



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E NÚMEROS
COMPLEXOS**

Ana Paula Santos Silva Mascarenhas

Orientador: Prof. Dr. Kisney Emiliano de Almeida

Feira de Santana

Junho de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E NÚMEROS
COMPLEXOS**

Ana Paula Santos Silva Mascarenhas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida

Feira de Santana

29 de Junho de 2015

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

M361t Mascarenhas, Ana Paula Santos Silva
Transformações geométricas e números complexos / Ana Paula Santos
Silva Mascarenhas. – Feira de Santana, 2015.
88 f. : il.

Orientador: Kisnney Emiliano de Almeida.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de
Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Geometria plana – Ensino médio. Números complexos. I.
Almeida, Kisnney Emiliano de, orient. II. Universidade Estadual de
Feira de Santana. III. Título.

CDU: 514.112.09



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA DISCENTE ANA PAULA SANTOS SILVA MASCARENHAS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte e nove dias do mês de junho de dois mil e quinze às 10:00 horas no MT55 - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “Transformações Geométricas e Números Complexos”, da discente Ana Paula Santos Silva Mascarenhas, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Kismey Emiliano de Almeida (Orientador, UEFS), Igor dos Santos Lima (UFG) e Claudiano Goulart (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADA.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 29 de junho de 2015.

Prof. Dr. Kismey Emiliano de Almeida (UEFS)

Orientador

Prof. Dr. Igor dos Santos Lima (UFG)

Prof. Dr. Claudiano Goulart (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

Minha gratidão é, primeiramente, a Deus, pois sem Ele nada é possível.

A UEFS - Universidade Estadual de Feira de Santana, que ao abraçar o PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática proporcionou-me a oportunidade de realizar este curso.

Agradeço à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, da qual fui bolsista viabilizando a compra de livros que foram essenciais para conclusão do meu mestrado.

Ao meu orientador, professor Dr. Kismey Emiliano de Almeida, pela disponibilidade, dedicação, apoio, paciência e incentivo na elaboração deste trabalho.

Agradeço a todos os professores que aceitaram compartilhar suas experiências ajudando-me a ampliar meus conhecimentos.

Não posso deixar de agradecer às pessoas mais importantes na minha vida: minha mãe, Dona Loi, meu pai, Sr. Antonio (in memoria), meu esposo, Rubinho e a toda minha família pelo amor incondicional, apoio e confiança.

Agradeço, também, a Tábata Larissa e Carlos Robson, que estiveram mais próximos de mim durante este curso, por sua amizade e apoio.

Resumo

Observamos que no ensino médio a abordagem dada aos números complexos obedece a um determinado padrão, precedida por exercícios rotineiros que exigem na sua resolução apenas o emprego direto das fórmulas e não demandam dos alunos nenhum tipo de abstração. Notamos nos compêndios didáticos a ausência de questões que evidenciem a aplicação concreta dos números complexos e a sua relação com outros conteúdos e áreas do conhecimento. Proporemos nesse trabalho uma nova abordagem para a resolução de questões de geometria plana - em sua maioria retiradas de livros didáticos utilizados no ensino médio e de provas de vestibulares - utilizando, ao invés de trigonometria e fórmulas conhecidas, transformações geométricas vistas como transformações de números complexos, evidenciando assim a profunda conexão entre todos os conteúdos mencionados acima.

Palavras-chave: Números complexos, transformações geométricas, geometria.

Abstract

We observe that in high school, the approach given to complex numbers follows a certain pattern, preceded by routine exercises which require in its resolution only the direct application of formulas and do not demand any kind of abstraction from the students. We note in didactic compendiums the absence of questions that focus on the concrete application of complex numbers and their relationship with other content and areas of knowledge. We propose in this dissertation a new approach to solving plane geometry problems - mostly taken from high school textbooks and college entrance exams - using, instead of trigonometry and known formulas, geometric transformations seen as complex number transformations, thus showing the deep connection between all aforementioned contents.

Keywords: complex numbers, geometric transformations, geometry.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Sumário	v
Introdução	1
1 Números Complexos	4
1.1 Conjugação	6
1.2 Módulo	7
1.3 Argumento	8
1.4 Forma Polar ou Trigonométrica	9
1.5 Operações com Números Complexos	10
1.5.1 Adição e Subtração	10
1.5.2 Multiplicação	11
1.5.3 Divisão	12
1.5.4 Potenciação	12
1.5.5 Radiciação	13

2	Transformações Geométricas e Números Complexos	19
2.1	Semelhanças	19
2.2	Transformações no Plano Complexo	23
2.2.1	Translação	24
2.2.2	Multiplicação por $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$	26
2.2.3	Reflexão através da reta r	32
3	Aplicações para o Ensino Médio	42
4	Conclusão	77
	Referências Bibliográficas	79

Introdução

Existe a idéia de que o estudo do conjunto dos números complexos no ensino médio é desnecessário. Até mesmo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) deixam claro a não obrigatoriedade da abordagem deste conteúdo e, por isso, algumas escolas já o retiram de seus currículos alegando a falta de aplicabilidade.

Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. ([2]).

Isso acontece porque ao apresentarmos o conjunto dos números complexos enfatizamos apenas o emprego de fórmulas e não relacionamos este conteúdo com nenhuma outra área do conhecimento ou até mesmo com um outro conteúdo de matemática. Sendo assim, este trabalho foi elaborado com o intuito de apresentar uma nova abordagem para a resolução de questões de geometria plana utilizando transformações geométricas e números complexos.

Para isso estabeleceremos uma relação entre as operações algébricas com números complexos e as transformações geométricas no plano, apresentando uma forma de aplicação concreta dos números complexos e não um mero algebrismo abstrato.

Vale salientar que a utilização dos números imaginários na resolução de problemas relacionados à geometria é remota. Um dos primeiros matemáticos a fazer uso desse recurso foi De Moivre, chegando à fórmula conhecida hoje como **fórmula de De Moivre**.

No caso particular dos números imaginários, De Moivre foi um dos primeiros a observar que esses números podem ser úteis para problemas de divisão de arcos de círculos, mostrando que um número imaginário unitário pode ser representado por $\cos a \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} a$. Obtém-se, então, que $\sqrt[n]{\cos a \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} a}$, fornece os n valores para a divisão do arco a , um vez que $(\cos a \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} a)^n = \cos na \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} na$.([16]).

É bom enfatizarmos também que foi no final do século *XVIII* e início do século *XIX* que Argand, calculando a meia proporcional entre $+1$ e -1 , concluiu que a multiplicação por $\sqrt{-1}$ deve ser entendida como uma rotação. Gauss, de maneira análoga, estabeleceu a relação entre $+i$ e $-i$ e considerou a representação geométrica dos números complexos no plano cartesiano.

Trata-se de um entendimento que não está muito distante da meia proporcional proposta por Argand (...), justamente, devido a observação de que $+i$ e $-i$, podem ser vistos como meia proporcional entre $+1$ e -1 . Gauss afirma, então, que essas relações podem ser tornadas intuitivas por uma representação geométrica. Para isto, basta considerarmos no plano um duplo sistema de retas paralelas que se cortam em ângulos retos.([16]).

Deste modo, o tema desta dissertação será desenvolvido da seguinte maneira: no primeiro capítulo desta dissertação abordaremos noções básicas sobre os números complexos: sua forma algébrica, conjugação, módulo, argumento, forma trigonométrica e suas operações algébricas, procurando sempre apresentar a interpretação geométrica.

No capítulo seguinte, começaremos apresentando a definição de transformação e, em seguida, as definições e proposições relativas as semelhanças, ambas no \mathbb{R}^2 . Continuando, na segunda seção, abordaremos sobre as transformações no plano complexo, apresentando definições e exemplos de semelhanças, relacionando-as com as operações algébricas com os números complexos.

Finalmente, no terceiro capítulo, apresentaremos sugestões para resolução de questões que envolvam operações com números complexos e geometria plana retiradas de provas de vestibulares, de livros didáticos do ensino médio, de sites e algumas elaboradas por nós. Na resolução dessas questões, ao invés de usarmos fórmulas conhecidas, utilizaremos as transformações geométricas como transformações de números complexos no plano.

Esperamos, ao final deste trabalho, que a proposta apresentada da utilização de números complexos para resolução de questões de geometria plana torne mais relevante e atrativo seu estudo no ensino médio.

Capítulo 1

Números Complexos

Iniciaremos este capítulo apresentando definições e propriedades básicas relativas aos números complexos. As referências principais para esse capítulo são: [9], [10], [11], [13].

Um **número complexo** $z \in \mathbb{C}$ é um número da forma $x + yi$, com x e y pertencentes ao conjunto dos números reais \mathbb{R} e $i = \sqrt{-1}$ sendo um número que satisfaz $i^2 = -1$. Geometricamente, o conjunto dos números complexos \mathbb{C} pode ser pensado como um conjunto de pares ordenados de números reais: o número complexo $z = x + yi$ pode ser representado pelo ponto $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que será chamado de **afixo** do complexo z - figura 1.1. As coordenadas do ponto A são chamadas, respectivamente, de **parte real** $\text{Re}(z)$ e **parte imaginária** $\text{Im}(z)$ de z . Nessa dissertação privilegiaremos o uso da interpretação geométrica através de afixos.

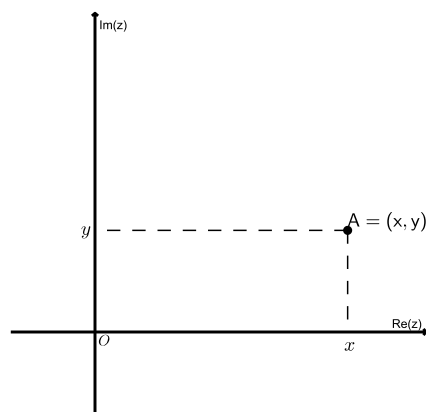


Figura 1.1: Número complexo no \mathbb{R}^2 .

O número complexo $(x, 0) = x + 0i = x$ é um número real e o número complexo $(0, y) = 0 + yi = yi$ é chamado de **imaginário puro**. Sob essa ótica, podemos estender as operações de números reais para números complexos, com as seguintes definições:

1. Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
2. Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Deste modo, sendo $z, w, v \in \mathbb{C}$, temos que as operações de adição e multiplicação assim definidas obedecem as seguintes propriedades:

ADIÇÃO:

- Comutatividade: $z + w = w + z$;
- Associatividade: $(z + w) + v = z + (w + v)$;
- Elemento neutro: $z + (0, 0) = (0, 0) + z = z$;
- Inverso aditivo ou oposto: Se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, então $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ e $z + (-z) = (-z) + z = (0, 0)$.

MULTIPLICAÇÃO:

- Comutatividade: $z \cdot v = v \cdot z$
- Associatividade: $(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot w)$
- Elemento neutro: Existe $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 = (1, 0)$, tal que $z \cdot z_1 = z_1 \cdot z = z$
- Inverso multiplicativo: Para $z \neq (0, 0)$ existe $z' \in \mathbb{C}$, tal que $z \cdot z' = z' \cdot z = z_1 = (1, 0)$
- Distributividade em relação à adição: $z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w$

Ao aplicarmos a multiplicação entre números complexos - z e w - com o intuito de simplificar a notação, usaremos zw ao invés de $z \cdot w$.

1.1 Conjugação

Dado um número complexo $z = x + yi$, definimos o seu **conjugado** como sendo o número complexo $\bar{z} = x - yi$, que corresponde geometricamente ao ponto simétrico a z com respeito ao eixo horizontal, conforme figura 1.2. A conjugação tem as seguintes propriedades, facilmente verificáveis:

1. $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z = 0$;
2. $\bar{\bar{z}} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
3. $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
4. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$;
5. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
6. se $z \neq 0$, então $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$;
7. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ e $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
8. Se $w \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

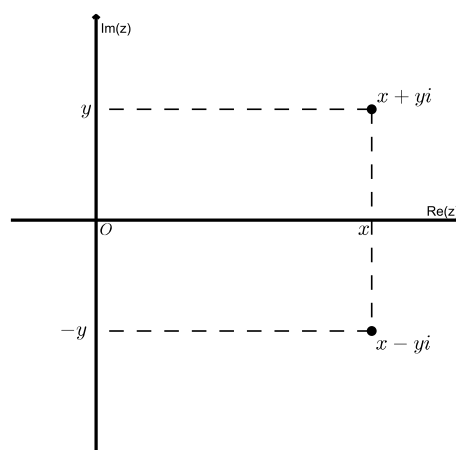


Figura 1.2: Conjugado de um número complexo.

1.2 Módulo

Na representação gráfica de um número complexo podemos calcular a distância entre o afixo A desse número e a origem O , ou seja, a cada complexo $z = x + yi = (x, y) = A$ podemos associar um único vetor \overrightarrow{OA} , sendo o **módulo** do número complexo igual à norma do vetor a ele associado, como ilustrado na figura 1.3.

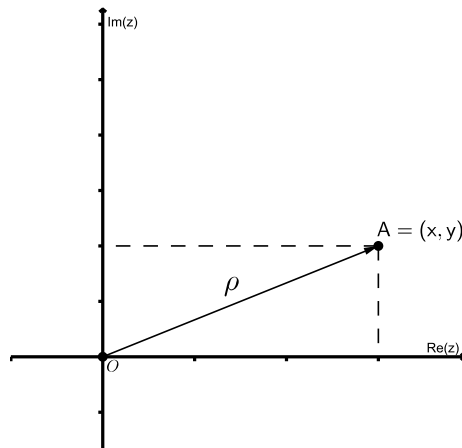


Figura 1.3: Módulo do número complexo.

Denotemos por $\rho = |z|$ o módulo do número complexo z . Analisando a Fig. 1.3 temos que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, o que consiste de um número real não negativo. O módulo de um número complexo possui as seguintes propriedades:

1. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
2. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
3. $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ e $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$;
4. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

1.3 Argumento

Considere o número complexo $z = x + yi$, com $z \neq 0$ e afixo A - figura 1.4. Então, o segmento de reta OA de comprimento $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$ determina com o eixo Ox um ângulo θ chamado de **argumento** de z e denotado por $\arg(z) = \theta$.

É claro que todo número complexo não-nulo tem uma infinidade de argumentos, onde quaisquer deles diferem entre si por um múltiplo de 2π . Ao valor de $\theta \in [0, 2\pi]$, dá-se o nome de **argumento principal** de z .

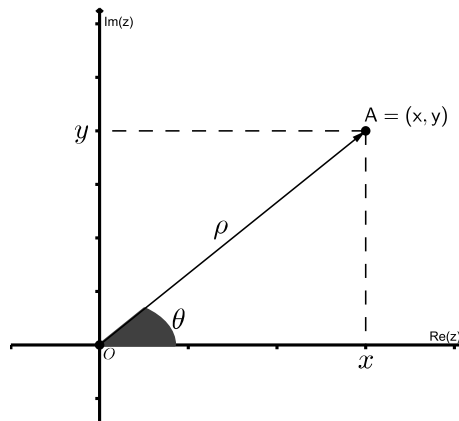


Figura 1.4: Argumento do número complexo.

Geometricamente, o argumento principal de z é a medida em radianos no círculo unitário do ângulo ao qual devemos girar o semieixo positivo Ox , no sentido anti-horário, até coincidir com o segmento OA . Disto podemos concluir que dado um número complexo z :

- Se $z = 0$, então $A = (0, 0)$ é o afixo de z e por isso não fica definido o círculo unitário, já que $\rho = OA = 0$, portanto não se define o argumento de z ;
- $z \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \arg(z) = K \cdot 2\pi$, com $K \in \mathbb{Z}$;
- $z \in \mathbb{R}_- \Leftrightarrow \arg(z) = \pi + K \cdot 2\pi$, com $K \in \mathbb{Z}$;
- z é um número imaginário puro e $\text{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + K \cdot 2\pi$, com $K \in \mathbb{Z}$;
- z é um número imaginário puro e $\text{Im}(z) < 0 \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2} + K \cdot 2\pi$, com $K \in \mathbb{Z}$.

1.4 Forma Polar ou Trigonométrica

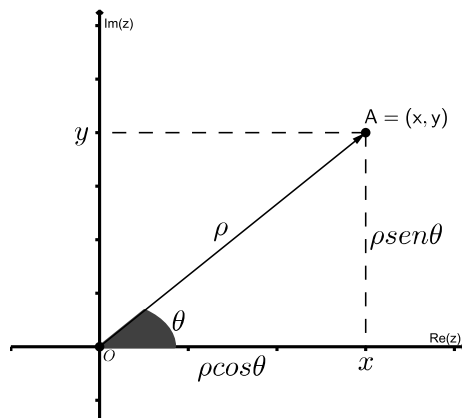


Figura 1.5: Forma polar ou trigonométrica de um número complexo.

Observando a figura 1.5, notamos que $\cos \theta = \frac{x}{\rho}$ e $\sin \theta = \frac{y}{\rho}$; ou seja, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$. Daí, $z = x + yi = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta$ e, portanto,

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

A esta forma de se representar o número complexo não nulo z , de módulo ρ e $\arg(z) = \theta$, chamamos de **forma polar** ou **forma trigonométrica** de z . Os números ρ e θ são as coordenadas polares do ponto A e determinam a posição do ponto no plano. Aqui usaremos a forma abreviada $\text{cis } \theta$ para escrever $\cos \theta + i \sin \theta$.

Note que, dados os números complexos $z_1 = \rho_1 \text{cis } \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \text{cis } \theta_2$, então

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ e } \theta_1 = \theta_2 + K \cdot 2\pi, K \in \mathbb{Z}.$$

De fato, se $z_1 = z_2$ então $|z_1| = |z_2|$ e $\rho_1 = \rho_2$, disto resulta que $\text{cis } \theta_1 = \text{cis } \theta_2$. Da igualdade de números complexos, temos que $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ e $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$. Como as funções cosseno e seno são periódicas de período 2π , temos que $\theta_1 = \theta_2 + K \cdot 2\pi$, com $K \in \mathbb{Z}$. A recíproca é imediata.

1.5 Operações com Números Complexos

Nesta seção abordaremos as interpretações geométricas e propriedades das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação com números complexos.

1.5.1 Adição e Subtração

Sabemos que dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ podem ser representados por vetores que têm como extremos a origem $(0, 0)$ do plano cartesiano e o afixo de cada número complexo.

Como para os vetores as operações de adição e subtração são bem definidas, obtemos a soma ou subtração de dois complexos somando-se ou subtraindo-se os vetores a eles associados, como podemos ver na figura 1.6.

A validade de tal afirmação vem do fato de que dados os números complexos $z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2)$, temos que:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2) = (x_1, y_1) \pm (x_2, y_2).$$

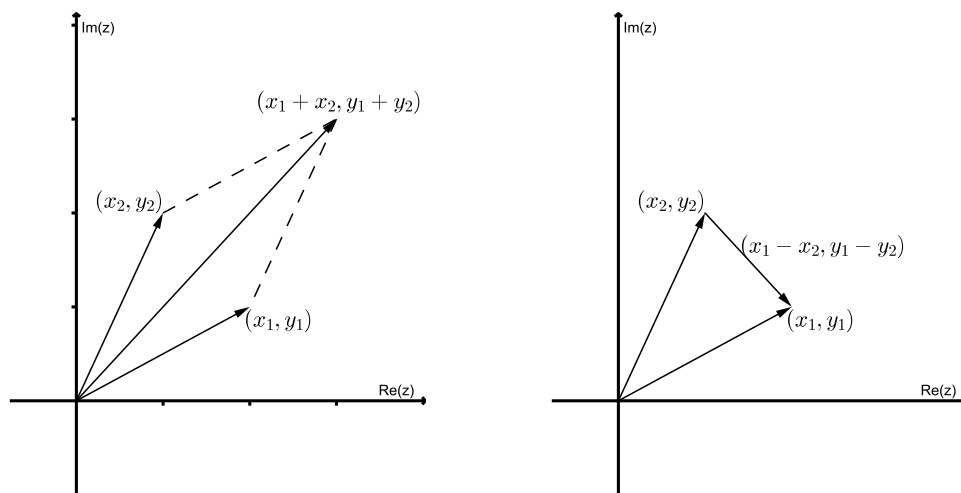


Figura 1.6: Adição e Subtração de dois números complexos.

Observe que quaisquer que sejam os números complexos z_1 e z_2 , temos que:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

com igualdade valendo se, e somente se, um dos números é múltiplo escalar real não negativo do outro. A sua demonstração pode ser encontrada em [13].

1.5.2 Multiplicação

Considerando os números complexos $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2$, temos que

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2).$$

De fato,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2] \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + i(\cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \cos \theta_2)] \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2), \end{aligned}$$

onde utilizamos acima as seguintes identidades trigonométricas:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2;$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2.$$

Exemplo 1.1. Considere o número complexo arbitrário $z = \rho \operatorname{cis} \theta$. Como $i = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, então $z \cdot i = \rho \operatorname{cis}(\theta + \frac{\pi}{2})$. Observe que $|z \cdot i| = |z| \cdot |i| = |z| = \rho$ e, além disto, $\arg(z \cdot i) = \theta + \frac{\pi}{2}$, ou seja, o argumento principal de $z \cdot i$ é congruente a $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Podemos concluir que, geometricamente, o produto do complexo z pelo complexo i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos em torno da origem, no sentido anti-horário, do afixo correspondente a z , conforme ilustrado na figura 1.7.

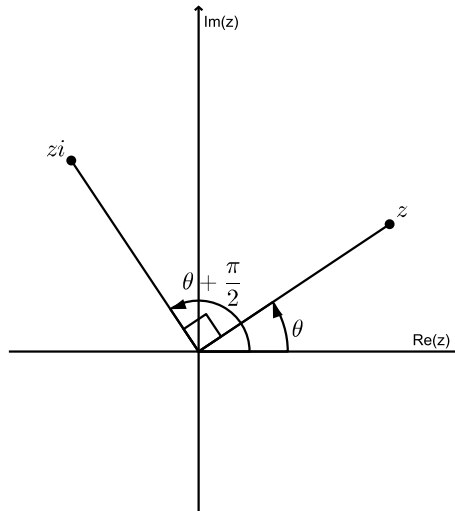


Figura 1.7: Multiplicação de z por i .

1.5.3 Divisão

Dados os números complexos $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$ e $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2 \neq 0$, temos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

Para demonstrarmos essa igualdade, basta mostrarmos que

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) \right) \cdot z_2 = z_1.$$

Como visto anteriormente, temos que:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \rho_2 \cdot \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2 + \theta_2) = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1 = z_1.$$

1.5.4 Potenciação

Consideremos os números complexos $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$, temos que:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \dots \cdot \rho_n \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n).$$

Façamos agora $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_n = z$ e $z = \rho \operatorname{cis} \theta$, daí:

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_n = \theta \\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_n = \rho. \end{cases}$$

Então,

$$z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = \underbrace{z z z \cdots z}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{\rho \rho \rho \cdots \rho}_{n \text{ vezes}} \text{cis}(\underbrace{\theta + \theta + \theta + \dots + \theta}_{n \text{ vezes}}).$$

Podemos concluir que:

$$z^n = \rho^n \text{cis}(n\theta).$$

Essa fórmula é chamada de **Fórmula de De Moivre**. Provaremos, pelo princípio da indução finita, sua validade para n natural.

Demonstração. Se $n = 0$, então:

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \rho^0 \text{cis}(0 \cdot \theta) = 1. \end{cases}$$

Admitamos verdade para $n = k - 1$:

$$z^{k-1} = \rho^{k-1} \text{cis}(k-1)\theta.$$

Provaremos para $n = k$.

$$z^k = z^{k-1} \cdot z = \rho^{k-1} \text{cis}(k-1)\theta \cdot \rho \text{cis} \theta = (\rho^{k-1} \cdot \rho) \cdot \text{cis}((k-1)\theta + \theta) = \rho^k \text{cis}(k\theta).$$

Notemos que a fórmula também é válida para o caso de $n \in \mathbb{Z}_-$.

Seja $n = -m$, com $m \in \mathbb{Z}_+$. Temos:

$$\begin{aligned} (\rho \text{cis} \theta)^n &= (\rho \text{cis} \theta)^{-m} = \frac{1}{(\rho \text{cis} \theta)^m} = \frac{\text{cis} 0}{\rho^m \text{cis}(m\theta)} = \frac{1}{\rho^m} \cdot \text{cis}(0 - m\theta) = \\ &= \rho^{-m} \text{cis}(-m\theta) = \rho^n \text{cis}(n\theta). \end{aligned}$$

□

1.5.5 Radiciação

Sejam n um número natural e $z \in \mathbb{C}$. Um elemento $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = z$ é chamado de uma **raiz enésima** de z .

Façamos $w = r \operatorname{cis} \alpha$ e $z = \rho \operatorname{cis} \theta$. Obtemos que:

$$(r \operatorname{cis} \alpha)^n = \rho \operatorname{cis} \theta.$$

Pela fórmula de De Moivre,

$$r^n \operatorname{cis}(n\alpha) = \rho \operatorname{cis} \theta.$$

Para que dois complexos sejam iguais eles devem ter módulos iguais e argumentos congruentes, portanto:

$$r^n = \rho \quad e \quad \operatorname{cis}(n\alpha) = \operatorname{cis} \theta$$

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad e \quad n\alpha = \theta + 2K\pi, \quad \text{com } K \in \mathbb{Z}$$

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad e \quad \alpha = \frac{\theta + 2K\pi}{n}.$$

Podemos concluir então que:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\operatorname{cis} \frac{\theta + 2K\pi}{n} \right).$$

Proposição 1.2. *Para cada número natural n , um número complexo $z = \rho \operatorname{cis} \theta \neq 0$ tem exatamente n raízes complexas enésimas, dadas por:*

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{para } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Demonstração. Consideremos α_k , com $k \in \mathbb{Z}$, os argumentos principais das raízes enésimas de z , portanto $\alpha_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \in [0, 2\pi]$. Observemos que para:

$$\begin{aligned}
k &= 0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\theta}{n} \\
k &= 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n} \\
k &= 2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\theta + 2 \cdot 2\pi}{n} \\
&\vdots \\
k &= n-1 \Rightarrow \alpha_{n-1} = \frac{\theta + (n-1) \cdot 2\pi}{n} \\
k &= n \Rightarrow \alpha_n = \frac{\theta + n \cdot 2\pi}{n}.
\end{aligned}$$

Notemos que ao tomarmos valores para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, encontramos $\alpha_0 \neq \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_{n-1}$ e como $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in [0, 2\pi]$, tais argumentos não são congruentes, o que nos dá n raízes complexas e distintas.

Entretanto, ao tomarmos $k = n$, encontramos:

$$\alpha_n = \frac{\theta + n \cdot 2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi.$$

Ou seja, α_n é congruente a α_0 . Note que se tomássemos $k > n$ ou $k \in \mathbb{Z}_-$, encontraríamos argumentos congruentes àqueles para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, donde concluímos que um número complexo $z \neq 0$ possui exatamente n raízes enésimas. \square

Observemos que as raízes têm todas o mesmo módulo ($\sqrt[n]{|z|}$) e argumentos principais

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{para } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Portanto, os argumentos principais das raízes constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Como as raízes complexas estão uniformemente espaçadas, geometricamente, seus afixos são pontos que dividem em n partes iguais uma circunferência de raio $\sqrt[n]{|z|}$, centrado na origem. Portanto, se $\sqrt[n]{|z|} \neq 0$, seus afixos são vértices de um polígono regular de n lados inscrito nesta circunferência, conforme figura 1.8. Se $\sqrt[n]{|z|} = 0$, todas as raízes são iguais a zero, o que obviamente só acontece se $z = 0$.

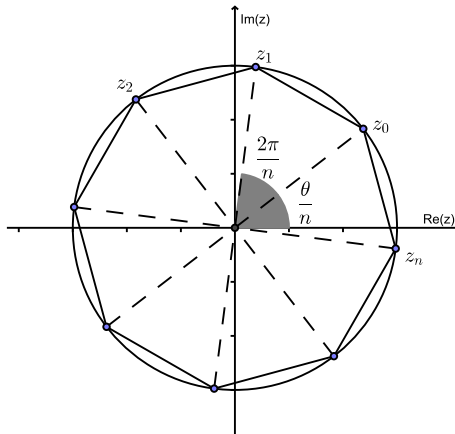


Figura 1.8: Raízes enésimas de um número complexo.

Exemplo 1.3. Se $n = 2$, os afixos das raízes complexas são pontos diametralmente opostos. Se $n = 3$, os afixos são vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo dado. Se $n = 4$, de um quadrado e assim por diante.

Exemplo 1.4. Consideremos agora o número real 1, que tem módulo 1 e argumento 0. Então, as raízes quintas e complexas da unidade são:

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\text{cis } 0} = \text{cis} \left(\frac{0 + 2k\pi}{5} \right) = \text{cis} \frac{2k\pi}{5}.$$

Notemos que cada aumento de uma unidade no valor de k causa um aumento de $\frac{2\pi}{5}$ no argumento, entretanto, se aumentássemos em 5 unidades o valor de k , gerariamos um aumento de 2π no argumento e faríamos com que o valor de $\text{cis} \frac{2k\pi}{5}$ se repetisse. Portanto, fazendo $k = 0, 1, 2, 3, 4$ as raízes complexas quintas da unidade são:

Para $k = 0$, temos $w_0 = \text{cis } 0$;

Para $k = 1$, temos $w_1 = \text{cis} \frac{2\pi}{5}$;

Para $k = 2$, temos $w_2 = \text{cis} \frac{4\pi}{5}$;

Para $k = 3$, temos $w_3 = \text{cis} \frac{6\pi}{5}$;

Para $k = 4$, temos $w_4 = \text{cis} \frac{8\pi}{5}$.

Observemos que tais raízes são vértices de um pentágono regular inscrito num círculo unitário - figura 1.9.

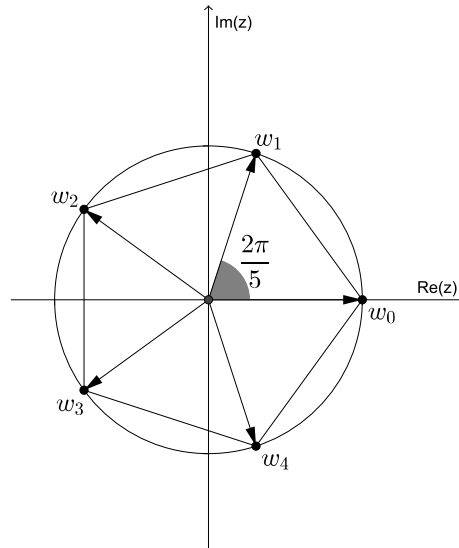


Figura 1.9: Raízes quintas da unidade.

Exemplo 1.5. Abaixo, ilustradas na figura 1.10, estão representadas as raízes complexas cúbicas da unidade e as raízes complexas sextas da unidade, respectivamente:

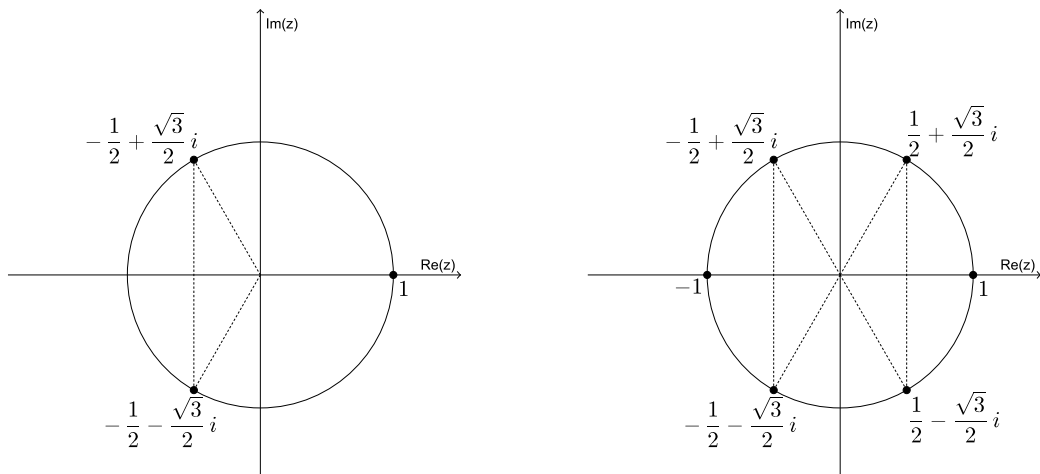


Figura 1.10: Raízes complexas cúbicas e sextas da unidade.

Exemplo 1.6. Determinaremos as raízes cúbicas de $z = -8i$. Temos que seu módulo é 8 e o argumento é $\frac{3\pi}{2}$. Portanto, para calcularmos as raízes complexas cúbicas de z fazemos:

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[3]{-8i} \\ &= \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \right) \\ &= 2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} \right), \text{ com } k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Assim, as raízes cúbicas w_0 , w_1 e w_2 de z têm módulo 2 e são:

$$\text{Para } k = 0, \text{ temos } w_0 = 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = 2i;$$

$$\text{Para } k = 1, \text{ temos } w_1 = 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i;$$

$$\text{Para } k = 2, \text{ temos } w_2 = 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{11\pi}{6} = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i.$$

Consequentemente, essas raízes são vértices de um triângulo equilátero inscrito num círculo centrado na origem e de raio 2, conforme figura 1.11.

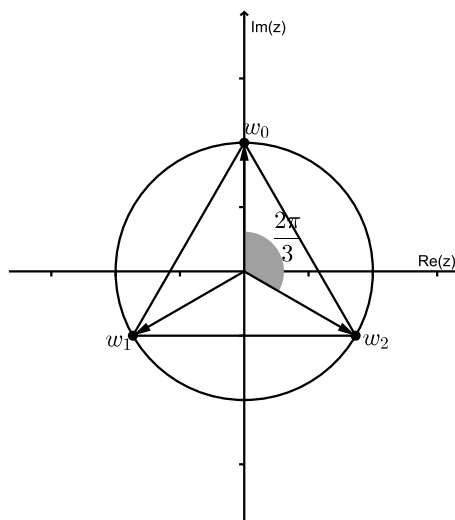


Figura 1.11: Raízes cúbicas complexas de $-8i$.

Capítulo 2

Transformações Geométricas e Números Complexos

Neste capítulo falaremos sobre algumas transformações geométricas fazendo um paralelo entre elas e as operações com números complexos. As referências principais para esse capítulo são: [3], [9], [14] e [15].

2.1 Semelhanças

Definição 2.1. Chama-se de **transformação no plano** toda função $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Sejam A e B pontos do plano. Indiquemos por \overline{AB} a distância entre os pontos A e B , ou seja, o comprimento do segmento de reta AB . Se $A = B$ então $\overline{AB} = 0$. Se $A \neq B$ então $\overline{AB} > 0$. Se C pertence ao segmento AB então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.

Definição 2.2. Seja r um número real positivo. Uma **semelhança** de razão r no \mathbb{R}^2 é uma transformação $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que multiplica por r a distância entre dois pontos P, Q quaisquer em \mathbb{R}^2 , isto é

$$\overline{P_1Q_1} = r \cdot \overline{PQ}, \text{ onde } P_1 = S(P) \text{ e } Q_1 = S(Q).$$

Chamemos a atenção ao fato de que uma semelhança de razão 1 é chamada **isometria**, uma vez que preserva a distância entre dois pontos.

Semelhanças têm algumas propriedades importantes que veremos a seguir.

Proposição 2.3. *Se S e S' são semelhanças, de razão r e r' respectivamente, a composta $S \circ S' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma semelhança de razão $r \cdot r'$.*

Demonstração. Consideremos as semelhanças S, S' de razão r e r' , respectivamente, e os pontos A e B de modo que A_1 e B_1 sejam imagens, respectivamente, de A e B pela semelhança S' , portanto $\overline{A_1B_1} = r' \cdot \overline{AB}$.

Sejam agora os pontos A_2 e B_2 , respectivamente, as imagens de A_1 e B_1 pela semelhança S , daí $\overline{A_2B_2} = r \cdot \overline{A_1B_1}$.

Consideremos agora a composta $S \circ S' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, deste modo $S(S'(A)) = S(A_1) = A_2$ e $S(S'(B)) = S(B_1) = B_2$. Como $\overline{A_1B_1} = r' \cdot \overline{AB}$ e $\overline{A_2B_2} = r \cdot \overline{A_1B_1}$, podemos concluir que $\overline{A_2B_2} = r \cdot r' \cdot \overline{AB}$, e portanto, $S \circ S'$ é uma semelhança de razão $r \cdot r'$.

□

Proposição 2.4. *Toda semelhança $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação injetiva.*

Demonstração. Consideremos dois pontos distintos A e B , portanto $\overline{AB} > 0$. Seja $S(A) = A_1$ e $S(B) = B_1$ e S uma semelhança de razão r , então

$$\overline{A_1B_1} = r \cdot \overline{AB} > 0 \Rightarrow A_1 \neq B_1.$$

□

Proposição 2.5. *Toda semelhança $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma retas em retas.*

Demonstração. Consideremos dois pontos distintos A e B e uma reta r de modo que A e B pertençam a r . Tomemos a reta r_1 que passa pelos pontos A_1 e B_1 , imagens de A e B por S . Tomemos também o ponto C , de modo que C pertença ao segmento AB , como ilustrado na figura 2.1, logo $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ (os demais casos são tratados de forma análoga: $A \in \overline{BC}$ e $B \in \overline{AC}$). Seja $C_1 = S(C)$.

Seja s a razão de semelhança de S , portanto $\overline{A_1B_1} = s \cdot \overline{AB} = s \cdot (\overline{AC} + \overline{CB}) = s \cdot \overline{AC} + s \cdot \overline{CB} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1B_1}$, ou seja, C_1 pertence ao segmento A_1B_1 . Disto vem que os pontos A_1 , B_1 e C_1 são colineares, donde concluímos que a semelhança S transforma uma reta r numa reta $r_1 = S(r)$.

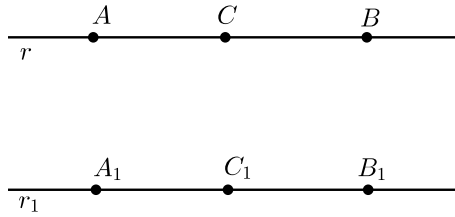


Figura 2.1: Toda semelhança transforma retas em retas.

□

Proposição 2.6. *Toda semelhança transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Demonstração. Consideremos o triângulo retângulo ABC , retângulo em A - figura 2.2, e a semelhança S de razão r , de modo que $S(A) = A_1$, $S(B) = B_1$ e $S(C) = C_1$. Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Então,

$$\overline{B_1C_1}^2 = r^2 \cdot \overline{BC}^2 = r^2 \cdot \overline{AB}^2 + r^2 \cdot \overline{AC}^2 = \overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_1C_1}^2.$$

Pela recíproca do teorema de Pitágoras temos que o triângulo $A_1B_1C_1$ é retângulo, o que significa que a semelhança S transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.

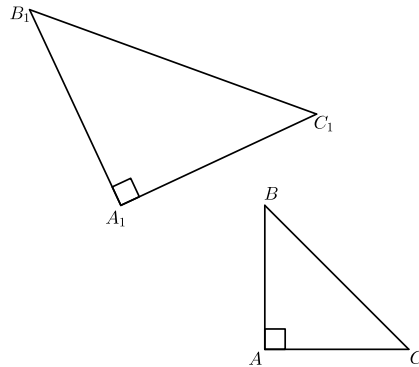


Figura 2.2: Toda semelhança transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.

□

Proposição 2.7. *Toda semelhança $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma bijeção, cuja inversa $S^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é ainda uma semelhança.*

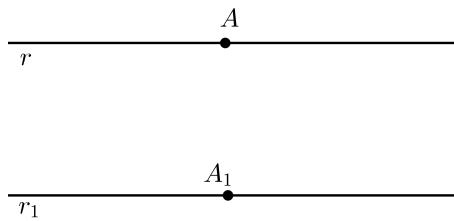


Figura 2.3: Se $A_1 \in r_1$, então existe um ponto $A \in r$ tal que $S(A) = A_1$.

Demonstração. Mostramos na proposição 2.4 que S é injetiva, basta então mostrarmos que S é sobrejetiva. Para isto, tomemos um ponto arbitrário $A_1 \in \mathbb{R}^2$ e determinaremos um ponto

$A \in \mathbb{R}^2$, de modo que $S(A) = A_1$. Tracemos no plano uma reta r . Como demonstrado na proposição 2.5, toda semelhança transforma retas em retas, portanto $S(r) = r_1$. Se $A_1 \in r_1$, então, por definição de imagem, existe um ponto $A \in r$ tal que $S(A) = A_1$, conforme figura 2.3.

Observando a figura 2.4, se A_1 não pertence a r_1 , seja s_1 a reta perpendicular a r_1 que passa por A_1 . Seja B_1 o ponto de intersecção entre r_1 e s_1 . Como $B_1 \in r_1$, então existe um ponto $B \in r$ tal que $S(B) = B_1$. Seja s a reta perpendicular a r passando por B . Foi demonstrado na proposição 2.6 que toda semelhança transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares, portanto a imagem de s pela semelhança S é perpendicular a r_1 e logo coincide com s_1 , ou seja, $S(s) = s_1$. Como $A_1 \in s_1$, então existe $A \in s$ tal que $S(A) = A_1$.

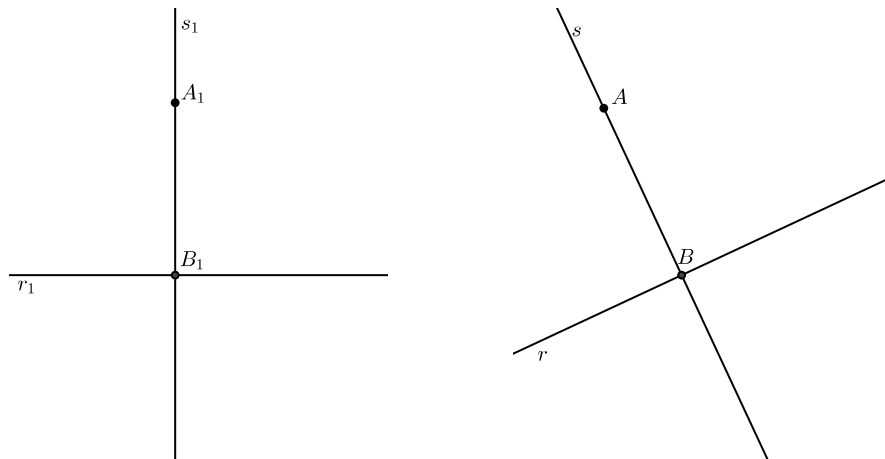


Figura 2.4: Como $A_1 \in s_1$, existe $A \in s$ tal que $S(A) = A_1$.

□

2.2 Transformações no Plano Complexo

Sabemos que o conjunto dos números complexos \mathbb{C} pode ser pensado como um conjunto de pares ordenados de números reais, portanto podemos definir uma **transformação no plano complexo** como uma função complexa $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ou seja, uma correspondência que associa cada $z \in \mathbb{C}$ a $z_1 \in \mathbb{C}$, de modo que $z_1 = T(z)$ é chamado de **imagem** de z por T . Sendo

assim, todas as definições e propriedades válidas para as transformações no \mathbb{R}^2 serão válidas ao se trabalhar no plano complexo.

Apresentaremos agora definições e exemplos de algumas semelhanças no plano complexo, para isso lembremos que o par ordenado $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é denominado afixo do complexo $z = x + yi$ e consideremos a distância entre dois números complexos igual à distância entre seus afixos. Desse modo, uma função complexa é dita **semelhança** quando multiplica por r a distância entre os afixos de dois números complexos, sendo r um número real positivo.

2.2.1 Translação

Já vimos que dois números complexos podem ser representados por vetores que têm como extremos a origem $(0, 0)$ do plano cartesiano e o afixo de cada número complexo. Portanto, seja $w \in \mathbb{C}$, fixo. Chamamos de **translação por w** a transformação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $T_w(z) = z + w$, como ilustrado na figura 2.5.

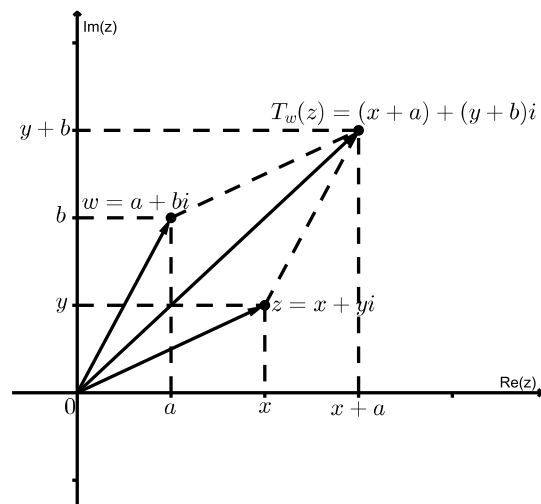


Figura 2.5: Translação segundo o complexo w .

Notemos que:

$$T_w(T_{-w}(z)) = T_w(z - w) = z - w + w = z,$$

$$T_{-w}(T_w(z)) = T_{-w}(z + w) = z + w - w = z.$$

Deste modo, podemos concluir que a transformação T_w e sua inversa T_{-w} , representam, respectivamente, a soma e a subtração entre os números complexos w e z .

Proposição 2.8. *Seja $T_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a transformação de translação. Então, T_w é uma isometria.*

Demonstração. Sejam os complexos w, z, u e a transformação $T_w(z) = z + w$. Assim sendo,

$$|T_w(z) - T_w(u)| = |z + w - (u + w)| = |z + w - u - w| = |z - u|.$$

Logo T_w mantém a distância entre os complexos z e u , por conseguinte, T_w é uma isometria. □

Exemplo 2.9. Na figura 2.6, dado o triângulo ABC de vértices $A = (4, 3)$, $B = (3, 1)$ e $C = (1, 2)$, determine as coordenadas dos vértices do triângulo $A_1B_1C_1$, obtido da translação do triângulo ABC segundo o vetor $w = (-2, 2)$.

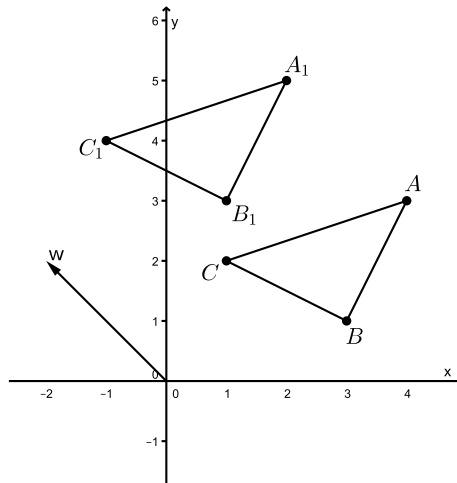


Figura 2.6: Translação do triângulo ABC segundo o vetor w .

Sejam os vértices do triângulo ABC afixos dos números complexos $z_A = 4 + 3i$, $z_B = 3 + i$ e $z_C = 1 + 2i$. Consideremos $w = -2 + 2i$ e a transformação $T_w(z) = z + w$, então,

$$T_w(z_A) = z_A + w = (4 + 3i) + (-2 + 2i) = 2 + 5i,$$

$$T_w(z_B) = z_B + w = (3 + i) + (-2 + 2i) = 1 + 3i,$$

$$T_w(z_C) = z_C + w = (1 + 2i) + (-2 + 2i) = -1 + 4i.$$

Portanto as coordenadas dos vértices do triângulo $A_1B_1C_1$ são: $A_1 = (2, 5)$, $B_1 = (1, 3)$ e $C_1 = (-1, 4)$.

2.2.2 Multiplicação por $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$

Consideremos os números complexos $\alpha \neq 0$ e z . Escrevendo α na forma polar, temos que $\alpha = \rho \cdot \text{cis } \theta$, com $\rho, \theta \in \mathbb{R}$ e $\rho > 0$, já que ρ é o módulo de α . Efetuando o produto $\alpha \cdot z$, teremos $\alpha \cdot z = \rho \cdot \text{cis } \theta \cdot z$.

Proposição 2.10. *Sejam os números complexos $\alpha = \rho \text{cis } \theta$ ($\alpha \neq 0$) e z . Então, a multiplicação de z por α é uma semelhança de razão ρ .*

Demonstração. Notemos que ao tomarmos os números complexos $z, w, \alpha = \rho \text{cis } \theta \neq 0$ e fazermos as multiplicações $\alpha \cdot z$ e $\alpha \cdot w$, obtemos

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot z - \alpha \cdot w| &= |\rho \cdot \text{cis } \theta \cdot z - \rho \cdot \text{cis } \theta \cdot w| \\ &= |\rho \cdot \text{cis } \theta| \cdot |z - w| \\ &= |\rho| \cdot |\text{cis } \theta| \cdot |z - w| \\ &= |\rho| \cdot |z - w| \\ &= \rho \cdot |z - w|. \end{aligned}$$

Assim sendo, a multiplicação por $\alpha = \rho \cdot \text{cis } \theta$, multiplica por ρ a distância entre os complexos z e w , por isso é uma semelhança de razão ρ .

□

Prestemos atenção ao fato de que se $\rho = 1$, ou seja, α for um número complexo unitário, a multiplicação por α será uma isometria, uma vez que preservará a distância entre dois números complexos.

Analisaremos agora os seguintes casos:

1º caso: $\alpha = \text{cis } \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$

Sejam os números complexos $\alpha = \text{cis } \theta$, ou seja, um complexo unitário e $z_1 = \rho_1 \cdot \text{cis } \theta_1$, portanto

$$\alpha \cdot z_1 = \text{cis } \theta \cdot \rho_1 \cdot \text{cis } \theta_1 = \rho_1 \cdot \text{cis}(\theta_1 + \theta).$$

Multipliquemos agora o número complexo z_1 por $\frac{1}{\alpha}$, logo

$$\frac{1}{\alpha} \cdot z_1 = \frac{1}{\text{cis } \theta} \cdot \rho_1 \cdot \text{cis } \theta_1 = \frac{\rho_1 \cdot \text{cis } \theta_1}{\text{cis } \theta} = \rho_1 \cdot \frac{\text{cis } \theta_1}{\text{cis } \theta} = \rho_1 \cdot \text{cis}(\theta_1 - \theta).$$

Notemos que em ambos os casos o módulo de z_1 não é alterado, $|\alpha \cdot z_1| = \left| \frac{1}{\alpha} \cdot z_1 \right| = |z_1|$, donde podemos concluir que, geometricamente, ao multiplicarmos um complexo z por um complexo unitário estamos aplicando a z uma rotação no sentido anti-horário de ângulo igual ao argumento do outro complexo e que ao efetuarmos a divisão de z por um complexo unitário aplicamos a z uma rotação no sentido horário de amplitude igual ao argumento do divisor, como podemos observar na figura 2.7.

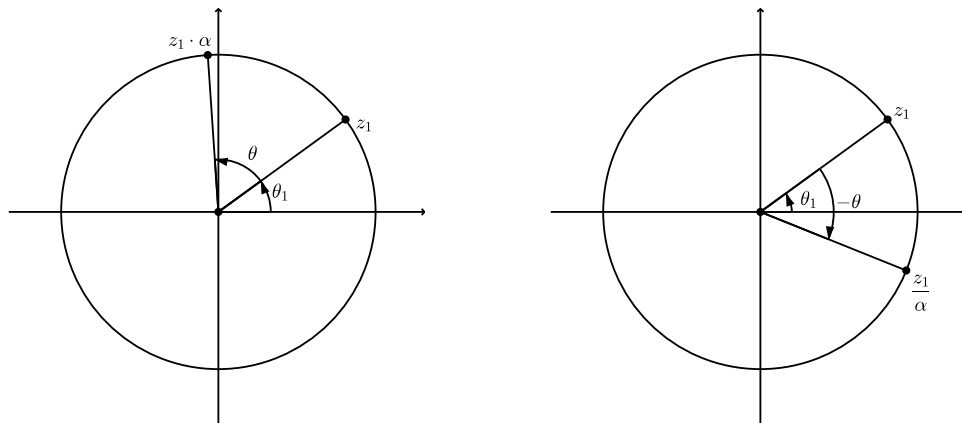


Figura 2.7: Rotação de um número complexo nos sentidos anti-horário e horário.

Portanto, em se tratando do plano complexo e considerando $\theta \in \mathbb{R}$, definimos a **rotação de θ radianos** como sendo a transformação $R_\theta(z) = \text{cis } \theta \cdot z$. Como $|R_\theta(z)| = |\text{cis } \theta| \cdot |z| = |z|$

e $\arg(R_\theta(z)) = \theta + \arg(z)$, a transformação de z por R_θ é efetivamente uma rotação, em torno da origem no plano complexo, de θ radianos do ponto z e sua inversa é $R_{-\theta}$.

Notemos que se $\alpha = \text{cis } \pi$, ao realizarmos a multiplicação $\alpha \cdot z$ será aplicada ao complexo z uma rotação de π radianos no sentido anti-horário e que esse produto é a reflexão do complexo z através da origem.

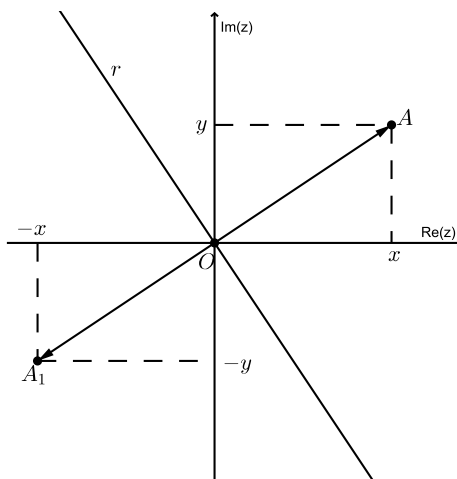


Figura 2.8: Reflexão do complexo z através da origem.

De fato, tomemos os números complexos $z = x + yi$, $z_1 = -x - yi$ e $\alpha = \text{cis } \pi$, então $z \cdot \alpha = (x + yi) \cdot \text{cis } \pi = (x + yi) \cdot (-1) = -x - yi = z_1$. Consideremos na figura 2.8 os pontos A e A_1 como afixos dos complexos z e z_1 , respectivamente, e uma reta r perpendicular ao segmento AA_1 no ponto O . Como $|z| = |z_1|$, temos que O é o ponto médio do segmento AA_1 , assim sendo, a reta r é mediatriz desse segmento.

Portanto, dado um número complexo z a transformação $R_O : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $R_O(z) = z \cdot \text{cis } \pi$ é chamada de **reflexão do complexo z através da origem**.

Notemos que $R_O^{-1} = R_O$, já que dado o número complexo z , temos que $R_O(R_O(z)) = R_O(z \cdot \text{cis } \pi) = (z \cdot \text{cis } \pi) \cdot \text{cis } \pi = z \cdot (-1) \cdot (-1) = z$, ou seja, $R_O(R_O(z)) = I$.

Exemplo 2.11. Dado o complexo $z = 2 - 3i$, sua reflexão através da origem é dada por $R_O(z) = \text{cis } \pi \cdot z = (-1) \cdot (2 - 3i) = -2 + 3i$ - figura 2.9.

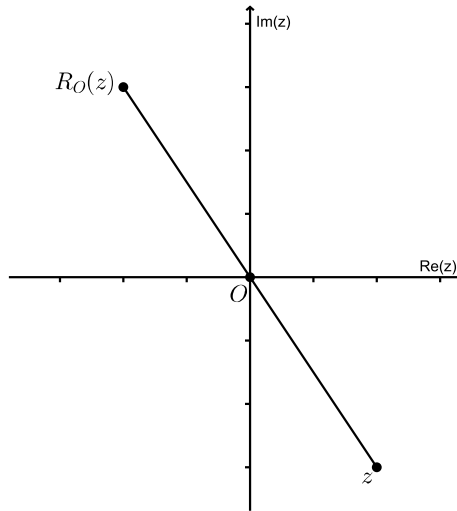


Figura 2.9: Reflexão do complexo $z = 2 - 3i$ através da origem.

Exemplo 2.12. Consideremos o complexo arbitrário $z_1 = \rho_1 \cdot \text{cis } \theta_1$ e o complexo i , daí:

$$iz_1 = i \cdot \rho_1 \cdot \text{cis } \theta_1 = \text{cis } \frac{\pi}{2} \cdot \rho_1 \cdot \text{cis } \theta_1 = \rho_1 \cdot \text{cis } \left(\theta_1 + \frac{\pi}{2} \right),$$

ou seja, multiplicar um complexo arbitrário z_1 por i , significa aplicar no complexo z_1 uma rotação no sentido anti-horário de $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Observemos que toda rotação é uma transformação isométrica, uma vez que ao rotacionarmos um número complexo z em θ radianos efetuamos a multiplicação de z por $\alpha = \text{cis } \theta$ e $|\alpha| = |\text{cis } \theta| = 1$, ou seja, α é um complexo unitário. Donde podemos concluir que a transformação de reflexão do complexo z através da origem também é uma isometria.

2º caso: $\alpha = r, r \in \mathbb{R}^*$

Consideremos os complexos $\alpha = r$ ($r > 0$) e z , assim $\alpha \cdot z = r \cdot z$. Sabemos que o módulo de um número complexo é igual a norma do vetor a ele associado, portanto em \mathbb{C} , uma **homotetia de razão** $r > 0$ é uma transformação que multiplica por r o módulo do número complexo. Daí, sendo r um número real positivo, definimos **homotetia com razão** r , como sendo a transformação $H_r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $H_r(z) = r \cdot z$.

De fato, consideremos o número complexo $z = A = (x, y)$, logo $|\overrightarrow{OA}| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Multiplicando z por $r > 0$, temos $z_1 = A_1 = (rx, ry)$, daí $|\overrightarrow{OA_1}| = |z_1| = \sqrt{r^2x^2 + r^2y^2} = r \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = r \cdot |\overrightarrow{OA}| = r \cdot |z|$, ou seja, ao multiplicarmos um número complexo por $r > 0$ estamos multiplicando seu módulo por esse fator. Se $\alpha = r = 1$ a homotetia se reduz à transformação identidade.

Notemos que $|H_r(z)| = |r \cdot z| = r \cdot |z|$ e $\arg(H_r(z)) = \arg(r \cdot z) = \arg(z)$, donde podemos concluir que a transformação H_r é uma **contração** de $|z|$, quando $0 < r < 1$, e uma **dilatação** de $|z|$, se $r > 1$, sempre mantendo fixo o argumento de z , como podemos observar na figura 2.10.

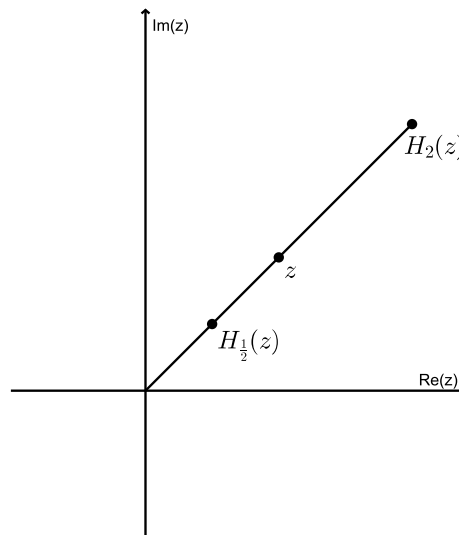


Figura 2.10: Homotetias de razão $r = 2$ e $r = \frac{1}{2}$ do complexo z .

De acordo com as proposições 2.3 e 2.10, a transformação H_r é uma bijeção, uma vez que é uma semelhança, portanto para cada $w \in \mathbb{C}$ existe um único $z \in \mathbb{C}$ tal que $w = H_r(z) = r \cdot z$. De fato, basta tomarmos $z = \frac{1}{r} \cdot w$. Assim sendo, a inversa de H_r é a homotetia $H_{\frac{1}{r}}$, de razão $\frac{1}{r}$. Portanto H_r^{-1} é uma contração (respectivamente, uma dilatação), se, e somente se, H_r é uma dilatação (respectivamente, uma contração).

Tomemos agora um número complexo z e consideremos $\alpha = r$, $r < 0$. Ao efetuarmos a multiplicação $\alpha \cdot z$, temos

$$\alpha \cdot z = r \cdot z = |r| \cdot (-1) \cdot z.$$

Como $-1 = \text{cis } \pi$,

$$r \cdot z = |r| \cdot \text{cis } \pi \cdot z.$$

Como vimos anteriormente, a reflexão do complexo z através da origem é uma transformação definida pela função $R_O(z) = \text{cis } \pi \cdot z$. Considerando a transformação

$$H_-(z) = r \cdot z = |r| \cdot \text{cis } \pi \cdot z = |r| \cdot R_O(z) = H_{|r|}(R_O(z)), \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Temos que H_- é a composição da homotetia de razão $|r|$ com a reflexão em torno da origem, o que está ilustrado na figura 2.11. Portanto, definimos a **multiplicação de z por um fator $r < 0$** , como a transformação $H_- : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $H_-(z) = |r| \cdot R_O(z)$.

Como a multiplicação de números complexos é comutativa, as funções homotetia $H_{|r|}$ e rotação R_O comutam, permitindo escrever $H_- = H_{|r|} \circ R_O = R_O \circ H_{|r|}$.

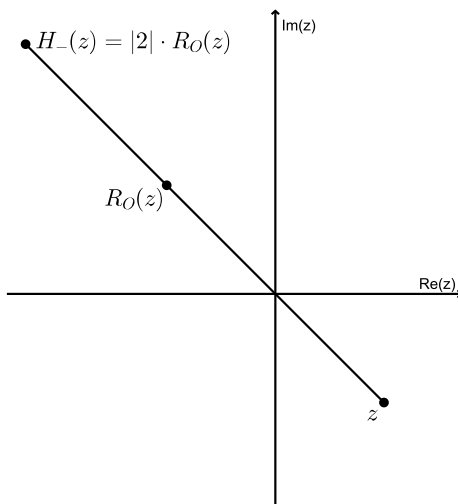


Figura 2.11: Multiplicação de z pelo um fator $r = -2$.

A transformação H_- é uma semelhança, portanto ela é bijetiva e admite inversa, como provado nas proposições 2.3 e 2.10. De fato, note que para qualquer $w \in \mathbb{C}$, existe um único

$z \in \mathbb{C}$ tal que $w = |r| \cdot \text{cis } \pi \cdot z$. Para isto, basta tomarmos $z = \frac{w}{|r| \cdot \text{cis } \pi} = \frac{1}{|r|} \cdot \frac{1}{\text{cis } \pi} \cdot w$. Portanto, $H_-^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma semelhança de razão $\frac{1}{|r|}$, dada por $H_-^{-1}(z) = \frac{1}{|r|} \cdot R_O(z)$.

Exemplo 2.13. Ao aplicarmos no complexo $z = 3 + 4i$ homotetias de razão $r = 5$ e $r' = \frac{1}{5}$, encontramos $z_1 = H_5(3 + 4i) = 5 \cdot (3 + 4i) = 15 + 20i$ e $z_2 = H_{\frac{1}{5}}(3 + 4i) = \frac{1}{5} \cdot (3 + 4i) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. Notemos que $|z| = 5$, $|z_1| = 25$ e $|z_2| = 1$. Portanto, ao multiplicarmos o complexo z , por um fator $r > 1$ ou por $r \in]0, 1[$, multiplicamos por r seu módulo. No entanto, quando $r > 1$, acontece uma dilatação do módulo do número complexo e, quando $r \in]0, 1[$, uma contração.

Exemplo 2.14. Ao multiplicarmos o número complexo $w = 1 + 2i$, pelo fator $r = -3$, encontramos $w_1 = -3 - 6i$. Notemos que w_1 é obtido pela rotação através da origem do complexo w , determinando assim $w' = R_O(w) = \text{cis } \pi \cdot w = -1 - 2i$, seguida da homotetia de razão $|r| = 3$, resultando $w_1 = H_3(w') = 3 \cdot (-1 - 2i) = -3 - 6i$, ou seja, aplicamos em w a transformação $H_-(z) = |r|R_O(z)$.

2.2.3 Reflexão através da reta r

Nesta seção apresentaremos as fórmulas que darão a reflexão de um número complexo z através das retas $r : y = 0$, $r : y = ax$, $r : y = ax + b$ e $r : x = b$. É importante destacarmos que dividimos em tais casos por acharmos que ficaria mais didático, entretanto esses casos não são excludentes.

Reflexão através da reta $r : y = 0$

Consideremos um sistema de eixos ortogonais xOy e a reta $r : y = 0$, através da qual se dá a reflexão $C : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Tomemos o complexo $A = z = x + iy$, de modo que $C(A) = A_1 = x - iy = \bar{z}$. Como a reta $r : y = 0$ coincide com o eixo Ox , temos que a reflexão C em torno do eixo real é definida pela expressão $C(z) = \bar{z}$ e é chamada de **conjugação**.

De fato, observando a figura 2.12, consideremos os triângulos AOB e A_1OB , retângulos em B , temos que $A\hat{O}B \sim A_1\hat{O}B$, $\overline{OA} = \overline{OA_1}$, pois $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$ e $|z| = |\bar{z}|$ e OB é um lado comum aos triângulos, logo pelo caso de congruência LAL temos que os triângulos AOB

e A_1OB são congruentes, daí $\overline{AB} = \overline{A_1B}$, portanto o ponto B , que pertence ao eixo Ox , divide o segmento AA_1 em duas partes iguais, ou seja, o eixo real é a mediatriz do segmento AA_1 .

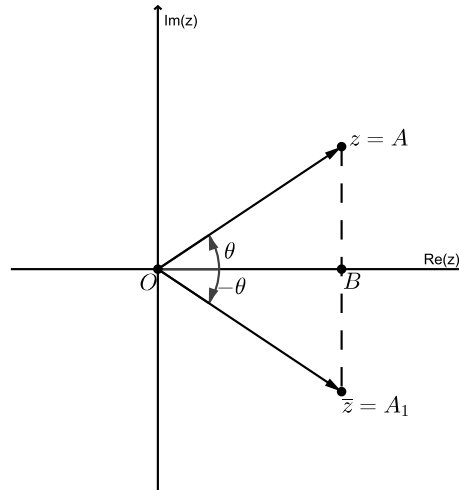


Figura 2.12: Reflexão através do eixo real.

Todo número real é chamado de ponto fixo da conjugação. Consideremos o número $z \in \mathbb{R}$, logo z pertence ao eixo real, por isso $C(z) = \bar{z} = z$.

Notemos também que $C(C(z)) = C(\bar{z}) = \overline{\bar{z}} = z$, logo $C \circ C = I$, ou seja, $C^{-1} = C$.

Exemplo 2.15. Dado o triângulo ABC de vértices $A = (0, 1)$, $B = (2, 2)$ e $C = (1, 3)$ na figura 2.13, as coordenadas dos vértices do novo triângulo $A_1B_1C_1$, obtido da reflexão do triângulo ABC através do eixo real, serão encontradas considerando os vértices A , B e C como afixos dos complexos $z_A = i$, $z_B = 2 + 2i$ e $z_C = 1 + 3i$ e fazendo:

$$A_1 = \overline{z_A} = \bar{i} = -i = (0, -1),$$

$$B_1 = \overline{z_B} = \overline{2 + 2i} = 2 - 2i = (2, -2),$$

$$C_1 = \overline{z_C} = \overline{1 + 3i} = 1 - 3i = (1, -3).$$

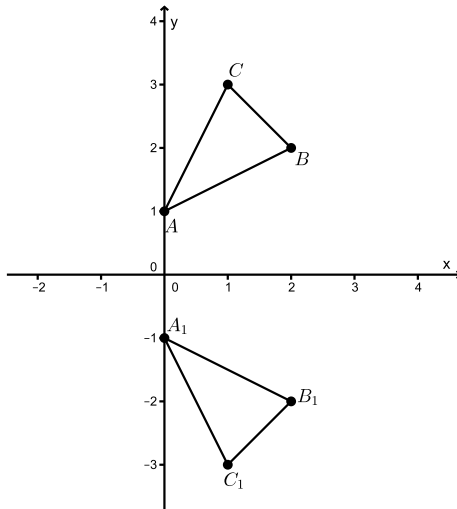


Figura 2.13: Reflexão do triângulo ABC através do eixo real

Reflexão através da reta $r : y = ax$

Analisaremos agora a reflexão do complexo w através da reta $r : y = ax$. Sejam $w, z \in \mathbb{C}$ (pensados como pontos do plano). Seja $R_z(w) = w'$ a reflexão do ponto $w \in \mathbb{R}^2$ através da reta gerada pelo vetor z (ou seja, o vetor que liga a origem ao ponto correspondente a z). Queremos calcular uma fórmula para $R_z(w)$.

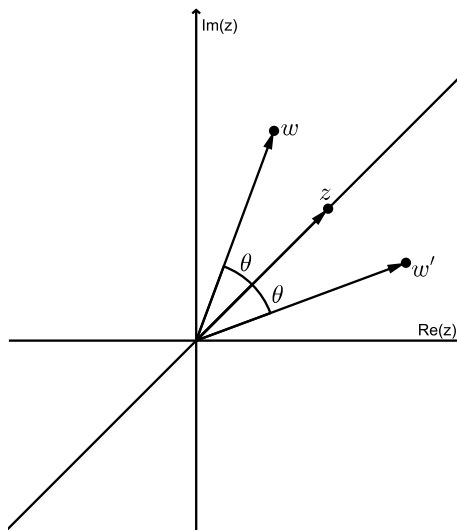


Figura 2.14: Reflexão do complexo w através da reta $r : y = ax$.

Seja θ o ângulo entre os vetores w e z - figura 2.14 - e seja

$$u := \text{cis } \theta.$$

Sejam $\arg(w) = \beta$ e $\arg(z) = \beta - \theta$, como ilustrado na figura 2.15, logo $z = |z| \text{cis}(\beta - \theta)$ e $w = |w| \text{cis } \beta$, donde temos que

$$wz^{-1} = |w||z^{-1}| \text{cis}(\beta - \beta + \theta) = |w||z^{-1}| \text{cis } \theta, \text{ ou seja, } \text{cis } \theta = \frac{wz^{-1}}{|w||z^{-1}|}.$$

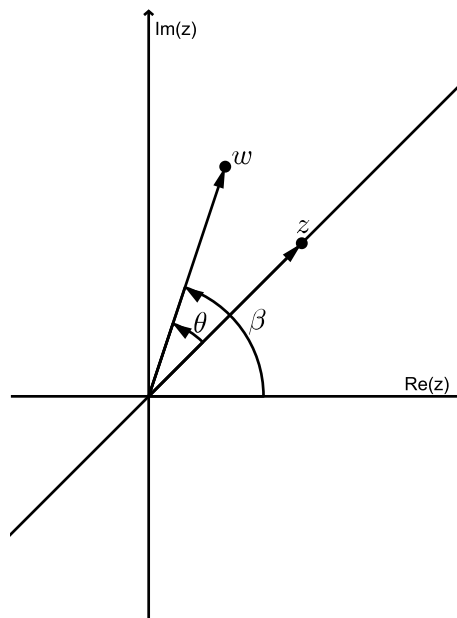


Figura 2.15: $z = |z| \text{cis}(\beta - \theta)$ e $w = |w| \text{cis } \beta$.

Portanto,

$$u = \frac{wz^{-1}}{|wz^{-1}|}. \quad (2.1)$$

Geometricamente, vemos que

$$R_z(w) = w \text{cis}(-2\theta) = wu^{-2}.$$

Usando (2.1) e simplificando, temos que

$$\begin{aligned} R_z(w) &= w \cdot \left(\frac{wz^{-1}}{|wz^{-1}|} \right)^{-2} = w \cdot \left(\frac{|wz^{-1}|}{wz^{-1}} \right)^2 = \\ &= w \cdot \left(\frac{|w|^2 |z|^{-2}}{w^2 z^{-2}} \right) = w \cdot \left(\frac{|w|^2 z^2}{w^2 |z|^2} \right) = \frac{|w|^2 z^2}{w |z|^2}. \end{aligned}$$

Usando que $|w|^2 = w\bar{w}$ e $|z|^2 = z\bar{z}$ e simplificando, temos que

$$R_z(w) = \frac{w\bar{w}z^2}{wz\bar{z}} = \frac{z\bar{w}}{\bar{z}}. \quad (2.2)$$

Portanto, a transformação $R_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $R_z(w) = \frac{z\bar{w}}{\bar{z}}$ é chamada de **reflexão do complexo w em torno da reta r** , onde z é um vetor diretor de r .

Observação 2.16. A reflexão através da reta $r : y = 0$ é uma situação particular deste caso. De fato, para $a = 0$, $z \in \mathbb{R}$, daí $\bar{z} = z$, ou seja, $R_z(w) = \bar{w}$.

Exemplo 2.17. Dado o complexo $w = 2 + 5i$, para determinarmos as coordenadas do afixo do complexo w_1 , figura 2.16, obtido após reflexão do complexo w em relação à reta $r : y = -3x$, tomamos um vetor diretor da reta r , seja $z = (-1, 3)$ tal vetor, e aplicamos a fórmula 2.2.

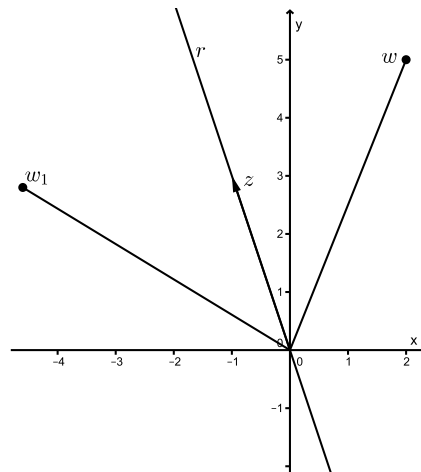


Figura 2.16: Reflexão do complexo w através da reta $r : y = -3x$.

$$\begin{aligned}
R_{(-1,3)}(2+5i) &= \frac{(-1+3i)\overline{(2+5i)}}{(-1+3i)} \\
&= \frac{(-1+3i)(2-5i)}{(-1-3i)} \\
&= \frac{-23+14i}{5}.
\end{aligned}$$

Portanto, $w_1 = \frac{-23+14i}{5}$ e as coordenadas do seu afixo são $(-\frac{23}{5}, \frac{14}{5})$.

Reflexão através da reta $r : y = ax + b$

Para obtermos a imagem do complexo $w = x + yi$, pela reflexão R_r através da reta $r : y = ax + b$, primeiro tomaremos um complexo $u \in r$, como por exemplo $u = bi$, e aplicaremos a w uma translação segundo o complexo $-u = -bi$, obtendo $w' = x + (y - b)i$. Em seguida, uma reflexão de w' através da reta r_1 que passa pela origem e é paralela a r , obtendo $w'' = x'' + iy''$. Finalmente, damos a w'' a translação segundo o complexo $u = bi$, chegando a $w_1 = R_r(w)$, conforme ilustrado na figura 2.17.

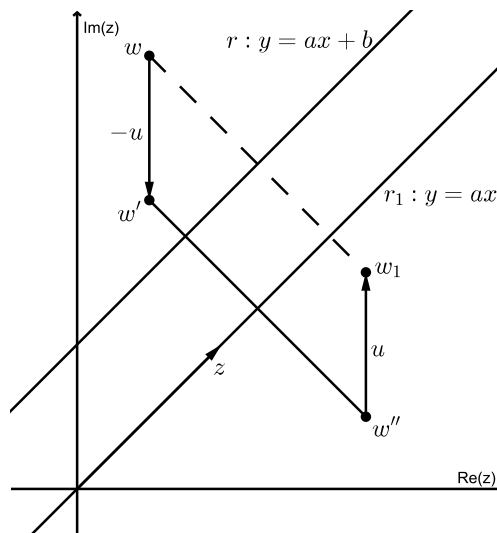


Figura 2.17: Reflexão através da reta $r : y = ax + b$.

Então a transformação $R_r(w) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $R_r(w) = R_z(w - u) + u$ é chamada de **reflexão do complexo w através da reta $r : y = ax + b$** , onde z é um vetor diretor de r ,

u pertence a reta r e R_z é a função $R_z(w) = \frac{z\bar{w}}{\bar{z}}$.

Observação 2.18. Ressaltamos que este caso é uma generalização dos dois primeiros - reflexão através das retas $r : y = 0$ e $r : y = ax$. De fato, ao tomarmos $b = 0$, teremos $R_r = R_z$.

Proposição 2.19. *Seja $R_r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a transformação de reflexão do complexo w através da reta $r : y = ax + b$. Então, R_r é uma isometria.*

Demonstração. Tomemos os complexos w e w_1 , a reta $r : y = ax + b$, o vetor z , diretor de r , o número complexo u , de modo que $u \in r$ e consideremos a transformação $R_r(w) = R_z(w - u) + u$, então:

$$\begin{aligned}
 |R_r(w) - R_r(w_1)| &= |R_z(w - u) + u - (R_z(w_1 - u) + u)| \\
 &= |R_z(w - u) + u - R_z(w_1 - u) - u| \\
 &= |R_z(w - u) - R_z(w_1 - u)| \\
 &= \left| \frac{z(w - u)}{\bar{z}} - \frac{z(w_1 - u)}{\bar{z}} \right| \\
 &= \frac{|z|}{|\bar{z}|} |(\overline{w - u}) - (\overline{w_1 - u})| \\
 &= |(\overline{w - u}) - (\overline{w_1 - u})| \\
 &= |(\bar{w} - \bar{u}) - (\bar{w}_1 - \bar{u})| \\
 &= |\bar{w} - \bar{u} - \bar{w}_1 + \bar{u}| \\
 &= |w - w_1|.
 \end{aligned}$$

Portanto, como a transformação R_r preserva a distância entre os complexos w e w_1 , R_r é uma isometria. □

Exemplo 2.20. Queremos determinar as coordenadas do afixo do complexo w_1 , figura 2.18, obtido da reflexão do complexo $w = 3 + 2i$ através da reta $r : y = 2x + 1$. Para isso, tomemos

o complexo $u = i$, pertencente a reta r , um vetor diretor de r , $z = (1, 2)$, e apliquemos a função $R_r(w) = R_z(w - u) + u$, onde $R_z(w) = \frac{z\bar{w}}{z}$, daí:

$$\begin{aligned}
 R_r(3 + 2i) &= \frac{(1 + 2i)(\overline{3 + 2i - i})}{1 + 2i} + i \\
 &= \frac{(1 + 2i)(3 - i)}{1 - 2i} + i \\
 &= \frac{5 + 5i}{1 - 2i} + i \\
 &= \frac{-5 + 15i}{5} + i \\
 &= -1 + 4i.
 \end{aligned}$$

Assim, $w_1 = -1 + 4i$ e as coordenadas do seu afixo são $(-1, 4)$.

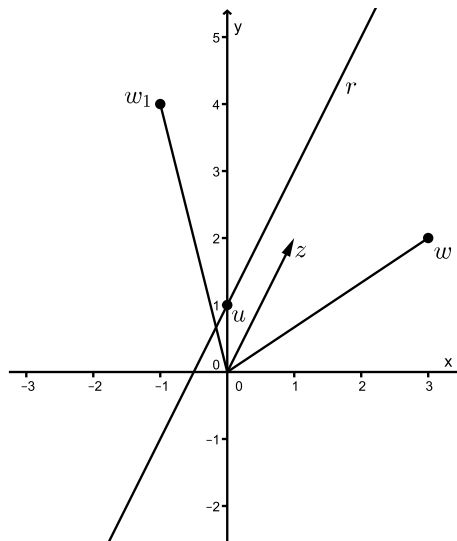


Figura 2.18: Reflexão do complexo $w = 3 + 2i$ através da reta $r : y = 2x + 1$.

Reflexão através da reta $r : x = b$

Nosso intuito agora é determinarmos uma fórmula para a reflexão R_b do complexo $w = x + iy$ através da reta $r : x = b$. Para isso, de modo análogo ao que fizemos na subseção anterior, tomemos um número complexo $u \in r$ e façamos a translação de w segundo o complexo $-u$ determinando, assim, $w' = w - u$. Em seguida, utilizando a fórmula 2.2,

façamos a reflexão de w' através da reta r_1 que passa pela origem e é paralela a r para encontrarmos $w'' = R_z(w-u)$. E, finalmente, fazemos a translação de w'' segundo o complexo u determinando $R_b(w) = w_1$, conforme figura 2.19. Portanto,

$$R_b(w) = \frac{z(\overline{w-u})}{\bar{z}} + u$$

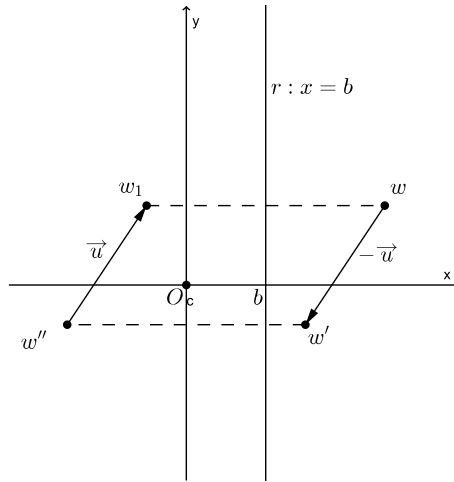


Figura 2.19: Reflexão de w através da reta $r : x = b$.

Pela fórmula 2.2 sabemos que z deve ser um vetor diretor da reta $r : x = b$, tomando $z = (0, 1) = i$, teremos

$$R_b(w) = \frac{i(\overline{w-u})}{\bar{i}} + u = (-1)(\overline{w-u}) + u = -(\bar{w} - \bar{u}) + u = -\bar{w} + \bar{u} + u.$$

Notemos que qualquer que seja o complexo u pertencente à reta $r : x = b$ sempre será da forma $u = b + yi$, com $y \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $\bar{u} + u = 2 \cdot b$, portanto,

$$R_b(w) = -\bar{w} + \bar{u} + u = -\bar{w} + 2 \cdot b.$$

Então, definamos a **reflexão do complexo w através da reta $r : x = b$** como a transformação $R_b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $R_b(w) = -\bar{w} + 2 \cdot b$.

Observação 2.21. A reflexão através da reta $r : x = b$ também é uma isometria. A demonstração é idêntica à da proposição 2.19.

Exemplo 2.22. Para determinarmos as coordenadas do afixo do complexo w' , obtido da reflexão do complexo $w = -2 + 3i$ através do eixo imaginário, basta notarmos que considerando um sistema cartesiano ortogonal, a reta $r : x = 0$ coincide com o eixo imaginário, logo teremos

$$w' = R_0(-2 + 3i) = -\overline{(-2 + 3i)} + 2 \cdot 0 = -(-2 - 3i) = 2 + 3i.$$

Portanto, sendo A o afixo de w' , temos que $A = (2, 3)$, conforme figura 2.20.

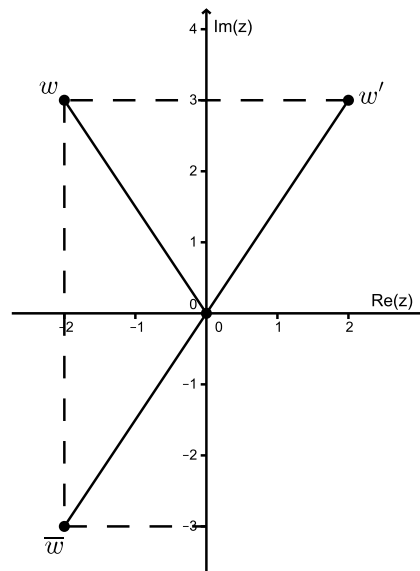


Figura 2.20: Reflexão do complexo $-2 + 3i$ através do eixo imaginário.

Capítulo 3

Aplicações para o Ensino Médio

Neste capítulo resolveremos questões de geometria analítica e números complexos retiradas de livros do ensino médio, de provas de vestibulares, de sites, adaptadas e elaboradas por nós, tratando as operações com números complexos como transformações geométricas. Ressaltamos que vários exercícios podem ser resolvidos usando outros métodos, no entanto, optamos por usar números complexos. As figuras foram produzidas no software de geometria dinâmica GeoGebra e podem ser utilizadas para um melhor entendimento dos procedimentos adotados, bem como, dos resultados encontrados.

1º) ([13], p. 208) **Considere o quadrado definido por $0 \leq Re(z) \leq 1$ e $0 \leq Im(z) \leq 1$.**

Determine a imagem desse quadrado pelas funções abaixo:

Notemos que a figura inicial é um quadrado de lado 1 localizado no primeiro quadrante.

a) $f(z) = 2z$

Solução:

Multiplicar o complexo z por 2 é aplicar no complexo z a homotetia de razão 2 (dilatação), logo sua imagem é um quadrado de lado 2, definido por $0 \leq Re(2z) \leq 2$ e $0 \leq Im(2z) \leq 2$, figura 3.1.

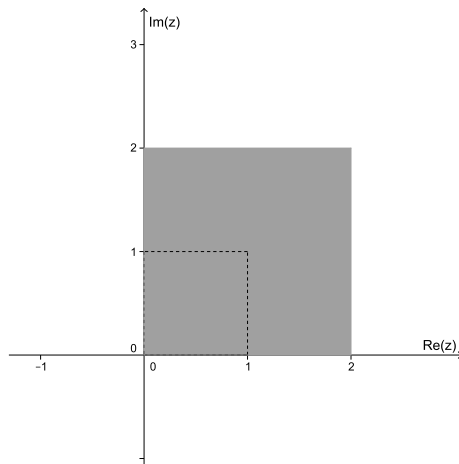


Figura 3.1: $f(z) = 2z$.

b) $f(z) = \bar{z}$

Solução:

É aplicado no complexo z a reflexão através do eixo real (conjugação), que é uma transformação isométrica, logo sua imagem é um quadrado de lado 1, porém localizado no 4º quadrante e definido por $0 \leq Re(\bar{z}) \leq 1$ e $-1 \leq Im(\bar{z}) \leq 0$, figura 3.2.

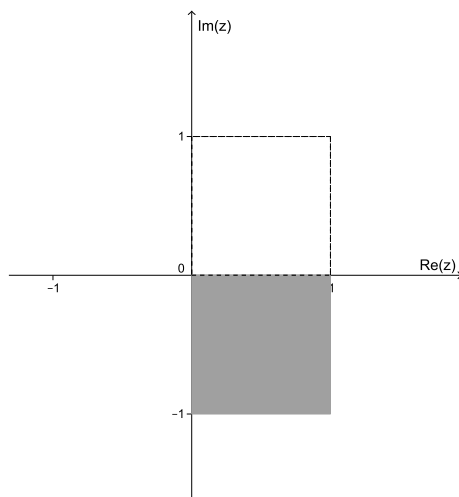


Figura 3.2: $f(z) = \bar{z}$.

c) $f(z) = iz$

Solução:

É aplicado no complexo z a transformação isométrica da rotação em torno da origem de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário, logo sua imagem é um quadrado de lado 1, localizado no 2º quadrante e definido por $-1 \leq \operatorname{Re}(iz) \leq 0$ e $0 \leq \operatorname{Im}(iz) \leq 1$, figura 3.3.

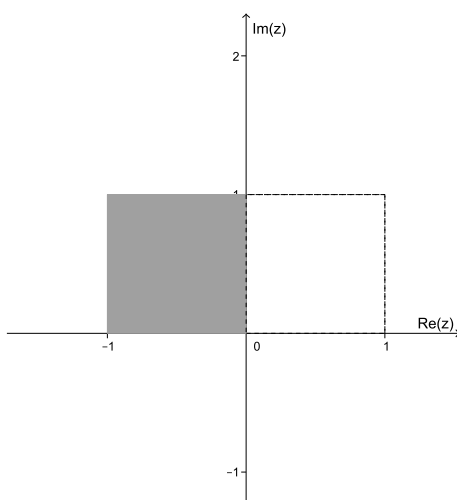


Figura 3.3: $f(z) = iz$.

d) $f(z) = i\bar{z}$

Solução:

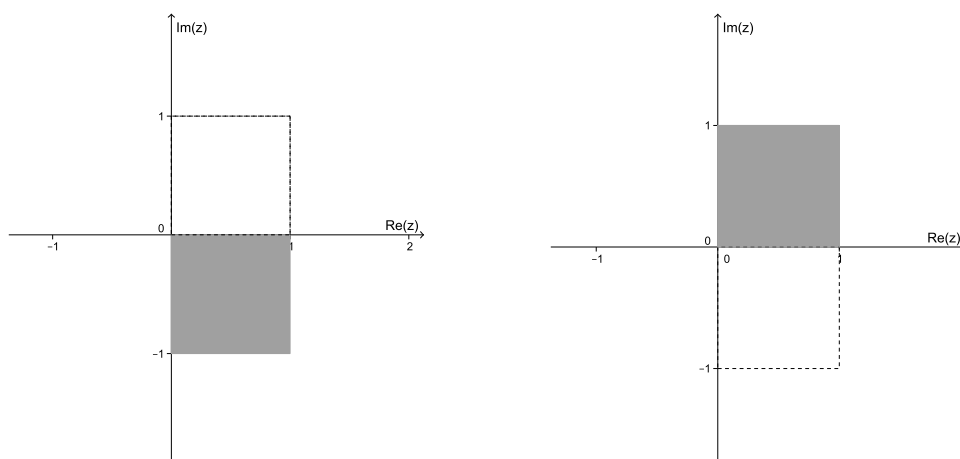


Figura 3.4: $f(z) = i\bar{z}$.

\bar{z} é a reflexão do complexo z através do eixo real (conjugação), logo $0 \leq \operatorname{Re}(\bar{z}) \leq 1$ e $-1 \leq \operatorname{Im}(\bar{z}) \leq 0$. A multiplicação de \bar{z} por i , equivale a rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos do complexo \bar{z} em torno da origem, no sentido anti-horário, então a imagem de $f(z) = i\bar{z}$ é definida por $0 \leq \operatorname{Re}(i\bar{z}) \leq 1$ e $0 \leq \operatorname{Im}(i\bar{z}) \leq 1$, ou seja, é a própria figura inicial, figura 3.4

e) $f(z) = (1 + i)z$

Solução:

Notemos que $1 + i = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, portanto $(1 + i)z = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \cdot z$, ou seja, é aplicado no complexo z a composição da rotação de amplitude $\frac{\pi}{4}$ radianos em torno da origem, no sentido anti-horário com a homotetia de razão $\sqrt{2}$. Sua imagem é um quadrado de lado $\sqrt{2}$, definido por $-1 \leq \operatorname{Re}((1 + i)z) \leq 1$ e $0 \leq \operatorname{Im}((1 + i)z) \leq 2$, conforme figura 3.5.

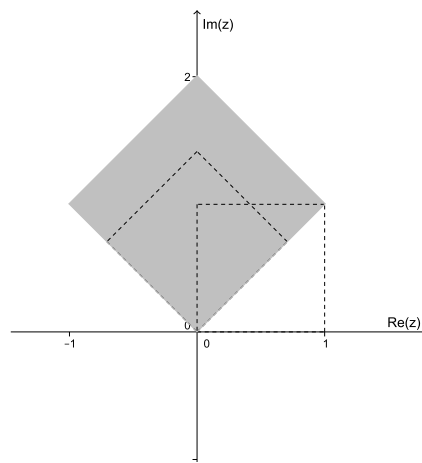


Figura 3.5: $f(z) = (1 + i)z$.

f) $f(z) = (1 - i)z + 2 + i$

Solução:

Como $1 - i = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4}$, temos que $(1 - i)z = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} \cdot z$, ou seja, é aplicado no complexo z a composição da rotação de amplitude $\frac{\pi}{4}$ radianos em torno da origem, no sentido horário ($\frac{7\pi}{4}$ é congruente a $-\frac{\pi}{4}$), com a homotetia de razão

$\sqrt{2}$. Depois é feita a translação do complexo $(1 - i)z$ segundo o vetor $\vec{v} = (2, 1)$. Sua imagem é um quadrado de lado $\sqrt{2}$, localizado no 1º quadrante e definido por $2 \leq \text{Re}((1 - i)z + 2 + i) \leq 4$ e $0 \leq \text{Im}((1 - i)z + 2 + i) \leq 2$, figura 3.6.

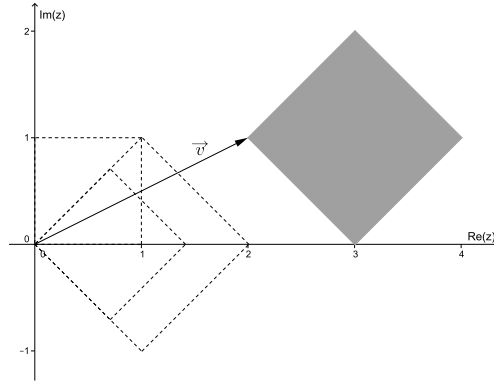


Figura 3.6: $f(z) = (1 - i)z + 2 + i$.

2º) ([18], p. 252) **Dado o triângulo ABC com $A = (2, 1)$, $B = (1, 2)$, $C = (3, 4)$, determine as coordenadas dos vértices do triângulo $A'B'C'$ obtido pela rotação do triângulo ABC em 270° , em torno da origem, no sentido anti-horário.**

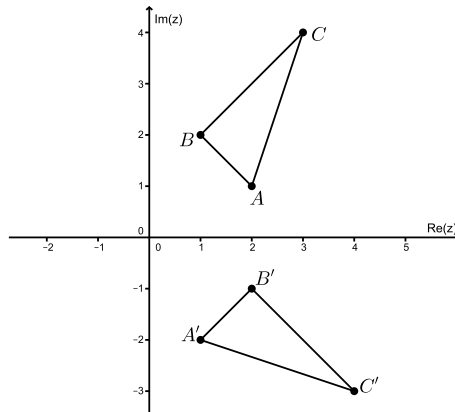


Figura 3.7: Rotação do triângulo ABC , em torno da origem, em 270° , no sentido anti-horário.

Solução:

Sejam A , B e C afixos dos números complexos $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 2i$ e $z_C = 3 + 4i$. Como o triângulo ABC foi rotacionado 270° , em torno da origem, no sentido anti-

horário, tem-se:

$$A' = A \cdot \text{cis } 270^\circ = (2 + i)(-i) = 1 - 2i = (1, -2).$$

$$B' = B \cdot \text{cis } 270^\circ = (1 + 2i)(-i) = 2 - i = (2, -1).$$

$$C' = C \cdot \text{cis } 270^\circ = (3 + 4i)(-i) = 4 - 3i = (4, -3).$$

Portanto, os vértices do triângulo $A'B'C'$ têm as seguintes coordenadas: $A' = (1, -2)$, $B' = (2, -1)$ e $C' = (4, -3)$, figura 3.7.

- 3º) ([12], p. 171) **Sendo $z = -2 + i$, represente no mesmo plano complexo z e $2z$. Que relação existe entre seus módulos e argumentos? Essa relação seria a mesma para z e $-2z$?**

Solução:

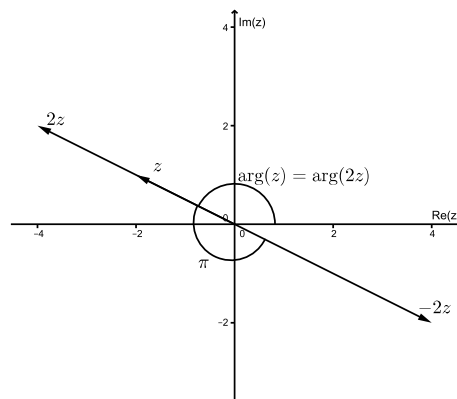


Figura 3.8: Homotetia de razão 2 e multiplicação por $r = -2$.

Ao multiplicarmos z por 2, estamos aplicando a homotetia de razão 2 (dilatação) sobre o complexo z , logo o módulo de $2z$ será o dobro do módulo de z ($|2z| = 2|z|$). A homotetia preserva o argumento, por isso $\text{arg}(z) = \text{arg}(2z)$, figura 3.8.

Já o complexo $-2z$ é obtido da multiplicação de z por um fator $r = -2$, ou seja, é a composição da homotetia de razão 2 (dilatação) com a reflexão do complexo z através

da origem ($-2z = |-2| \cdot R_O(z) = 2 \cdot \text{cis } \pi \cdot z$), logo $|-2z| = |-2| \cdot |z| = 2 \cdot |z|$, mas $\text{arg}(-2z) = \pi + \text{arg}(z)$, figura 3.8.

4º) ([8], p. 9 - Adaptada) **Represente, geometricamente, o conjunto das imagens w , tais que $w = (z + 1)i$ e $z \in \{2 \leq |z| \leq 3\}$.**

Solução:

O conjunto $\{2 \leq |z| \leq 3\}$, geometricamente, representa um anel circular de centro na origem, com raio maior ou igual a 2 e raio menor ou igual a 3, figura 3.9.

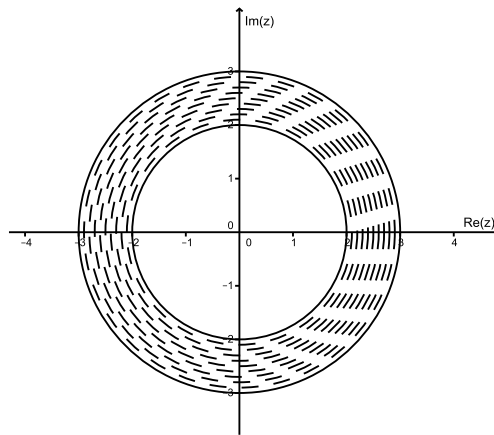


Figura 3.9: Representação geométrica do conjunto $z \in \{2 \leq |z| \leq 3\}$.

A soma $z + 1$ é a translação de z segundo o vetor $\vec{v} = (1, 0)$, ou seja, é a translação de z uma unidade para a direita, portanto sua imagem será um anel circular com as mesmas medidas para os raios, porém seu centro será o ponto $(1, 0)$, conforme figura 3.10.

Já o produto de $(z + 1)$ por i , implica numa rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos em torno da origem e no sentido anti-horário do complexo $(z + 1)$.

Notemos, então, que $w = (z + 1)i$, geometricamente, representa um anel circular centrado em $(0, 1)$, com raio maior igual a 2 e raio menor igual a 3, como ilustrado na figura 3.10.

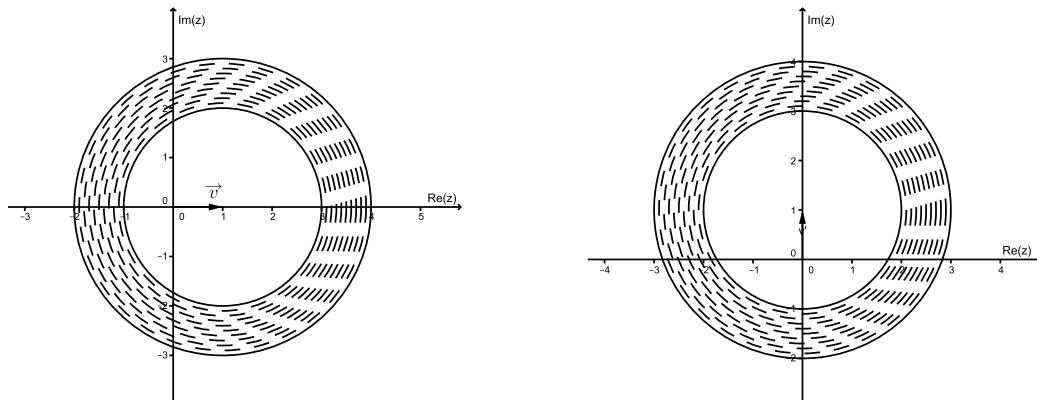


Figura 3.10: Representação geométrica de $(z + 1)$ e de $(z + 1)i$, respectivamente.

5º) ([18], p. 78) No plano complexo a seguir, o conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} / z = x + yi, 1 \leq x \leq 3 \text{ e } y = 0\}$$

é representado pelo segmento de reta em destaque na figura 3.11. Esboce o conjunto dos pontos $w \in B$, onde

$$B = \{w \in \mathbb{C}, \text{ tal que } w = z \cdot (\cos \alpha + i \text{sen } \alpha), z \in A \text{ e } 0 \leq \alpha \leq 90^\circ\}.$$

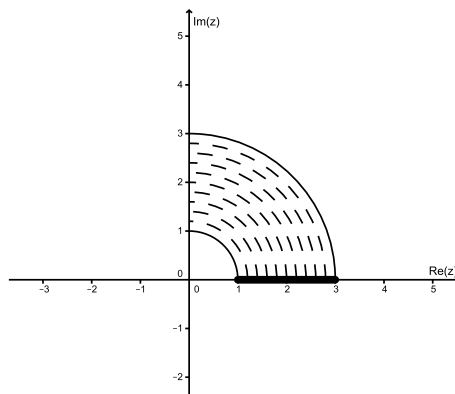


Figura 3.11: $B = \{w \in \mathbb{C}, \text{ tal que } w = z \cdot (\cos \alpha + i \text{sen } \alpha), z \in A \text{ e } 0 \leq \alpha \leq 90^\circ\}$.

Solução:

w é obtido da rotação de amplitude α graus do complexo z em torno da origem, no sentido anti-horário, logo, geometricamente, o conjunto B é a interseção de uma coroa

circular de raio maior igual a 3 e raio menor igual a 1 com o primeiro quadrante, já que $\arg(z) = 0$ portanto, $\arg(w) = \alpha$ e $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.

6º) ([7], p. 52 - Adaptada) **Considere um quadrado de diagonal BD , definida pelos pontos $B = (3, 4)$ e $D = (6, 2)$. Determine as coordenadas dos demais vértices do quadrado.**

Solução:

Sejam B e D os afixos dos complexos $z_B = 3 + 4i$ e $z_D = 6 + 2i$. Note, na figura 3.12, que o vetor \overrightarrow{AB} é obtido da rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos, no sentido horário do vetor \overrightarrow{AD} , daí:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \frac{\overrightarrow{AD}}{\operatorname{cis} \frac{\pi}{2}} \\ B - A &= \frac{D - A}{i} \\ 3 + 4i - A &= \frac{6 + 2i - A}{i} \\ 3 + 4i - A &= -6i + 2 + Ai \\ Ai + A &= 3 + 4i + 6i - 2 \\ A(1 + i) &= 1 + 10i \\ A &= \frac{1 + 10i}{1 + i} \\ A &= \frac{11 + 9i}{2} \\ A &= \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right). \end{aligned}$$

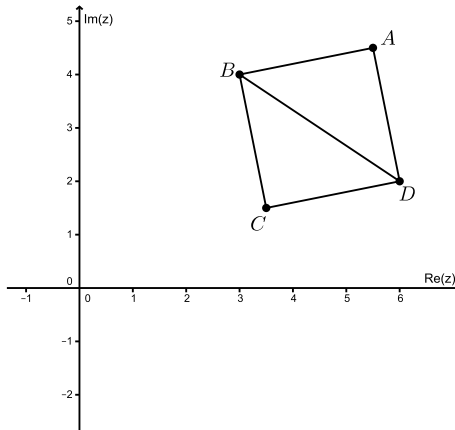


Figura 3.12: Quadrado de diagonal $B = (3, 4)$ e $D = (6, 2)$.

De modo análogo, o vetor \overrightarrow{CB} é obtido da rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos, no sentido anti-horário do vetor \overrightarrow{CD} , daí:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB} &= \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \cdot \overrightarrow{CD} \\ B - C &= i(D - C) \\ 3 + 4i - C &= i(6 + 2i - C) \\ C(-1 + i) &= -5 + 2i \\ C &= \frac{-5 + 2i}{-1 + i} \\ C &= \frac{7 + 3i}{2} \\ C &= \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

Notemos que essas coordenadas poderiam ter sido determinadas observando que num quadrado as diagonais são perpendiculares e intersectam-se ao meio. Seja M o ponto de intersecção das diagonais do quadrado $ABCD$ - figura 3.13 - logo $M = \left(\frac{3+6}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, 3 \right)$. Portanto o vetor \overrightarrow{MC} é obtido através da rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos, no sentido anti-horário, do vetor \overrightarrow{MB} :

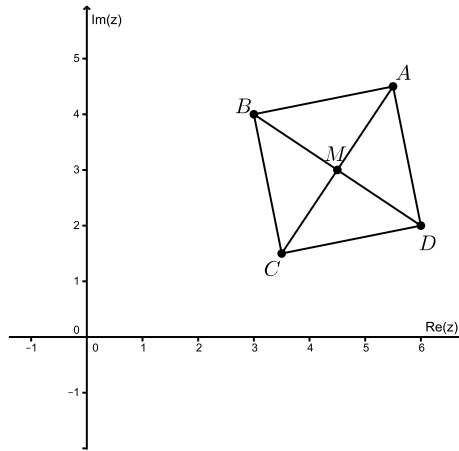


Figura 3.13: Quadrado de diagonal $B = (3, 4)$ e $D = (6, 2)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC} &= \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \cdot \overrightarrow{MB} \\ C - \frac{9}{2} - 3i &= i \left(-\frac{3}{2} + i \right) \\ C &= -1 - \frac{3}{2}i + \frac{9}{2} + 3i \\ C &= \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i \\ C &= \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

De forma análoga, o vetor \overrightarrow{MA} pode ser determinado pela rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos, no sentido anti-horário, do vetor \overrightarrow{MD} .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} &= \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \cdot \overrightarrow{MD} \\ A - M &= (D - M)i \\ A - \frac{9}{2} - 3i &= \left(\frac{3}{2} - i \right) i \\ A &= 1 + \frac{3}{2}i + \frac{9}{2} + 3i \\ A &= \frac{11}{2} + \frac{9}{2}i \\ A &= \left(\frac{11}{2}, \frac{9}{2} \right). \end{aligned}$$

7º) ([19]) O ponto $(2, 1)$ é centro de um quadrado no qual um dos vértices é o ponto $(5, 5)$. A soma das coordenadas dos outros três vértices desse quadrado é:

- a) 12
- b) 8
- c) 4
- d) 2
- e) 6

Solução:

Consideremos os pontos $O = (2, 1)$ e $A = (5, 5)$ como afixos dos números complexos $z_O = 2 + i$ e $z_A = 5 + 5i$, respectivamente, e o vetor $\overrightarrow{OA} = A - O = 3 + 4i$. Lembremos que num quadrado as diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio, portanto, para determinarmos o vértice B do quadrado da figura 3.14, basta rotacionarmos o vetor \overrightarrow{OA} , $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário, obtendo o vetor \overrightarrow{OB} :

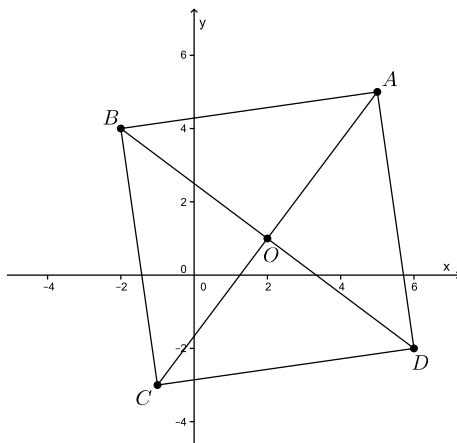


Figura 3.14: Quadrado de centro $(2, 1)$ e um dos vértice $(5, 5)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \cdot \overrightarrow{OA} \\ B - O &= i \cdot (3 + 4i) \\ B - (2 + i) &= -4 + 3i \\ B &= -2 + 4i \\ B &= (-2, 4).\end{aligned}$$

De modo análogo, agora rotacionado o vetor $\overrightarrow{OB} = B - O = -4 + 3i$, $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário, obtendo o vetor \overrightarrow{OC} :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \cdot \overrightarrow{OB} \\ C - O &= i \cdot (-4 + 3i) \\ C - (2 + i) &= -3 - 4i \\ C &= -1 - 3i \\ C &= (-1, -3).\end{aligned}$$

Da mesma maneira, porém rotacionando o vetor $\overrightarrow{OC} = C - O = -3 - 4i$, $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário, determinaremos o vetor \overrightarrow{OD} :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \cdot \overrightarrow{OC} \\ D - O &= i \cdot (-3 - 4i) \\ D - (2 + i) &= 4 - 3i \\ D &= 6 - 2i \\ D &= (6, -2).\end{aligned}$$

Portanto, somando as coordenadas dos vértices B , C e D do quadrado, teremos: $-2 + 4 - 1 - 3 + 6 - 2 = 2$. Logo, a alternativa correta é a (d).

Uma outra maneira para resolução dessa questão seria calcular o valor do vértice C levando em consideração o fato de que o centro do quadrado, ou seja, o ponto $O = (2, 1)$ é ponto médio das diagonais, portanto, é ponto médio do segmento AC . Fazendo $C = (x, y)$, teremos:

$$(2, 1) = \left(\frac{x + 5}{2}, \frac{y + 5}{2} \right) \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = -3 \Rightarrow C = (-1, -3).$$

Agora rotacionado o vetor \overrightarrow{OC} , $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido horário determinamos o vetor \overrightarrow{OB} :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= \frac{\overrightarrow{OC}}{\text{cis } \frac{\pi}{2}} \\ B - O &= \frac{-3 - 4i}{i} \\ B - (2 + i) &= -4 + 3i \\ B &= -2 + 4i \\ B &= (-2, 4). \end{aligned}$$

E, como feito anteriormente, para determinarmos o \overrightarrow{OD} , rotacionamos o vetor \overrightarrow{OC} , $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário.

8º) ([8], p. 11) Determine dois possíveis vértices C para o triângulo equilátero ABC , cujo lado AB é definido pelos pontos $A = (2, 3)$ e $B = (-1, 0)$.

Solução:

Sejam, na figura 3.15, os pontos A e B afijos dos complexos $z_A = 2 + 3i$ e $z_B = -1 + 0i$ e o vetor \overrightarrow{BA} representado pelo complexo $\overrightarrow{BA} = A - B = 3 + 3i$. Como num triângulo

equilátero os ângulos internos medem 60° , fazendo a rotação de amplitude 60° , no sentido anti-horário, do vetor \overrightarrow{BA} , determinaremos o vetor \overrightarrow{BC} que terá mesmo módulo do vetor \overrightarrow{BA} , uma vez que a rotação é uma transformação isométrica. Conseqüentemente, um dos possíveis vértices C será:

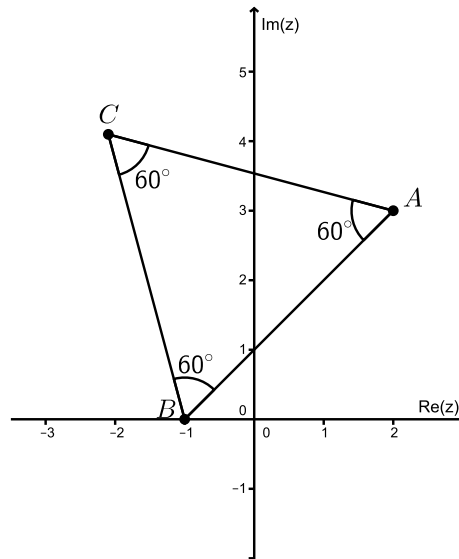


Figura 3.15: Vértice C , obtido da rotação de 60° , no sentido anti-horário, do complexo $3 + 3i$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \text{cis } 60^\circ \cdot \overrightarrow{AB} \\ C - B &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (3 + 3i) \\ C + 1 &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ C &= \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2} + \frac{3 + \sqrt{3}}{2}i \\ C &= \left(\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} \right).\end{aligned}$$

Fazendo agora a rotação de amplitude 60° do vetor \overrightarrow{BA} no sentido horário, determinaremos as outras possíveis coordenadas para o vértice C , figura 3.16.

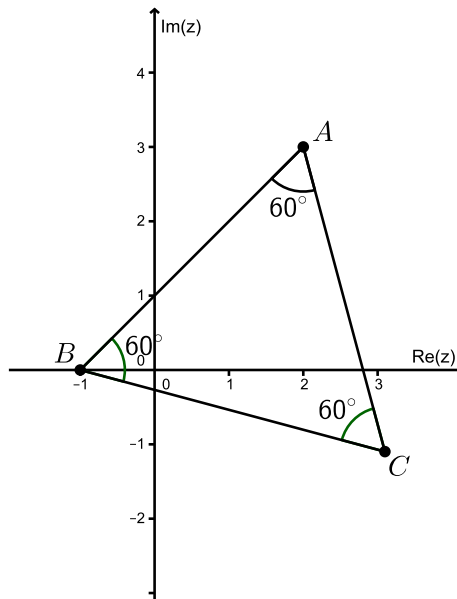


Figura 3.16: Vértice C obtido da rotação de 60° , no sentido horário, do complexo $3 + 3i$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \frac{\overrightarrow{BA}}{\text{cis } 60^\circ} \\ C - B &= \frac{3 + 3i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \\ C + 1 &= \frac{(3 + 3i) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \\ C &= \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} + \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}i \\ C &= \left(\frac{1 + 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

9º) ([11], p. 157) Se, na figura 3.17, os pontos A , B e C são os afixos das raízes cúbicas de -8 , obtenha a forma algébrica dessas raízes.

Solução:

Temos que A , B e C são afixos das raízes cúbicas de -8 , portanto o triângulo ABC é equilátero e por isso $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}A = \frac{2\pi}{3}$. Como B pertence ao eixo real e o raio da circunferência é 2, já que $\sqrt[3]{|-8|} = 2$, concluímos que $B = (-2, 0) = -2 + 0i$.

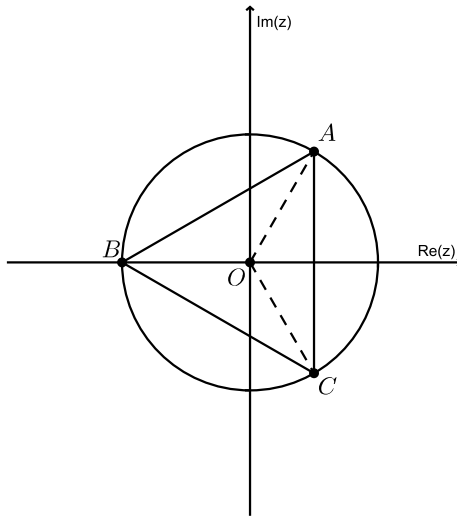


Figura 3.17: Raízes complexas cúbicas de -8 .

Aplicando a rotação de amplitude $\frac{2\pi}{3}$ radianos, no sentido horário, no vetor \overrightarrow{OB} , tem-se o vetor \overrightarrow{OA} :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \frac{\overrightarrow{OB}}{\text{cis } \frac{2\pi}{3}} \\ A - O &= \frac{B - O}{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} \\ A &= \frac{-2}{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} \\ A &= 1 + \sqrt{3}i.\end{aligned}$$

De modo análogo, rotacionando o vetor \overrightarrow{OB} em $\frac{2\pi}{3}$ radianos, no sentido anti-horário, obtemos o vetor \overrightarrow{OC} , daí:

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= \vec{OB} \cdot \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} \\ C - O &= (B - O) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ C &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ C &= 1 - \sqrt{3}i.\end{aligned}$$

Logo, a forma algébrica das raízes cúbicas de -8 são: -2 , $1 + \sqrt{3}i$ e $1 - \sqrt{3}i$.

10º) ([5]) Geometricamente, o módulo de um número complexo z é dado pela distância da origem O do plano complexo ao afixo de z . Assim, dado o complexo $z = 3 + 2i$, considere o triângulo ABO , cujos vértices A e B são os respectivos afixos de z e iz . É verdade que esse triângulo é:

- a) equilátero
- b) escaleno
- c) retângulo e isósceles
- d) retângulo e não-isósceles
- e) isósceles e não retângulo

Solução:

Dado um número complexo z , o número complexo iz é obtido da rotação de amplitude 90° do complexo z , em torno da origem e no sentido anti-horário. Logo, como os pontos A e B são afixos de z e iz , respectivamente, o ângulo entre os segmentos OA e OB é de 90° e, por isso, o triângulo ABO , figura 3.18, é retângulo em O . Além disso, como a rotação é uma transformação isométrica, temos que $|z| = |iz|$, ou seja, $\overline{OA} = \overline{OB}$.

Analisando então as alternativas temos que os itens (a) e (e) são falsos, já que o triângulo ABO é retângulo. Como $\overline{OA} = \overline{OB}$, esse triângulo não pode ser escaleno, portanto

o item (b) também é falso. Temos que o item (d) não é verdadeiro, já que para que o triângulo ABO seja não-isósceles, então teria que ser equilátero ou escaleno, o que já vimos que não é verdade. Portanto, o item verdadeiro é o (c): o triângulo ABO é retângulo e isósceles.

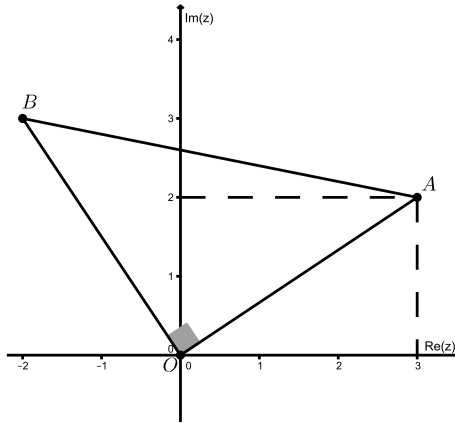


Figura 3.18: Triângulo ABO .

11º) ([17]) No centro de uma praça deve ser pintada uma linha com o formato de um polígono regular, não convexo, como mostra o projeto a seguir.

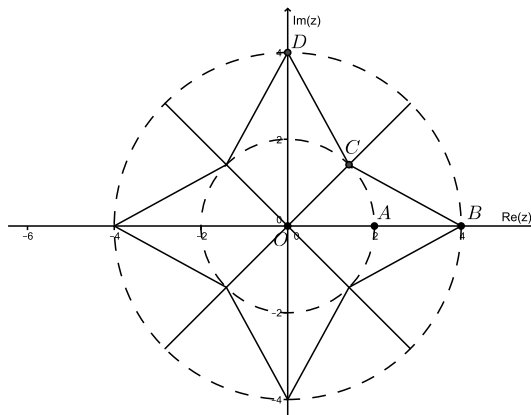


Figura 3.19: Linha com formato de polígono regular pintada no centro de uma praça.

Se os vértices pertencem às circunferências de raios $4m$ e $2m$, respectivamente, o comprimento total da linha a ser pintada é igual a:

- a) $5 - \sqrt{2}$
- b) $8[\sqrt{(5 - \sqrt{2})}]$
- c) $16[\sqrt{(5 - \sqrt{2})}]$
- d) $4[\sqrt{(5 - 2\sqrt{2})}]$
- e) $16[\sqrt{(5 - 2\sqrt{2})}]$

Solução:

Consideremos os triângulos OCB e OCD na figura 3.19. Notemos que OC é um lado comum a ambos os triângulos, $\overline{CB} = \overline{CD}$, já que o polígono é regular e $\overline{OB} = \overline{OD} = 4m$ (raio da circunferência maior), portanto, pelo caso de congruência LLL , os triângulos OCB e OCD são congruentes, donde podemos concluir que os ângulos $B\hat{O}C = D\hat{O}C = 45^\circ$, uma vez que $B\hat{O}D = 90^\circ$.

Consideremos agora o centro da circunferência como origem do plano complexo e os pontos A , B e C como afixos dos complexos $z_A = 2$, $z_B = 4$ e z_C .

Rotacionando o complexo z_A em 45° em torno da origem e no sentido anti-horário determinaremos z_C , logo: $z_C = 2 \cdot \text{cis } 45^\circ = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ e $\overline{BC} = \sqrt{(\sqrt{2} - 4)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$.

Como o polígono é regular e tem oito lados, o comprimento total da linha a ser pintada na praça é: $8 \cdot 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} = 16\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$. Portanto, a alternativa correta é a letra (e).

12º) ([1], p.645 - Adaptada) **Os vértices de um trapézio são os afixos dos números complexos $A = \sqrt{2} \cdot \text{cis } 45^\circ$, $B = 3 + i$ e $C = 5 - i$. Sabendo que o vértice D do trapézio está sobre a reta $y = x$ e sobre a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2$, determine:**

- a) as coordenadas do vértice D do trapézio.

Solução:

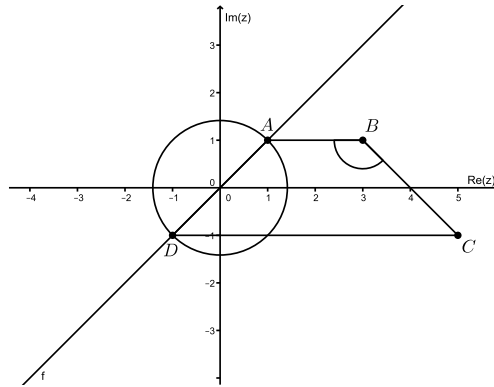


Figura 3.20: Trapézio cujo vértice D pertence à reta $r : y = x$ e à circunferência $x^2 + y^2 = 2$.

$A = \sqrt{2} \cdot \text{cis } 45^\circ \Rightarrow A = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \Rightarrow A = 1 + i \Rightarrow A = (1, 1)$, portanto A pertence a reta $y = x$ e à circunferência $x^2 + y^2 = 2$.

Como os vértices A e D pertencem à reta $y = x$, estão sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 2$ e são vértices distintos do trapézio, então são diametralmente opostos, como ilustrado na figura 3.20, logo, o complexo D pode ser obtido da reflexão do complexo A através da origem: $D = R_O(A) = \text{cis } \pi \cdot A = -1 \cdot (1 + i) = -1 - i = (-1, -1)$.

Poderíamos também encontrar as coordenadas do vértice D , utilizando sua forma polar. Observemos que o raio da circunferência $x^2 + y^2 = 2$ é $\sqrt{2}$, então podemos concluir que o módulo de D também é $\sqrt{2}$, já que D também pertence a essa circunferência. Como A e D são diametralmente opostos e o argumento de A é 45° , temos que o argumento de D é igual a $180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$. Logo, $D = \sqrt{2} \cdot \text{cis } 225^\circ = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -1 - i = (-1, -1)$.

b) a medida do ângulo interno $\hat{A}BC$.

Solução:

Considere os complexos $z = \overrightarrow{BA} = -2$ e $w = \overrightarrow{BC} = 2 - 2i$. A medida do ângulo $\hat{A}BC$, da figura 3.20, é igual ao argumento do complexo $z' = \frac{w}{z} = \frac{2-2i}{-2} = -1 + i$. Como o módulo de z' é igual a $\sqrt{2}$, sendo $\theta = \hat{A}BC$, tem-se que $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} =$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, portanto $\theta = \hat{A}BC = 135^\circ$.

13º) ([1], p. 645) **Considere o polígono P , cujos vértices são os afixos de todas as raízes cúbicas complexas de -8 . Sabe-se que o polígono P' foi gerado através da rotação de P , em torno da origem, sob um ângulo de 90° no sentido anti-horário. Determine as expressões algébricas para os afixos dos vértices de P' no plano complexo.**

Solução:

Como os vértices do polígono P são os afixos das raízes cúbicas complexas de -8 , P é um triângulo equilátero inscrito num círculo centrado na origem e de raio 2, já que $\sqrt{|-8|} = 2$. Esses afixos dividem em 3 partes iguais tal círculo, por isso o ângulo entre eles é de $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

Sabemos que $w_1 = -2$ é uma das raízes complexas cúbicas de -8 , portanto aplicando a w_1 a rotação de amplitude $\frac{2\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário, obtem-se a raiz

$$w_2 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} \cdot (-2) = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdot (-2) = 1 - \sqrt{3}i.$$

De maneira análoga, agora rotacionado w_2 em $\frac{2\pi}{3}$ radianos no sentido anti-horário determinamos a terceira raiz

$$w_3 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} \cdot (1 - \sqrt{3}i) = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdot (1 - \sqrt{3}i) = 1 + \sqrt{3}i.$$

Logo, os vértices do polígono P são os afixos $A = (-2, 0)$, $B = (1, -\sqrt{3})$ e $C = (1, \sqrt{3})$, figura 3.21.

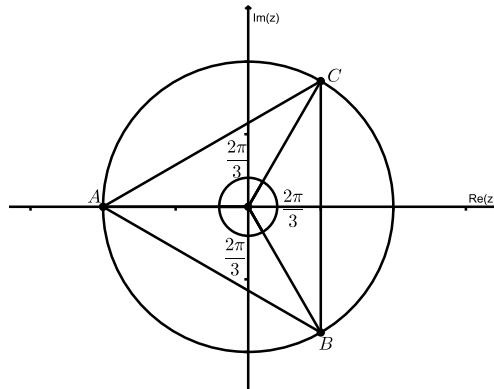


Figura 3.21: Polígono P .

Como P' foi gerado através da rotação do polígono P , em torno da origem, sob um ângulo de 90° no sentido anti-horário, têm-se que os vértices de P' são:

$$A' = \text{cis } 90^\circ \cdot (-2) = -2i,$$

$$B' = \text{cis } 90^\circ \cdot (1 - \sqrt{3}i) = i(1 - \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + i \text{ e}$$

$$C' = \text{cis } 90^\circ \cdot (1 + \sqrt{3}i) = i(1 + \sqrt{3}i) = -\sqrt{3} + i.$$

Observemos, na figura 3.22, que P' é também um triângulo equilátero inscrito num círculo de raio 2, já que a rotação é uma transformação isométrica.

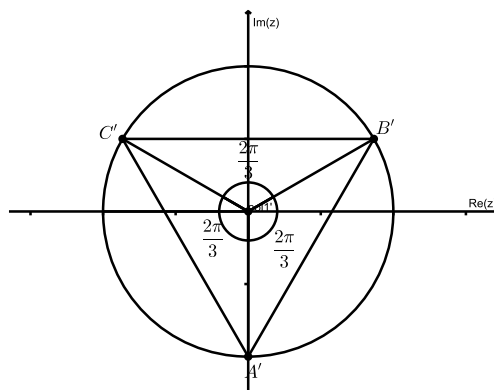


Figura 3.22: Polígono P' .

14º) ([18], p. 226) **Um triângulo equilátero de vértices $A = (-1, 0)$, $B = (2, 3\sqrt{3})$ e $C = (5, 0)$ é inscrito em uma circunferência. Escreva a equação reduzida dessa circunferência.**

Solução:

Sejam A , B e C afixos dos números complexos $z_A = -1 + 0i$, $z_B = 2 + 3\sqrt{3}i$ e $z_C = 5 + 0i$ e M o afixo do complexo que representa o centro da circunferência, figura 3.23.

Num triângulo, a distância do circuncentro aos vértices é igual ao raio r da circunferência que o circunscreve, portanto $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$ e como o triângulo ABC é equilátero temos que $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \frac{2\pi}{3}$ radianos, portanto:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MC} &= \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} \cdot \overrightarrow{MA} \\ C - M &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (A - M) \\ 5 - M &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (-1 - M) \\ -\frac{3M}{2} + \frac{M\sqrt{3}}{2}i &= -\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ M &= \frac{-9 - \sqrt{3}i}{-3 - \sqrt{3}i} \\ M &= 2 + \sqrt{3}i\end{aligned}$$

Logo as coordenadas do centro da circunferência são $M = (2, \sqrt{3})$.

O raio r da circunferência é igual ao módulo do número complexo $z = \overrightarrow{AM} = 3 + \sqrt{3}i$ (como dito antes, $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$), portanto $r = \sqrt{12}$. Então, a equação da circunferência é dada por

$$\Gamma : (x - 2)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 12.$$

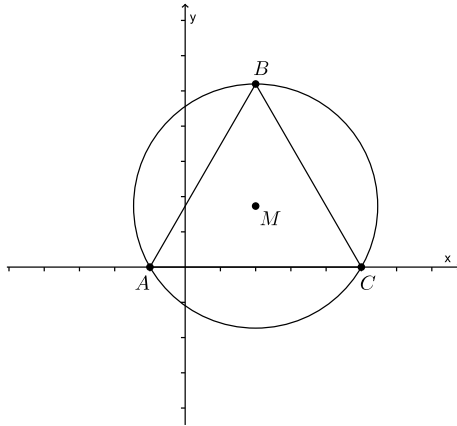


Figura 3.23: Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

15°) ([6], p.28) **Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos A e B da figura abaixo:**

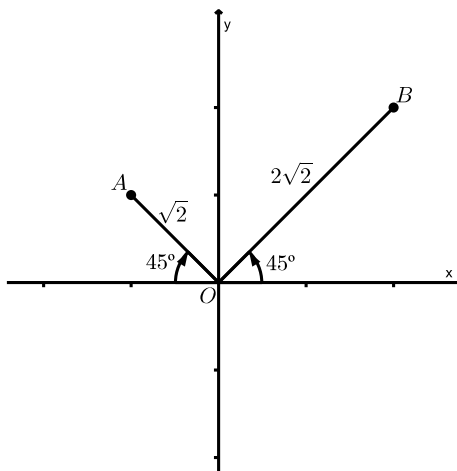


Figura 3.24: Pontos A e B .

Sejam A e B os afixos dos números complexos z_A e z_B , respectivamente. Como o $\arg(z_B) = 45^\circ$ e $|z_B| = 2\sqrt{2}$,

$$z_B = 2\sqrt{2} \cdot \text{cis } 45^\circ \Rightarrow z_B = 2 + 2i.$$

Temos que $|z_A| = \sqrt{2} = \frac{|z_B|}{2}$ e o ângulo $\widehat{BOA} = 90^\circ$, portanto o complexo z_A é obtido da composição da homotetia de razão $\frac{1}{2}$ com a rotação de amplitude 90°

do complexo z_B ,

$$z_A = H_{\frac{1}{2}}(R_{\frac{\pi}{2}}(z_B)) = \frac{1}{2} \cdot i \cdot (2 + 2i) = -1 + i.$$

Seja $r : y = ax + b$ a reta que passa pelos pontos $A = (-1, 1)$ e $B = (2, 2)$, logo $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{4}{3}$, assim sendo, a reta r é dada por $r : y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

Notemos que poderíamos ter encontrado o complexo z_A pela sua forma trigonométrica, já que sabemos que $|z_A| = \sqrt{2}$ e $\arg(z_A) = 135^\circ$, portanto $z_A = \sqrt{2} \cdot \text{cis } 135^\circ = -1 + i$.

16º) ([12], p. 118) **Os pontos $A = (5, 2)$, $B = (3, 5)$ e $C = (1, 0)$ são vértices do triângulo ABC . Calcular a área desse triângulo.**

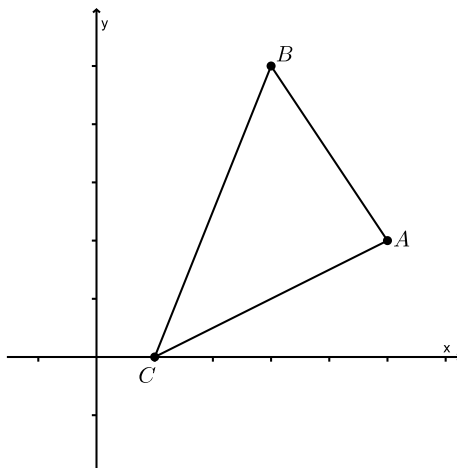


Figura 3.25: Triângulo ABC .

Solução:

Sejam os complexos $z_1 = \overrightarrow{AB} = -2 + 3i$, $z_2 = \overrightarrow{AC} = -4 - 2i$ e o ângulo $\theta = \widehat{BAC} = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$.

Calculando $\frac{z_2}{z_1}$, teremos:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4 - 2i}{-2 + 3i} = \frac{2 + 16i}{13}, \text{ portanto, } \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{2\sqrt{65}}{13} \text{ e } \sin \theta = \frac{8\sqrt{65}}{65}.$$

Logo a área do triângulo ABC , da figura 3.25, é

$$\frac{|z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{sen } \theta}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{65} \cdot 4}{65} = 8.$$

17º) ([6], p.19 - Adaptada) **São dados os pontos $A = (1, -1)$ e $B = (4, 5)$. Seja AC o segmento encontrado após as seguintes transformações no segmento AB : rotação de amplitude $\frac{\pi}{4}$ radianos no sentido anti-horário e homotetia de razão 3. Determine as coordenadas do ponto C .**

Solução:

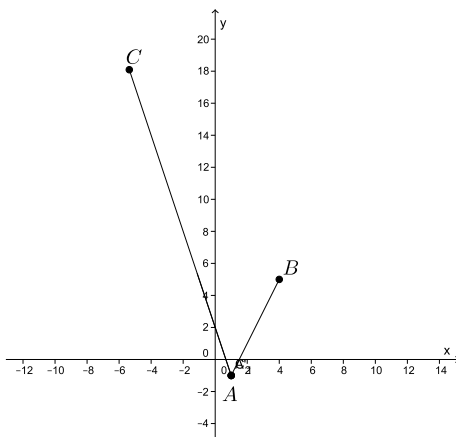


Figura 3.26: Segmentos AB e AC .

Sejam os pontos A e B , figura 3.26, afijos dos complexos $z_A = 1 - i$ e $z_B = 4 + 5i$ e consideremos o complexo dado pelo vetor $\overrightarrow{AB} = B - A = 3 + 6i$. Pelo enunciado, será aplicado no vetor \overrightarrow{AB} a composição da rotação de amplitude $\frac{\pi}{4}$ radianos, no sentido anti-horário, com a homotetia de razão 3, portanto:

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= R_{\frac{\pi}{4}}(H_3(\vec{AB})) \\ C - A &= \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \cdot 3 \cdot (3 + 6i) \\ C &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \cdot (9 + 18i) \\ C &= \frac{2 - 9\sqrt{2}}{2} + \frac{27\sqrt{2} - 2}{2}i.\end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do ponto C são: $C = \left(\frac{2-9\sqrt{2}}{2}, \frac{27\sqrt{2}-2}{2} \right)$.

18º) ([18], p. 175) **Verifique se o triângulo ABC no plano cartesiano abaixo é retângulo.**

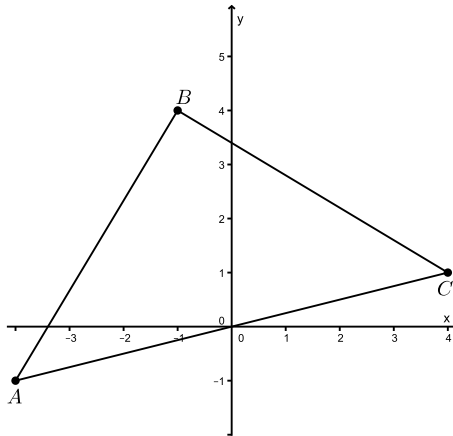


Figura 3.27: Triângulo ABC .

Solução:

Consideremos os números complexos z_1 e z_2 dados por:

$$z_1 = \vec{BA} = A - B = -3 - 5i \text{ e } z_2 = \vec{BC} = C - B = 5 - 3i.$$

A medida do ângulo \hat{ABC} é igual ao argumento de $\frac{z_2}{z_1} = \frac{5-3i}{-3-5i} = i$, portanto $\hat{ABC} = 90^\circ$, ou seja, o triângulo ABC é retângulo em B .

19º) ([11], p. 20 - Adaptada) Na figura, o triângulo ABC é equilátero e seu lado mede 4cm . Determine as coordenadas dos vértices A' , B' e C' obtidos após aplicar sobre o triângulo ABC as seguintes transformações: primeiro rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos, no sentido anti-horário, e, depois, translação segundo o vetor $\vec{v} = (2, 3)$.

Solução:

Como o triângulo ABC , figura 3.28, é equilátero e seu lado mede 4cm , temos que $A = (0, 0)$ e $B = (4, 0)$ são dois de seus vértices. Consideremos tais pontos como afixos do números complexos $z_A = 0$ e $z_B = 4$. Tomemos o vetor $\vec{BA} = A - B = -4$. Como a rotação é uma transformação isométrica, rotacionando o vetor \vec{BA} em $\frac{\pi}{3}$ radianos, no sentido anti-horário, determinaremos o vetor \vec{BC} :

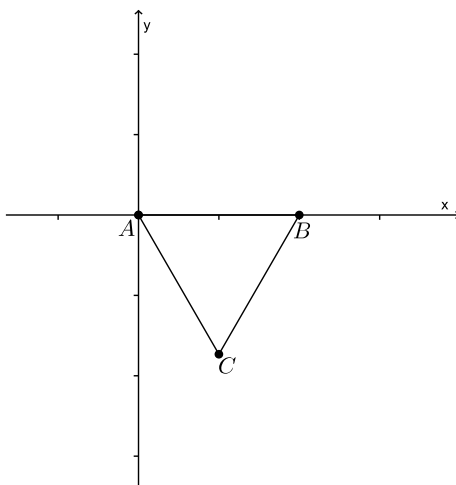


Figura 3.28: Triângulo equilátero ABC .

$$\begin{aligned}\vec{BC} &= \text{cis } \frac{\pi}{3} \cdot \vec{BA} \\ C - B &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdot (-4) \\ C - 4 &= -2 - 2\sqrt{3}i \\ C &= 4 - 2\sqrt{3}i.\end{aligned}$$

Portanto, o terceiro vértice do triângulo ABC é $C = (2, -2\sqrt{3})$.

Agora, para determinarmos os vértices do triângulo $A'B'C'$, aplicaremos a cada vértice do triângulo ABC a composição da rotação de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário com a translação segundo o vetor $\vec{v} = (2, 3)$:

$$A' = T_{(2,3)}(R_{\frac{\pi}{2}}(A)) = (\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \cdot 0) + 2 + 3i = 2 + 3i.$$

$$B' = T_{(2,3)}(R_{\frac{\pi}{2}}(B)) = (\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \cdot 4) + 2 + 3i = 2 + 7i.$$

$$C' = T_{(2,3)}(R_{\frac{\pi}{2}}(C)) = [\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \cdot (4 - 2\sqrt{3}i)] + 2 + 3i = 2 + 2\sqrt{3} + 5i.$$

Assim, os vértices do triângulo $A'B'C'$ tem as seguintes coordenadas: $A' = (2, 3)$, $B' = (2, 7)$ e $C' = (2 + 2\sqrt{3}, 5)$.

Notemos que como a rotação e a translação são transformações isométricas, sua composta também é uma isometria e, portanto, o triângulo $A'B'C'$, na figura 3.29, também será equilátero e seu lado medirá 4cm .

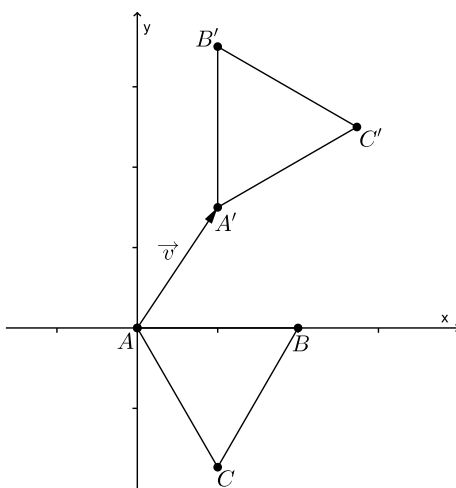


Figura 3.29: Triângulo equilátero $A'B'C'$.

20º) ([4], p. 105) **Quais as coordenadas dos vértices de um triângulo obtido após aplicação da reflexão em relação à reta $y = -x$ no triângulo cujos vértices são os pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e $C = (6, 3)$?**

Solução:

Consideremos os vértices do triângulo ABC , da figura 3.30, como afijos dos números complexos $w_A = 1 + 2i$, $w_B = 3 + 4i$ e $w_C = 6 + 3i$. Como a reta $y = -x$ passa pela origem, para realizarmos a reflexão do triângulo ABC através desta reta, basta utilizarmos a função $R_z(w) = \frac{z\bar{w}}{\bar{z}}$, demonstrada na seção 2.2.3. Para isso tomemos $\vec{z} = (1, -1)$, vetor diretor da reta, e sejam A' , B' e C' os vértices do novo triângulo, então:

$$A' = R_z(w_A) = \frac{(1-i)(\overline{1+2i})}{\overline{1-i}} = -2 - i.$$

$$B' = R_z(w_B) = \frac{(1-i)(\overline{3+4i})}{\overline{1-i}} = -4 - 3i.$$

$$C' = R_z(w_C) = \frac{(1-i)(\overline{6+3i})}{\overline{1-i}} = -3 - 6i.$$

Portanto, as coordenadas dos vértices do triângulo obtido após a reflexão do triângulo ABC através da reta $y = -x$ são: $A' = (-2, -1)$, $B' = (-4, -3)$ e $C' = (-3, -6)$.

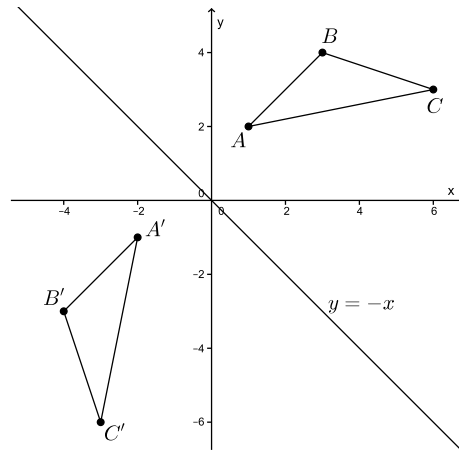


Figura 3.30: Triângulos ABC e $A'B'C'$.

21º) ([4], p. 102) **Considere o quadrado com vértices $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 4)$ e $D = (0, 4)$. Escreva as coordenadas do novo quadrado $A'B'C'D'$**

obtido após a seguinte transformação: reflexão do quadrado em relação à reta $y = 8$.

Solução:

Consideremos os vértices do quadrado $ABCD$, na figura 3.31, como afixos dos números complexos $w_A = 0$, $w_B = 4$, $w_C = 4 + 4i$ e $w_D = 4i$.

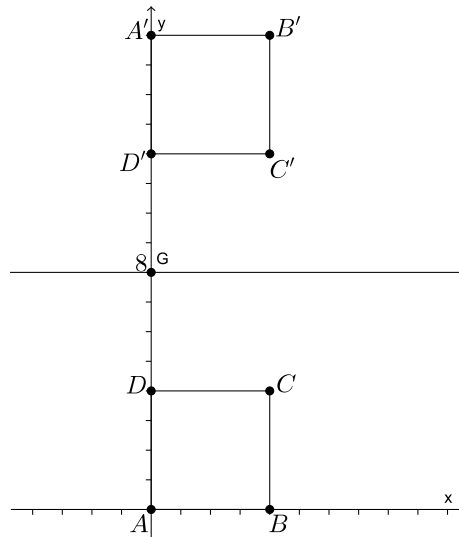


Figura 3.31: Quadrados $ABCD$ e $A'B'C'D'$.

Como a reta $y = 8$ não passa pela origem, para realizarmos a reflexão do quadrado $ABCD$ através desta reta, basta utilizarmos a função $R_r(w) = R_z(w - u) + u$, sendo $R_z = \frac{z\bar{w}}{\bar{z}}$ - esta função foi apresentada na seção 2.2.3. Para isso tomemos $\vec{z} = (1, 0)$, vetor diretor da reta, e $u = 8i$ um ponto que pertence à reta, então:

$$\begin{aligned}
 A' &= R_r(w_A) = \frac{1 \cdot (\overline{0 - 8i})}{1} + 8i = 16i. \\
 B' &= R_r(w_B) = \frac{1 \cdot (\overline{4 - 8i})}{1} + 8i = 4 + 16i. \\
 C' &= R_r(w_C) = \frac{1 \cdot (\overline{4 + 4i - 8i})}{1} + 8i = 4 + 12i. \\
 D' &= R_r(w_D) = \frac{1 \cdot (\overline{4i - 8i})}{1} + 8i = 12i.
 \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas dos vértices do quadrado $A'B'C'D'$ são: $A' = (0, 16)$, $B' = (4, 16)$, $C' = (4, 12)$ e $D' = (0, 12)$.

22º) Dado o triângulo ABC de vértices $A = (2, 1)$, $B = (3, -1)$ e $C = (4, 2)$, determine as coordenadas dos vértices do triângulo $A'B'C'$ obtido após a reflexão do triângulo ABC em relação à reta $r : 2x - y = -3$.

Solução:

O procedimento que utilizaremos nesta aplicação é análogo ao que utilizamos no item anterior.

Consideremos os vértices do triângulo ABC , da figura 3.32, como afijos dos números complexos $w_A = 2 + i$, $w_B = 3 - i$ e $w_C = 4 + 2i$.

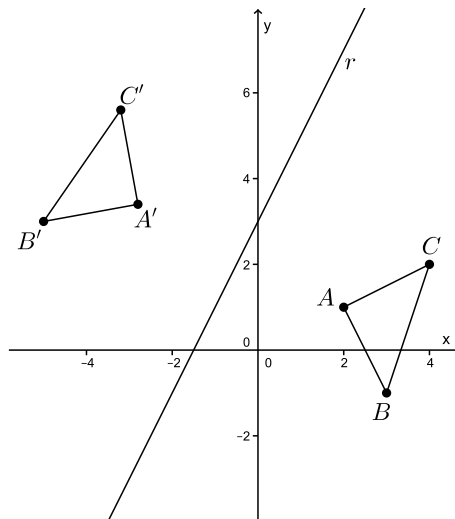


Figura 3.32: Triângulos ABC e $A'B'C'$.

Como a reta $r : 2x - y = -3$ não passa pela origem, para realizarmos a reflexão do triângulo ABC através desta reta, basta utilizarmos a função apresentada na seção 2.2.3: $R_r(w) = R_z(w - u) + u$, sendo $R_z = \frac{z\bar{w}}{\bar{z}}$. Para isso tomemos $\vec{z} = (1, 2)$, vetor diretor da reta r , e $u = 3i$ um ponto que pertence a essa reta, então:

$$A' = R_r(w_A) = \frac{(1 + 2i) \cdot \overline{(2 + i - 3i)}}{(1 + 2i)} + 3i = \frac{-14 + 17i}{5}.$$

$$B' = R_r(w_B) = \frac{(1+2i) \cdot \overline{(3-i-3i)}}{(1+2i)} + 3i = 5 - 3i.$$

$$C' = R_r(w_C) = \frac{(1+2i) \cdot \overline{(4+2i-3i)}}{(1+2i)} + 3i = \frac{-16 + 28i}{5}.$$

Portanto, as coordenadas dos vértices do triângulo $A'B'C'$ são: $A' = (-\frac{14}{5}, \frac{17}{5})$, $B' = (-5, 3)$ e $C' = (-\frac{16}{5}, \frac{28}{5})$.

23º) Determine as coordenadas dos vértices do quadrado $A'B'C'D'$ obtido após reflexão do quadrado $ABCD$ de vértices $A = (5, 5)$, $B = (-2, 4)$, $C = (-1, -3)$ e $D = (6, -2)$ através da reta $r : x = 0$.

Solução:

Sabemos que a reta $r : x = 0$ coincide com o eixo imaginário. Consideremos então os vértices A , B , C e D , na figura 3.33, como afijos dos números complexos $z_A = 5 + 5i$, $z_B = -2 + 4i$, $z_C = -1 - 3i$ e $z_D = 6 - 2i$ e façamos a reflexão de cada um deles através do eixo imaginário utilizando a fórmula $R_b(w) = -\bar{w} + 2 \cdot b$, conforme visto na seção 2.2.3.

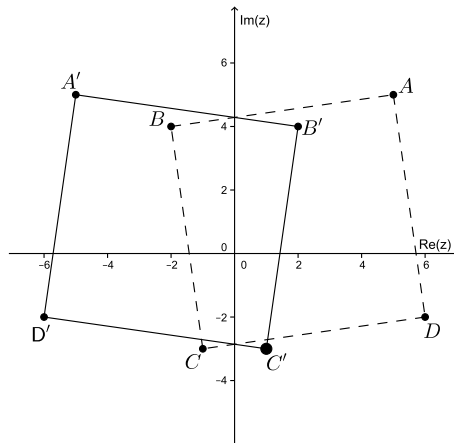


Figura 3.33: Reflexão do quadrado $ABCD$ através da reta $r : x = 0$.

$$A' = R_0(z_A) = -\overline{(5 + 5i)} + 2 \cdot 0 = -(5 - 5i) = -5 + 5i.$$

$$B' = R_0(z_B) = -\overline{(-2 + 4i)} + 2 \cdot 0 = -(-2 - 4i) = 2 + 4i.$$

$$C' = R_0(z_C) = -(\overline{-1 - 3i}) + 2 \cdot 0 = -(-1 + 3i) = 1 - 3i.$$

$$D' = R_0(z_D) = -(\overline{6 - 2i}) + 2 \cdot 0 = -(6 + 2i) = -6 - 2i.$$

Portanto as coordenadas dos vértices do quadrado $A'B'C'D'$ são: $A' = (-5, 5)$,
 $B' = (2, 4)$, $C' = (1, -3)$ e $D' = (-6, -2)$.

Capítulo 4

Conclusão

Esperamos que, através das demonstrações e aplicações aqui apresentadas, tenhamos alcançado nosso objetivo de mostrar que o estudo dos números complexos pode e deve ser abordado tomando como subsídio o seu aspecto geométrico e não apenas o seu aspecto exclusivamente formal.

A possibilidade de podermos representar um número complexo geometricamente, como um ponto de \mathbb{R}^2 , permite relacionarmos os números complexos a vetores e, assim como aponta [1] (2013), isto permite atribuir significado geométrico aos números complexos e, conseqüentemente, às suas operações algébricas.

Através dessa abordagem o estudo do conjunto dos números complexos assume um enfoque dinâmico, uma vez que ao utilizarmos as transformações geométricas como transformações de números complexos estabelecemos relações entre vários conteúdos e não lançamos mão apenas da aplicação direta de fórmulas.

Analisando o capítulo 3 podemos notar que a utilização dos números complexos na resolução dos problemas propostos propiciou um mais fácil entendimento e se mostrou uma técnica menos trabalhosa.

No entanto, os professores usualmente ao apresentarem esse conteúdo nas classes de ensino médio não levam seus alunos a interpretarem as operações em \mathbb{C} como transformações e nem

o relaciona com outros conteúdos, perdendo uma grande oportunidade de dar significado ao ensino e ao aprendizado desse tópico.

Segundo [4] (2012, p. 109):

Os números complexos, quando analisados pelo olhar das transformações geométricas, propiciam uma abordagem bastante significativa para o aluno. Todavia, o enfoque geométrico dos números complexos normalmente não tem sido explorado em nossas salas de aula. A abordagem desse conceito tem sido, na maioria das vezes, de caráter puramente algébrico, onde estão ausentes o significado e as aplicações desses números.

Como sequência a essa pesquisa, seria interessante fazer um estudo de campo numa escola de nível médio, de preferência da rede pública, da terceira série do ensino médio. Através de entrevistas, dos professores procuraremos saber como abordam o conteúdo dos números complexos em suas aulas e dos alunos se, para eles, existe algum significado em aprender tal conteúdo. Depois poderiam ser propostas oficinas, nas quais seriam abordados os números complexos da forma que sugerimos nesta dissertação, bem como a resolução de atividades como as aqui apontadas.

Referências Bibliográficas

- [1] ASSEMANY, Daniella; HARAB, Luiza. *Potencializando o ensino de números complexos: o ensino de números complexos a partir da abordagem vetorial*. Disponível em: <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/363.pdf>. Acesso em 26 de março de 2015.
- [2] BRASIL. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 244pp., (2002).
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão [et al.]. *Trigonometria Números Complexos*. Ed. SBM, Rio de Janeiro, 121 pp., (2001).
- [4] FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Kátia Regina A. *Matemática: práticas pedagógicas para o ensino médio*. Ed. Penso, Porto Alegre, 158 pp., (2012).
- [5] Futuro Militar. Exercícios de Números Complexos com Gabarito. Disponível em http://www.futuromilitar.com.br/portal/attachments/article/137/matematica_exercicios_numeros_complexos_gabarito.pdf. Acesso em 15 de janeiro de 2015.
- [6] GOULART, Márcio Cintra *Matemática no ensino médio - volume 3 - 3º ed.* Ed. Scipione, São Paulo, 296 pp.,(2005).

- [7] GUIMARÃES, Caio dos S. *Matemática em Nível IME/ITA: Números Complexos e Polinômios* - volume 1 - 1º ed. Ed. Vestseller , São José dos Campos, 324 pp.,(2008).
- [8] GUIMARÃES, Caio dos S. *Aplicações “diferentes” para os números complexos*. Disponível em http://www.rumoaquita.com/materiais/materiais_caio/complexos_cap2.pdf. Acesso em 15 de janeiro de 2015.
- [9] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria L. T. *Polinômios e equações algébricas*. Ed. SBM, Rio de Janeiro, 280 pp.,(2012).
- [10] IEZZI, Gelson [et al.]. *Fundamentos da Matemática Elementar: complexos, polinômios, equações* - volume 6 - 2ºed. Ed. Atual, São Paulo, 207 pp.,(1997).
- [11] IEZZI, Gelson [et al.]. *Matemática: ciência e aplicações* - volume 3 - 6ºed. Ed. Saraiva, São Paulo, 272 pp.,(2010).
- [12] LEONARDO, Fábio Martins de (Ed.). *Conexões com a matemática* - volume 3 - 2º ed. Ed. Moderna, São Paulo, 223 pp.,(2013).
- [13] LIMA, Elon Lages [et al.]. *A matemática do ensino médio* - volume 3 - 6ºed. Ed. SBM - Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 293 pp.,(2006).
- [14] LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no Plano*. Ed. SBM, Rio de Janeiro, 216 pp., (1992).
- [15] LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. Ed. SBM, Rio de Janeiro, 94 pp.,(1996).
- [16] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco P. *Tópicos da História na Matemática*. Ed. SBM, Rio de Janeiro, 467 pp.,(2012).
- [17] Scrib, Atividade Polígonos Regulares Vest. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/89845714/Atividade-Poligono-Regulares-Vest#scribd>. Acesso em 22 de janeiro de 2105.
- [18] SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo olhar matemática* - volume 3 - 2º ed. Ed. FTD, São Paulo, 320 pp.,(2013).

- [19] Tutorbrasil. Matemática.tv. Disponível em: <http://www.tutorbrasil.com.br/forum/matematica-ensino-medio/uefs-2010-geometria-analitica-t45346.html>. Acesso em 20 de janeiro de 2015.