Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Desigualdades †

por

JOSILDO FERNANDES DA SILVA

sob orientação de

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2015
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Desigualdades

por

JOSILDO FERNANDES DA SILVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Lizandro Sánchez Challapa - UFPB

Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano - UFPE

Fevereiro/2015

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao Grande Arquiteto do Universo por ter me concedido vencer mais esta etapa de minha vida e ter realizado um grande sonho acalentado, enquanto docente e educador. Agradeço a minha mãe, Germínia Delmira, meu tesouro, a quem serei eternamente grato pela visão, determinação e a coragem de vir de sua terra natal no interior da Paraíba e ir morar em Recife pra poder proporcionar a seus filhos o direito e o privilégio de realizar seus estudos. E este foi o grande e essencial passo para poder, hoje, dar mais um salto nesta busca incessante pelo aprimoramento da minha formação profissional como educador.

Ao meu amigo e professor orientador, Dr. Napoleón Caro Tuesta, que sem sua orientação, dedicação e incentivo não seria possível sua elaboração. Agradeço pelo respeito com que tratou o tema escolhido, pela atenção que a mim foi dispensada em todas as fases do curso e que coroou neste trabalho de conclusão do curso . A Sociedade Brasileira de Matemática, com o apoio da Capes, instituíram a missão de estimular a melhoria de ensino da Matemática em todos os níveis, em particular aos professores de educação básica, uma ferramenta cuja formação e conteúdo contribuem de forma profícua para o nosso aprimoramento profissional, atendendo assim as demandas por um sistema de ensino de qualidade da sociedade atual. As minhas filhas, Maria Fernanda e Maria Carolina, que são minha razão de ser, que contribuíram com sua compreensão, apoio e estímulo para que eu pudesse completar mais esta etapa dos meus estudos, mesmo sabendo que sacrificaria nosso precioso tempo de convívio familiar. Quantos finais de semana e feriados tiveram que ser dedicados às exigências deste curso em detrimento a nossa convivência. Mas na caminhada de nossas vidas temos estas imposições de percas e ganhos em que precisamos aprender a vivê-las. Enfim, a meus familiares e todos os amigos que, de alguma forma direta ou indireta, contribuíram para a execução deste trabalho, o meu muito obrigado .

Dedicatória

Dedico este trabalho a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste curso, mas principalmente, àquelas a quem convivi neste período e partilhamos experiências, alegrias, angústias e muito esforço para que completássemos mais esta etapa importante de nossas vidas.

Resumo

Neste trabalho estudaremos algumas desigualdades entre números reais. De maneira especial, estudaremos as desigualdades das médias, as desigualdades de Bernoulli, Cauchy-Schwarz e de Chebishev, assim como algunas aplicações.

Palavras-chave: Desigualdades, Médias, Bernoulli, Cauchy-Schwarz, Chebishev.

Abstract

In this work, we will study inequalities between real numbers. In special, we will study the inequalities between means, Bernoulli's inequality, the Cauchy-Schwarz inequality and Chebishev's inequality and some applications.

Keywords: Inequalities, Means, Bernoulli, Cauchy-Schwarz, Chebishev.

Sumário

Introdução

Uma parte importante da estrutura dos números reais $\mathbb{R}$ são as desigualdades. Elas são compatíveis com a soma e produto, no sentido que satisfazem as propriedades de tricotomia e monotonia.

Neste trabalho estudamos algumas desigualdades entre números reais desde um ponto de vista elementar, isto é, somente usamos as propriedades fundamentais das desigualdades, sem fazer uso de técnicas de cálculo diferencial.

O trabalho está dividido da seguinte forma: no primeiro capítulo lembramos as propriedades básicas sobre desigualdades e apresentamos alguns exemplos básicos. No capítulo 2 são apresentadas as desigualdades das médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática no caso de duas e três variáveis. O foco do capítulo 3 são as desigualdades triangulares, isto é, aquelas onde as variáveis são os comprimentos dos lados, áreas e perímetros de um triângulo dado. As desigualdades clássicas do análise, como as desigualdades de Bernoulli, Cauchy-Schwarz, Chebishev e Suranry são demonstradas e estudadas com algum detalhe no capítulo 4, onde também apresentamos vários exemplos de aplicação. Finalmente, no capítulo 5 estudamos novamente as desigualdades das médias, porém, analisamos o caso geral. São apresentadas também algunas aplicações das desigualdades das médias ao cálculo de valores mínimos de certas expressões algébricas.

Capítulo 1

Desigualdades Elementares

1.1 Propiedades Básicas

Lembremos algumas propriedades básicas dos números reais que serão usadas para demonstrar desigualdades.

1. Se $x \geq y$ e $y \geq z$, então $x \geq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. Se $x \geq y$ e $a \geq b$, então $x + a \geq y + b$ para todo $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.
3. Se $x \geq y$, então $x + z \geq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.
4. Sejam $x, y, a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que $x \geq y$ e $a \geq b$, então $xa \geq yb$.
5. Se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$. Além disso, $x^2 = 0$ se e somente se $x = 0$.
   Mais geralmente, para $A_i \in \mathbb{R}^+$ e $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ segue-se que
   $A_1x_1^2 + A_2x_2^2 \cdots + A_nx_n^2 \geq 0$.

1.2 Exemplos

Nesta seção apresentaremos, a modo de exemplos, algumas desigualdades elementares.

Exemplo 1.1. *Para todo número real $x > 0$, temos que*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Com efeito, da desigualdade $(x-1)^2 \geq 0$ temos que

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x.$$

Desde que $x > 0$, se dividimos por x obtemos a desigualdade desejada. Note também que a igualdade acontece se e somente se $x - 1 = 0$, isto é, $x = 1$. $\square$

Exemplo 1.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. Então,*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Com efeito, é suficiente escolher $x = \dfrac{a}{b}$ e usar o exemplo anterior. $\square$

Exemplo 1.3. *(Desigualdade de Nesbitt.) Sejam a, b, c números reais positivos. É válida a seguinte desigualdade:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Com efeito, elo exemplo 1.2, temos que

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{c+b} + \frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c} + \frac{a+c}{b+a} \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

Se reescrevemos a relação anterior como segue

$$(\frac{a+b}{b+c} + \frac{a+c}{c+b}) + (\frac{c+b}{a+c} + \frac{b+a}{a+c}) + (\frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{b+a}) \geq 6,$$

temos que,

$$\frac{2a}{b+c} + 1 + \frac{2b}{c+a} + 1 + \frac{2c}{a+b} + 1 \geq 6,$$

isto é,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Notemos ainda, que a igualdade acontece, se e somente se,

$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{b+c}{a+b}, \frac{a+c}{c+b} = \frac{c+b}{a+c}, \frac{b+a}{a+c} = \frac{a+c}{b+a},$$

donde segue que $a = b = c$. $\square$

Exemplo 1.4. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. É válida a seguinte desigualdade:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Com efeito, desde que $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, deduzimos que

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca.$$

Notemos que a igualdade acontece, se e somente se, $a=b=c$. □

Exemplo 1.5. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. São válidas as desigualdades:*

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2).$$

Temos que

$$3(ab+bc+ca) = ab+bc+ca+2(ab+bc+ca)$$

$$\leq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2$$
$$= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$\leq a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2).$$

A igualdade acontece, se e somente se, $a=b=c$. □

Exemplo 1.6. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Então,*

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$$

Com efeito, pelo exemplo 1.4, nós temos: Se $x, y, z \in \mathbb{R}$, então

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx.$$

Por tanto,

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = (ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$

$$(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab) = abc(a+b+c).$$

□

Exemplo 1.7. *Sejam a, b, c números reais tais que $a+b+c \geq abc$. Então,*

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

Com efeito, temos que,

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2)$$

$$a^4+b^4+c^4+a^2(b^2+c^2)+b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2).$$

Pelo exemplo 1.6, segue-se que

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c).$$

Também

$$b^2+c^2 \geq 2bc, \quad c^2+a^2 \geq 2ca, \quad a^2+b^2 \geq 2ab.$$

Usando as desigualdades anteriores, temos que

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq abc(a+b+c)+2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab$$

$$= abc(a+b+c)+2abc(a+b+c) = 3abc(a+b+c).$$

Desde que $a+b+c \geq abc$, temos

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(abc)^2.$$

Portanto,

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

□

Exemplo 1.8. *Sejam $a, b, c > 1$ números reais. É válida a seguinte desigualdade:*

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a+b+c+\frac{1}{abc}.$$

Com efeito, desde que $a, b, c > 1$, temos que $a > \frac{1}{b}, \quad b > \frac{1}{c}, \quad c > \frac{1}{a}$.

Por tanto,

$$(a-\frac{1}{b})(b-\frac{1}{c})(c-\frac{1}{a}) > 0.$$

Depois de multiplicar, obtemos a desigualdade desejada. □

Exemplo 1.9. *Sejam a, b, c, d números reais tais que $a^4+b^4+c^4+d^4 = 16$. Então,*

$$a^5+b^5+c^5+d^5 \leq 32.$$

Notemos que $a^4 \leq a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 16$, donde $a \leq 2$. Por tanto $a^4(a-2) \leq 0$. Consequentemente, $a^5 \leq 2a^4$.

Da mesma forma, obtemos $b^5 \leq 2b^4$, $\;c^5 \leq 2c^4$, $\;d^5 \leq 2d^4$. Somando, obtemos

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 \leq 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = 32.$$

□

Exemplo 1.10. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$. É válida a desigualdade*

$$a^2 + b^2 + 1 > a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}.$$

Com efeito, notemos que

$$(a - \sqrt{b^2+1})^2 + (b - \sqrt{a^2+1})^2 \geq 0.$$

Donde

$$2(a^2 + b^2 + 1) > 2(a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}).$$

□

Capítulo 2

Desigualdades das médias (Duas e Três Variáveis)

Neste capítulo estudaremos desigualdades entre médias em duas e três variáveis.

2.1 Desigualdades das médias para duas variáveis

Teorema 2.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e denotemos por*

$$MQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad MA = \frac{a+b}{2}, \quad MG = \sqrt{ab} \quad e \quad MH = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Então,

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH$$

e a igualdade acontece, se e somente se, $a = b$.

Demonstração:

Primeiro demonstraremos que $MQ \geq MA$.

Para $a, b \in \mathbb{R}^+$ temos

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq a^2+b^2+2ab$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

A igualdade segue, se e somente se, $a - b = 0$, isto é, $a = b$.

Além disso, para $a, b \in \mathbb{R}^+$ temos

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Portanto, $MA \geq MG$, com igualdade, se e somente se, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, isto é, $a = b$.

Finalmente provaremos que $MG \geq MH$.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

A igualdade acontece, se e somente se, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, isto é, $a = b$. ∎

Observação 2.1. *Os números MQ, MA, MG, MH são chamados* ***Média Quadrática, Média Aritmética e Média Harmônica*** *dos números positivos a e b, respectivamente.*

2.2 Desigualdades das médias para três variáveis

De maneira semelhante, podemos definir as médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica para três variáveis como segue:

$$MQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, \quad MA = \frac{a+b+c}{3}, \quad MG = \sqrt[3]{abc}, \quad MH = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Analogamente ao Teorema 2.1, para três variáveis temos o seguinte teorema.

Teorema 2.2. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e denotemos por*

$$MQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, \quad MA = \frac{a+b+c}{3}, \quad MG = \sqrt[3]{abc}, \quad MH = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

Então,

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH.$$

A igualdade acontece, se e somente se, $a = b = c$.

2.3 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de aplicação das desigualdades das médias.

Exemplo 2.1. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ tais que $x + y + z = 1$. A seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

Quando acontece a igualdade?

Com efeito, temos que

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = \frac{1}{2}(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}) + \frac{1}{2}(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}) + \frac{1}{2}(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}).$$

Desde que $MA \geq MG$ temos

$$\frac{1}{2}(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}) \geq \sqrt{\frac{xy}{z}\frac{yz}{x}} = y.$$

Analogamente temos

$$\frac{1}{2}(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}) \geq z \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}) \geq x.$$

Somando as três desigualdades obtemos

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z = 1.$$

Notemos que a igualdade acontece, se e somente se, $\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y}$, isto é, $x = y = z$. Desde que $x + y + z = 1$, a igualdade acontece, se e somente se, $x = y = z = \frac{1}{3}$. □

Exemplo 2.2. *Sejam $x, y, z > 0$ números reais. É válida a seguinte desigualdade:*

$$\frac{x^2 - -z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0.$$

Quando acontece a igualdade?

Seja $a = x + y, b = y + z, c = z + x$.

Claramente, $a, b, c > 0$. Mais ainda,

$$\frac{x^2 - -z^2}{y+z} + \frac{y^2 - x^2}{z+x} + \frac{z^2 - y^2}{x+y} = \frac{(a-b)c}{b} + \frac{(b-c)a}{c} + \frac{(c-a)b}{a}$$

$$= \frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{cb}{a} - (a+b+c).$$

De maneira semelhante ao Exemplo 2.1, podemos provar que

$$\frac{ac}{b} + \frac{ba}{c} + \frac{cb}{a} \geq a+b+c.$$

Consequentemente,

$$\frac{x^2 - -z^2}{y+z} + \frac{y^2 - x^2}{z+x} + \frac{z^2 - y^2}{x+y} \geq (a+b+c) - (a+b+c) = 0.$$

Notemos que a igualdade acontece, se e somente se, $a = b = c$ (Exemplo 2.1). A partir dai podemos dedudiz que a igualdade acontece, se e somente se, $x = y = z$. $\square$

Exemplo 2.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Então,*

$$(a + \frac{1}{b})(b + \frac{1}{c})(c + \frac{1}{a}) \geq 8.$$

Com efeito, aplicando $MA \geq MG$ temos

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad b + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}}, \quad c + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Portanto,

$$(a + \frac{1}{b})(b + \frac{1}{c})(c + \frac{1}{a}) \geq 8\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{c}}\sqrt{\frac{c}{a}} = 8.$$

A igualdade acontece, se e somente se, $a = \frac{1}{b}, b = \frac{1}{c}, c = \frac{1}{a}$, isto é, $a = \frac{1}{b} = c = \frac{1}{a}$. Donde $a = b = c = 1$. $\square$

Exemplo 2.4. *Sejam a, b, c números reais positivos. Vale a desigualdade:*

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

Com efeito, desde que $MA \geq MH$ temos

$$\frac{ab}{a+b+2c} = \frac{ab}{(a+c)+(b+c)} \leq \frac{ab}{4}(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}).$$

Analogamente temos,

$$\frac{bc}{b+c+2a} \leq \frac{bc}{4}(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}) \quad \text{e} \quad \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{ca}{4}(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}).$$

Somando as três desigualdades, obtemos a desigualdade desejada. □

Exemplo 2.5. *Sejam x, y, z números reais positivos tais que $x + y + z = 1$. Vale a seguinte desigualdade:*

$$xy + yz + zx \geq 9xyz.$$

Com efeito, aplicando $MA \geq MG$ temos

$$xy + yz + zx = (xy + yz + zx)(x + y + z) \geq 3\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 9xyz.$$

A igualdade acontece, se e somente se, $x = y = z = \dfrac{1}{3}$. □

Exemplo 2.6. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Então,*

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Com efeito, aplicando $MA \geq MH$ e a desigualdade $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, obtemos

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{3}{2}.$$

□

Exemplo 2.7. *Sejam a, b, c números reais positivos. Se cumpre a seguinte desigualdade:*

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}.$$

Com efeito, se aplicamos $MA \geq MG$ obtemos

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{b+c}{a}} \cdot \sqrt{\frac{c+a}{b}}}$$

$$= 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq 3\sqrt[6]{\frac{2^3\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}}{abc}} = 3\sqrt{2}.$$

A igualdade acontece, se e somente se, $a = b = c$. □

Exemplo 2.8. *Sejam x, y, z números reais positivostais que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Então,*

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8.$$

A desigualdade dad é equivalente a

$$(\frac{x-1}{x})(\frac{y-1}{y})(\frac{z-1}{z}) \geq \frac{8}{xyz}$$

Equivalentemente,

$$(1-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{y})(1-\frac{1}{z}) \geq \frac{8}{xyz}.$$

Da condição inicial e do fato $MA \geq MG$ temos

$$1-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{1}{y}\frac{1}{z}}=\frac{2}{\sqrt{yz}}.$$

Analogamente obtemos

$$1-\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{zx}} \quad \text{e} \quad 1-\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}.$$

Multiplicando as três últimas desigualdades, obtemos a desigualdade desejada.

Notemos que a igualdade acontece, se e somente se, $x=y=z=3$. □

Exemplo 2.9. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ tais que $x+y+z=1$. Vale a desigualdade:*

$$\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y} \geq 2.$$

Com efeito, desde que $MA \geq MG$, temos

$$\frac{x^2+y^2}{z}+\frac{y^2+z^2}{x}+\frac{z^2+x^2}{y}$$

$$\geq 2\frac{xy}{z}+2\frac{yz}{x}+2\frac{zx}{y}=2(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y})$$

$$2(\frac{1}{2}(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x})+\frac{1}{2}(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y})\frac{1}{2}(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}))$$

$$\geq 2(\sqrt{y^2}+\sqrt{x^2}+\sqrt{z^2})=2(x+y+z)=2.$$

□

Exemplo 2.10. *Sejam* $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *tais que* $xyz = 1$. *Vale a desigualdade:*

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} \geq 2.$$

Com efeito, temos que,

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = \frac{x^2 + yz + y^2 + zx + z^2 + xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{x^2yz} + \sqrt{xy^2z} + \sqrt{xyz^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$$

$$\frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = 2.$$

Notemos ainda que a igualdade acontece, se e somente se, $x = y = z = 1$. $\square$

Capítulo 3

Desigualdades Geométricas (Triangulares)

As desigualdades triangulares tem como variáveis, na maioria dos casos, aos comprimentos dos lados de um triângulo. Existem também desigualdades onde aparecem outros elementos do triângulo tais como os comprimentos das alturas, das medianas,das bisetrizes, etc.

Neste capítulo estudaremos algumas desigualdades, a modo de exemplos, que involvem os comprimentos de um triângulo, seu semiperímetro, assim como sua área.

3.1 Exemplos

A maneira de exemplos vamos estudar algumas propriedades geométricas.

Exemplo 3.1. *Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo. Então são válidas as seguintes desigualdades:*

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Com efeito, provemos primeiro a desigualdade da direita.

Desde que $a + b > c$ temos que $2(a + b) > a + b + c$, isto é, $a + b > s$.

Analogamente, $b + c > s$ e $c + a > s$. Consequentemente,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s} = 2.$$

Agora mostremos a outra desigualdade. Para isto, denotemos por $b+c=x, a+c=y, a+b=z$. Então,

$$a=\frac{z+y-x}{2},\ b=\frac{z+x-y}{2},\ c=\frac{x+y-z}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{z+y-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}.$$

Isto é,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}(\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-3)\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2},$$

como desejado. $\square$

Exemplo 3.2. *Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo dado. Então:*

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq\frac{9}{s}.$$

Com efeito, usando a desigualdade das médias $MA \leq MH$ temos

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq\frac{9}{(s-a)+(s-b)+(s-c)}=\frac{9}{s}.$$

Notemos ainda, que a igualdade acontece, se e seomente se, $a=b=c$. $\square$

Exemplo 3.3. *Sejam s, r o semiperímetro e o inraio, respectivamente, em umtriângulo arbitrário. Cumpre-se a seguinte desigualdade:*

$$s\geq 3r\sqrt{3}.$$

Com efeito,

$$2s=a+b+c\leq 3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt[3]{4PR}=3\sqrt[3]{4srR}\leq 3\sqrt[3]{8sr^2},$$

isto é,

$$s\leq 3\sqrt[3]{sr^2},$$

equivalentemente,

$$s\geq 3r\sqrt{3}.$$

Notemos que a igualdade acontece, se e somente se, $a=b=c$. $\square$

Mostremos agora outra forma de provar a desigualdade. Usando a desigualdade das médias $MA \leq MG$ temos

$$\frac{s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \leq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Por outro lado,

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s} = \frac{s^2r^2}{s} = sr^2.$$

Donde,

$$s \geq 3r\sqrt{3}.$$

□

Exemplo 3.4. *Sejam a, b, c os lados de um triângulo. É válida a seguinte desigualdade:*

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

Com efeito,

$$a^2 \geq a\ 2-(b-c)^2 = (a+b-c)(c+a-b).$$

Analogamente,

$$b^2 \geq (b+a-c)(b+c-a) \text{ e } c^2 \leq (c+a-b)(c+b-a).$$

Se multiplicamos essas desigualdades temos

$$a^2b^2c^2 \geq (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2.$$

Equivalentemente,

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Notemos que a igualdade ocorre, se e somente se, $a = b = c$, ou seja, o triângulo é equilátero. □

Vejamos agora outra maneira de provar a desigualdade. Para isto, fazemos $a = x+y, b = y+z, c = z+x$, onde $x, y, z > 0$. Com tal mudança a desigualdade desejada se rescreve como

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz.$$

Usando a desigualdade das médias $MA \geq MG$, temos

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} = 8xyz.$$

Observemos também, que a igualdade acontece, se e somente se, $x = y = z$, isto é, se e somente se, $a = b = c$. □

Exemplo 3.5. *Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo. Então:*
$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Com efeito, fazemos $a = x + y, b = y + z, c = z + x$, com $x, y, z > 0$. Então a desigualdade original equivale à
$$(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 <$$
$$2((x + y)(y + z) + (y + z)(z + x) + (z + x)(x + y))$$
Equivalentemente,
$$xy + yz + zx > 0,$$
a que é claramente verdadeira. □

Exemplo 3.6. *Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo. É válida a seguinte desigualdade:*
$$8(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq (a + b)(b + c)(c + a).$$

Com efeito, usando a desigualdade das médias $MA \geq MG$ temos
$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc.$$
Portanto, é suficiente demonstrar que
$$8abc \geq 8(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b),$$
isto é,
$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b),$$
que é verdadeira pelo Exemplo 3.4. Mais ainda, a igualdade acontece, se e somente se, $a = b = c$. □

Exemplo 3.7. *Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo. Então:*
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a + b - c} + \frac{1}{b + c - a} + \frac{1}{c + a - b}.$$

Com efeito, usando a desigualdade das médias $MA \geq MH$, obtemos
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{a + b - c} + \frac{1}{b + c - a}) \geq \frac{2}{a + b - c + b + c - a} = \frac{1}{b}.$$
Analogamente,
$$\frac{1}{2}(\frac{1}{a + b - c} + \frac{1}{c + a - b}) \geq \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(\frac{1}{b + c - a} + \frac{1}{c + a - b}) \geq \frac{1}{c}.$$
Somando as três desigualdades obtemos a desigualdade desejada.

Notemos também, que a igualdade acontece, se e somente se, $a = b = c$. □

Exemplo 3.8. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo com lados de comprimentos a, b e c e seja $\triangle A_1B_1C_1$ outro triângulo com lados $a + \frac{b}{2}, b + \frac{c}{2}$ e $c + \frac{a}{2}$. Então, $P_1 \geq \frac{9}{4}P$, onde P é o área do triângulo $\triangle ABC$ e P_1 é a área do triângulo $\triangle A_1B_1C_1$.*

Com efeito, aplicando a *fórmula de Heron* aos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A_1B_1C_1$ temos

$$16P^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$$

e

$$16P_1^2 = \frac{3}{16}(a+b+c)(-a+b+3c)(-b+c+3a)(-c+a+3b).$$

Desde que a, b, c são os comprimentos de um triãngulo, existem números reais positivos p, q, r tais que $a = q + r, b = r + p, c = p + q$. Com isto vemos que

$$\frac{P^2}{P_1^2} = \frac{16pqr}{3(2p+q)(2q+r)(2r+p)}.$$

Portanto, é suficiente provar que

$$(2p+q)(2q+r)(2r+p) \geq 27pqr.$$

Aplicando as desigualdades das médias $MA \geq MG$ obtemos

$$(2p+q)(2q+r)(2r+p) \geq (p+p+q)(q+q+r)(r+r+p) \geq 3\sqrt[3]{p^2q}3\sqrt[3]{q^2r}3\sqrt[3]{r^2p} = 27pqr.$$

$\square$

Exemplo 3.9. *Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo. Suponhamos que $2(ab^2 + bc^2 + ca^2) = a^2b + b^2c + c^2a + 3abc$, então o triângulo é equilátero.*

Provaremos que

$$a^2b + b^2c + c^2a + 3abc \geq 2(ab^2 + bc^2 + ca^2),$$

onde a igualdade acontece, se e somente se, $a = b = c$. Isto é, se e somente se, o triãngulo é equilátero.

Com efeito, como antes fazemos as mudanças $a = x + y, b = y + z, c = z + x$. Com isto, a desigualdade desejada se escreve como

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x^2z + y^2x + z^2y).$$

Desde que $MA \geq MG$, obtemos

$$x^3 + z^2x \geq 2x^2z,\ \ y^3 + x^2y \geq 2y^2x,\ \ z^3 + y^2z \geq 2z^2y.$$

Depois de somar tais desigualdades temos,

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x^2z + y^2x + z^2y).$$

Mais ainda, a igualdade acontece, se e somente se, $x - y = z$, se e somente se, $a = b = c$, como desejado. □

Exemplo 3.10. *Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo e sejam α, β, γ os respectivos ângulos (em radianes). Então se cumprem as seguintes desigualdades:*

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Primeiro provaremos a desigualdade do lado esquerdo. Podemos supor que $a \geq b \geq c$ e portanto, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Com isto,

$$(a - b)(\alpha - \beta) + (b - c)(\beta - \gamma) + (c - a)(\gamma - \alpha) \geq 0.$$

Equivalentemente,

$$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (b + c)\alpha + (c + a)\beta + (a + b)\gamma.$$

Isto é,

$$3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (a + b + c)(\alpha + \beta + \gamma).$$

Consequentemente,

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \geq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Notemos ainda, que a igualdade acontece, se e somente se, $a = b = c$.

Demonstremos agora a segunda desigualdade. Pela desigualdade triangular temos

$$a + b + c > 2a, \quad a + b + c > 2b, \quad a + b + c > 2c.$$

Se multiplicamos essas desigualdades por α, β e γ, respectivamente, obtemos

$$(a + b + c)(\alpha + \beta + \gamma) > 2(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

donde,

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

□

Capítulo 4

Desigualdades de Bernoulli, de Cauchy-Schwartz, de Chebishev e de Suranry

Neste capítulo estudaremos algumas desigualdades clássicas que aparecem constantemente na matemática.

4.1 Enunciados e Provas das Desigualdades

Teorema 4.1. *(Desigualdade de Bernoulli). Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ números reais do mesmo sinal, todos maiores que -1. Então*

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Demonstração: Demonstraremos a desigualdade por indução sobre n.

Para $n = 1$ temos $1 + x_1 \geq 1 + x_1$.

Suponhamos que para $n = k$ e para números arbitrários $x_i > -1$, $i = 1, 2, .., k$ com o mesmo sinal, a desigualdade de Bernoulli é verdadeira, isto e,

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k.$$

Seja $n = k+1$ e $x_i > -1$, $i = 1, 2, ..., k+1$ números reais arbitrários do mesmo sinal.

Então, desde que $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ tem o mesmo sinal, temos

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \geq 0.$$

Logo

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_{k+1})$$
$$\geq (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}$$
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)x_{k+1} \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}.$$

Isto, é a desigualdade também é verdadeira para $n = k + 1$. ■

Corolário 4.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $x > -1$. Então*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Demonstração: Basta tomar $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ no teorema anterior. ■

Definição 4.1. *Dizemos que uma função $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é homogênea de grau k, se para cada $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 1$,*

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^k f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Exemplo 4.1. *A função $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x + y}$ é homogênea de grau 1, desde que*

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{2tx + ty} = t\frac{x^2 + y^2}{2x + y} = tf(x, y).$$

Definição 4.2. *A desigualdade $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq g(x_1, x_2, ..., x_n)$ é homogênea, se a função $h(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - g(x_1, x_2, ..., x_n)$ é homogênea.*

Exemplo 4.2. *A desigualdade $x^2 + y^2 + 2xy \geq z^2 + yz$ é homogênea.*

No caso das desigualdades homogêneas, sem perda de generalidade, podemos assumir condições adicionais, que podem reduzir a desigualdade original a uma mais simples. O processo de incluir condições adicionais é chamado **normalização**. Uma desigualdade com variáveis a, b, c pode ser normalizada em diferentes caminhos; por exemplo, podemos asumir que $a + b + c = 1$ ou $abc = 1$ ou $ab + bc + ca = 1$. A escolha da normalização depende do problema.

Exemplo 4.3. *Consideremos a desigualdade homogênea $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Podemos supor $abc = 1$, como explicaremos abaixo.*

Suponhamos $abc = k^3$.

Sejam $a = kx, b = ky, c = kz$, então claramente $xyz = 1$ e a desigualdade inicial equivale à $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, que tem a mesma estrutura que a desigualdade inicial.

No caso de uma desigualdade condicional, existe um método oposto à normalização conhecido como **homogenização.**

Exemplo 4.4. *Consideremos a desigualdade condicional*

$$xy + yz + zx \geq 9xyz, \quad \textit{quando} \quad x + y + z = 1.$$

Obviamente a desigualdade não é homogênea. Podemos homogeneizar como segue,

Desde que $x + y + z = 1$, podemos tomar

$$x = \frac{a}{a+b+c}, \quad y = \frac{b}{a+b+c}, \quad z = \frac{c}{a+b+c}$$

Então a desigualdade inicial é transformada em

$$\frac{ab}{(a+b+c)^2} + \frac{bc}{(a+b+c)^2} + \frac{ca}{(a+b+c)^2} \geq \frac{9abc}{(a+b+c)^3},$$

isto é,

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc.$$

A última desigualdade é homogênea e pode ser normalizada com $abc = 1$, que reduz a desigualdade a:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9$$

A última desigualdade é verdadeira desde que

$$\begin{aligned}(a+b+c)(ab+bc+ca) &= a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + 3abc \\ &= \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 3 \\ &= \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 3 \\ &\geq 2 + 2 + 2 + 3 = 9.\end{aligned}$$

Teorema 4.2. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Sejam $a_1, ..., a_n$ e $b_1, ..., b_n$ números reais. Então,*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2.$$

Isto é,

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

A igualdade acontece, se e somente se, as sequencias $(a_1, ..., a_n)e(b_1, ..., b_n)$ são proporcionais, ou seja, $\dfrac{a_1}{b_1} = \cdots \dfrac{a_n}{b_n}$.

Demonstração: A desigualdade dada é equivalente é

$$\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1 + \cdots + b_n^2} \geq |a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \cdots (*)$$

Seja $A = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$ e $B = \sqrt{b_1 + \cdots + b_n^2}$.

Se $A = 0$, então claramente $a_1 = \cdots = a_n = 0$ e a desigualdade $(*)$é verdadeira.

Suponhamos que $A > 0$ e $B > 0$. Como a desigualdade $(*)$ é homogênea, podemos normaliza-la com

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + \ b_n^2 \cdots (**)$$

Isto é, necesitamos provar que

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq 1 \ \text{ com as condições } \ (**)$$

Desde que $MQ \geq MG$ temos

$$\begin{aligned} |a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| &\leq |a_1b_1| + |a_2b_2| + \cdots |a_nb_n| \\ &\leq \frac{a_1^2 + b_1^2}{2} + \frac{a_2^2 + b_2^2}{2} + \cdots \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \\ &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}{2} = 1, \end{aligned}$$

como desejado.

A igualdade acontece, se e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$. ■

Corolário 4.2. *Sejam a, b, c, x, y, z números reais tais que $x, y, z > 0$. Então*

$$(1) \quad \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad e \quad (2) \quad \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Demonstração: A desigualdade (1) equivale a

$$y(x+y)a^2 + x(x+y)b^2 \geq xy(a+b)^2, \quad \text{isto é,} \quad (ay - bx)^2 \geq 0,$$

que é claramente é verdadeira.

A igualdade acontece, se e somente se, $ay = bx$, isto é, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.

(2) Se aplicamos (1) duas vezes, temos

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

A igualdade acontece, se e somente se, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$. ■

Existe uma generalização do corolário anterior.

Corolário 4.3. *Sejam $a_1, .a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ números reais tais que $b_1, b_2, ..., b_n > 0$. Então*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n},$$

com igualdade, se e somente se, $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Demonstração: A prova é uma consequencia direta da desigualdade de Cauchy-Schwarz. ■

Corolário 4.4. *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ números reais. Então*

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$
$$\geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2}.$$

Demonstração: Por indução sobre n.

Para $n = 1$, temos uma igualdade.

Para $n = 2$ temos

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq (a_1 a_2 + b_1 b_2)$$
$$\Leftrightarrow (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \geq (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2,$$

que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Suponhamos que para $n = k$, a desigualdade é verdadeira, isto é,

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$
$$\geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_k)^2}.$$

Então, para $n = k + 1$, temos

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \cdots + \sqrt{a_k^2 + b_k^2} + \sqrt{a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2}$$
$$\geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_k)^2} + \sqrt{a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2}$$
$$\geq \sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1})^2}.$$

Portanto, a desigualdade é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 4.5. *Sejam a, b, c e x, y, z números reais positivos. Então*

$$\frac{x}{y+z}(b+c)+\frac{y}{z+x}(c+a)+\frac{z}{x+y}(a+b)\geq\sqrt{3(ab+bc+ca)}.$$

Demonstração: A desigualdade é homogênea nas variáveis a, b e c. Portanto, podemos asumir $a+b+c=1$.

Reescrevendo a desigualdade como

$$\frac{x}{y+z}(1-a)+\frac{y}{z+x}(1-b)+\frac{z}{x+y}(1-c)\geq\sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

Equivale a provar

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\sqrt{3(ab+bc+ca)}+\frac{ax}{y+z}+\frac{by}{z+x}+\frac{cz}{x+y}\cdots(*)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\frac{ax}{y+z}+\frac{by}{z+x}+\frac{cz}{x+y}+\sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

$$\leq\sqrt{(\frac{x}{y+z})^2+(\frac{y}{z+x})^2+(\frac{z}{x+y})^2}\cdot\sqrt{a^2+b\ 2+c^2}$$

$$+\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{ab+bc+ca}+\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{ab+bc+ca}.$$

E usando uma vez mais a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\sqrt{(\frac{x}{y+z})^2+(\frac{y}{z+x})^2+(\frac{z}{x+y})^2}\cdot\sqrt{a^2+b\ 2+c^2}$$

$$+\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{ab+bc+ca}+\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{ab+bc+ca}$$

$$\leq\sqrt{(\frac{x}{y+z})^2+(\frac{y}{z+x})^2+(\frac{z}{x+y})^2+\frac{3}{2}}$$

$$\times\sqrt{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}$$

$$=\sqrt{(\frac{x}{y+z})^2+(\frac{y}{z+x})^2+(\frac{z}{x+y})^2+\frac{3}{2}}.$$

Portanto,

$$\frac{ax}{y+z}+\frac{by}{z+x}+\frac{cz}{x+y}+\sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

$$\leq \sqrt{(\frac{x}{y+z})^2 + (\frac{y}{z+x})^2 + (\frac{z}{x+y})^2 + \frac{3}{2}}.$$

É suficiente então, provar que

$$(\frac{x}{y+z})^2 + (\frac{y}{z+x})^2 + (\frac{z}{x+y})^2 + \frac{3}{2} \leq (\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y})^2,$$

que equivale a

$$\frac{yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{xz}{(y+x)(y+z)} + \frac{xy}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{3}{4} \cdots (**)$$

Depois de eliminar os denominadores em $(**)$, a desigualdade seria

$$x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + x^2z \geq 6xyz,$$

que é uma consequencia direta de $MA \geq MG$. ■

Teorema 4.3. *(Desigualdade de Chebishev) Sejam $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ números reais. Então*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i) \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

isto é,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n).$$

A igualdade acontece, se e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Demonstração: Para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ temos

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \cdots (\alpha),$$

isto é,

$$a_ib_i + a_jb_j \geq a_ib_j + a_jb_i.$$

Em consequencia,

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i) = a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_n$$

$$+a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_n$$

$$+a_3b_1 + a_3b_2 + \cdots + a_3b_n$$

$$+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_nb_1 + a_nb_2 + cdots + a_nb_n$$

$$\leq a_1b_1$$

$$+a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_2$$

$$+a_1b_1 + a_3b_3 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_3b_3$$

$$+\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_1b_1 + a_nb_n + a_2b_2 + a_nb_n + \cdots + a_nb_n = n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

A igualdade acontece, se e somente se, há igualdade em (α),isto é, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ou $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$. ■

Teorema 4.4. *(Desigualdade de Surányi) Seja n um número natural e sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais não negativos. Então*

$$(n-1)(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n)+na_1a_2\cdots a_n \geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\cdots+a_n^{n-1}).$$

Demonstração: Usaremos indução sobre n.

Por causa da simetria e da homogeneidade da desigualdade, podemos assumir que

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \quad \text{e} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1.$$

Para $n = 1$ a igualdade acontece.

Suponhamos que para $n = k$ a desigualdade segue, isto é,

$$(k-1)(a_1^k+a_2^k+\cdots+a_k^k)+ka_1a_2\cdots a_k \geq (a_1+a_2+\cdots+a_k)(a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+\cdots+a_k^{k-1}).$$

Precisamos provar que

$$k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} + ka_{k+1}^{k+1} + ka_{k+1}\prod_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\prod_{i=1}^{k} a_i - (1 + a_{k+1})(\sum_{i=1}^{k} a_i^k + a_{k+1}^k) \geq 0.$$

Da hipótese de indução temos

$$(k-1)(a_1^k+a_2^k+\cdots+a_k^k)+ka_1a_2\cdots a_k \geq (a_1+a_2+\cdots+a_k)(a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+\cdots+a_k^{k-1}).$$

Portanto,

$$ka_{k+1}\prod_{i=1}^{k} a_i \geq a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1} - (k-1)a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i^k.$$

Usando a última desigualdade, só faltaria provar que

$$(k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i^k) - a_{k+1}(k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1})$$
$$+a_{k+1}(\prod_{i=1}^{k} a_i + (k-1)a_{k+1}^k - a_{k+1}^{k-1}) \geq 0.$$

Provemos que

$$a_{k+1}(\prod_{i=1}^{k} a_i + (k-1)a_{k+1}^k - a_{k+1}^{k-1}) \geq 0.$$

e que

$$(k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i^k) - a_{k+1}(k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}) \geq 0.$$

Nós temos

$$\prod_{i=1}^{k} a_i + (k-1)a_{k+1}^k - a_{k+1}^{k-1} = \prod_{i=1}^{k}(a_i - a_{k+1} + a_{k+1}) + (k-1)a_{k+1}^k - a_{k+1}^{k-1}$$

$$\geq a_{k+1}^k + a_{k+1}^{k-1}\sum_{i=1}^{k}(a_i - a_{k+1}) + (k-1)a_{k+1}^k - a_{k+1}^{k-1} = 0.$$

A segunda desigualdade equivale a

$$(k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i^k) \geq a_{k+1}(k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}).$$

Pela Desigualdade de Chebishev temos

$$k\sum_{i=1}^{k} a_i^k \geq \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1} = \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1},$$

isto é,

$$k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1} \geq 0.$$

E desde que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} = 1$, pela nossa suposição que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_{k+1}$, deduzimos que

$$a_{k+1} \leq \frac{1}{k}.$$

Portanto, é suficiente provar que

$$k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} - \sum_{i=1}^{k} a_i^k \geq \frac{1}{k}(k\sum_{i=1}^{k} a_i^k - \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1}),$$

que é equivalente a

$$k\sum_{i=1}^{k} a_i^{k+1} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1} \geq 2\sum_{i=1}^{k} a_i^k.$$

Pela desigualdade das médias, sabemos que $MA \geq MG$. Portanto,

$$ka_i^{k+1} + \frac{1}{k}a_i^{k-1} \geq 2a_i^k, \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, ..., k.$$

Somando tadas estas últimas relações, obtemos a desigualdade desejada. ∎

4.2 Exemplos

Agora apresentaremos alguns exemplos de aplicação das desigualdades estudadas na seção anterior.

Exemplo 4.5. *Sejam x, y números reais positivos. Se cumpre que:*

$$x^y + y^x \geq 1.$$

Provaremos primeiro que para todo $a, b \in (0, 1)$ se cumpre

$$a^b \geq \frac{a}{a + b - ab}.$$

Com efeito, pela Desigualdade de Bernoulli temos que

$$a^{1-b} = (1 + a - 1)^{1-b} \leq 1 + (a - 1)(1 - b) = a + b - ab.$$

Agora, se $x \geq 1$ ou $y \geq 1$, a desigualdade claramente acontece. Portanto, podemos supor $0 < x, y < 1$.

Pela previa desigualdade temos

$$x^y + y^x \geq \frac{x}{x + y - xy} + \frac{y}{x + y - xy} = \frac{x + y}{x + y - xy} \geq \frac{x + y}{x + y} = 1.$$

□

Exemplo 4.6. *Sejam $a, b, c > 0$. Mostraremos de otra forma a desigualdade de Nesbitt,*
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Com efeito, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para
$$a_1=\sqrt{b+c},\quad a_2=\sqrt{c+a},\quad a_3=\sqrt{a+b};$$
$$b_1=\frac{1}{\sqrt{b+c}},\quad b_2=\frac{1}{\sqrt{c+a}},\quad b_3=\frac{1}{\sqrt{a+b}}$$
temos
$$((b+c)+(c+a)+(a+b))(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\geq(1+1+1)^2=9,$$
isto é,
$$2(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b})\geq 9.$$
Portanto,
$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}\geq\frac{9}{2}.$$
Donde,
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

□

Exemplo 4.7. *Sejam a, b, c, d números reais positivos. É válida a seguinte desigualdade:*
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}.$$

Com efeito, pelo Corolário 4.3 obtemos
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}=\frac{64}{a+b+c+d}.$$

□

Exemplo 4.8. *Sejam a, b, c números reais positivos. Vale a desigualdade:*
$$\frac{a^2}{3^3}+\frac{b^2}{4^3}+\frac{c^2}{5^3}\geq\frac{(a+b+c)^2}{6^3}.$$

Com efeito, primeiro notemos que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Tomando,

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{3^3}},\ a_2 = \frac{b}{\sqrt{4^3}},\ a_3 = \frac{c}{\sqrt{5^3}}$$

$$b_1 = \sqrt{3^3},\ b_2 = b_2 = \sqrt{4^3},\ b_3 = \sqrt{5^3},$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos,

$$\frac{a^2}{3^3} + \frac{b^2}{4^3} + \frac{c^2}{5^3}(3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3) \geq (a+b+c)^2$$

. □

Exemplo 4.9. *Sejam a, b, c os comprimentos dos lados de um triângulo e sejam α, β, γ os ângulos correspondentes (em radianes). Se s é o semiperímetro, então vale a seguinte desigualdade:*

$$\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{12s}{\pi}.$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $a \leq b \leq c$. Portanto, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $a + b \leq a + c \leq b + c$ e $\frac{1}{\gamma} \leq \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Pela desigualdade de Chebishev temos,

$$((a+b) + (b+c) + (c+a))(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})$$

$$\leq 3((b+c)\frac{1}{\gamma} + (c+a)\frac{1}{\beta} + (a+b)\frac{1}{\gamma}),$$

isto é,

$$\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{4s}{3}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}).$$

Da desigualdade das médias $MA \geq MH$ e da última desigualdade obtemos,

$$\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{4s}{3}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}) \geq \frac{4s}{3} \cdot \frac{9}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{12s}{\pi}.$$

□

Exemplo 4.10. *Sejam a, b, c, d números reais positivos. Vamos provar que*

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a+b+c} + \frac{a^3 + b^3 + d^3}{a+b+d} + \frac{a^3 + c^3 + d^3}{a+c+d} + \frac{b^3 + c^3 + d\ 3}{b+c+d}$$

$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Com efeito, sem perda de generalidade podemos supor que $a \geq b \geq b \geq c \geq d$. Então $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2$.

Usando a desigualdade de Chebishev temos,

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 3(a^3+b^3+c^3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Analogamente temos,

$$\frac{a^3+b^3+d^3}{a+b+d} \geq \frac{a^2+b^2+d^2}{3},$$

$$\frac{a^3+c^3+d^3}{a+c+d} \geq \frac{a^2+c^2+d^2}{3},$$

$$\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d} \geq \frac{b^2+c^2+d^2}{3}.$$

Depois de somar essas desigualdades obtemos a desigualdade desejada. □

Capítulo 5

Desigualdades das Médias (Caso Geral)

No capitulo 2 discutimos as desigualdades das médias no caso de duas e três variáveis. Neste capítulo estudaremos o caso geral.

5.1 Resultado Principal

Enunciamos e provamos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 5.1. *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos. Os números*

$$MQ := \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}, \quad MA := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$MG := \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad MH := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

são chamados Média Quadrâtica, Média Aritmética, Média Geométrica e Média Harmônica dos números $a_1, a_2, ..., a_n$, respectivamente. Para tais números temos a seguinte desigualdade

$$MQ \geq MA \geq MG \geq MH.$$

A igualdade acontece, se e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demonstração: Provemos primeiro que $MA \geq MG$. Com efeito, Para $i = 1, 2, ..., n$, sejam $x_i := \dfrac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$. Então $x_i > 0$ para todo $i = 1, 2, .., n$. Mais ainda,

$$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1.$$

Agora, a desigualdade $MA \geq MG$ é equivalente a provar

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} + \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geq n,$$

isto é,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n, \quad \text{com} \quad x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1..........(*),$$

com igualdade, se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

Provaremos a desigualdade $(*)$ por indução matemática.

Para $n = 1$, a desigualdade $(*)$ é verdadeira, de fato é uma igualdade.

Se $n = 2$, então $x_1 \cdot x_2 = 1$ e desde que $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 \cdot x_2}$, temos $x_1 + x_2 \geq 2$.

Suponhamos que para $n = k$ e números positivos arbitrários $x_1, x_2, ..., x_k$ tais que $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k = 1$ se cumpre $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq k$, com igualdade, se e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$.

Sejam $n = k + 1$ e $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ números positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{k+1} = 1$.

Se $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$, a igualdade em $(*)$ claramente acontece. Portanto, podemos assumir que algum deles é menor que 1. Sem perda de generalidade podemos supor que $x_1 < 1$ e que $x_2 > 1$.

Então, para a sequência de números $x_1 x_2, x_3, ..., x_{k+1}$ que contém k números, temos que $(x_1 x_2) x_3 \cdots x_{k+1} = 1$. Portanto, pela hipótese de indução temos $x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} \geq k$, com igualdade, se e somente se $x_1 x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1} = 1$.

Agora nós temos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} &\geq x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1} + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \\ &\geq k + 1 + (x_2 - 1)(1 - x_1) \geq k + 1, \end{aligned}$$

com igualdade, se e somente se, $x_1 x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1} = 1$ e $(x_2 - 1)(1 - x_1) = 0$. Isto é, se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 1$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Matemática, a desigualdade $(*)$ está provada.

Agora demonstremos que $MG \geq MH$, isto é,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Pela desigualdade $MA \geq MG$ temos

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}},$$

que é equivalente a desigualdade desejada. Mais ainda, a igualdade acontece, se e somente se, $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \cdots = \frac{1}{a_n}$, se e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Finalmente provaremos que $MQ \geq MA$. Aplicaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwartz as sequências $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(1, 1, ..., 1)$. Então

$$\begin{aligned}
(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) &\geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \\
\Leftrightarrow n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) &\geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \\
\Leftrightarrow \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} &\geq (\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n})^2 \\
\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} &\geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.
\end{aligned}$$

A igualdade acontece, se e somente se $\frac{a_1}{1} = \frac{a_2}{1} = \cdots \frac{a_n}{1}$, isto é, se e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. ■

5.2 Aplicações

Exemplo 5.1. *Sejam a, b, c, d números reais positivos tais que $abcd = 1$. Então vale a desigualdade:*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$$

Com efeito, desde que $MA \geq MG$ temos

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10 \sqrt[10]{a^5 b^5 c^5 d^5} = 10$$

. □

Exemplo 5.2. *Sejam a, b, c números reais positivos. Então,*

$$(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

Temos que

$$\begin{aligned}
(a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) \\
&\geq a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3 \cdot 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = a^3 + bs + c^3 + 24abc.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 5.3. *Seja k um número natural e sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos tais que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Então,*

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k} \geq n^{k+1}.$$

Como $MA \geq MG$, temos

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n},$$

isto é,

$$n \leq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}.$$

Portanto,

$$n^k \leq \sqrt[n]{a_1^{-k} a_2^{-k} \cdots a_n^{-k}} \leq \frac{a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k}}{n},$$

ouseja,

$$a_1^{-k} + a_2^{-k} + \cdots + a_n^{-k} \geq n^{k+1},$$

como desejado. □

Exemplo 5.4. *Sejam a, b, c, d números reais positivos. Vale a desigualdade*

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 \geq abcd(ab + bc + cd + da).$$

Temos que,

$$a^6 + b^6 + c^6 + d^6 = \frac{1}{6}((2a^6 + 2b^6 + c^6 + d^6) + (2b^6 + 2c^6 + d^6 + a^6)$$
$$+(2c^6 + 2d^6 + a^6 + b^6) + (2d^6 + 2a^6 + b^6 + c^6)).$$

Desde que $MA \geq MG$ temos que,

$$\frac{2a^6 + 2b^6 + c^6 + d^6}{6} = \frac{a^6 + a^6 + b^6 + b^6 + c^6 + d^6}{6} \geq \sqrt[6]{a^{12}b^{12}c^6d^6} = a^2b^2cd.$$

Analogamente,

$$\frac{2b^6 + 2c^6 + d^6 + a^6}{6} \geq b^2c^2da,$$
$$\frac{2c^6 + 2d^6 + a^6 + b^6}{6} \geq c^2d^2ab,$$
$$\frac{2d^6 + 2a^6 + b^6 + c^6}{6} = d^2a^2bc.$$

Somando as quatro últimas desigualdades, obtemos a desigualdade desejada.

Além disso, notemos que a igualdade acontece, se e somente se, $a = b = c = d$. □

Exemplo 5.5. *Sejam $x, y, z \geq 2$ números reais. Então se cumpre que:*

$$(y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) \geq 125xyz.$$

Com efeito, temos que,

$$y^3 + x \geq 4y + x = y + y + y + y + x \geq 5\sqrt[5]{y^4 x}.$$

Analogamente temos,

$$z^3 + y \geq 5\sqrt[5]{z^4 y},$$
$$x^3 + z \geq 5\sqrt[5]{x^4 z}.$$

Multiplicando as últimas três desigualdades, obtemos a desigualdade desejada. □

Exemplo 5.6. *Seja x um número real positivo. Achar o menor valor de:*

$$x + \frac{1}{x}$$

Desde que $MA \geq MG$, temos que,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2,$$

onde a igualdade é válida, se e somente se, $x = \frac{1}{x}$, ouseja, $x = 1$.

Consequentemente, o menor valor da expressão $x + \frac{1}{x}$ é 2. □

Exemplo 5.7. *Seja x um número real tal que $x \geq 3$. Achar o menor valor da expressão*

$$x + \frac{1}{x}$$

Neste caso, no podemos usar diretamente a desigualdade das médias $MA \geq MG$, pois o ponto $x = 1$ não está no intervalo $[3, +\infty)$.

é claro, que se usamos cálculo diferencial, podemos ver que a função $f(x) = x = \frac{1}{x}$ é crescente sobre o intervalo $[3, +\infty)$. Portanto, o mínimo valor da função f é $f(3) = \frac{10}{3}$.

Agora vejamos como usar a desigualdade $MA \geq MG$.

$$A = x + \frac{1}{x} = \frac{x}{9} + \frac{1}{x} + \frac{8x}{9} \geq 2\sqrt{\frac{x}{9} \cdot 1x} + \frac{8x}{9} = \sqrt{9} = \frac{2}{3} + \frac{8 \cdot 3}{9} = \frac{10}{3}.$$

□

Exemplo 5.8. *Sejam a, b números reais positivos tais que $a + b \leq 1$. Achar o mínimo valor da expressão*

$$A = ab + \frac{1}{ab}.$$

Se usamos a desigualdade das médias $MA \geq MG$, teriamos que

$$A = ab + \frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} = 2,$$

onde a igualdade ocorre, se e soemente se, $ab = 1$. Isto implicaria que $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2$, contradizendo a hipótese que $a + b \leq 1$.

Fazendo $x + \frac{1}{ab}$, temos que $x = \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \geq 4$. Portanto, podemos considerar um problema equivalente, Achar o mínimo da função $A = x + \frac{1}{x}$, com $x \geq 4$. Como antes,

$$A = x + \frac{1}{x} = \frac{x}{16} + \frac{1}{x} + \frac{15x}{16} \geq 2\sqrt{\frac{x}{16} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{15x}{16} \geq \frac{2}{4} + \frac{15x}{16} = \frac{17}{4}.$$

A igualdade acontece, se e somente se, $x = 4$, isto é, $a = b = \frac{1}{2}$.

□

Exemplo 5.9. *Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Achar o mínimo valor da expressão*

$$A = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Se usamos diretamente a desigualdade $MA \geq MG$ teremos,

$$a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6\sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{abc}},$$

com igualdade, se e somente se, $a = b = c = 1$. Mas, isso implicaria que $a + b + c = 3 > \frac{3}{2}$, uma contradição.

Como A é uma expressão simétrica em a, b e c, podemos estimar que acontece quando $a = b = c = \frac{1}{2}$. Então,

$$\begin{aligned} A = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= (a + b + c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}) + \frac{3}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \\ &\geq 6\sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{64abc}} + \frac{3}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 3 + \frac{3}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \\ &\geq 3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{a + b + c} \geq 3 + \frac{27}{4} + \frac{1}{3/2} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, o mínimo valor de A é $\frac{15}{2}$, para $a = b = c = \frac{1}{2}$.

□

Exemplo 5.10. *Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a + b + c = 1$. Achar o mínimo valor da expressão*

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Novamente não podemos aplicar diretamente a desigualdade das médias $MA \geq MG$, pois

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4\sqrt[4]{abc \cdot \frac{1}{abc}} = 4,$$

com igualdade, se e somente se, $abc = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, isto é, se e somente se, $a = b = c = 1$ e portanto, $a + b + c = 3$, contradizendo a hipótese $a + b + c = 1$.

Então reescrevemos a expressão coomo segue,

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = abc + \frac{1}{81a} + \frac{1}{81b} + \frac{1}{81c} + \frac{80}{81}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}).$$

Pela desigualdades $MA \geq MG$ e $MA \geq MH$ temos,

$$abc + \frac{1}{81a} + \frac{1}{81b} + \frac{1}{81c} \geq 4\sqrt[4]{abc \cdot \frac{1}{(81)^3abc}} = \frac{4}{27}$$

e

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c} = 9.$$

Consequentemente,

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{27} + \frac{80}{9} = \frac{244}{27},$$

com igualdade, se e somente se, $a = b = c = \frac{1}{3}$. □

Referências Bibliográficas

[1] Z. Cvetkovski. *Inequalities, Theorems, Techniques and Selected Problems*, Springer, 2012.

[2] J. Howie *Real Analysis*, Springer, 2005.

[3] J. M. Steele *An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, Cambridge University Press, 2004.

[4] DOLCE, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. *Fundamentos da Matemática Elementar*. 8ª. ed. São Paulo: Atual 2005, v.9.

[5] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; Fernández, Adan José Corcho. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. 2ª. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006, v.1. (Coleção Olimpíada de Matemática)

[6] AIGNER, M.; ZIEGLER, Gunter M; KARL H. *Hofmann-Proofs from THE BOOK-Springer* (2009).