UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

HORÁCIO EUFRASIO PEREIRA

A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL E APLICAÇÕES

JUAZEIRO DO NORTE

2015

HORÁCIO EUFRASIO PEREIRA

A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do titulo de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Silvana Alcântara Costa.

JUAZEIRO DO NORTE

2015

HORÁCIO EUFRÁSIO PEREIRA

A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 24 / 06 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Maria Silvana A. Costa

Prof. Dr. Maria Silvana Alcântara Costa (Orientador)
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Placido Francisco de Assis Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Paulo César Cavalcante de Oliveira

Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dedico ao meu Deus, porque Dele, e por Ele, e para Ele, são todas as coisas. A Ele, a glória eternamente.

.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu Deus, que é Aquele que me sustenta e me levanta e firma a cada dia os meus passos. Contemplou durante essa jornada todos os meus esforços e nunca me desamparou; retribuiu-me segundo a sua benignidade.

Agradeço a minha Orientadora Maria Silvana Costa Alcântara, por ter me guiado com tanta presteza e paciência, desde a escolha do tema até a conclusão deste trabalho. Pela sua compreensão e ainda pelo exemplo de pessoa, que em sua humildade, encantou não somente a mim, mas toda turma.

Ao meu pai, Manoel Vicente Pereira e minha mãe, Antonia Eufrasio Pereira pela educação que me foi dada e pelo apoio e incentivo incondicional aos meus estudos.

Aos meus irmãos em Cristo Jesus pelas orações e incentivo.

A minha irmã, Antonia Priscila Pereira, que prestou uma grande contribuição na confecção do trabalho, bem como ao seu apoio e dedicação para me ajudar.

A minha namorada, Cícera Luciene Pereira, pelas orações. Também pela compreensão, pois muitas vezes estive ausente, e pelo amor, carinho e paciência nos momentos que eu precisei.

Ao meu grande amigo Ricardo pelo incentivo e por sempre acreditar na minha capacidade.

Aos colegas Ailton e Jean, pela companhia durante as viagens.

Aos meus colegas de trabalho e alunos das Escolas Gabriel Bezerra de Morais e Getúlio Vargas.

Aos meus colegas de Turma 2013.1 do PROFMAT pelos conhecimentos e experiências compartilhadas. De maneira especial a Jônatas, Domingos Sávio e Edjan, que se tornaram para mim grandes amigos.

A todos os professores do PROFMAT pela dedicação na coordenação do curso e pelos ensinamentos.

À SBM, pela criação do PROFMAT.

À CAPES, pelo incentivo financeiro.

“Uma grande descoberta envolve a solução de um grande problema, mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; porém, se ele desafiar sua curiosidade e fizer funcionar sua capacidade inventiva, e caso você o resolva sozinho, então você poderá experimentar a tensão e o prazer do triunfo da descoberta.”(George Polya)

.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre as funções exponenciais, dando ênfase a função exponencial de base e – também conhecida como função exponencial natural– ,bem como as suas inúmeras aplicações, que permeiam diversas áreas de conhecimento como: Economia, Biologia, Arqueologia, Demografia, Arquitetura, entre outras, fazendo dela, portanto, um objeto de interesse. O trabalho esta dividido em três capítulos: Conceitos iniciais, A função exponencial natural e Aplicações. No primeiro, apresentamos noções básicas de sequência de números reais, como também as definições de potências de um expoente racional e das funções exponencial e logarítmica. No segundo, apresentamos aspectos históricos que cercam o número e e também sua definição. Seguimos com estudo da função exponencial natural, apresentando as suas principais propriedades, enfatizando aspectos relacionados a taxa instantânea de variação (derivada) dessa função. Neste, ainda, veremos que a função do tipo $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$, com base e, tem derivada proporcional à si mesma. Por fim, no terceiro capítulo, mostramos como as funções do tipo $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$ surgem espontaneamente em situações de ordem prática, como na capitalização contínua de juros e como, de modo geral, ela está intimamente ligada a inúmeras situações e fenômenos, em que a taxa de variação de alguma grandeza é proporcional ao valor da própria grandeza em um dado instante.

Palavras-chave: O número e. Função exponencial natural. Aplicações.

ABSTRACT

This paper presents a study of the exponential functions, emphasizing basic exponential function e – also known as natural exponential function –, and its many applications that involve several areas of knowledge such as economics, biology, archeology, demographics, architecture, among others, making it therefore an object of interest. The work is divided into three chapters: Initial concepts, Natural exponential function and Applications. In the first, we present some basic sequence of real numbers, as well as the definitions of powers of rational exponent and exponential and logarithmic functions. In the second, we present historical aspects surrounding the number e and also its definition. We continue to study the natural exponential function, with its main properties, emphasizing aspects of the instantaneous rate of change (derivative) of this function. In addition, we see that the type $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$, based on e, is derived proportional to herself. Finally, in the third chapter, we show how the functions of the type $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$ arising spontaneously in practical situations, such as continuous interest capitalization. And how, in general, it is closely linked to numerous situations and phenomena, where the rate of change of any magnitude is proportional to the value of own greatness at a given instant.

Keywords: The number e. Natural exponencial function. Applications.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É comum no ambiente escolar haver questionamentos a respeito da relevância dos estudos matemáticos. Muitas vezes, os alunos questionam o porquê de estarem estudando determinado conteúdo e de que forma este pode ser útil em suas vidas. De um modo geral, essas perguntas apontam para uma visão restrita que muitos têm sobre a importância Matemática. Esta é evidenciada na dificuldade cognitiva destes, na compreensão da principal finalidade da matemática: as aplicações. Quanto a isso, diz Lima (1999, p. 2): "As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até o dia de hoje e certamente cada vez mais no futuro".

O ensino da matemática deve abranger três componentes fundamentais: a conceituação, a manipulação e aplicações. De modo resumido, a conceituação compreende a formulação correta das definições matemáticas e o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos. Já a manipulação tem caráter algébrico, não de modo exclusivo, conduzindo à habilidade na manipulação de cálculos. Por fim, as aplicações são empregos dos modelos ou teorias da Matemática para obtenção e previsão de resultados nas mais variadas situações que vão desde problemas simples do dia a dia a outros mais sutis que surgem noutras áreas, quer cientificas ou sociais.

A principal falha no ensino da Matemática é justamente não aliar esses três componentes. A falta de um desses pode afetar de forma drástica a compreensão dessa disciplina. Por exemplo, sem as aplicações a Matemática reduz-se apenas ao exercício de generalidades, sem qualquer uso prático no dia a dia e, portanto, não seria um objeto de interesse. Por sua vez, sem a conceituação não é possível agir de modo efetivo na resolução de uma situação-problema, pois não sabemos como modelar a situação em questão. Portanto, o grande desafio nessa disciplina é envolver os três componentes básicos do ensino, de forma a estimular o pensamento critico e reflexivo por parte do aluno, para que esse, não somente entenda os conceitos e aprenda a fazer os cálculos, mas que seja também capaz de utilizá-los em situações práticas. Assim, justificamos a necessidade deste trabalho, nesta lacuna, já que a nossa preocupação é aliar os três componentes para melhor compreensão de um dos modelos matemáticos mais aplicados: as funções exponenciais. Portanto, nos preocupamos com a organização do ensino da Matemática, atentando as suas peculiaridades, de modo a unir a teoria e a prática, para facilitar a construção do conhecimento.

O desenvolvimento deste estudo foi dividido em três partes, que foram organizadas, procurando direcionar o leitor de forma clara e concisa, ao entendimento da importância da função exponencial $f(x) = e^x$, de base e – chamada função exponencial natural. Por este motivo, buscamos apresentar tanto os conceitos e definições relacionados à função exponencial e^x, preocupando-se com a manipulação cuidadosa das suas operações, como também a forma como elas podem ser aplicadas em situações da vida real, fazendo dela um objeto de interesse em áreas que vão muito além da matemática.

Na primeira parte, tendo o objetivo de fundamentar resultados posteriores a serem demonstrados concernentes ao número e, foi dedicada uma sessão ao estudo da sequência de números reais. Neste, estabelecemos também, rigorosamente, a definição da função exponencial de base a, dada por $f(x) = a^x$, onde a é um número real positivo diferente de 1. Desta definição, decorreram várias propriedades que caracterizam a função exponencial. Apresentamos ainda a sua inversa: a função logarítmica.

Na segunda, iniciamos apresentando questões de interesse histórico relacionados às origens do número e e da função exponencial e^x. Durante a pesquisa, ficou evidente que até aqueles conceitos matemáticos que parecem mais distantes da realidade, estão diretamente ligadas a situações de ordem prática. Por exemplo, a descoberta dos logaritmos foi fomentada pela necessidade de uma ferramenta que minimizasse o tempo gasto com os longos cálculos da época. Parece-nos que o número e e a função e^x aparece primeiramente a um problema financeiro. Ainda nesta parte, nos dedicamos a estabelecer a definição do número e da função exponencial e^x, estabelecendo suas principais propriedades. Prosseguimos com enfoque no estudo da taxa instantânea de variação, também conhecida como derivada, onde demonstramos que a derivada das funções do tipo $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$, onde b e α são constantes, tem a derivada proporcional à si mesma. Esta propriedade é responsável por grande parte das aplicações desta função na Matemática e em outros campos de estudo.

Não poderíamos encerrar este trabalho sem mostrar que esta função e^x surge de modo natural em diversas situações de interesse prático, como na capitalização contínua de juros e no decaimento radioativo. Por isso, na terceira parte, nos dedicamos a esta finalidade.

2 CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo serão apresentadas as noções básicas sobre sequência de números reais, como também as definições de potências de um expoente racional, da função exponencial e função logarítmica. Estes tópicos, acompanhados pelas propriedades e ideias a eles relacionados serão de suma importância para compreensão do trabalho e configurar-se-ão como instrumento de aplicação nos capítulos seguintes.

2.1 Sequência de números reais

Define-se uma sequência de números reais como sendo uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $x(n)$. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado po x_n e chamado o n-ésimo termo da sequência, ou ainda, o termo geral da sequência.

A sequência x, cujo n-ésimo termo é x_n será indicada por $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou de forma mais simples ainda, por (x_n). É importante observar que a sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ não é o mesmo que o conjunto de seus termos, que é dado por $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$. Em termos práticos, a sequência $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$ é diferente do conjunto $\{-1, 1\}$ dos seus termos.

Diz-se que uma sequência (x_n) é crescente quando $x_1 < x_2 < x_3 < x_n \ldots$, isto é, quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, (x_n) é decrescente quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diz-se ainda que (x_n) é não-decrescente (respectivamente não-crescente) quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ (respectivamente $x_n \geq x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Tais sequências são também chamadas de sequências monótonas.

Uma sequência (x_n) diz-se limitada superiormente quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em termos de intervalo, isto equivale a dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $(-\infty, b]$. Analogamente, (x_n) diz-se limitada inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$ (ou seja, $[a, +\infty)$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando (x_n) é limitada superiormente e inferiormente referimo-nos a ela como limitada. Neste caso existem números reais a e b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por sua vez, se (x_n) não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.

Exemplo 1. A sequência com n-ésimo termo $x_n = n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, associa a cada n natural o seu sucessor da forma $(2, 3, \ldots, n+1, \ldots)$. Observe que (x_n) é monótona crescente ($x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), limitada inferiormente ($2 \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) e ilimitada superiormente (não existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$).

Exemplo 2. Seja $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto define a sequência $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$. Esta, não é monótona. O conjunto dos seus termos é $\{-1, 1\}$ e, portanto, (x_n) é limitada inferiormente e superiormente e, por consequência, limitada.

Dada uma sequência x_n de números reais, diz-se que o número real a é limite dessa sequência quando para valores de n suficientemente grandes, os termos x_n se aproximam de a à medida que se deseje. De outra maneira: se estipularmos por um número real $\varepsilon > 0$ o "erro"entre os termos da sequência e o número real a, sempre existirá um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ para o qual todos os termos x_n da sequência com índice n maior que n_0 se aproximam de a com erro inferior a ε. Precisemos esta ideia.

Definição 2.1. *Um número real a é limite de uma sequência (x_n) de números reais, quando para cada $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$. Quando este limite existe ele será indicado por $\lim x_n$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Logo,*

$$\lim x_n = a \ .\equiv.\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

O símbolo $.\equiv.$ significa que o que vem depois é definição do que vem antes.

É importante lembrar que $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Portanto, se $\lim x_n = a$, nos termos da definição acima, então todos os termos x_n da sequência, com exceção no máximo de um número finito de índices (a saber, os índice $n \leq n_0$), pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Se uma sequência (x_n) possui limite a (ou seja, $\lim x_n = a$) diz-se que a sequência (x_n) converge para a e escreve-se $x_n \to a$. Por sua vez, quando uma sequência não converge, não existe a tal que $\lim x_n = a$. Neste caso, ela é dita divergente. Mais à frente trataremos desse tipo de sequências. Agora, seguiremos com a apresentação de alguns teoremas relativos às sequências convergentes.

Teorema 2.1 (Unicidade do limite). *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Tomando qualquer número real $b \neq a$, mostraremos que não se tem $\lim x_n = b$. Para isso, tomemos $\varepsilon = \dfrac{|b - a|}{2}$. Segue-se então que $\varepsilon > 0$ e notamos ainda que os intervalos $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ são disjuntos. (Se existisse $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ teríamos $|a - x| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, de onde obtemos $|a - b| \leq |a - x| + |x - b| < 2\varepsilon = |a - b|$, o que é um absurdo). Logo, como $\lim x_n = a$, por definição, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Consequentemente, para todo $n > n_0 \Rightarrow x_n \notin (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Portanto, não se tem $\lim x_n = b$. $\square$

Teorema 2.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Tomando $\varepsilon = 1$, segue-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - 1, a + 1)$. Considerando o conjunto de valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, a - 1, a + 1\}$

de modo que o menor e o maior dos elementos desse conjunto sejam designados por α e β, respectivamente, segue que todos os termos (x_n) da sequência estão contidos no intervalo $[\alpha, \beta]$ e, portanto, a sequência (x_n) é limitada. $\square$

Observação: Se $X \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto limitado superiormente e não-vazio, então diz-se que um número real s é o supremo de X,e escreve-se $s = \sup X$, quando s é a menor das cotas superiores de X. De outra maneira, s é supremo de X quando as seguintes condições são satisfeitas:

1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq s$;

2. Se $c < s$ então existe $x \in X$ tal que $c < x$.

Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto limitado inferiormente e não-vazio, diz -se que um número real b é o ínfimo de X, e escreve-se $b = \inf X$, quando b é a maior das cotas inferiores de X. As condições que caracterizam o ínfimo são as seguintes:

1. Para todo $x \in X$, tem-se $b \leq x$;

2. Se $b < c$ então existe $x \in X$ tal que $x < c$.

Teorema 2.3. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos (x_n) uma sequência não-decrescente e limitada. Sejam $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $a = \sup X$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, uma vez que $a - \varepsilon < a$ segue que $a - \varepsilon$ não é cota superior de X. Assim sendo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0}$. Como (x_n) é não-decrescente, todo $n > n_{n_0} \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n < a + \varepsilon$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ e, de onde segue que $a = \lim x_n$.

Se (x_n) é não-crescente e limitada, tomemos $a = \inf X$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon$ não é cota inferior de X. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq x_{n_0} < a + \varepsilon$. Analogamente, concluímos que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq x_{n_0} < a + \varepsilon$ e, portanto, $a = \lim x_n$. Destas duas considerações, segue o resultado. $\square$

Exemplo 3. A sequência $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ não converge, uma vez que não é limitada.

Exemplo 4. A sequência de n-ésimo termo $x_n = 1/n$ é convergente. Afirmamos que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Daí segue que $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

No caso das sequências divergentes, trataremos daquelas em que os seus valores tornam-se, em módulo, arbitrariamente grandes.

Considerando novamente uma sequência (x_n) de números reais, diz-se que "o limite de x_n tende a mais infinito", e escreve-se $\lim x_n = +\infty$, quando para todo número real $M > 0$ tomado de modo arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > M$. É importante observar que, quando se tem $\lim x_n = +\infty$, segue-se que (x_n) é ilimitada superiormente, mas é limitada inferiormente.

Analogamente, $\lim x_n = -\infty$ quando para todo número real $M > 0$ dado de modo arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -M$.

É importante ressaltar que $+\infty$ e $-\infty$ não são números. Portanto, se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$, as sequências (x_n) e (y_n) não são convergentes. O objetivo maior dessas notações é mostrar características das sequências para valores crescentes de n.

Propriedades aritméticas dos limites

Podemos pensar ainda em limites de sequências em termos de suas operações – adição, multiplicação, divisão, etc – e também desigualdades. Alguns teoremas relacionados a essas operações, seguem abaixo:

Teorema 2.4. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{R}$. Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então*

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$; $\qquad \lim(x_n - y_n) = a - b$;
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
3. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$ *e* $y_n \neq 0$ *para todo* n.

(A demonstração do teorema acima encontra-se no apêndice A).

Teorema 2.5 (Permanência do sinal). *Se $\lim x_n = a > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon = a/2 > 0$. Então $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = (a/2, 3a/2)$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a/2, 3a/2)$, isto é, $x_n > a/2$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$. $\square$

Corolário 2.1. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes. Se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim x_n \leq \lim y_n$.*

Demonstração. Vamos provar usando a contrapositiva. Provar a implicação acima equivale a provar que se $\lim x_n > \lim y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $x_n > y_n$. Suponhamos então que $\lim x_n > \lim y_n$. Facilmente, vê-se que $0 < \lim x_n - \lim y_n = \lim(x_n - y_n)$ e, pelo teorema anterior, $x_n - y_n > 0$ e, daí, $x_n > y_n$ para todo n suficientemente grande, o que prova o resultado. $\square$

Observação: Supondo $x_n < y_n$ não se pode garantir que $\lim x_n < \lim y_n$, pois $x_n = 0 < 1/n = y_n$ e, no entanto, $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

Teorema 2.6. *Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $\lim z_n = a$.*

Demonstração. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, pela definição, segue que existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > n \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ e $n_2 > n \Rightarrow y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Tomando $n_0 = max\{n_1, n_2\}$, segue que todo $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon \leq x_n \leq z_n \leq y_n \leq a + \varepsilon$ e, daí $\lim z_n = a$. □

2.2 Potências de um expoente racional

Seja a um número real positivo. Dado um número natural n, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais a a. Em particular, se $n = 1$, põe-se $a^1 = a$, uma vez que não há produto de um só fator.

Podemos definir a^n indutivamente da seguinte forma: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Pela definição acima, podemos dizer ainda que

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{mfatores} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{nfatores} = a^{m+n}.$$

para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Esta última, será chamada propriedade fundamental. Assim, para $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ obtemos que

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \ldots \cdot a^{m_r} = a^{m_1 + m_2 + \ldots + m_r}.$$

Em particular, se tomarmos $m_1 = m_2 = \ldots = m_r = m$, segue que $(a^m)^r = a^{mr}$.

Consideremos a sequência $(a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots)$ das potências de a com expoente natural n. Se $a = 1$, tem-se evidentemente uma sequência constante, com todos os seus termos iguais a 1. Quando $a > 1$, obtém-se uma sequência crescente: basta multiplicar ambos os membros da desigualdade pelo número positivo a^n para obter $a^{n+1} > a^n$. Como $a > 1$, podemos escrever $a = 1 + h$, com $h > 0$. Logo, pela desigualdade de Bernoulli, temos $a^n > 1 + nh$. Assim, dado qualquer número real $M > 0$, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > M$. Para tanto, basta tomarmos $n > (M - 1)/h$, donde segue $1 + nh > M$ e, com maior razão, $a^n > M$. Portanto, para $a > 1$, a sequência $(a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots)$ é crescente e ilimitada superiormente; logo podemos escrever

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty \qquad (a > 1) \tag{1}$$

e dizer que a^n tende ao infinito quando n cresce indefinidamente.

Por sua vez, se $0 < a < 1$, então a sequência $(a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots)$ é decrescente e limitada e, por consequência, convergente. Com efeito, multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ por a^n, obtemos $a^{n+1} < a^n$, o que mostra que a sequência é decrescente. Como todos os termos são positivos, temos $0 < a^n < 1$ para todo n. Afirmamos ainda que $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$. Como $0 < a < 1$ segue que $\dfrac{1}{a} > 1$ e, portanto as potências de $\dfrac{1}{a}$ formam uma sequência crescente e ilimitada. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{a^n}\right) > \dfrac{1}{\varepsilon}$, isto é, $a^n < \varepsilon$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow |a^n - 0| < \varepsilon$, donde conclui-se que

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \qquad (0 < a < 1) \tag{2}$$

Agora, vamos procurar dar um significado à potência a^n para $n \in \mathbb{Z}$, de modo que a propriedade fundamental continue válida. Antes, porém, vamos dar significado a potência a^0. Com o objetivo de preservar a propriedade fundamental, teremos

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$$

e, portanto, a^0=1 configurar-se-á como a única definição possível para a potência a^0.

Para estabelecermos a noção de potência para números negativos a fim de se preservar a igualdade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ deve-se ter, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \quad \text{e, portanto,} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

É importante notar que essas definições são decorrentes da conservação da propriedade fundamental.

A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n, n \in \mathbb{Z}$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

Vamos supor $a > 1$ e $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $m < n$. Com efeito, se $0 < m < n$ então $f(m) = a^m < a^n = f(n)$, pois neste caso m e n são naturais. Agora, admitindo $m < n < 0$ então segue-se que $0 < -n < -m$. Daí, obtemos $a^{-n} < a^{-m}$ e assim

$$m < n \Rightarrow \frac{1}{a^n} < \frac{1}{a^m} \Rightarrow a^m < a^n.$$

Por fim, se $m < 0 < n$ vemos facilmente que $a^0 = 1 < a^n$. Ainda que $a^0 = 1 < a^{-m} = 1/a^m$, donde resulta $a^m < a^0$. É imediato ver que $a^m < a^n$. Portanto, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é crescente para $a > 1$. Se $0 < a < 1$, a demonstração é análoga.

Para prosseguirmos em nossas considerações, atentemos para o fato de que dados um número real $a > 0$ e um inteiro $k > 0$, o símbolo $\sqrt[k]{a}$ representa o número real positivo cuja k-ésima potência é igual a a, ou seja, a única raiz positiva da equação $x^k - a = 0$. Deste modo, estabelecemos nossa definição do número real $\sqrt[k]{a}$ (raiz k-ésima do número positivo a) a partir das afirmações $\sqrt[k]{a} > 0$ e $(\sqrt[k]{a}\ )^k = a$.

Agora, estenderemos nossa definição para a potência a^r, para um racional $r = \frac{m}{n}$ (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), assegurando a validade das propriedades anteriores. Desta maneira, se deve ter

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r = a^{r+r+\cdots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Portanto, a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, podemos então escrever

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Dada esta definição, precisamos examinar alguns detalhes. Uma vez que $m/n = mp/np$ para todo $p \in \mathbb{N}$, para que a definição não seja ambígua, devemos mostrar que $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$. Com efeito, fazendo $\alpha = \sqrt[n]{a^m}$, obtemos

$$\alpha^{np} = (\sqrt[n]{\alpha^m})^{np} = [(\sqrt[n]{\alpha^m})^n]^p = (\alpha^m)^p = \alpha^{mp},$$

donde segue que $\alpha = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

Por sua vez, vamos mostrar a validez da propriedade fundamental $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ para $r, s \in \mathbb{Q}$. Sejam $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ ($m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$), então podemos escrever $(a^r)^n = a^m$ e $(a^s)^q = a^p$. Logo, fazendo

$$(a^r \cdot a^s)^{nq} = (a^r)^{nq} \cdot (a^s)^{nq} = a^{rnq} \cdot a^{snq} = a^{mq} \cdot a^{np} = a^{mq+np},$$

temos que $a^r \cdot a^s$ é o número cuja nq-ésima potência é igual a a^{mq+np}. Portanto, concluímos que

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}.$$

Podemos mostrar ainda que a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(r) = a^r$, é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$. Com efeito, sejam $r = \dfrac{m}{n}$ e $s = \dfrac{p}{q}$, com $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$. Suponhamos $a > 1$. Se $r < s$, resulta imediatamente que $mq < np$. Sendo mq e np números inteiros e $a > 1$, obtemos $a^{mq} < a^{np}$. Podemos então escrever

$$a^{mq} = a^{\frac{m}{n} \cdot nq} \qquad \text{e} \qquad a^{np} = a^{\frac{p}{q} \cdot nq},$$

donde segue $(a^r)^{nq} < (a^s)^{nq}$ e, portanto, $a^r < a^s$. Logo, f é crescente.

Supondo agora $0 < a < 1$, se $r < s$ obtemos $a^{mq} > a^{np}$. Analogamente, obtemos $a^r > a^s$, donde conclui-se que f é decrescente.

Além das propriedades citadas, cabe ressaltar que a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(r) = a^r$, é injetiva. Isto significa dizer que dado r, s quaisquer em $\mathbb{Q}$, com $r \neq s$, implica $f(r) \neq f(s)$. A injetividade da função $r \mapsto a^r$ decorre da sua monotonicidade. Se

$a > 1$, dados $r, s \in \mathbb{Q}$, segue-se que

$$r > s \Rightarrow a^r > a^s \quad \text{e} \quad r < s \Rightarrow a^r < a^s$$

e, consequentemente, $r \neq s \Rightarrow a^r \neq a^s$ (O caso é análogo para $0 < a < 1$).

Entretanto, a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ não é sobrejetiva. Ou seja, uma vez fixado $a > 0$, nem todo número real positivo é da forma a^r, com r racional. Isto se dá pelo fato de que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável[1] e, por consequência disso, a sua imagem $f(\mathbb{Q})$ também é enumerável, enquanto $\mathbb{R}^+$ não é enumerável. Apesar disso, as potências a^r, com r racional, relacionam-se de modo bem interessante com os números reais positivos. O lema a seguir expressa essa relação nos seguintes termos.

Lema 2.1. *Fixado um número positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Demonstração. Para quaisquer reais positivos α e β dados, com $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ de modo que a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leq a^r \leq \beta$. Primeiramente, suporemos a e α maiores do que 1. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota prefixada, podemos encontrar números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad \text{e} \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Extraindo a raiz n-ésima e, posteriormente, somando-se -1 aos membros da última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned} 1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < a^{1/n} - 1 < \frac{\beta - \alpha}{a^M} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha. \end{aligned}$$

Tomando-se $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{m}{n} \leq M$, resulta

$$0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Logo, as potências

$$a^0 = 1, a^{1/n}, a^{2/n}, \ldots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento inferior a $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido

[1]Um conjunto X é dito enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$. No segundo caso, diz-se infinito enumerável.

no intervalo $[\alpha, \beta]$. Agora, suporemos β e a menores do que 1. Sabendo também que as potências de expoente natural de números menores do que 1 decrescem abaixo de qualquer nota prefixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$a^M < \alpha < \beta \quad \text{e} \quad a < 1 < \left(a^{1/n} + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Da última desigualdade decorre sucessivamente

$$a^{1/n} < 1 < a^{1/n} + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \qquad \text{e} \qquad 0 < a^M(1 - a^n) < \beta - \alpha.$$

Logo, tomando

$$\frac{m}{n} \geq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}}(1 - a^{\frac{1}{n}}) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}} - a^{\frac{m+1}{n}} < \beta - \alpha,$$

chegamos a mesma conclusão obtida no caso anterior.

Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. □

2.3 Funções exponenciais

Nesta seção, definiremos potências com expoente real, com o objetivo de estabelecer a definição de função exponencial, usando para isso alguns resultados demonstrados na seção anterior.

Seja a um número real positivo diferente de 1. Mostraremos que existe uma única função definida e contínua em $\mathbb{R}$ que coincide com a^r para todo racional r. Para tanto, demonstraremos primeiramente alguns lemas.

Lema 2.2. *Seja $a > 1$ um número real dado. Então, dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, existe um natural n tal que*

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

Demonstração. Com efeito, pela desigualdade de Bernoulli, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$, tem-se

$$(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$$

Logo, tomando-se $n > (a - 1)/\varepsilon$ resulta que

$$(1 + \varepsilon)^n > a \Longleftrightarrow 1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}}$$

e, portanto, $a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$. □

Lema 2.3. *Sejam a e x dois números reais, com $a > 1$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existem racionais r e s, com $r < x < s$, tais que*

$$a^s - a^r < \varepsilon$$

Demonstração. Notemos inicialmente que podemos escrever

$$a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1).$$

Como $a > 1$, tomando-se t racional, com $t > x$, segue-se que para todo racional $r < x$ temos $a^r < a^t$. Pelo Lema 2.2, podemos afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < a^{-t} \cdot \varepsilon \Longleftrightarrow a^t(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \varepsilon$$

Tomando-se racionais r e s, satisfazendo $r < x < s$, tais que $r - s < \dfrac{1}{n}$, obtemos

$$a^s - a^r = a^r(a^{s-r} - 1) < a^t(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \varepsilon.$$

□

Lema 2.4. *Seja $a > 1$ um real dado. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único α tal que*

$$a^r < \alpha < a^s$$

quaisquer que sejam os racionais r e s, satisfazendo $r < x < s$.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar a existência de tal α. Consideremos o conjunto $X = \{a^r;\ r \text{ racional},\ r < x\}$. Uma vez que entre dois números reais distintos quaisquer, existe pelo menos um número racional, segue que X é não-vazio. Desse fato, resulta ainda que X não possui elemento máximo. Sabemos que X é limitado superiormente por todo a^s, s racional e $s > x$; logo todo a^s é cota superior de X. Indicando o supremo de X por α, podemos escrever

$$a^r < \alpha \leq a^s, \qquad r < x < s.$$

Como $x < s$, existe pelo menos um racional b satisfazendo $r < x < b < s$ e, portanto, podemos escrever

$$a^r < \alpha < a^s$$

Provaremos, agora, que tal α é único. Se existir α_1 tal que $a^r < \alpha_1 < a^s$ quaisquer que sejam os racionais r e s, com $r < x < s$, teremos

$$|\alpha - \alpha_1| < a^s - a^r < \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$, pelo Lema 2.3. Logo, $\alpha = \alpha_1$. □

De posse desses lemas, vamos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2.7. *Seja a um número real positivo diferente de 1. Existe uma única função f, definida e contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f(r) = a^r$ para todo racional r.*

Demonstração. Com efeito, pelo lema 2.4 concluímos que se x for um número racional, então o único α tal que $a^r < \alpha < a^s$ é dado por $\alpha = a^x$. Este valor será indicado por $f(x)$. Construímos, assim, um função f definida em $\mathbb{R}$, e tal que $f(r) = a^r$ para todo racional r.

Devemos provar ainda a continuidade de f. Seja p um real qualquer. Pelo Lema 2.3, dado $\epsilon > 0$, existem racionais r e s, com $r < p < s$, satisfazendo $a^r - a^s < \varepsilon$. Logo, para todo $x \in]r, s[$, teremos

$$|f(x) - f(p)| < a^r - a^s < \varepsilon,$$

o que prova a continuidade de f em p. Como p foi tomado de modo arbitrário, segue que f é contínua em $\mathbb{R}$.

Por sua vez, suponhamos $0 < a < 1$. Neste caso, a função $f(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$ coincide com a^r nos racionais e é contínua em $\mathbb{R}$. $\square$

Prosseguiremos com a definição que segue abaixo.

Definição 2.2. *Seja $a > 0$ e $a \neq 1$ um real qualquer. A função f definida e contínua em $\mathbb{R}$, indicada pala notação $f(x) = a^x$, denomina-se função exponencial de base a.*

Várias propriedades decorrem dessa definição. Vamos estabelecer algumas delas.

Proposição 2.1. *Sejam a, x e y reais quaisquer, com $a > 0$ e $a \neq 1$. A função exponencial $f(x) = a^x$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;
2. $(a^x)^y = a^{xy}$;
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e
   $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ para $a > 1$ e
   $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ para $0 < a < 1$.

Demonstração. 1. Sejam r_n e s_n duas sequências de números racionais que convergem, respectivamente, para x e y, isto é, $x = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ e $y = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$. Pela continuidade da função f, segue-se que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = a^x \quad \text{e} \quad f(y) = \lim_{n\to+\infty} f(s_n) = \lim_{n\to+\infty} a^{s_n} = a^y$$

e, consequentemente

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) = a^x \cdot a^y &= \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to+\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \cdot a^{s_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} a^{r_n+s_n} = a^{x+y}, \end{aligned}$$

uma vez que o produto de potências de expoente racional está bem definido.

2. Sejam r_n e s_n duas sequências de números racionais que convergem, respectivamente, para x e y, isto é, $x = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ e $y = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$. Pela continuidade da função exponencial f, deve-se ter

$$\begin{aligned}[f(x)]^y = (a^x)^y &= [\lim_{n\to+\infty} f(r_n)]^{\lim_{n\to+\infty} s_n} = (\lim_{n\to+\infty} a^{r_n})^{\lim_{n\to+\infty} s_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} (a^{r_n})^{s_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n\cdot s_n} = a^{xy},\end{aligned}$$

uma vez que a potenciação de potências de expoente racional está bem definida.

3. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$. Podemos então tomar r, s e t em $\mathbb{Q}$ tal que $r < x < s$ e $s < y < t$. Supondo $a > 1$, resulta que

$$a^r < a^x < a^s \qquad \text{e} \qquad a^s < a^y < a^t.$$

Como s é um racional tal que $x < s < y$, concluímos que $a^x < a^s < a^y$ e, portanto

$$x < y \Rightarrow a^x < a^y.$$

Por sua vez, se $0 < a < 1$ então para $r < x < s$ e $s < y < t$ obtemos

$$a^s < a^x < a^r \qquad \text{e} \qquad a^t < a^y < a^s.$$

Das desigualdades acima, vemos que $a^y < a^s$ e $a^s < a^x$. Logo, para $0 < a < 1$, concluímos que

$$x < y \Rightarrow a^y < a^x.$$

4. Primeiramente, suponhamos $a > 1$. Já vimos na seção anterior que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. Assim, dado $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a^n > M$.

Uma vez que a^x é crescente ($a > 1$) resulta que para $x > n_0 \Rightarrow a^x > M$. Daí, segue-se que

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

Agora, vamos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$. Fazendo a mudança de variável $u = -x$, vemos que $x \to -\infty \Leftrightarrow u \to +\infty$. Logo, obtemos

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{u\to+\infty} a^{-u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{a^u} = 0.$$

Por sua vez, também já foi demonstrado na seção anterior que para $0 < a < 1$ tem-se $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0 \Rightarrow a^n < \varepsilon$. Uma vez que a^x é decrescente $(0 < a < 1)$, vê-se que $x > n_0 \Rightarrow a^x < \varepsilon$. Daí, obtemos imediatamente que

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$

De modo análogo, fazendo a mudança de variável $u = -x$, vemos que $x \to -\infty \Leftrightarrow u \to +\infty$, de onde segue que

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{a^u} = +\infty.$$

$\square$

É interessante observar que em virtude da propriedade 1, a função exponencial não pode assumir o valor 0. Com efeito, se existisse algum x_0 tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$, teríamos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

logo a função exponencial seria identicamente nula. Mas isto é um absurdo, pela propriedade 3.

Mas há mais nessa propriedade. Se uma função f cumpre a propriedade 1, então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Portanto, podemos dizer que a função exponencial tem contradomínio em $\mathbb{R}^+$. Logo, podemos definir a função exponencial como uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

Prosseguimos afirmando que a função exponencial exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, onde a é um numero positivo diferente de 1, é sobrejetiva. Isto significa dizer que para todo número real b existe algum número real x tal que $a^x = b$. Com efeito, pelo Lema 1, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $\left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$ satisfazendo $|b - a^{r_n}| < 1/n$. Para fixar as ideias vamos supor $a > 1$. Escolhendo as potências a^{r_n} sucessivamente, de modo que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b,$$

podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Uma vez que a^x é uma função monótona, segue-se ainda que $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s$ (pois estamos supondo $a > 1$).

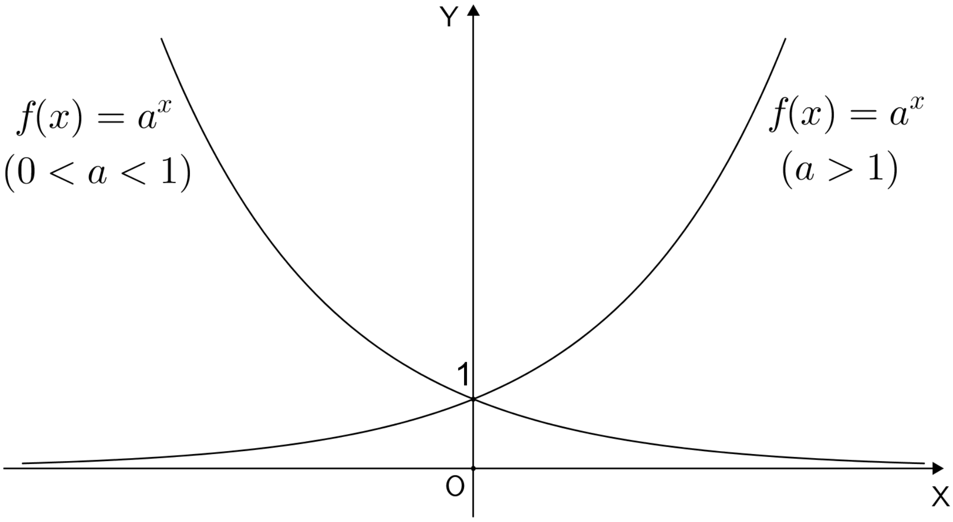
Portanto, (r_n) é uma sequência monótona e limitada superiormente por a^s. A completeteza de $\mathbb{R}$ garante-nos então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = x$. Pela continuidade da função exponencial, deve-se ter

$$a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = b.$$

A injetividade da função $x \mapsto a^x$ decorre de sua monotonicidade (dados $x, y \in \mathbb{R}$, segue-se que $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$).

Desta maneira, dado um número real $a > 0$ qualquer, diferente de 1, a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Seu gráfico é dado na figura a seguir, para ambos os casos.

Figura 1 – Gráfico da função exponencial para os casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.



Fonte: LIMA *et al.* (2012).

Os gráficos na figura acima, para os casos $a > 1$ e $0 < a < 1$, são típicos de todos os gráficos exponenciais, independentemente das suas bases. A simplicidade deste gráfico é extraordinária, posto que não apresenta as características mais comuns dos gráficos de funções algébricas tais como intersecções com o eixo dos x, ponto de máximo e de mínimo, pontos de inflexão e assíntotas verticais.

2.4 Funções logarítmicas

Na seção anterior vimos que, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Por esse motivo, segue que f possui uma função inversa (ver Apêndice B).

A inversa da função exponencial de base a é a função $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, que associa a cada número real x o número real $g(x)$, chamado o logaritmo de x na base a. Escreve-se $g(x) = \log_a x$. Por definição de função inversa, tem-se que $f(g(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Isto é,

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log_a(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Como $a^0 = 1$, segue imediatamente da definição que $\log_a 1 = 0$. Por sua vez, da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ segue que

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

para $x, y \in \mathbb{R}^+$. Com efeito, se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$, então $a^u = x$ e $a^v = y$, de onde segue que

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$$

e, portanto

$$\log_a(xy) = \log_a(a^{u+v}) = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Veremos mais adiante que esta propriedade de transformar soma em produtos está intimamente ligada com a invenção dos logaritmos.

Outra propriedade da função logarítmica, que será importante em nossas considerações, consiste no fato de que dado um número real c qualquer é valido, para todo $x > 0$, a igualdade

$$\log_a x^c = c \cdot \log_a x.$$

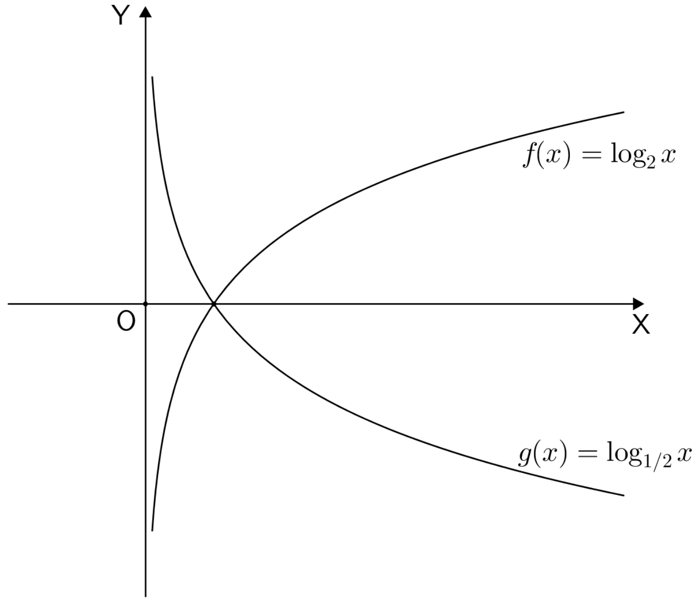
Com efeito, se $u = \log_a x^c$ e $v = \log_a x$ então $a^u = x^c$ e $a^v = x$. Assim sendo, podemos escrever

$$a^u = x^c = (a^v)^c = a^{vc}$$

e, portanto, $u = c \cdot v$, donde segue o resultado.

A função $g(x) = \log_a x$ é uma função crescente de x quando $a > 1$. Uma vez que $\log_a 1 = 0$, segue-se que para $a > 1$, os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo, enquanto os números maiores que 1 têm logaritmo positivo. Por sua vez, se $0 < a < 1$ então $y = \log_a x$ é uma função decrescente e, neste caso, assume valores positivos para $0 < x < 1$ e negativos para $x > 1$. A figura 2 nos mostra o gráfico das funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

Figura 2 – Gráfico das funções logarítmicas $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.



Fonte: LIMA *et al.* (2012).

O gráfico das funções $y = \log_a x$ e $y = \log_b x$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer, tem o mesmo aspecto das funções f e g, respectivamente.

Como já vimos, a função logarítmica é uma correspondência biunívoca (portanto, sobrejetiva) entre $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$. Desse fato segue-se que a função $y = \log_a x$ é ilimitada, tanto superiormente quanto inferiormente. Uma vez que para $a > 1$, $y = \log_a x$ é crescente, para este caso, concluímos que

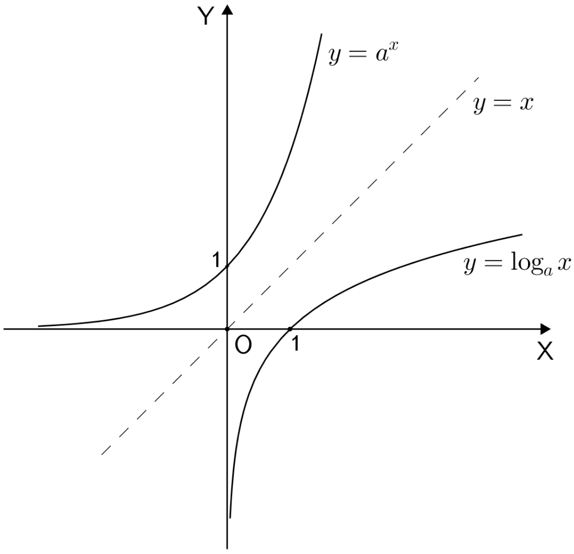
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty.$$

Para o caso em que $0 < a < 1$, a função $y = \log_a x$ é decrescente, de onde resulta que

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} \log_a x = +\infty.$$

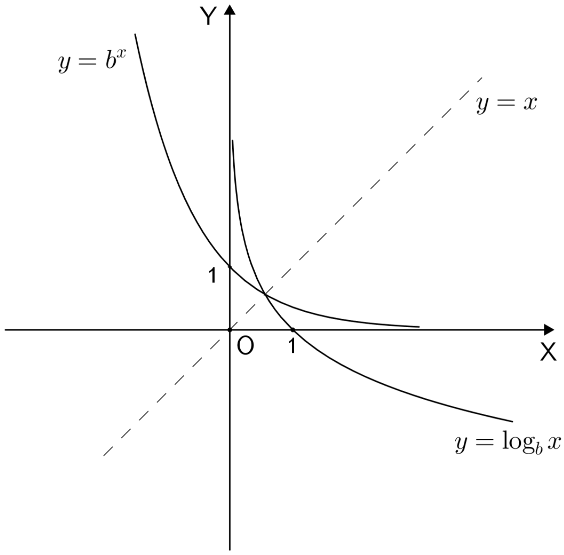
Graficamente, o fato da função exponencial e logarítmica serem inversas uma da outra implica que seus gráficos são reflexos um do outro em torno da reta $y = x$ (ver apêndice B). As figuras 3 e 4 abaixo expressam essa relação entre as funções para os casos em que $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer.

Figura 3 – A relação inversa para $a > 1$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 4 – A relação inversa para $0 < b < 1$.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

3 A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

3.1 Notas históricas

Desde as primeiras décadas, o século XVII mostrara-se promissor a expansão do conhecimento científico, sendo de particular importância à História da Matemática. A percepção que o homem passou a ter do universo, aliado aos avanços políticos, econômicos e sociais da época foram, sem dúvidas, fatores preponderantes no desenvolvimento da Matemática. O desenvolvimento nos campos de estudo, como a Astronomia, a Navegação, o comércio, a Engenharia, a Física e a guerra, onde os cálculos numéricos são de fundamental importância, passaram exigir que os eruditos da época passassem boa parte de seu tempo a fazer cálculos exaustivos e tediosos. Apontava-se, assim, para a invenção de uma poderosa ferramenta matemática facilitadora e aperfeiçoadora desse processo. Uma das figuras mais notáveis nesse empreendimento foi Jonh Napier (1550 – 1617), escocês, conhecido por suas considerações religiosas, e que despertava interesse por alguns aspectos da Matemática, no que se referia à Computação e Trigonometria.

Napier dedicou pelo menos vinte anos da sua vida ao estudo da sua teoria que culminou em 1614 na publicação de sua grande obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Os logaritmos, como sabemos hoje, reduzem multiplicações e divisões a simples operações de soma e subtração. Não temos um conhecimento fidedigno do modo como surgiu a idéia que resultaria na invenção de Napier, mas sabemos que ele era versado em trigonometria e que tinha conhecimento de algumas fórmulas, tais como

$$2 \cdot \cos A \cdot \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

e

$$2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

que juntamente com outras semelhantes para $\cos A \cdot \operatorname{sen} B$ e $\operatorname{sen} A \cdot \cos B$, eram conhecidas como regras *prostaféricas*, da palavra grega *prostaférese* que significa "adição e subtração". Estas, consistiam na conversão de produtos em somas e diferenças e passaram a ser usadas para simplificar cálculos de comprimentos que aparecem em astronomia. Presumivelmente, Napier foi influenciado por esse método.

Outra ideia, mais direta, baseia-se no fato de que associando-se aos termos de uma progressão geométrica $q, q^2, q^3, \ldots, q^m, \ldots, q^n, \ldots$ os da progressão aritmética $1, 2, 3, \ldots, m, \ldots, n, \ldots$ então o produto de dois termos $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$ está associado a soma $m + n$ dos termos da segunda progressão. Essas associações foram estudadas pelo matemático alemão Michael Stifel (1847 – 1567) e apresentadas no seu livro *Arithmetica integra*. Entretanto, uma sequência de potências inteiras de base 2 não podia ser usada em computações porque as grandes lacunas entre termos consecutivos era demasiadamente imprecisa.

A partir dessas ideias, acredita-se que Napier desenvolveu a sua teoria. Podemos explicar a chave da sua obra de forma simples, como se segue: para conservar próximo o termo numa progressão geométrica de potencias inteiras de um numero dado, é necessário tomar o número dado muito próximo de um. Mas que número? Napier lutou muitos anos com esse impasse, até finalmente escolher o número $1 - 1/10^7 = 0,9999999$. Ele fez uso dessa taxa comum (proporção, em suas palavras) para construir a sua tabela de logaritmos. Para evitar decimais, Napier multiplicou cada potência por 10^7. Em termos de equação, a definição de logaritmos por Napier é equivalente a

$$N = 10^7(1 - 1/10^7)^L \tag{3}$$

onde L é o logaritmo de Napier do número N. Assim sendo, segue-se que o logaritmo de Napier de 10^7 é 0, pois $10^7(1-1/10^7)^0 = 10^7$. Seu logaritmo de $10^7(1-1/10^7)^1 = 9999999$ é 1, e assim sucessivamente.

Se na equação (3) dividirmos ambos os números, N e L, por 10^7 (o que significa meramente mudar a escala das nossas variáveis), a equação torna-se $N^* = [(1-10^{-7})^{10^7}]^{L^*}$, onde $N^* = N/10^7$ e $L^* = L/10^7$. É visto que $(1 - 10^{-7})^{10^7} = (1 - 1/10^7)^{10^7}$ é um valor muito próximo de $1/e$, e os logaritmos de Napier são, virtualmente, logaritmos de base $1/e$.

Porém, obviamente esta ideia de que Napier descobriu esta base, e mesmo o número e é errônea, pois ele não conhecia o conceito de base de um sistema de logaritmos como temos hoje. Ele, a princípio, denominou seus índices de potências de "números artificiais"e mais tarde foram denominados "logaritmos", pela composição das palavras gregas *Logos* (ou razão) e *arithmos* (ou número).

Sua publicação despertou interesse, ganhando rápida notoriedade e admiradores nos meios acadêmicos, entre estes Henry Briggs (1561 – 1631), professor de geometria de Gresham College de Londres e posteriormente de Oxford. Este, em uma visita a Napier no ano de 1615, prestou o seu tributo de reconhecimento a Napier por sua invenção. Nesta ocasião, Briggs e Napier concordaram em algumas alterações nas tábuas de logaritmos, para torná-las mais acessíveis. Estas, baseavam-se no fato de fazer o logaritmo de 1 igual a 0 (em vez de 10^7) e o logaritmo de 10 numa potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos *briggsianos* ou *comuns*. Na terminologia moderna, isto significa dizer que se N for escrito como $N = 10^L$, então L é o briggsiano de N, escrito como $\log_{10} N$, ou simplesmente $\log N$. Assim nasceu o conceito de base de um sistema de logaritmos. Nesse encontro, Napier já não tinha energia para computar novas tabelas, falecendo em 1617. Coube a Briggs realizar essa tarefa. Em 1624, seus resultados foram publicados em sua obra *Arithmetica logarithmica*, onde ele traz os logaritmos de base 10 para os valores de 1 a 20 000 e de 90 000 a 100 000. O trabalho com logaritmos podia a partir daí ser feito da forma que conhecemos hoje, pois para as tabelas de Briggs todas as leis usuais dos logaritmos se aplicavam.

A invenção de Napier repercutiu rapidamente pela Europa, o que motivou a tradução da obra *Descriptio* para outros idiomas. Cabe falar de Edward Wright, um matemático contemporâneo de Napier, que a traduziu para o inglês e esta, apareceu em 1616, em Londres. Segundo Maor (2005, p. 27):

> Na segunda edição da tradução de Edward do *Descriptio* de Napier (Londres, 1618), num apêndice, provavelmente escrito por Oughtred, aparece o equivalente da declaração de que $\log_e 10 = 2,302585$. Este parece ser o primeiro reconhecimento explícito do papel do número e na Matemática.

Não poderíamos encerrar estas notas históricas sem também mencionar os trabalhos do suíço Jobst Bürgi (1552 – 1632), que mais ou menos ao mesmo tempo, de forma independente, desenvolveu ideias semelhantes a de Napier. Para sermos mais sinceros, é possível que a ideia sobre logaritmos tenha ocorrido a Bürgi anos antes que a Napier, porém, este veio publicar seus resultados numa obra intitulada *Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen* em 1620 (seis anos depois de Napier). Ambos, desenvolveram seus trabalhos partindo das propriedades das sequências aritméticas e geométricas, e, pelo que parece, estimulados pelo método da prostaférese. Entretanto, apesar de estarem estabelecidos em mesmo princípios, os trabalhos apresentaram diferenças de ordem nomenclatural e, sutilmente, numéricos, de valor significativo. No seu trabalho Napier como vimos, usou a razão comum $1 - 10^{-7}$, que é ligeiramente menor do que 1, já Bürgi usou a razão $1 + 10^{-4}$, um pouco maior que 1, assim, os logaritmos de Bürgi aumentam na medida que os números aumentam enquanto os de Napier diminuem. E, em vez de multiplicar as potências por 10^7 multiplicou por 10^8, preocupado em evitar as frações decimais. Outra diferença é o fato que Bürgi multiplicava todos os seus índices de potência por 10. Ou seja, se um inteiro positivo N for escrito como $N = 10^8 \cdot (1+10^{-4})^L$, então ele chamava 10^L (em vez de L), denominado "numero vermelho", ao correspondente valor N, denominado "número negro". Dividindo todos os números negros e negros e vermelhos, obtidos na equação acima, respectivamente, por 10^8 e 10^5, os logaritmos de Bürgi são, virtualmente, logaritmos de base e.

Finalizando, ao se fazer uma retrospectiva, percebe-se que todos tiveram uma grande preocupação com a questão de frações decimais, o que parece ser um desvio desnecessário, mas os esforços destes para resolvê-la levaram por muito pouco a descobrir o número que, posteriormente, seria reconhecido como a base universal dos logaritmos, o número e – o limite de $(1 + 1/n)^n$ quando n tende para infinito.

3.2 A definição do número e

Dentre muitos fatos que permanecem obscuros na História da Matemática, um deles é a identidade de quem teria notado primeiramente o comportamento peculiar da expressão $(1+1/n)^n$ para valores crescentes de n, n natural. Provavelmente, esta expressão tenha sido observada primeiramente no contexto financeiro, ligado a fórmula para cálculo de juros compostos, no início do século 17. No entanto, outras questões independentes, como a área sob a hipérbole $y = 1/x$, levaram a esse número. Tal expressão para valores muito grandes de n aproxima-se, aparentemente, do número $2,71828$ como limite (ver Tabela 1). No entanto, não podemos provar a existência de tal limite fazendo apenas uso de cálculos de valores particulares. Por isso, nesta seção, temos por objetivo provar a existência do $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n$ e de expressões a ele relacionados.

Tabela 1 – Cálculo de valores individuais para expressão $(1 + 1/n)^n$.

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2, 44141
5	2, 48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1 000	2,71692
10 000	2,71815
100 000	2,71827
1 000 000	2,71828
10 000 000	2,71828

Fonte: MAOR (2005).

Ao longo dessa seção, para alcançar nossos objetivos, faremos uso de resultados mencionados no capítulo 2.

Teorema 3.1. *A sequência de termo geral* $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *converge para um limite entre* 2 *e* 3.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que a sequência cujo termo geral é

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \tag{4}$$

converge para um limite quando n cresce indefinidamente.

Esta soma é evidentemente crescente, pois para cada termo adicionado temos $a_n < a_{n+1}$ para todo n.

Por sua vez, sendo $2^n \leq (n+1)!$ para todo $n \geq 1$, resulta que $\dfrac{1}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{2^n}$ para todo $n \geq 1$. Daí, podemos escrever

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \tag{5}$$

Note que esta última expressão é, a partir do segundo termo, a soma dos termos de uma progressão geométrica de termo inicial $a = 1$ e razão $r = \dfrac{1}{2}$. Assim,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n!} = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 \cdot (1 - \frac{1}{2^n}) < 2$$

Logo, pela desigualdade (5) obtemos $a_n < 1 + 2 = 3$. Assim (a_n) é limitada.

Uma vez que (a_n) é monótona crescente e limitada, segue do Teorema 2.3, que (a_n) é convergente. Vamos designar por e o limite dessa sequência, ou seja, $e = \lim a_n$. Vê-se facilmente, em virtude da igualdade (4) e da desigualdade (5), que $2 < \lim a_n < 3$ e, portanto, concluímos que $2 < e < 3$.

Agora, vamos considerar a sequência cujo termo geral é $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Pelo teorema binomial

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} \\
&= 1 + 1 + \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!} \\
&= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Logo, b_n é uma soma de parcelas positivas. O número de parcelas, bem como cada uma delas cresce com n. Portanto, a sequência (b_n) é estritamente crescente. Como a expressão em cada par de parênteses é menor que 1, segue que $b_n < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e daí, $b_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, (b_n) é limitada e monótona, de onde concluímos que (b_n) é convergente.

Agora, vamos provar que $\lim b_n = \lim a_n = e$. Primeiramente, notemos que $b_n < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, Corolário 2.1 do Teorema 2.5 nos dá que $\lim b_n \leq \lim a_n$. Por outro lado, fixando arbitrariamente $p \in \mathbb{N}$, para todo $n > p$, resulta

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{p!} \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

Mantendo p fixo e fazendo n crescer indefinidamente($n \to +\infty$) na desigualdade acima, o segundo membro tende para o limite de a_p. O mesmo corolário nos garante, para todo $p \in \mathbb{N}$, que

$$\lim_{n \to +\infty} b_n \geq 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{p!} = a_p$$

Como esta desigualdade é válida para todo $p \in \mathbb{N}$ segue que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \geq \lim\limits_{p\to+\infty} a_p = e$. Uma vez já mostrado que $\lim b_n \leq \lim a_n = e$, concluímos então que $\lim b_n = e$. $\square$

O número $e = 2,7182818284$, com dez casas decimais exatas.

Definição 3.1. *Denota-se por e o limite da sequência de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n cresce indefinidamente, isto é,*

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{6}$$

Não obstante, provaremos ainda que e é um número irracional. Faremos uma prova indireta , ou seja, supondo e um número racional, isso nos levará a uma contradição. Com efeito, seja $e = \frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros positivos. Como $2 < e < 3$, devemos ter $q \geq 2$, pois e não é um número inteiro.

Por sua vez, pela definição do número e, temos que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por $q! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots q$ e lembrando que $e = \frac{p}{q}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q}\cdot q! &= q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\right)\\
p\cdot 1\cdot 2\cdots(q-1) &= [q! + q! + 3\cdot 4\cdots q + 4\cdot\cdot 5\cdots q + \cdots + (q-1)\cdot q + q + 1]\\
&+ \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)} + \cdots
\end{aligned}$$

Note que o lado esquerdo da igualdade é um número inteiro, uma vez que temos um produto de números inteiros. Do lado direito, a expressão entre as chaves é um número inteiro, pois cada parcela é um produto de inteiros. Porém, as demais parcelas no lado direito não podem ser inteiros, pois sabemos que $q \geq 2$. Mostraremos que a soma destas parcelas não é um inteiro. De fato, para $q \geq 2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots\\
&< \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots
\end{aligned}$$

Ora, esta última é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de termo inicial $a = \dfrac{1}{3}$, a razão $q = \dfrac{1}{3}$. Logo,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Assim,

$$\frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \frac{1}{2}$$

Logo, a expressão no lado direito da igualdade é dado pela soma de um inteiro e um número racional positivo menor que $\dfrac{1}{2}$; portanto esta soma não determina um inteiro e chegamos a uma contradição. Assim, concluímos que e não pode ser escrito como razão de dois inteiros e, portanto, e é irracional.

Teorema 3.2. *Dado $x \in \mathbb{R}$, a função $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ tende para o limite e quando x tende para o infinito, isto é,*

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Demonstração. Sejam $n > 0$ um natural qualquer e $x > 0$ um real qualquer. Então, para cada x, existe n tal que

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

daí, resulta que

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n,$$

ou seja,

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

Como

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = e \cdot 1 = e,$$

segue do Teorema 1.6 que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{7}$$

$\square$

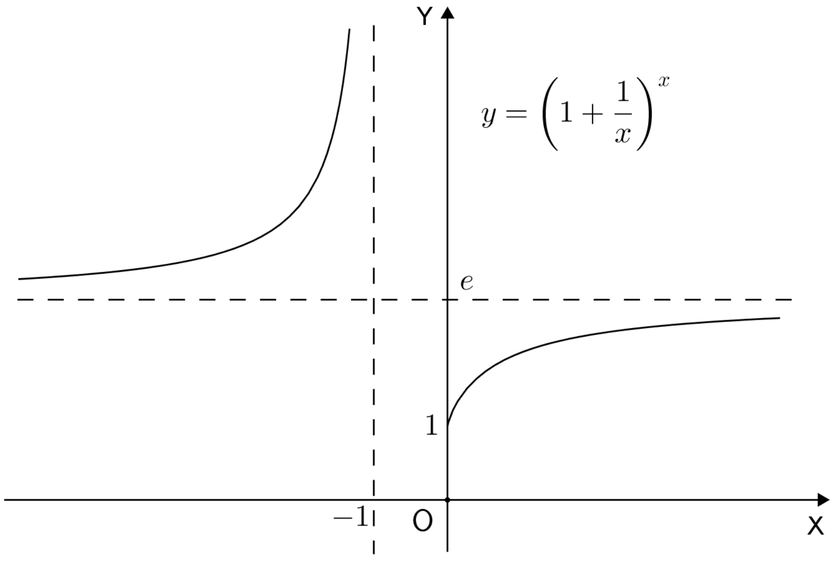
Por sua vez, podemos verificar ainda que $\lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x = e$. Com efeito, introduzindo uma nova variável $t = -(x+1)$, vemos que $x = -(t+1)$. Podemos então escrever

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)\cdot\left(\frac{t+1}{t}\right)$$

Temos que $x\to-\infty$ se, e somente $t\to+\infty$; assim

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right) = e. \tag{8}$$

Figura 5 – Gráfico da função $(1+1/x)^x$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 5. Resulta da igualdade (7) que $\lim_{\alpha\to0^+}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$. Com efeito, fazendo $x = \frac{1}{\alpha}$ em (7), vemos que $\alpha = \frac{1}{x}$ e que $x\to+\infty$ se, e somente se, $\alpha\to0^+$. Daí, obtemos

$$\lim_{\alpha\to0^+}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Exemplo 6. Considerando a igualdade (8), obtemos $\lim_{\alpha\to0^-}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$. Com efeito, fazendo $x = \frac{1}{\alpha}$ em (8), vemos que $\alpha = \frac{1}{x}$ e que $x\to-\infty$ se, e somente se, $\alpha\to0^-$, donde resulta

$$\lim_{\alpha \to 0^-} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

De posse dos exemplos 5 e 6, podemos afirmar que

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{9}$$

3.3 A função exponencial natural

A obra *Introductio in analysin infinitorum*, publicada em dois volumes no ano de 1748, figurou entre um dos mais influentes trabalhos de Leonhard Euler[2], rendendo-lhe grande prestígio. Segundo Maor (2005, p. 184): "A *Introductio* chamava, pela primeira vez, a atenção do papel central do número e e da função e^x na Análise". Nela, Euler definiu a função exponencial independentemente da função logarítmica (até então, a função exponencial era considerada meramente a inversa da função logarítmica), como segue:

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{10}$$

Depois de tanta explanação, o leitor cuidadoso pode estar ainda curioso pela escolha da letra e. De acordo com Maor (2005, p. 185):"A primeira aparição do número e num trabalho publicado foi na *Mechanica* de Euler em 1736, onde o mesmo estabeleceu as fundamentações da mecânica analítica". No entanto, em 1727, o mesmo Euler já havia usado a letra e para representar o número $2,71828...$ em um manuscrito intitulado *Meditação sobre experimentações feitas sobre o disparo de um canhão*, um de seus primeiros trabalhos. Não existe consenso geral quanto o porque da escolha da letra e. Alguns defendem que Euler fez essa escolha pelo fato de e ser a primeira letra da palavra *exponencial.* Outros, porque a letra e era a primeira letra "não usada"do alfabeto, uma vez que as letras a, b, c e d já apareciam com frequência nos textos matemáticos. Há ainda, os que creditam que ele a tenha escolhido por ser a primeira letra de seu nome, uma hipótese de modo majoritário considerada muito improvável. De qualquer maneira, independente dessas motivações, o símbolo e foi aceito universalmente. Veja MAOR (2005).

Euler definiu a função exponencial como uma série infinita de potências, como abaixo:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Pode-se mostrar que esta série é convergente para todos os valores de x. A

[2]Leonhard Euler(1707), suíço que nasceu na Basiléia, foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na História da Matemática, figurando entre um dos poucos matemáticos que contribuiu de modo significativo em seus diversos ramos.

igualdade acima pode ser provada de modo análogo a demonstração da igualdade (6), mas não faremos aqui essa demonstração. Em nossa abordagem, demonstraremos a validade desta (10) a partir da igualdade (9). Com efeito, tomando $\alpha = \frac{x}{n}$, vemos que $\frac{1}{\alpha} = \frac{n}{x}$ e que $\alpha \to 0$ se, e somente se, $n \to +\infty$. Logo, da igualdade (9), obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = \lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x = e^x. \tag{11}$$

Uma vez que essa propriedade é valida para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo particular, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

De agora em diante, concentraremos nossa atenção na função exponencial $x \mapsto e^x$, de base e, também conhecida como função exponencial natural.

A função exponencial natural $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = e^x$, tem as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$;
2. $e^0 = 1$;
3. $x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$;
4. e^x é bijetiva;
5. e^x é contínua;
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Além destas, podemos ainda nos referir a esta função em termos de sua inversa. Por definição de função inversa, tem-se

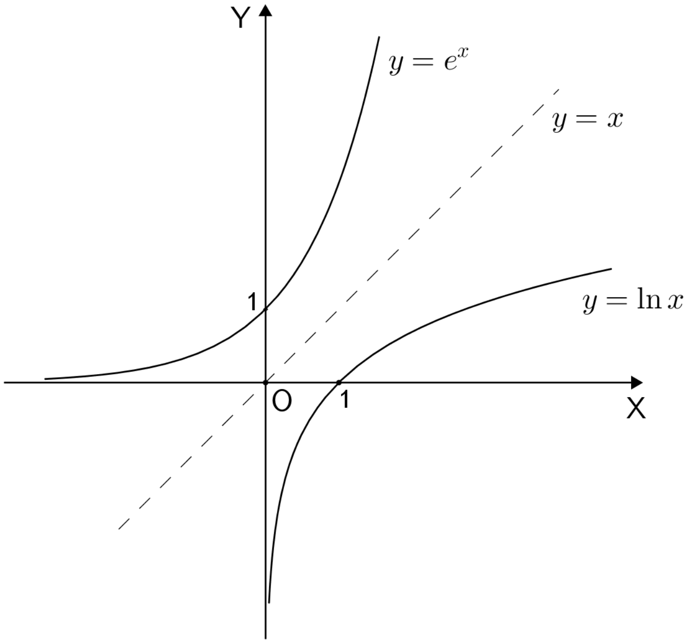
$$e^x = y \Leftrightarrow x = \log_e y$$

Assim sendo, a inversa da função exponencial natural é a função logaritmo $x = \log_e y$ e sua equação, depois de redefinir x e y, é $y = \log_e x$. Esta última – denominada função logarítmica natural – será denotada por $y = \ln x$. Da relação inversa entre essas funções vê-se facilmente que $\ln e = 1$, uma vez que $e^1 = e \Leftrightarrow \ln e = 1$.

Na figura 6, apresentamos os gráficos das funções $y = e^x$ e $y = \ln x$ em um mesmo sistema de coordenadas.

Os padrões de crescimento de e^x e $\ln x$ são dignos de serem mencionados. Ambas as funções crescem para valores crescentes de x, mas seus crescimentos são consideravelmente diferentes – e^x cresce extremamente rápido, enquanto o crescimento de

Figura 6 – Gráfico das funções exponencial e logarítmica natural – reflexão em torno da reta $y = x$



Fonte: Elaborado pelo autor.

$\ln x$ é extremamente vagaroso. Por exemplo, para $x = 10$, e^x ultrapassa o valor 22000, enquanto para $x = 1000$, $\ln x$ nem sequer atinge o valor 7. Isto se dá pelo fato de que dado um número $M > 0$, tem-se $\ln x > M \Leftrightarrow x > e^M$.

Mais ainda: o crescimento da função exponencial natural supera o crescimento de qualquer polinômio. Isto é, dado qualquer polinômio $p(x)$, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0.$$

Para provar isto, basta considerar o caso em que $p(x) = x^k$. Antes, porém, vamos escrever $e^{x/k} = y$. Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade obtemos $\dfrac{x}{k} = \ln y$, donde segue que, $x = k \cdot \ln y$. Neste caso, $x \to \infty$ se, e somente se, $y \to \infty$. Logo, podemos escrever

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^{x/k}}\right) = \lim_{y\to+\infty} \left(k\frac{\ln y}{y}\right) = 0,$$

e daí segue que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^{x/k}}\right)^k = 0.$$

Observação: A demostração que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln y/y) = 0$ encontra-se no Apêndice C.

Como já citado anteriormente, os gráficos das funções exponenciais são simples (isto inclui, logicamente, a função exponencial de base e). Assim sendo, o estudo de gráficos desse tipo não seria interessante, se não fosse um detalhe que o torna único: a sua taxa de variação.

3.4 A derivada da função exponencial natural

Dada uma função $y = f(x)$ e considerando um intervalo de extremidades x e $x + h$, teremos uma variação h (também chamada de incremento de x) nesse intervalo. Esta, também, determinará uma variação correspondente em y igual a $f(x + h) - f(x)$. O quociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

é chamado taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x, x+h]$. (O quociente acima é também representado por $\Delta y/\Delta x$ e chamado razão incremental). Geometricamente, a razão acima é a inclinação da reta secante entre os pontos $P = (x, f(x))$ e $Q = (x + h, f(x + h))$ (ver Figura 7).

Vamos considerar essa taxa de variação em intervalos cada vez menores, fazendo $x + h$ tender a x e, portanto, h tender a 0. Assim sendo, essas taxas médias de variação aproximar-se-ão de um certo limite, que será chamado taxa (instantânea) de variação de y em relação a x. Geometricamente, à medida que h se aproxima de 0, o ponto Q move-se em direção ao ponto P ao longo do gráfico, de modo que a secante, no limite, coincidirá com a reta tangente. Por esse motivo, taxa instantânea de variação é interpretada como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto x:

$$\text{taxa instantânea de variação} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A esta última taxa de variação, chamamos derivada de y em relação a x. Assim fomentados, vamos dar a seguinte definição:

Definição 3.2. *A derivada de uma função f em uma variável x, denotada por $f'(x)$, é*

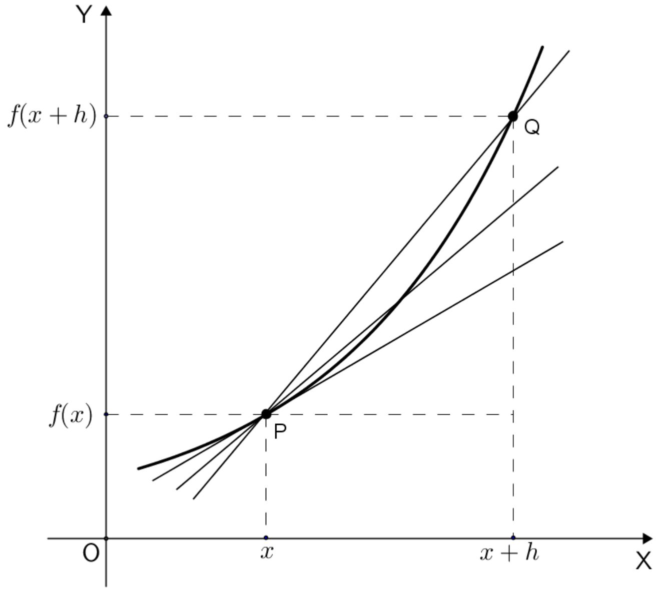
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{12}$$

se o limite existe.

Se usarmos a notação tradicional $y = f(x)$, indicando que a variável dependente é y e a independente é x, então podemos usar as notações $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ e $\frac{d}{dx}f(x)$ para representar a derivada da função $y = f(x)$.

A derivada é a noção fundamental do Cálculo Infinitesimal. As regras para operar com a derivada f' são conhecidas como regras de diferenciação. Aqui, vamos enunciar algumas destas regras.

Figura 7 – A ideia geométrica da derivada.



Fonte: MAOR (2005).

1. A derivada de uma constante é igual a zero. Geometricamente, isto se dá pelo fato de o gráfico de uma função constante ser uma linha horizontal cuja inclinação em qualquer ponto é 0. Uma prova formal pode ser feita de forma simples pela definição de derivada.

2. A derivada de uma função multiplicada por uma constante é dada pelo produto da constante pela derivada da função. Em símbolos, $y = ku$, onde $u = f(x)$ então $dy/dx = k(du/dx)$. Por exemplo, se $y = 3x$ então, $dy/dx = 3 \cdot (1) = 3$. Por sua vez, se $y = 2x^2$, então $dy/dx = 2 \cdot (2x) = 4x$.

3. Se y for a soma de duas funções $u = f(x)$, e $v = g(x)$, a derivada de y será igual a soma das derivadas das funções individuais. Em símbolos, se $y = u + v$, então $dy/dx = du/dx + dv/dx$. Por exemplo, se $y = 3x + 2x^2$ então $dy/dx = 3 + 4x$.

A partir das definições dadas, mostraremos uma relação interessante entre a função exponencial natural e a sua derivada, expressa nos termos do teorema abaixo:

Teorema 3.3. *A função exponencial natural é igual a sua própria derivada. Isto é, se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$.*

Demonstração. Pela definição de derivada, se $f(x) = e^x$, então

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

Como o limite envolve apenas a variável h, x é considerado como um valor fixo. Logo, podemos escrever

$$f'(x) = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Fazendo a mudança de variável $u = e^h - 1$ ou $h = \ln(u+1)$, quando $h \to 0$, temos $u \to 0$, donde segue que

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(u+1)} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(u+1)}{u}} = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\ln(u+1)^{1/u}},$$

pelas propriedades da função logarítmica. Como $\ln x$ é contínua em $(0, +\infty)$, podemos mover o limite através do símbolo da função. Obtemos assim

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{\ln \lim\limits_{u \to 0} (u+1)^{1/u}} = \frac{1}{\ln e} = 1, \tag{13}$$

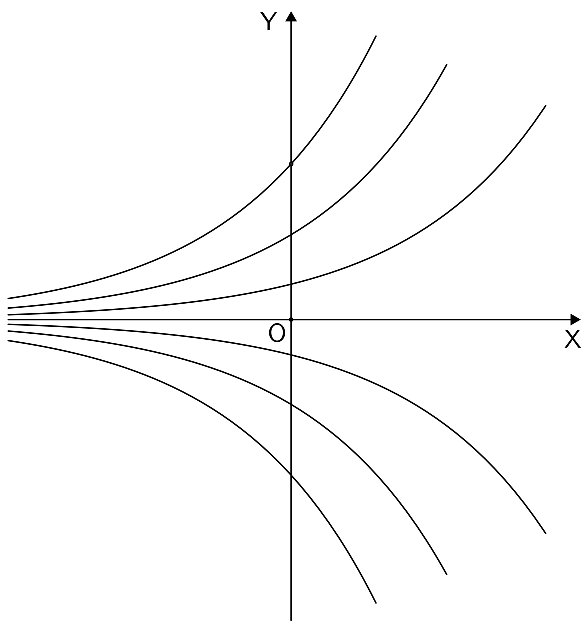
uma vez que $\ln(u+1)^{1/u} = e$ e $\ln e = 1$. Logo, concluímos que

$$f'(x) = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$\square$

Mais que isso: a função $y = b \cdot e^x$, onde b é uma constante arbitrária, é igual a sua própria derivada. Para diferentes valores de b obtemos uma família de funções cujo gráfico é mostrado na figura abaixo.

Figura 8 – Família de curvas exponenciais $y = b \cdot e^{\alpha x}$.



Fonte: STEWART (2007).

Prosseguiremos mostrando que a derivada da função $g(x) = b \cdot e^{\alpha x}$ é proporcional a própria função. Isto é, se $g(x) = b \cdot e^{\alpha x}$ então $g'(x) = \alpha \cdot g(x)$. Apresentando a questão de um modo diferente, a taxa instantânea de variação da função g é, em cada ponto x, proporcional ao valor da função naquele ponto. O valor α é precisamente o fator de proporcionalidade.

Nesse empreendimento, é suficiente determinar a derivada da função $f(x) = e^{\alpha x}$. Pela definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha(x+h)} - e^{\alpha x}}{h} = e^{\alpha x} \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha \cdot e^{\alpha x} \lim_{h \to 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h}$$

Escrevendo-se $k = \alpha h$, vemos que $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$. Aliado ao resultado (13), obtemos

$$f'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{e^{k} - 1}{k} = \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot 1 = \alpha \cdot e^{\alpha x},$$

de onde conclui-se que a derivada da função $f(x) = e^{\alpha x}$ é $f'(x) = \alpha \cdot e^{\alpha x}$.

De posse desse resultado, vemos facilmente que a derivada da função $g(x) = b \cdot e^{\alpha x}$ é $g'(x) = \alpha \cdot g(x)$. Logo, esta é proporcional ao valor $g(x)$ da função g, sendo α o fator de proporcionalidade. Esta propriedade de possuir uma derivada proporcional a si própria é exclusiva das funções desse tipo (ver apêndice C). A importância da função exponencial natural $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$ nas aplicações em Matemática e Ciência é, em grande parte, consequência desse fato.

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações das funções exponenciais, como o cálculo de juros compostos continuamente, o decaimento radioativo, o resfriamento de um corpo, o crescimento populacional e as funções hiperbólicas. Estas, como veremos, varrem diversas áreas como Economia, Arqueologia, Biologia, Criminalística, Demografia, Arquitetura, entre outras.

4.1 Crescimento e decaimento exponencial

A função do tipo $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$, onde b e α são constantes reais, surge naturalmente em inúmeros fenômenos nos quais a taxa de variação de alguma quantidade é proporcional à própria quantidade, ou seja, quando o aumento ou diminuição de uma grandeza se faz proporcionalmente ao valor dessa grandeza em um dado instante. O coeficiente α – chamado constante de proporcionalidade – está intimamente ligado com a taxa de variação de f. Dependendo se α é positivo ou negativo, $f(x)$ irá aumentar ou diminuir, resultando em crescimento ou em decrescimento (ou decaimento) exponencial, respectivamente. No caso em que α é negativo, geralmente escrevemos $-\alpha$, em substituição ao valor α. Vamos estudar alguns exemplos de tais fenômenos.

4.1.1 *Juros compostos continuamente.*

Suponha que um certo capital c_0 seja aplicado a uma taxa de juros $i\%$ ao ano. Vamos escrever, por simplicidade, $\alpha = i/100$. Ao final de um ano, este capital renderá juros no valor de $c_0 \cdot \alpha$, de modo que o total resgatado corresponde a $c_1 = c_0 + \alpha c_0 = c_0(1+\alpha)$. Reaplicando o novo capital c_1 por mais um ano a mesma taxa de juros α, este resultará no capital $c_2 = c_1 + \alpha \cdot c_1 = c_1(1+\alpha) = c_0(1+\alpha)(1+\alpha) = c_0(1+\alpha)^2$. Prosseguindo nesse mesmo raciocínio, um capital c_0 após t anos produzirá um capital $c_t = c_0(1+\alpha)^t$.

Por sua vez, ao invés de anualmente, vamos resgatar esse capital semestralmente, aplicado a mesma taxa α. Então, decorrido um semestre, este renderá juros no valor de $c_0 \cdot \frac{\alpha}{2}$ (juros correspondentes a metade de um ano), resultando numa quantia de valor $c_0 + c_0 \cdot \frac{\alpha}{2} = c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)$, decorrido um semestre. Reaplicando o novo capital gerado durante um semestre, à mesma taxa α, ao fim de um ano, em vez de $c_0(1+\alpha)$, obteremos um total de $c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2} \cdot c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) = c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2$. É importante notar que a quantia $c_0\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2 > c_0(1+\alpha)$, o que pode ser provado pela desigualdade de Bernoulli. (Isto significa que um capital resgatado e reinvestido sucessivamente um número maior de vezes em determinado período, produz um maior valor em juros). Nesse mesmo raciocínio, o capital c_0 resgatado e reinvestido mensalmente, ao fim de um ano, resulta num capital no valor de $c_0\left(1+\frac{\alpha}{12}\right)^{12}$.

Se tomarmos uma fração $1/n$ de ano, o capital c_0 aplicado à mesma taxa α, renderá ao final de cada fração $1/n$ de ano, juros no valor de $c_0 \cdot \dfrac{\alpha}{n}$, produzindo um novo capital $c_1 = c_0\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)$. Dividindo o ano em n partes iguais, resgatando e reinvestindo o capital resultante do período imediatamente anterior, pelo mesmo processo aplicado anteriormente, no final de um ano, obteremos um total acumulado no valor de $c_0\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$. Nesse mesmo raciocínio, se desejarmos intervalos de tempo cada vez menores, basta aumentarmos n indefinidamente. Fazendo assim, no fim de um ano, obtemos

$$c_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = c_0 \cdot e^{\alpha},$$

uma vez que o limite da expressão acima é igual a e^{α}. Quando fazemos n crescer indefinidamente, estamos compondo os juros continuamente. Portanto, um investimento onde os juros são compostos continuamente cresce exponencialmente.

Esse processo continua sendo válido se considerarmos, para um número real $t > 0$, o capital c_0 aplicado durante t anos, à mesma taxa α. Dividindo o ano em n partes iguais, resgatando e reinvestindo o capital resultante do período imediatamente anterior, no final desses t anos, os juros serão capitalizados (isto é juntos ao capital) nt vezes. Designando por $c(t)$ o capital acumulado no final desses t anos, obteremos um total de

$$c(t) \quad = \quad c_0\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{nt} \tag{14}$$

Fazendo n crescer indefinidamente, o capital acumulado após t anos será de

$$\begin{aligned} c(t) \quad &= \quad c_0 \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{nt} = c_0 \cdot \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{\alpha t} \\ &= \quad c_0 \cdot \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{\alpha t} = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n/\alpha}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^{\alpha t} \end{aligned}$$

Escrevendo $m = n/\alpha$, vemos que $n \to +\infty$ se, e somente se, $m \to +\infty$. Logo, obtemos

$$c(t) = c_0 \cdot \left[\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\alpha t} = c_0 \cdot e^{\alpha t} \tag{15}$$

como o resultado da aplicação do capital c_0, durante t anos, à uma de $\alpha = i/100$ ao ano, de juros compostos, acumulados continuamente.

A tabela a seguir mostra o efeito do aumento da frequência de cálculo para uma taxa de rendimento $\alpha = 10\%$. Os resultados da segunda, terceira colunas são dados pela equação (14) para o cálculo trimestral e diário, respectivamente, e o da quarta coluna usando a equação (15) para o cálculo contínuo.

Tabela 2 – Crescimento de capital a uma taxa de rendimento $\alpha = 10\%$ para diversas composições de juros.

Anos	$c(t)/c_0$ da equação (14) $n = 2$	$c(t)/c_0$ da equação (14) $n = 365$	$c(t)/c_0$ da equação (15)
1	1,1025	1,1052	1,1052
2	1,2155	1,2214	1,2214
5	1,6289	1,6486	1,6487
10	2,6533	2,7179	2,7183
20	7,0400	7,3870	7,3891
30	18,6792	20,0733	20,0855
40	49,5614	54,5682	54,5981

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Pelos resultados apresentados, vemos que a frequência de cálculo não é relevante em boa parte dos casos. Por exemplo, durante o período de 10 anos, a diferença entre o cálculo semestral e contínuo é no valor de R$ 65,00 por R$ 1000,00 investidos (menos de R$ 7,00 por ano). Para taxa de rendimentos maiores (respectivamente, menores) a diferença seria maior (respectivamente, menor).

Exemplo 7. Em quanto tempo um capital c, aplicado a juros contínuos de 20% ao ano, será triplicado?

Temos $\alpha = 20/100 = 0,2$. Queremos determinar o número t de anos tal que

$$c \cdot e^{0,2t} = 3c, \quad \text{de onde segue que} \quad e^{0,2t} = 3.$$

Avaliando o logaritmo natural, obtemos $0,2t = \ln 3$, e daí obtemos

$$t = \frac{\ln 3}{0,2} = \frac{1,0986}{0,2} = 5,493.$$

Portanto, o tempo necessário para triplicar o capital investido a juros compostos continuamente é de aproximadamente 5 anos e meio. É interessante observar que esse tempo independe do capital inicial, uma vez fixada a taxa de juros.

4.1.2 *Decaimento radioativo.*

Na atualidade muito se fala sobre acidentes ou testes com material radioativo. Mas na verdade o ser humano sempre conviveu com a radioatividade. Esse fenômeno funciona, basicamente, da seguinte forma: Os átomos de uma substância radioativa (como o polônio, o rádio, o urânio) possuem uma tendência natural ao decaimento (desintegração), emitindo energia sob forma de radiação (ondas eletromagnéticas ou partículas de alta energia), transmutando-se assim em outra substância mais estável com propriedades físicas e químicas diferentes. O processo pelo qual a energia é liberada é chamado *decaimento radioativo*. Em virtude disso, à medida que o tempo passa, a massa da substância original diminui (consequentemente, há um aumento na massa da nova substância). Nesse processo, a quantidade de matéria que decai de um corpo radioativo é, em cada momento, proporcional à sua massa. A constante de proporcionalidade α – determinada experimentalmente – é própria para cada substância. A partir dessa perspectiva, vemos que a massa de um corpo radioativo se aproxima gradualmente de 0 mas nunca o alcançará – a substância nunca se desintegrará totalmente. Isto nos explica por que, anos depois de um material nuclear ter sido posto como lixo, ainda pode ser bastante perigoso.

Vamos considerar um corpo de massa m_0, formado por uma substância radioativa cuja taxa de decaimento é igual a α. Sendo m_0 a massa em $t = 0$, decorrido o tempo $t = 1$ segundo, haveria uma perda $\alpha \cdot m_0$ unidades de massa, reduzindo o corpo à massa $m_1 = m_0 - \alpha \cdot m_0 = m_0(1-\alpha)$. Decorrido $t = 2$ segundos, teríamos $m_2 = m_1 - \alpha \cdot m_1 = m_1(1-\alpha) = m_0(1-\alpha)^2$. Após $t = s$ segundos, resulta $m_s = m_0(1-\alpha)^s$.

Contudo, o decaimento se processa continuamente. Tomando um inteiro $n > 0$ e considerando que a desintegração ocorra em cada intervalo $1/n$ de segundo. Após a primeira fração $1/n$ de segundo, haveria uma perda de $\alpha \cdot m_0/n$, o que reduziria a massa do corpo à $m_0\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)$. Neste raciocínio, após 1 segundo, ocorridas n desintegrações instantâneas e as n reduções, restaria ao corpo a massa $m_0\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n$. Fazendo n crescer indefinidamente, de modo que o intervalo $[0, 1]$ continue dividido em partes iguais, após 1 segundo, a massa do corpo será dada por

$$m_0 \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = m_0 \cdot e^{-\alpha}$$

Por sua vez, para um número real $t > 0$, considerando que o intervalo $[0, 1]$ foi dividido em n partes iguais, após t segundos, ocorridas nt desintegrações instantâneas e as nt reduções, a massa do corpo será reduzida a $m_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{nt}$. Fazendo n crescer indefinidamente e, designando por $m(t)$ a massa do corpo depois de decorridos t segundos, obtemos

$$m(t) = m_0 \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{nt} = m_0 \cdot e^{-\alpha t} \tag{16}$$

Concluímos que a massa de um corpo formado por uma substância radioativa decai exponencialmente. Cabe observar que se adotada outra unidade de tempo, a constante α deve ser alterada proporcionalmente.

O valor de α determina a taxa de decaimento da substância radioativa que, geralmente, é medido pela meia-vida, ou seja, o tempo necessário para que a massa da substância se reduza a metade da massa inicial (ver Figura 9). Substâncias diferentes possuem meia-vida diferentes. Por exemplo, o isótopo comum do urânio (^{238}U) tem meia-vida de 5 milhões de anos, o isótopo comum do radio (^{226}Ra) tem meia-vida de 1620 anos, enquanto o isótopo (^{220}Ra) tem meia-vida de $2,3 \cdot 10^{-4}$ segundos. Por essa razão, alguns dos elementos instáveis da tabela periódica não pode ser mais encontrados nos minérios naturais, pois independentemente da quantidade deles em tempos remotos, eles já se transmutaram em outras substâncias.

Como já citado, a meia-vida e a taxa de decaimento de uma substância estão relacionadas entre si. Com efeito, sendo t_0 unidades de tempo a meia-vida de uma substância $-$ isto significa que a massa dessa substância se reduz a metade no tempo t_0 $-$ então pela função em (16) obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot m_0 = m_0 \cdot e^{-\alpha t_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\alpha t_0}.$$

Avaliando logaritmo natural em ambos os membros da última igualdade, resulta

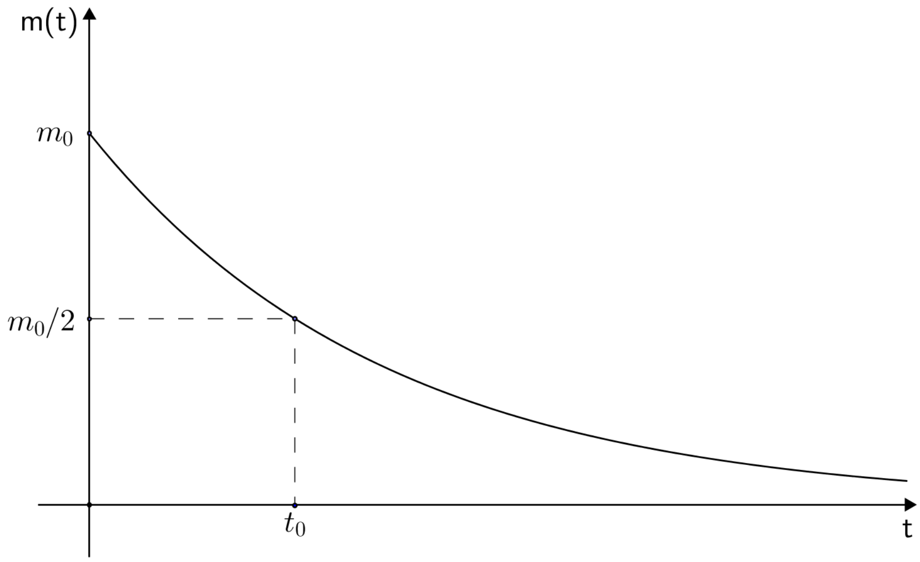
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\alpha t_0 \Leftrightarrow -\ln 2 = -\alpha t_0,$$

de onde segue que

$$\alpha = \frac{\ln 2}{t_0}$$

Reciprocamente, dado a taxa de decaimento α, pode-se determinar a meia-vida t_0 em função de α.

Figura 9 – Meia-vida de uma substância



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dentre muitas aplicações, cabe citar o decaimento radioativo como ferramenta importante em pesquisa arqueológica, pelo método chamado *datação do carbono–14*, desenvolvido pelo químico americano Willard F. Libby[3]. Através desse método é possível

[3]Willard F. Libby(1908-1980) nasceu na zona rural do Colorado, nos Estados Unidos. Na Universidade

determinar a idade de restos de certas madeiras e plantas, como também de ossos, de animais e humanos e, ainda, de artefatos. Podemos dar uma descrição resumida desta técnica.

Além do isótopo estável ^{12}C ("carbono 12"), o dióxido de carbono (CO_2) contém o isótopo radioativo ^{14}C ("carbono 14"). O bombardeamento da atmosfera superior por raios cósmicos converte o nitrogênio em um isótopo radioativo de carbono, o ^{14}C, que tem um meia-vida de cerca de 5730 anos. A razão entre a quantidade de ^{12}C e ^{14}C tem-se mantido constante na atmosfera ao longo dos anos, porque a produção deste último é compensada por sua desintegração. Através da fotossíntese, as plantas absorvem o ^{14}C presente na atmosfera, de modo que a razão entre a quantidade de ^{12}C e ^{14}C também tem-se mantido constante. Por sua vez, o carbono-14 termina sendo incorporado pelos animais vegetarianos e, através destes, pelos carnívoros, sendo assim assimilado por seres vivos de todos níveis tróficos. Quando uma planta ou animal morre, a absorção de carbono cessa. A massa de ^{12}C continua a mesma após a morte do organismo, enquanto a massa de ^{14}C diminui exponencialmente devido ao decaimento radioativo, fazendo que a razão entre as massas de ^{12}C e ^{14}C também passe a diminuir exponencialmente. Dessa maneira, a razão m_0 entre as massas de ^{12}C e ^{14}C em uma amostra (por exemplo, um fóssil ou um artefato) é modelada pela função $m(t) = m_0 \cdot e^{-\alpha t}$ apresentada. Comparando $m(t)$ com m_0, os arqueólogos podem estimar a idade da amostra. Ver HOFFMAN e BRADLEY (2008).

Vamos ver uma situação, exposta como exemplo, em que esse método foi usado para resolver uma controvérsia.

Exemplo 8. Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Arthur, soberano que viveu no século V. Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede radioatividade) constatou-se que a massa $m = m(t)$ de C^{14} hoje existente na mesa é $0,894$ vezes a massa m_0 de C^{14} que existe num pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa. A massa m_0 é também a massa de C^{14} que existia na mesa, quando ele foi feita há t anos.

Antes de prosseguirmos em nossas considerações, precisamos determinar a taxa de decaimento α de C^{14}. Uma vez que a meia-vida dessa substância radioativa é de 5730 anos, segue-se que

$$\alpha = \frac{\ln 2}{5730} \cong 0,0001209.$$

Sabendo-se que o decaimento radioativo segue a lei $m(t) = m_0 \cdot e^{-\alpha t}$, donde segue que $\dfrac{m(t)}{m_0} = e^{-\alpha t}$, podemos escrever $0,894 = e^{-0,0001209t}$. Tomando logaritmo natural

de Chicago, começou a desenvolver o método de datação por carbono radioativo em 1947, trabalho que lhe rendeu o Prêmio Nobel de química em 1960.

em ambos os membros desta última expressão obtemos

$$\ln(0,984) = -0,0001209t,$$

de onde resulta,

$$t = \frac{-\ln(0,894)}{0,0001209} \cong 926\text{anos}.$$

Se a mesa em questão fosse de fato a Távola Redonda ela deveria ter mais de 1500 anos.

Seguiremos enunciando outras situações em que a taxa de variação de uma grandeza é proporcional a própria grandeza em um determinado instante. Uma vez que essa propriedade é exclusiva das funções exponenciais (ver Apêndice C), isso nos garante que fenômenos que tem como premissa essa propriedade são modelados por uma função do tipo $y = b \cdot e^{\alpha x}$.

4.1.3 *Resfriamento de um corpo*

A primeira dessas situações, análoga a do decaimento, ocorre quando um objeto aquecido é colocado num ambiente mais frio (ar ou água , por exemplo), de modo que a temperatura do ambiente permaneça constante (em outros termos: a introdução do objeto não afeta a temperatura do ambiente). Nessas condições, a *lei do resfriamento de Newton*[4] estabelece que a diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente que o contém decresce a uma taxa proporcional a essa própria diferença resultando, portanto, num fenômeno de decrescimento exponencial. Se denotarmos por d_0 a diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente que o contém no instante $t = 0$ e $d(t)$ a diferença num instante t qualquer, esta lei é expressa da seguinte forma

$$d(t) = d_0 \cdot e^{-\alpha t}, \tag{17}$$

onde a constante de proporcionalidade α depende do material de que é constituída a superfície do objeto, sendo que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está diminuindo com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente. (A lei de Newton também se aplica − com expoente positivo − ao aquecimento). O exemplo a seguir mostra como essa lei pode ser útil à criminalística.

Exemplo 7. O corpo de uma vítima foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23:30 e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era 34,8 °C. Uma

[4] Em 1701, quando tinha quase 60 anos, Isaac Newton (1642 – 1727) publicou anonimamente um artigo intitulado "Scala Graduum Caloris", em que descreve um método para medir temperaturas de até 1.000°C, algo impossível aos termômetros da época. O método estava baseado no que hoje é conhecido como a lei do resfriamento de Newton.

hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou 34,1 °C. A temperatura do quarto era mantida constante a 20 °C. Estime a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é 36,5 °C.

Para resolvermos este problema, vamos considerar o momento que o médico tomou a primeira medição como sendo a temperatura inicial do corpo. Assim sendo, a temperatura do corpo no instante $t = 0$ era de 34,8 °C e a do ambiente de 20 °C (que se presume permanecer constante). Logo, temos $d_0 = 34,8 - 20 = 14,8$. Sendo $d(t)$ a diferença de temperatura do corpo e o ambiente após t minutos, obtém-se

$$d(t) = 14,8 \cdot e^{-\alpha t}$$

Para determinar a constante α, usaremos as informações contidas no enunciado. Facilmente vemos que após 60 minutos, a temperatura do corpo reduziu-se para 34,1 °C, logo obtemos que $d(60) = 34,1 - 20 = 14,1$. Portanto, podemos escrever

$$14,1 = 14,8 \cdot e^{-60\alpha}$$

de onde segue que

$$e^{-60\alpha} = \frac{14,1}{14,8} \cong 0,9527$$

Avaliando logaritmo natural em ambos os membros da igualdade, resulta

$$60\alpha = -\ln 0,9527,$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{-\ln 0,9527}{60} \cong 0,0008076.$$

Podemos então escrever

$$d(t) = 14,8 \cdot e^{-0,0008076t}.$$

Uma vez admitindo que a temperatura normal de uma pessoa viva é de 36,5 °C, podemos determinar a hora do óbito substituindo $d(t) = 36,5 - 20 = 16,5$ °C na função acima (a temperatura do corpo começa a decair após a morte). Desse modo, obtemos

$$16,5 = 14,8 \cdot e^{-0,0008076t} \Leftrightarrow e^{-0,0008076t} = \frac{16,5}{14,8} \cong 1,11486,$$

de onde segue que

$$t = \frac{-\ln 1,11486}{0,0008076} \cong -134,64.$$

Uma vez que o médico tomou a primeira temperatura do corpo as 23:30 horas, conclui-se que esse corpo veio a óbito aproximadamente 135 minutos antes dessa medição. Logo, a hora aproximada do óbito foi às 21:15.

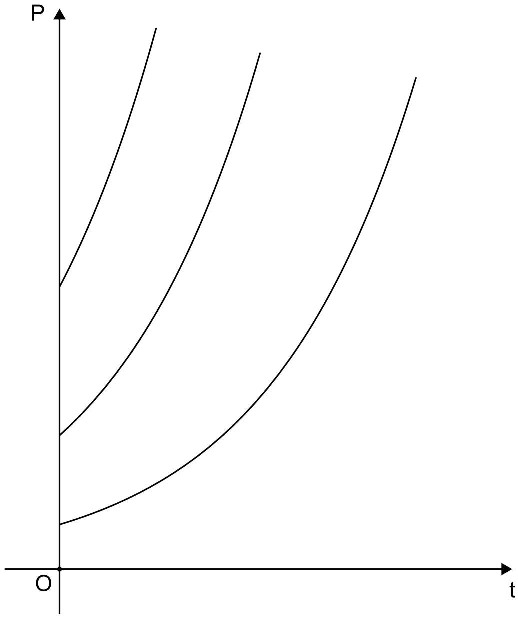
4.1.4 *Crescimento populacional.*

Seja $p = p(t)$ a população de uma espécie no instante t. Um modelo mais simples sobre o crescimento populacional baseia-se na premissa que a população cresce a uma taxa proporcional ao valor atual de p. Assim sendo, essa premissa prevê que a população crescerá exponencialmente sempre. Denotando por p_0 a população inicialmente considerada (ou seja, a população no instante $t = 0$), então a população num instante $t > 0$ será dada por

$$p(t) = p_0 \cdot e^{kt} \tag{18}$$

onde k é a constante de proporcionalidade. A figura 10 mostra uma família de curvas para diversos valores de p_0. (Como as populações têm apenas valores positivos estamos interessado nas curvas com $p_0 > 0$).

Figura 10 – Família de curvas de $p(t) = p_0 \cdot e^{kt}$, com $p_0 > 0$ e $t \geq 0$.



Fonte: STEWART (2007).

Sob condições ideais, a equação (10) é razoavelmente precisa para uma modelagem de crescimento populacional. Entretanto, na maioria das situações supor que essas condições perdurem indefinidamente não se configura como uma premissa realística; em um determinado momento, as limitações do espaço, de suprimento e de outros recursos reduz a taxa de crescimento e, consequentemente, inibe o crescimento exponencial.

De fato, muitas populações começam crescendo exponencialmente. Porém, esse processo não perdura indefinidamente. O nível da população se estabiliza quando se aproxima de uma capacidade de suporte K. (Refere-se muitas vezes a K como sendo o nível de saturação ou a capacidade de sustentação da espécie). Logo, para um melhor modelo que descreva o crescimento populacional outras premissas tem de ser levadas em consideração, além da já apresentada. Um desses modelos, conhecido como *crescimento logístico*[5] que é expresso pela função dada por

$$p(t) = \frac{K}{1 + A \cdot e^{-kt}}, \tag{19}$$

onde K é o nível de saturação, k é a constante de proporcionalidade e A é uma constante tal que $A = \dfrac{K - p_0}{p_0}$, sendo p_0 a população inicial.

Perceba que nos dois modelos a função do tipo exponencial está presente.

Referindo-se a equação logística (ver eq. 19), a capacidade de suporte representa o número máximo de habitantes que o ambiente é capaz de suportar. Notemos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{K}{1 + A \cdot e^{-kt}} = \frac{K}{1 + A \cdot 0} = K.$$

Ao longo do tempo, a população fica próxima da saturação K independente do tamanho inicial da população. A função $p(t)$ descreve uma curva, denominada curva logística, que começa no ponto em que $t = 0$, de onde obtemos

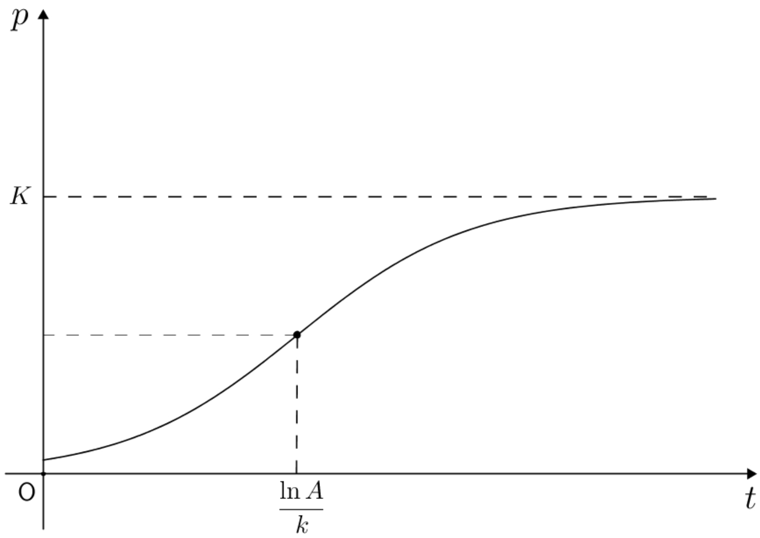
$$p(0) = \frac{K}{1 + A} = \frac{K}{1 + \frac{K - p_0}{p_0}} = \frac{K}{\frac{K}{p_0}} = p_0$$

e cresce rapidamente (com concavidade para cima) até chegar ao ponto de inflexão, cuja abcissa é dada por $t = \ln A/k$ e continua a crescer após esse ponto, mas agora mais lentamente (concavidade voltada para baixo) até aproximar-se do nível de saturação K. Pode-se demonstrar ainda, sem muita dificuldade, que a ordenada do ponto de inflexão é igual a metade do ponto de saturação K. Estas propriedades podem ser vistas no gráfico na figura 11. (Não demonstraremos estas propriedades aqui).

Além de modelar situações de crescimento populacional, a função dada em (19) descreve a disseminação de um epidemia, comportamentos na economia e, ainda, interações entre grupos sociais.

[5] Este modelo foi proposto pelo matemático e biólogo holandês Pierre François Verhulst (1804 – 1849) como modelo para o crescimento populacional humano. Este modelo ainda também mostrou-se em concordância com o crescimento de diversas populações de animais, insetos e bactérias.

Figura 11 – Curva logística.



Fonte: HOFFMAN e BRADLEY 2008.

4.2 As funções hiperbólicas

Certas combinações das funções exponenciais $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$ definem novas funções denominadas *funções hiperbólicas.* Essas funções, que aparecem em várias aplicações em engenharia, exibem semelhanças extraordinárias com as funções trigonométricas circulares.

Considere as funções denotadas por senh x e $\cosh x$, denominadas, respectivamente, seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, definidas como seguem abaixo:

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Essas funções são assim denotadas como correspondências com as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ definidas na trigonometria circular. É interessante observar a validade das relações

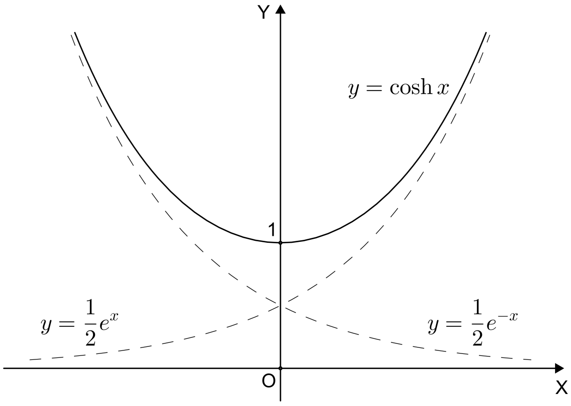
$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x \qquad \text{e} \qquad e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x.$$

Exemplo 10. Para $x = 0$, temos

$$\text{senh } 0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \cosh 0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

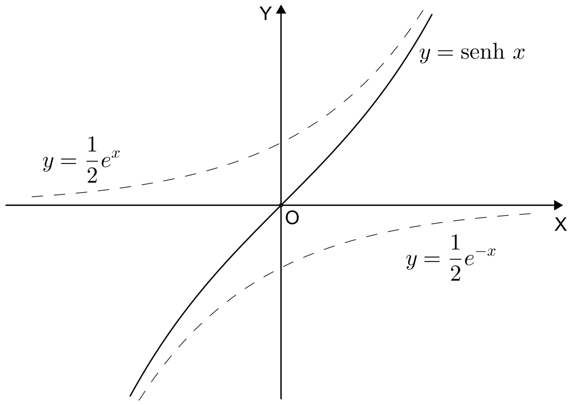
A forma geral do gráfico $y = \cosh x$ pode ser obtido esboçando-se, separadamente, os gráficos das funções exponenciais $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ num mesmo sistema de coordenadas, e somando-se as suas ordenadas para cada abcissa x. Analogamente, a forma geral do gráfico da função $y = \operatorname{senh} x$ é obtido somando-se os gráficos das funções exponenciais $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ para cada abcissa x. Estes gráficos estão esboçados nas figuras 12 e 13.

Figura 12 – Função Cosseno hiperbólico



Fonte: ANTON, BIVENS e DAVIS 2007.

Figura 13 – Função seno hiperbólico



Fonte: ANTON, BIVENS e DAVIS 2007.

Note que $\operatorname{senh} x$ tem domínio e imagem em $\mathbb{R}$, enquanto $\cosh x$ tem domínio em $\mathbb{R}$ e uma imagem em $[1, +\infty)$. Cabe-se observar ainda, que as funções $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ são assíntotas curvilíneas de $y = \cosh x$, à medida que $x \to \infty$ e $x \to -\infty$, respectivamente. Analogamente, $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ são assíntotas curvilíneas de $y = \cosh x$, à medida que $x \to \infty$ e $x \to -\infty$, respectivamente.

As funções $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ satisfazem identidade análogas àquelas que verificam as funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, tais como

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1; \tag{20}$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{senh} y; \tag{21}$$

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \operatorname{senh} y. \tag{22}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= (\cosh x + \operatorname{senh} x) \cdot (\cosh x - \operatorname{senh} x) \\ &= e^x \cdot e^{-x} = 1. \end{aligned}$$

Por sua vez, inicialmente notando que $\cosh(x+y) = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \cosh x \cdot \cosh y + \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{senh} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{2(e^{x+y} + e^{-x-y})}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \\ &= \cosh(x+y). \end{aligned}$$

A última identidade pode ser demonstrada de modo análogo a identidade (21).

Pode-se obter as fórmulas para derivadas de $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ expressando-se estas funções em termos de e^x e e^{-x}, como segue:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(e^{-x})\right] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \tag{23}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^{-x})\right] = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x \tag{24}$$

As analogias marcantes entre as funções seno e cosseno, circulares e hiperbólicas, motivam-nos a definir as demais funções hiperbólicas em correspondência com as demais funções circulares. As funções tangente hiperbólica, cossecante hiperbólica, secante hiperbólica e cotangente hiperbólica, denotadas, respectivamente, por $\operatorname{tgh} x$, $\operatorname{cossech}\ x$, $\operatorname{sech}\ x$ e $\operatorname{cotgh} x$, são definidas como segue:

1. $\operatorname{tgh}\ x = \dfrac{\operatorname{senh}\ x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;
2. $\operatorname{cossec}\ x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\ x} = \dfrac{1}{e^x - e^{-x}}$;
3. $\operatorname{sech}\ x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$;
4. $\operatorname{cotgh}\ x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh}\ x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Estas também satisfazem diversas propriedades análogas as funções trigonométricas circulares. Tais semelhanças ocorrem pelo fato de que as funções $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ estão relacionadas com a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ assim como as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ estão relacionadas com a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$.

As funções hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios dentro de sólidos elásticos e, mais geralmente, em muitos problemas nos quais a energia mecânica é gradualmente absorvida pelo meio ambiente. A aplicação mais famosa é o cosseno hiperbólico, que surge quando um cabo flexível e homogêneo é sustentado em dois suportes não situados na mesma vertical, como ocorre com os cabos de linhas de alta tensão. Tais cabos determinam um curva denominada *catenária*(do latim catena, uma corrente). A partir da introdução de um sistema de coordenadas cartesianas, é possível mostrar, usando princípios da física, que se um cabo estiver com seu ponto mais baixo no eixo y, a curva por ele determinada é dada pela equação $y = a\cosh\left(\dfrac{x}{a}\right) + c$.

A catenária invertida é uma excelente forma de construir arcos que se sustentam pelo seu próprio peso. Um dos monumentos arquitetônicos mais imponentes do mundo, o Gateway Arch (Arco do Portal) em St. Louis, Missouri (ver Figura 14), projetado pelo arquiteto finlandês Eero Saarinan e implementado pelas equações fornecidas pelo engenheiro alemão Hannskarl Badel, terminado em 1965, tem a forma exata de uma catenária invertida, erguendo-se o seu topo a uma altura de aproximadamente 630 pés

(192 metros) acima das margens do Rio Mississipi. As equações usadas para curva central do arco foram $y = 693,8597 - 68,762\cosh(0,0100333x)$ pés para x entre $-299,2239$ e $299,2239$.

Figura 14 – Gateway Arch (Arco do Portal).

O projeto Gateway Arch, St. Louis, está baseado na curva invertida do cosseno hiperbólico.
Fonte: https://www.hardincsb.com/PersonalBanking/PB TheLiNKEvents.html

Estas foram apenas algumas das aplicações da função exponencial natural. Podemos citar ainda sua utilidade em Psicologia, no estudo da chamada curva do aprendizado em que é de particular o interesse a taxa segundo a qual o desempenho melhora à medida que o tempo passa; na Meteorologia, para os que se interessam na taxa de variação da pressão atmosférica em relação a altura; na engenharia, quando se quer saber a taxa segundo a qual a água flui para dentro ou para fora de um reservatório, entre outros.

5 CONCLUSÃO

As funções exponenciais configuram-se como um dos modelos mais utilizados para resolver problemas elementares. A grande diversidade de aplicações – da Biologia a Física, da Sociologia a Demografia – relacionadas com a função exponencial e^x, como vimos, demonstra esse fato. É importante ressaltar que essas inúmeras aplicações estão ligadas ao fato do conhecimento das propriedades características dessa função, pois só assim podemos decidir se esta é um modelo adequado para utilização num problema que se estuda. Isto justifica e motiva a necessidade do estudo da função exponencial natural.

No que cerne ao ensino da Matemática este estudo preocupa-se como o mesmo deve ser organizado, devido as peculiaridades dessa disciplina. Reforça-se a importância de o ensino abranger os três conceitos fundamentais de forma a promover o equilíbrio no processo de ensino aprendizagem, de modo que os alunos possam ser dotados com habilidades conceituais e na manipulação de cálculos, como também dando-lhes condições para o uso de determinado conteúdo em situações da vida real.

Fica evidente a importância do estudo da função exponencial natural para os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Espera-se que esse trabalho possa contribuir de alguma maneira no processo de ensino aprendizagem e na construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Sthepen. **Cálculo**. Tradução: Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução: Valéria de Magalhães Iorio. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomedi. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo:** volume 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HOFFMAN, Laurence D.; BRADLEY, Gerald L. **Cálculo: Um Curso Moderno e Suas Aplicações**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1973.

LIMA, Elon Lages. **Conceituação, manipulação e aplicações:** os três componentes do ensino da matemática. Revista do professor de matemática, número 41. Rio de Janeiro: IMPA, 1999a.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise:** volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1999b.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real volume 1:** Funções de Uma Variável. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio:** volume 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MAOR, Eli. **e: História de Um Número** . 1. ed. Lisboa, Portugal: Gradiva, 2005.

SOUSA, Luiz Fernando. **Um experimento sobre a dilatação térmica e a lei de resfriamento.** 2008. 186 f. TCC (Graduação - Curso de Licenciatura em Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro), 2007. Disponível em: <http://www.if.ufrj.br/carlos/inic/luizfernando/monografiaLuizFernando.pdf>. Acesso em: 13 Maio 2015.

STEWART, James. **Cálculo** volume I. Vários tradutores. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

STEWART, James. **Cálculo** volume 2. Tradução: Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2007.

APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.4

Antes de demonstrarmos o Teorema 1.4, faz-se necessário um resultado de outro teorema, como ferramenta para estabelecer a demonstração em questão. Este segue-se abaixo:

Teorema. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada, então* $\lim x_n \cdot y_n = 0$ (*mesmo que não exista* $\lim y_n$).

Demonstração. Sendo (y_n) é uma sequência limitada segue-se que existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por sua vez, como $\lim x_n = 0$, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| = |x_n - 0| < \dfrac{\epsilon}{c}$. Assim sendo, $n > n_0$ implica

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\epsilon}{c} \cdot c = \epsilon.$$

Isto prova que $\lim x_n \cdot y_n = 0$ □

Prosseguiremos agora com a demonstração do teorema de nosso interesse.

Teorema 1.4. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$, *então*

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$; $\quad\quad \lim(x_n - y_n) = a - b$
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
3. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, *se* $b \neq 0$.

Demonstração. 1. Uma vez que $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, dado $\epsilon > 0$, existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Agora, tome $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Logo, $n > n_0$ implica

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Com isto mostramos que $\lim(x_n + y_n) = a + b$. A demonstração no caso da diferença $x_n - y_n$ é análogo.

2. Notemos inicialmente que $x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$. Como (x_n) é uma sequência convergente, pelo Teorema 2.2 ela também é limitada. Por sua vez, temos que $\lim(y_n - b) = 0$. Logo, pelo teorema imediatamente anterior, $\lim[x_n(y_n - b)] = 0$. De modo semelhante, segue-se que $\lim[(x_n - a)b] = 0$. Logo, pela parte (1) deste teorema, já demonstrada, obtemos

$$\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[x_n(y_n - b)] = 0,$$

de onde segue que $\lim x_n y_n = ab$.

3. Temos

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{y_n b} = (bx_n - ay_n)\frac{1}{y_n b}.$$

Vamos mostrar que $\left(\frac{1}{y_n b}\right)$ é limitada. Com efeito, notemos que $y_n b \to b^2$. Assim sendo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n b > \frac{b^2}{2}$.(Basta tomar $\epsilon = \frac{b^2}{2}$ e tomar n_0 correspondente). Daí, segue-se que para todo $n > n_0$, $\frac{1}{y_n b}$ é um número positivo inferior a $\frac{2}{b^2}$. Portanto, $(1/y_n b)$ é limitada.

De posse desse resultado, aliado ao fato de que $\lim(bx_n - ay_n) = ab - ab = 0$, segue-se pelo teorema anterior que

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0, \text{ de onde resulta que } \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

□

APÊNDICE B – FUNÇÃO INVERSA

Considere as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$. Quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, dizemos que as funções f e g são inversas uma da outra. É importante ressaltar ainda, que quando g é inversa de f (equivalentemente, quando f é inversa de g), tem-se $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$.

Pode-se mostrar que, se $f : X \to Y$ possui uma inversa então f é uma correspondência biunívoca entre X e Y, ou seja, f é injetiva e sobrejetiva. Com efeito, seja $g : Y \to X$ a inversa de f. Então, se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, tem-se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

de onde segue que f é injetiva.

Por sua vez, temos $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Uma vez dado $y \in Y$, de modo arbitrário, tomando-se $x = g(y) \in X$ obtemos $f(x) = y$. Portanto, f é sobrejetiva. Logo, f é de fato uma correspondência biunívoca entre X e Y.

A recíproca também é verdadeira. Isto é, se f é uma correspondência biunívoca entre X e Y então $f : X \to Y$ possui uma inversa $g : Y \to X$. Com efeito, sendo uma correspondência biunívoca, f é, portanto, sobrejetiva e injetiva. Da sobrejetividade, segue que para todo $y \in Y$ existe algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Por sua vez, da injetividade de f, resulta que este x é único. Isto nos permite definir $g : Y \Rightarrow X$, como uma função que associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Facilmente, vemos que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Logo, f possui uma inversa.

Exemplo. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ e $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definidas respectivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sqrt{y}$. Então $f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ para todo $y \geq 0$, enquanto $g(f(x)) = g(x^2)\sqrt{x^2} = x$ apenas para $x \geq 0$, sendo que no caso de x negativo, $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = -x$. Por esse motivo, estas funções não são inversas uma da outra. No entanto, se restringirmos o domínio de f e o contradomínio de g aos números reais não negativos, estas funções serão inversas. Podemos, então, definir as funções $F : [0, +\infty) \Rightarrow [0, +\infty)$ e $G : [0, +\infty) \Rightarrow [0, +\infty)$ dadas por $F(x) = x^2$ e $G(y) = \sqrt{y}$ e observar que

$$F(G(y)) = y \qquad \text{e} \qquad G(F(y)) = x,$$

para quaisquer $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

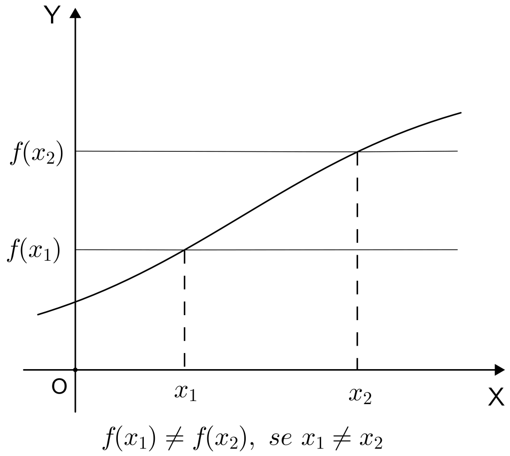
Na verdade, a maioria da funções $y = f(x)$ quando definidas num domínio apropriado possuem função inversa. Isto significa dizer que podemos tanto determinar um valor único de y para cada x no domínio de f, como também um único x para cada y possível. Quando $g : Y \Rightarrow X$ é a inversa da função $f : X \Rightarrow Y$, usualmente denota-se

$g = f^{-1}$. Desta maneira, a função inversa estabelece uma relação definida por

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

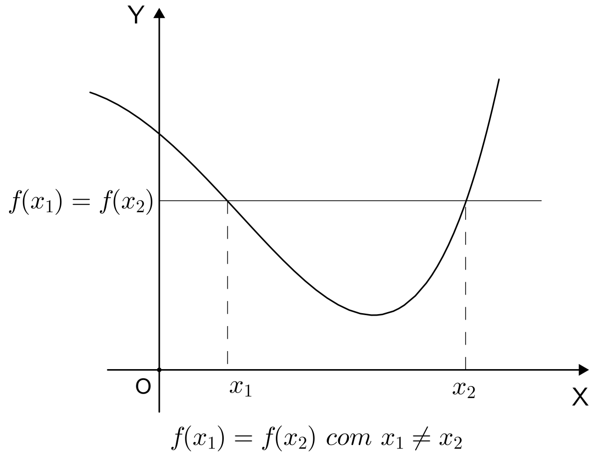
Prosseguiremos em nossas considerações atentando ao fato que uma função continua $f : A \to \mathbb{R}$ definida num intervalo $A \subset \mathbb{R}$ só é injetiva quando é crescente ou decrescente. Geometricamente, uma função é injetora se, e somente se, o gráfico de $y = f(x)$ é cortado, no máximo uma única vez por qualquer reta horizontal.

Figura 15 – Função injetiva.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Figura 16 – Função não injetiva.



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Segue-se, portanto, que uma função $f : A \to B$, onde A e B são dois intervalos, possui inversa se ela for crescente ou decrescente e ainda sobrejetiva.

Graficamente, o fato de $f : X \to Y$ e $f^{-1} : Y \to X$ serem inversas implica que seus gráficos são simétricos em torno da reta $y = x$. Com efeito, sendo G e G' os gráficos de f e f' respectivamente, então

$$(x, y) \in G \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow (y, x) \in G'.$$

APÊNDICE C – UMA PROPRIEDADE EXCLUSIVA DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

O nosso objetivo aqui é demonstrar que a propriedade de possuir derivada proporcional a si mesma é exclusiva das funções do tipo $f(x) = b \cdot e^{kx}$. O próximo teorema nos garante esse resultado.

Teorema *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I, com $f'(x) = k \cdot f(x)$. Se, para um certo $x_0 \in I$, tem-se $f(x_0) = b$ então $f(x) = b \cdot e^{k(x-x_0)}$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. Seja $\varphi(x) = f(x) \cdot e^{-k(x-x_0)}$. Então, pela regra do produto para derivadas, tem-se que

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= f'(x) \cdot e^{-k(x-x_0)} + f(x) \cdot [e^{-k(x-x_0)}]' = kf(x)e^{-k(x-x_0)} + f(x)[-ke^{-k(x-x_0)}] \\
&= kf(x)e^{-k(x-x_0)} - kf(x)e^{-k(x-x_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Como $\varphi'(x) = 0$ para todo $x \in I$, então φ é constante. Uma vez que $\varphi(x_0) = b$, tem-se $\varphi(x) = b$ para todo $x \in I$ e, portanto, $f(x) = \varphi(x)/e^{-k(x-x_0)} = b \cdot e^{k(x-x_0)}$. $\square$

APÊNDICE D – FUNÇÃO CONTÍNUA

Assim como feito na seção 2.3, em muitas situações o limite de uma função f quando x tende a a pode ser calculado avaliando-se $f(a)$. Quando isso ocorre, dizemos que a função f é contínua em a. Vamos enunciar a seguinte definição.

Definição. *Uma função f é contínua em um número a se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

A definição acima requer implicitamente três condições para a continuidade de f em a:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f);
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe (isto é, f deve ser definida em um intervalo aberto que contenha a);
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Pode-se combinar funções contínuas f e g para obter novas funções contínuas, através da composta. O teorema abaixo valida esta afirmação.

Teorema. *Seja f uma função contínua em b e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, então $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$, isto é,*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Este teorema afirma que um símbolo de limite pode ser movido por meio de um símbolo de uma função se ela for contínua e se o limite existir. De outra maneira, a ordem desses dois símbolos pode ser invertida.

Vamos ainda enunciar um outro teorema que será útil numa demonstração posterior.

Teorema do Valor Médio. *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo (a, b). Então existe pelo menos um c em (a, b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

De posse desse teorema podemos mostrar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0$. Como lnx é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^+$, pelo Teorema do Valor Médio, segue-se que para todo $x > 1$ existe c tal que $1 < c < x$ e

$$\ln x - \ln 1 = (\ln)'(c) \cdot (x - 1)$$

Uma vez que $\ln 1 = 0$ e $(\ln)'(c) = 1/c$, a igualdade acima nos dá $\ln x = (x-1)/c$. Desta, vê-se facilmente que $\ln x < x$ para todo $x \geq 1$. Note-se que $\ln x = \ln(\sqrt{x})^2 = 2\ln\sqrt{x}$, de onde obtemos

$$0 < \ln x < \sqrt{x} \Rightarrow 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

para todo $x > 1$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} 2/\sqrt{x} = 0$, obtemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$