Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Uma proposta didática de resolução de problemas na matemática: escrever para entender, entender para resolver

Kleber Xavier Feitosa

Brasília
2015

Kleber Xavier Feitosa

Uma proposta didática de resolução de problemas na matemática: escrever para entender, entender para resolver

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Brasília
2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F311p

Feitosa, Kleber Xavier
Uma Proposta didática de resolução de problemas na matemática: escrever para entender, entender para resolver / Kleber Xavier Feitosa; orientador Rui Seimetz. -- Brasília, 2015.
90 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

1. Matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Aprendizagem baseada em problemas. I. Seimetz, Rui , orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Uma proposta didática de resolução de problemas na matemática: escrever para entender, entender para resolver.

por

KLEBER XAVIER FEITOSA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 26 de junho de 2015.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB (Orientador)

Profa. Dra. Edileuza Fernandes da Silva – SEEDF

Prof. Dr. Helder de Carvalho Matos – MAT/UnB

Universidade de Brasília
Instituto de Ciêncis Exatas
Departamento de Matemática

Uma proposta didática de resolução de problemas na matemática: escrever para entender, entender para resolver.

Kleber Xavier Feitosa

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de **Mestre**.

Brasília, 26 de junho de 2015

Comissão Examinadora:

$\overline{Prof.Dr.Rui\ Seimetz - Mat/UNB(Orientador)}$

$\overline{Prof.Dr.Helder\ de\ Carvalho\ Matos - Mat/UNB}$

$\overline{Prof.Dra.Edileuza\ Fernandes\ da\ Silva - SEE/DF}$

Kleber Xavier Feitosa graduou-se em Matemática pela Universidade Católica de Brasília, durante a graduação foi bolsista de iniciação científica tendo pesquisado sobre aplicações do teorema da função implícita a modelos de Economia.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha esposa Francisca Elite e aos meus filhos Arthur Saboia e Antonio Filipe.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, nosso criador e salvador, a minha esposa e ao meu filho, pelo apoio, paciência e por entender o motivo de meus momentos de ausência. Ao meu Orientador pelas valiosas contribuições. Agradeço também ao Sérgio Elias, pelo grande e importante apoio dado nesse período de estudos. A Andréia Julio pelas ideias dadas. Aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos, aos meus amigos do PROFMAT, pelas dedicadas horas de estudos e contribuições, principalmente a Regiane e a Rosana, que muito contribuíram para o sucesso alcançado.

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo principal apresentar uma proposta para resolução de problemas em matemática a partir da concepção de que a formulação do problema pelo aluno pode ajudá-lo a entender e a resolver outros problemas matemáticos que encontrar em sua trajetória acadêmica. Um outro objetivo específico será trabalhar com problemas para que os alunos busquem o conhecimento que será proposto nas aulas seguintes e mostrar que o professor, como orientador de seu aluno na busca do conhecimento e planejando suas ações, a partir do que os estudantes sabem, contribuirá para uma aprendizagem plena e significativa em Matemática. Ao trabalhar com os problemas, os alunos buscarão os conceitos, indagarão sobre suas soluções, acreditarão no próprio potencial, formularão outros problemas e terão uma visão mais profunda dos problemas apresentados nos livros didáticos. Os problemas propostos foram apresentados tendo em vista o método da Aprendizagem Baseada em Problemas que se fundamenta nas teoria de aprendizagem de Dewey, Ausubel, Bruner entre outros. Esta dissertação visa, ainda, motivar as atividades a serem propostas por meio das concepções de resolução de problemas abordadas por pesquisadores de todo o mundo, bem como analisar as possibilidades de melhora no processo ensino e aprendizagem desta disciplina e as possíveis dificuldades encontradas por parte de alunos e professores. Uma sequência didática de atividades propostas neste trabalho foi aplicada em uma escola da SEDF e pôde-se perceber que os alunos envolvidos apresentaram motivação para encontrar situação-problema, elaborar a formulação do mesmo, discutir e escrever e finalmente apresentá-la para a turma.

Palavras-chave: resolução ,problemas, aprendizagem, matemática.

Abstract

This work aims to present a proposal for solving mathmatics problems from the view that the formulation of the problem by the student can help them to understand and solve mathematics problems and also help them in developing their academic career. Another specific objective is work with problems in a way that students may seek knowledge needed in following classes and so the teacher as supervisor of the students for knowledge and planning their actions, will contribuite to a learningfull and best meaning of the Mathematics. In working through the problems, students will seek the concepts, inquire about their solutions, believe in their own potential, develop other problems and have a deeper understanding of the issues presented in textbooks. The proposed problems were presented in view of the method of Problem-Based Learning which is based on Dewey's learning theory, Ausubel, Bruner and others. This work is also intended to motivate the activities to be proposed through problem-solving concepts addressed by researchers around the world as well as examine the possibilities of improvement in the teaching and learning of this discipline and possible dificulties encountered by both students and teachers. A didactic sequence of activities proposed in this paper was applied in a school SEDF and it could be seen that the students involved had motivation to find the problem situation, prepare the formulation of it, discuss, write and finally present it to the class .

Keywords:Resolution, problems, learning, math.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A análise do desempenho dos estudantes nas avaliações de larga escala revela uma deficiência muito grande no aprendizado em Matemática, principalmente no que se refere a resolução de problemas, pois essas avaliações, PISA, SAEB, ENEM, têm como foco a resolução de problemas para a avaliação de competências, ver [26]. Verifica-se nessas avaliações as dificuldades que estudantes têm em compreender e entender o que se pede em um problema matemático contextualizado. Resolver problemas de Matemática em sala de aula é importante, pois é através dos problemas que os alunos procuram relacionar a matemática com o seu cotidiano, fazem inferências através dos números e gráficos além de entenderem o processo de evolução do mundo e da sociedade em que participam.

Diante disso, formar cidadãos autônomos e prontos para enfrentar, compreender e participar desses processos evolutivos que ocorrem na sociedade é um caminho que o ensino por meios dos problemas poderá seguir. Focar na resolução de problemas, não só nas técnicas em resolvê-los, como entendê-los, partindo da concepção de que escrever e elaborar um problema matemático, são partes para o entendimento do mesmo, resgata em sala de aula os processos históricos de evolução da Matemática, a forma com que a prática dos povos antigos contribuíram para o desenvolvimento dessa ciência.

Trabalhar de forma prática com a resolução de problemas motiva os estudantes a buscarem a solução para problemas do seu cotidiano, fazendo com que sejam éticos e capazes de compreender os processos produtivos que ocorrem em sociedade e ao mesmo tempo perceber a organização do pensamento matemático, fazendo também com que sejam críticos frente aos resultados e que reflitam sobre os meios para alcançá-los, além de poderem trabalhar o processo de formalização do pensamento matemático . As orientações curriculares para o Ensino Médio[9] destaca que, ao final do Ensino Médio,

[...] espera-se que os estudantes saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p.69).

Este trabalho oferece uma proposta didática que busca apresentar a resolução de problemas como um caminho a ser seguido não só pelo professor, mas também pelo aluno que fará parte do processo de formulação e resolução, destacando suas técnicas de resolução e refletindo sobre os problemas apresentados em sua comunidade. Dessa forma,esperamos contribuir de forma positiva com a aprendizagem e a motivação dos estudantes frente aos problemas matemáticos e que as dificuldades possam ser minimizadas e os alunos possam compreender melhor o enunciado de um problema matemático e a partir daí encontrar sua solução.

Primeiramente, no capítulo 3 destacamos algumas concepções na resolução de problemas na matemática do ponto de vista de alguns autores e do SAEB, PISA, apresentamos alguns conceitos relacionados a resolução de problemas na Matemática.

No capítulos 4, destaca-se o método da aprendizagem Baseda em Problemas, suas características e quais as relações entre professor e aluno dentro desse método.

No capítulo 5 apresentamos a métodologia adotada nessa dissertação e sua relação com o método da Aprendizagem Baseada em Problemas.

No capítulo 6 apresentamos a análise da produção escrita dos estudantes e as possíveis dificuldades encontradas pelos alunos.

Por fim no capítulo 7 apresentamos duas sugestões de atividades para professores que desejam metodologias alternativas de ensino de Matemática . Essa proposta foi aplicada com meus alunos do 1º , 2º e 3º ano do ensino médio de uma escola pública do Distrito Federal.

2 Objetivos

2.1 Objetivo geral

Analisar e propor metodologia de resolução de problemas matemáticos com vistas à elaboração e resolução de situações-problema pelos estudantes a partir de seu contexto sociocultural.

2.2 Objetivos específicos

- Trabalhar com resolução de problemas ;

- Apresentar algumas práticas na resolução de problemas em turmas do Ensino Médio;

- Apresentar o professor como orientador de seu aluno na busca do conhecimento ;

- Análisar a produção escrita dos estudantes do 2° e 3º ano do Ensino Médio em alguma situações problemas levantadas afim de verificar a motivação frente a proposta, e como a formulação de problemas pelos estudantes pode ajudá-los a resolver outras situações problemas em Matemática.

3 Resolução de problemas

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos e concepções de alguns autores acerca da resolução de problemas na Matemática e como as avaliações de larga escala, principalmente o PISA e o SAEB, vêm usando a resolução de problemas em suas edições.

Segundo Branca (1997) Apud Diniz e Smole[32], (2001, p. 87), existem três concepções que descrevem o que é resolução de problemas: como meta, processo e habilidade básica.

Como meta, as autoras destacam que, a resolução de problemas é o alvo do ensino em Matemática, em que primeiro deve haver uma preparação do indivíduo, com apresentação de conceitos, teorias e informações, para que depois seja possível resolver os problemas a ele propostos.

Como processo, destacam a resolução de problemas no que tange à aplicação de conhecimentos previamente adquiridos para enfrentar situações novas. As autoras destacam ainda que os trabalhos voltam-se para o ensino de técnicas que ajudam os indivíduos a resolverem os problemas, surgindo, assim, as classificações para os diversos problemas e as técnicas para resolvê-los.

Como habilidade básica, as mesmas destacam, que deve ser entendida como " uma competência mínima para que o indivíduo possa se inserir no mundo do conhecimento e do trabalho" .

Percebe-se que essas três concepções não se excluem, mas se complementam e são apresentadas sob diversas visões de pesquisas em espaço e tempo distintos e que influenciaram a formação do currículo e a produção dos livros didáticos na área da Matemática que temos atualmente. As autoras destacam ainda uma outra dimensão, surgida nos anos 90, de que a resolução de problemas é uma metodologia para o ensino da Matemática, " passando a ser um conjunto de estratégias para o ensino e o desenvolvimento da aprendizagem matemática" (2001, p.88) . É nessa concepção que usamos os problemas desafios que possam " desencadear o ensino e a aprendizagem matemática, a modelagem, a problematização e a formulação de problemas em projetos" (2001, p.88) .

A partir do exposto, a visão de resolução de problemas matemáticos neste trabalho estará baseada nas situações problema, nas estratégias de formulação e resolução de problemas pelos alunos, no enfrentamento de novas situações problema, do cotidiano escolar, no olhar diferenciado para as situações que são apresentadas nos livros didáticos e na busca do conhecimento matemático diante dos problemas apresentados, aliados ao acompanhamento e à orientação do professor.

No geral, em sala de aula, os problemas são abordados da seguinte maneira: o professor apresenta uma situção problema e um conjunto de várias técnicas afim de resolvê-los. Os alunos, por sua vez, aprendem essas técnicas para resolver outros problemas que lhes são apresentados. Em contrapartida a essa metodologia, o foco na resolução de problemas está valorizando cada vez mais o ponto de vista do aluno, sua visão dos problemas, como eles elaboram e quais estratégias usam para resolvê-los, como enfatiza D' Ambrosio[13].

> *Hoje a proposta está um tanto modificada e a resolução de problemas é encarada como uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos. Essa proposta, mais atual, visa a construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulam a sua curiosidade matemática. (D'Ambrosio, 2014, p.2)*

Nesse sentido, o professor terá um papel de motivador e orientador dos trabalhos , apresentando as propostas, os problemas, que podem ser da vivência, levando em conta as experiências que os alunos possuem em matemática, usando as situações, dificuldades encontradas, para propor novos conceitos matemáticos, novas experiências, afim de que o aluno tenha êxito no aprendizado.

Para Smole e Diniz (2001, p. 89), [32], – " Quando adotamos os problemas convencionais como único material para o trabalho com a resolução de problemas na escola, podemos levar o aluno a uma postura de fragilidades e insegurança diante de situações que exijam algum desafio maior " .

Minha proposta é a de que o aluno busque o conhecimento, aprenda a fazer matemática, aprenda a usar o que já conhece e usar as ferramentas que auxiliem na aprendizagem. Dessa maneira, depois dessas abordagens, o professor poderá propor os problemas do livro didático para que o aluno possa conhecer os vários problemas que existem e que possa ter uma visão ampla das resoluções que lhes forem apresentadas para confrontar com suas próprias resoluções.

Nessa perspectiva, " o grande desafio será identificar, discutir e realizar estudos de problemas que constituam e tenham como objetivo o ensino e a aprendizagem da matemática de tal forma que suscite nos estudantes a construção ou o desenvolvimento de suas capacidades." (Burak e Aragão 2012 p. 79).[11]

3.1 Algumas concepções na resolução de problemas na Matemática

A Matemática é uma ciência que surgiu da necessidade humana em resolver os problemas que lhes foram apresentados de forma natural e para sua sobrevivência e evolução, ela está presente em nossas vidas e ações diárias. Essa presença da Matemática em nosso cotidiano ocorre quando olhamos o relógio para ver que horas levantamos, quanto tempo temos para executarmos nossos objetivos diário, quando estabelecemos as metas do mês, quando fazemos uma compra. Dessa forma pode-se perceber a importância de se ensinar Matemática focando na resolução de problemas para manter o significado que está sendo perdido nas práticas de ensino em sala de aula nos dias atuais. A metodologia de ensino de Matemática utiliza métodos quase sempre expositivos e apresentam os problemas prontos e muitas vezes sem significado para o aluno.

> *A educação escolar brasileira persiste em continuar a solicitar, de modo geral, dos estudantes o uso excessivo da memória, não só no que tange ao ensino de matemática pela repetição mecânica de algoritmos, mas também pela padronização estéril da resolução de problemas, pela descontextualização de situações sociais e pela mera aplicação de fórmulas.(Burak e Aragão, p.17)[11]*

Na sociedade atual a tecnologia está presente no nosso dia a dia, dessa forma, exige-se do trabalhador uma postura crítica baseada nas estratégias, na crítica que ele deve ter em resolver as várias situações- problemas que lhes são apresentadas. A Matemática, no uso de " metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade de enfrentar desafios" (BRASIL, 2008, p. 27)[8] -pode contribuir para a formação de cidadãos capazes de enfrentar essas situações. O foco nos problemas não só na resolução, como também na elaboração, pode contribuir na formação dos alunos, pois estes aprendem a propor, identificar, analisar, criticar e resolver problemas propostos.

> *A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. A atividade matemática escolar não é " olhar para coisas prontas e definitivas" mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a falar e a escrever sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados. (PCN1999, matemática Livro 3 p.19)*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam ainda: " o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisam desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las". Dessa forma, deve-se partir do problema, proposto pelo professor e o aluno elaborando estratégias de resolução e por outro lado o problema proposto pelo aluno, acerca da realidade que o cerca, escrevendo e propondo estratégias de resolução afim de mudar, de transformar sua realidade.

D'AMBROSIO[13],1998, destaca que " Em nenhum momento no processo escolar, numa aula de matemática geram-se situações em que o aluno deva ser criativo, ou onde o aluno esteja motivado a solucionar um problema pela curiosidade criada pela situação em si ou pelo próprio desafio do problema. Na matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação, exploração e descobrimento. O processo de pesquisa matemática é reservado a poucos indivíduos que assumem a matemática como seu objeto de pesquisa. É esse processo de pesquisa que permite e incentiva a criatividade ao se trabalhar com situações problemas". Isto é comum na maioria das escolas, pois os professores ficam engessados a um cronograma pré estabelecido. Dessa maneira, o professor tem o papel de articular ações no ambiente escolar afim de propor aos alunos uma visão diferente dos problemas matemáticos. Ele, por exemplo, pode propor, numa feira de ciências, pesquisas estatísticas acerca do objeto pesquisado, contribuindo dessa forma para a iniciação científica de seus alunos e a partir disso, os estudantes podem propor outros problemas e ao mesmo tempo lhes apresentar a solução. O professor então, com esta ação contribuirá para uma aprendizagem significativa e o aluno ficará motivado a resolver e elaborar mais problemas propostos por ele ou pelo professor.

A teoria da aprendizagem significativa de Ausube[5](1980), propõe que a aprendizagem significativa ocorre quando o indivíduo relaciona uma nova informação a outros conceitos relevantes já existente em sua estrutura cognitiva. Segundo Ausubel et al (1980),

> *se quiséssemos reduzir a psicologia educacional em um único princípio este seria: O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que sabe e baseie nisso seus ensinamentos .(Ausubel et al, 1980, p.137)*

a aprendizagem significativa dessa forma propõe que as tarefas, ou a proposta apresentada neste trabalho, de aprendizagem estejam relacionadas com os conceitos que os alunos já possuem para que possam fazer a relação com o novo conhecimento.

Dante[14] 1991, destaca que a resolução de problemas é uma das principais formas de " fazer os alunos pensarem produtivamente" . O mesmo observa que :

> *Mais do que nunca precisamos de pessoas ativas e participantes, que deverão tomar decisões rápidas e, tanto quanto possível, precisas. Assim, é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas de comércio, economia, administração, engenharia, medicina, previsão do tempo e outros da vida diária. E, para isso, é preciso que a criança tenha, em seu currículo de matemática elementar, a resolução de problemas como parte substancial, para que desenvolva desde cedo sua capacidade de enfrentar situações-problema. (Dante 1991, p. 15)*

O Sistema de Avaliação da Educação Básica ($SAEB$), dividido em três avaliações, a ANEB-Avaliação Nacional da Educação Básica, a prova Brasil e a ANA, Avaliação Nacional de Alfabetização, são avaliações que fornecem indicadores de qualidades da educação no Brasil. Sua matriz de referência é estruturada com foco na resolução de problemas e destaca que " o foco em matemática é a resolução de problemas, que inclui a proposição de tarefas simples com o objetivo de avaliar se o aluno tem domínio de padrões e técnicas escolares e consegue associá-los a problemas rotineiros do cotidiano" (Rabelo 2013, p.14)[26]

A opção pelo foco na resolução de problemas está relacionada pelo fato de essa metodologia possibilitar o estabelecimento de relações, o desenvolvimento de capacidade de argumentação, a validação de métodos e processos, além de estimular formas de raciocínio que incluem dedução, indução, inferência e julgamento .(Rabelo, 2013 p.14).

Estes sistemas de avaliação são pontos cada vez mais discutidos pelos professores e gestores das escolas no que se refere aos resultados dos alunos e que ações se deve tomar para melhorar o ensino e a aprendizagem de seus estudantes. Também o ENEM- Exame Nacional do Ensino Médio, afim de estabelecer um enfoque no ensino e aprendizagem, principalmente em matemática, foca na resolução de problemas como meio para alcançar os desempenhos esperados. Na escola onde se desenvolveu esta prática pedagógica, o IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica- ficou, na maioria das vezes abaixo da meta, esse indicador é calculado a partir dos dados sobre aprovação escolar, obtidos no Censo Escolar, e médias de desempenho nas avaliações do Inep. Dessa forma, a proposta apresentada neste trabalho poderá fornecer material de apoio acerca da prática pedagógica em sala de aula.

Outra avaliação de larga escala que avalia a qualidade da educação brasileira é o PISA-Programa Internacional de Avaliação de Estudantes- o boletim do INEP destaca os fins e objetivos dessa avaliação:

> *O Programme for International Student Assessment (Pisa) - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. O programa é desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Em cada país participante há uma coordenação nacional. No Brasil, o Pisa é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). O objetivo do Pisa é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico. A avaliação procura verificar até que ponto as escolas de cada país participante estão preparando seus jovens para exercer o papel de cidadãos na sociedade contemporânea. As avaliações do Pisa acontecem a cada três anos e abrangem três áreas do conhecimento–Leitura, Matemática e Ciência–havendo, a cada edição do programa, maior ênfase em cada uma dessas áreas.*

Em 2000, o foco foi em Leitura; em 2003, Matemática; e em 2006, Ciências. O Pisa 2009 iniciou um novo ciclo do programa, com o foco novamente recaindo sobre o domínio de Leitura; em 2012 é novamente Matemática; e em 2015, Ciências. Além de observar as competências dos estudantes em Leitura, Matemática e Ciências, o Pisa coleta informações para a elaboração de indicadores contextuais, os quais possibilitam relacionar o desempenho dos alunos a variáveis demográficas, socioeconômicas e educacionais. Essas informações são coletadas por meio da aplicação de questionários específicos para os alunos e para as escolas. Os resultados desse estudo podem ser utilizados pelos governos dos países envolvidos como instrumento de trabalho na definição e refinamento de políticas educativas, procurando tornar mais efetiva a formação dos jovens para a vida futura e para a participação ativa na sociedade.(www.inep.org.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos- data de acesso:17/06/2014).

Em 2012, o PISA avaliou, pela primeira vez, a capacidade, dos estudantes do mundo todo, para resolver problemas de matemática aplicados à vida real, nessa avaliação, o Brasil, dos 44 países envolvidos na avaliação, ficou em 38^{o} lugar com 428 pontos, esse estudo revelou que apenas 2% dos estudantes brasileiros conseguem resolver problemas de matemática mais complexos, os resultados deixam clara a necessidade da abordagem nos problemas nas aulas de matemática.

Atualmente em sala de aula, as aulas de Matemática são, na sua maioria, aulas expositivas onde o professor passa os conceitos e fórmulas no quadro, seguindo com uma lista de exercícios para finalizar aquele conteúdo. O aluno, por sua vez, faz as anotações e resolvem os exercícios de aplicações, muitas das vezes são listas grandes, sem contexto e sem uma situação problema. Essa prática faz aprender somente aqueles alunos que se interessam naturalmente, que gostam de matemática, o que não ocorre com a grande maioria dos estudantes, para estes, a matemática acaba sendo uma disciplina onde os problemas são transmitidos pelo professor, sua resolução acaba sendo uma série de técnicas por ele determinadas e que só os " nerdes" conseguem resolver. Essa forma de abordar os problemas acarreta numa série de concepções dos alunos acerca da resolução de problemas, como defende D'AMBROSIO[13].

> *Primeiro, os alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor.*
> *Segundo, os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios.(1989, p.1)*

A autora destaca também que

> *O aluno, acreditando e supervalorizando o poder da matemática formal perde qualquer autoconfiança em sua intuição matemática, perdendo, dia a dia, seu " bom-senso" matemático. Além de acreditarem que a solução de um problema encontrada matematicamente não estará, necessariamente, relacionada com a solução do mesmo problema numa situação real.*

Diante do exposto é possível perceber que o trabalho com a resolução e a escrita de problemas deve ser prática tanto do professor como do aluno, o professor propondo o problema na sua forma natural, que a princípio não pode ser escrita, mas falada, discutida, para por último ser formalizada e o aluno escrevendo, elaborando o problema, verificando as condições de resolução e pesquisando as possíveis soluções, inferirindo e medindo com o uso das ferramentas matemáticas que o cerca. Por conseguinte, o professor estará colaborando com todos os estudantes da turma, não só aqueles que gostam de matemática, mas também os que tem " medo" dela estarão fazendo parte do processo de aprendizagem.

Trabalhar com a escrita e a resolução de problemas poderá fazer com que os alunos tenham uma visão crítica, uma aprendizagem efetiva e duradora, o que raramente ocorre trabalhando da maneira atual. Assim, as estratégias usadas e as orientações dadas aos alunos são ações que o professor deve usar a todo momento na resolução e escrita de um problema matemático.

4 A Aprendizagem Baseada em Problemas

Neste capítulo destaca-se a metodologia da Aprendizagem Baseada em Problemas(ABP) seu início, sua base teórica e como podemos reconhecê-la na proposta apresentada nesse trabalho. Nosso objetivo não será trabalhar com o método em si, mas identificá-lo na proposta apresentada, dando a esta uma fundamentação teórica diante da Aprendizagem Baseada em Problemas e das teorias que a fundamentam.

A PBL– Problem Based Learning ou Aprendizagem Baseada em Problemas, ABP, tem sua origem em escolas de Medicina, tendo a Escola de Medicina da Universidade de McMaster em Hamilton, Ontário no Canadá como um dos principais precursores desse método. Sabemos que hoje a maioria das práticas de ensino em sala se resume a aulas expositivas e com pouco uso de novos recursos pedagógicos que façam os alunos se interessarem pela aula. Diante disso, a ABP aparece como uma proposta, apesar de pouco difundida, para uma maneira diferente de ensinar. A ABP tem como estratégia o trabalho centrado no aluno com a metodologia de resolução de problemas. A busca do aluno pelo conhecimento é parte integrante dessa metodologia e o professor deve agir como um Orientador.

> *A atuação do professor não segue a linha do ensino instrucional, já que sua função é a de facilitador na construção do conhecimento e não de centralizador do saber. (GIL. 2008, p. 175-176 Apud Sousa 2011,p. 25)[34].*

Obter do aluno atenção e participação nas aulas não é fácil e fazer com que tenham autonomia na busca pelo conhecimento é mais difícil ainda, por isso é importante que o professor saiba propor as atividades que irá usar em sua classe para que possa obter o máximo de participação e interesse possível. Essas atividades,isto é, a apresentação dos problemas em sala de aula, deverão ser pensadas e repensadas afim de que se estabeleça o passo inicial para o aprendizado. Diante disso, os alunos passam por uma série de reflexões em torno da nova proposta, pois estão acostumados com uma proposta tradicional e muitas vezes sem sentido em suas vidas. Com a ABP o aluno se torna o responsável principal pela construção de seu conhecimento, isso fará com que ele adquire uma maior autonomia nos seus estudos, na busca pelo conhecimento.

4.1 Características da Aprendizagem Baseada em Problemas

Por trabalhar com resolução de problemas para a aquisição de conhecimentos, a ABP tem seu início com a apresentação, aos alunos, de um problema sem qualquer instrução prévia acerca de sua resolução ou resposta. O objetivo será levar o aluno a resgatar um conhecimento adquirido anteriormente e, ou, buscar novos conhecimentos afim de solucionar o problema apresentado que nessa metodologia será a motivação para que os alunos se interessem pela aula e estudem os conteúdos relacionados as diferentes situações apresentadas pelo professor, que atua como o orientador e norteará seus alunos a, em grupos ou individualmente, buscar as informações que precisam para obter a solução para o problema.

> *" Uma vez que as questões são identificadas, os estudantes realizam um estudo autônomo antes de retomar ao grupo para compartilhar suas descobertas e aplicá-las na resolução do problema" (Mamed, 2001, p 29-30 Apud Sousa, 2011, p.28)[34].*

Dessa forma, a ABP é uma proposta didática que tem em sua estrutura a aquisição de conhecimento pela resolução de problemas e apresenta, segundo(BRIDGES 1992,p. 5-6 Apud SOUSA 2011, p.31)[34], as características:

– O ponto de partida para a aprendizagem é um problema;

– O contexto do problema faz referência a uma situação que os alunos poderão enfrentar como futuros profissionais;

– Os conhecimentos que os alunos devem adquirir durante a sua formação profissional é organizado em torno de problemas em vez de disciplinas;

– Os alunos, individual e coletivamente, assumem uma maior responsabilidade na sua própria instrução e aprendizagem;

– A maior parte do aprendizado ocorre no contexto de pequenos grupos, em vez de aulas expositivas.

Segundo (BERBEL, 1998, p. 145-147 Apud SOUSA 2011, p.28)[34], existem inúmeras maneira pelas quais a Aprendizagem Baseada em Problemas pode ser realizada, destacando o chamado " Referencial de Maastricht " nome dado por ser proposto pela Universidade de Maastricht nos anos 70. Propõe que, ao receber a situação problema, o grupo busque solucioná-la seguindo sete passos:

1. Leitura da situação problema e esclarecimento de termos desconhecidos;

2. Identificação do problema proposto pelo enunciado;

3. Discussão do problema e formulação de hipóteses para resolvê–lo;

4. Resumo das hipóteses;

5. Formulação dos objetivos de aprendizagem. Com base nos conhecimentos prévios são identificados os assuntos que devem ser estudados para a resolução do problema;

6. Estudo autônomo dos assuntos levantados no passo anterior;

7. Retorno ao grupo tutorial para discutir novamente o problema à luz dos novos conhecimentos adquiridos na fase de estudo autônomo.

Esses passos compreendem, segundo(BERBEL, 1998, pg.146 Apud SOUSA 2011, p.28)[34] duas fases, onde na primeira é focada a identificação do problema e na formulação das hipótese de resolução e identificação dos conteúdos que serão relevantes para a solução do problema. Na segunda fase a concentração será nos conhecimentos prévios e sua confrontação com os conhecimentos científicos buscados de forma autônoma pelos alunos, a partir daí volta-se para o grupo, o problema é discutido novamente e as informações são integradas para resolver o problema.

Ao contrário do que ocorre no método convencional, esses processos são executados sem a exposição prévia da aula pelo professor. Isso pode fazer com que os alunos fiquem perplexos e não entendam bem os objetivos da proposta, dessa forma o professor deverá agir no intuito de conquistar sua turma com ações de incentivo à pesquisa e às execuções das propostas. Por exemplo, nos jogos são apresentados ótimos problemas que fazem com que os alunos se interessem em resolvê–los, pois além de serem lúdicos, o que provoca o interesse, traz vários problemas que podem ser trabalhados em sala. Outra vantagem da ABP é o constante trabalho com situações problemas, apresentadas de maneira prática, isso faz com que os alunos vejam os conteúdos como aplicações dentro da realidade que os cercam.

Ribeiro[27], 2008, p.16 apud Sousa 2011, p37 , destaca que a Aprendizagem Baseada em problemas é alvo de críticas porque seus idealizadores não se basearam em nenhuma teoria para fundamentar o método. Contudo, os princípios que formam a base da ABP possuem muitas semelhanças com as teorias de Ausubel, Piaget, Bruner, Dewey, Novak, Hanesian, Rogers entre outros.

Na teoria de Dewey, a aprendizagem passiva é abandonada, dando lugar a aprendizagem que ocorre dentro de um contexto de experiência e dos conhecimentos prévios que o indivíduo acumula. Dewey afirmava que as " crianças não chegavam à escola como lousa limpa na qual os professores poderiam escrever as lições sobre a civilização. " para ele a continuidade e a interação são os dois princípios que levam à experiência educativa. Dessa forma, a ABP tem fundamento no que se refere a importância dada aos conhecimentos acumulados e novos conhecimentos a adquirir.

Na aprendizagem significativa de Ausubel , os conhecimentos prévios dos alunos são valorizados e contribuem na aquisição dos novos conhecimentos, o aprender fica estabelecido pelas relações entre os conhecimentos antigos e uma nova informação. Para Ausubel a aprendizagem significativa é o

> *processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura do conhecimento de indivíduo (Moreira, 1999, p.153 Apud Andrade 2007 pg. 42)[3].*

Nessa teoria de Ausubel a ABP tem base nos conceitos pré–existentes na estrutura cognitiva do aluno(Subsunçores) e a aprendizagem significativa ocorre " quando uma nova informação ancora–se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz " (Moreira, 1999, p. 153 Apud Andrade 2007 p. 42)[3]. Dessa forma, na ABP quanto maior for o grau das relações que o aluno faz com o conhecimento que possui e o novo conhecimento mais significativa será a aprendizagem.

Segundo GIL, 2008,p 177 Apud Sousa[34] 2011, p.38, Bruner enfatiza a ideia da autonomia do aprendizado proposta na ABP ao afirmar que o aprendiz é um agente ativo no processo de aprendizagem, pois seleciona e transforma os conhecimentos recebidos, constrói hipóteses e faz descobertas pessoais que podem ser generalizadas para diferentes situações. A proposta acima foi denominada por Bruner como Aprendizagem por Descobertas, pois através dela os estudantes se deparam com problemas e discutem em grupos formas de resolvê–lo.(Sousa 2011,p 38).

Os autores destacados acima orientam fortemente as bases teóricas para a ABP, percebe-se forte influência de vários deles na fundamentação teórica desse método, porém " considera-se que a Aprendizagem Baseada em Problemas tem pressupostos construtivistas e está diretamente relacionada com a teoria de ensino e aprendizagem do filósofo John Dewey "(Hmelo-Silver, 2004, Schmidt, 1995, Koschmann, Penaforte, 2001; Dochy et al, 2003 Apud Andrade 2007, p 38)[3].

Penaforte, 2001, p.59 Apud Sousa 2011, p.38, destaca que:

> *Sem desconsiderar o aspecto cognitivo da aprendizagem, mas encarando o PBL sob uma ótica mais pragmática, a contribuição de John Dewey para a renovação do pensamento educacional representa a matriz conceitual na qual está fundamentado o PBL. A obra Democracia e Educação de Dewey é creditada como a base intelectual para desenvolvimento do PBL. A teoria de Dewey, considerada como uma filosofia da experiência, ressalta como extremamente relevante a experiência para o processo de aprender.*

Dessa forma é a teoria de Dewey uma forte base teórica para a ABP, concebendo a esse método possibilidades de ser aproveitada e estudada por vários pesquisadores das diferentes áreas do conhecimento científico, seja a medicina onde se originaram os estudos ou as outras áreas, em especial a educação básica que é onde ela precisa de esforço no objetivo de melhorar as técnicas ou didáticas praticadas pelos professores em sala.

4.2 Desvantagens da Aprendizagem Baseada em Problemas

Assim como todas as outras metodologias de ensino, a ABP apresenta algumas desvantagens tanto com relação aos alunos como com relação ao professor:

Segundo [27]Ribeiro2010, p 41, na ABP, a " imprecisão no conhecimento das teorias mais avançadas e a insuficiência de conhecimentos de memória" é uma desvantágem para os alunos. Outra desvantágem destacada pelo autor é a obrigação de os alunos trabalharem em grupos, o que pode levar alguns integrantes a sentimentos de frustração frente aos colegas que apresentarem maior capacidade de articulação de seus conhecimentos.

Com relação ao professor, [27]Ribeiro 2010, p.41, destaca que, parece ser um tanto complexo para o professor trabalhar com todo o conteúdo por meio dos problemas e encorajar, motivar, os estudantes a aprenderem os conceitos e conteúdos básicos que não fazem parte do problema, mas que poderão ser usados em sua resolução.(Ribeiro,2010, p41). Da mesma forma, o autor enfatiza a dificuldade do professor avaliar o estudante individualmente, uma vez que todo o processo de aprendizagem ocorre em grupo. (Ribeiro2010, p.42)[27]

Embora as mudanças na prática de ensino tragam alguns desconfortos, a iniciativa de mudar pode ser a responsável pela motivação tanto do professor, como dos alunos, para o processo de ensino e aprendizagem, pois de fato, as partes envolvidades, professor e aluno, se sentem desafiados frente a nova metodologia que prepara, não só o aluno, mas também o professor, para uma aprendizagem continuada.

4.3 O papel do professor e do aluno na Aprendizagem Baseada em Problemas

Numa sala de aula convencional a relação professor e aluno se da, geralmente, de maneira hierárquica, onde o professor é o detentor do conhecimento, ele apresenta o conhecimento ao aluno de maneira sistemática e muitas vezes autoritária, o aluno, por sua vez, recebe essa informação de maneira pacífica e sem questionamentos ou opiniões. Na Aprendizagem Baseada em Problemas, o papel do aluno e do professor requer muita interação e compartilhamento das ideias e dos conhecimentos.

O professor, na Aprendizagem Baseada em Problemas, é o motivador do aluno quando faz com que este pense, através de perguntas como: porque? , O que você quer dizer com isso?, como você sabe que isso é verdadeiro? e questionando seu raciocínio superficial e suas noções vagas e equivocadas.(Ribeiro,p.37)[27]. Desta forma, o professor é o orientador do aluno na busca pelo conhecimento, não lhes apresentando os conceitos já prontos, mas fazendo com que seu aluno busque esse conhecimento de forma cada vez mais autônoma e independente. Isso pode fazer com que muitos pensem que o papel do professor é irrelevante no processo, uma vez que sua participação parece pouca na metodologia da

ABP, porém Delisle2000,p.21 apud Sousa,2011, p.41,[34] afirma que, de forma alguma o papel do professor é irrelevante no PBL, pois

> *Quando consideramos o tempo necessário para desenvolver um problema, supervisionar e apoiar os alunos ao longo do projeto(encorajando-os a serem mais autônomos) e avaliar o sucesso do problema bem como o desempenho dos alunos, é evidente que o papel do professor é vital para a eficácia desta experiência de aprendizagem.*

O aluno na Aprendizagem Baseada em Problemas é o " centro das atenções " isto é, o método é centrado no aluno. Desta forma, as oportunidades de aprendizagem devem ser relevantes a eles e os objetivos devem, em parte, serem determinados pelos próprios alunos. Nessa metodologia muitas responsabilidades sção dadas aos alunos, eles aprendem de forma colaborativa e devem ter consciência que essa colaboração deve partir de todos. Assumir responsabilidade na ABP é o cumprimento, pelo aluno, das seguintes tarefas:

> *–Exploração do problema, levantamento de hipóteses, identificação das questões de aprendizagem e elaboração da mesma;*
> *–Tentativa de solução do problema com o que sabem, observando a pertinência do seu conhecimento atual;*
> *–Identificação do que não sabem e do que precisam saber para solucionar o problema;*
> *–Priorização das questões de aprendizagem, estabelecimento de metas e objetivos de aprendizagem, alocação de recursos de modo a saberem o quê, quando e quanto é esperado deles;*
> *–Planejamento e delegação de responsabilidade para o estudo autônomo da equipe;*
> *–Aplicação do conhecimento na solução do problema;*
> *–Avaliação do novo conhecimento, da solução do problema e da eficácia do processo utilizado e reflexão sobre o processo. (Ribeiro, 2010, p.36)[27]*

Diante disso, a ABP é um método de ensino " ativo " tanto para o professor como para o aluno, isto é, o professor e o aluno atuam como colaboradores na busca pelo conhecimento, onde de um lado o aluno, responsável pelo seu aprender, e por outro, o professor responsável por fazer com que o aluno busque esse aprender, dando condições e orientando-o em cada etapa de sua jornada, apresentando lhes indagações, questionando suas conclusões e esclarecendo suas dúvidas.

5 Metodologia

Neste capítulo discorremos sobre a proposta de apresentar a resolução de situações problemas na Matemática. Descreveremos a nossa amostra, (os sujeito), o material utilizado e sua elaboração.

Fizemos um estudo bibliográfico de natureza investigativa e após busca por fundamentação teórica, foi feita uma seleção de problemas que pudessem contemplar os pressupostos teóricos aqui abordados e cumprir os objetivos estabelecidos.

Optamos por uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo feita pela observação da produção escrita dos estudantes.

> *A pesquisa qualitativa ou naturalística, segundo Bogdan e Biklen(1982), envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva do participantes.(LUCKE; ANDRÉ, 1986, p.13)[21]*

O método utilizado foi o de coleta de dados descritivos, por meio de documentos produzidos pelos alunos.

Ao identificar, na prática de sala de aula no dia a dia, as dificuldades dos estudantes frente aos problemas propostos no livro didático, optamos pela pesquisa-ação pois essa pesquisa se apoia na análise dos dados e seu uso para as possíveis intervençõe em sala de aula. Para Dionne(2007,p.68)[17], a pesquisa–ação,

> *é definida como prática que associa pesquisadores e atores em uma mesma estratégia de ação para modificar um dada situação e estratégia de pesquisa para adquirir um conhecimento sistemático sobre a situação identificada.*

Utilizamos uma sequência didática com objetivo de verificar qual melhor forma de abordar situações problema em sala e de que forma a escrita e resolção de problemas pelos alunos poderiam contribuir para o entendimento de outra situações problemas abordadas nos livros didáticos de Matemática.

Utilizamos, como instrumentos para a análise, registros escrito e por fotografias dos trabalhos dos alunos, feitos durante os encontros.

5.1 Os sujeitos

O nosso estudo foi realizado com um grupo de 206 alunos, aproximadamente, com faixa etária entre 13 e 14 anos, alunos do sexo masculino e feminino, sem histórico de reprovação mas que vivem em uma comunidade onde a maioria dos pais não acompanham o rendimento de seus filhos na escola, importante destacar também que muitos dos alunos da escola ajudam a família trabalhando no turno contrário ao das aulas.

Trabalhamos com um total de 6 turmas de alunos do Ensino Médio, de uma escola pública do Distrito Federal, que funciona na modalidade de semestralidade, com um espaço físico composto de 20 salas de aula, 1 sala de leitura e 1 laboratório de informática. Trabalhamos no período de aproximadamente 1 ano, intercalados em algumas aula duplas, esse perído foi dividido em dois momentos:

No primeiro momento os alunos contribuiram com sugestões de situações problema do seu dia a dia, outras vezes essas situações foram propostas pelo professor de Matemática. Dada a situação, muitas vezes de forma falada, os alunos buscavam os conceitos que já conheciam e buscavam, através de pesquisas e pelo professor, a resolução para o problema, depois eles tinham que escrever uma proposta escrita e com todos os dados que representassem a situação proposta.Participaram do primeiro momento 176 alunos.

No segundo momento, os problemas foram digitados e impressos sem a solução para que alguns alunos, do 2º e 3º anos do Ensino Médio selecionados dos que participaram do primeiro momento, pudessem resolvê-los. Participaram do segundo momento de 30 a 32 alunos.

A apresentação dos problemas foi feita numa sequencia que pudesse favorecer a proposta de elaboração de situações problema pelos estudantes, dessa forma foi feita uma proposta de resolução de problemas na forma de perguntas envolvendo a Torre de Hanói com os alunos dos 1º e 2º anos do Ensino Médio e de um teste diagnóstico com os alunos do3º ano do Ensino Médio com o intuito de verificar a forma com que fariam as produções textuais, isto é, foi proposto para que esses alunos elaborassem situações problema de qualquer nível de ensino.

Apresentamos também alguns problemas não aplicados em sala, mas que consideramos como sugestão para aplicação em sala de aula.

A análise da produção escrita dos estudantes levou em conta os problemas que consideramos mais importantes na proposta apresentada nesse trabalho.

5.2 As atividades

A partir da atividade envolvendo a torre de Hanói e o teste diagnóstico, elaboramos algumas atividades com embalagens e com o astrolábio, outras foram propostas pelos estudantes. Após resolução das atividades, as mesmas foram digitadas e depois de um período aplicadas novamente a alguns alunos que haviam participado anteriormente.

5.3 Os problemas levantados

Aqui descreveremos um relato de experiência no uso da formulação de problemas pelos alunos como estratégia na resolução dos mesmos. Formular uma questão a partir de um problema levantado fará com que os alunos, no uso da língua materna, entendam qual objetivo pretendem alcançar, quais dados serão necessários para que o problema seja entendido, qual linguagem matemática será usada, qual estratégia poderá ser usada na resolução. Após isto farão uso destas estratégias na resolução de um outro problema proposto a eles.

> *Dar oportunidade para que os alunos formulem problemas é uma forma de levá–los a escrever e perceber o que é importante na elaboração e na resolução de uma dada situação; que relação há entre os dados apresentados, a pergunta a ser respondida e a resposta, como articular o texto, os dados e a operação a ser usada. Mais que isso, ao formularem problemas, os alunos sentem que têm controle sobre o fazer matemática e que podem participar desse fazer, desenvolvendo interesse e confiança diante de situações problemas.(Smole e Diniz 2001, pg.152)[32]*

Dessa forma, a formulação de problemas pelos alunos passa a ser uma ferramenta que o professor poderá usar sempre que perceber a fragilidade de seus alunos em resolver os problemas propostos no livro didático, pois essas fragilidades são, na maioria das vezes, relacionadas à falta de percepção dos alunos diante dos dados matemáticos que aparecem nas situações problemas do livro didático.

5.3.1 O problema das embalagens

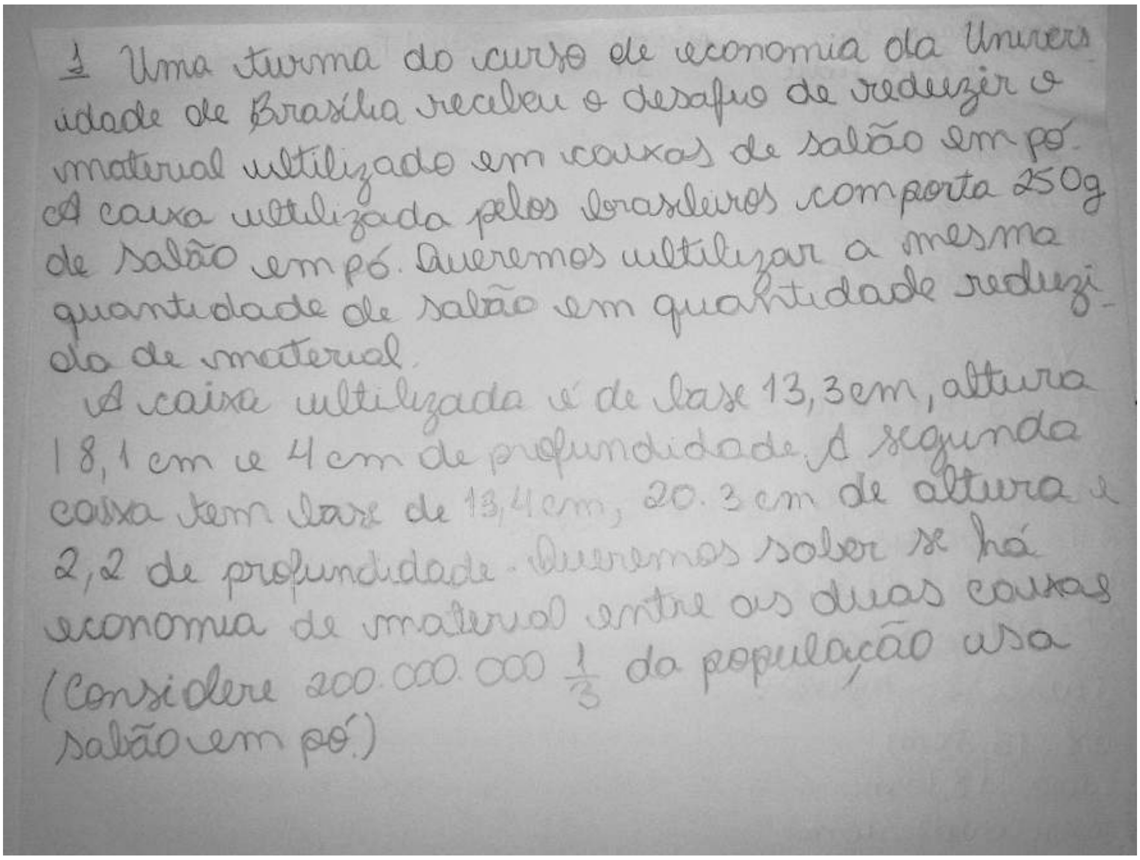
Nesse problema foi proposto, apenas de forma falada, que os alunos verificassem os motivos que levou uma empresa de sabão em pó atuante no mercado a trocar sua embalagem por outra com a mesma forma, mas com dimensões diferentes, bem como analisar a economia de material numa população de 200.000.000 de habitantes.

As figuras seguintes foram elaboradas pelo autor dessa dissertação a partir dos trabalhos produzidos pelos alunos.

Figura 1: Embalagens

Figura 2: Alunos trabalhando com embalagens

Figura 3: Alunos trabalhando com embalagens



1 Uma turma do curso de economia da Univers-
idade de Brasília recebeu o desafio de reduzir o
material ultilizado em caixas de sabão em pó.
A caixa ultilizada pelos brasileiros comporta 250g
de sabão em pó. Queremos ultilizar a mesma
quantidade de sabão em quantidade reduzi-
da de material.
A caixa ultilizada é de base 13,3cm, altura
18,1 cm e 4 cm de profundidade. A segunda
caixa tem base de 13,4cm, 20.3 cm de altura e
2,2 de profundidade. Queremos saber se há
economia de material entre as duas caixas
(Considere 200.000.000 $\frac{1}{3}$ da população usa
sabão em pó.)

Figura 4: Um problema para as embalagens

Os alunos puderam usar os modelos de cálculo de volume e áreas para medir e calcular, além de inferir sobre seus resultados, a quantidade de material usado nas embalagens de uma empresa de sabão em pó atuante no mercado, puderam também elaborar os problemas bem como apresentar suas soluções, como mostram as figuras 4 e 5.

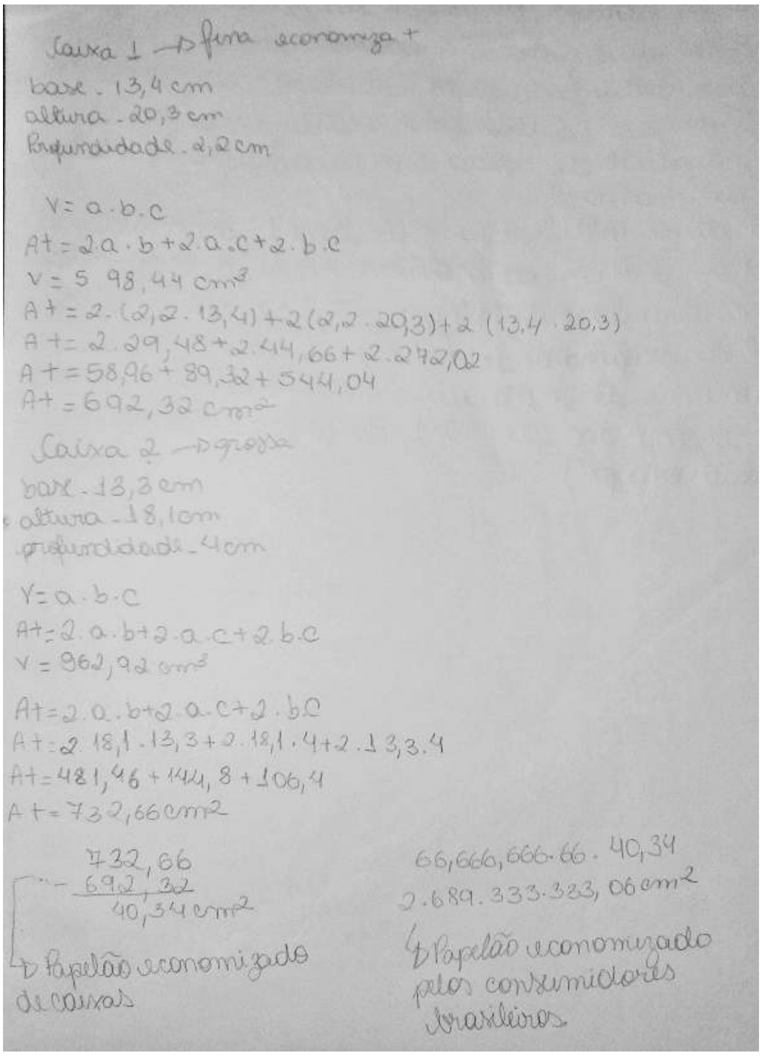
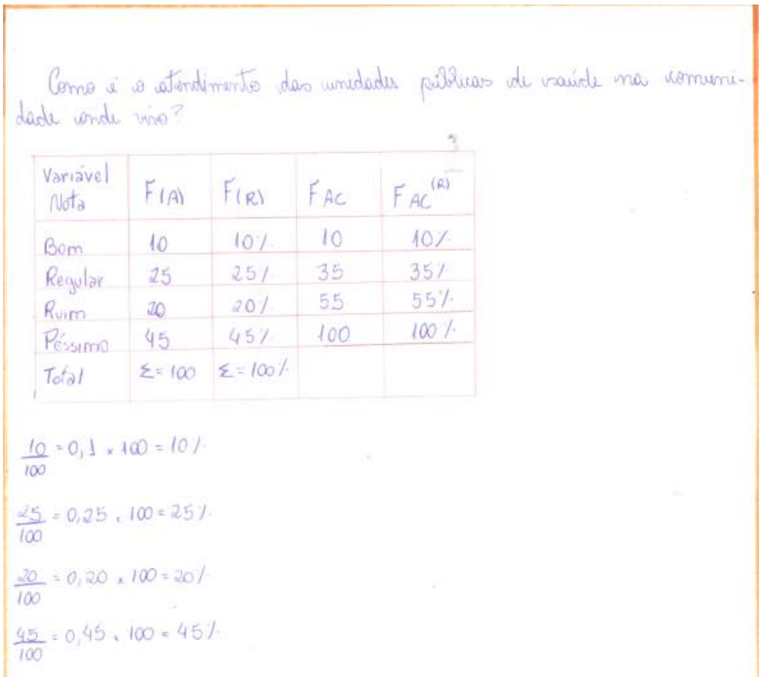


Figura 5: Solução do problema para as embalagens

5.3.2 O atendimento das unidades públicas de saúde

Essa situação problema foi levantada pelos alunos devido a onda de notícias ocorridas referentes ao atendimento das unidades de saúde em sua comunidade, os alunos do 3º ano do Ensino Médio se organizaram em grupos e buscaram, através de pesquisa estatística, verificar a veracidade dos fatos. A partir de suas pesquisas, estudaram como mostrar os resultados por meio de tabelas e gráficos, depois tentaram apresentar situações problemas acerca da pesquisa. Conforme figuras abaixo.



Como é o atendimento das unidades públicas de saúde na comunidade onde vivo?

Variável Nota	$F_{(A)}$	$F_{(R)}$	F_{AC}	$F_{AC}^{(R)}$
Bom	10	10%	10	10%
Regular	25	25%	35	35%
Ruim	20	20%	55	55%
Péssimo	45	45%	100	100%
Total	$\Sigma = 100$	$\Sigma = 100\%$		

$\frac{10}{100} = 0{,}1 \times 100 = 10\%$

$\frac{25}{100} = 0{,}25 \cdot 100 = 25\%$

$\frac{20}{100} = 0{,}20 \times 100 = 20\%$

$\frac{45}{100} = 0{,}45 \cdot 100 = 45\%$

Figura 6: proposta de solução

Nesse caso, a turma dividida em grupos discute a afirmação acima e parte para a elaboração da pergunta, figura 6. Pode-se observar a interação, a indagação, a dúvida com respeito a afirmação, a percepção do problema da comunidade onde vivem e a autonomia por uma pesquisa em busca da resposta. Os alunos puderam pesquisar como organizar os dados em tabelas e gráficos para uma possível conclusão acerca da pesquisa.

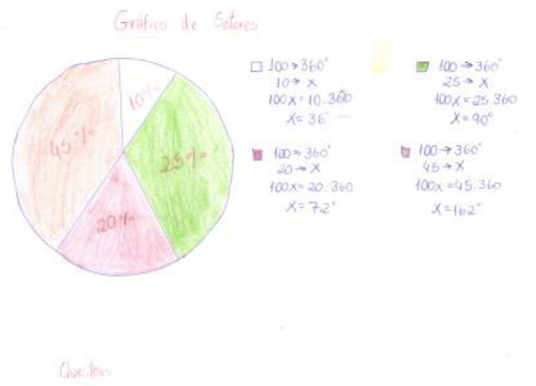


Figura 7: Gráfico 1

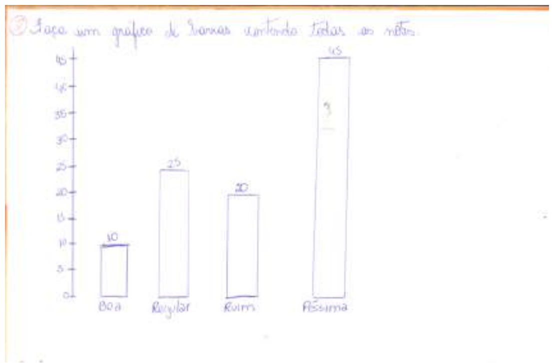


Figura 8: Gráfico 2

A preocupação em mostrar os resultados obtidos, bem como mostrar os cálculos nas soluções, resgata nos estudantes a escrita e a colocação de suas ideias matemáticas, resgatam também sua autoestima e autonomia nas várias situações que encontrarem, dessa forma, a proposta torna–se eficiente pois " tais intervensões devem ser implementadas como uma relação marcada por efetivas possibilidades entre o aluno e o conhecimento matemático, situações nas quais prevaleçam sentimentos de sucesso." (Roseira, 2010. p.122)[30]

A orientação do professor , como deixar claro os diferentes tipos de gráficos estatísticos contribuíram para corrigir alguns equívocos apresentados pelos alunos durante a atividade proposta, perceba o equívoco no gráfico 2 acima, onde o aluno escreveu gráfico de barras ao invés de gráfico de colunas.

> *O erro, que durante muito tempo foi e continua sendo motivo de punições, de apontamento de fracasso ou incapacidade do aluno, deve ser considerado um acontecimento natural no processo de construção do conhecimento. (Silva, Buriasco, 2005, p.501)[33]*

Dessa forma, buscando orientação do professor, o aluno pderá se sentir mais avontade para buscar os conhecimentos ao perceber que o erro fará parte do seu processo de aprendizagem.

5.3.3 O problema do uso do celular em sala

Nessa proposta, os alunos do 3º ano do Ensino Médio levantaram um problema de quase todas as escolas, o uso, desenfreado, do celular em sala de aula para fins não pedagógicos. Usaram novamente a coleta de dados no ambiente escolar em forma de problema, envolvendo porcentagem e o gráfico de setores.

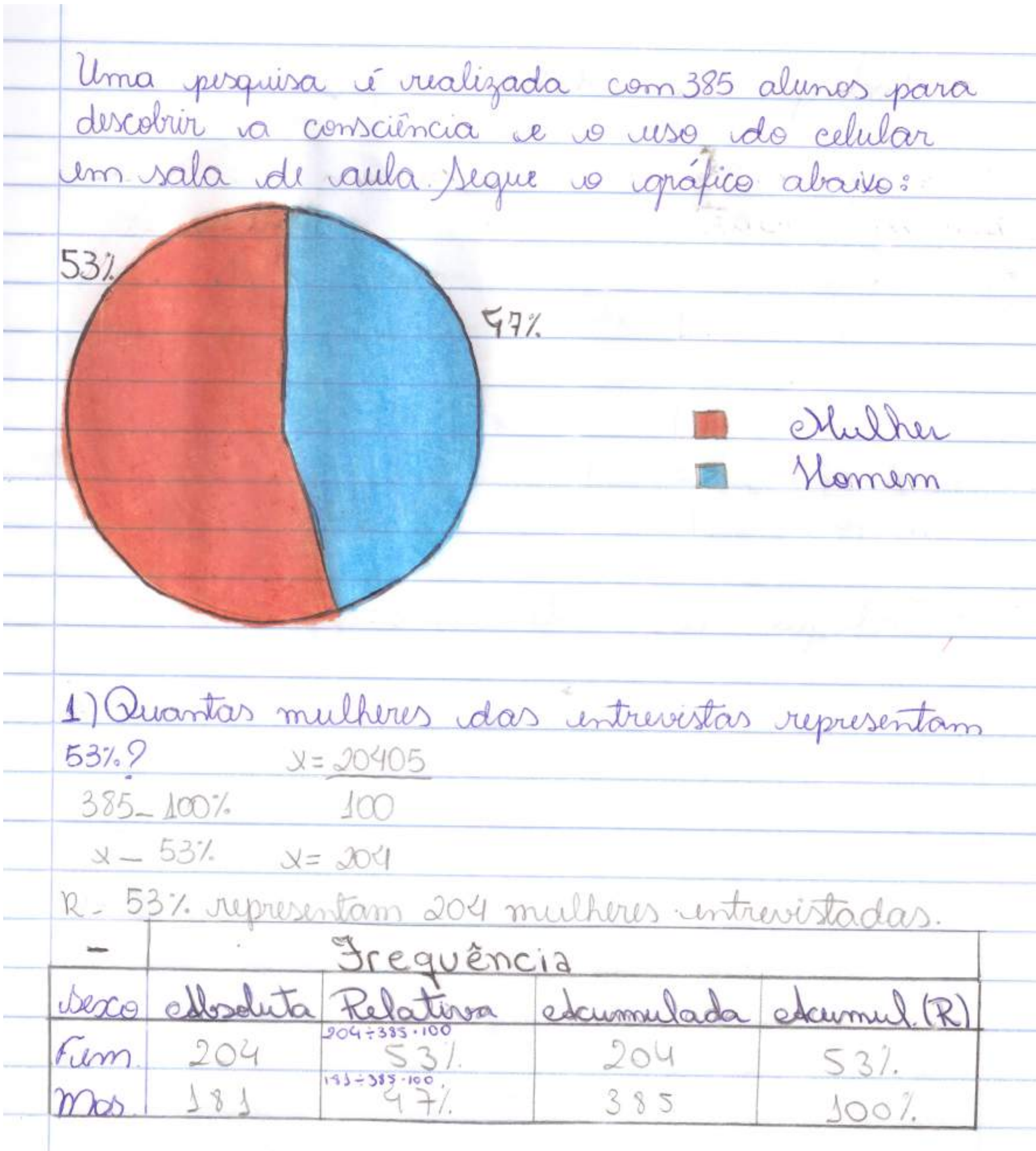


Figura 9: Proposta dos alunos

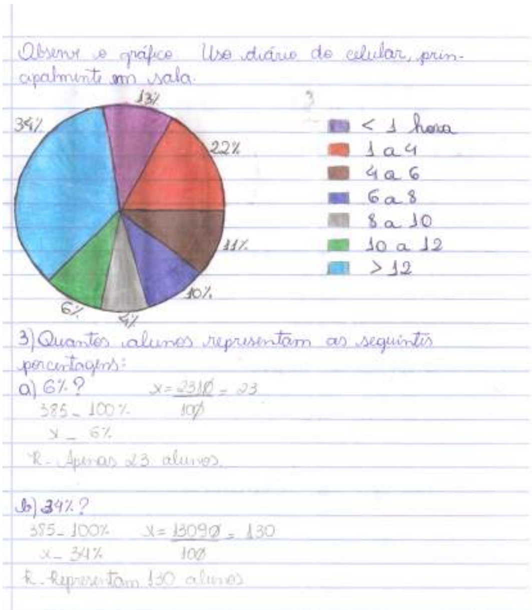


Figura 10: Comparando e inferindo

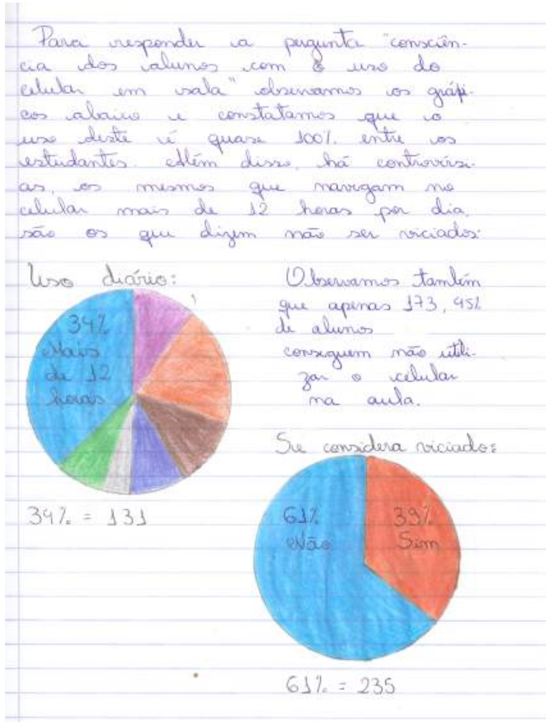


Figura 11: Comparando e inferindo

Compararam os gráficos e fizeram inferências sobre os resultados obtidos, usaram os resultados para elaborar os problemas e as soluções que pretendiam alcançar, como pode ser observado nas figuras 10 e 11 acima. Novamente aqui a orientação do professor se fez presente ao indagar se o uso da palavra apenas seria adequado para representar a procentagem de 45% indicada, figura 11.

5.3.4 O problema do reservatório de água

Qual o volume do reservatório de água da escola? Essa pergunta teve a intenção de os alunos encontrarem o volume de água que continha no reservatório de água da escola, sem nenhum dado em mãos e apenas com um pedaço de barbante de 1 metro de comprimento e com o auxílio do astrolábio, feito com transferidor e tubo da caneta, os alunos encontraram, usando as relações trigonométricas, as medidas que precisavam para responder à pergunta proposta na forma de um problema por eles elaborado.

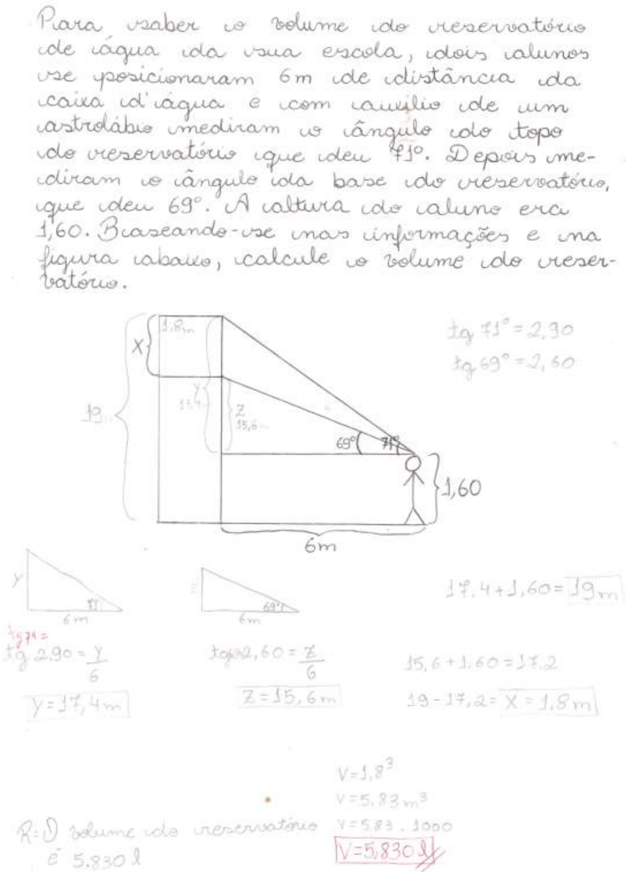


Figura 12: O problema do reservatório de água

Esse é um problema que aparece em alguns livros didáticos no cálculo de alturas, usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo. A proposta aqui foi que, além de calcular uma altura inacessível, os alunos tiveram que calcular também o volume do reservatório de água da escola, figura 12. Observa-se a preocupação, ao referenciar a figura no enuncido, em deixar o problema com o maior número de informações possíveis afim de que possa ser entendido e resolvido. Quando o aluno faz na prática, ele aprender, lembra da fórmula e provavelmente se lembrará dessa experiência em uma outra situação parecida, " A fórmula tem, portanto, melhor probabilidade de ficar lembrada, o conhecimento do estudante consolida-se." (Polya, 1978 p.16)[25]

Nessa atividade, os alunos puderam sair da sala de aula e se dirigir para o local onde se encontrava a caixa de água para fazer as medições. Tiveram que relembrar os conceitos de razões trigonométricas no triângulo retângulo e usar os modelos para o cálculo de volumes de um prisma.

5.3.5 O problema dos cilindros

Pegue duas folhas de papel A4 e construa com cada uma delas um cilindro, construa um deles juntando os dois lados maiores, e o outro juntando os dois lados menores. Se fosse encher cada cilindro com grãos, arroz por exemplo, em qual deles caberia mais? Porque isso acontece?

Nesta situação problema os alunos montaram, com duas folhas de papel A4, dois cilindros, conforme a orientação do professor para responder a proposta acima, depois elaboraram uma situação problema para atividade, conforme figura 13.

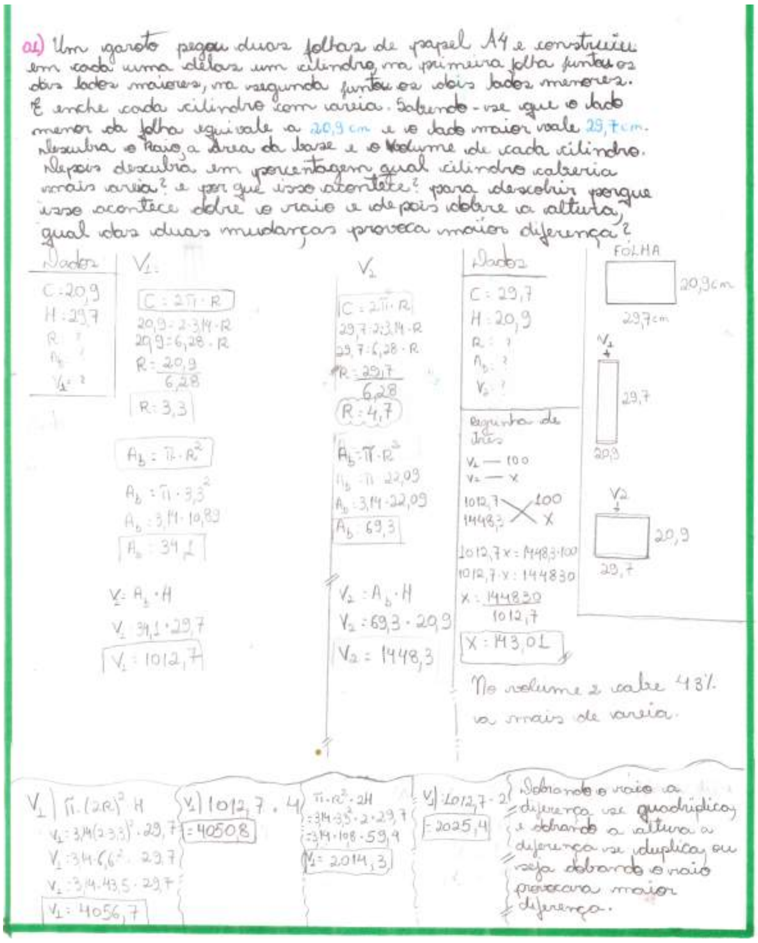


Figura 13: O problema dos cilindros

Observe nesse problema a preocupação que o aluno tem em justificar o porquê da diferênça de volumes, o que ocorre se dobrar a base ou dobrar a altura? É nessa observa cão que se encontra o real problema. Esse tipo de observação só ocorre se o aluno for motivado a fazê-la, e a motivação está nesse tipo de atividade, isto é, quando o aluno escreve o problema, tenta também encontrar as soluções através de suas indagações e observações. Nesse momento, o papel do professor será observar e orientar, baseando-se nas perguntas que os alunos farão.

6 Análise da produção escrita dos estudantes

Neste capítulo apresentamos a análise da produção escrita dos estudantes na proposta deste trabalho, isto é, ao propor os problemas, de forma falada, problemas levantados pelos alunos no seu ambiente escolar e comunidade, os alunos tiveram que escrever a situação problema em forma de um problema matemático.

Quando pensamos em trabalhar com a resolução e escrita de problemas pelos alunos, não conhecíamos a metodologia da Aprendizagem Baseada em Problemas. Estudando um pouco essa metodologia, que hoje é pouco difundida no Brasil, apenas em algumas Universidades vemos seu uso e percebemos muita semelhança com que fizemos em sala de aula, apesar de não trabalharmos com todas as características da ABP, conseguimos, na proposta deste trabalho, identificar sua característica principal: a aprendizagem por meios de problemas, na maioria das vezes dentro do contexto do aluno, centrada no aluno, com pouca participação do professor, na maioria das vezes atuando como um orientador, facilitador da aprendizagem e sempre questionando as indagações dos alunos.

Acreditamos que todo método de aprendizagem é passível de adequação para as várias áreas do conhecimento e os vários níveis de ensino que existem, desde que se mantém sua essência. Trabalhar com a escrita e resolução de problemas na proposta deste trabalho manteve a essência do método da ABP.

Na proposta apresentada neste trabalho, os problemas foram apresentados aos alunos de várias maneiras: problemas apenas falado, por meio da participação dos alunos no que se refere as indagações dos problemas que geralmente encontravam em sua comunidade; através de jogos e através do uso do computador, estes últimos propostos, em grande parte, pelo professor em forma de perguntas e apresentado neste trabalho como sugestões de atividades para serem aplicadas em sala. Na aplicações dessa metodologia em minha sala de aula, os alunos participaram de forma efetiva e colaborativa, estudando e resolvendo os problemas além de fornecerem de forma escrita os problemas que resolveram.

A elaboração escrita dos problemas de matemática pelos alunos teve o objetivo de verificar como os estudantes levantam os questionamentos que podem ajudá-los a entender as situações problemas propostas, pois ao escrever, elaborar problemas matemáticos e resolvê-los, os alunos estarão indagando sobre o enunciado, os dados dos problemas, o que precisará para solucioná-los, os conhecimentos que irão usar, os que devem adquirir e que caminho deverá seguir para chegar na sua solução.

6.1 Descrição das aulas

6.1.1 As aulas do 1º momento

No primeiro momento procuramos fazer uma avaliacão diagnóstica com os alunos do 2º e 3º ano com o intúito de verificar as reacões dos alunos frente a metodologia de escrita e resolução de problemas.

Foi pedido aos alunos que elaborassem situações problemas. Convém ressaltar que, a princípio, não ficou definido os conteúdos que os alunos deveriam abordar. A partir dessa avaliação, elaboramos uma sequencia didática de problemas que foram aplicadas às mesmas turmas de alunos. Os estudantes foram orientados a buscar diferentes formas de resolução para as situações problemas.

Essas atividades foram propostas pelo professor e também pelos alunos ao levantarem situacões problemas dentro da realidade que os cercavam.

Em todas aulas procurou-se incentivar a participacão dos estudantes na elaboracão da mesma seguindo os seguintes passos:

1- Escolher O Tema

O tema foi proposto pelo professor, mas outras vezes pelo grupo de alunos, através de seus interesses ou mesmo por uma situação problema observada pelo professor e que faz parte da vivência do aluno. Foi importante conhecer o ambiente de trabalho, a comunidade escolar, o comércio, o modo de viver das pessoas, isso favoreceu o levantamento de temas que contribuiram com o conteúdo que pretendíamos trabalhar.

2- Pesquisando a solução do problema

Nesse momento procurou-se buscar justificativas da escolha do tema, sua relevância. Os estudantes puderam aprofundar os conhecimentos e adquirir novos conceitos, além de pesquisarem e debaterem soluções para os problemas.

3- Levantando os problemas

Nesse passo o professor agiu como mediador, o orientador do aluno na elaboração do problema matemático a partir da pesquisa levantada. Smole et all (2001)[32] destacam que o desenvolvimento da capacidade de articular os dados e formular problemas originados da situação pesquisada se constitui em valor formativo e atitudinal de incomparável significado educativo e complementam dizendo " construir no estudante a capacidade de levantar e propor problemas advindo dos dados coletados mediada pelo professor é, sem dúvida, um privilégio educativo" .2001, p.152)

4- Resolvendo os problemas

Nesse passo os alunos buscaram as soluções para as situacões problemas levantadas, buscaram os conhecimentos adquiridos bem como aplicaram os novos conhecimentos, debateram entre si e criticaram as respostas obtidas, depois elaboraram sua própria situacão problema a partir dos dados e das solucões apresentadas. Nesse passo, os alunos, em alguns momentos, não lembraram de alguns conceitos e tiveram que buscá-los em atividades extra classe.

Os passos acima foram abordados nas cocepçõe da ABP quando consideramos que a escolha do tema pudessem contemplar os objetivos de aprendizagem propostos por professor e aluno. O segundo passo se identificou na caracteristica da ABP de o estudante buscar os conhecimentos que possuiam e estabelecer as próximas metas para que o problema fosse resolvido. No quarto passo identificamos a atuação do professor frente ao método da ABP, pois suas ações foram de orientação para que os estudantes buscassem os conhecimentos necessários para a resolução do problema. No último passo, os estudantes resolveram os problemas e escreveram na forma escrita uma situação para o mesmo, debateram entre si os resultados obtidos e buscaram, extra classe, alguns conceitos de estatística, representação gráfica de dados, conceitos de prismas e cilindros, suas áreas e volumes.

6.2 Estratégia metodológica

O procedimento metodológico adotado foi desenvolvido por uma perspectiva qualitativa de cunho interpretativo. A intenção foi fazer algumas leituras por meio da produção escrita dos estudantes ao resolverem e elaborarem o enunciado para alguns problemas levantados de forma falada em sala.

Foi feita uma análise textual discursiva em torno da análise de dados bastante usada em análise de pesquisas qualitativas, a análise de discurso. A análise textual discursiva,

> *Pode ser compreendida como um processo auto organizado de construção de compreensão em que novos entendimentos emergem de uma sequência recursiva de três componentes: a desconstrução do corpus, a categorização, e o captar de novos emergentes em que nova compreensão é comunicada e validada. (Moraes,2003. P.192)[23]*

Analisamos a produção escrita de alunos contida nos problemas do Cilindro, no problema das embalágens de sabão em pó, no problema do reservatório de água e do problema consciência do uso do celular, onde os 3 primeiros foram aplicados a alunos do 2º ano do Ensino Médio e o último a alunos do 3º ano do Ensino Médio. Contamos com a participação de 56 alunos para o problema do cilindro, 61 para o problema das embalágens de sabão em pó, 59 participaram do problema do reservatório de água e 30 alunos responderam ao problema uso do celular em sala, depois de aproximadamente 6 meses foi feito o segundo momento do trabalho, os enunciados, sem a resposta, dos problemas do cilindro, das embalágens de sabão e o problema do reservatório de água, elaborados pelos alunos, foram digitados e passado novamente aos 30 alunos, que agora estavam no 3º ano do Ensino Médio e que participaram da atividade anterior, para verificar quais deles conseguiam resolver a situação problema proposta.

Para a análise, agrupamos os trabalhos, em cada série, de acordo com os critérios: a) Entendeu o problema proposto na forma falada; b) Resolveu o problema; c) Escreveu um enunciado para o problema. Buscando identificar as estratégias usadas pelos alunos para resolver e escrever o problema utilizamos a expressão composta por três palavras: Entende– Resolve– Escreve. Num segundo momento, escolhemos aleatoriamente 30 alunos do 3º ano do Ensino Médio para resolver os mesmos problemas propostos, agora, na forma escrita. Esses alunos forma separados em dois grupos, onde um dos grupos foi composto por 15 alunos que entenderam, resolveram e escreveram uma situação problema no primeiro momento e o outro por 15 alunos que resolveram mas não escreveram a situação problema.

6.3 Sobre a produção escrita dos alunos do 2º ano do Ensino Médio

6.3.1 Problema do reservatório de água

1º Momento: No problema proposto foi pedido que os alunos usassem um pedaço de barbante e o astrolábio, feito de tubo de caneta e transferidor, para calcular o volume do reservatório de água em forma cúbica, que se encontrava no alto de um suporte feito de concreto.

Os trabalhos foram agrupados em trés grupos da seguinte maneira: O grupo 1 foi composto por estudantes que entenderam, resolveram e escreveram a situação problema proposta, o grupo 2 foi composto pelos alunos que entenderam e resolveram, mas não escreveram a situação problema proposta e o grupo 3 foi composto pelos estudantes que não resolveram e nem escreveram a situação problema.

No grupo 1, tivemos 26 alunos que coletaram os dados e resolveram corretamente o problema usando as razões trigonométricas e a fórmula para o volume de um cubo, nesse grupo os alunos conseguiram escrever de forma adequada, clara e objetiva, os dados em forma de uma situação problema.

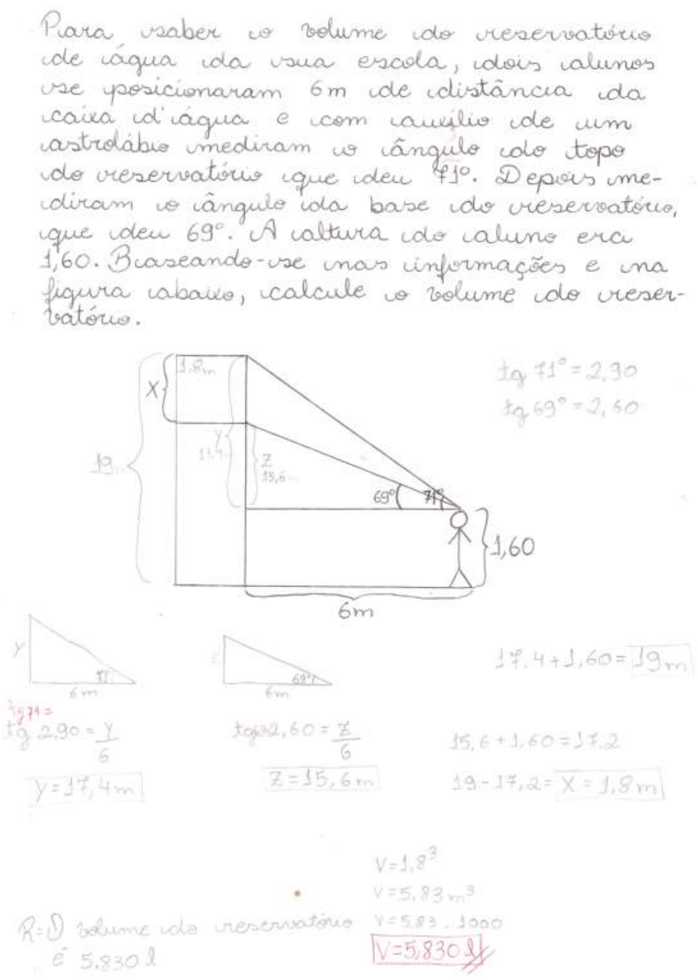
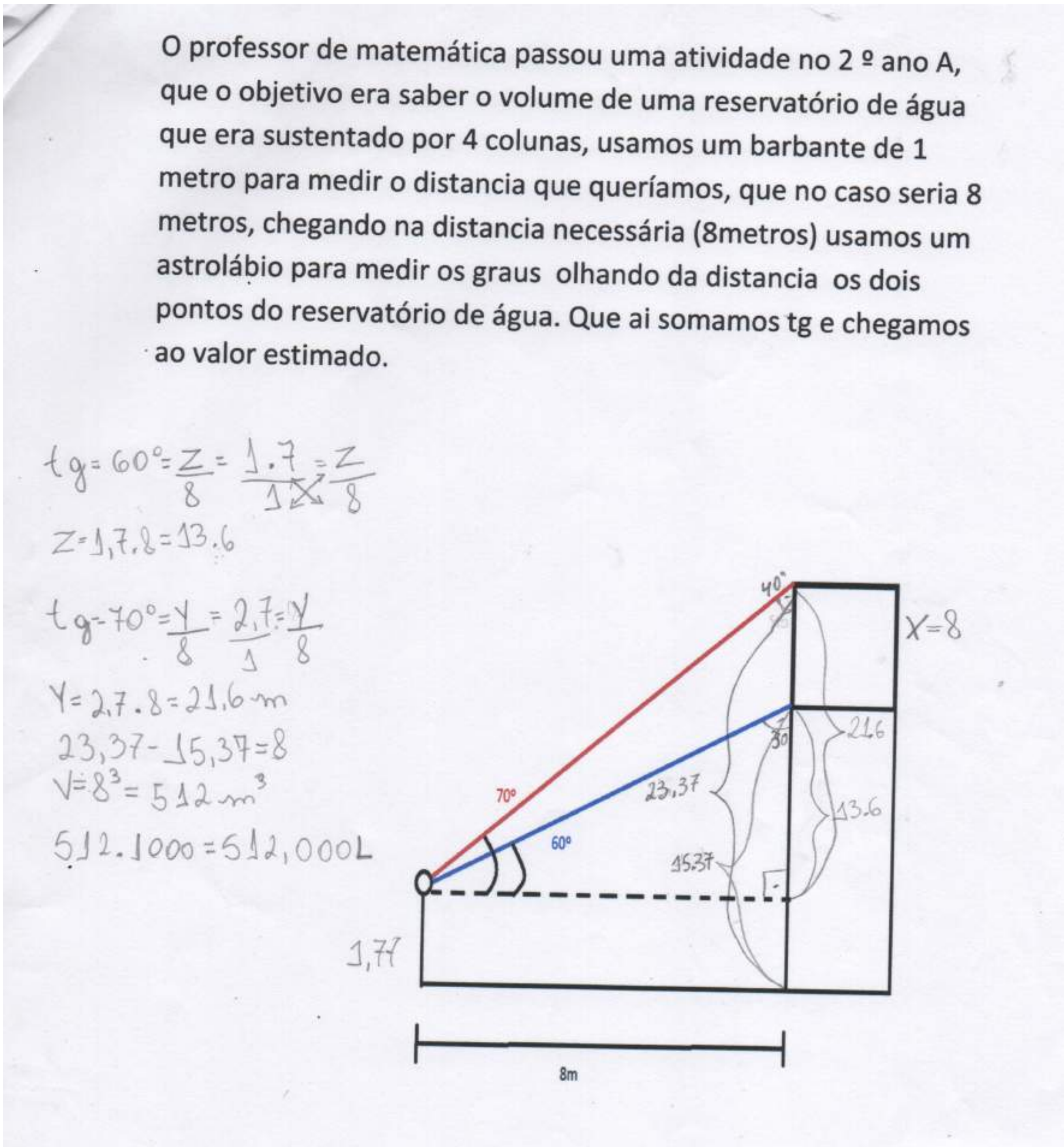


Figura 14: Reservatório de água- grupo1

No grupo 2, tivemos 23 alunos que resolveram o problema mas não conseguiram escrever de forma adequada, clara e objetiva, um enunciado que descrevesse a situação problema.(figura 15)



O professor de matemática passou uma atividade no 2 º ano A, que o objetivo era saber o volume de uma reservatório de água que era sustentado por 4 colunas, usamos um barbante de 1 metro para medir o distancia que queríamos, que no caso seria 8 metros, chegando na distancia necessária (8metros) usamos um astrolábio para medir os graus olhando da distancia os dois pontos do reservatório de água. Que ai somamos tg e chegamos ao valor estimado.

$tg = 60° = \frac{Z}{8} = \frac{1.7}{1} = \frac{Z}{8}$

$Z = 1,7.8 = 13.6$

$tg - 70° = \frac{Y}{8} = \frac{2,7}{1} = \frac{Y}{8}$

$Y = 2,7.8 = 21,6\ m$

$23,37 - 15,37 = 8$

$V = 8^3 = 512\ m^3$

$512.1000 = 512,000L$

Figura 15: Reservatório de água- grupo2

No grupo 3, tivemos 10 alunos que não conseguiram resolver matematicamente o problema, e não conseguiram escrever de forma clara e objetiva a situação problema, infere-se que esses alunos não aprenderam os conceitos de volume do cubo e de razões trigonométrica, envolvidos na situação problema.(figura 16)

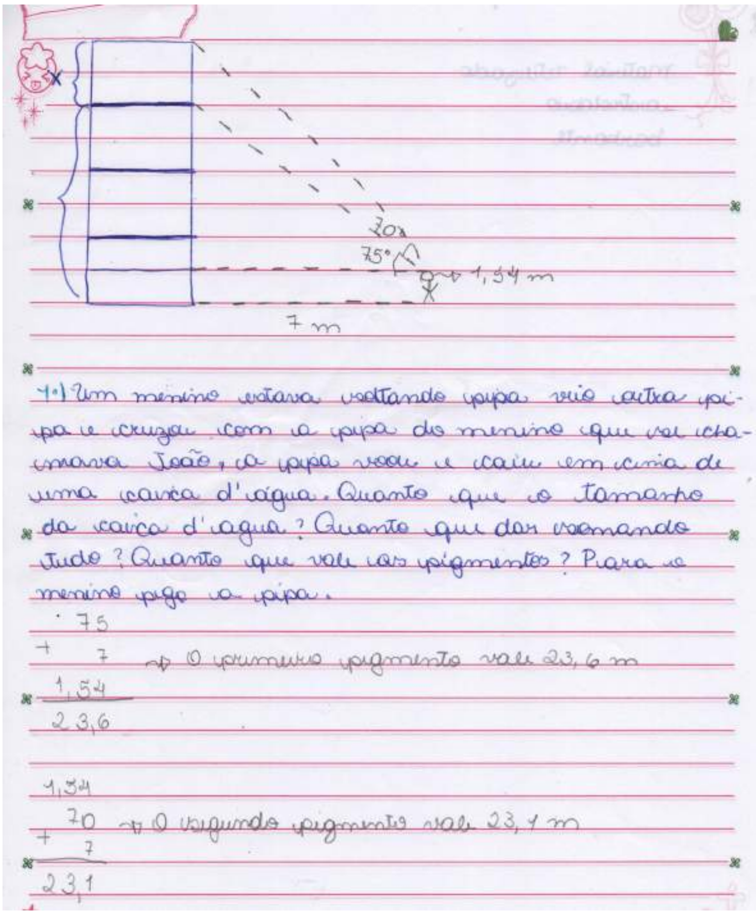
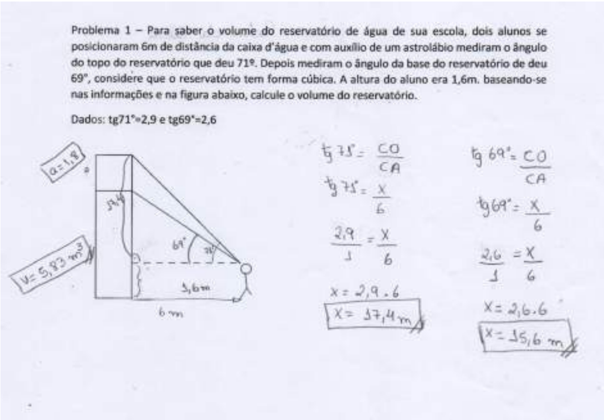


Figura 16: Reservatório de água- grupo3

2º Momento: Nesse momento digitamos as produções escritas dos alunos e pedimos que resolvessem o problema novamente, só que agora, na forma escrita por eles. Nessa atividade tivemos 15 alunos do grupo 1 e 15 do grupo 2 descritos no 1º momento.

No grupo 1 tivemos 10 alunos que resolveram o problema de forma correta, isto é, conseguiram usar a razão trigonométrica correta para calcular as alturas, fizeram a diferença entre os dois resultados, encontrando o valor da aresta do cubo, depois usaram a fórmula do volume de um cubo para responder ao problema. Nesse grupo tivemos um aluno que conseguiu usar a fórmula para calcular uma das alturas, mas não conseguiu interpretar a figura para representar um dos ângulos, também não calculou o Volume. Outras 4 atividades foram deixadas em branco.



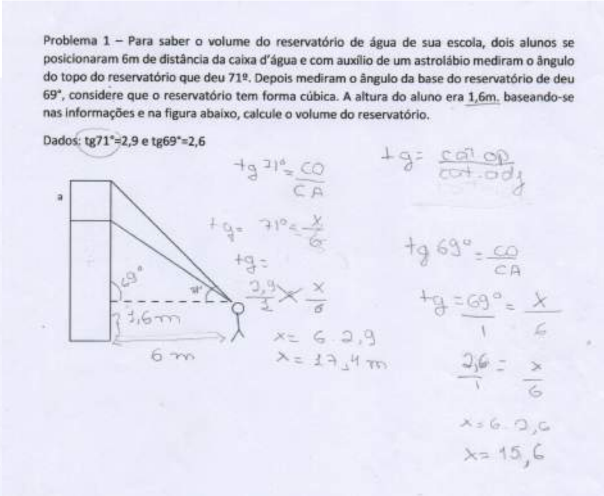
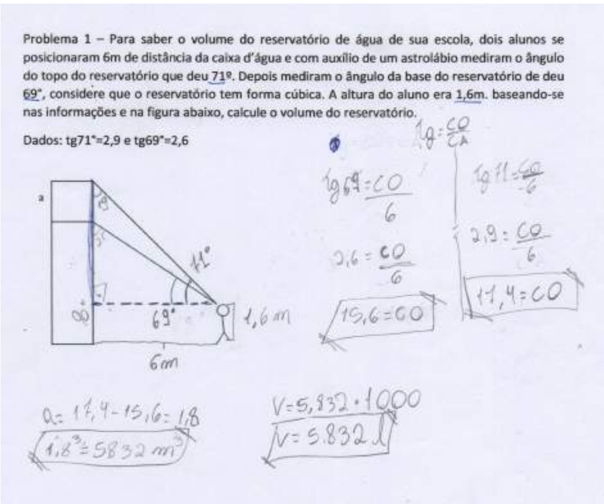


Figura 17: Reservatório de água– 2 momento

Figura 18: Reservatório de água–2 momento

No grupo 2 , tivemos 3 alunos que interpretaram e resolveram o problema corretamente, 4 alunos interpretaram corretamente mas apresentaram alguns erros no desenvolvimento do cálculo e 8 alunos não souberam resolver ou deixaram em branco.



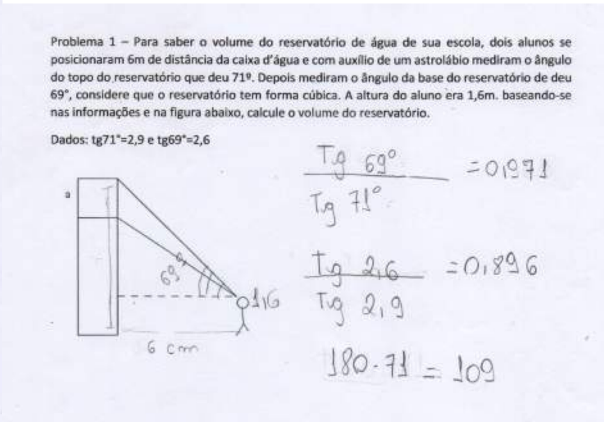


Figura 19: Reservatório de água–2 momento-Grupo2

Figura 20: Reservatório de água–2 momento-Grupo2

Observando e comparando o primeiro e segundo momento, vemos que o grupo 1 foi o grupo que melhor resolveu o problema do reservatório de água, infere–se disso que, ao escrever a proposta os alunos puderam lembrar com mais facilidade das fórmulas e dos passos de solução, isto é, os alunos que conseguiram escrever os dados em forma de uma situação problema tiveram maior desempenho do que os alunos que não conseguiram escrever a situação problema.

6.3.2 Problema das embalagens de sabão em pó

1° Momento: Nesse problema foi proposto, novamente de forma falada, que os alunos verificassem os motivos que levou uma empresa de sabão em pó atuante no mercado a trocar sua embalagem por outra com a mesma forma, mas com dimensões diferentes, bem como analisar a economia de material numa população de 200.000.000 de habitantes. Tivemos a participação de 61 alunos distribuídos em 3 grupos, da seguinte maneira:

No grupo 1, temos 32 alunos que resolveram o problema de forma correta, usando a fórmula que dá a área total de um paralelepípedo, conseguiram também calcular a quantidade total de material economizado. Os alunos desse grupo conseguiram escrever, com todos os dados que coletaram e de forma clara e objetiva, uma situação que representassem o problema .

No grupo 2, temos 22 estudantes que conseguiram resolver o problema de forma correta, usando a fórmula que dá a área total de um paralelepípedo. Nesse grupo tivemos erros no cálculo com números decimais e a proposta escrita pelos alunos foram dadas de forma incompleta, isto é, faltando muitos dos dados que foram coletados por eles, e de forma incoerente. Isso pode levar esses estudantes a não perceberem todos os dados de um problema proposto a eles na forma escrita.

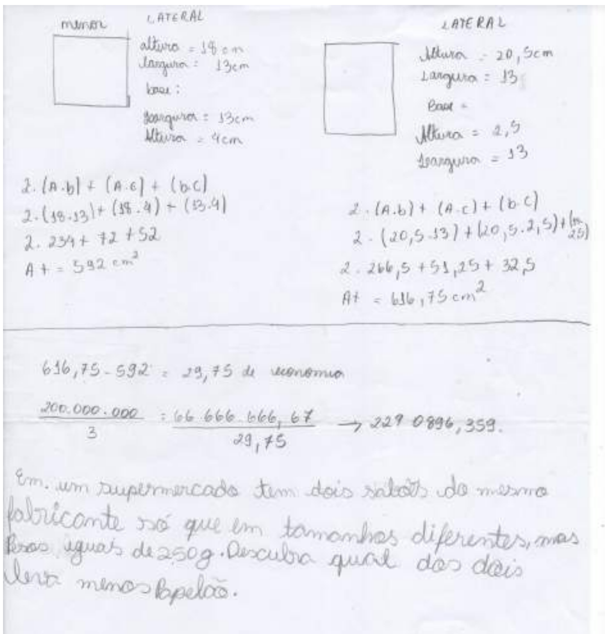
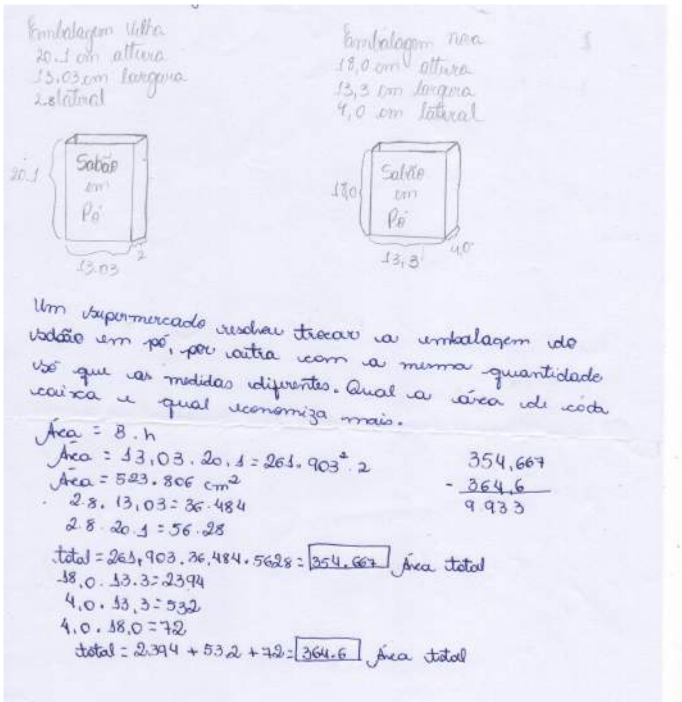


Figura 21: Embalagens- grupo2

Na figura 21, acima, temos um exemplo de um aluno do grupo 2 que usou a fórmula que dá o volume do paralelepípedo de forma incorreta, o que o fez errar na operações com os números, errou também ao calcular a economia total de material economizado ao dividir um terço da população por 29,75, o correto seria multiplicar. Ao escrever a situação problema, o aluno não apresentou todos os dados necessários e por ele coletados.

No grupo 3, temos 7 alunos que não conseguiram resolver e nem propor uma forma escrita para o problema. Nesse grupo os alunos apresentaram maior dificuldade em usar as ferramentas matemáticas para calcular a área total de um paralelepípedo, também não conseguiram escrever de forma clara uma situação problema. Infere-se que esses alunos não possuem os conhecimentos necessários para a resolução do problema, bem como não conseguem expressar na forma escrita a sequência de ideias necessárias para a formulação de um problema matemático, dessa forma poderão apresentar dificuldades para coletar informações em um problema proposto na forma escrita.


Embalagem Velha
20.1 cm altura
13.03 cm largura
2.8 lateral

Embalagem nova
18,0 cm altura
13,3 cm largura
4,0 cm lateral

Sabão em Pó
20.1
13.03
2

Sabão em Pó
18,0
13,3
4,0

Um supermercado resolveu trocar a embalagem do sabão em pó, por outra com a mesma quantidade só que as medidas diferentes. Qual a área de cada caixa e qual economiza mais.

Área = B . h
Área = 13,03 . 20,1 = 261.903² . 2
Área = 523.806 cm²
2.8 . 13,03 = 36.484
2.8 . 20.1 = 56.28
total = 261,903 . 36,484 . 5628 = $\boxed{354.667}$ Área total
18,0 . 13.3 = 2394
4,0 . 13,3 = 532
4,0 . 18,0 = 72
total = 2394 + 532 + 72 = $\boxed{364.6}$ Área total

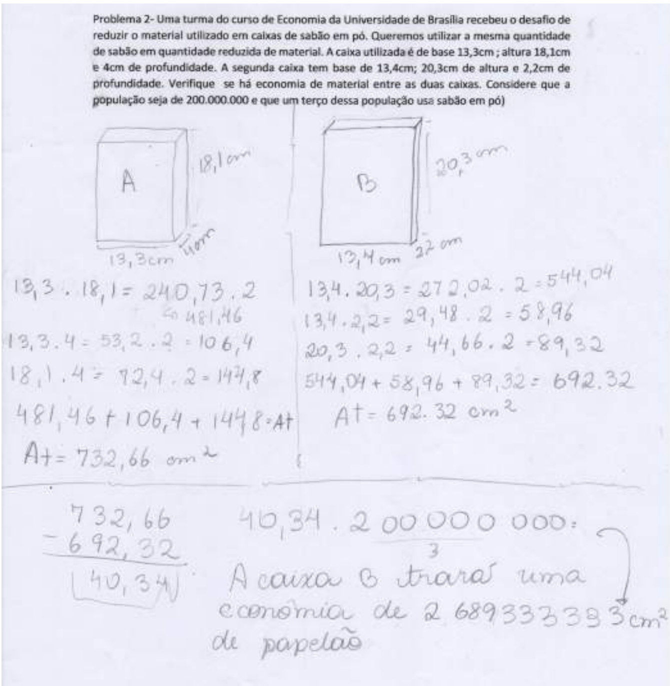
354,667
- 364,6
9 933

Figura 22: Embalagens- grupo 3

Comparando os três grupos, temos que quase metade dos estudantes não conseguiram propor uma situação problema para proposta apresentada.

2º Momento: Nesse momento digitamos as produções escritas dos alunos e pedimos para que resolvessem o problema novamente, só que agora, na forma escrita. Nessa atividade tivemos 15 alunos do grupo 1 e 15 dos grupos 2 e 3, descritos no 1º momento.

Dos 15 alunos do grupo 1 que conseguiram escrever uma situação problema para a proposta das embalágens de sabão, 3 conseguiram resolver a situação problema na forma escrita, isto é, conseguiram calcular a área total de cada caixa, tirar a diferença e multiplicar por um terço da população, 6 alunos conseguiram resolver uma parte do problema na forma escrita usando a fórmula da área total de um paralelepípedo, acharam a diferença de material, porém muitos não conseguiram determinar de maneira correta a economia de material para uma população de 200.000.000 sendo um terço dela usuários desse sabão. Apesar disso, esses alunos conseguiram interpretar os dados do problema, já que conseguiram achar a diferença de material de cada caixa. Tivemos também 6 atividades que foram deixadas em branco.


Problema 2- Uma turma do curso de Economia da Universidade de Brasília recebeu o desafio de reduzir o material utilizado em caixas de sabão em pó. Queremos utilizar a mesma quantidade de sabão em quantidade reduzida de material. A caixa utilizada é de base 13,3cm ; altura 18,1cm e 4cm de profundidade. A segunda caixa tem base de 13,4cm; 20,3cm de altura e 2,2cm de profundidade. Verifique se há economia de material entre as duas caixas. Considere que a população seja de 200.000.000 e que um terço dessa população usa sabão em pó)

A 18,1cm 4cm 13,3cm

B 20,3cm 2,2cm 13,4cm

13,3 . 18,1 = 240,73 . 2 = 481,46
13,3 . 4 = 53,2 . 2 = 106,4
18,1 . 4 = 72,4 . 2 = 144,8
481,46 + 106,4 + 144,8 = At
At = 732,66 cm²

13,4 . 20,3 = 272,02 . 2 = 544,04
13,4 . 2,2 = 29,48 . 2 = 58,96
20,3 . 2,2 = 44,66 . 2 = 89,32
544,04 + 58,96 + 89,32 = 692.32
At = 692.32 cm²

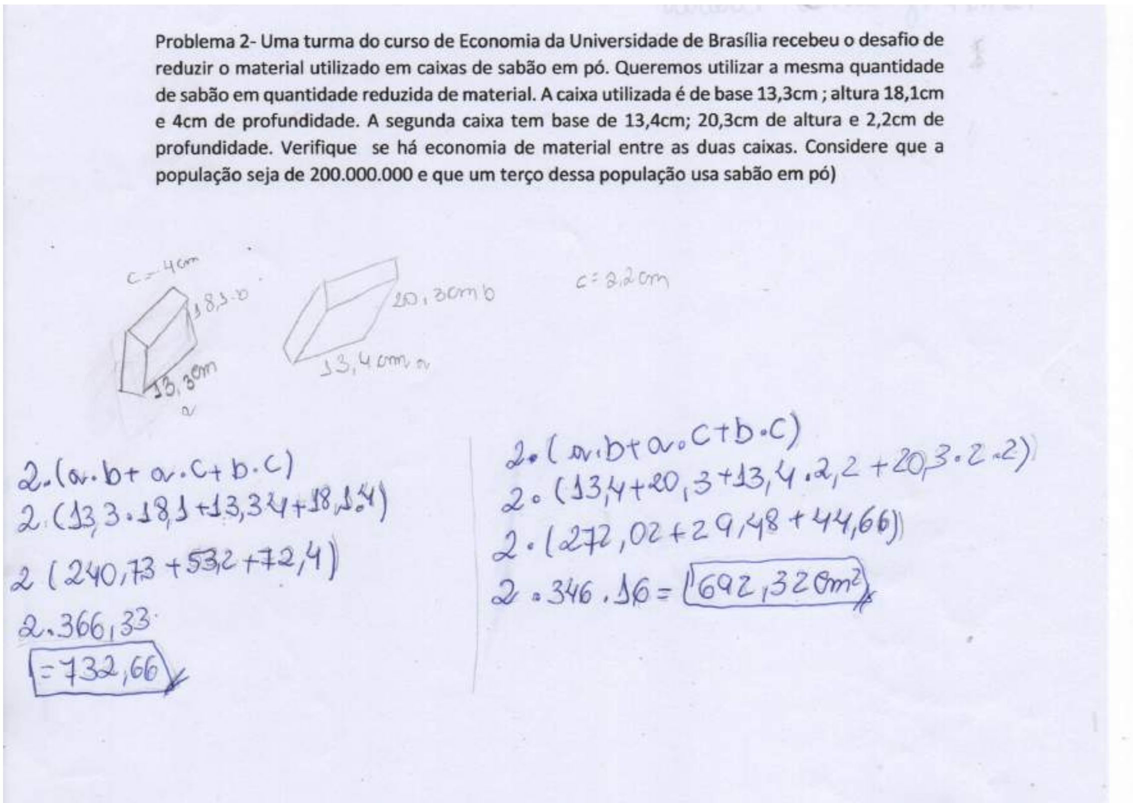
732,66
− 692,32
40,34

40,34 . 200 000 000 : 3

A caixa B trará uma economia de 2 689333333 cm² de papelão

Figura 23: Embalagens-2 momento-grupo 1

Dos 15 alunos do grupo 2 , tivemos 10 alunos que conseguiram apenas calcular as áreas totais de cada caixa. Tivemos 5 alunos que não conseguiram resolver o problema, deixando em branco.


Problema 2- Uma turma do curso de Economia da Universidade de Brasília recebeu o desafio de reduzir o material utilizado em caixas de sabão em pó. Queremos utilizar a mesma quantidade de sabão em quantidade reduzida de material. A caixa utilizada é de base 13,3cm ; altura 18,1cm e 4cm de profundidade. A segunda caixa tem base de 13,4cm; 20,3cm de altura e 2,2cm de profundidade. Verifique se há economia de material entre as duas caixas. Considere que a população seja de 200.000.000 e que um terço dessa população usa sabão em pó)

c=4cm
20,30cm b
13,4cm a
c=2,2cm
13,3cm a

2.(a.b+a.c+b.c)
2.(13,3.18,1+13,3.4+18,1.4)
2(240,73+53,2+72,4)
2.366,33
=732,66

2.(a.b+a.c+b.c)
2.(13,4+20,3+13,4.2,2+20,3.2,2)
2.(272,02+29,48+44,66)
2.346,16=692,32cm²

Figura 24: Embalagens-2 momento-grupo 2

Novamente o grupo com maior desempenho nos problemas foi o grupo que conseguiu escrever uma situação problema com os dados coletados.

6.3.3 O problema do cilindro

No problema do cilindro foi proposto, a 56 alunos do 2º ano do Ensino Médio, que pegassem duas folhas de papel A4 e formassem dois cilindros, um deles juntando os lados maiores e o outro, juntando os lados menores, depois foi perguntado a eles qual dos cilindros teria maior volume, e o porquê disso.

1º Momento: Nessa proposta tivemos 3 grupos compostos da seguinte maneira:

No grupo 1 tivemos 18 alunos que conseguiram resolver o problema, isto é, calcularam o raio dos dois cilindros através da fórmula que dá o comprimento de uma circunferência de raio r, depois calcularam o volume dos dois cilindros; verificaram o quanto, em percentual, cabe a mais e tentaram justificar o porquê dessa diferença. Esses alunos conseguiram escrever uma situação problema para a proposta.

No grupo 2, tivemos 24 alunos que conseguiram resolver o problema proposto de forma correta, como no grupo 1, mas nesse grupo não tivemos alunos escrevendo uma situação problema.

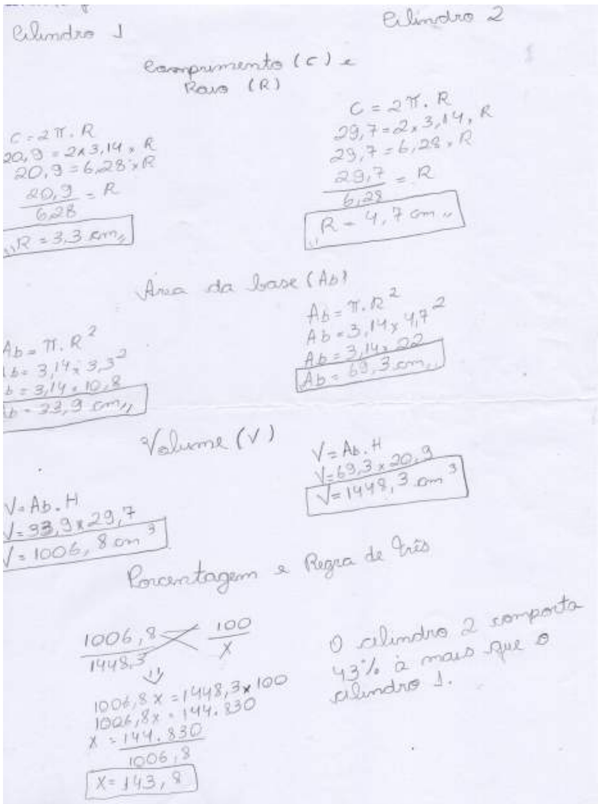


Figura 25: O problema do cilindro-grupo 2

No grupo 3, tivemos 14 alunos que apresentaram alguns cálculos, como o da área do círculo e o cálculo do raio, não calcularam o volume de cada cilindro de forma correta e não conseguiram propor uma situação problema ou ao propor uma situação problema não apresentaram os dados coletados de forma clara e coerente na forma escrita, além de paresentarem erros no cálculo de potências, como na figura abaixo.

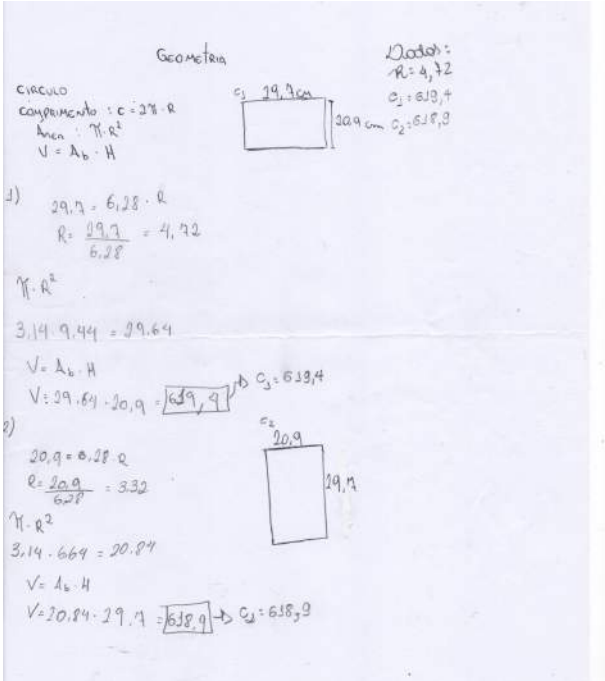
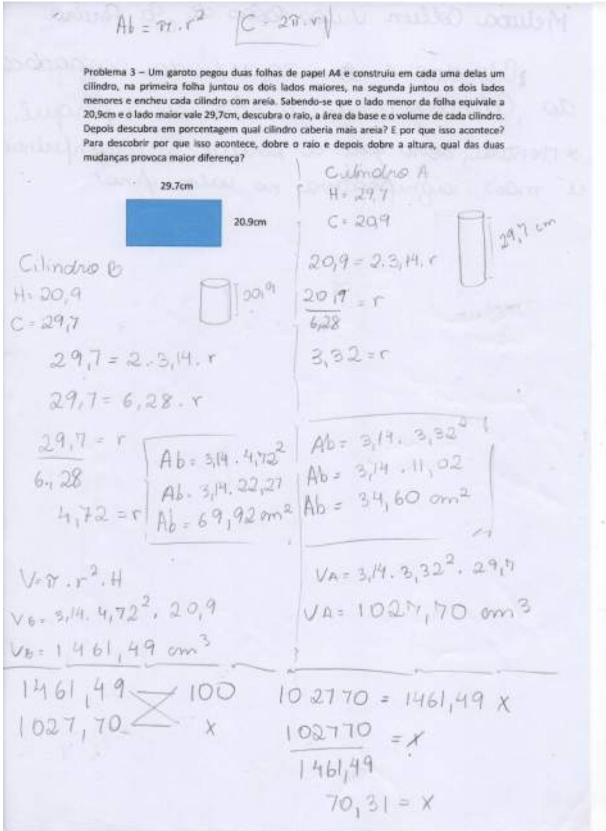


Figura 26: O problema do cilindro-grupo 3

2° Momento: Nesse momento digitamos as produções escritas pelos alunos e pedimos para que resolvessem o problema novamente. Participaram dessa atividade 16 alunos do grupo 1 e 16 alunos do grupo 2 e 3 acima.

Dos 16 alunos do grupo 1, tivemos 3 alunos que conseguiram interpretar e resolver o problema determinando o raio dos dois cilindros formados e calculando o volume, mas erraram na determinação do percentual da diferença de volumes entre eles, 7 alunos conseguiram determinar os raios dos dois cilindros, mas erraram no cálculo do volume, 5 alunos não resolveram o problema.



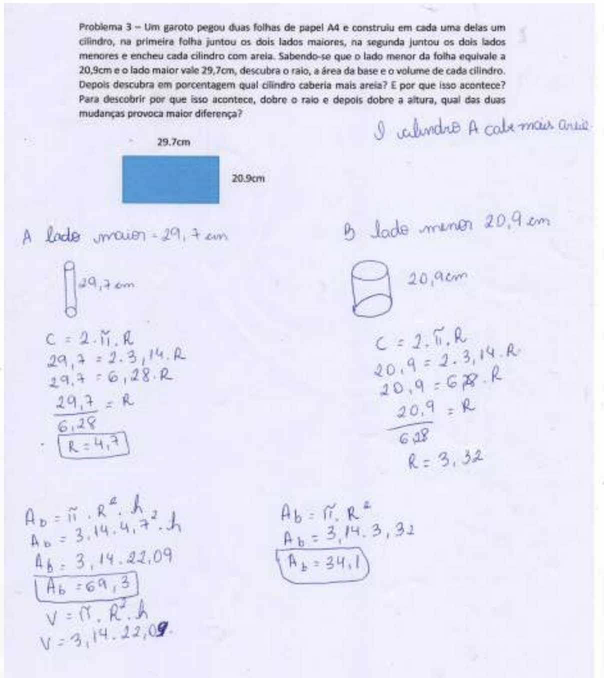
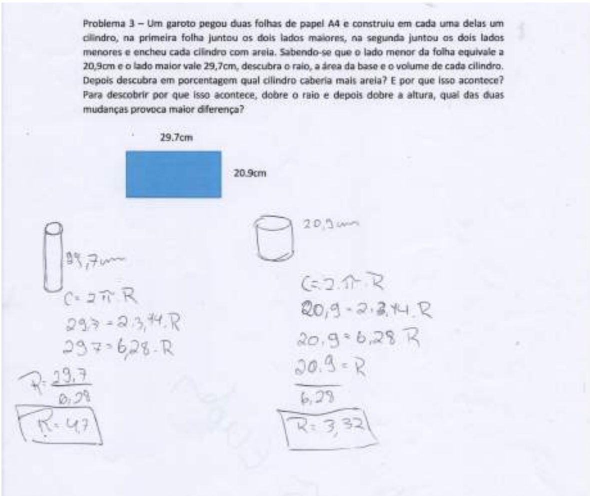


Figura 27: O problema do cilindro–2 momento-Grupo1

Figura 28: O problema do cilindro– 2 momento-Grupo1

Dos 16 alunos dos grupos 2 e 3 acima, tivemos 2 alunos que só conseguiram determinar o raio de um ou dos dois cilindros, 8 alunos tentaram calcular o volume sem calcular as medidas dos raios, não entenderam o problema ou não conseguiram visualizar os valores nos cilindros da situação problema, ou não souberam identificar o comprimento da circunferência como sendo as dimensões da folha de papel A4, 6 alunos deixaram o problema em branco.



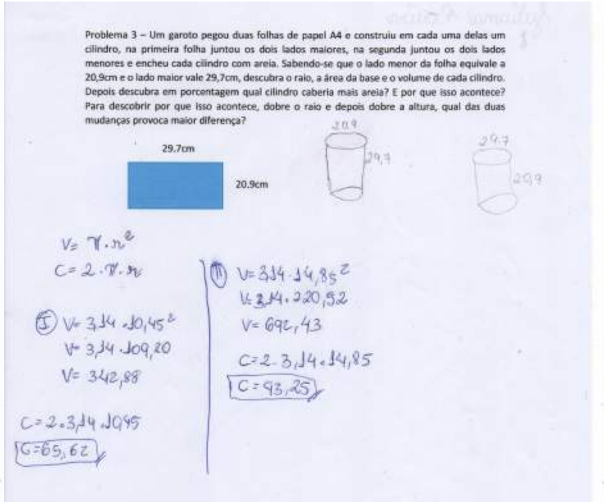


Figura 29: O problema do cilindro– 2 momento-Grupo2

Figura 30: O problema do cilindro– 2 momento-Grupo2

6.4 Sobre a produção escrita dos alunos do 3º ano do Ensino Médio

O problema proposto foi para que os alunos verificassem qual a frequência do uso do celular em sala de aula. Apresentamos a seguir dois grupos construídos a partir da produção escrita dos alunos.

No Grupo 1, temos 12 alunos que conseguiram coletar os dados, apresentá–los numa tabela, apresentar os gráficos e os cálculos matemáticos corretamente, resolver o problema e apresentá-lo na forma escrita. Esses alunos demonstraram saber interpretar os resultados apresentados e a buscar as informações de forma autônoma.

No grupo 2, temos 18 alunos que só resolveram o problema, isto é, coletaram os dados, apresentaram os gráficos de forma correta, mas não souberam usar esses dados na elaboração de uma situação problema, demonstraram autonomia na busca pelas informações.

Não foi apresentado o segundo momento para essa categoria devido ao fato que esses estudantes não se encontravam mais na escola onde desenvolvemos as atividades.

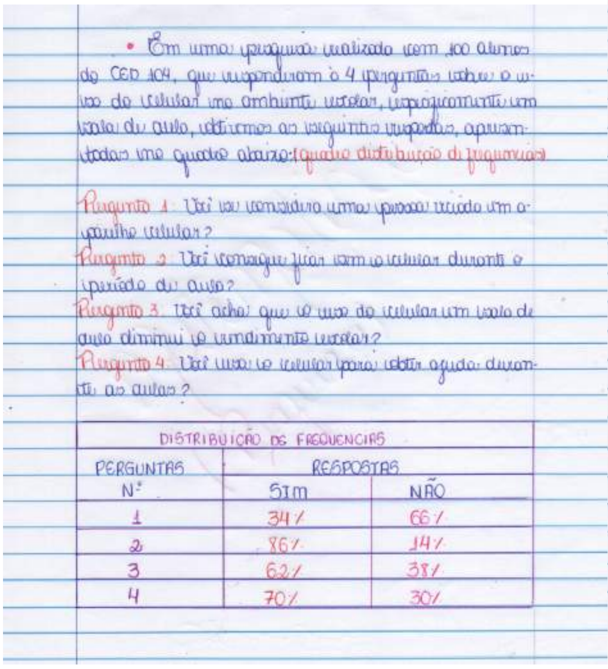


Figura 31: produção escrita - 3º Ano EM

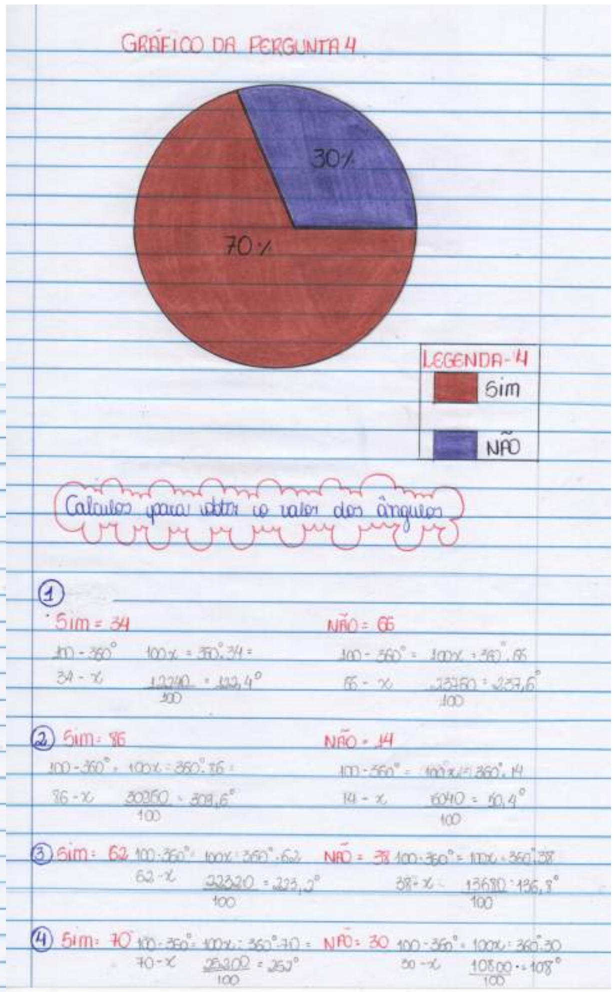


Figura 32: produção escrita - 3º EM

Infere-se do que foi apresentado pelos dois grupos que a proposta de problema falado provoca maior participação na resolução de problemas pelos estudantes, pois os mesmos se envolveram para resolver uma situação problema levantada por eles mesmo em sua comunidade. 40% dos estudantes elaboraram a situação problema na forma escrita o que representa um percentual muito bom de aceitação da proposta, além disso, os dois grupos buscaram o conhecimento de forma autônoma e compartilharam informações desse conhecimento.

Figura 33: produção escrita - 3º EM

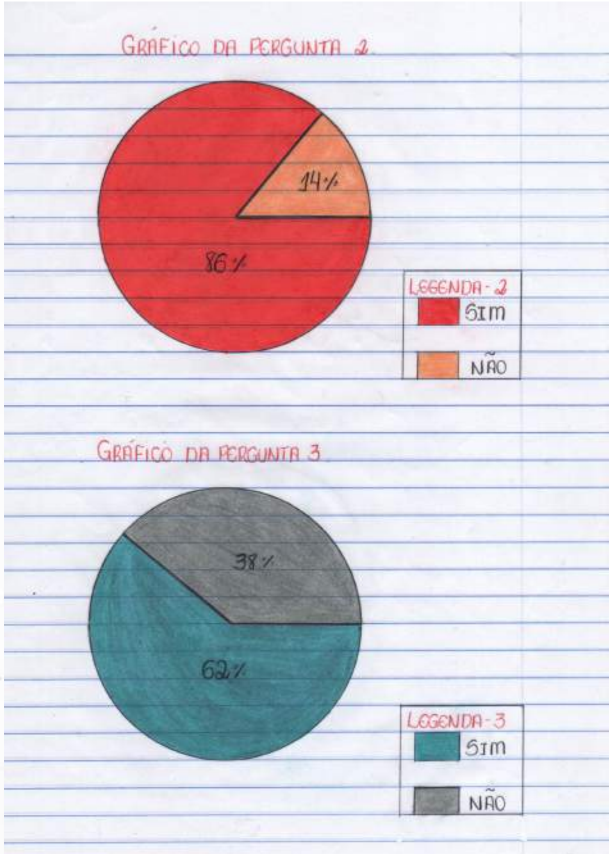


Figura 34: produção escrita - 3º EM

Em todas as atividades, a estratégia usada com os alunos que não entenderam, não resolveram ou não escreveram a situação problema na forma escrita, foi de orientação para que eles buscassem interagir entre si e compartilhar os conteúdos aprendidos, esperamos dessa forma poder contribuir com a prendizagem de todos os estudantes envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

No que se refere a análise feita na produção escrita dos estudantes, podemos inferir que:

Primeiro: A proposta apresentada teve uma boa aceitação dos alunos.

Segundo: No trabalho com a resolução e escrita de problemas pelos alunos, no problema das embalágens de sabão, do reservatório de água e no problema dos cilindros, os alunos que tiveram maior facilidade de lembrar de fórmulas, de interpretar e calcular, foram aqueles que conseguiram escrever uma situação problema na forma escrita.

Terceiro: Esses alunos conseguiram entender o problema na forma falada, a maioria conseguiu resolver o problema, usando as ferramentas matemáticas que dispunham, e muitos conseguiram escrever os dados coletados na forma de uma situação problema.

Quarto: Ao trabalhar os mesmos problemas na forma escrita, valoriza–se a produção escrita do estudante, fazendo com que tenham maior motivação para as próximas propostas.

Quinto: Resolver a situação problema na forma escrita, provocou nos alunos maior interesse em resolvê-los, pois sabiam que era um problema de sua autoria ou de autoria de seu colega.

Sexto- Os alunos que escreveram a situação problema, foram os que mais escreveram os procedimentos para resolvê-los na forma escrita, foram também os que alcançaram maior sucesso no que se refere ao lembrar das ferramentas matemáticas para resolver os problemas na forma escrita.

Sétimo: Os alunos que escreveram a situação problema, possuem maior habilidade de interpretação de textos matemáticos do que os alunos que não escreveram, pois de fato, foram os que mais interpretaram o que os problemas pediram. Esses alunos poderão apresentar maior facilidade na resolução de um problema matemático proposto a eles no livro didático de Matemática.

Por último, a análise feita nos permite inferir que a metodologia trabalhada busca resgatar no estudante interesse pela disciplina de Matemática, ajuda-o a escrever sobre Matemática e a trabalhar suas técnicas em resolver os problemas propostos, além de buscarem os conhecimentos matemáticos para resolver os problemas, o que nos permite identificar na proposta traços da Aprendizagem Baseada em Problemas, ABP, a saber:

– Os problemas foram apresentados sem apresentação da teoria;

– Os alunos debateram em grupos quais os conceitos que conheciam e quais conceitos deveriam aprender para resolver o problema;

– Pesquisaram os conceitos e conteúdos de forma autônoma e com a orientação do professor;

– Apresentaram os conhecimentos adquiridos em classe.

7 Indicando caminhos

Neste capítulo sugerimos duas atividades para trabalhar com alunos do Ensino Médio na proposta apresentada neste trabalho. Uma dessas atividades foi trabalhada em sala de aula com alunos do 1º ano do Ensino Médio a outra foi elaborada para aplicação no laboratório de Matemática.

7.1 A Torre de Hanói

O uso de jogos na resolução de problemas em matemática é uma metodologia que busca no estudante sua capacidade de argumentar, identificar padrões, fazer inferências, deduzir e estudar novos conceitos. Podem ser usados quando o professor deseja introduzir um novo conceito e aprofundar conceitos já vistos em sala. A escolha do jogo poderá ser feita pelo professor, observando o conceito que se pretende abordar com os alunos.

> *Claramente esta é mais uma abordagem metodológica baseada no processo de construção do conhecimento matemático do aluno através de suas experiências com diferentes situações problemas, colocadas aqui em forma de jogo. (D' Ambrosio,1989 p.12)[13]*

Nas atividades com jogos o professor poderá transmitir os conceitos afim de que os problemas propostos sejam resolvidos, mas deverá, na maioria das vezes, agir como incentivador, orientador para que o aluno busque, ou resgate, por conta própria, o conhecimento de que necessite.

> *Portanto, enfrentar e resolver uma situação problema não significa apenas a compreensão do que é exigido, a aplicação das técnicas ou fórmulas adequadas e a obtenção da resposta correta, mas, além disso, uma atitude de " investigação científica" em relação àquilo que está pronto. (Smole e Diniz, 2001 p.92)[32].*

A torre de hanoi[1] é um jogo usado nesse trabalho com o objetivo de despertar nos estudantes a capacidade de dedução, inferência e principalmente a autonomia na resolução

[1] Problemas adaptados do curso Brincando e aprendendo Matemática com a torre de hanói da professora Luzia Aparecida Palaro na X ECODEQ, 1998.

e a capacidade de argumentação em grupo. Para Roseira, Nilson Antonio, pagina 119, " o enfrentamento de situações problemáticas previsíveis ou imprevisíveis sempre possibilitará o alcance de novos estágios de equilíbrio, aglutinando novos e importantes elementos a seu processo de formação moral" . Os problemas da forma como foram direcionados nesse trabalho contribuem para essa formação autônoma e de trabalho em grupo. Além de resolver os vários problemas que aparecem durante o jogo, a proposta focou em várias perguntas direcionadas aos alunos a respeito do jogo afim de trabalhar, resgatar alguns conceitos como o de função, sequências e gráficos.

> *Do ponto de vista do conhecimento matemático, isso requer que nas práticas pedagógicas dos professores, não apenas no sentido geral das relações interpessoais, mas principalmente no que diz respeito às concepções acerca da matemática e de seu ensino, sejam privilegiadas atitudes de abertura ao diálogo, de valorização das contribuições individuais e coletivas dos alunos, e espaços para discussão, demonstração, refutação de suas ideias matemáticas.(Roseira, 2010, p.119)[30].*

Nesse sentido, a prática pedagógica do professor, quando focada na resolução de problemas,da forma como destacamos aqui, contribui para essa valorização, abertura do diálogo entre alunos e professores, alunos e alunos, como também contribui para uma apredizagem mais significativa.

7.1.1 Uma Lenda

Figura 35: A torre de Hanoi

" Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o grande criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamante. Em um dos bastões, em ordem crescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: – Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez e nunca permitindo que um disco maior fica acima de um disco menor. Quando terminarem essa tarefa e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá à pó e com um estrondo de trovões o mundo acabará."

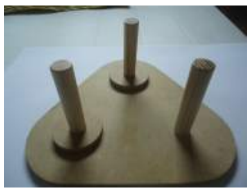
" Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de 1 disco por segundo." Em quanto tempo, segundo a lenda, o mundo acabará? Essa pergunta será respondida pelos alunos ao final da atividade proposta, na pergunta 9, Fig47.

A torre de Hanói é um brinquedo constituído por uma placa com três bastões fixos, tendo em um deles uma pilha de dez ou menos discos de tamanhos diferentes e dispostos em ordem crescente de tamanho. O jogo consiste em transferir todos os discos de um bastão para outro , movendo um disco de cada vez e não pondo o disco maior sobre o menor, sendo que o número de movimentos deve ser mínimo. Para responder a pergunta acima, vamos brincar com a torre de Hanói e trabalhar alguns conceitos de matemática envolvidos. Observe nas figuras abaixo, alguns movimentos para 1, 2 e 3 discos.

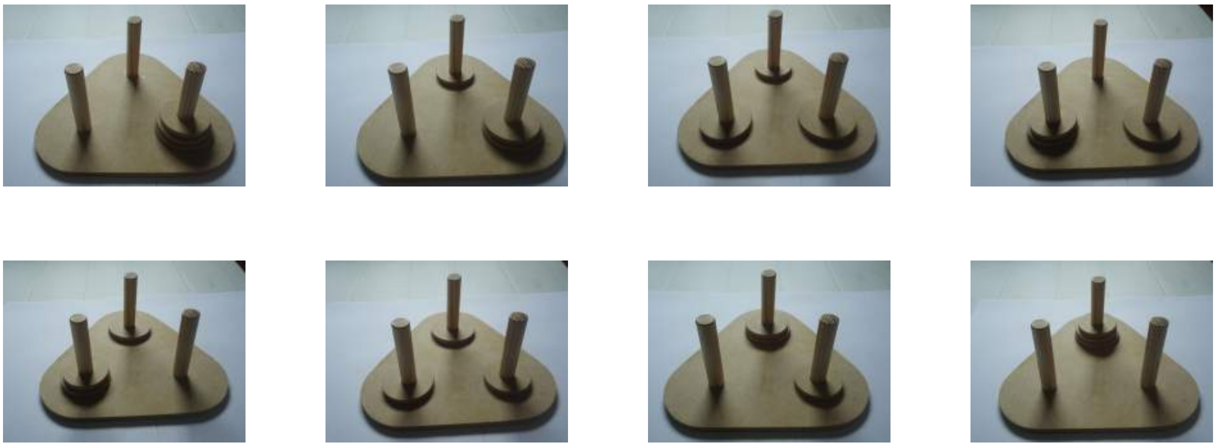
Para $n = 1$


Para $n = 2$






Para $n = 3$



Atividade 1- Complete a tabela com o número mínimo de movimentos, m_n, para passar o total de discos, n, de um bastão para outro bastão previamente determinado.

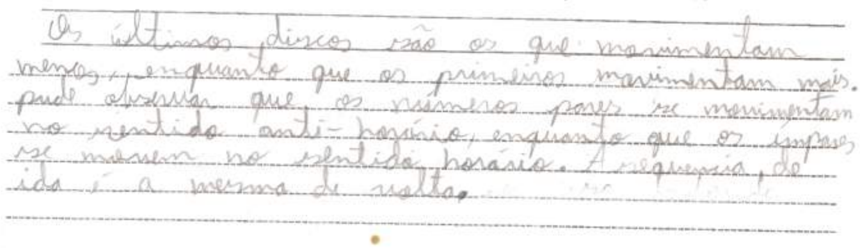
(n) número de discos	M_n- número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255
9	511
10	1023
11	2047
...	4095
i	$2^i - 1$

Figura 36: Jogando e deduzindo

Nessa primeira atividade, os alunos tiveram que completar a tabela com o número mínimo de movimentos. Foi nessa atividade que puderam deduzir o modo como deveriam jogar para chegar no número pretendido. Também aqui, observa–se o interesse em chegar na fórmula que dá o número mínimo de movimentos em função do número de discos. Nessa atividade, destacamos a importância de deixar os alunos conhecerem o jogo para que possam fazer o máximo de observações e perguntas possíveis.

Figura 37: Alunos aprendendo com a Torre de Hanoi

Pergunta 3- O que você pôde observar na sua interação com o jogo até o momento?



Os últimos discos são os que movimentam
menos, enquanto que os primeiros movimentam mais.
Pude observar que os números pares se movimentam
no sentido anti-horário, enquanto que os ímpares
se movem no sentido horário. A sequência de
ida é a mesma de volta.

Figura 38: Uma resposta para a pergunta 3

A torre usada na atividade, por ter uma disposição triangular das astes e seus discos estarem numerados, facilitou observações como a colocada pelo aluno acima. O professor deve usar de sua experiência e formação para criar situações que possam contribuir para aprendizagem de seu aluno, " Por sua posição social, formação e experiência profissional, o professor se apoia sobre um conjunto de concepções sobre seu trabalho, na disciplina a ser ensinada, no ato pedagôgico e nas capacidades dos alunos." (Almouloud, 2007. p.27)[2]

Pergunta 4- Que tipo de relação pode haver entre o número de discos e o número mínimo de movimentos ? Essa relação representa uma função? Quem é a variável dependente e a independente? Comente tudo que você pode observar.

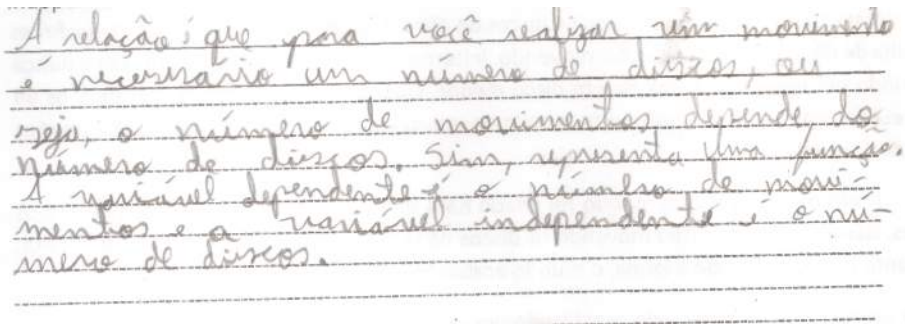

A relação é que para você realizar um movimento é necessário um número de discos, ou seja, o número de movimentos depende do número de discos. Sim, representa uma função. A variável dependente é o número de movimentos e a variável independente é o número de discos.

Figura 39: Uma resposta para a pergunta 4

Nessa pergunta, os alunos do 1º ano do ensino médio puderam resgatar os conceitos aprendidos nas aulas sobre funções, como se observa na figura 19.

Pergunta 5- É possível determinar uma equação que relaciona o número mínimo ,m_n , de movimentos com o número, n, de discos? Sem precisar jogar com todos os discos.

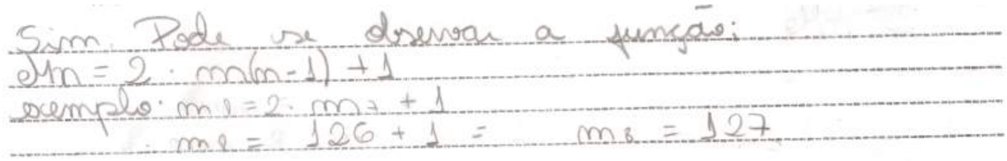

Sim. Pode se observar a função:
$M_n = 2 \cdot m(n-1) + 1$
exemplo: $m_8 = 2 \cdot m_7 + 1$
$m_8 = 126 + 1 =$ $m_8 = 127$

Figura 40: Deduzindo a fórmula

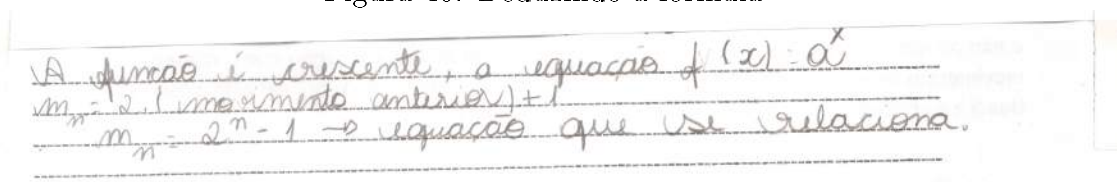

A função é crescente, a equação $f(x) = a^x$
$m_n = 2 \cdot$ (movimento anterior) $+ 1$
$m_n = 2^n - 1$ → equação que se relaciona.

Figura 41: Deduzindo a fórmula

Nessa atividade, a maioria dos alunos, do 1º ano, perceberam a fórmula $m_n = 2(m_n - 1) + 1$, mas também tivermos alguns alunos deduzindo a fórmula $m_n = 2^n - 1$. Os alunos do 2º ano conseguiram relacionar a fórmula com a função exponencial, o que não deixa de estar errado, já que o gráfico pode ser visto como a restrição, ao números naturais da função exponencial $f(x) = 2^x - 1$, para melhores detalhes sugerimos ver[20], observe nos gráficos da figuras 42 e 43 a percepção do domínio da função pelos alunos do 1º e 2º ano.

Pergunta 6- Como construir o gráfico número de discos x número total m_n de movimentos?

Observe o gráfico 42, nele o domínio está representado pelo conjunto dos números naturais, com isso, os alunos compreenderam o significado de domínio para a situação

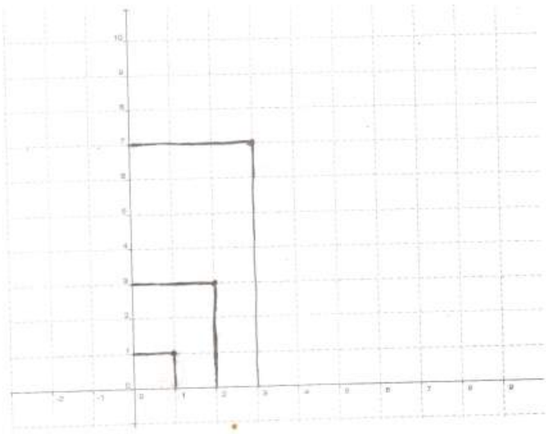


Figura 42: Gráfico nXm_n

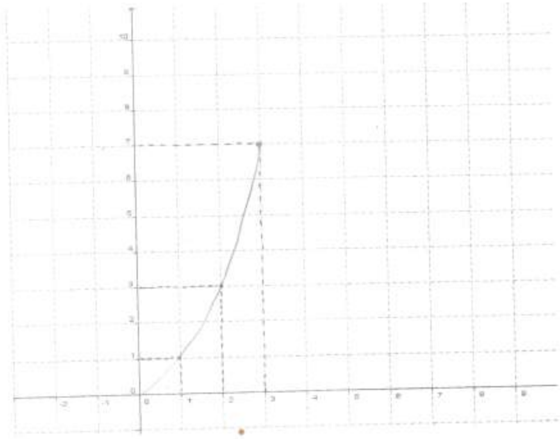


Figura 43: Gráfico nXm_n

problema levantada com a Torre de Hanói. Os alunos do 2º ano do ensino médio fizeram uma associação com a função exponencial $f(x) = 2^x - 1$ estudada por eles naquele período de estudos,é natural que isso ocorra, mas o professor, como orientador, poderá esclarecer ou relembrar alguns pontos sobre o domínio dessa função e sua relação com o gráfico.

Pergunta 7- Será possível saber qual o número de movimento de cada um dos discos? Complete as tabelas abaixo onde: N- representa o total de discos, x- o número do disco do qual se quer analisar os movimentos e m_n- o número mínimo de movimentos dos n discos.

x \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
2		1	2	4	8	16	32	64	128	256
3			1	2	4	8	16	32	64	128
4				1	2	4	8	16	32	64
5					1	2	4	8	16	32
6						1	2	4	8	16
7							1	2	4	8
8								1	2	4
9									1	2
10										1
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}

Figura 44: Resposta da pergunta 7

Sim. Pode ser observado que o número "dobra" seu valor horizontalmente e diminui verticalmente de forma proporcional. Progressão geométrica. $\boxed{2^{N-x}}$

Figura 45: Resposta da pergunta 7

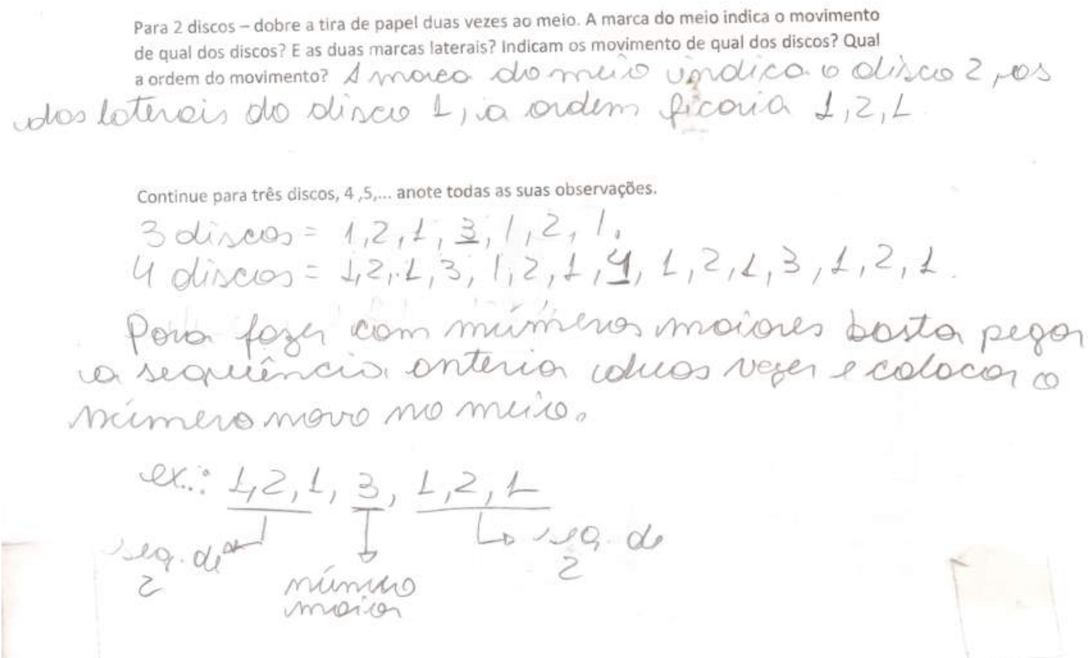
Nessa atividade, os alunos do 2º ano, ao completarem a tabela, puderam observar uma sequência estudada por eles no 1º ano do Ensino Médio, a Progressão Geométrica, Figura 44, destaca-se, na Figura 45, uma dedução, feita por um aluno para saber o número de movimentos de cada um dos discos. Nesse momento é importante que o professor destaque os resultados obtidos para que todos possam apreciar as deduções de seus colegas e consequêntemente indagar sobre os resultados apresentados.

Pergunta 8-Como saber qual a ordem de movimento de cada disco?

Vamos usar uma tira de papel para responder a essa pergunta. Para 1 disco : Dobre a tira de papel ao meio, a marca da dobra indica o único movimento efetuado pelo disco 1.

Para 2 discos : dobre a tira de papel duas vezes ao meio. A marca do meio indica o movimento de qual dos discos? E as duas marcas laterais, Indicam os movimento de qual dos discos? Qual a ordem do movimento?

Continue para três discos, 4 ,5,... anote todas as suas observações.


Para 2 discos – dobre a tira de papel duas vezes ao meio. A marca do meio indica o movimento de qual dos discos? E as duas marcas laterais? Indicam os movimento de qual dos discos? Qual a ordem do movimento? A marca do meio indica o disco 2, os dos laterais do disco 1, a ordem ficaria 1,2,1

Continue para três discos, 4 ,5,... anote todas as suas observações.

3 discos = 1,2,1,3,1,2,1.

4 discos = 1,2,1,3,1,2,1,4,1,2,1,3,1,2,1.

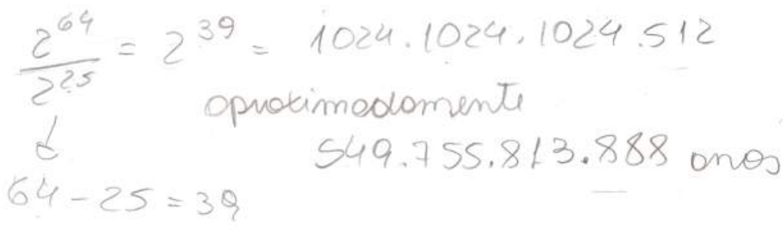
Para fazer com números maiores basta pegar a sequência anterior duas vezes e colocar o número novo no meio.

ex.: 1,2,1, 3, 1,2,1

seq. de 2 — número maior — seq. de 2

Figura 46: Resposta para a pergunta 8

Pergunta 9- Em quanto tempo os monges da lenda levariam para transportar todos os 64 discos? Suponha que os monges realizam 2^{25} movimentos por ano.


$\frac{2^{64}}{2^{25}} = 2^{39} = 1024.1024.1024.512$

$64-25=39$

aproximadamente

549.755.813.888 anos

Figura 47: Resposta para a pergunta 9

Na pergunta 8 acima, a orientação do professor se apresentou de forma escrita, como uma dica, dentro do problema, isso pode contribuir para que o aluno possa dar continuidade à solução de um problema matemático mais complexo.

7.2 O problema do tesouro escondido

O uso das tecnologias digitais, principalmente o computador, não pode ser ignorado no Ensino de Matemática, haja vista os vários softwares livres que existem para tornar a aula mais atrativa e proveitosa para aluno, porém, trabalhar com essas tecnologias exige do professor constante formação contínua devido ao avanço tecnológico que ocorre muito rapidamente. O uso do computador exigirá dos alunos o desenvolvimento de novas competências que vão bem além da simples lida com a máquina.

> *O computador, símbolo e principal instrumento desse avanço, não pode ficar de fora da escola. Ignorá–lo significa alienar o ambiente escolar, deixar de preparar os alunos para um mundo em mudanças constantes e rápidas, educar para o passado e não para o futuro.(Smole e Diniz, 2001 pg.175)[32]*

Propomos o uso do software Geogebra em algumas atividades com construção de conceitos e verificação de propriedades em Matemática, além de resolver situações problemas propostas pelo professor.

> *O computador exige que o aluno tenha participação ativa, a utilização da informática favorece, ao mudar o estilo das aulas, a mudanças dos papeis entre alunos e professores. O cenário no qual o professor tem papel ativo e o aluno passivo pode ser alterado quando se utiliza o computador como ferramenta de aprendizagem, pois não é o computador que ensina o aluno, ele é a ferramenta com a qual o aluno executa uma tarefa, desenvolve e comunica uma ideia, elabora um texto, pesquisa em um banco de dados e resolve problemas. (Smole e Diniz, 2001 pg176)[32]*

Na resolução e formulação de problemas matemáticos, o software Geogebra é uma ferramenta que auxiliará o aluno na busca de estratégias que posteriormente serão usadas por ele em outros problemas que encontrarem. O professor, como um orientador, atuará na verificação do aprendizado e possíveis correções nas falhas que os alunos apresentarem, será um trabalho em que poderá auxiliar os alunos de forma individual, identificando assim, aqueles que apresentarem maior dificuldade de aprendizagem. Desta forma, o professor terá consciência de quais alunos estão realmente aprendendo o conteúdo estudado.

> *O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem de mais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (Polya, 1978 pg.4)[25]*

Desta forma,a atuação maior será do aluno,pesquisando, deduzindo, conjecturando, formulando e contestado suas respostas, comparando e discutindo com os colegas.O trabalho passa pelo individual e chega até as discusões em grupo que também contribuem com o aprendizado. Observamos ainda que o objetivo, ao trabalhar com o software, não foi falar de sua interface, linguagem ou programação, mas apresentar suas ferramentas e como os alunos poderiam usá-las para resolver os problemas propostos.

O problema do tesouro escondido[2] é uma atividade com intuito de mostrar como usar a tecnologia na resolução de problemas em Matemática. A atividade proposta não foi aplicada as turmas envolvidas devido ao laboratório de informática da escola estar sem condições de uso, mas apresentaremos essa atividade como mais uma motivação ao estudo de geometria plana em turmas do 1º ano do Ensino Médio e 9º ano do Ensino Fundamental II. Usaremos o software GEOGEBRA para a proposta seguinte:

Conta a história que dois irmãos encontraram, no baú das lembranças de seu bisavô, o mapa de um tesouro, juntamente com as instruções para localizá-lo. O tesouro se encontrava numa ilha e sua localização estava descrita de forma clara: encontrada a ilha, os irmãos deveriam procurar um campo aberto com um grande espaço arenoso, perfeitamente circular. No exterior do dito círculo encontrariam várias palmeiras alinhadas ao longo de uma reta. Os irmãos deveriam localizar a palmeira com um desenho no seu tronco, só uma delas tinha um desenho no tronco! e, partindo de sua base, traçar as retas tangentes à pista circular, chamando de T_1 e T_2 esses pontos de tangência. A seguir, deveriam traçar também o diâmetro, AM, da circunferência fronteira da clareira, perpendicular à reta das palmeiras. Encontrariam o tesouro enterrado exatamente no ponto de interseção de AM com T_1T_2. . Os jovens, então, viajaram até a ilha, levando cordas e outras ferramentas

[2]Adaptado da revista do professor de matemática RPM 47, publicado pelo prof.José Paulo Carneiro.

necessárias. La estavam a formosa planície, a grande clareira circular e a comprida fila de belas palmeiras. Mas, por se tornar famosa, a ilha era uma atração turística e todas as palmeiras estavam desenhadas, em seus troncos, com o mesmo desenho. Os irmãos não sabiam qual era o ponto inicial e, sem ele, imaginaram que o trabalho seria gigantesco ou impossível. Vamos ajudar os dois irmãos a resolverem esse problema e encontrar o tesouro perdido, mostrando que o local onde o tesouro foi enterrado não depende da posição da palmeira. Apresentaremos a seguir uma solução para o problema do Tesouro Escondido usando o software geogebra, destacamos a necessidade de uma introdução acerca dos comandos do software para os alunos para que não apresentem dificuldades nesses pontos.

Preparação

1- No Geogebra, Abra uma janela selecionando ARQUIVO e depois NOVA JANELA.
2- Clique em exibir e depois em eixo e malha, retirando o eixo e a malha, se houver, da janela do Geogebra.

Processo de construção e definições:

3- Ative a ferramenta PONTO, janela 2, e clique em um ponto da tela. Esse ponto será rotulado como o ponto O.
4- Ative a ferramenta CÍRCULO DADO CENTRO E RAIO, janela 5, em seguida clique no ponto O e arraste o mouse clicando em um ponto qualquer da tela. Teremos uma circunferência, que representará a parte circular da ilha. Qual a definição de circunferência?

Nesse momento, o professor levanta um de seus objetivos com o uso do software, a definição de circunferência, que será dada pelos alunos sob sua orientação.

5- Ative a ferramenta PONTO e clique duas vezes em dois pontos diferente da tela e exteriores a circunferência. Ative a ferramenta RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS e clique nos pontos definidos no passo 4 acima. Crie vários pontos nessa reta para representar o conjunto das palmeiras descritas no texto.

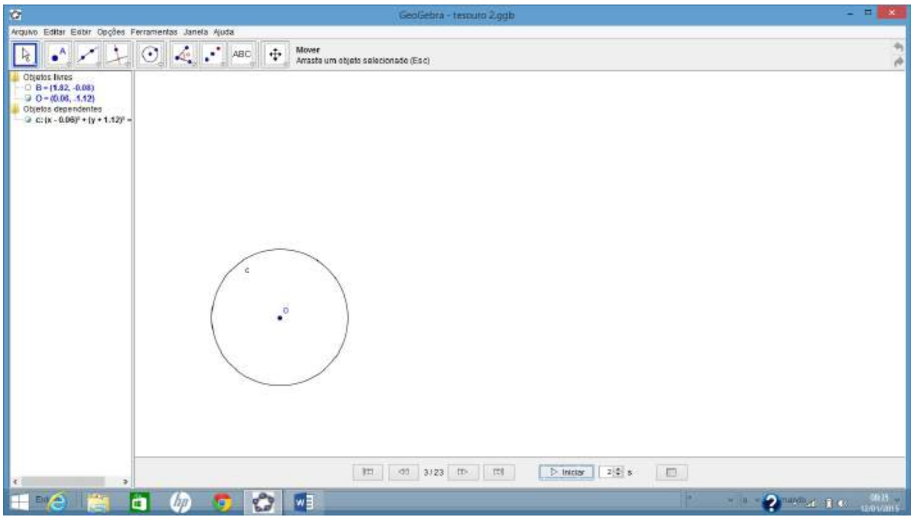


Figura 48: Passos 3 e 4

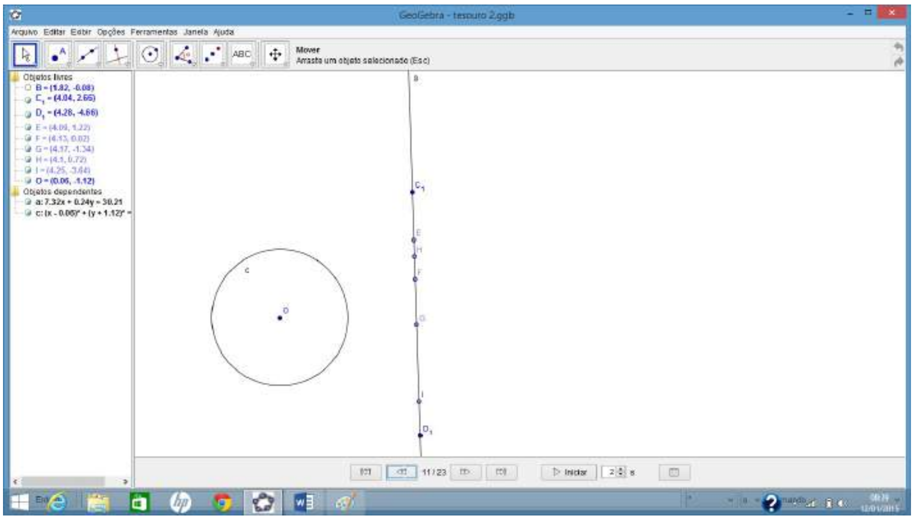


Figura 49: Passo 5

6-Escolha um dos pontos para ser a palmeira desenhada inicialmente, isto é, antes da ilha virar atração turística, vamos escolher o ponto H.

7- Trace as retas tangentes à circunferência ativando a ferramenta TANGENTES, janela 4, e clicando no ponto escolhido no passo 6 e na circunferência. Defina reta tangente a uma circunferência.

8- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR, janela 4, e clique na reta que contém as palmeiras e o ponto O. O que são retas perpendiculares?

9- Ative a ferramenta interseção de dois objetos, janela 2, em seguida clique nas retas tangentes, uma de cada vez, e depois na circunferência, renomeie os pontos obtidos con-

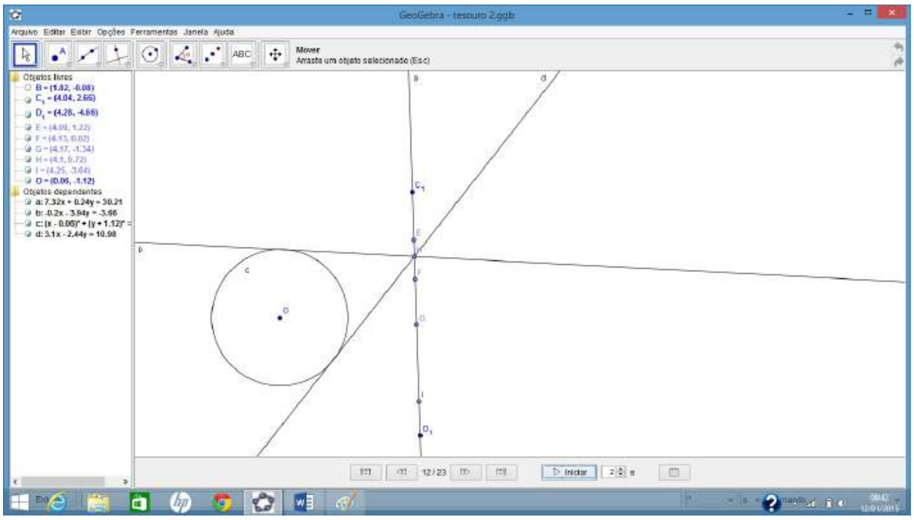


Figura 50: Passos 6 e 7

forme a história descrita acima.

10- Ative a ferramenta interseção de dois objetos e clique na reta perpendicular e na circunferência, renomeie os pontos obtidos de A e M.

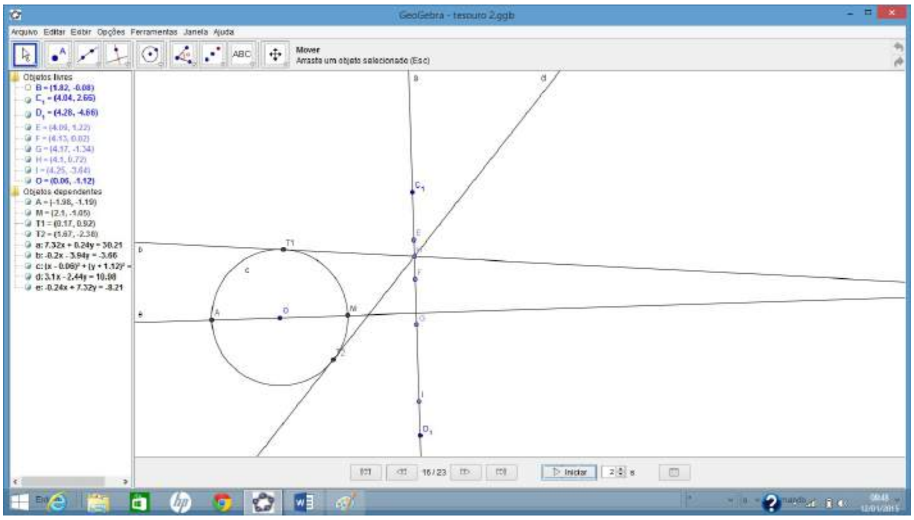


Figura 51: Passos 8, 9 e 10

11- Ative a ferramenta SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS, e clique nos pontos T_1 e T_2. Marque o ponto de interseção da perpendicular com o segmento T_1T_2.. Renomei-o de Tesouro.

12- Ative a ferramenta MOVER e clique e segure no ponto escolhido para ser a palmeira

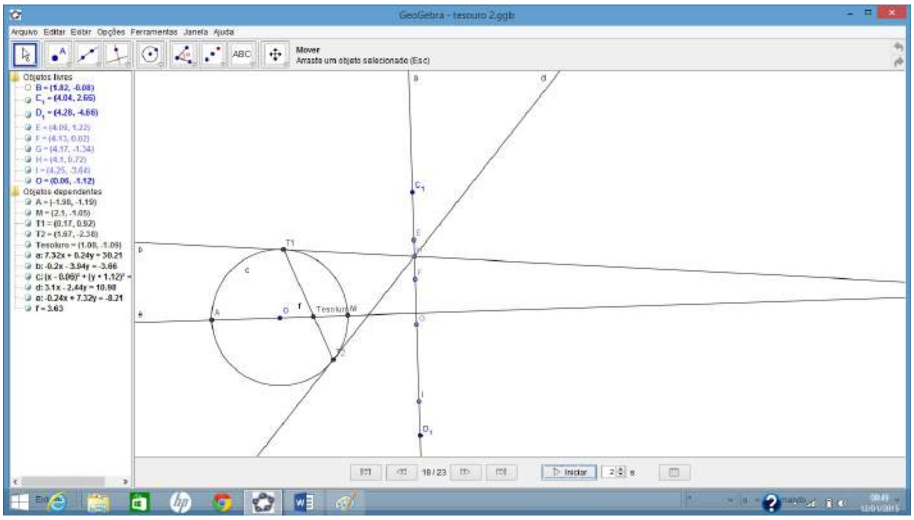


Figura 52: Passo 11

da historia, arraste-o. O que você observa? A posição do tesouro muda?

Por fim, com a pergunta acima, espera-se que os alunos concluirão que a posição do tesouro independe da posição da palmeira.

Atividade2

Nessa atividade, nosso objetivo é responder a alguns questionamentos que nos conduzirão ao fato que a localizaçãoo do tesouro independe da palmeira escolhida, para isso, usando o desenho feito na atividade 1, responda aos problemas a seguir: Antes de responder ao problemas propostos, vamos traçar alguns segmentos que nos auxiliarão na resolução dos mesmos:

Ative a ferramenta SEGMENTO DEFINIDO POR DOIS PONTOS e marque os segmentos OT_1, OT_2 e o segmento cujas extremidades são o centro da circunferência e o ponto escolhido para ser a palmeira(Ponto H), marque a interseção desse útimo segmento com o segmento T_1T_2.

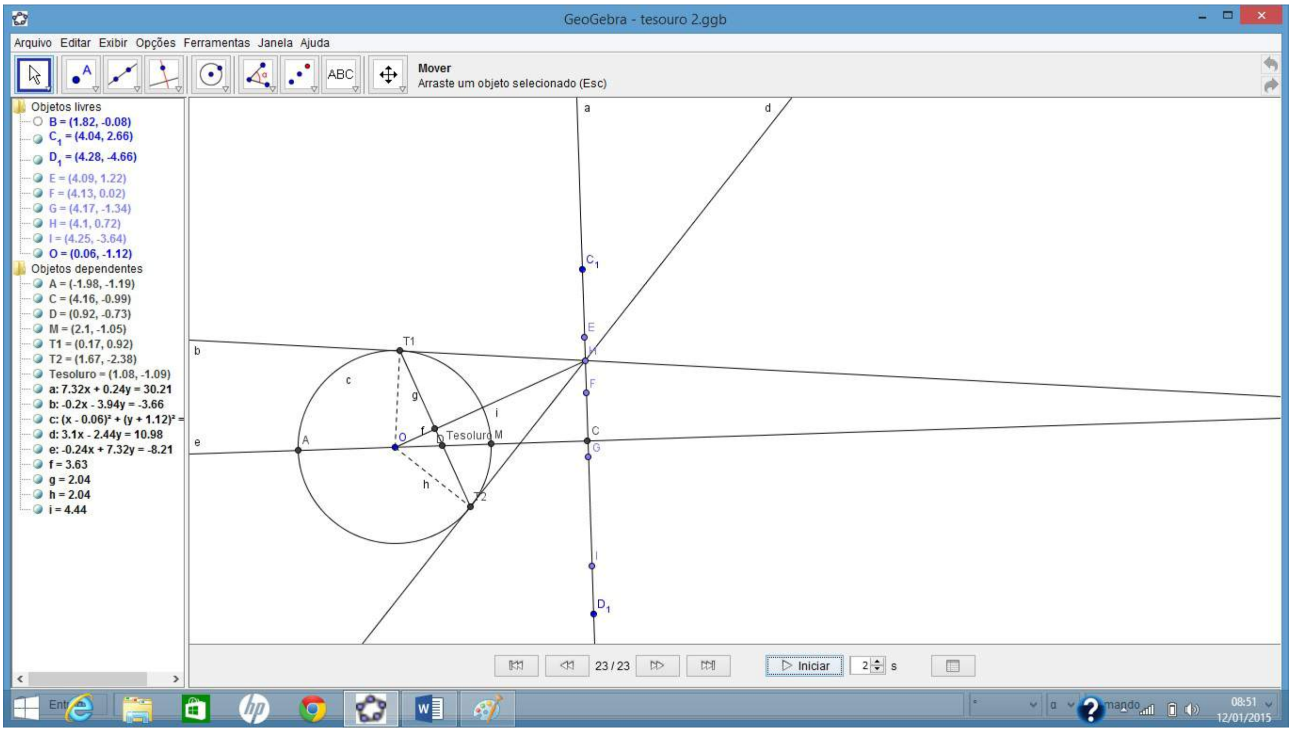


Figura 53: Atividade2

Problema1: Mostre que os triângulos ODT_1 e OT_1H são semelhantes e conclua que $r^2 = OD \cdot OH$.

Problema2: Mostre que os triângulos ODT e OHC, onde C é a interseção da reta que contém as palmeiras e a reta perpendicular, são semelhantes e conclua que $OT \cdot OC = OD \cdot OH$.

Problema3: Usando os problemas 1 e 2 mostre que a posição do ponto T, Tesouro , independe da posição da palmeira, isto é , do ponto H.

De fato, usando 1 e 2 temos que $OT \cdot OC = r^2$ então $OT = \frac{r^2}{OC}$, o que mostra a independência afirmada.

Com os problemas 1, 2 e 3 da atividade 2 espera-se que os alunos possam concluir algebricamente as observações e conclusões feitas na atividade anterior, percebe-se dessa forma a parceria do software no levantamento de soluções para os problemas propostos.

8 Considerações Finais

A prática de sala de aula no qual este trabalho foi utilizado revelou-se importante para que os alunos tenham um melhor aprendizado. Trabalhar com os problemas de forma mais prática é uma metodologia onde os alunos podem interagir e trocar conhecimentos, ter uma visão ampla dos problemas em matemática, buscar os conceitos adquiridos e aprender novos conceitos matemáticos.

A proposta apresentada traz grandes benefícios para os estudantes como sair da aula tradicional, propor problemas, observar as soluções dos colegas, deduzir padrões, propor pesquisas e soluções para os problemas apresentados, olhar os problemas do livro didático sob outra visão, apresentar suas próprias técnicas de resolução e ficar motivado para as próximas aulas. O professor como observador e orientando na medida exata, contribui com melhor participação de seus alunos. É importante que o professor procure conhecer a comunidade escolar para que os problemas e as atividades propostas não fujam da vivência do estudante.

Destaca-se também que, ao trabalhar com os alunos da escola durante três anos, percebeu-se uma grande melhora com respeito a resolução de problemas matemáticos, haja vista que a escola onde se desenvolveu o trabalho já foi considerada a pior escola da cidade e hoje se firma como a escola da comunidade com melhor média em matemática no Enem, isso pode ser observado nos resultados do ENEM 2014[28].

A proposta apresentada deve ser feita sempre que se pretender resgatar um conhecimento ou introduzir um novo para que os problemas propostos no livro didático sejam encarados de forma que todos os estudantes tenham vontade em procurar meios para resolvê-los e que não tenham medo do erro, dessa forma a aprendizagem se efetiva.

Ao professor cabe selecionar os vários problemas que irá propor a seus alunos de forma a abordar os conteúdos que se pretende trabalhar, mas deve se concientizar que ao trabalhar na proposta desse trabalho, poderá percorrer por outros conceitos matemáticos vistos ou não pelos alunos, pois os problemas matemáticos vão surgindo diante das várias perguntas feitas por eles, o bom andamento das soluções devem ser orientadas pelo professor de forma a instigar nos estudantes mais perguntas e à procura por soluções.

Tendo em vista a prática didática apresentada, podemos concluir que a metodologia com a resolução, formulação e escrita de problemas pelos alunos pôde trazer mais participação nas aulas de matemática, uma visão mais ampla de como resolver os problemas, busca de suas próprias técnicas de resolução dos problemas, além de propocionar aos alunos um melhor aprendizado dos conteúdos estudados.

Referências

[1] Adriana Pelizzari, Maria de Lurdes et al.2- Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel- Julho 2002- Artigo.Disponível em: portaldoprofessor.mec.gov.br data de acesso 24/02/2015.

[2] Almouloud, Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática.Curitiba:UFPR,2007.

[3] Andrade, Maria Aparecida Bologna Soares de: Possibilidades e Limites da Aprendizagem Baseada em problemas no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. UNESP-Bauru 2007.

[4] Araújo Luis Cláudio Lopes de, Aprendendo Matemática com o Geogebra.São Paulo, SP: Exato, 2010.

[5] Ausubel, David P, Novak, Joseph D, Hanesian, Helen. Psicologia Educacional. Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: Internacional, 1980.

[6] Bicudo,Maria Aparecida Viggiane, organizadora.Filosofia da educação matemática: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Unesp, 2010.

[7] Bicudo,Maria Aparecida Viggiane, organizadora. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.Unesp,1999.

[8] Brasil. Ministério da educação. PDE: Plano de desenvolvimento da educação: Prova Brasil: Ensino Fundamental: Matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC/SAEB, Inep, 2008.

[9] Brasil. Ministério da educação. Secretaria de Educa c ao Básica. Orienta c oes Curriculares Para o Ensino Médio: Ciências humanas e suas tecnologias, Brasília, Ministério da educação, Secretaria de Educa c ao Básica 2006.

[10] Brito, Marcia Regina Ferreira de, organizadora. Solução de problemas e a matemática escolar. 2ºed. Campinas,SP: Alínea, 2010.

[11] Burak, Dionísio. Aragão, Rosália Maria Ribeiro de. A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa.Curitiba: CRV,2012.

[12] Carneiro, José Paulo.Ilha do tesouro: Dois problemas e duas soluções. Revista do professor de matemática número 47. SBM, 2009.

[13] D' Ambrosio, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje?, Temas e debates. Brasilia, 1989. Disponível em: <http://www.matematicauva.org>.Acesso em: 10 junho 2014.

[14] Dante,L.R. Didática da resolução de problemas de matemática.2º ed. São Paulo:Ática,1991.

[15] Dante,L.R.Formulação e resolução de problemas- teoria e prática..1º ed. São Paulo:Ática,2009.

[16] Eves, Howard. Introdução à historia da matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. 3º ed. Campinas, SP. Unicamp, 2002.

[17] Dionne, Hugues. A Pesquisa Ação para o Desenvolvimento local. Trad. Michael Thiollent. Brasília: Liber, 2007.

[18] INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Resultado ENEM 2014. Disponível em http://sistemasenem2.inep.gov.br.

[19] Lakatos, Eva Maria. Fundamentos de Metodologia Científica. 5 ed- São Paulo, Atlas, 2003.

[20] Lima, E. L. Curso de Análise, volume 1. Projeto Euclides, IMPA-CNPq, 1976.

[21] Ludke, Menga; André, Marli E. D. A. Pesquisa em Educação– abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

[22] Mec. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática- Ensino médio. Brasilia, 1999.

[23] Moraes, R. Uma Tempestade de Luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. Artigo.

[24] Palaro, Luzia Aparecida. Brincando e aprendendo matemática com a torre de Hanói. Mini curso, XECODEQ, 1998.

[25] Polya, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

[26] Rabelo,Mauro. Avalição educacional: Fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro.Rio de Janeiro: SBM,2013.

[27] Ribeiro,Luiz Roberto de Camargo. Aprendizagem Baseada em Problemas(PBL): Uma experiência no Ensino Superior. São Carlos, EdUFSCar, 2010.

[28] Robert B. Westbrook; Anísio Teixeira, José Eustáquio Romão, Verone lane Rodrigues(ORG.). John Dewey.Recife: Fundação Joaquim Nabuco. Ed Massangana, 2010. Disponível em: www.dominiopublico.gov.br, data de acesso: 24/02/2015.

[29] Rodrigues, Cláudia Izepe.Torres de Hanói. Guia do professor/ MEC. disponível em m3.ime.unicamp.br. data de acesso:22 de outubro 2014.

[30] Roseira, Nilson Antônio. Educação matemática e valores: Das concepções dos professores à construção da autonomia.Brasília: Liberlivro,2010.

[31] Santos, Rogério e Baccarin, Sandra A. de Oliveira. Embalagens. Revista do professor de matemática número 60. 2º quadrimestre. SBM, 2006.

[32] Smole,Katia Stocco e Diniz, Maria Inez , organizadoras. Ler, escrever e resolver problemas: Habiliadades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

[33] Silva, Nagy, Marcia Cristina; Buriasco, R. L. C. Análise da produção escrita em Matemática: Algumas Consideraç oes - Artigo , Revista Ciência e Educação, 2005 p.499-512.

[34] Sousa, Sidnei de Oliveira: Aprendizagem Baseada em problemas: Estratégias para o ensino e aprendizagem de algoritmo conteúdos computacionais. Dissertação de Mestrado. UNESP 2011.