos. 5. Desigualdades algébricas. 6. Desigualdades geométricas. I. Título.

CDD: 510

ELION SOUZA DA SILVA

PROBLEMAS DE MAXIMOS E MINIMOS E DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

Aprovada em, 12/03/2013.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Antônio Caminha Muniz Neto
Universidade Federal do Ceará – UFC

Aos meus pais (Francisco e Francisca).

AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar.

À Tânia e as minhas filhas, Ana Tainá e Lissa Noeli, por todo amor, carinho e paciência, e por entenderem que uma vida sem sacrifícios seria uma vida sem sentido, e que os frutos destes são os mais saborosos.

Aos meus pais, Francisco e Francisca, pelo amor, carinho e compreensão; e aos meus irmãos: Herlândio, Eliano, Antonia, Aline, Gaspar e Aparecida. Vocês fazem parte dessa conquista. Amo todos vocês!

Aos meus queridos amigos e ex-professores da graduação: Valdemiro e Ênio.

Aos meus amigos do dia-dia (em especial, Marcos Alexandre, José Duarte, Wilisfran e George Wads), que compreenderam minhas ausências e meus esporádicos isolamentos pra concluir este trabalho.

Aos colegas mestrandos, que sabem o real o valor dessa vitória. Aos amigos do Pólo de Limoeiro do Norte, Aristônio (que hoje é muito mais que um amigo, um irmão), Ari Claudino, Marcos Freire e Maurício.

À Lúcia, nossa coordenadora do Pólo de Limoeiro do Norte, que foi sempre muito compreensiva e prestativa ao longo dos dois anos do curso.

Ao meu orientador Prof. Othon Lopes, que sempre me atendeu prontamente.

À Elisângela, minha professora de inglês, pela força no *"Abstract"* deste trabalho.

Ao Prof. Caminha, pelas críticas e sugestões que abrilhantaram ainda mais este trabalho.

Ao nosso querido coordenador local do Profmat, Prof. Ellery, que abraçou a causa do curso e, por conseguinte, adotou-nos como filhos, e nos aparou debaixo de suas asas paternas.

Aos demais professores do nosso mestrado, em especial, João Montenegro, Cleiton Vasconcelos e João Marques.

A todos que fazem parte de minha vida e que contribuíram direta, ou indiretamente, a chegar tão longe, o meu muito obrigado.

RESUMO

Demonstramos algumas desigualdades algébricas e geométricas e resolvemos problemas de máximos e mínimos em Geometria Euclidiana. As desigualdades algébricas são ferramentas poderosas para resolver problemas de máximos e mínimos em geometria, aliadas com as desigualdades geométricas que, por si, são extremamente importantes, devido a seu valor histórico. Alguns problemas de valores extremos mais clássicos, como os problemas isoperimétricos e isorradianos recebem uma atenção especial.

Palavras-chave: Desigualdades, Máximos, Mínimos, Problemas isoperimétricos, Desigualdades algébricas, Desigualdades geométricas.

ABSTRACT

We demonstrate some algebraic and geometric inequalities and we solve problems of maxima and minima in Euclidian Geometry. The algebraic inequalities are powerful tools for solving problems of maxima and minima in Geometry, combined with the geometric inequalities which are, by themselves, extremely important, due to their historical value. Some classical problems of extremes values, such as the isoperimetric and iso-radium problems, receive a special attention.

Keywords: Inequalities, Maximum, Minimum, Isoperimetric Problems, Algebraic Inequalities, Geometric Inequalities.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática sempre esteve presente na vida do homem. Desde os tempos mais remotos, em que o homem vivia da caça e da pesca, já utilizava a Matemática ainda que de maneira intuitiva. A mesma vem sendo inclusa ao longo do caminho da humanidade, interagindo com as transformações que ocorreram e que continuam a ocorrer na sociedade e no próprio homem. A Matemática foi descoberta e vem sendo desenvolvida pelo homem em função das suas necessidades de sobrevivência no meio social.

Ao longo dos séculos um dos problemas mais fascinantes e desafiadores de toda a matemática foi o de obter valores máximos e mínimos para áreas de regiões planas e para volumes de sólidos. Problemas simples como: *"Qual o retângulo de perímetro constante que possui a maior área?"*, que podem ser resolvidos somente com matemática elementar, leva-nos a investigar e chegar a uma gama de problemas cujas soluções envolvem desigualdades algébricas e também desigualdades geométricas, como a desigualdade triangular e outras.

Por todo o ensino básico, o aluno tem pouquíssimas oportunidades de ter contato com problemas de otimização e desigualdades. Geralmente, tal contato se dá unicamente no 1º ano do ensino médio regular, onde o aluno resolve problemas de máximos e mínimos usando função quadrática. Mas a verdade é que este tema poderia, e ainda pode, ser mais bem explorado no ensino básico, pois trata-se de algo simples, com desdobramentos que podem prender a atenção do educando para a aprendizagem da matemática. Todo matemático sabe que as desigualdades são importantes em todos os ramos da matemática, e às vezes até mais importantes do que as igualdades.

As desigualdades algébricas elementares têm ainda a vantagem de serem, além de muito úteis para atacar os problemas, muito simples de entender, podendo inclusive serem, algumas delas, introduzidas já no 9º ano do ensino fundamental.

As desigualdades geométricas são especialmente atraentes porque podem ser facilmente compreendidas e, ao mesmo tempo, proporcionam uma excelente introdução ao pensamento matemático criativo e ao espírito da matemática moderna.

O foco do trabalho será apresentar soluções usando ferramentas da matemática elementar, para que este seja acessível não só para estudantes em nível universitário, mas também para alunos olímpicos e estudantes de ensino médio e, principalmente, como subsídio para o professor do ensino básico. Em suma, os problemas serão resolvidos usando Desigualdades Algébricas, Desigualdades Geométricas, Desigualdades e Identidades Trigonométricas etc.

Esta dissertação é dividida em quatro capítulos. No capítulo 1 enunciamos e demonstramos as desigualdades algébricas elementares, entre as quais destacamos a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, e também a desigualdade de *Jensen*, e mostramos algumas aplicações imediatas na geometria, além de resolvermos alguns problemas isoperimétricos básicos, mas não menos intrigantes, como o problema: *"Um quadrado e um triângulo têm mesma área. Qual dos dois tem o maior perímetro?"*. Este problema pode ser facilmente resolvido usando a Desigualdade das Médias *Aritmética-Geométrica*. Outra solução muito simples, no entanto elegante, é dada por ANDREESCU; MUSHKAROV; STOYANOV (2006), usando apenas *desigualdade triangular*.

No capítulo 2, enunciamos e demonstramos algumas desigualdades geométricas envolvendo lados e/ou ângulos internos de triângulos e alguns outros polígonos.

Seguidamente, no capítulo 3, chegamos ao ponto principal do trabalho: Propor e resolver problemas de máximos e mínimos. Como encará-los, como interpretá-los, como resolvê-los, sempre priorizando o uso de desigualdades nesta empreitada.

O capítulo 4 é constituído pelas *Considerações Finais* do trabalho.

Como embasamento para o leitor, sugerimos a leitura e estudo de IEZZI, G e POMPEO, J. N. (1991).

1 DESIGUALDADES ALGÉBRICAS

Neste capítulo apresentamos algumas desigualdades algébricas muito importantes que servem para auxiliar na resolução de problemas de máximos e mínimos.

1.1. Algumas desigualdades algébricas

Uma grande variedade de problemas isoperimétricos (ou seja, problemas de valores extremos de áreas de figuras planas delimitadas por curvas de perímetro fixo) pode ser resolvida utilizando artifícios apropriados e desigualdades algébricas. Por outro lado, muitas desigualdades algébricas podem ser interpretadas geometricamente como tais problemas. Um exemplo típico é a bem conhecida desigualdade das médias aritmética-geométrica,

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \qquad (x\,,\; y \geq 0)$$

que pode ser usada diretamente para provar as seguintes proposições:

"De todos os retângulos com perímetro dado, o quadrado tem área máxima."

Ou ainda,

"De todos os retângulos com área dada, o quadrado tem perímetro mínimo."

Nesta seção, enunciamos e demonstramos algumas desigualdades algébricas clássicas. Como já era de esperar, ao utilizar esta abordagem na resolução de problemas de otimização a solução é dada normalmente pelos casos em que ocorre a igualdade. É por isso que é muito importante analisar tais casos cuidadosamente. Listamos abaixo algumas desigualdades algébricas clássicas que são frequentemente usadas em resolução de problemas de máximos e mínimos em Geometria.

As demonstrações das proposições 1.1, 1.2 e 1.3 foram extraídas de CAMINHA, A (1999). A demonstração da proposição 1.4 foi extraída de um texto de Emanuel Carneiro, em <http://www.ma.utexas.edu/users/ecarneiro/DesJensen.pdf>.

1.1.1. Desigualdade das médias Aritmética-Geométrica

Proposição 1.1. Quaisquer que sejam os reais não-negativos $x_1, x_2, \cdots, x_n$, temos que,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n},$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Esta proposição nos garante que, para quaisquer n números reais não-negativos, sua média aritmética é sempre maior do que, ou igual, a sua média geométrica, e a igualdade ocorre se, e somente se, todos os n números reais não-negativos forem iguais entre si.

PROVA:

Apresentamos aqui a demonstração dada por CAMINHA, A (1999). Ela é feita em dois passos:

i. A desigualdade é verdadeira quando n for do tipo 2^k, ocorrendo a igualdade se e só se todos os números forem iguais.

ii. A desigualdade é verdadeira em geral, e a igualdade ocorre se e só se os números forem todos iguais.

i. Façamos indução sobre $k \geq 1$, sendo $n = 2^k$: Para $k = 1$, temos

Sabemos que $\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0$ é verdadeira para quaisquer x_1 e x_2 positivos, daí:

$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$. A igualdade ocorre se e somente se $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = 0$, ou seja, se e somente se $x_1 = x_2$.

Suponha que $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$, com igualdade se e só se $x_1 = \cdots = x_n$ para $n = 2^k$, então

$$\frac{(x_1 + \ldots + x_n) + (x_{n+1} + \ldots + x_{2n})}{2n} = \frac{1}{2}\left[\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \ldots + x_{2n}}{n}\right] \geq \frac{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}\,\sqrt[n]{x_{n+1} \ldots x_{2n}}} = \sqrt[2n]{x_1 \ldots x_n x_{n+1} \ldots x_{2n}}$$

Na igualdade, deve-se ocorrer que

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\quad , \quad \frac{x_{n+1}+\cdots x_{2n}}{n}=\sqrt[n]{x_{n+1}\cdots x_{2n}} \text{ e}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}+\sqrt[n]{x_{n+1}\cdots x_{2n}}}{2}=\sqrt[2n]{x_1\cdots x_n x_{n+1}\cdots x_{2n}}\,.$$

Para as duas primeiras igualdades, segue da hipótese de indução que deve ser

$$x_1=\ldots=x_n \text{ e } x_{n+1}=\ldots=x_{2n}$$

A última igualdade ocorre se e só se $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}=\sqrt[n]{x_{n+1}\ldots x_{2n}}$. Estas duas condições juntas implicam que devemos ter $x_1=\ldots=x_n=x_{n+1}=\ldots=x_{2n}$. É também evidente que se os números forem todos iguais a igualdade ocorre.

ii. Seja agora $n>1$ um natural qualquer e $x_1,x_2,\ldots,x_n$ reais não-negativos. Tome k natural tal que $2^k>n$. Usando a desigualdade das médias aritmética-geométrica para os 2^k números $x_1,x_2,\ldots,x_n$ e 2^k-n cópias de $x=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$, obtemos:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x+x+\cdots+x}{2^k}\geq\sqrt[2^k]{x_1x_2\cdots x_n\cdot x^{2^k-n}}=\sqrt[2^k]{x^n x^{2^k-n}}=x\ ,$$

e daí $x_1+\ldots+x_n+(2^k-n)x\geq 2^k x$, ou ainda $\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geq x=\sqrt{x_1\cdots x_n}$.

Para que haja a igualdade, segue do item *i* que se deve ser $x_1=x_2=\cdots=x_n=x=\cdots=x$. Particularmente, todos os números $x_1,x_2,\ldots,x_n$ devem ser iguais. Vê-se que caso esses números sejam todos iguais, então há a igualdade. ♠

1.1.2. Desigualdade de *Cauchy-Schwarz*

A desigualdade de Cauchy-Schwarz é também conhecid como desigualdade de Cauchy ou desigualdade de Schwarz. Ela é muito útil e ocorre em vários contextos da Matemática, tais como Álgebra Linear aplicando-se a vetores, ou em Análise onde surgiu nas séries infinitas e no produto de integrais, e ainda na Teoria das Probabilidades, aplicando-se na variância e na covariância.

Esta desigualdade para somas foi publicada por Augustin Cauchy (1821), enquanto a correspondente desigualdade para integrais foi primeiramente estabelecida por Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1859) e redescoberta por Hermann Amandus Schwarz (1888).

Proposição 1.2. Quaisquer que sejam os números reais $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, temos que,

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right) \geq \left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n\right)^2,$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se x_i e y_i são proporcionais, onde $i = 1,2,3,\ldots,n$.

PROVA:

Definamos o polinômio de 2º grau $f(\lambda) = (x_1\lambda - y_1)^2 + (x_2\lambda - y_2)^2 + \cdots + (x_n\lambda - y_n)^2$.

Desenvolvendo os quadrados e agrupando convenientemente, temos que:

$f(\lambda) = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\lambda^2 - 2\left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n\right) + \left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)$.

Como $f(\lambda) \geq 0$, para todo λ pertencente aos reais, então $\Delta \leq 0$. Ou seja, $4\left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n\right)^2 \leq 4\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)$. Disto resulta que $\left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n\right)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2\right)$. Examinaremos agora o caso da igualdade. Se Δ = 0, então $f(\lambda) = 0$ e $y_i = \lambda \cdot x_i$, para cada $i = 1,2,3,\ldots,n$. É obvio que, partindo de $y_i = \lambda \cdot x_i$, para cada $i = 1,2,3,\ldots,n$, a igualdade ocorre. ♠

OBS: Podemos estender a desigualdade de *Cauchy-Schwarz* para vetores. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de um Espaço Vetorial qualquer com norma e produto interno. Assim:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são Linearmente Dependentes.

A famosa desigualdade triangular, que nos garante que, pode ser facilmente demonstrada usando a desigualdade acima. Veja:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Pela desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Assim, teremos:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\right)^2.$$

Donde segue o resultado.

1.1.3. Desigualdade das médias Quadrática-Aritmética

Proposição 1.3. Quaisquer que sejam os reais não-negativos $x_1, x_2, \cdots, x_n$, temos que,

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

com a igualdade ocorrendo se e somente se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

PROVA:

Fazendo $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ na desigualdade de *Cauchy-Schwarz*, obtemos

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{n}, \quad (*)$$

De modo que a igualdade ocorre se, e somente se, se existir um número real positivo λ tal que $x_i = \lambda$ para todo *i*, quer dizer, se, e somente se, todos os x_i forem iguais. Para se obter a desigualdade acima, basta dividir os dois membros de (*) por *n*. ♠

1.1.4. Desigualdade de *Jensen*

Proposição 1.4. Seja $f : (a, b) \to R$ uma função duas vezes diferenciável. Se $f''(x) \geq 0$ (função convexa) em todo o intervalo (*a*,*b*), então para quaisquer $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n \in (a,b)$ vale:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Se, por outro lado, $f''(x) \leq 0$ (função côncava) em todo intervalo (*a*,*b*), então para quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ vale:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

PROVA:

Vamos provar para o caso, onde $f'' \leq 0$. A demonstração para o outro caso é totalmente análoga. A prova é por indução sobre *n*. O caso $n = 1$ é imediato. Suponhamos então que a desigualdade valha para quaisquer $(n - 1)$ números reais no intervalo (a, b).

Façamos então o passo indutivo para *n*. Inicialmente fixemos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ e chame $x_n = x$.

Façamos $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} = l$ e $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) = k$. Queremos provar que

$$\frac{k + f(x)}{n} \leq f\left(\frac{l + x}{n}\right), \text{ para qualquer } x \in (a,b).$$

Definamos então a função

$$g(x)=\frac{k+f(x)}{n}-f\left(\frac{l+x}{n}\right).$$

Derivando, obtemos

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{n}-\frac{1}{n}f'\left(\frac{l+x}{n}\right).$$

Se $x=\frac{l+x}{n}\Rightarrow x=\frac{l}{n-1}$, então $g'(x)=0$. Perceba que *f'* não é crescente em (*a*,*b*), haja vista que *f''*≤0. Assim, podemos inferir que se $x>\frac{l}{n-1}$, então $g'(x)\leq 0$ e que se $x<\frac{l}{n-1}$, então $g'(x)\geq 0$. Daí, segue do Cálculo Diferencial, que $x=\frac{l}{n-1}$ é um ponto de *máximo* global de *g*(*x*) no intervalo (*a*,*b*). Disto segue que,

$0\leq g(x)\leq g\left(\frac{l}{n-1}\right)=\frac{k}{n}-\frac{(n-1)f\left(\frac{l}{n-1}\right)}{n}$, pois $\frac{k}{n-1}\leq f\left(\frac{l}{n-1}\right)$ (Hipótese de indução).

Logo, $\frac{k+f(x)}{n}\leq f\left(\frac{l+x}{n}\right)$.

Já as condições de igualdade, dependem muito da função *f*. No caso mais comum temos que *f''* < 0, estritamente, no intervalo (*a*,*b*). Nesse caso, pela demonstração acima podemos concluir que a igualdade só ocorrerá se $x_1=x_2=\cdots=x_n$.♠

Observação: Podemos aplicar a desigualdade de Jensen também em intervalos infinitos, desde que estes sejam abertos e que a função *f* seja convexa (ou côncava) em todo o intervalo.

É importante salientar que poderíamos obter a Desigualdade das médias aritmética-geométrica (*proposição 1.1*) a partir de *Jensen*. Para tanto basta que definamos a função logaritmo natural, convenientemente, pois sendo esta côncava, teremos que $\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)\geq\frac{\sum_{i=0}^{n}(\ln x_i)}{n}$. Isto acarreta que $\ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geq\ln\left(\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}\right)$. Como $f(x)=\ln x$ é uma função crescente, concluímos que o resultado se segue.

1.2. Algumas Aplicações

Problema 1.1. Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma *área retangular* junto a um rio para confinar animais.

Figura *1.1*

Qual a área máxima que este cercado pode assumir?

(OBS: O lado que faz fronteira com o rio *não é* cercado, para que os animais possam beber a água do rio).

Resolução: Chamaremos os lados do retângulo de *x* e de *y*, de modo que, sem perda de generalidade, $x \leq y$. Assim, como o perímetro da cerca é 80 *m*, teremos que $2x + y = 80$. Usando a *Proposição 1.1.* (*Desigualdade das médias Aritmética-Geométrica*), teremos: $\frac{2x+y}{2} \geq \sqrt{2x \cdot y}$. Como $2x + y = 80$, então: $\sqrt{2xy} \leq 40$. Elevando ambos os membros ao quadrado, resulta $2xy \leq 1600 \Leftrightarrow xy \leq 800$. Como a área do Retângulo (Cercado) é exatamente xy, conclui-se que a área máxima que o cercado pode assumir é 800 m^2. E isso ocorre exatamente quando $y = 2x$, isto é, $x = 20\,m$ e $y = 40\,m$.♠

Outra solução para o *Problema 1.1.* é se colocarmos *y* em função de *x* na igualdade $2x + y = 80$, ou seja, $y = 80 - 2x$. Assim, a área *S* do cercado, seria uma função quadrática de x: $S = x \cdot (80 - 2x) = -2x^2 + 80x$, cujo valor máximo é dado pela expressão

$\max\{S\} = -\frac{\Delta}{4a}$, onde $a = -2$ e $\Delta = 80^2 = 6400$. Logo, a área máxima será $\max\{S\} = -\frac{6400}{4(-2)} = \frac{6400}{8} = 800$. ♠

Problema 1.2. De todas as caixas retangulares sem tampa e tendo a área de superfície dada, encontrar aquela com volume máximo.

Resolução: Sejam *x*, *y* e *z* os comprimentos das arestas do paralelepípedo (Figura 1.1), e seja *S* a sua área dada.

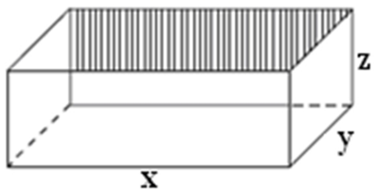

Figura *1.2*

Então, $S = xy + 2xz + 2zy$, e a *Proposição 1.1.* nos garante que:

$\left(\frac{S}{3}\right)^3 = \left(\frac{xy + 2xz + 2zy}{3}\right)^3 \geq 4x^2y^2z^2$. Assim, para o volume $V = xyz$ da caixa nós temos que $V \leq \frac{1}{2}\left(\frac{S}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$. Logo, o volume máximo é obtido quando ocorre a igualdade, isto é, quando $xy = 2xz = 2zy$. O último implica que as arestas da caixa com volume máximo são $x = y = \sqrt{\frac{S}{3}}$ e $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3}}$. ♠

Problema 1.3. Mostre que de todos os retângulos inscritos em um círculo de raio dado o quadrado tem área máxima.

Resolução: Sejam *x* e *y* as dimensões do retângulo e $r > 0$ o raio (dado) do círculo no qual o retângulo está inscrito (Vide Figura 1.2). Assim, a área do retângulo será dada por $A_R = xy$.

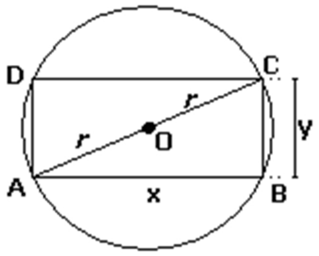

Figura *1.3*

Pelo *Teorema de Pitágoras*, no triângulo *ABC*, temos que $(2r)^2 = 4r^2 = x^2 + y^2 \quad (*)$.

Por outro lado, usando a *Proposição 1.1.*, teremos também:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \qquad (**).$$

Logo, de (*) e (**), concluímos que $4r^2 \geq 2xy$, ou seja, $A_R = xy \leq 2r^2$, sendo que a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y$, isto é, se *ABCD* for um quadrado. ♠

OBS: Uma solução alternativa para este problema é usar trigonometria. Seja α a medida do ângulo CÂB na figura 1.3. (acima). Então, no triângulo retângulo ABC, teremos que $x = 2r \cdot \cos\alpha$ e $y = 2r \cdot sen\alpha$. Assim, a área $A_R = xy$ do retângulo ABCD será dada por $A_R = (2r \cdot \cos\alpha)(2r \cdot sen\alpha) = 2r^2(2sen\alpha\cos\alpha) = 2r^2 \cdot sen(2\alpha) \leq 2r^2$, haja vista que, qualquer que seja o valor de α, $sen(2\alpha) \leq 1$.♠

Desigualdades e trigonometria são dois ingredientes que se misturam muito bem. Um bom artificio para resolver bastantes problemas de otimização envolvendo entes trigonométricos é reduzir a expressão resultante, em uma expressão que envolva um único seno (ou cosseno), para que se possa usar o fato de que, para todo x real, $|sen x| \leq 1$ $(|\cos x| \leq 1)$.

Isto nos apetece a propor e resolver o seguinte

Problema 1.4. (*Seleção para IMO* 99 – *Brasil*) Para reais positivos satisfazendo $a + b + c = abc$, mostre que $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$, e determine quando a igualdade ocorre.

Este problema foi retirado de FONTELES, Rafael Tarja (2001).

Resolução: Como *a*, *b* e *c* são números reais positivos, então existem α, β e γ, todos no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tais que $a = tg\,\alpha$, $b = tg\,\beta$ e $c = tg\,\gamma$. Assim, teremos que $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}} + \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\gamma}}$. Ora, mas sabemos que $1 + tg^2 x = \sec^2 x$ e que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, qualquer que seja $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Logo, $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$. Perceba que no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ a função cosseno é côncava, pois nele $\cos'' x = -\cos x \le 0$. Assim, pela Desigualdade de *Jensen* (*Proposição 1.4*), temos que $\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \le \cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)$. Como, por hipótese, $a + b + c = abc$, então $tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha . tg\,\beta . tg\,\gamma$. Lembremo-nos de que a fórmula para se obter a tangente do arco soma de três arcos α, β, γ é dada por:

$tg\,(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\gamma}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta - tg\,\beta \cdot tg\,\gamma - tg\,\alpha \cdot tg\,\gamma}$. Daí, $tg\,(\alpha + \beta + \gamma) = 0$ e $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Isto nos leva a concluir que $\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \le \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Logo, chegamos ao resultado desejado, de que $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$ e, por conseguinte, também, que

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2},$$

Ocorrendo a igualdade se, e só se, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Isto é, se $a = b = c = tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.♠

Problema 1.5. Sejam *x* e *y* números reais. Obter o valor máximo da expressão *3x + 4y*, sabendo que $x^2 + y^2 = 16$.

Resolução:

Como x e y são números reais, existe um θ tal que $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $sen\ \theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Assim, sendo $A = 3x + 4y$, tem-se que $\dfrac{A}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Daí,

$\dfrac{A}{4} = 3\cos\theta + 4sen\ \theta$. E, portanto, teremos $A = 4(3\cos\theta + 4sen\ \theta)$ (*).

Por outro lado, definamos um triângulo retângulo ABC de tal modo que seus catetos tenham medidas 3 e 4. Logo, sua hipotenusa medirá 5 (teorema de Pitágoras). Chamemos um dos ângulos internos agudos do triângulo ABC de α. Então, teremos $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ e $sen\ \alpha = \dfrac{3}{5}$. Sendo assim, podemos escrever:

$4 = 5sen\ \alpha$ e $3 = 5\cos\alpha$. Substituindo em (*):

$A = 4(5sen\ \alpha\ \cos\theta + 5\cos\alpha\ sen\ \theta) = 20\cdot(sen\ \alpha\ \cos\theta + \cos\alpha\ sen\ \theta)$.

Como $sen\ \alpha\ \cos\theta + \cos\alpha\ sen\ \theta = sen\ (\alpha+\theta)$, então se conclui que $A = 20sen\ (\alpha+\theta)$. Como para todo e qualquer ϕ pertencente aos reais, $|sen\ \phi| \le 1$, então, independentemente dos respectivos valores de α e θ sempre teremos que $|sen\ (\alpha+\theta)| \le 1$, ou, equivalentemente, $-1 \le sen\ (\alpha+\theta) \le 1$.

Multiplicando-se esta ultima desigualdade por 20, chegamos a

$$-20 \le 20sen\ (\alpha+\theta) \le 20 \iff -20 \le A \le 20 \iff -20 \le 3x+4y \le 20 .$$

Logo, $máx\ \{3x+4y\} = 20$.♠

Um outro modo de resolver este problema seria usando a Desigualdade de *Cauchy-Schwarz* (*Proposição 1.2*) para n = 2, pois teríamos $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) \ge (x_1y_1+x_2y_2)^2$. Fazendo $x_1 = 3, x_2 = 4, y_1 = x$, $y_2 = y$, temos: $(3x+4y)^2 \le (3^2+4^2)(x^2+y^2) = (9+16)\cdot 16$ $= 25\cdot 16 = 400$. Daí, $|3x+4y| \le 20$. Logo, $máx\ \{3x+4y\} = 20$.♠

Este valor é atingido, de acordo com a proposição 1.2, se e só se existe um real positivo λ, tal que $x = 3\lambda$ e $y = 4\lambda$, ou seja, $\lambda = \dfrac{4}{5}$. Assim, $x = \dfrac{12}{5}$ e $y = \dfrac{16}{5}$.

Problema 1.6. Um quadrado e um triângulo têm áreas iguais. Qual deles tem maior perímetro?

Resolução: Sejam a, b e c as medidas dos lados do triângulo e l a medida do lado do quadrado. Assim, fazendo $2p = a + b + c$, temos que o perímetro e a área do triângulo são, respectivamente, $2p$ e $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Já para o quadrado são, respectivamente, $4l$ e l^2. Sabemos, por hipótese, que

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = l^2,$$

ou seja,

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = l^4 \qquad (*).$$

Usando a *Proposição 1.1.*, teremos:

$$\sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p+(p-a)+(p-b)+(p-c)}{4} = \frac{4p-(a+b+c)}{4} = \frac{4p-2p}{4} = \frac{2p}{4},$$

isto é,

$$p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{2p}{4}\right)^4.$$

Por (*), concluímos que: $l \leq \frac{2p}{4} \Leftrightarrow 2p \geq 4l$. Mas, neste caso, a igualdade não pode ocorrer, pois, acarretaria que $(p-a) = (p-b) = (p-c) = p \Leftrightarrow a = b = c = 0$ (*Absurdo!*). Logo, a desigualdade é estrita, ou seja, $2p > 4l$. Portanto, o Triângulo tem maior perímetro. ♠

2 DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo tratamos de desigualdades geométricas, das mais simples às mais complexas, das mais conhecidas às menos famosas, sempre dando a devida importância a este tema tão pouco explorado nos compêndios didáticos do ensino básico. Para se ter uma ideia, somente no 8º ano do ensino fundamental os livros trazem ligeiros comentários sobre a desigualdade triangular, mas é muito pouco explorada em aplicações dentro da própria geometria plana. Veremos, a seguir, que esta pode ser uma ferramenta poderosíssima para atacar problemas, principalmente quando agregada a outras desigualdades geométricas que serão aqui apresentadas, além das desigualdades algébricas mostradas no capítulo 1.

As Desigualdades Geométricas são tão antigas quanto a própria geometria. O livro 1 de *Os Elementos* (Euclides) contém diversos teoremas sobre desigualdades entre os lados e os ângulos de um triângulo, o mais importante deles, talvez, a Proposição XX: *"a soma de dois lados é maior do que o terceiro"*. É lícito afirmar que quase todas as desigualdades geométricas são baseadas de alguma maneira ou de outra, neste teorema. A maioria das desigualdades geométricas foi descoberta durante os três últimos séculos. Um dos mais antigos diz respeito ao raio de o circuncírculo e o raio de um incírculo: $R \geq 2r$, dada por Euler em 1765. Ela mantém uma posição de alta importância neste campo, porque mostra duas propriedades para valorização matemática: é simples, mas, de modo algum, trivial.

2.1. Algumas desigualdades geométricas

2.1.1. Desigualdade triangular

Proposição 2.1: A desigualdade triangular nos afirma que a soma das medidas de dois lados quaisquer de um triângulo é sempre superior à medida do terceiro.

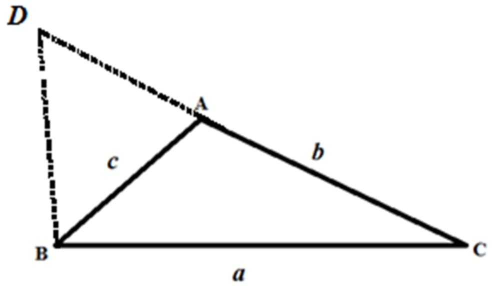

Figura 2.1

Ou seja, na *figura 2.1* isto significa (por exemplo) que $\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$.

Também teremos que cada lado tem medida maior do que o módulo da diferença das medidas dos outros dois. Ou seja: $\begin{cases} a > |b - c| \\ b < |a - c| \\ c < |a - b| \end{cases}$.

PROVA:

Consideremos um ponto D na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AC}$, tal que $AD = AB$ (*). Assim, temos que

$$DC = AC + AD \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad DC = AC + AB \quad (**).$$

Note que o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$. Logo, $\angle C\hat{D}B = \angle A\hat{B}D$. Como A é interno ao ângulo $C\hat{B}D$, então $\angle C\hat{B}D > \angle A\hat{B}D$. Daí resulta que $\angle C\hat{B}D > \angle C\hat{D}B$ (***). No triângulo BCD, com (***) e, sabendo ao menor ângulo corresponde o menor lado etc, então $BC < DC$ e com (**), temos que $BC < AC + AB$, ou seja, $a < b + c$. Analogamente, mostra-se ainda que $b < a + c$ (I) e $c < a + b$ (II). Veja que, por (I), $a > b - c$, e que, por (II), $a > c - b$. Ou seja, de qualquer modo, $a < |b - c|$. Analogamente verifica-se que $b < |a - c|$ e $c < |a - b|$.♠

2.1.2. Desigualdade de Weitzenböck

Proposição 2.2: Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ABC e S a medida de sua área. Então $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$, e a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ABC for equilátero.

A prova que se segue da proposição 2.2 foi extraída de FATOS MATEMÁTICOS (2013).

PROVA:

Pela *desigualdade triangular* (*proposição 2.1*), tem-se que $\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c - a > 0 \\ a + c - b > 0 \\ a + b - c > 0 \end{cases}$.

Usando a *proposição 1.1* temos:

$\dfrac{(b+c-a)+(a+c-b)+(a+b-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$, donde se segue

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \quad (*).$$

Por outro lado, para quaisquer números reais positivos a, b e c, valem as seguintes desigualdades: $\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ a^2 + c^2 \geq 2ac \end{cases}$. Somando-as membro a membro chegamos em:

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ac) \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ac) \therefore$$

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 = \sqrt{(a+b+c)^4} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{\frac{1}{9}(a+b+c)^4} \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \quad (**).$$

Substituindo (*) em (**), teremos:

$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \sqrt{6p \cdot (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}$ onde $2p = a+b+c$ é o perímetro de ABC. Daí: $a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3 \cdot 16p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)} = 4\sqrt{3} \cdot S$, haja vista que $\sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)} = S$ (*Fórmula de Heron*).

A igualdade ocorre se, e só se, $a = b = c$ e, portanto, se ABC for equilátero. ♠

Outro modo de provar a *Desigualdade de Weitzenböck* é usando trigonometria, e foi dada por BOTTEMA (1969). Seja α a medida do ângulo interno correspondente ao vértice A, e, portanto, oposto ao lado de medida *a*. Então, pela *Lei dos Cossenos*, tem-se que

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$. Somando-se $b^2 + c^2$ a ambos os membros da ultima igualdade, teremos:

$a^2 + b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2) - 2bc \cdot \cos\alpha$. (*)

Por outro lado, sabemos que $S = \frac{1}{2} bc \cdot sen\ \alpha$. Logo, $4\sqrt{3} \cdot S = 2\sqrt{3} bc \cdot sen\ \alpha$ (**)

Subtraindo (*) de (**), temos: $\left(\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot sen\alpha \right)$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S = 2(b^2 + c^2) - 2bc \cdot \cos\alpha - 2\sqrt{3}bc \cdot sen\ \alpha = 2(b^2 + c^2) - 4bc\left(\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot sen\ \alpha \right)$$

$= 2(b^2 + c^2) - 4bc \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \geq 2(b^2 + c^2) - 4bc = 2(b - c)^2 \geq 0$. Logo, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$,

de modo que a igualdade ocorre se, e somente se, $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ e $b = c$. E isso se dá se, e somente se, ABC for um triângulo equilátero. ♠

OBS: O nome desta desigualdade é devida ao matemático austríaco *Roland Weitzenböck* (1885-1955). Weitzenböck se destacou em seus trabalhos sobre a Teoria dos Invariantes, especialmente os Invariantes diferenciais. Entre 1928 e 1929, se correspondeu com o grande físico Albert Einstein.

2.1.3. Desigualdade de Erdös-Mordell

Proposição 2.3: Seja ABC um triângulo qualquer, de lados medindo *a*, *b* e *c*, e M um ponto interior, tal que $x = AM$, $y = BM$ e $z = CM$. Então, sendo p, q e r , respectivamente, as distâncias de M até os lados BC , AC e AB , então vale a seguinte desigualdade: $x + y + z \geq 2(p + q + r)$.

OBS: O nome desta desigualdade se dá pelo fato de sua prova ter sido incialmente um problema proposto pelo matemático húngaro *Paul Erdös* (1913-1996), na revista *American Mathematical Montly* em 1935 e por ter sido resolvido primeiramente pelo matemático britânico *Louis Joel Mordell* (1888-1972). Mas estas provas não era muito simples, por isso os matemáticos continuaram na busca de uma prova elementar. Em 1957, Nikolas

Kazarinoff e em 1958 Bankoff descobriram uma demonstração muito mais simples. Atualmente existem mais de 20 demonstrações diferentes desta desigualdade.

Prova extraída de FATOS MATEMÁTICOS (2013).

PROVA:

Na *figura 2.2*, h_a denota a distância de A até BC. Deste modo, teremos: $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$. Como S pode ser vista como a soma das áreas dos triângulos BMC, AMC e AMB, então segue-se que $a \cdot h_a = 2S = ap + bq + cr$.

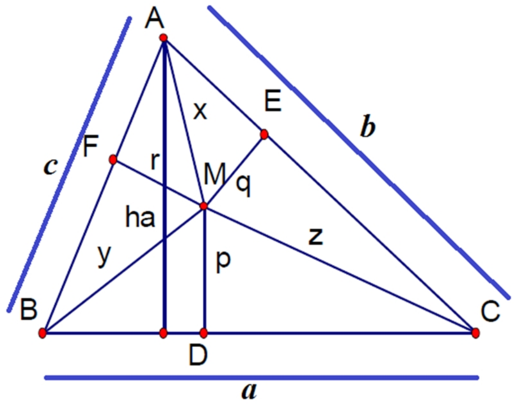

Figura 2.2.

Sendo $h_a \le p + x$, $a(p + x) \ge ah_a = ap + bq + cr \Rightarrow ax \ge bq + cr \Rightarrow x \ge \frac{bq}{a} + \frac{cr}{a}$. (*)

De modo totalmente análogo concluímos que $y \ge \frac{pb}{c} + \frac{ar}{c}$ (**) e $z \ge \frac{aq}{b} + \frac{cp}{b}$ (***).

Somando membro a membro (*), (**), (***) obtemos:

$x + y + z \ge p\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + q\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + r\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge 2p + 2q + 2r = 2(p + q + r)$, haja vista que a soma de dois números inversos positivos é sempre maior do que, ou igual a, dois. ♠

2.1.4. Desigualdade de *Euler*

Proposição 2.4: Sejam $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os raios do circuncírculo e do incírculo de um triângulo qualquer *ABC*, cujos lados medem *a*, *b* e *c*. Então, vale a seguinte desigualdade: $R \ge 2r$.

A prova a seguir, não foi a original dada por *Leonard Euler*, e sim retirada de BOTTEMA, O., et al (1969). A prova original de *Euler* pode ser vista em COXETER, S. M. e GREITZER S. L. (1967).

PROVA:

Seja S a área de *ABC*. Então, $abc = 4R \cdot S$, $S = pr$ e $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Note que $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$ (*), pois se tomarmos $x = a+b-c$, $y = b+c-a$ e $z = a+c-b$, então teríamos que $2a = y+z$, $2b = x+z$ e $2c = x+y$. Como $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $x+z \geq 2\sqrt{xz}$ e $y+z \geq 2\sqrt{yz}$, multiplicando membro a membro estas três desigualdades, obtemos que $(x+z)(y+z)(x+y) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{xz} \cdot 2\sqrt{yz} = 8xyz$, ou seja, $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$.

Porém, vê-se de (*) que $(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) \leq abc \Leftrightarrow 8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc$.

Daí, $\dfrac{8S^2}{p} \leq 4R \cdot S \Leftrightarrow 2S \leq pR$. Como $S = pr$, então $pR \geq 2pr \Leftrightarrow R \geq 2r$. ♠

2.2. Aplicações e outras desigualdades geométricas

Uma aplicação imediata e belíssima da clássica desigualdade triangular é o

> ***Problema 2.1.*** Se P é um ponto interno de um triângulo ABC, prove que $PB + PC < AB + AC$.

Resolução: Imaginemos ABC como na *figura 2.1*. Prolonguemos $\overline{BP}$ de modo que encontre $\overline{AC}$ num ponto *Q* (Vide *figura 2.3*).

De acordo com a *desigualdade triangular* (*Proposição 2.1*), temos: $AB + AQ > BQ = BP + PQ$ (*) e $PQ + QC > PC$ (**). Somando (*) e (**) membro a membro, teremos $AB + PQ + AQ + QC > BP + PC + PQ$. Assim, resulta:

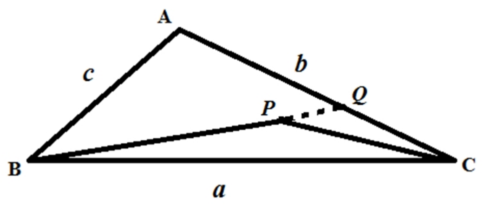

Figura 2.3

$AB + AQ + QC > BP + PC$. Como $AQ + QC = AC$, então $PB + PC < AB + AC$.♠

Problema 2.2. *(Desigualdade fundamental)* Sejam p, R e r o *semiperímetro*, o *cincunraio* e *inraio* do triângulo ABC de lados medindo a, b e c. Prove que $\left|p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2\right| \leq 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}$.

Resolução: Note que

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ac) - abc}{p} = -p^2 + ab + bc + ac - 4Rr$$

Daí, $\sigma_2 = ab + bc + ac = p^2 + r^2 + 4Rr$. Sendo $\sigma_1 = a + b + c = 2p$ e $\sigma_3 = abc = 4pRr$. Então, fazendo o cálculo direto obtemos que

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2 =$$

$$= -4r^2\left(\left(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2\right)^2 - 4R(R-2r)^3\right).$$

Assim, $\left(p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2\right)^2 - 4R(R-2r)^3 \leq 0$. E isto é equivalente à seguinte sentença: $\left|p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2\right| \leq 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}$.♠

Problema 2.3. Seja ABC um triângulo de lados medindo a, b e c. Prove que $3(bc + ac + ab) \leq (a + b + c)^2 < 4(bc + ac + ab)$, e que a igualdade ocorre se, e somente se, ABC for um triângulo equilátero.

Resolução: Comecemos com o fato de que $2bc \leq b^2 + c^2$, $2ab \leq a^2 + b^2$ e $2ac \leq a^2 + c^2$. Somando-se as três desigualdades, membro a membro, obtém-se $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac)$. Somando $4(ab + bc + ac)$ a esta ultima, temos: $2(a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)) \geq 6(ab + bc + ac) \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac)$, com a igualdade ocorrendo se, e só se, $a = b = c$. Por outro lado, como a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, então valem as desigualdades $|b - c| < a$, $|c - a| < b$ e $|a - b| < c$. Daí

$$(b-c)^2 < a^2,\ (c-a)^2 < b^2 \text{ e } (a-c)^2 < c^2.$$

Somando-as membro a membro, obtemos $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$, isto é, teremos $(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ac)$. Logo, $3(ab + bc + ac) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ac)$.♠

Problema 2.4. Seja ABC um triângulo de lados medindo *a*, *b* e *c*, cujo perímetro $a+b+c$ é denotado por 2*p*. Prove que $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$, e que a igualdade ocorre se, e somente se, *ABC* for um triângulo equilátero.

Resolução: De acordo com o resultado do *problema 2.4.*, $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$, com igualdade se e só se *a* = *b* = *c*. Como $a+b+c=2p$, então temos que $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}p^2$.

Mas, pela *proposição 1.1.*, tem-se que $abc \leq \left[\frac{1}{3}(a+b+c)\right]^3 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

Assim, $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{4}{3}p^2 = \frac{36}{35}\left[p^2+\left(\frac{2p}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{p}\right] = \frac{36}{35}\left[p^2+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{p}\right] \geq$

$\geq \frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$. Com igualdade se, e somente se, *ABC* for equilátero. ♠

No capítulo 1, durante a resolução do *problema 1.4.*, mostramos que para quaisquer α,β e γ, no intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, tais que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, vale $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leq \frac{3}{2}$. Na verdade, este resultado vale ainda que *UM* dos α,β ou γ seja maior do que, ou igual, a $\frac{\pi}{2}$. De fato pois, se $\frac{\pi}{2} \leq \alpha' < \pi$ então $\cos(\alpha') \leq 0$, enquanto cada um dos cossenos de α,β ou γ são todos positivos. Daí $\cos(\alpha')+\cos\beta+\cos\gamma < \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leq \frac{3}{2}$. Sendo assim, este resultado vale sempre que α,β e γ forem os três ângulos internos de um triângulo qualquer. Isto nos remete ao

Problema 2.5. Seja ABC um triângulo de lados medindo *a*, *b* e *c*, e respectivos ângulos internos opostos, α,β e γ. Prove que $0 < sen\ \alpha + sen\ \beta + sen\ \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Resolução: Suponha, inicialmente, que $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Obviamente, $sen\,\alpha > 0$, $sen\beta > 0$ e $sen\gamma > 0$. Assim, $sen\,\alpha + sen\beta + sen\gamma > 0$. A função real $f(x) = senx$ é côncava em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, pois $sen''x = \cos'x = -senx < 0$. Logo, via *desigualdade de Jensen* (*proposição 1.5*), para $n = 3$, vem:

$\frac{sen\,\alpha + sen\beta + sen\gamma}{3} \le sen\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pois $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Logo, teremos $sen\,\alpha + sen\beta + sen\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Assim, $0 < sen\,\alpha + sen\beta + sen\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Sendo que a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha = \beta = \gamma$.

Se $\frac{\pi}{2} \le \alpha' = \pi - \alpha < \pi$, $0 < sen(\alpha') + sen\beta + sen\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$, pois $sen(\alpha') = sen\,\alpha$. ♠

Problema 2.6. Seja *ABC* um triângulo de lados medindo *a*, *b* e *c*, e respectivos ângulos internos opostos, *α*,*β* e *γ*. Prove que $sen\,\alpha + sen\beta + sen\gamma \ge sen(2\alpha) + sen(2\beta) + sen(2\gamma)$.

Resolução: Conforme a *figura 2.4*, note que, pela Lei dos Senos, teríamos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R \Leftrightarrow sen\,\alpha + sen\beta + sen\gamma = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{S}{rR}.(*)$$

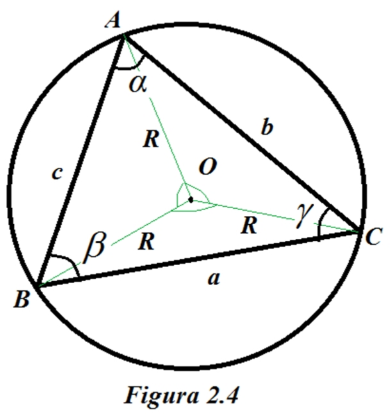

Figura 2.4

Ademais, $sen(2\alpha) + sen(2\beta) + sen(2\gamma) = 2(sen\alpha \cdot \cos\alpha + sen\beta \cdot \cos\beta + sen\gamma \cdot \cos\gamma) =$ $= \frac{1}{R}(a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma)$. Como $a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma = \frac{2S}{R}$, então teremos que

$$sen(2\alpha) + sen(2\beta) + sen(2\gamma) = \frac{2S}{R^2}. (**)$$

Dividindo (*) por (**) membro a membro, obtemos:

$\dfrac{sen\ \alpha + sen\ \beta + sen\ \gamma}{sen\ (2\alpha) + sen\ (2\beta) + sen\ (2\gamma)} = \dfrac{\dfrac{S}{Rr}}{\dfrac{2S}{R^2}} = \dfrac{S}{Rr} \cdot \dfrac{R^2}{2S} = \dfrac{R}{2r} \geq 1$, pois, pela *Desigualdade de Euler*, temos que $R \geq 2r$. ♠

3 PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

Ao longo dos séculos um dos problemas mais fascinantes e desafiadores de toda a matemática foi o de obter valores máximos e mínimos para áreas de regiões planas e para volumes de sólidos. O problema: *“Qual o retângulo de perímetro constante que possui a maior área?”*, que pode ser resolvido somente usando matemática elementar, é apenas um dentre os problemas denominados *isoperimétricos*. Equivalentemente, poderíamos perguntar: *“Qual o retângulo de área dada que possui o menorperímetro?”*, queé um problema de *isoárea*, mas que, por simplificação também será chamado de problema isoperimétrico.

Uma famosa lenda nos conta sobre a “suposta” origem da cidade de *Cartago*. Reza a lenda que no Século IX a.C.a princesa fenícia Dido, havia assassinado seu esposo e fugiu para as terra do norte da África (Túnez) juntamente o com seu irmão (Pigmalião) e fizeram um tipo de acordo com os seus habitantes. Quando a princesa quis comprar terras para se estabelecer com seu povo, o rei daquele lugar somentelhe permitiu comprar a parcela de terra que pudesse ser cercada pela pele de umtouro. Então Dido cortou a pele em finíssimas tiras de couro formando uma extensa corda (de 1000 a 2000 metros) e a dispôs de maneira que cobrisse a maior parte de terrenopossível junto à margem do mar. Aprincesa, intuitiva e inteligentemente, percebeu que a maior área possível seria atingida se ela dispusesse essas tiras de modo a formar um semicírculo junto à margem. Assim, a princesa resolveu um problema isoperimétrico.

Viajando nesse maravilhoso universo dos Problemas demáximos e mínimos em geometria, nos deleitaremos com resoluções elementares e elegantes de belos problemas.Não se sabe ao certo em que ponto da História da Matemática se deu inícioa preocupação com tais problemas. A primeira prova da propriedade*isoperimétrica* do círculo é devida a *Zenodorus*, que escreveu um tratado perdido sobre figuras isoperimétricas, conhecido através do 5ºlivro da *Coleção Matemática* de Papus de Alexandria.

O Teorema Isoperimétrico mais famoso pode ser enunciado da seguinte forma: “*entre todas as curvas planas, simples, fechadas e com mesmo perímetro p dado, a que limita uma região de maior área é o círculo”*. Equivalentemente, esse problema pode ser enunciado como: *"Dentre todas as curvas planas que limitam regiões do plano com mesma área, qual a que possui o menor perímetro?"*.

Tão charmosos quanto os problemas isoperimétricos, mas não tão famosos, são os problemas *isorradianos*. Estes são problemas de máximos e mínimos do tipo: *"Dentre todos os retângulos inscritos num círculo de raio dado, qual possui área máxima"*?

3.1. Problemas isoperimétricos

Problema 3.1.1. De todos os retângulos de perímetro constante, mostre que o que possui área máxima é o quadrado.

Resolução: Sejam *x* e *y* os comprimentos dos lados do retângulo. Seja *P* o seu perímetro, ou seja, $P = 2x + 2y$. Então, pela desigualdade das médias aritmética-geométrica (*Proposição 1.1*), para $n = 2$, teremos $\frac{2x+2y}{2} \geq \sqrt{2x \cdot 2y} \Leftrightarrow \frac{P}{2} \geq \sqrt{4xy} = 2\sqrt{xy} \therefore \sqrt{xy} \leq \frac{P}{4} \Leftrightarrow xy \leq \frac{P^2}{16}$, sendo que a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y = \frac{P}{4}$, ou seja, quando o retângulo for um quadrado de lado $\frac{P}{4}$.♠

Obs: O EXAME NACIONAL DE QUALIFICAÇÃO (ENQ) 2012.1 do Profmat trouxe, em sua segunda questão, item (a), o seguinte problema:

"Dado um número** $a > 0$**, quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é** a**?"

Após a aplicação da prova, muitos mestrandos confessaram ter resolvido o problema usando máximos e mínimos de uma função quadrática, o que lhes custou boa parte do tempo só em um único item de uma questão. Mas o gabarito oficial do Profmat divulgou uma solução lindíssima usando somente a Desigualdade das médias aritmética-geométrica, a qual reproduzimos aqui:

Sejam x e y as dimensões de um retângulo de área $a > 0$. *Então* $xy = a$, *ou seja, a média geométrica de x e y, dada por* $\sqrt{xy}$, *é igual a* $\sqrt{a}$. *A média aritmética desses dois números positivos é sempre maior do que ou igual a sua média geométrica, e a igualdade se dá se, e somente se,* $x = y$ *(o que, por conseguinte, resulta em* $x = y = \sqrt{a}$. *Então o perímetro* $2x + 2y$, *que é 4 vezes a média aritmética, é mínimo e igual a* $4\sqrt{a}$ *quando o retângulo é um quadrado de lados iguais a* $\sqrt{a}$. ♠

Problema 3.1.2. De todos os triângulos com mesmo perímetro, mostrar que o de área máxima é o triângulo equilátero.

Resolução: Considere um triângulo arbitrário T com lados de comprimentos *a*, *b* e *c*, e perímetro $2p = a + b + c$. A famosa *Fórmula de Heron* nos fornece que a área de um triângulo T é dada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Assim, pela *proposição 1.1* (Desigualdade das *Médias Aritmética-Geométrica*), temos que:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{p}{3}.$$

Por isso,

$$S \leq \sqrt{p\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{p^2\sqrt{3}}{9}.$$

Onde a igualdade ocorre se, e somente se, $(p-a) = (p-b) = (p-c)$, ou seja, $a = b = c$. Assim, a área de qualquer triângulo *T* com perímetro 2*p*, não excede $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$ e é igual se, e somente se, o triângulo *T* for equilátero.♠

Problema 3.1.3. De todos os paralelepípedos reto-retângulos de área dada, mostre que o que possui volume máximo é o cubo.

Resolução: Sejam *x*, *y* e *z* as medidas das arestas do paralelepípedo, então a área S é dada por $S = 2(xy + xz + yz)$ e o volume *V* dado por $V = xyz$. Pela *proposição 1.1* temos $\frac{2xy + 2xz + 2yz}{3} \geq \sqrt[3]{2xy \cdot 2xz \cdot 2yz} \Leftrightarrow \frac{S^3}{27} \geq 8x^2y^2z^2$. Assim, para o volume $V = xyz$ do paralelepípedo, nós temos que $V^2 \le \frac{1}{8}\left(\frac{S}{3}\right)^3 \therefore V \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{S}{3}\right)^3$. Logo, o volume *máximo* é obtido quando ocorre a igualdade, isto é, se e somente se, $xy = xz = zy \Leftrightarrow x = y = z$, ou seja, se o paralelepípedo for um *cubo*. ♠

Problema 3.1.4.De todos os quadriláteros de *lados fixos*, mostre que o de maior área é o quadrilátero *cíclico (inscritível)*.

Resolução:Para resolver o problema 3.1.4, mostrares que a área de um quadrilátero convexoABCD qualquer de lados fixos $a = AB, b = BC, c = CD$ e $d = DA$, e perímetro $2p = a+b+c+d$, é $S_q = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{abcd\left(1+\cos\left(\hat{A}+\hat{C}\right)\right)}{2}}$. De fato, pois, fazendo a diagonal $BD = x$, através de BD dividimos ABCD em dois triângulos ABD e CBD. Assim as respectivas áreas destes triângulos são: $S_{ABD} = \frac{1}{2}ad \cdot sen\hat{A}$ e $S_{CBD} = \frac{1}{2}bc \cdot sen\hat{C}$. Como $S_q = S_{ABD} + S_{CBD}$, então teremos:

$S_q = \frac{1}{2}ad \cdot sen\hat{A} + \frac{1}{2}bc \cdot sen\hat{C} \Leftrightarrow 2S_q = ad \cdot sen\hat{A} + bc \cdot sen\hat{C}$. Assim,

$\left(2S_q\right)^2 = \left(ad \cdot sen\hat{A} + bc \cdot sen\hat{C}\right)^2 = a^2d^2sen^2\hat{A} + b^2c^2sen^2\hat{C} + 2abcd \cdot sen\hat{A} \cdot sen\hat{C}$. Logo:

$4S_q^{\ 2} = a^2d^2sen^2\hat{A} + b^2c^2sen^2\hat{C} + 2abcd \cdot sen\hat{A} \cdot sen\hat{C}$. (I)

Por outro lado, pela lei dos Cossenos, temos, no triangulo ABD, que:

$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\hat{A}$.

E no triângulo CBD, teremos que:

$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{C}$.

Logo, conclui-se que:

$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{C}$. Portanto,

$2ad \cdot \cos\hat{A} - 2bc \cdot \cos\hat{C} = a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \Rightarrow \left(2ad \cdot \cos\hat{A} - 2bc \cdot \cos\hat{C}\right)^2 = \left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2$

$\therefore 4a^2d^2 \cdot \cos^2\hat{A} + 4b^2c^2 \cdot \cos^2\hat{C} - 8abcd \cdot \cos\hat{A} \cdot \cos\hat{C} = \left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2$. Daí,

$$a^2d^2 \cdot \cos^2 \hat{A} + b^2c^2 \cdot \cos^2 \hat{C} - 2abcd \cdot \cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} = \frac{\left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2}{4}. \text{ (II)}$$

Somando (I) e (II), membro a membro, tem-se

$$4S_q^{\ 2} + \frac{\left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2}{4} = a^2d^2\left(sen^2\hat{A} + \cos^2 \hat{A}\right) + b^2c^2\left(sen^2\hat{C} + \cos^2 \hat{C}\right) +$$

$2abcd \cdot \left(sen\hat{A}sen\hat{C} - \cos \hat{A} \cos \hat{C}\right)$. Portanto,

$4S_q^{\ 2} + \dfrac{\left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2}{4} = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)$. Que é equivalente a

$16S_q^{\ 2} + \left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 8abcd \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)$. Daí,

$16S_q^{\ 2} = 4a^2d^2 + 8abcd + 4b^2c^2 - 8abcd - 8abcd \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right) - \left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2$. Então,

$$16S_q^{\ 2} = \left(2bc - 2ad\right)^2 - \left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2 - 8abcd\left[1 + \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)\right].$$

$$16S_q^{\ 2} = \left(2bc + 2ad + a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)\left(2bc + 2ad - a^2 - d^2 + b^2 + c^2\right) - 8abcd\left[1 + \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)\right]$$

$$16S_q^{\ 2} = \left[\left(a + d\right)^2 - \left(b - c\right)^2\right]\left[\left(b + c\right)^2 - \left(a - d\right)^2\right] - 8abcd\left[1 + \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)\right].$$

$$16S_q^{\ 2} = \left(a + d - b + c\right)\left(a + d + b - c\right)\left(b + c - a + d\right)\left(b + c + a - d\right) - 8abcd\left[1 + \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)\right].$$

Como $2p = a + b + c + d$, então:

$16S_q^{\ 2} = \left(2p - 2a\right)\left(2p - 2b\right)\left(2p - 2c\right)\left(2p - 2d\right) - 8abcd\left[1 + \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)\right]$. Daí,

$S_q^{\ 2} = \left(p - a\right)\left(p - b\right)\left(p - c\right)\left(p - d\right) - \dfrac{abcd\left[1 + \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)\right]}{2}$. Logo,

$$S_q = \sqrt{\left(p - a\right)\left(p - b\right)\left(p - c\right)\left(p - d\right) - \frac{abcd\left[1 + \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)\right]}{2}}.$$

Como queríamos demonstrar!

Assim, segue-se que o valor *máximo* de S_q ocorre quando o valor de $\cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)$ for mínimo, ou seja, $\cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right) = -1$. Nesse caso, $\left(\hat{A} + \hat{C}\right) = \pi$ e, daí, o quadrilátero é *cíclico*. Portanto, de todos os quadriláteros de lados, o de maior área é o quadrilátero *cíclico*, isto é, inscritível. ♠

Problema 3.1.5. De todos os paralelogramos de lados dados e uma das diagonais dada, mostre que o que possui maior área é o *losango*.

Resolução: Seja ABCD o paralelogramo dado, cujos lados dados medem $a = AB = DC$, $b = BC = DA$, e k a medida da diagonal BD dada (sem perda de generalidade). *Vide figura 3.1.*

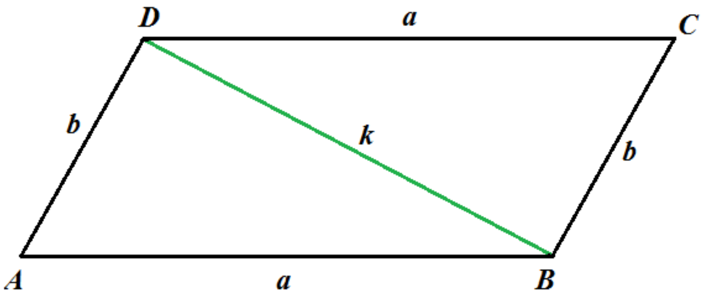

Figura 3.1.

A área S de ABCD é a soma das áreas dos triângulos ABD e CDB. Ora, mas ABD e CDB são congruentes, pois $a = AB = DC$ e $b = BC = DA$, além do que $\angle DAB = \angle DCB$ (caso de congruência LAL). Assim, a área S será o dobro da área de ABD. Já ABD é um triângulo, logo sua área máxima ocorre quando o triângulo for equilátero. Assim, $a = b$ ou seja, se ABCD for um losango. ♠

Problema 3.1.6. Obter um trapézio de área igual 1, de modo que o comprimento de sua diagonal maior seja mínimo.

Resolução: Considere um trapézio ABCD de área igual a 1, e sejam C_1 e D_1 as projeções ortogonais de C e D, respectivamente, sobre AB. Denotemos por h a altura de ABCD. Suponhamos que $AC_1 \geq BD_1$, isto é, $AC \geq BD$. Como $AC_1 + BD_1 \geq AB + CD$, segue que $AC_1 \geq \dfrac{AB + CD}{2}$. Por isso, $AC_1 \geq \dfrac{S_{ABCD}}{h} = \dfrac{1}{h}$ e nós temos que

$$AC^2 = AC_1^2 + h^2 \geq \frac{1}{h^2} + h^2 \geq 2 \Leftrightarrow AC \geq \sqrt{2}.$$

Isto prova que o comprimento mínimo possível de AC é $\sqrt{2}$. ♠

3.2. Problemas isorradianos

Problema 3.2.1. De todos os triângulos inscritos em um círculo de raio $R > 0$ dado, prove que aquele que possui maior área é o triângulo equilátero.

Resolução: Sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos lados do triângulo, α, β e γ as medidas dos ângulos internos e $R > 0$ o raio (dado) do circuncírculo. (Vide *figura 3.2*).

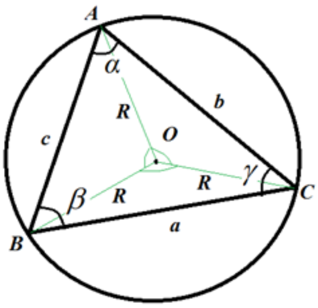

Figura 3.2.

Sabemos que um dos modos de se obter a área de um triângulo inscrito num circulo de raio R é pela fórmula $S = \frac{abc}{4R}$. Pela Lei dos Senos,

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R \Leftrightarrow 8R^3 = \frac{abc}{sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma}. \text{ Daí, } \frac{4RS}{sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma} = 8R^3.$$

Portanto, $S = 2R^2 \cdot sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma$. Usando a proposição 1.1., tem-se que

$$S = 2R^2 \cdot sen\alpha \cdot sen\beta \cdot sen\gamma \le 2R^2 \left(\frac{sen\alpha + sen\beta + sen\gamma}{3} \right)^3 = \frac{2R^2}{27} (sen\alpha + sen\beta + sen\gamma)^3.$$

De acordo com o resultado do *problema 2.6*, temos que $sen\alpha + sen\beta + sen\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (*).

Disto conclui-se que $S \le \frac{2R^2}{27}(sen\alpha + sen\beta + sen\gamma)^3 \le \frac{2R^2}{27} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3} \cdot R^2}{4}$, e este valor é atingido, por (*), se e só se, $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, isto é, se o triângulo for equilátero de lados medindo $a = b = c = R\sqrt{3}$. ♠

No *problema 1.3*, do capítulo 1, provamos que "*de todos os retângulos inscritos em um circulo de raio dado, o de maior área é o quadrado*". Na realidade este resultado é apenas um caso particular do seguinte

Problema 3.2.2. De todos os quadriláteros convexos inscritos em um círculo de raio $R>0$ dado, prove que aquele que possui maior área é o quadrado.

Resolução:Sejam $a=AB$, $b=BC$, $c=CD$ e $d=DA$ as medidas dos lados de quadrilátero *ABCD*, inscrito num círculo de raio $R>0$, cujo centro denotamos por O. Tracemos os raios $OA=OB=OC=OD=R$. Assim sendo, construímos os quatro triângulos OAB, OBC, OCD e ODA, cada um deles isósceles de laterais medindo *R*, conforme nos mostra a *figura 3.3*.

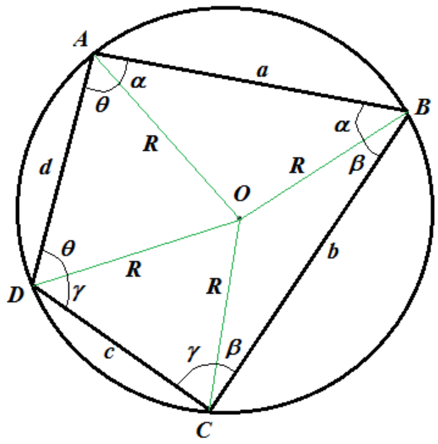

Figura 3.3

Na figura desenhamos um quadrilátero onde *O* é interior ao mesmo. Vamosdeixar a análise dos demais casos, que não são tão complexos, como um exercício para o leitor.

Chamemos de α, β, γ e θ as medidas dos ângulos $\angle ABO, \angle BCO, \angle CDO$ e $\angle DAO$, respectivamente. Percebemos que, pela *Lei dos senos*, no triângulo OAB, $\dfrac{a}{sen(\pi-2\alpha)}=\dfrac{R}{sen\alpha} \Leftrightarrow a=2R\cos\alpha$. Analogamente nos triângulos OBC, OCD e ODA, temos que $b=2R\cos\beta$, $c=2R\cos\gamma$ e $d=2R\cos\theta$. Sendo assim o semiperímetro de ABCD é dado por $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}=R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta)$. (*)

Por outro lado, a área de ABCD pode ser obtida pela famosa fórmula de *Brahmagupta*, para quadriláteros cíclicos: $S_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. Pela proposição 1.1, tem-se $\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)}{4} \geq \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. Daí, como temos $(p-a)+(p-b)+(p-c)+(p-d)=4p-2p=2p$, então $\frac{p}{2} \geq \sqrt{S_{ABCD}} \Leftrightarrow S_{ABCD} \leq \frac{p^2}{4}$. (**)

Substituindo (*) em (**), tem-se que

$$S_{ABCD} \leq \frac{R^2}{4}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta)^2.$$

Notemos que em $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ a função $f(x)=\cos x$ é *côncava*, pois $f''(x)=-\cos x<0$. Suponha que todos os α,β,γ e θ estejam em $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Então, pela *desigualdade de Jensen* (*Proposição 1.4*), tem-se que $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta}{4} \leq \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\theta}{4}\right)$. E, como *ABCD* é cíclico, $\alpha+\beta+\gamma+\theta=\pi$. Assim, $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta \leq 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$.

Portanto $S_{ABCD} \leq \frac{R^2}{4}\left(2\sqrt{2}\right)^2=2R^2$, sendo que $S_{ABCD}=2R^2$ se, e somente se, $\alpha=\beta=\gamma=\theta=\frac{\pi}{4}$. Neste caso, *ABCD* é um quadrado de lado medindo $R\sqrt{2}$.É óbvio que se um, ou dois (mais do que isso é impossível) dentre os quatro ângulos não pertencessem a $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ainda assim a desigualdade $\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta}{4} \leq \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\theta}{4}\right)$ seria verificada, haja vista que a partir de $\frac{\pi}{2}$ o cosseno passa a assumir valores negativos, ou seja, com ângulos maiores do que (ou iguais a) $\frac{\pi}{2}$, a soma $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta$ é ainda menor do que $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ♠

Obs:Vale o caso geral: **De todos os polígonos de convexos de *n* lados inscritos em um círculo de raio $R>0$ dado, aquele que possui maior área é o *n*-ágono regular.**

Problema 3.2.3.Dois triângulos equiláteros estão inscritos em um círculo com raio $R>0$.

Seja K a área do conjunto que consiste de todos os pontos do interior de ambos os triângulos. Encontrar valor mínimo de K.

Resolução:Denotamos os triângulos por *ABC* e *PQR*, e sejam*D* e *E* os pontos deintersecção de AB com PR e de AB com PQ, respectivamente (*Figura3.4*). Em seguida, porsimetria de rotação, nota-se que a figura é simétrica em torno de todoo segmento*OD*, e também do segmento*OE*, onde *O* é o centro do círculo. Além disso,é fácil ver que $K = S_{ABC} - 3 \cdot S_{PDE}$. (*)

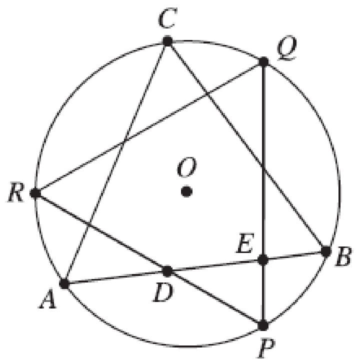

Figura 3.4

Então K será mínimo quandoo triângulo PDE tiver área máxima. Note que $PD = AD$, $PE = BE$, de modo que o triângulo*PDE* tem o perímetro constante $AB = R\sqrt{3}$. Segue do *Problema 3.1.2* que o*PDE* tem área máxima quando *P*estiver no ponto médio do *arcoAB.*Neste caso, os lados de*PDE*medem 1/3 dos lados de*ABC*, assim $S_{PDE} = \frac{1}{9} S_{ABC}$.

Então,

$$K \geq S_{ABC} \cdot \left(1 - \frac{3}{9}\right) = \frac{2}{3}\left(R\sqrt{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}. \spadesuit$$

Observação: Comparando os resultados deste problema com o *problema 3.2.1*, verificamos que a área comum aos dois triângulos equiláteros é exatamente metade da área de cada triângulo!

Problema 3.2.4.De todos os paralelepípedos retângulos inscritos numa esfera de raio R dado, mostre que o cubo é o que possui volume máximo.

Resolução: Sejam *a*, *b* e *c* as medidas das arestas do paralelepípedo. Então sua diagonal *D* coincide com um diâmetro da esfera, ou seja, $D = 2R$ (*vide figura 3.5*)

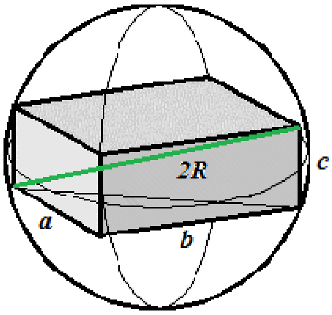

Figura 3.5

Como $D^2 = 4R^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Pela desigualdade das médias aritmética-geométrica (*proposição 1.1*), temos que $\frac{4R^2}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \sqrt[3]{V^2}$, onde *V* é o volume do paralelepípedo. Portanto, $V \leq \left(\frac{4R^2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{16R^4}{9}}$, de modo que a igualdade ocorre se, e somente se, $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{4R^2}{3}$, ou seja, $a = b = c = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, ou seja, um *cubo*.♠

Problema 3.2.5. Um octógono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ está inscrito em um círculo, comos vértices ao redor da circunferência na ordem dada. Dado que o polígono $P_1P_3P_5P_7$ é um quadrado de área 5, e o polígono $P_2P_4P_6P_8$ é um retângulo de área4, prove que a área máxima possível desse octógono é $3\sqrt{5}$.

Resolução: Deduzimos a partir da área de $P_1P_3P_5P_7$ que o raio do círculo é $\sqrt{\frac{5}{2}}$. Um cálculo simples usando o teorema de Pitágoras mostra-nos que o retângulo $P_2P_4P_6P_8$ tem lados medindo $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$. Por simetria, a área do octógono pode ser expressa como (*Figura 3.6*)

$$S_T = S[P_2P_4P_6P_8] + 2S[P_2P_3P_4] + 2S[P_4P_5P_6].$$

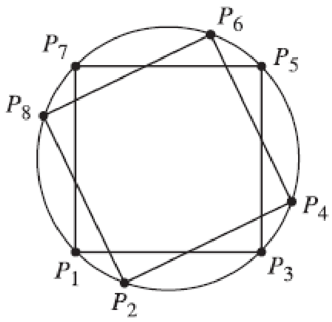

Figura 3.6

Notemos que $S[P_2P_3P_4]$ é $\sqrt{2}$ vezes a distância de P_3 ao segmento P_2P_4, que é maximizadaquando P_3 encontra-se no ponto médio do arco P_2P_4;analogamente, $S[P_4P_5P_6]$ é $\sqrt{2}$ vezesa distância de P_5 para P_4P_6, que é maximizado quando P_5 encontra-se no ponto médioarco P_4P_6.Assim, a área do octógono é *maximizada*quando P_3 é o ponto médio do arco P_2P_4 e P_5 é o ponto médio do arco P_4P_6. Neste caso, é fácil calcular que $S[P_2P_3P_4] = \sqrt{5} - 1$ e $S[P_4P_5P_6] = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$, e assim a área do octógono é $3\sqrt{5}$.♠

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os problemas de máximos e mínimos, como se pode perceber neste trabalho, são de extrema importância devida a sua vasta aplicabilidade. Seu estudo no ensino médio é muito limitado e pouco explorado, limitando-se basicamente a aplicações de funções quadráticas.

As desigualdades algébricas mostraram-se como ferramentas poderosíssimas na resolução de problemas, especialmente a desigualdade das médias *aritmética-geométrica*. Já as desigualdades geométricas, por si só, são muito interessantes, devido a seu valor histórico e sua beleza intrínseca, embora também sejam muito úteis na resolução de problemas de valores extremos em geometria.

Alguns problemas de máximos e mínimos podem ser trabalhados ainda no ensino fundamental, como por exemplo, o problema do retângulo inscrito num círculo de raio dado, com área máxima, ou o problema do retângulo de perímetro dado, com área máxima (ou ainda, equivalentemente, o problema do retângulo de área dada, com perímetro mínimo). Outros, menos simples, podem ser trabalhados no decorrer de todo o ensino médio, oferecendo ao aluno soluções usando desigualdades algébricas e/ou geométricas.

Com a beleza e sutil complexidade apresentadas nos resultados deste trabalho, espera-se que torne-se um importante instrumento a favor do ensino da matemática no Brasil, bem como do crescimento profissional de cada docente. É importante salientar que tudo isso é apenas um pontapé inicial para um bom estudo sistemático das desigualdades e sobre problemas de máximos e mínimos. Entre os livros e artigos usados como base para o trabalho, destacamos (e indicamos) SOUSA, C. R. Amancio (2006) e CAMINHA, A (2012).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREESCU, T.; MUSHKAROV, O.; STOYANOV, L. **Geometric Problems on Maxima and Minima.** New York: Birkhauser, 2006.

BOTTEMA, O., et al. **Geometric Inequalities.** Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

CAMINHA, A. **Desigualdades Elementares.** Eureka! (Rio de Janeiro), Rio de Janeiro, v. 5, n.7, p. 34-50, 1999.

CAMINHA, A. **Tópicos de Matemática Elementar: números reais (vol. 1). 1.ed.**, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

CARNEIRO, Emanuel. **A Desigualdade de Jensen,** disponível no endereço eletrônico <http://www.ma.utexas.edu/users/ecarneiro/DesJensen.pdf>. Acesso em 17 jan. 2013, 20:17:28.

COXETER, S. M. e GREITZER S. L., **Geometry Revisited**. The Mathematical Association of America (1967).

FATOS MATEMÁTICOS, disponível em <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/>. Acesso em 13 jan. 2013.

FONTELES, Rafael Tajra. **Trigonometria e desigualdades em problemas de olimpíadas**, Eureka! 11, p. 24-33, 2001.

IEZZI, G e POMPEO, J. N. **Os fundamentos da Matemática Elementar, Vol. 9**. Atual Editora (1991).

SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), **Exame Nacional de Qualificação 2012.1** do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/docs/Exame_Qualifica%C3%A7%C3%A3o_2012-1_Gabarito.pdf>. Acesso em 20 jan. 2013, 22:33:21.

SOUSA, C. R. Amancio. **Duas demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica**. DM/UFMG; Belo Horizonte, 2006.