UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WECSLEY FERNANDES LIMA

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI COMO MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO E FUNDAMENTAÇÃO PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

JUAZEIRO DO NORTE
2015

WECSLEY FERNANDES LIMA

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI COMO MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO E FUNDAMENTAÇÃO PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Ms. Mário de Assis Oliveira
.

JUAZEIRO DO NORTE

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

L711p Lima, Wecsley Fernandes
O Princípio de Cavalieri como método de demonstração e fundamentação para o cálculo de áreas e volumes / Wecsley Fernandes Lima. - 2015
46 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Ms. Mário de Assis Oliveira.

1. Princípio de Cavalieri. 2. Geometria. 3. Sólidos geométricos. I. Título.

CDD 516

WECSLEY FERNANDES LIMA

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI COMO MÉTODO DE DEMONSTRAÇÃO E FUNDAMENTAÇÃO PARA O CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 09 / 07 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira (Orientador)
Univ. Regional do Cariri (URCA) e
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Ms. Zelalber Gondim Guimarães
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Prof. MS. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Universidade Regional do Cariri (URCA)

A minha esposa, aos meus filhos, a minha avó e em especial ao meu tio Hélio e a minha Mãe que foram as pessoas que me mostraram que estudar é o caminho correto a seguir.

.

AGRADECIMENTOS

A minha esposa Patricia Ferreira e meus filhos Maria Eduarda e João Gabriel por terem me apoiado, ajudado e compreendido o tempo que deixei de dar a eles, terem entendido minha ausência durante o período de aulas presenciais e terem suportado meu stress em período de provas.

A minha mãe por todo apoio que deu em toda minha vida.

Aos meus tios pelo apoio que me deram.

Aos meus colegas de mestrado, em especial: Edjan Fernandes, Henrique Barreto, Vanderli Araújo e Ezequias Guilherme pois sempre que precisei e eles puderam me ajudaram.

Aos professores da UFCA, URCA e IFCE Juazeiro do Norte que ministraram as disciplinas do curso.

Ao professor Mário de Assis pela orientação que me deu neste trabalho de conclusão de cursos.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A Deus por ter permitido que tudo isso acontecesse.

RESUMO

Tem-se no Princípio de Cavalieri, um axioma eficiente para demonstração de fórmulas de cálculo de áreas e volumes, um conteúdo da disciplina de Matemática presente em todo o Ensino Básico do Brasil e sempre encontrado também nas avaliações externas. O objetivo aqui é mostrar que o Princípio de Cavalieri é muito eficiente e simples na demonstração de fórmulas de áreas de figuras planas e volumes de sólidos, pois este axioma simplifica o cálculo de áreas ao medir segmentos e o de volumes em áreas. Expõe-se a importância destes conteúdos na formação básica dos alunos de maneira que, precisa-se sanar as dificuldades que eles tenham, pois cerca de 30% das questões de Matemática das provas externas é sobre geometria. Por fim, conclui-se que se deve reconhecer a importância desse estudo para construção do conhecimento do aluno e não tentar uma coisa já pronta, pois só assim ele terá um aprendizado mais concreto.

Palavras-chave: Princípio de Cavalieri. Áreas e Volumes.

ABSTRACT

It has been the Principle of Cavalieri , an effective axiom for demonstration areas calculation formulas and volumes , one math course content present throughout the Basic Education Brazil and always also found in external evaluations . The goal here is to show that the Cavalieri principle is very efficient and simple in the statement formulas areas of plane figures and volumes of solids , as this axiom simplifies the calculation of areas to measure segments and volumes in areas . Exposes the importance of such content in the basic training of students so that , we need to remedy the difficulties that they have , for about 30% of the race of Mathematics issues of external evidence is about geometry. Finally , we conclude that one should recognize the importance of this study for the construction of knowledge of the student and not try a ready-made thing , because only then it is more concrete learning.

Keywords: Principle of Cavalieri . Areas and Volumes.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A necessidade de se calcular áreas e volumes é muito antiga, com o passar dos anos surgiram várias maneiras para efetuar esses cálculos e chegar a um valor comum de áreas e volumes.

Hoje no Ensino Básico, tanto público como o privado, a maioria dos professores de matemática se limitam a ensinar para seus alunos os casos em que já temos uma fórmula pronta, sem ao menos demonstrá-las, isso faz com que o procedimento se torne mecânico e talvez seja o motivo de uma boa parte dos alunos terminarem o Ensino Médio com dificuldade de resolver problemas que envolvam áreas e volumes, onde as figuras tenham formas diferentes de triângulos, retângulos, quadrados entre outras em que já temos a fórmula definida para o cálculo. O mesmo acontece com o volume dos sólidos que, nesse caso, o problema é maior pois a dificuldade dos alunos aparece quando eles precisam visualizar as figuras, e se for um sólido composto de esferas e cones, por exemplo, isso se complica ainda mais.

Esse trabalho traz uma sugestão para tentar ajudar na solução desse problema, onde tentamos fazer com que o aluno construa o conhecimento necessário para lidar com determinados problemas sobre o cálculo de áreas e de volumes e utilize o Princípio de Cavalieri para demonstração de fórmulas, o qual já vemos como técnica de demonstração para cálculo de volumes em alguns livros didáticos do Ensino Médio.

Abordaremos uma noção intuitiva de área e volume em seguida veremos uma definição geral de ambos, e daremos um tratamento mais aprofundado ao cálculo do volume mostrando e demonstrando, através do Princípio de Cavalieri, o volume dos principais sólidos, e aplicações para outros sólidos geométricos. Veremos também como eles são abordados nas avaliações externas.

2 NOTA HISTÓRICA

A Geometria foi desenvolvida a partir da necessidade de medir terras, construir casas, templos, monumentos, navegar e calcular distâncias. Através dos tempos, os seus registros estão presentes nos legados de todas as civilizações: babilônios, egípcios, gregos, chineses, romanos, hindus, árabes utilizaram as formas geométricas no seu dia-a-dia.

Os conceitos, propriedades e resultados que ensinamos na escola são muito antigos, começaram a adquirir a forma que os conhecemos hoje com as investigações de Tales, que viveu por volta de 600 anos antes de Cristo, ganharam força nas escolas de Pitágoras, Aristóteles e Platão, e foram organizados, pela primeira vez, por Euclides, um matemático da escola de Alexandria que viveu por volta de 300 a.C.

Os *Elementos* de Euclides estão reunidos em treze livros, nos quais resultados importantes de Geometria e da Teoria dos Números estão organizados na forma axiomática dedutiva, constituindo-se em um modelo que influenciou fortemente o conhecimento científico. Por essa razão, a Geometria que estudamos, muito frequentemente denominada de "Geometria Euclidiana", foi aperfeiçoada pelos sucessores de Euclides e, no ano 500 d.C., já tinha sua forma atual.

Na Matemática grega não havia medida de áreas organizada como ciência dedutiva, Euclides nem se deu o trabalho de definir área.

Nos livro IV dos *Elementos* duas figuras planas são chamadas "iguais"quando têm a mesma área, para Euclides a coincidência de duas figuras planas por superposição era um passo intermediário para concluir a igualdade de suas áreas. O Axioma 4 dos *Elementos* diz: Dados dois triângulos ABC e EFG, se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{EG}$ e $\hat{A} = \hat{E}$ então $ABC = EFG$ vemos assim que para ele era importante dispor de critérios que assegurassem a sobreposição de dois triângulos, por exemplo. Do Axioma 4 podemos tirar que "Duas figuras que coincidem por sobreposição são iguais". Cumprindo essas condições, o Axioma referido garantia a mesma área para as figuras planas dadas.

Quanto a volumes este assunto foi tratado por Euclides no Livro XII dos *Elementos*. Nesta obra não há fórmulas para exprimi-los. Os principais teoremas demonstrado são os seguintes:

- *As pirâmides e os prismas de mesma base (ou mesma altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).*
- *Todo prisma triangular se decompõe em três pirâmides equivalentes.*
- *O volume de um cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura.*
- *Os cones e cilindros de mesma base (ou altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).*
- *Os volumes de duas esferas estão entre si como os cubos dos seus diâmetros.*

Escrevendo os quatro primeiros teoremas com expressão matemática temos que para o volume dos prismas e cilindros existe uma constante k tal que esses volumes têm a expressão

$$V = k \times \textit{área da base} \times \textit{altura}.$$

Já os volumes do cone e da pirâmide a expressão tem a forma

$$V = \frac{k}{3} \times \textit{área da base} \times \textit{altura}.$$

.

Fica claro que Euclides sabia calcular o volume desses sólidos pois basta escolher o cubo de aresta 1 como unidade de volume, resulta que $k = 1$, pois temos $V = \textit{área da base} = \textit{altura} = 1$, isso nos dá $1 = k.1.1$, logo $k = 1$.

Para a esfera, o quinto teorema acima significa que seu volume tem a expressão $V = c.R^3$, onde R é o raio, mas ele nada concluiu a respeito da constante c. Quase um século depois dos elementos, Arquimedes provou que $c = \frac{4\pi}{3}$.

Estes métodos desenvolvidos pelos matemáticos antigos eram muito trabalhosos. Um método mais eficiente e geral para obter expressões do volume dos chamados três corpos redondos (cilindro, cone e esfera) foi desenvolvido na segunda metade do século XVII, por e Leibniz, a partir de trabalhos iniciais de Fermat e Descartes. O método, é o cálculo infinitesimal, com a integração de funções elementares.

Arquimedes, entretanto, pode ser considerado o precursor dos métodos infinitesimais que conduziram à noção de integral. Muito depois dele, no começo do século XVII, o italiano Bonaventura Cavalieri, deu um passo importante na mesma direção.

Cavalieri era discípulo de Galileu e membro da ordem religiosa Jesuíta, ele foi estimulado pela *Stereometria* de Kepler, bem como por ideias antigas e medievais a organizar seus pensamentos sobre infinitésimo em formas de livro, ele escreveu sobre vários ramos da Matemática pura e aplicada, como Geometria, Trigonometria, Astronomia e Óptica, mas ele é lembrado por um dos seus livros mais influentes do inicio do período moderno, a *Geometria indivisibilibus continuorum*, publicada em 1635.

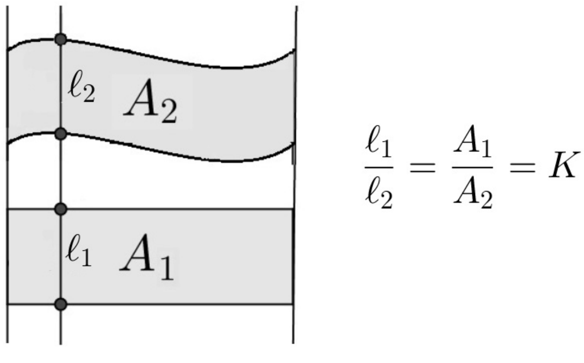
O argumento em que se baseia o livro é na sua essência sugerido por Oresme, Kepler e Galileu, em que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis"e que o volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos.

Neste trabalho utilizaremos o Princípio de Cavalieri, que permite uma simplificação considerável das fórmulas clássicas de volume.

Podemos escrever o Princípio de Cavalieri da seguinte forma:

- **Regiões Planas:** *Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma outra reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.*

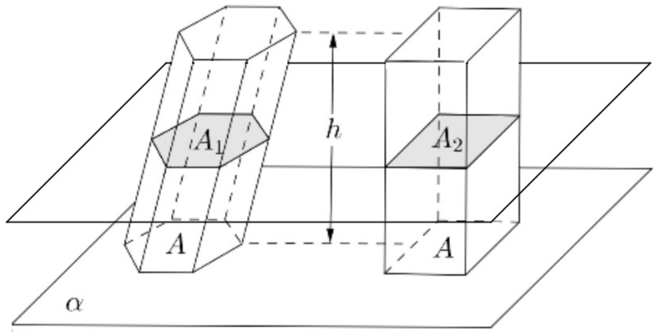
Figura 1: Princípio de Cavalieri para regiões planas



Fonte: Elaborada pelo autor

- **Volumes:** *Sejam A e B dois sólidos de mesma altura. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segunda figuras planas com áreas, iguais, então o vol*$(A) =$ *vol*(B).

Figura 2: Princípio de Cavalieri para sólidos



Fonte: Elaborada pelo autor

3 ÁREA

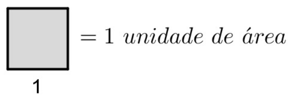
Medir a área de uma figura plana é compará-la com outra figura determinada como unidade de área.

Para determinar a área de uma figura F devemos comparar sua superfície com a de uma outra figura tomada como unidade. O resultado será um número que exprime quantas vezes a figura F contém a unidade de área.

Por exemplo, tomando a superfície de uma folha de papel A4 como unidade de área, se quisermos saber a área de um quadro-negro, basta verificar quantas vezes a superfície da folha cabe na do quadro, esse número será a área do quadro-negro.

Adotamos como unidade de área o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento

Figura 3: Unidade de Área

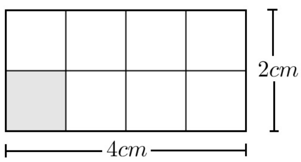


Fonte: Elaborada pelo autor

Como foi dito, a área de uma figura exprime quantas vezes essa figura contém a unidade de área. Isso pode ser percebido facilmente, quando desejamos conhecer a área de um retângulo cujos lados medem $4cm$ e $2cm$.

A unidade de área cabe 8 vezes no retângulo e, por isso, sua área é de 8 centímetros quadrados($8cm^2$), conforme figura 4

Figura 4: Área de um Retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

3.1 Área do Quadrado

Proposição 1: *Um quadrado de lado ℓ tem área ℓ^2*

Prova: Faremos a prova por construção primeiro para um quadrado de lado $n \in \mathbb{N}$, depois para um quadrado de lado $\ell \in \mathbb{Q}$, $\ell = \dfrac{m}{n} > 0$ com $m,\ n \in \mathbb{N}$ e pra concluir um quadrado de lado $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Primeiro particione um quadrado de lado $n \in \mathbb{N}$ em n^2 quadrados de lados 1 cada. Denotemos a área do quadrado maior por A_n, devamos ter A_n igual a soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1, de maneira que

$$A_n = n^2.$$

Considere, agora, um quadrado de lado $\dfrac{m}{n} > 0$, com $m,\ n \in \mathbb{N}$, e a área $A_{\frac{m}{n}}$. Arranje n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de lado $\dfrac{m}{n}$, por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\dfrac{m}{n}.n = m$. Tal quadrado maior terá, como já sabemos, área m^2; por outro lado, como ele está particionado em n^2 quadrados de lado $\dfrac{m}{n}$ cada, sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, isto é,

$$m^2 = n^2.A_{\frac{m}{n}}$$

Portanto,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

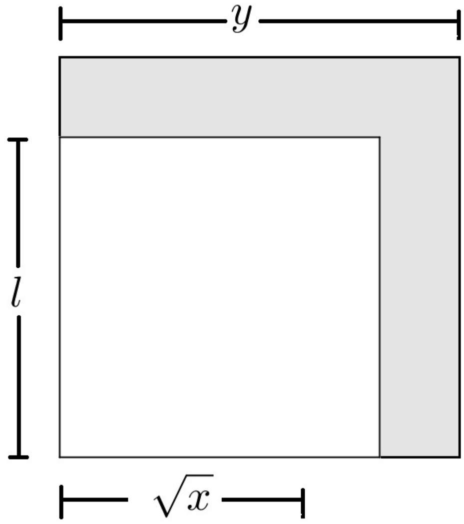
Podemos então concluir que a área de um quadrado cujos lados tem como medida um número racional $\ell = \dfrac{m}{n}$ é igual a ℓ^2.

Por último vamos considerar um quadrado Q cujo lado seja um número irracional y, queremos mostrar que a desigualdade entre a área de Q e y^2 é impossível, usaremos o método da exaustão de Eudóxio, chegando a conclusão de que a área de Q só pode ser y^2.

Dado um número qualquer $x < y^2$ mostraremos que deve ser $x <$ área de Q. Mostraremos também que $y < z^2$ implica que área de $Q < z^2$. Assim fica provado que a área de Q não pode ser um número x menor que um número z maior que y^2.

Observe o quadrado de lado ℓ contido no quadrado de lado y. Logo temos que o valor de $\ell^2 < y^2$. Como $\sqrt{x} < \ell$, temos $x < \ell^2 < y^2$

Figura 5: Quadrado de lado ℓ, contido no quadrado de lado y



Fonte: Elaborada pelo autor

Seja x tal que $x < y^2$. Tomamos um número racional ℓ inferior a y mas tão próximo de y que se tenha $x^2 < \ell^2 < y^2$, é só tomar ℓ, uma aproximação por falta de y, com erro inferior a $y - \sqrt{x}$. Sendo assim temos:

$$\sqrt{x} < \ell < y \Longrightarrow x < \ell^2 < y^2.$$

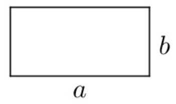
Tomamos um quadrado P de lado ℓ no interior do quadrado Q. Como ℓ é racional então a área de $P = \ell^2$. Como P está no interior de Q devemos ter que a área de $P <$ área de Q, portanto $\ell^2 <$ área de Q. e como sabemos que $x < \ell^2$. Concluímos que $x <$ área de Q. Assim, todo número real x, inferior a y^2, é também menor do que a área de Q. A demonstração da segunda parte em todo número real z, maior do que y^2, é maior que área de Q é análoga. Logo a área de Q não pode ser menor nem maior do que y^2. Por exclusão, deve-se então ter que área de $Q = y^2$, como queríamos demonstrar.

3.2 Área do Retângulo

Proposição 2: *Um Retângulo de lados a e b tem área ab*

Prova: Seja um retângulo de base a e altura b

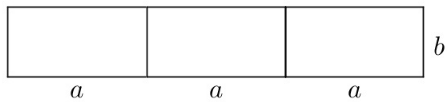
Figura 6: Retângulo de base a e altura b



Fonte: Elaborada pelo autor

Observando a figura 7 podemos ver que a área do retângulo é proporcional a base a. De fato, quando a base dobra, a área dobra, quando a base triplica, a área triplica, e assim por diante.

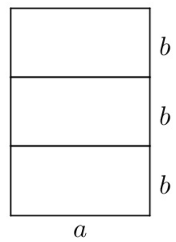
Figura 7: Retângulo de base $3a$ e altura b



Fonte: Elaborada pelo autor

Do mesmo modo área do retângulo também é proporcional a altura b. De fato, veja figura 8, quando a altura dobra, a área dobra, quando a altura triplica, a área triplica, e assim por diante.

Figura 8: Retângulo de base a e altura $3b$



Fonte: Elaborada pelo autor

Para mostrar que isso ocorre com qualquer número real positivo, vamos utilizar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que diz o seguinte: *Seja $y = f(x)$ uma função crescente tal que $f(nx) = nf(x)$ para todo n natural. Então $f(cx) = cf(x)$ para todo c real positivo.*

Vamos escrever o teorema da seguinte forma: Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função com as seguintes propriedades:

I $x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')$;

II $f(nx) = n.f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Então $f(cx) = c.f(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$. Consequentemente, $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, com $a = f(1)$.

Demonstração: Em primeiro lugar, para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$, com $m,\ n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n.f(rx) = f(n.rx) = f(n.\frac{m}{n}x) = f(mx) = m.f(x),$$

por II, logo $f(rx) = \dfrac{m}{n}f(x) = r.f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = cf(x)$ é válida quando c é racional. Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c.f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$, isso nos dá dois casos:

1. ou $f(cx) < c.f(x)$
2. ou $f(cx) > c.f(x)$.

Consideremos o caso 1. Temos então $\dfrac{f(cx)}{f(x)} < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $\dfrac{f(cx)}{f(x)} < r < c$, logo $f(cx) < r.f(x) < c.f(x)$. Como r é racional, vale $r.f(x) = f(rx)$. Assim, podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c.f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas, como $r < c$ e temos que $x \in \mathbb{R}^+$ então $rx < cx$ e, pela propriedade I, isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível se ter $f(cx) < c.f(x)$. De modo inteiramente análogo se vê que $f(cx) > c.f(x)$ é impossível. Portanto deve ser $f(x) = c.f(x)$ para quaisquer $c,\ x \in \mathbb{R}^+$.

Então concluindo a demonstração da área do retângulo temo:

Considerando que a unidade de área como sendo $A(1, 1) = 1$, e como vimos, a área do retângulo é proporcional tento à base a como à altura b. Então escrevendo a área em função da base e altura temos:

$$A(a, b) = A(a.1, b) = a.A(1, b) = a.A(1, b.1) = a.b.A(1, 1) = a.b.$$

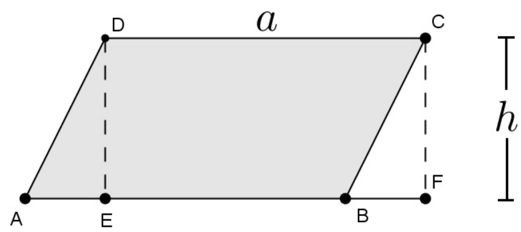
Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade isso é valido para qualquer $a,\ b \in \mathbb{R}^+$. concluímos assim a demonstração da formula para calcular a área do retângulo.

3.3 Área do Paralelogramo

Proposição 3: *A área de um paralelogramo de base a e altura h é igual a ah.*

Prova: Da área de um retângulo passamos facilmente para área de um paralelogramo, vejamos: Seja respectivamente E e F os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e suponha, sem perda de generalidade, que $E \in AB$ (figura 9). É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes, de modo que $\overline{AE} = \overline{BF}$ e $Área(ADF) = Área(BCF)$.

Figura 9: Área do Paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor

Então, temos

$$\begin{aligned} Área(ABCD) &= Área(ADE) + Área(BEDC) \\ &= Área(BCF) + Área(BEDC) \\ &= Área(EFCD) \end{aligned}$$

Por outro lado, EFCD é um retângulo de altura h e base

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a.$$

Por tanto, $Área(ABCD) = Área(EFCD) = ah$.

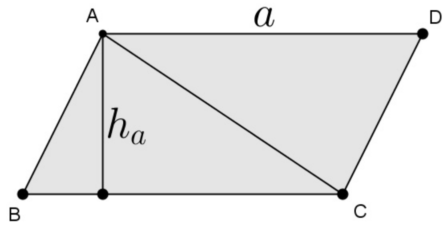
3.4 Área do Triângulo

Proposição 4: *Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e alturas h_a, h_b, h_c respectivamente relativas aos lados a, b, c, então,*

$$Área(ABC) = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Prova: Da área do paralelogramo deduz-se imediatamente a área do triângulo pois a área de todo triângulo é a metade da área de um paralelogramo. Seja $S = \acute{A}rea(ABC)$ e D a interseção da paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ por A com a paralela $\overleftrightarrow{AB}$ por C (figura 10). De imediato verifica-se que $ABCD$ é um paralelogramo de área $2S$, pois $ABC \equiv ACD$. Portanto, $\acute{A}rea(ABCD) = 2S = ah_a$, donde segue a primeira igualdade. As outras são análogas. ■

Figura 10: Área do Triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora de posse dessas fórmulas, para calcular a área de qualquer polígono basta subdividi-las em triângulos, retângulos, quadrados e paralelogramos ou quaisquer outras figuras cujas áreas sabemos calcular.

3.5 Área do Círculo

Proposição 5: *A área de um círculo de raio r é* $A = \pi r^2$.
Antes de irmos para prova, vamos definir π como sendo a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.

Essa definição para π é um dos resultados mais conhecidos de Arquimedes um dos maiores matemáticos de todos os tempos, natural de Siracusa, na ilha de Sicília. Arquimedes trabalhou em grande variedade de áreas. Na geometria, calculou a superfície e o volume de diversos sólidos, listou os sólidos semirregulares, estudou as espirais e estimou o valor de π.

São famosas duas histórias sobre Arquimedes contadas cerca de duzentos anos depois e de autenticidade duvidosa.

A primeira foi registrada pelo escritor romano Vitrúvio. O rei Hierão, amigo de

Arquimedes, queria descobrir se a sua coroa era de ouro puro ou parcialmente feita de prata.

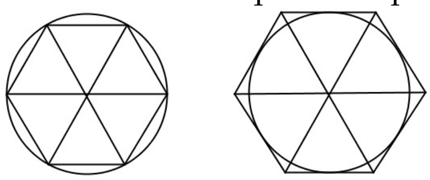
Arquimedes descobriu o modo de resolver o problema quando entrou no banho e observou que, quanto mais o corpo afundava, mais água subia na borda da banheira. Felicíssimo com a descoberta, ele pulou do banho e correu nu para casa, berrando ”Heureca!- Achei!

A outra história, contada por Plutarco, diz respeito à morte prematura de Arquimedes nas mãos de um soldado romano. Em 212 a.C., durante o cerco de Siracusa, Arquimedes estava entretido com um problema matemático, sem perceber que a cidade fora capturada, quando um soldado veio e ameaçou matá-lo. Arquimedes lhe implorou que esperasse até terminar os cálculos, mas o soldado se enfureceu e o matou ali mesmo.

Depois de conhecer um pouco da história de Arquimedes vejamos como ele chegou na razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro em 1737 Euler chamou esta razão de π.

O método de Arquimedes consiste em inscrever um polígono regular em um círculo de raio 1 e ir dobrando o número de lados. Ele começou desenhando um hexágono inscrito e circunscrito e comparou seu perímetro com a circunferência: isso revela que π fica entre 3 e $3,464$.

Figura 11: Prova de Arquimedes para o π



Fonte: Elaborada pelo autor

Depois seguiu dobrando os lados do polígono e dessa maneira, realizando os cálculos com polígonos de 12, 24, 48 e 96 lados sem chegar a desenhar todos, ele concluiu que, na nossa notação, $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, o que nos dá um valor de π de cerca de 3,14 correto até a segunda casa decimal.

Enfim vamos a prova da fórmula da área do círculo.

Prova: Considere um polígono de n lados inscrito em uma circunferência de centro O e raio r. Um dos lados é $AB = c_n$ e o apótema do polígono é $OM = a_n$.

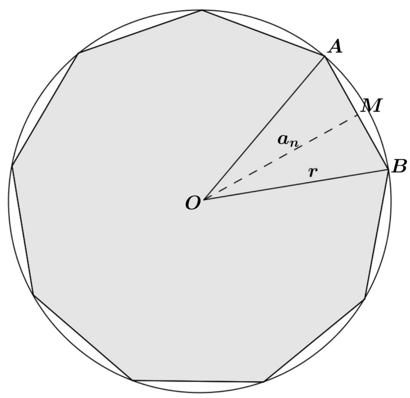
A área A_n desse polígono é igual a n vezes a área do triângulo OAB.

$$A_n = n.\frac{c_n.a_n}{2} = \frac{1}{2}(nc_n)a_n$$

Na relação acima, nc_n é o perímetro p_n do polígono. Assim,

$$A_n = \frac{1}{2}p_n.a_n$$

Figura 12: Polígono inscrito na circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor

A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares nele inscritos.

Por definição π e a razão entre o comprimento da circunferência C e o seu diâmetro D, $\pi = \dfrac{C}{D} = \dfrac{C}{2r} \Rightarrow C = 2.\pi.r$

Seja A a área do círculo de raio r.

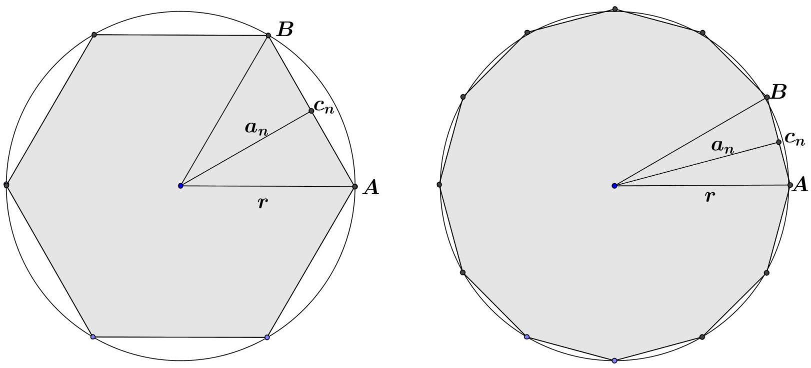
A área A_n do polígono regular inscrito na circunferência de raio r é $A_n = \dfrac{1}{2}p_n.a_n$.

Observe na figura 13 que, quanto mais lados possui o polígono, ou seja, quanto maior for o valor de n menor é o lado c_n do polígono e mais sua área A_n se aproxima da área A do círculo.

Imagine agora um valor muito grande para n, ou seja façamos $n \rightarrow \infty$.

Da figura 13 chegamos as seguintes conclusões:

Figura 13: Polígonos Inscritos



Fonte: Elaborada pelo autor

I. Quando o número de lados do polígono for muito grande o perímetro P_n do polígono tende ao comprimento da circunferência,

$$p_n = \lim_{n\to\infty} n.c_n = 2\pi r$$

II O apótema a_n é a distância do centro da circunferência ao lado c_n, observe que quanto maior for o número de lados mais o apótema se aproxima do raio r, então quando $n \to\infty$.

$$a_n \to r$$

III. Podemos concluir também que tomando um polígono com um número de lados muito grande a área A_n do polígono tende a área A da circunferência, então temos que

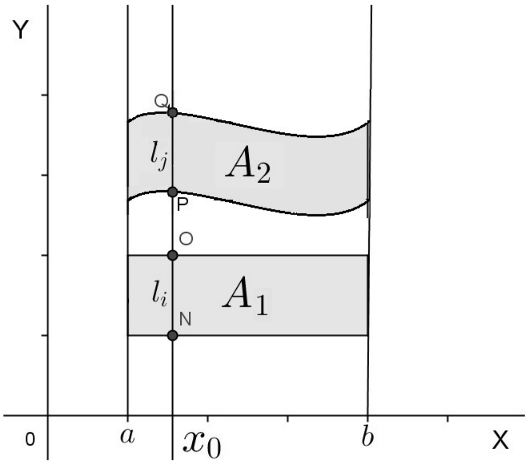
$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} n.c_n.a_n \\ A &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} p_n.a_n \\ A &= \frac{1}{2}.2.\pi.r.r \\ A &= \pi.r^2. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

3.6 Área da Elipse

Proposição 6: *A área de uma elipse com semieixos a e b é* $A = \pi.a.b$.
Usaremos o Princípio de Cavalieri para demostrar a área da elipse, observe a figura 14:

Figura 14: Regiões planas A_1 e A_2



Fonte: Elaborada pelo autor

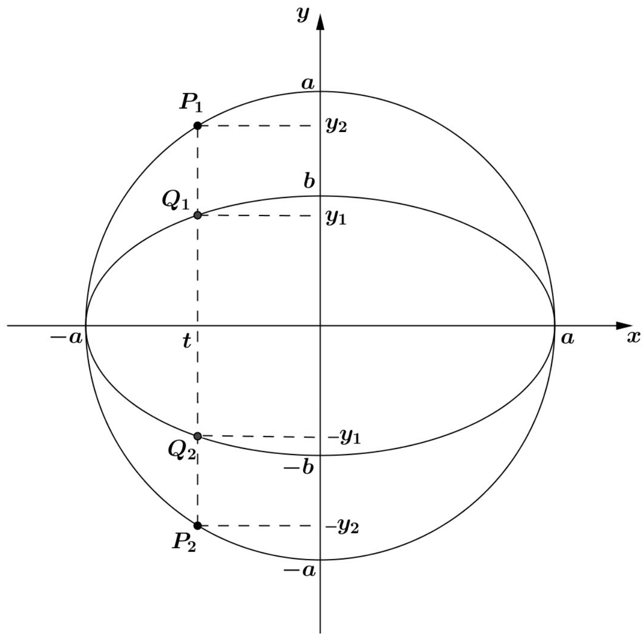
Segundo Cavalieri: *Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma outra reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.* Fica claro que as duas regiões planas tem que ter um comprimento igual, como podemos ver na figura 14 as duas figuras A_1 e A_2 vão de a até b no intervalo $[a, b]$
Prova: Considere uma elipse de semieixos a e b, com $a \geq b$. Podemos escolher eixos cartesianos de modo que a equação cartesiana da elipse seja dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Utilizando o Princípio de Cavalieri, vamos comparar a elipse com uma circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = a^2$.

Traçaremos retas paralelas ao eixo Oy. A reta $x = t$, para cada t fixo em $(-a, a)$, intersecta a circunferência em P_1 e P_2 e intersecta a elipse em Q_1 e Q_2.

Figura 15: Circunferência e Elipse



Fonte: Elaborada pelo autor

Para obtermos $\overline{Q_1Q_2}$ e $\overline{P_1P_2}$ observamos que Q_1 e Q_2 e P_1 e P_2 são simétricos em relação à reta $y = 0$, logo $\overline{P_1P_2} = 2y_2$ e $\overline{Q_1Q_2} = 2y_1$.

Como Q_1 pertence à elipse, temos para cada $t \in (-a, a)$,

$$\frac{t^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_1^2 = b^2\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right)$$

Como P_1 pertence à circunferência, temos

$$t^2 + y_2^2 = a^2 \Rightarrow y_2^2 = a^2 - t^2.$$

Assim, o quociente entre y_1^2 e y_2^2 é

$$\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{b^2.\left(1 - \dfrac{t^2}{a^2}\right)}{a^2 - t^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

onde obtemos

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}.$$

Logo, para qualquer $-a < t < a$, temos

$$\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\overline{P_1P_2}} = \frac{2y_1}{2y_2} = \frac{b}{a}.$$

Pelo Princípio de Cavalieri, a razão entre as áreas obedece a mesma proporção. logo,

$$\frac{A_{elipse}}{A_{circulo}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{A_{elipse}}{\pi a^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow A_{elipse} = \pi ab,$$

como queríamos demonstrar.

4 VOLUME

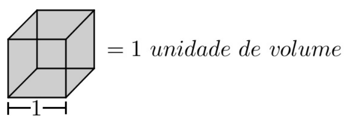
Vamos tratar agora de volumes dos seguintes tipos de sólidos: prismas, pirâmides, cilindros, cones e a esfera. Neste conteúdo a dificuldade de grande parte dos alunos do Ensino Médio é detectada a partir do momento em que eles tentam visualizar e entender a imagem dos sólidos. Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa "quantidade de espaço"através de um número, devemos compará-la com uma unidade, e o resultado dessa comparação será chamado de volume.

Por exemplo, podemos medir o volume de uma caixa de papelão usando resmas de papel, enchendo a caixa com as resmas veremos quantas resmas cabem na caixa e diremos que o volume da caixa de papelão é 10 resmas, por exemplo, mas também pode dar um número que não seja um inteiro de resmas, ou ainda podemos medir o volume de uma caixa d'água usando como unidade um balde. Enchendo o balde de água e derramando na caixa d'água várias vezes até que esta fique completamente cheia, estamos realizando uma medida de volume. O resultado dessa comparação pode ser um número inteiro, exemplo: 1 caixa d'água = 20 baldes, por outro lado a última operação pode sobrar ainda um pouco de água no balde. E como determinar essa fração?

Esses exemplos servem apenas para casos simples onde necessite apenas de um valor aproximado não tendo utilidade no caso de objetos muito pequenos, ou muito grandes ou ainda para objetos completamente sólidos. Para um estudo mais geral vamos estabelecer que:

a unidade de volume é o cubo de aresta 1

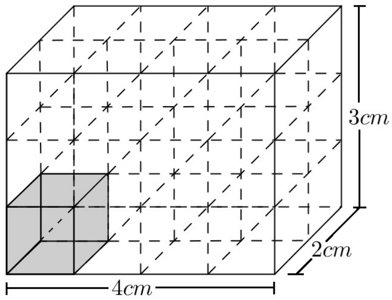
Figura 16: Unidade de Volume



Fonte: Elaborada pelo autor

O volume de um objeto exprime quantas vezes a unidade de volume cabe dentro desse objeto, isto pode ser facilmente percebido quando desejamos saber o volume de um bloco retangular que tem $4cm$ de comprimento, $2cm$ de largura e $3cm$ de altura.

Figura 17: Volume de um Bloco Retangular



Fonte: Elaborada pelo autor

A unidade de volume cabe 24 vezes dentro do prisma, e por isso seu volume é $24cm^3$.

Dessa maneira podemos deduzir que o volume de um bloco retangular de dimensões a(comprimento), b(largura), c(altura) é o produto das três:

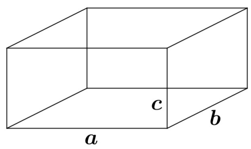
$$V = abc$$

Veremos a demonstração a seguir.

4.1 Volume de um Bloco Retangular

Definição: *Um bloco retangular é um sólido limitado por seis retângulos: suas faces. Esses retângulos constituem três pares; em cada par os retângulos são iguais. Os lados dos retângulos são chamados de arestas do bloco.*

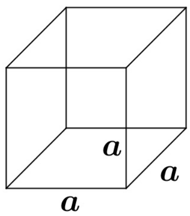
Figura 18: Bloco retangular determinado pelas arestas a, b e c



Fonte: Elaborada pelo autor

Conhecendo três arestas que concorrem num ponto de um bloco retangular, este bloco fica inteiramente determinado. O cubo é um caso particular de um bloco retangular, onde suas arestas têm o mesmo comprimento, as suas faces são seis quadrados iguais.

Figura 19: Cubo de arestas a



Fonte: Elaborada pelo autor

Como vemos um cubo é por definição um bloco retangular, só que com uma particularidade, todas suas arestas são iguais.

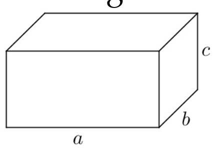
Teorema 1: *O volume de um bloco retangular de dimensões* $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}_+^*$ *é dado pelo produto das dimensões, ou seja,* $V = abc$.

Prova: O volume desse bloco retangular será representado por $V(a,b,c)$ e como o cubo unitário é um bloco retangular de aresta 1, então $V(1,1,1) = 1$.

Observe que o volume do bloco retangular é proporcional a cada uma de suas dimensões. Em outras palavras se mantivermos constante a largura e a altura e multiplicarmos o comprimento por um número $n \in \mathbb{N}$, o volume também será multiplicado por n, veja:

Temos aqui um bloco de $V(a,b,c)$:

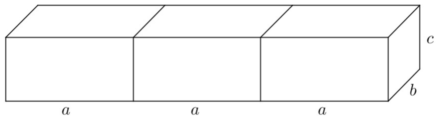
Figura 20: Bloco Retangular de arestas $a,\ b,\ c$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Multiplicando a por $n \in \mathbb{N}$ temos, $V(na,b,c) = nV(a,b,c)$:

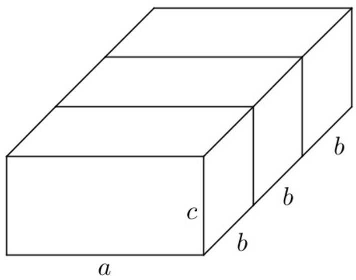
Figura 21: Bloco Retangular de arestas $3a,\ b,\ c$.



Fonte: Elaborada pelo autor

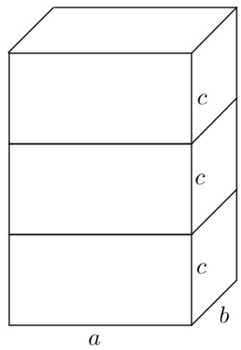
O mesmo ocorre multiplicarmos as outras dimensões:

Figura 22: Bloco Retangular de arestas $a,\ 3b,\ c$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 23: Bloco Retangular de arestas $a,\ b,\ 3c$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Então pelo, Teorema Fundamental da Proporcionalidade, esse fato ocorre para qualquer $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$. Logo temos:

$$\begin{aligned} V(a,b,c) &= V(a.1,b,c) &&= aV(1,b,c) \\ &= a.V(1,b.1,c) &&= ab.V(1,1,c) \\ &= ab.V(1,1,c.1) &&= abc.V(1,1,1) \\ &= abc \end{aligned}$$

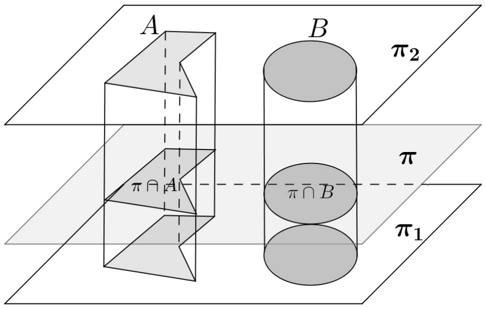
Portanto, o volume de um bloco retangular é o produto de suas dimensões.

4.2 Princípio de Cavalieri

Princípio de Cavalieri para volumes: *Sejam A e B dois sólidos de mesma altura. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segunda figuras planas com áreas, iguais, então o $vol(A) = vol(B)$.*

Sejam A e B dois sólidos qualquer. Cada plano horizontal π determina, nos dois sólidos A e B, seções planas que indicaremos respectivamente com $\pi \cap A$ e $\pi \cap B$. Elas são as interseções do plano π com os dois sólidos dados. Se, para todos os planos horizontais π, a figura plana $\pi \cap A$ tem a mesma área que a figura plana $\pi \cap B$, o Princípio de Cavalieri afirma que o $vol(A) = vol(B)$.

Figura 24: Princípio de Cavalieri para volumes



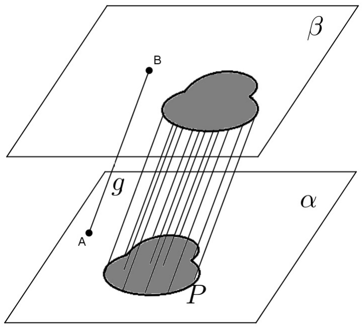
Fonte: Elaborada pelo autor

O Princípio de Cavalieri reduz o cálculo de volume ao cálculo de áreas. A partir daqui veremos como ele pode ser aplicado.

4.3 Volume de Prisma

Definição: Para definirmos o prisma temos primeiro que definir o cilindro:

Figura 25: Cilindro

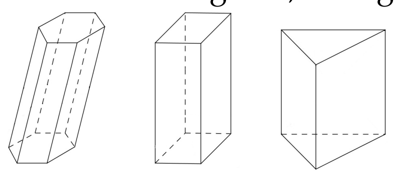


Fonte: Elaborada pelo autor

Cilindro: Para definirmos matematicamente um cilindro, consideramos dois planos distintos e paralelos, α e β, uma figura plana P contido em α e um segmento $\overline{AB}$, o qual chamaremos de geratriz, com $A \in \alpha$ e $B \in \beta$. Denomina-se *cilindro*, o conjunto de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$ com uma extremidade em $P \subset \alpha$ e outra extremidade em β.

Então o prisma é por definição um cilindro cujas bases são polígonos.

Figura 26: Primas de base hexagonal, retangular e triangular

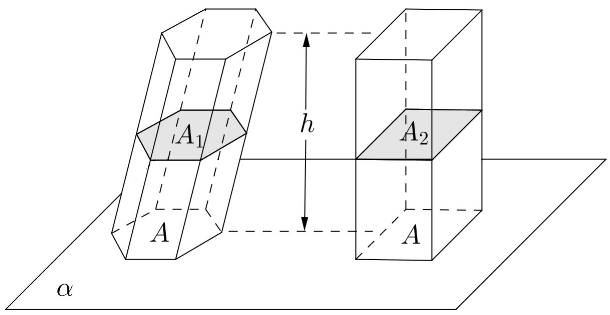


Fonte: Elaborada pelo autor

Teorema 2: *O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura .*

Prova: A prova se torna fácil com o Princípio de Cavalieri. Imagine um prisma de altura h, e cuja base é um polígono de área A, contido em um plano horizontal. Construa ao lado um bloco retangular com altura h e de forma que a sua base seja um retângulo de área A.

Figura 27: Volume do prisma $V = A.h$



Fonte: Elaborada pelo autor

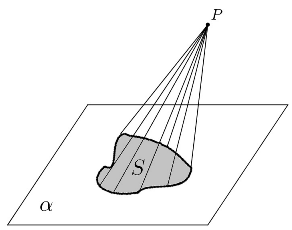
Suponha outro plano horizontal, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no bloco retangular, respectivamente. O bloco é também um prisma e em todo prisma, uma seção paralela a base é também congruente a ela. Logo, como figuras congruentes têm mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume. Como o volume do bloco é Ah, o volume do prisma é também o produto da área de sua base por sua altura.

4.4 Volume da Pirâmide

Antes de tratarmos do caso especifico da pirâmide precisamos definir o cone

Definição: Um cone K, tendo como base uma figura $S \subset \alpha$, e como vértice um ponto P situado fora do plano α, é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de S.

Figura 28: Cone

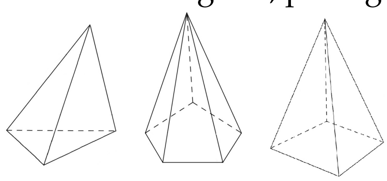


Fonte: Elaborada pelo autor

Definição: *Pirâmide é o cone cuja base é um polígono*

Como vemos, a pirâmide é por definição, um caso particular do cone, então sempre que o cone tem um polígono como base ele é denominado pirâmide

Figura 29: Pirâmides de base triangular, pentagonal e quadrangular



Fonte: Elaborada pelo autor

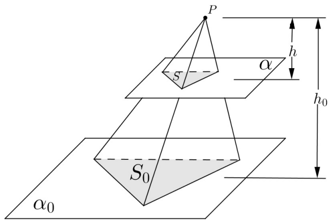
Para chegarmos a fórmula que nos permite calcular o volume de uma pirâmide, precisamos de lemas auxiliares.

Lema 1: Seja K uma pirâmide de vértice P, altura h_0 e base S_0 situada no plano horizontal, α_0. Seja α outro plano horizontal, entre P e α_0. Indiquemos com S a seção $\alpha \cap K$ e com h a distância entre P e α, isto é, a altura da pirâmide de base F e vértice P. Tem-se a relação.

$$\frac{\acute{a}rea(S_0)}{\acute{a}rea(S)} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^2.$$

Demonstração: Basta observar que a correspondência $\sigma : \alpha \to \alpha_0$, que associa a cada ponto X do plano α o ponto $X' = \sigma(X)$ de α_0, obtido como a interseção da semirreta PX com o plano α_0, é uma semelhança com fator de semelhança igual a $\dfrac{h_0}{h}$.

Figura 30: A razão $\dfrac{S}{S_0} = \left(\dfrac{h}{h_0}\right)^2$



Fonte: Elaborada pelo autor

Lema 2: Duas pirâmides de mesma altura e bases com áreas iguais têm volumes iguais.

Demonstração: Sejam K e L duas pirâmides com mesma altura h_0 e bases F_0 e B_0 estão no mesmo plano α_0 e os vértices desses cones estão do mesmo lado de α_0. Para todo plano horizontal α, situado entre esses vértices e o plano α_0, as seções $F = \alpha \cap K$ e $G = \alpha \cap L$ têm áreas iguais pois, segundo o Lema,

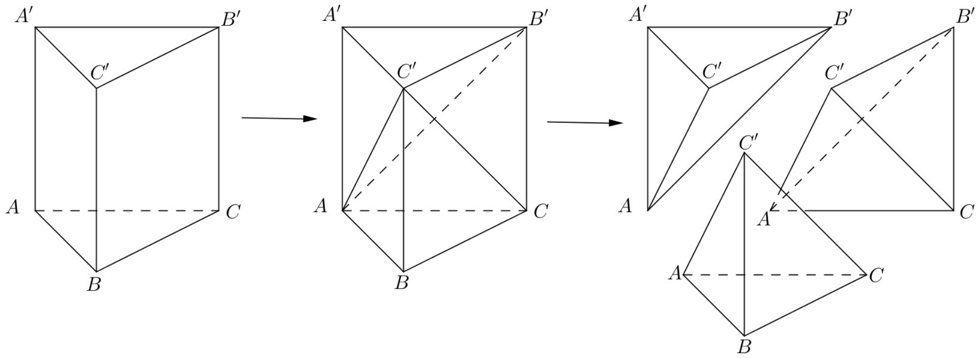
$$\frac{\acute{a}rea(F)}{\acute{a}rea(F_0)} = \frac{\acute{a}rea(G)}{\acute{a}rea(G_0)} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^2$$

onde h é a distância do vértice P (e, igualmente, do vértice Q) ao plano α. Temos Pelo Princípio de Cavalieri que $vol(K) = vol(L)$, ■

Teorema 3. *O volume de uma pirâmide de base triangular é um terço do produto da área da base pela altura.*

Demonstração: Observe a figura:

Figura 31: Prisma decomposto em três Pirâmides



Fonte: Elaborada pelo autor

Tomemos o prisma triangular de bases ABC e $A'B'C'$ em seguida decompomos em três pirâmides $ABCB'$, $A'B'C'A$(com base congruente a base da primeira e com mesma altura), sendo assim pelo lema 2 elas possuem o mesmo volume, temos também a pirâmide $ACC'B'$, cuja base ACC' é congruente à base $AA'C'$ da segunda cuja a altura, a partir do vértice B', é igual ao vértice da segunda pirâmide, $AA'C'B'$, a partir do mesmo vértice B', sendo assim o lema 2 garante a igualdade entre seus volumes. Concluímos assim a demonstração.

Do Teorema 3 chegamos facilmente a conclusão:

Corolário: *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

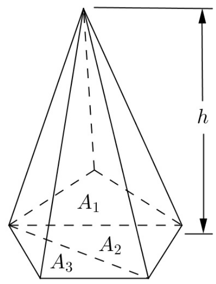
Observe que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

Suponhamos agora que a pirâmide tenha altura h e que a sua base, de área A, tenha sido dividida em n triângulos de áreas

$$A_1,\ A_2, ...,\ A_n.$$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

Figura 32: Pirâmide com base decomposta em triângulos justapostos



Fonte: Elaborada pelo autor

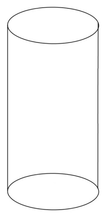
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + ... + \frac{1}{3}A_nh \\ &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_n)h \\ &= \frac{1}{3}Ah \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

4.5 Volume de um Cilindro Circular

Definição: *Partindo da definição de cilindro na seção 4.3 temos que um cilindro que possui como base um círculo de raio r é denominado de Cilindro Circular.*

Figura 33: Cilindro de base circular



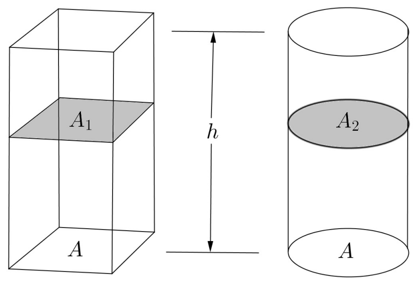
Fonte: Elaborada pelo autor

Teorema 4: *O volume de um cilindro circular é igual ao produto da área da base pela altura,* $V = A.h = \pi.r^2.h$.

Prova: Imagine um cilindro de altura h, e cuja base um círculo de área A, contido em um plano horizontal. Conforme um dos problemas clássicos da geometria grega, geometricamente não é possível construir um quadrado de mesma área que um círculo dado, esse é o problema chamado de "a quadratura do circulo", isso é possível algebricamente, mas é impossível na construção com régua e compasso. Aqui vamos nos limitar a imaginar um bloco retangular ao lado do cilindro circular, com mesma altura h e de forma que a sua base seja um retângulo de área A.

Suponha outro plano horizontal, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no cilindro e no bloco retangular, respectivamente. Como um bloco é um caso particular do cilindro, uma seção paralela a base é também congruente a ela. Logo, como figuras congruentes têm mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume. Como o volume do bloco é Ah, o volume do cilindro é também o produto da área de sua base por sua altura.

Figura 34: Volume do cilindro $V = A.h = \pi.r^2.h$

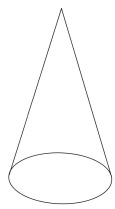


Fonte: Elaborada pelo autor

4.6 Volume de um Cone Circular

Definição: *Conforme a definição de cone na seção 4.4, temos que um cone que possui como base um círculo de raio r é denominado Cone Circular.*

Figura 35: Cone de base circular



Fonte: Elaborada pelo autor

Teorema 5: *O volume de um cone circular é igual a um terço do produto da área da base pela altura,* $V = \dfrac{1}{3}A.h = \dfrac{1}{3}\pi.r^2.h.$

Prova: A relação entre o prisma e o cilindro é a mesma que entre o cone e a pirâmide.

O volume do cone circular segue os mesmos passos dados anteriormente. Se um cone circular tem altura h e base de área A contida em um plano horizontal, consideramos uma pirâmide de altura h e base de área A contida nesse mesmo plano.

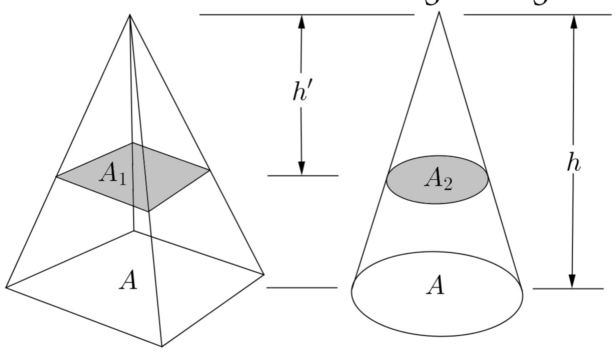
Se um outro plano horizontal, distando h' do vértice desses sólidos secciona ambos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

ou seja, $A_1 = A_2$. O Princípio de Cavalieri nos garante que os dois sólidos tem o mesmo volume, logo o volume do cone circular é

$$V = \frac{1}{3}A.h = \frac{1}{3}\pi.r^2.h.$$

Figura 36: Volume do cone $V = \dfrac{1}{3}A.h = \dfrac{1}{3}\pi.r^2.h$



Fonte: Elaborada pelo autor

4.7 Volume da Esfera

Definição: *A esfera de centro num ponto O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a R, podemos também dizer que a esfera é a reunião de todos os segmentos de reta de origem em O e comprimento igual a R.*

Teorema 6: *O volume de uma esfera de raio R é igual a* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Prova: O volume da esfera será obtido também com aplicação do Princípio de Cavalieri. Para isso, devemos imaginar um certo sólido, de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Repare que em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2 - h^2)$. Mas esta é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e h.

Consideremos uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio R com base sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido C(chamado clepsidra) é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro(ou do centro da esfera, o que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é C.

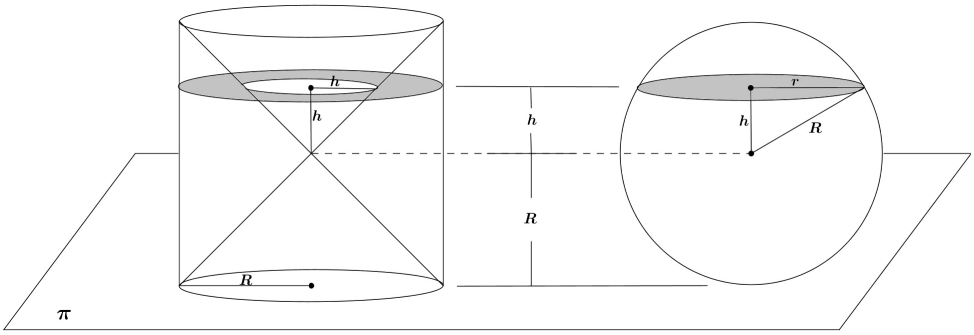
O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura $2R$ subtraindo de dois cones de raio R e altura R. Isso dá:

$$\pi R^2 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

que é o volume da esfera.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Figura 37: Seções na esfera e no cilindro com os cones



Fonte: Elaborada pelo autor

5 ÁREAS E VOLUMES NAS AVALIAÇÕES EXTERNAS

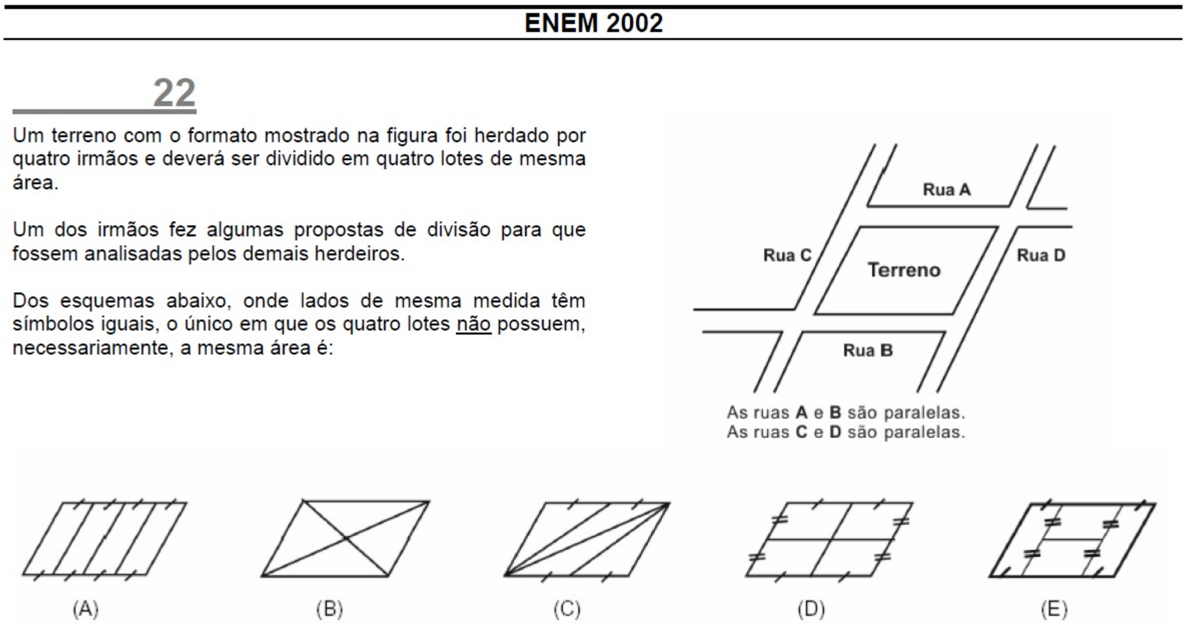
Neste capítulo veremos como questões de áreas e volumes estão presentes nas avaliações externas tanto em termos nacional como é o caso do ENEM, como o SPAECE que é realizada no Estado do Ceará, e assim como o SPAECE temos avaliações similares nos outros estados brasileiros e uma prova nacional chamada Prova Brasil, estas avaliações são realizadas para verificar a qualidade da educação básica no Brasil, é através do ENEM, por exemplo, que se chega ao resultado do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB em cada estado, e da Prova Brasil que se mede o IDEB nos municípios.

É o IDEB que norteia as politicas publicas voltadas para a educação básica brasileira, com isso vemos a importância que deve ser dada as essas avaliações por parte dos gestores e dos professores das escolas públicas.

No Ceará são duas as avaliações externa para o Ensino Fundamental o SPAECE(Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará) e a Prova Brasil que é uma prova nacional, onde a primeira aplicação foi em 1990 denominada de SAEB, e só no ano de 2005 que foi reestruturado e passou a ser chamada de Prova Brasil, para o nível médio também são duas as avaliações o SPAECE e a avaliação mais importante o ENEM(Exame Nacional do Ensino Médio), pois, é através dela que o aluno tem a oportunidade de ingressar na universidade e é através do ENEM também que se avalia o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica - IDEB, do ensino médio no estado sendo que questões de geometria ocupam cerca de 35% da prova, e entre estas temos o conteúdo de áreas e volumes presentes e contextualizados em grande parte, mostraremos algumas questões destas provas para que possamos observar como isto é abordado. Desta maneira podemos ver a importância destes conteúdos serem ministrados de maneira eficiente e satisfatória e ainda a importância do aluno aprender esses conteúdos na educação básica.

Veremos algumas questões em que os alunos podem utilizar o Princípio de Cavalieri para chegarem na solução

Figura 38: Questão 22 do ENEM de 2002


ENEM 2002

22

Um terreno com o formato mostrado na figura foi herdado por quatro irmãos e deverá ser dividido em quatro lotes de mesma área.

Um dos irmãos fez algumas propostas de divisão para que fossem analisadas pelos demais herdeiros.

Dos esquemas abaixo, onde lados de mesma medida têm símbolos iguais, o único em que os quatro lotes <u>não</u> possuem, necessariamente, a mesma área é:

Fonte: ENEM

Nesta vamos analisar cada alternativa:

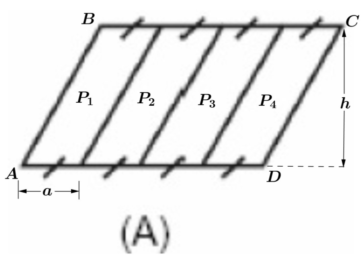


Figura 39: Alternativa A

Como podemos observar na alternativa A temos quatro paralelogramo todos com base a e altura h o que já garante que as áreas são iguais pois temos $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = a.h$, aqui também podemos usar Cavalieri, pois tomando o paralelogramo P_1 traçando retas paralelas a $\overline{AD}$ entre os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ as intersecções de todas as retas com os paralelogramos P_1, P_2, P_3 e P_4, são iguais então pelo Princípio de Cavalieri as áreas dos paralelogramos são todas iguais.

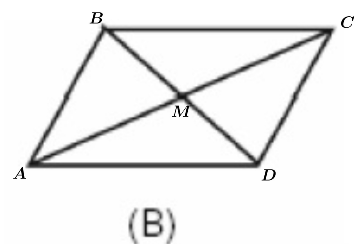


Figura 40: Alternativa B

Na alternativa B chegamos a conclusão sem usar Cavalieri pois basta observar os triângulos aos pares. Como o polígono $ABCD$ é um paralelogramo então as diagonais AC e BD se interceptam no ponto médio M. Agora observe o triângulo ABC de base AC como M é ponto médio de AC os triângulos AMB e BMC possuem áreas iguais pois eles tem bases iguais e alturas iguais, para chegar a conclusão sobre as áreas dos outros triângulos basta repetir o procedimento.

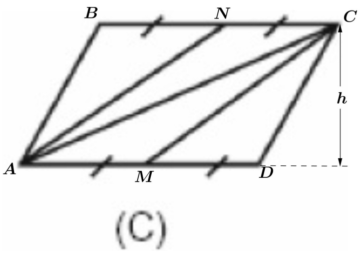


Figura 41: Alternativa C

Na alternativa C concluísse facilmente que os triângulos ABN, ACN, ACM e CDM possuem áreas iguais, pois temos que $ABCD$ é um paralelogramo sendo assim os lados AD e BC são paralelos e M e N são pontos médios de ambos respectivamente, isso nos dá que os quatro triângulos tem bases e alturas de mesma medida, dessa maneira suas áreas são iguais.

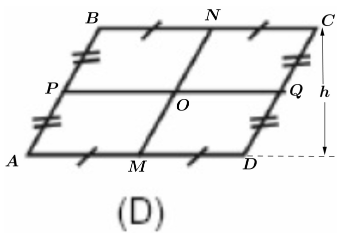


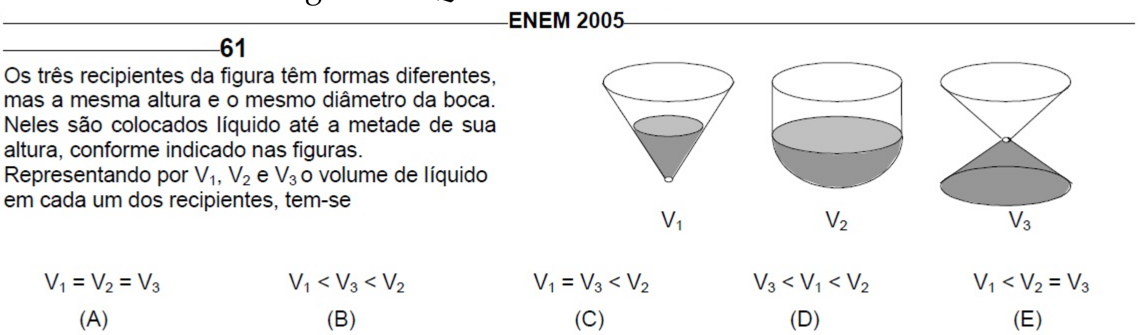
Figura 42: Alternativa D

Na alternativa D, $ABCD$ é um paralelogramo e M, N, P, e Q são pontos médios de AD, BC, AB e CD respectivamente sendo assim MN é paralelo a AB e PQ é paralelo a AD e O é ponto médio de MN e PQ dai concluímos que $APOM$, $PBNO$, $ONCQ$ e $MOQD$ são paralelogramos de bases e alturas iguais, chegando a conclusão de que suas áreas são iguais.

Então por exclusão chegamos a conclusão que a alternativa correta é a letra E

Vamos analisar outra questão, também do ENEM:

Figura 43: Questão 61 do ENEM de 2005


ENEM 2005

61

Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se

(A) $V_1 = V_2 = V_3$

(B) $V_1 < V_3 < V_2$

(C) $V_1 = V_3 < V_2$

(D) $V_3 < V_1 < V_2$

(E) $V_1 < V_2 = V_3$

Fonte: ENEM

Nessa questão o aluno pode chegar a conclusão facilmente se ele tiver conhecimento do Princípio de Cavalieri, pois vamos imaginar as partes que contem líquido nos três recipientes, como sendo três sólidos: S_1, S_2 e S_3, cujo os volumes são V_1, V_2 e V_3 respectivamente, como vimos esses sólidos têm a mesma altura pois ambos estão cheios até a metade dos recipientes, agora pense nos três sólidos com base sobre um plano α.

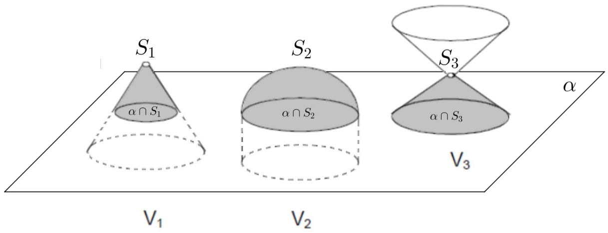
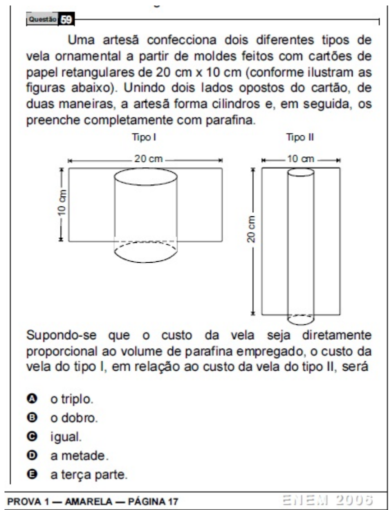


Figura 44: Sólidos com bases sobre o plano α

Então temos $\alpha \cap S_1 < \alpha \cap S_2 = \alpha \cap S_3$ conforme formos imaginado outros planos paralelos a α intersectando os sólidos é fácil observar que essas intersecções obedecem a seguinte ordem; $\alpha \cap S_1 < \alpha \cap S_3 < \alpha \cap S_2$, Logo o Princípio de Cavalieri nos garante que $V_1 < V_3 < V_2$ Assim chegamos a conclusão que a resposta correta é alternativa D.

Vamos ver agora mais uma questão do ENEM, pois de todas as avaliações externas realizadas na educação básica no estado do Ceará esta é a mais importante.

Figura 45: Questão 59 do ENEM de 2005



Questão 59

Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

Tipo I — 20 cm, 10 cm

Tipo II — 10 cm, 20 cm

Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

A o triplo.
B o dobro.
C igual.
D a metade.
E a terça parte.

PROVA 1 — AMARELA — PÁGINA 17

Fonte: Elaborada pelo autor

Essa é mais uma questão em que o Princípio de Cavalieri ajuda o aluno a resolver facilmente.

Vamos relembrar o Princípio de Cavalieri para volumes: *Considere dois sólidos A e B. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas, tais que a razão entre suas áreas é uma constante, então a razão entre os volumes $V(A)$ e $V(B)$ é essa constante.*

Analisando as figuras do tipo I e II temos:

Tipo I: O comprimento da circunferência da base é $20cm$ então o raio da base mede $r = \frac{20}{\pi}$ assim concluímos que a área da base é $A_I = \left(\frac{20}{\pi}\right)^2 \pi = \frac{400}{\pi}$.

Tipo II: O comprimento da circunferência da base é $120cm$ então o raio da base mede $r = \frac{10}{\pi}$ assim concluímos que a área da base é $A_{II} = \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \pi = \frac{100}{\pi}$.

Vamos considerar uma figura III de área da base A_{III} semelhante a do tipo II mas com altura igual a do tipo I. A razão entre as áreas geradas por secções feitas por planos horizontais nas figuras do tipo I e III é $\frac{A_I}{A_{III}} = \frac{\frac{400}{\pi}}{\frac{100}{\pi}} = 4$ o Princípio de Cavalieri garante que a razão entre seus volumes possuem a mesma constante.

Mas como a figura do tipo II tem o dobro da altura da figura do tipo III, o seu volume é o dobro, $V_{II} = 2V_{III}$, então, temos que:

$$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{4}{2} = 2$$

Assim concluímos que a resposta correta é a alternativa B.

Como vemos o Princípio de Cavalieri além de ser um método eficaz na demonstração de fórmulas para áreas e volumes também auxilia os alunos na resolução de problemas.

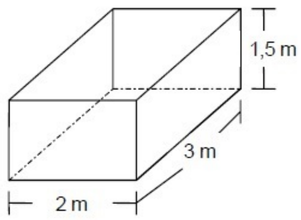
Assim como temos no ENEM a Prova Brasil, também no SPAECE e outras avaliações do tipo, que são realizadas no Brasil, um terço das questões é sobre geometria, vamos ver alguns exemplos.

A questão abaixo caiu em uma Prova Brasil de 9º ano, veja que, se para o aluno estiver bem definido o conceito de volume, facilmente ele chegará a conclusão que basta multiplicar as três dimensões para obter o volume desta caixa e, consequentemente obter a alternativa (C) como resposta, pois:

Figura 46: Questão da Prova Brasil do 9º ano

000 IT_023100

A quantidade de metros cúbicos de água, que pode ser armazenada em uma caixa d'água de 2 m de comprimento por 3 m de largura e 1,5 m de altura, é



(A) 6,5 (B) 6,0 (C) 9,0 (D) 7,5

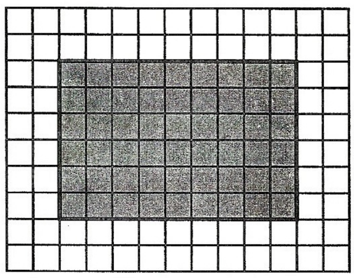
Fonte: Prova Brasil

$$V = 2.3.1,5 = 9m^3$$

Vejamos agora uma questão do SPAECE onde foi abordado um problema envolvendo área:

Figura 47: Questão do SPAECE

33) (M04371SI) Uma área da escola está destinada à construção de uma brinquedoteca. A área está representada pela parte colorida na malha, e cada quadrado tem 1 metro de lado. Veja abaixo.



Qual será a medida da área da brinquedoteca?

A) 15 m^2 B) 30 m^2 C) 36 m^2 D) 54 m^2

Fonte: SPAECE

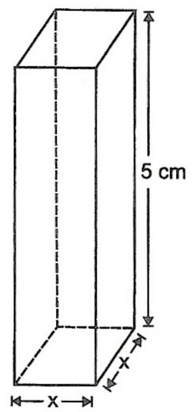
Aqui, para aquele aluno que tem a noção de área bem definida, é uma questão bem elementar pois basta verificar quantas vezes a unidade de área, que neste caso é o quadrado de lado 1, cabe dentro da área destinada a brinquedoteca.

Analisando uma outra questão do SPAECE, veja que, um aluno que tem bem definido, como se calcula volume de um bloco retangular e área do quadrado dificilmente erraria:

Figura 48: Questão do SPAECE

C1013

47) (M27684) Nessa figura, representa-se um paralelepípedo retângulo de 5 cm de altura e base quadrada de lado x.



Se o volume desse paralelepípedo é 320 cm³, o valor de x é

A) 5 cm
B) 8 cm
C) 32 cm
D) 64 cm

Fonte: SPAECE

Pois, basta saber que o volume do prisma é o produto da área da base pela altura e que a área do quadrado é o seu lado ℓ^2.

6 CONCLUSÃO

Com esse trabalho acreditamos que fique claro, que o estudo de áreas e volumes no ensino básico é um assunto muito importante, e que nós como professores deste nível de ensino devemos sempre procurar fazer com que os alunos cheguem ao final do ensino básico com esses conhecimentos construídos e bem entendidos por eles, pois ao final eles serão avaliados e serão cobrados esses conhecimentos.

Como foi mostrado, o uso do Princípio de Cavalieri é um axioma simples e eficaz para demonstração das fórmulas de calcular áreas e volumes, pois como sabemos apenas ensinar essas fórmulas não é suficiente para a construção do conhecimento, é preciso mostrar como elas são construídas, e o método abordado neste trabalho é acessível aos alunos do ensino básico.

Devemos sempre tentar fazer com que nossos alunos construam o conhecimento, pois, é assim que as coisas surgem na matemática, elas não aparecem prontas, elas são construídas e é isso que devemos buscar, se conseguirmos isso, com certeza os resultados dos serão satisfatórios.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl Boyer. **História da matemática,** 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

INEP. **Histórico da Prova Brasil**. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/web/saeb/ histórico >. Acesso em 25 jan.2015.

INEP. **Sobre o ENEM**. Disponível em: < http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem>. Acesso em 25 jan.2015.

LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria,** 4 ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar.**A Matemática do Ensino Médio,** vol.2, 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar.**A Matemática do Ensino Médio,** vol.1, 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. **Temas e Problemas Elementares,** 12 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Aléssio Costa . **Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica Do Ceará (SPAECE) como expressão da Política Pública de Avaliação Educacional do Estado**. Dissertação de Mestrado Universidade Estadual do Ceará - UECE, Fortaleza, 2007.

NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana,** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.