Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

# Interseção de Números Geométricos Via Equação de Pell

Ronaldo Pires da Silva

Catalão

2015

sibi
sistema de bibliotecas ufg

UFG

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:** **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

**2. Identificação do Trabalho**

| | |
|---|---|
| Autor (a): | Ronaldo Pires da Silva |
| E-mail: | ronaldopires@yahoo.com |
| Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não | |
| Vínculo empregatício do autor | |
| Agência de fomento: | Sigla: |
| País: | UF: CNPJ: |
| Título: | Interseção de Números Geométricos Via Equação de Pell |
| Palavras-chave: | Números Geométricos. Frações Contínuas. Equação de Pell. Interseção. |
| Título em outra língua: | Intersection of Polygonal Numbers Via Pell's Equation |
| Palavras-chave em outra língua: | Polygonal Numbers. Continued Fractions. Pell's Equation. Intersection. |
| Área de concentração: | Matemática do Ensino Básico |
| Data defesa: (dd/mm/aaaa) | 06/07/2015 |
| Programa de Pós-Graduação: | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| Orientador (a): | Thiago Porto de Almeida Freitas |
| E-mail: | tpportto@gmail.com |
| Co-orientador(a):* | |
| E-mail: | |

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento [ x ] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Ronaldo Pires da Silva

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 28 / 07 / 2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

**Ronaldo Pires da Silva**

# Interseção de Números Geométricos Via Equação de Pell

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas

Catalão

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Silva, Ronaldo Pires da
Interseção de Números Geométricos Via Equação de Pell [manuscrito] / Ronaldo Pires da Silva. - 2015.
XCVIII, 98 f.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Números Geométricos. 2. Frações Contínuas. 3. Equação de Pell. 4. Interseção. I. Freitas, Thiago Porto de Almeida, orient. II. Título.

# Ronaldo Pires da Silva

# "Interseção de Números Geométricos Via Equação de Pell"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 06 de Julho de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

**Prof. Dr. Thiago Porto de Almeida Freitas**
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

**Profa. Dra. Ana Paula de Araújo Chaves**
Instituto de Matemática e Estatística/UFG

**Profa. Dra. Luciana Lima Ventura**
Instituto Federal Brasília – Câmpus Planaltina

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Ronaldo Pires da Silva** graduou-se em Ciência da Computação pela Universidade Federal de Uberlândia.

*Dedico este trabalho aos meus pais que com grandes esforços contribuiram para a minha formação escolar.*

# Agradecimentos

À Deus por mostrar o caminho quando as dificuldades pareciam insuperáveis.

Ao professor Dr. Thiago Porto por aceitar ser meu orientador e por me fornecer valiosos ensinamentos durante a realização do trabalho.

Aos professores e tutores que sempre mantiveram espaços abertos para a superação de todas as dúvidas.

Aos amigos mestrandos que muito contribuiram para tornar esta experiência inesquecível.

Gostaria, finalmente, de agradecer aos meus pais, Antônia e Raimundo, ao meu irmão Natal, e vários amigos, pela paciência e resignação durante o tempo em que minhas atenções estiveram redirecionadas para mais este projeto.

Obrigado!

## Resumo

Nosso trabalho teve como objetivo central estudar a interseção de sequências de inteiros, denominadas números geométricos, através da equação de Pell. Neste contexto, a resolução de duas equações serão tratadas: $x^2 - Dy^2 = 1$ e $x^2 - Dy^2 = N$ com $|N| > 1$. Para a primeira utilizamos importantes resultados presentes na teoria das frações contínuas. Para última, utilizamos o método de resolução delineado na literatura. Além disso, proposições referentes a interseção de números geométricos para alguns casos particulares são apresentadas e demonstradas. Também a proposição do caso geral é apresentada e demonstrada. Por fim, realizamos a resolução de algumas equações de Pell para determinarmos a interseção de alguns números geométricos.



**Palavras-chave**

Números Geométricos. Frações Contínuas. Equação de Pell. Interseção.

## Abstract

Our work had as main objective to study the intersection of integer sequences, denominated polygonal numbers, through Pell's equation. In this context, the solution of two equations will be treated: $x^2 - Dy^2 = 1$ and $x^2 - Dy^2 = N$, $|N| > 1$. For the first one we have used results from the theory of continued fractions. For the last one, we have used the method of solution delineated in literature. Besides, propositions referring to the intersection of polygonal numbers for some particular cases are presented and demonstrated. Also, the proposition of the general case is presented and demonstrated. Finally, we have performed the solution of some of Pell's equations in order to determine the intersection of some polygonal numbers.



**Keywords**

Polygonal Numbers. Continued Fractions. Pell's Equation. Intersection.

# Lista de Figuras


1 Alguns números geométricos. . . . . 13
2 Torre de Hanoi. . . . . 16
3 Reprodução de um casal de coelhos. . . . . 17
4 Números triangulares. . . . . 55
5 Números quadrangulares. . . . . 55
6 Números pentagonais. . . . . 56
7 Número geométrico pentagonal. . . . . 58

# Sumário

**Introdução** **13**

**1 Conceitos Preliminares** **15**

1.1 Sequências Recorrentes . . . . . 15

1.2 Frações Contínuas Simples . . . . . 18

1.2.1 Frações Contínuas Simples Finitas . . . . . 19

1.2.2 Frações Contínuas Simples Infinitas . . . . . 21

**2 Equação de Pell** **39**

2.1 Equação de Pell com $N = 1$ . . . . . 39

2.2 Equação de Pell com $|N| > 1$ . . . . . 49

2.2.1 Método de Busca Exaustiva . . . . . 49

**3 Números Geométricos** **55**

3.1 Definição dos Números Geométricos . . . . . 55

3.2 Fórmula Fechada para $p_r^n$ . . . . . 58

3.3 Interseção de Números Geométricos . . . . . 60

3.4 Resolução de Algumas Interseções . . . . . 74

# Introdução

Os números geométricos são sequências infinitas de inteiros muito especiais. Isto porque, cada elemento da sequência pode ser desenhado no plano através de polígonos regulares. A figura 1 nos mostra alguns exemplares desses números.

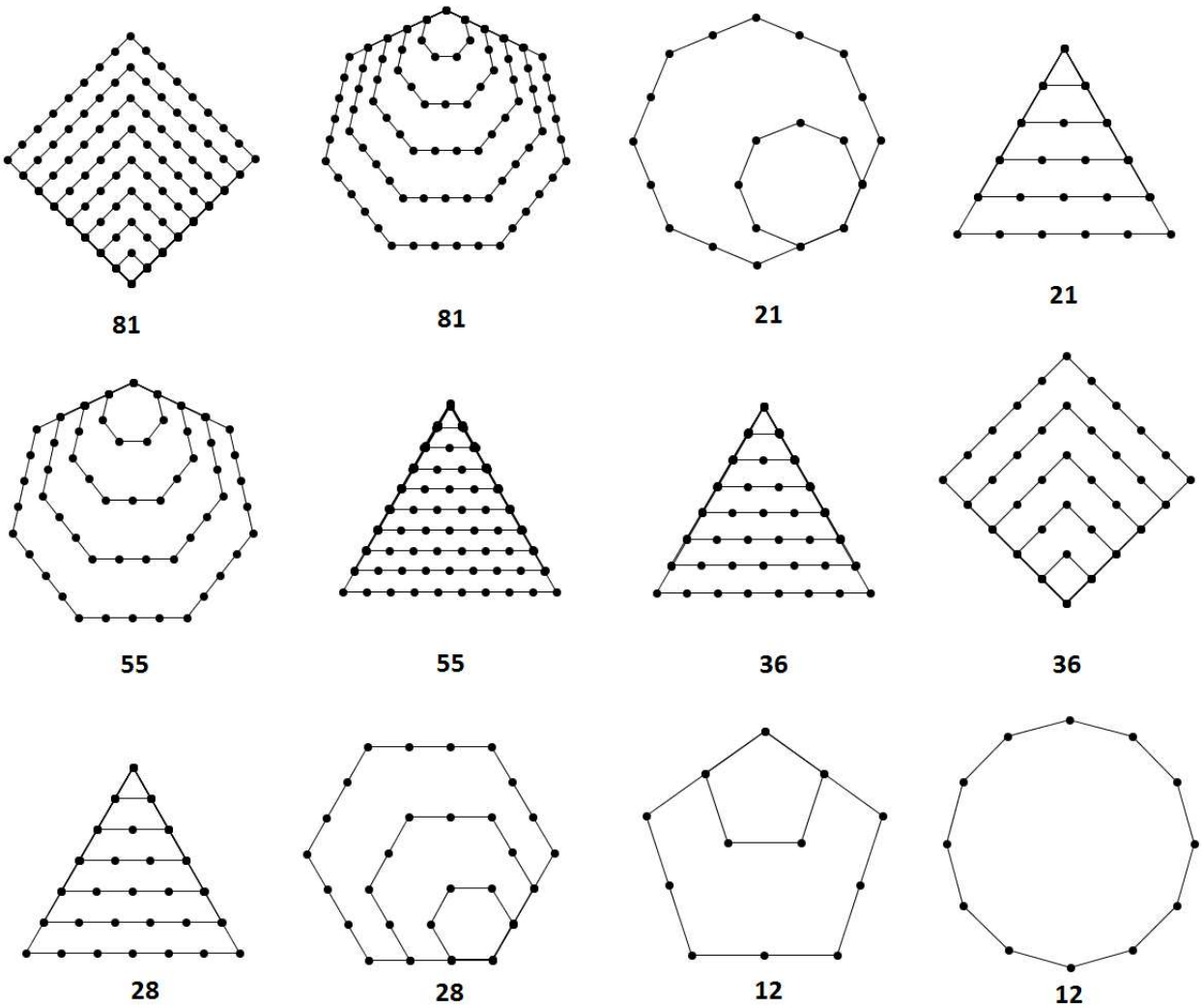


Figura 1: Alguns números geométricos.

O estudo dos números geométricos remontam a antiguidade. Segundo [10] componentes da escola pitagórica já eram familiarizados com a fórmula dos números geométricos triangulares e números geométricos quadrangulares.

Segundo [7] em 175 A.C, Hypsicles dá uma definição de número geométrico. Cerca de 100 D.C. a 130 D.C. Theon de Smyrna publica um livro com 32 capítulos tratando do tema. Nicomachus por volta de 100 D.C. também trata tais números. Em 1621 C. G. Bachet escreveu dois suplementos obordando as propriedades destes números. Eis algumas propriedades descritas:

$$\begin{aligned} p_m^{k+r} &= p_m^k + p_m^r + kr(m-2) \\ 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (p_3^n)^2 \\ n^3 + 6p_3^n + 1 &= (n+1)^3 \end{aligned}$$

Os números geométricos são tratados em todos os artigos [1], [5], [8], [9], [11], [12] de data mais recente.

Por outro lado, a figura 1 nos mostra o objeto de estudo do nosso trabalho em relação aos números geométricos. Estamos interessados na interseção de números geométricos, ou seja, quais números geométricos estão em duas sequências ao mesmo tempo. Na figura 1, 81 é um número quadrangular e heptagonal, 21 é um número octogonal e triangular, 55 é um número heptagonal e triangular, 36 é um número triangular e quadrangular, 28 é número triangular e hexagonal e 12 é um número pentagonal e dodecagonal.

Mas para abordarmos a interseção de números geométricos seremos levados a estudar importantes tópicos da Teoria de Números, e assim, nosso trabalho tem as seguintes partes.

No capítulo 1 abordaremos as sequências recorrentes e a frações contínuas finitas e infinitas. As propriedades mais importantes das frações contínuas necessárias ao trabalho serão exploradas.

No capítulo 2 apresentaremos vários resultados que nos permitirão encontrar as soluções da equação de Pell através das frações contínuas. Em seguida apresentaremos um método, dentre vários outros possíveis, para resolução da equação de Pell generalizada.

No capítulo 3 definiremos os números geométricos utilizando as progressões aritméticas, deduziremos uma fórmula fechada para $p_r^n$, apresentaremos a interseção dos números geométricos e resolveremos algumas interseções utilizando as equações de Pell associadas.

# 1 Conceitos Preliminares

O objetivo deste capítulo é começar o estudo das ferramentas matemáticas necessárias para o desenvolvimento do nosso trabalho. Iniciaremos com as sequências recorrentes, e logo em seguida trataremos das frações contínuas.

## 1.1 Sequências Recorrentes

Muitos problemas da matemática podem ser modelados através de sequências recorrentes. Perceberemos mais adiante a importância destas sequências. De acordo com [17] uma sequência recorrente de termos $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... é uma sequência na qual um termo é escrito em função dos termos anteriores. Contudo, podemos ter situações onde dependamos de apenas alguns dos termos anteriores. E que esta dependência tenha determinada característica.

**Definição 1.** *Dizemos que uma sequência recorrente é linear de ordem $k$ quando existem constantes $c_1$, $c_2$, ..., $c_k$ tais que:*

$$x_{n+k} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \ldots + c_k x_n, \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

*A sequência recorrente fica unicamente determinada quando $k$ condições iniciais $x_0 = C_0$, $x_1 = C_1$, ... , $x_{k-1} = C_{k-1}$ são dadas.*

**Exemplo 1.** *A sequência $a_0$, $a_0 + d$, $a_0 + 2d$, $a_0 + 3d$,...,$a_0 + (n-2)d$, $a_0 + (n-1)d$, $a_0 + nd$, ... é uma progressão aritmética de termo inicial $a_0$ e razão $d$. Desta definição a diferença entre um termo e o seu antecessor é igual a razão $d$. Logo,*

$$a_{n+2} - a_{n+1} = d$$

*e*

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

*Igualando as duas equações obtemos que*

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n.$$

*A última relação nos mostra que uma progressão aritmética de termo inicial $a_0$ e razão $d$, é uma sequência recorrente de ordem 2.*

**Exemplo 2.** *A Torre de Hanoi é um jogo que consiste dos seguintes objetivos:*

1. *Mover os discos da posição $A$ para a posição $C$, utilizando $B$ como elemento intermediário*
2. *Um disco maior não pode ser colocado sobre outro menor.*
3. *Deseja-se realizar a operação com o menor número de movimentos possíveis.*

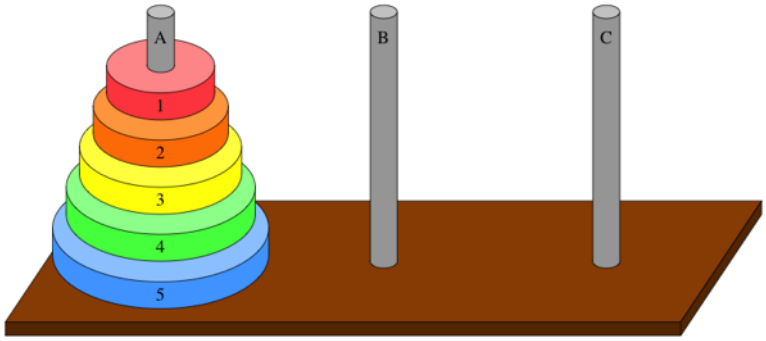


Figura 2: Torre de Hanoi.

Fonte: `https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/towers-of-hanoi/a/towers-of-hanoi`

*Seja $T_{n+1}$ a quantidade de movimentos necessários para movimentar $n+1$ discos de uma posição para outra. Para resolver o problema adotamos a seguinte estratégia. Movemos $n$ discos ($T_n$ movimentos) de $A$ para $B$ utilizando $C$ como elemento intermediário. Restará um disco maior em $A$ que deverá ser movido para $C$ ( 1 movimento). Após isto, movemos os $n$ discos ($T_n$ movimentos) de $B$ para $C$ utilizando $A$ como elemento intermediário. Assim, para movermos os $n$ discos de $A$ para $C$, a quantidade necessária de movimentos será:*

$$T_{n+1} = T_n + 1 + T_n \quad \Rightarrow \quad T_{n+1} = 2T_n + 1,$$

*ou seja, $T_{n+1}$ é sequência recorrente de ordem 1.*

**Exemplo 3.** *Um granjeiro iniciou uma criação de coelhos com um casal. Deseja-se saber quantos pares de coelhos podem ser produzidos a partir do casal em um ano, se levarmos em consideração que a cada mês um casal gera um novo par, o qual se torna produtivo a partir do segundo mês.*

*Se denotarmos por $F_n$ o número de casais de coelhos no mês $n$, temos que:*

$$F_1 = F_2 = 1,$$

*pois o primeiro casal leva dois meses para se tornar produtivo. O primeiro par de descendentes aparece no terceiro mês, e assim $F_3 = 2$. Pode-se perceber que a cada mês o número de casais de coelhos será igual a soma dos dois meses anteriores. Logo,*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

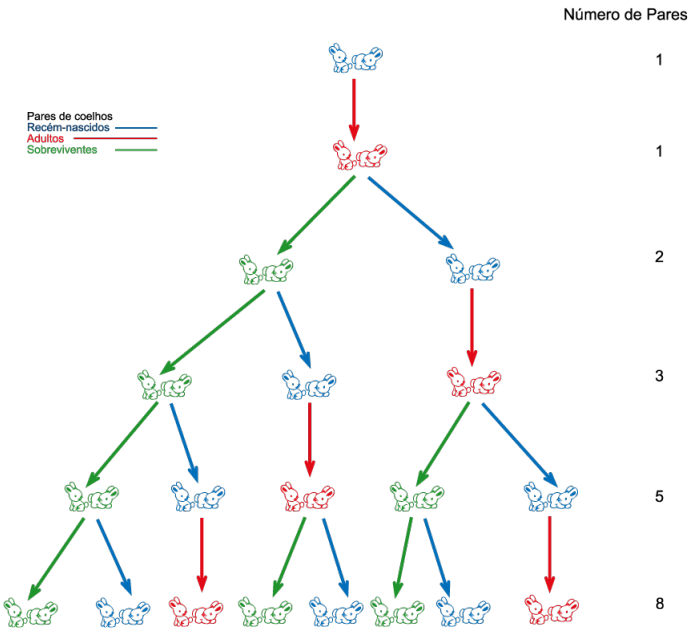


Figura 3: Reprodução de um casal de coelhos.

Fonte: `http://infinito-matematica.co/curiosidades/`

*assim, $F_{n+2}$ é uma sequência recorrente de ordem 2.*

Em muitos casos desejamos encontrar uma fórmula fechada para o $n-$ésimo termo da sequência recorrente. No nosso trabalho estaremos interresados nas sequências recorrentes de ordem 1 da seguinte forma $a_{n+1} = a_n + f(n)$, onde $f(n)$ é uma função linear em $n$. De acordo com [4], a fórmula fechada pode ser obtida

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + f(1) \\ a_3 &= a_2 + f(2) \\ a_4 &= a_3 + f(3) \\ \vdots &\ \vdots \ \ \vdots \\ a_n &= a_{n-1} + f(n-1). \end{aligned}$$

Somando membro a membro todas as equações anteriores e efetuando os cancelamentos possíveis. Desta ação, obtemos:

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \tag{1}$$

## 1.2 Frações Contínuas Simples

Compreenderemos nesta seção as frações contínuas simples. Saberemos como são classificadas e quais propriedades elas possuem. Nosso objetivo primordial será mostrar como as frações contínuas simples podem ser utilizadas para aproximarmos números irracionais através de números racionais.

**Definição 2.** *Uma fração contínua simples é uma expressão da forma*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

*onde $a_i \in \mathbb{Z}$ e $a_{i+1} > 0$ para $i \geq 0$. Os números $a_1$,$a_2$,$a_3$, ... são os quocientes parciais da fração contínua simples. Outra forma de representar a fração contínua simples é $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.*

### 1.2.1 Frações Contínuas Simples Finitas

**Definição 3.** *Uma fração contínua simples finita é uma expressão da forma*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

*onde* $a_i \in \mathbb{Z}$ *e* $a_{i+1} > 0$ *para* $i \geq 0$. *Os números* $a_1$,$a_2$,$a_3$, $\ldots$ , $a_n$ *são os quocientes parciais da fração contínua simples finita. Outra forma de representar a fração contínua simples finita é* $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$.

**Exemplo 4.** *A fração contínua de* $\frac{41}{11}$.

$$\frac{41}{11} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = [3; 1, 2, 1, 2].$$

Existe um relacionamento estreito entre o algoritmo de Euclides e o cálculo da fração contínua de um número racional. Isto fica nítido através do próximo exemplo.

**Exemplo 5.** *Observamos a aplicação do algoritmo de Euclides aos números* 41 *e* 11

$$\begin{aligned} 41 &= 3 \times 11 + 8 \\ 11 &= 1 \times 8 + 3 \\ 8 &= 2 \times 3 + 2 \\ 3 &= 1 \times 2 + 1 \\ 2 &= 2 \times 1 + 0. \end{aligned}$$

*Percebemos que os quocientes da sequência do algoritmo, em ordem, formam os termos da fração contínua simples do número racional* $\frac{41}{11}$.

**Teorema 1.** *Qualquer número racional* $\frac{a}{b}$ *com* $b > 0$ *pode ser escrito como uma fração contínua simples finita.*

**Demonstração:** *Aplicando o algoritmo de Euclides aos números* $a$ *e* $b$ *obtemos:*

$$\begin{aligned}
a &= ba_0 + r_1 & 0 \leq r_1 < b \\
b &= r_1 a_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 a_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\
r_2 &= r_3 a_3 + r_4 & 0 \leq r_4 < r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} a_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n a_n.
\end{aligned}$$

*Todos os números* $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ *são positivos. Consequentemente todos os* $a_1$,$a_2$, $a_3$,..., $a_n$ *serão positivos também. Além disso, entre* $0$ *e* $b$ *existe um número finito de números inteiros, consequentemente existem um número finito de* $r_i$ *satisfazendo* $0 \leq r_i < b$. *Podemos reescrever as equações do algoritmo da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= a_0 + \frac{r_1}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} \\
\frac{b}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \\
\frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{r_3}{r_2} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \\
&\vdots \\
\frac{r_{n-1}}{r_n} &= a_n.
\end{aligned}$$

*Substituindo* $\frac{b}{r_1}$ *na primeira equação obtemos:*

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

*Agora substituindo* $\frac{r_1}{r_2}$ *nesta última equação obtemos:*

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}.$$

*E continuando este processo obteremos:*

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

■

### 1.2.2 Frações Contínuas Simples Infinitas

Agora vamos tomar um número irracional qualquer $\alpha$. Utilizando a função menor inteiro $\lfloor\ \rfloor$ podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$\alpha = \lfloor\alpha\rfloor + \beta_0 = a_0 + \beta_0 = a_0 + \cfrac{1}{\frac{1}{\beta_0}}, \tag{2}$$

$0 < \beta_0 < 1$ é um número irracional, e pondo $\alpha_1 = \frac{1}{\beta_0}$ temos que $\alpha_1 > 1$, e agora podemos escrever:

$$\alpha_1 = \lfloor\alpha_1\rfloor + \beta_1 = a_1 + \beta_1 = a_1 + \cfrac{1}{\frac{1}{\beta_1}}. \tag{3}$$

Podemos substituir (3) em (2):

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\frac{1}{\beta_1}}}, \tag{4}$$

$0 < \beta_1 < 1$ é um número irracional, e pondo $\alpha_2 = \dfrac{1}{\beta_1}$ temos que $\alpha_2 > 1$, e agora podemos escrever:

$$\alpha_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor + \beta_2 = a_2 + \beta_2 = a_2 + \frac{1}{\frac{1}{\beta_2}}. \tag{5}$$

Agora vamos substituir (5) em (4):

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\frac{1}{\beta_2}}}}.$$

O processo delineado anteriormente continuará indefinidamente, pois a parada implicaria que $\alpha$ seria um número racional, e assim obteremos $0 < \beta_i < 1$ e $\alpha_{i+1} = \dfrac{1}{\beta i} > 1$, de tal modo que a fração contína de $\alpha$ será:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Outra notação para esta fração contínua será $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$.

Deste procedimento podemos depreender o seguinte conjunto de recorrências para calcular a fração contínua simples de um número irracional $\alpha$. Estas recorrências são apresentadas em [18].

$$\begin{cases} \alpha_0 & = & \alpha \\ a_n & = & \lfloor \alpha_n \rfloor \\ \alpha_{n+1} & = & \dfrac{1}{\beta_n} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n} = \dfrac{1}{\alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor} \end{cases}$$

**Definição 4.** *Uma fração contínua simples infinita $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ é dita periódica se existem inteiros $r$, $k$ e $n$ tais que $a_k = a_{k+n}$ para todos os inteiros positivos*

*$k \geq r$. O menor $n$ com esta propriedade é denominado o período da fração contínua. A fração contínua será representada por:*

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{r-1}, \overline{a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_{r+n-1}}].$$

*Quando tomamos $r = 0$, nós chamamos a fração contínua de puramente periódica, e escrevemos:*

$$\alpha = [\overline{a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}}].$$

**Exemplo 6.** *Fração contínua infinita periódica e puramente periódica*

$$[1; \overline{1, 2}] = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] = \sqrt{3}$$

$$[\overline{1};] = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

**Definição 5.** *Para $1 \leq k \leq n$, o $k-$ésimo convergente, $C_k$ , da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ é a fração contínua:*

$$C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k].$$

*Também definimos $C_0 = a_0$.*

**Exemplo 7.** *Os convergentes de $\frac{41}{11}$ são:*

$$\begin{aligned}
C_0 &= [3] \\
C_1 &= [3; 1] \\
C_2 &= [3; 1, 2] \\
C_3 &= [3; 1, 2, 1] \\
C_4 &= [3; 1, 2, 1, 2]
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular o valor do convergente $C_3$:

$$C_3 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}.$$

Percebemos que o cálculo de $C_3$ mostra-se bastante trabalhoso. Para facilitar este trabalho podemos definir fórmulas recursivas para calcular separadamente o numerador

e o denominador do convergente. Neste cálculo de $C_3$ definimos o numerador por $p_3$ e o denominador por $q_3$

**Teorema 2.** *Seja $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ uma fração contínua simples. Definindo as seguintes recorrências*

$$\begin{array}{lcll} p_0 = a_0 & & q_0 = 1 & \\ p_1 = a_1 a_0 + 1 & & q_1 = a_1 & \\ p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} & e & q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} & (2 \leq k \leq n) \end{array}$$

*Então, $C_k = \dfrac{p_k}{q_k}$, para $0 \leq k \leq n$.*

**Demonstração:** *Temos incialmente que*

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{1} &&= \frac{p_0}{q_0}, \\ C_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} &&= \frac{p_1}{q_1}. \end{aligned}$$

*Ou seja, o resultado é válido para $C_0$ e $C_1$. Vamos supor que o resultado é válido para $m \geq 1$, ou seja $C_m = \dfrac{p_m}{q_m}$. Queremos mostrar que ele permanece válido para $m+1$. Observamos que:*

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, a_{m+1}] = \left[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right].$$

*Aplicando a hipótese ao lado direito da equação temos:*

$$\frac{\left(a_m + \dfrac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \dfrac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}}.$$

*Portanto,*

$$\begin{aligned} C_{m+1} &= \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2} + \dfrac{p_{m-1}}{a_{m+1}}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2} + \dfrac{q_{m-1}}{a_{m+1}}} \\ &= \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}} \\ &= \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}. \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.** *Sejam $p_k$ e $q_k$ como definidos no Teorema 2. Para todo $k \geq 1$, temos:*

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}.$$

**Demonstração:** *Provaremos a asserção utilizando indução em $k$. Para $k = 1$ temos*

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1)1 - a_0 a_1 = 1 = (-1)^{1-1}.$$

*Portanto, o resultado é válido para $k = 1$. Suponhamos que o resultado seja válido para $k = m$, isto é,*

$$p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = (-1)^{m-1}.$$

*Queremos provar que é válido para $k = m + 1$. Pelo Teorema 2 temos que $p_{m+1} = a_{m+1} p_m + p_{m-1}$ e $q_{m+1} = a_{m+1} q_m + q_{m-1}$. Então*

$$\begin{aligned}
p_{m+1} q_m - p_m q_{m+1} &= (a_{m+1} p_m + p_{m-1}) q_m - p_m (a_{m+1} q_m + q_{m-1}) \\
&= a_{m+1} p_m q_m - a_{m+1} p_m q_m + p_{m-1} q_m - p_m q_{m-1} \\
&= p_{m-1} q_m - p_m q_{m-1} \\
&= (-1)(p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m) \\
&\overset{H.I}{=} (-1)(-1)^{m-1} \\
&= (-1)^m.
\end{aligned}$$

*Portanto, o resultado vale para $k = m + 1$.*

■

**Corolário 1.** *Para $1 \leq k \leq n$, $p_k$ e $q_k$ são relativamente primos.*

**Demonstração:** *Se tomarmos $d = mdc(p_k, q_k)$ teremos $d | (p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)$, ou seja, $d | (-1)^{k-1}$. Como $d > 0$ teremos obrigatoriamente $d = 1$.* ■

**Teorema 4.** *Seja $q_k$ como definido no Teorema 2. Então $\{q_k\}_k$ é crescente para $k \geq 2$.*

**Demonstração:** *Pela definição de $q_k$ no Teorema 2 temos:*

$$q_k = \overbrace{a_k}^{\geq 1} q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + \overbrace{q_{k-2}}^{\geq 1} \geq q_{k-1} + 1 > q_{k-1}.$$

■

No próximo teorema mostraremos uma importante propriedade dos convergentes $C_k$.

**Teorema 5.** *a) Os convergentes de índices pares formam uma sequência crescente* $C_0 < C_2 < C_4 < C_6 < \ldots$

*b) Os convergentes de índices ímpares formam uma sequência descrescente* $C_1 > C_3 > C_5 > C_7 \ldots$

*c) O relacionamento entres os convergentes de índices pares e de índices ímpares é o seguinte:* $C_0 < C_2 < C_4 < C_6 < \ldots < C_7 < C_5 < C_3 < C_1$

**Demonstração:** *Se tomarmos* $C_{k+2} - C_k = C_{k+2} - C_k$ *e somarmos* $-C_{k+1} + C_{k+1}$ *ao segundo membro o resultado não fica alterado.*

$$C_{k+2} - C_k = C_{k+2} - C_{k+1} + C_{k+1} - C_k$$

*Pela definição de convergentes temos* $C_{k+2} = \dfrac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$, $C_{k+1} = \dfrac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ *e* $C_k = \dfrac{p_k}{q_k}$. *Com isto, a equação torna-se:*

$$C_{k+2} - C_k = \left(\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right) + \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k}\right).$$

*Manipulando as frações da equação obtemos:*

$$C_{k+2} - C_k = \left(\frac{p_{k+2}q_{k+1} - p_{k+1}q_{k+2}}{q_{k+1}q_{k+2}}\right) + \left(\frac{p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1}}{q_k q_{k+1}}\right).$$

*Utilizando o Teorema 3 obtemos as seguintes identidades* $p_{k+2}q_{k+1} - p_{k+1}q_{k+2} = (-1)^{k+1}$ *e* $p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k$. *Com isto temos:*

$$\begin{aligned}
C_{k+2} - C_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k+1}q_{k+2}} + \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}} \\
C_{k+2} - C_k &= \frac{(-1)(-1)^k q_k + (-1)^k q_{k+2}}{q_k q_{k+1} q_{k+2}} \\
C_{k+2} - C_k &= \frac{(-1)^k (q_{k+2} - q_k)}{q_k q_{k+1} q_{k+2}}.
\end{aligned}$$

*Pelo Teorema 4 podemos concluir que* $q_{k+2} - q_k > 0$ *e* $q_k q_{k+1} q_{k+2} > 0$, *e assim o sinal da equação depende apenas de* $(-1)^k$.

*Assim quando $k = 2j - 1$ for ímpar teremos $C_{2j+1} - C_{2j-1} < 0$, ou seja, $C_{2j+1} < C_{2j-1}$. Por outro lado, quando $k = 2j$ for par teremos $C_{2j+2} - C_{2j} > 0$, ou seja, $C_{2j+2} > C_{2j}$.*

*Por outro lado, se tomarmos $C_{k+1} - C_k$ teremos:*

$$\begin{aligned} C_{k+1} - C_k &= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \\ C_{k+1} - C_k &= \frac{p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1}}{q_k q_{k+1}}. \end{aligned}$$

*Utilizado o Teorema 3 obtemos a seguinte identidade $p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1} = (-1)^k$. E assim, a equação torna-se:*

$$C_{k+1} - C_k = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}.$$

*Ou seja,*

$$C_{2j} < C_{2j-1}.$$

*Utilizando $2j + 2$ e $2j + 1$ na última equação temos:*

$$C_{2j+2} < C_{2j+1}.$$

*Com $C_{2j} < C_{2j+2}$ , $C_{2j+2} < C_{2j+1}$ e $C_{2j+1} < C_{2j-1}$ concluimos*

$$C_{2j} < C_{2j+2} < C_{2j+1} < C_{2j-1}.$$

*Logo, todos convergentes de índices pares serão menores que todos os convergentes de índices ímpares.* ■

**Definição 6.** *Sejam $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$ os convergentes do número irracional*

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}].$$

*Com ajuda do Teorema 2 podemos reescrever $\alpha$ da seguinte forma:*

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

**Teorema 6.** *Dado um número irracional $\alpha$ e suponha que*

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$$

*é a sua fração contínua. Então temos que $\alpha = \lim_{n\to\infty} C_n$.*

**Demonstração:** *Vamos calcular $|\alpha - C_n|$. Pela Definição 6 podemos escrever $\alpha = \dfrac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$, e assim temos:*

$$\begin{aligned}
|\alpha - C_n| &= \left|\frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \\
|\alpha - C_n| &= \left|\frac{q_n\alpha_{n+1}p_n + q_np_{n-1} - q_n\alpha_{n+1}p_n - p_nq_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right| \\
|\alpha - C_n| &= \left|\frac{(-1)(p_nq_{n-1} - q_np_{n-1})}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right|.
\end{aligned}$$

*Utilizando o Teorema 3 podemos obter a seguinte identidade $p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} = (-1)^{n-1}$. E assim, a equação torna-se:*

$$\begin{aligned}
|\alpha - C_n| &= \left|\frac{(-1)(-1)^{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right| \\
|\alpha - C_n| &= \left|\frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right|.
\end{aligned}$$

*Como $a_{n+1} = \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor$ teremos $\alpha_{n+1} > a_{n+1}$. E desta forma podemos concluir que $\dfrac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} < \dfrac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1})}$. E ainda, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, e como $q_{n+1} \geq q_n$ teremos $\dfrac{1}{q_nq_{n+1}} \leq \dfrac{1}{q_n^2}$. Logo, temos:*

$$|\alpha - C_n| = \left|\frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}\right| < \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1})} \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

*Pelo Teorema 4 sabemos que $q_n$ cresce indefinidamente. Com isto temos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n^2} = 0,$$

*donde*

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\alpha - C_n| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n^2} = 0,$$

*e assim,* $\lim_{n\to\infty} |\alpha - C_n| = 0$, *ou seja,* $\alpha = \lim_{n\to\infty} C_n$.

■

Quando calculamos a fração contínua de um número irracional $\alpha$ estamos buscando aproximações racionais para este número. O próximo teorema nos mostra que o convergente $C_n$ da fração contínua é a melhor aproximação de $\alpha$.

**Teorema 7.** *Seja* $\dfrac{p_n}{q_n}$ *o* $n-$*ésimo convergente da fracão contínua simples infinita do número irracional* $\alpha$. *Se* $a$ *e* $b$ *são inteiros, com* $1 \leq b < q_{n+1}$, *então*

$$|q_n\alpha - p_n| \leq |b\alpha - a|.$$

**Demonstração:** *Vamos considerar o sistema de equações:*

$$\begin{aligned} p_n\xi + \beta p_{n+1} &= a \\ q_n\xi + \beta q_{n+1} &= b. \end{aligned}$$

*Multiplicando a primeira equação por* $q_n$ *e subtraindo a segunda equação multiplicada por* $p_n$ *teremos:*

$$\begin{aligned} q_np_n\xi + \beta q_np_{n+1} - q_np_n\xi - \beta q_{n+1}p_n &= q_na - p_nb \\ \beta(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n) &= q_na - p_nb. \end{aligned}$$

*Mas pelo Teorema 3,* $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$ *e assim a equação torna-se*

$$\beta = (-1)^n(q_na - p_nb).$$

*Agora multiplicando* $q_n\xi + \beta q_{n+1} = b$ *por* $p_{n+1}$ *e subtraindo* $p_n\xi + \beta p_{n+1} = a$ *multiplicada por* $q_{n+1}$ *teremos:*

$$\begin{aligned} q_np_{n+1}\xi + \beta q_{n+1}p_{n+1} - q_{n+1}p_n\xi - \beta q_{n+1}p_{n+1} &= p_{n+1}b - q_{n+1}a \\ \xi(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n) &= p_{n+1}b - q_{n+1}a. \end{aligned}$$

*Mas pelo Teorema 3,* $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$ *e assim a equação torna-se*

$$\xi \;=\; (-1)^n(p_{n+1}b - q_{n+1}a).$$

*Notamos que* $\xi \neq 0$, *pois se* $\xi = 0$ *teríamos* $aq_{n+1} = bp_{n+1}$ *e como* $mdc(q_{n+1}, p_{n+1}) = 1$ *pelo Corolário 1, implicaria* $q_{n+1}|b$, *ou seja* $b \geq q_{n+1}$, *contrariando a hipótese.*

*Por outro lado, se* $\beta = 0$ *teremos* $a = p_n\xi$ *e* $b = q_n\xi$, *e substituindo estes valores em* $|b\alpha - a|$ *temos:*

$$|b\alpha - a| = |q_n\xi\alpha - p_n\xi| = |\xi||q_n\alpha - p_n| \geq |q_n\alpha - p_n|.$$

*Se* $\beta \neq 0$ *temos que* $\beta$ *e* $\xi$ *tem sinais opostos. Se* $\beta < 0$ *com a equação* $q_n\xi = b - q_{n+1}\beta$ *temos* $\xi > 0$, *pois* $b > 0$, $q_n > 0$, $q_{n+1} > 0$ *e* $-q_{n+1}\beta > 0$. *Por outro lado, se* $\beta > 0$ *e com* $b < q_{n+1}$, *teremos* $b < q_{n+1}\beta$, *e por consequência* $b - q_{n+1}\beta < 0$, *e desta forma* $q_n\xi < 0$ *e* $\xi < 0$.

*Agora relembramos que* $\alpha$ *está entre os convergentes* $\dfrac{p_n}{q_n}$ *e* $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ *e assim* $q_n\alpha - p_n$ *e* $q_{n+1}\alpha - p_{n+1}$ *terão sinais opostos.*

*Neste caso* $\xi(q_n\alpha - p_n)$ *e* $\beta(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})$ *terão o mesmo sinal. Desta forma*

$$\begin{aligned} |b\alpha - a| &= |(q_n\xi + q_{n+1}\beta)\alpha - (p_n\xi + p_{n+1}\beta)| \\ &= |\xi(q_n\alpha - p_n) + \beta(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})| \\ &= |\xi||(q_n\alpha - p_n)| + |\beta||(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})|. \end{aligned}$$

*Como* $|\beta||(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})| > 0$ *podemos concluir que*

$$|\xi||(q_n\alpha - p_n)| + |\beta||(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})| > |\beta||(q_{n+1}\alpha - p_{n+1})|.$$

*E assim, a equação torna-se:*

$$|b\alpha - a| \;\geq\; |\xi||(q_n\alpha - p_n)|.$$

*E como* $\xi \neq 0$ *teremos:*

$$|b\alpha - a| \;\geq\; |(q_n\alpha - p_n)|.$$

■

O Teorema 7 nos permitirá provar outro importante teorema.

**Teorema 8.** *Seja $\alpha$ um número irracional arbitrário. Se o número racional $\frac{p}{q}$, onde $q \geq 1$ e $mdc(p,q) = 1$, satisfaz*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

*Então $\frac{p}{q}$ é um dos convergentes $\frac{p_n}{q_n}$ da fração contínua simples de $\alpha$.*

**Demonstração:** *Vamos supor que $\frac{p}{q}$ não é convergente de $\alpha$. Pelo Teorema 4 $q_n$ forma uma sequência crescente, e desta forma é possível encontrar $n$ tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Utilizando o Teorema 7 temos:*

$$|q_n\alpha - p_n| \leq |q\alpha - p|.$$

*Mas colocando $q$ em evidência em $|q\alpha - p|$ temos $q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$. Por hipótese $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, e assim $q\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q}$. Com esta desigualdade podemos escrever:*

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{2q}.$$

*Dividindo ambos os membros da desigualdade por $q_n$ temos:*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2qq_n}.$$

*Como supomos $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ teremos $qp_n - pq_n$ um número inteiro com $1 \leq |qp_n - pq_n|$. Dividindo ambos os membros desta desigualdade por $qq_n$ temos:*

$$\frac{1}{qq_n} \leq \left|\frac{qp_n - pq_n}{qq_n}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha + \alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

*Vamos utilizar a desigualdade triangular com $\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha + \alpha - \frac{p}{q}\right|$. E assim, temos:*

$$\frac{1}{qq_n} \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| + \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

*Utilizando a hipótese e a desigualdade de* $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right|$ *concluimos:*

$$\frac{1}{qq_n} < \frac{1}{2qq_n} + \frac{1}{2q^2}.$$

*Ou seja,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{qq_n} &< \frac{1}{2qq_n} + \frac{1}{2q^2} \\
\frac{2}{2qq_n} - \frac{1}{2qq_n} &< \frac{1}{2q^2} \\
\frac{1}{2qq_n} &< \frac{1}{2q^2} \\
\frac{2q^2}{2q} &< q_n \\
q &< q_n.
\end{aligned}$$

*O que é uma contradição.*

■

O Teorema 8 será fundamental para provarmos que o convergente $\frac{p_n}{q_n}$ é solução da equação de Pell.

Vamos tratar agora com uma definição muito importante para o nosso trabalho.

**Definição 7.** *Um número irracional* $\alpha \in \mathbb{R}$ *é denominado irracional quadrático quando é uma raiz de uma equação da forma* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, onde* $a, b, c \in \mathbb{Z}$*, e* $a \neq 0$*.*

Desta forma teremos $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ com $a$,$b$ e $c$ inteiros e $a \neq 0$. Mas pela fórmula quadrática:

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sem perda de generalidade vamos supor que $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $\alpha' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . Já que $\alpha \in \mathbb{R}$ teremos $b^2 - 4ac > 0$ e $b^2 - 4ac$ será livre de

quadrados. Se tomarmos $P = -b$ , $D = b^2 - 4ac$ e $Q = 2a$ os irracionais $\alpha$ e $\alpha'$ assumirão a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{P + \sqrt{D}}{Q} \\ \alpha' &= \frac{P - \sqrt{D}}{Q}. \end{aligned}$$

Claramente $Q|(D - P^2)$, pois $(D - P^2) = b^2 - 4ac - b^2 = -4ac$ e $Q = 2a$. O irracional $\alpha'$ é o conjugado do irracional $\alpha$.

**Teorema 9.** *Seja* $\alpha = \dfrac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$ *um irracional quadrático, onde* $D > 0$ *é livre de quadrados. Ainda* $Q_0 \neq 0$ *é um inteiro,* $P_0 \in \mathbb{Z}$ *e* $Q_0|(D - P_0^2)$. *Recursivamente definimos para* $n \geq 0$*:*

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{(P_n + \sqrt{D})}{Q_n} \\ a_n &= \lfloor \alpha_n \rfloor \\ P_{n+1} &= a_n Q_n - P_n \\ Q_{n+1} &= \frac{(D - P_{n+1}^2)}{Q_n}. \end{aligned}$$

*Então* $P_n$ *e* $Q_n$ *são inteiros, com* $Q_n \neq 0$*, para todo* $n$ *e* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

**Demonstração:** *Procederemos por indução em* $n$. *Para* $n = 0$ *temos que* $P_0$, $Q_0$ *são inteiros e* $Q_0|(D - P_0^2)$. *Suponha que* $P_0$,$Q_0$, $P_1$,$Q_1$,...,$P_n$, $Q_n$ *são inteiros e* $Q_0|(D - P_0^2)$, $Q_1|(D - P_1^2)$, ..., $Q_n|(D - P_n^2)$. *Queremos mostrar que o resultado continua válido para* $n+1$*, ou seja,* $P_{n+1}$ *e* $Q_{n+1}$ *são inteiros e* $Q_{n+1}|(D - P_{n+1}^2)$. *Como* $a_n$, $Q_n$ *e* $P_n$ *são inteiros por hipótese, também será* $P_{n+1} = a_n Q_n - P_n$. *Além disso, temos:*

$$Q_{n+1} = \frac{D - P_{n+1}^2}{Q_n} = \frac{D - (a_n Q_n - P_n)^2}{Q_n} = \frac{D - P_n^2}{Q_n} + 2a_n P_n - a_n^2 Q_n.$$

*Como* $D - P_n^2 = Q_n Q_{n-1}$ *a equação torna-se:*

$$Q_{n+1} = \frac{Q_n Q_{n-1}}{Q_n} + 2a_n P_n - a_n^2 Q_n = Q_{n-1} + 2a_n P_n - a_n^2 Q_n.$$

*E assim, $Q_{n+1}$ é um inteiro, pois $Q_n$,$a_n$,$Q_{n-1}$ e $P_n$ são inteiros por hipótese. Como temos $D - P_{n+1}^2 \neq 0$, pois $D$ é livre de quadrados, teremos também $Q_{n+1} \neq 0$. Além disso, como $Q_nQ_{n+1} = D - P_{n+1}^2$ concluimos também que $Q_{n+1}|(D - P_{n+1}^2)$.*

*Agora resta mostrar que as recorrências calculam a fração contínua simples de $\dfrac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$. Para isto vamos tomar:*

$$\begin{aligned} \alpha_n - a_n &= \frac{P_n + \sqrt{D}}{Q_n} - a_n \\ \alpha_n - a_n &= \frac{\sqrt{D} - (a_nQ_n - P_n)}{Q_n}. \end{aligned}$$

*Como $P_{n+1} = a_nQ_n - P_n$ a equação torna-se:*

$$\alpha_n - a_n = \frac{\sqrt{D} - P_{n+1}}{Q_n}.$$

*Multiplicando o segundo membro da equação por $\dfrac{(\sqrt{D} + P_{n+1})}{(\sqrt{D} + P_{n+1})}$:*

$$\begin{aligned} \alpha_n - a_n &= \frac{(\sqrt{D} - P_{n+1})}{Q_n}\frac{(\sqrt{D} + P_{n+1})}{(\sqrt{D} + P_{n+1})} \\ \alpha_n - a_n &= \frac{D - P_{n+1}^2}{Q_n(\sqrt{D} + P_{n+1})}. \end{aligned}$$

*Mas $Q_{n+1}Q_n = D - P_{n+1}^2$, e desta forma:*

$$\begin{aligned} \alpha_n - a_n &= \frac{Q_{n+1}Q_n}{Q_n(\sqrt{D} + P_{n+1})} \\ \alpha_n - a_n &= \frac{Q_{n+1}}{(\sqrt{D} + P_{n+1})}. \end{aligned}$$

*Tomando o inverso temos:*

$$\frac{1}{\alpha_n - a_n} = \frac{P_{n+1} + \sqrt{D}}{Q_{n+1}} = \alpha_{n+1}.$$

■

**Corolário 2.** *Quando $Q_0 = 1$ e $P_0 = 0$ temos o caso especial de $\alpha = \sqrt{D}$.*

**Lema 1.** *Seja $\beta$ um irracional quadrático, e seja*

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}$$

*onde a,b,c e d são inteiros, com c e d ambos não iguais a zero. Então $\alpha$ é um irracional quadrático se e somente se $ad - bc \neq 0$.*

**Demonstração:** *Se racionalizarmos o lado direito de $\alpha$ podemos obter um número racional ou irracional. Desta forma, devemos mostrar que $\alpha$ é irracional se e somente se $ad - bc \neq 0$.*

*Caso $c \neq 0$ podemos escrever $\alpha$ da seguinte maneira:*

$$\alpha = \frac{c}{c}\left[\frac{(a\beta + b)}{(c\beta + d)}\right].$$

*Somando $\left[\frac{(ad - ad)}{c(c\beta + d)}\right]$ ao segundo membro da equação não iremos alterar o resultado, pois $ad - ad = 0$.*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{c}{c}\left[\frac{(a\beta + b)}{(c\beta + d)}\right] + \left[\frac{(ad - ad)}{c(c\beta + d)}\right] \\
\alpha &= \frac{ac\beta + bc + ad - ad}{c(c\beta + d)} \\
\alpha &= \frac{a(c\beta + d) + bc - ad}{c(c\beta + d)} \\
\alpha &= \frac{a(c\beta + d)}{c(c\beta + d)} + \frac{bc - ad}{c(c\beta + d)} \\
\alpha &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(c\beta + d)}.
\end{aligned}$$

*Desta maneira $\alpha$ será racional se e somente se $bc - ad = 0$.*

*Caso $c = 0$ e $d \neq 0$ podemos escrever $\alpha$ da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{a\beta + b}{d} \\
\alpha &= \frac{a\beta}{d} + \frac{b}{d}.
\end{aligned}$$

*E assim, $\alpha$ será racional se e somente se $\dfrac{a}{d} = 0$, e como $d \neq 0$ isto equivale a $ad = 0$, e por termos $c = 0$ teremos também $bc = 0$. Com isto teremos $\alpha$ racional se e somente $bc - ad = 0$.*

■

**Teorema 10.** *Um número irracional $\alpha$ tem expansão em fração contínua simples infinita periódica se e somente se $\alpha$ é número irracional quadrático.*

**Desmonstração:** *Suponha que $\alpha$ tem expansão em fração contínua simples infinita periódica. Vamos considerar dois casos: o caso puramente periódico e periódico. Caso $\alpha$ tenha expansão puramente periódica teremos $\alpha = [\overline{a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}}]$. Desta forma*

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha],$$

*e pela Definição 6 podemos escrever $\alpha$ da seguinte maneira:*

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha + q_{n-2}}.$$

*Rearranjando a equação temos*

$$\begin{aligned} \alpha(q_{n-1}\alpha + q_{n-2}) &= p_{n-1}\alpha + p_{n-2} \\ q_{n-1}\alpha^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})\alpha - p_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

*E assim, $\alpha$ satisfaz uma equação de 2 grau com coeficientes inteiros, pois $q_{n-1}$,$q_{n-2}$,$p_{n-1}$ e $p_{n-2}$ são números inteiros e $q_{n-1} \neq 0$. E desta forma, $\alpha$ é um irracional quadrático.*

*Agora vamos supor que $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, \ldots, a_{k+n-1}}]$ para $k > 0$. Seja $\beta = [\overline{a_k; a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}}]$, $\beta$ será irracional quadrático pelo caso anterior. Assim, com $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{k-1}, \beta]$ e com a Definição 6 podemos escrever $\alpha$ da seguinte forma:*

$$\alpha = \frac{\beta p_{k-1} + p_{k-2}}{\beta q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

*Mas pelo Lema 1 devemos ter $p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1} \neq 0$ para que $\alpha$ seja também um irracional quadrático, uma vez que $\beta$ é irracional quadrático. Mas pelo Teorema 3*

$p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1} = (-1)^{k-2}$, *ou seja,* $p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1} \neq 0$. *Disto, já podemos concluir que* $\alpha$ *também é irracional quadrático.*

*Agora suponha* $\alpha$ *um irracional quadrático*

$$\alpha = \frac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$$

*onde* $P_0$, $Q_0$ *e* $D$ *são inteiros,* $D$ *livre de quadrados, e* $Q_0|(D - P_0^2)$. *Então com* $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n]$ *e com Definição 6 podemos escrever:*

$$\alpha = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

*Tomando o conjugado de* $\alpha$ *temos:*

$$\alpha' = \frac{\alpha'_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha'_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

*Isolando* $\alpha'_n$ *na equação, encontramos*

$$\alpha'_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}\alpha'}{-p_{n-1} + q_{n-1}\alpha'} = \frac{q_{n-2}\left(\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \alpha'\right)}{-q_{n-1}\left(\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha'\right)}.$$

*Pelo Teorema 6 temos* $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} C_n$. *E assim:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \alpha'\right)}{\left(\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha'\right)} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} C_{n-2} - \alpha'\right)}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} C_{n-1} - \alpha'\right)} = \frac{(\alpha - \alpha')}{(\alpha - \alpha')} = 1.$$

*Com este limite e a equação de* $\alpha'_n$ *podemos concluir que* $\alpha'_n < 0$ *para todos* $n \geq N$, *onde* $N$ *é um inteiro. Já que* $\alpha_n > 1$ *para todo* $n \geq 1$, *temos*

$$\alpha_n - \alpha'_n = \frac{P_n + \sqrt{D}}{Q_n} - \frac{P_n - \sqrt{D}}{Q_n} = \frac{2\sqrt{D}}{Q_n} > 0$$

*para* $n \geq N$. *Ora,* $\alpha_n - \alpha'_n > 0$ *implica* $Q_n > 0$. *Vamos utilizar a definição de* $\alpha_n$ *e* $\alpha'_n$ *para obtermos uma desigualdade para* $P_n$. *Com* $0 < \alpha_n = \dfrac{P_n + \sqrt{D}}{Q_n}$ *teremos*

*$P_n + \sqrt{D} > 0$, donde tiramos $P_n > -\sqrt{D}$, ou seja, $-\sqrt{D} < P_n$. Por outro lado, com $0 > \alpha'_n = \dfrac{P_n - \sqrt{D}}{Q_n}$ teremos $P_n - \sqrt{D} < 0$, donde tiramos $P_n < \sqrt{D}$. Destas duas desigualdades envolvendo $P_n$ concluimos*

$$-\sqrt{D} < P_n < \sqrt{D},$$

*para $n \geq N$. Agora com a definição de $Q_n$*

$$Q_n \leq Q_n Q_{n+1} = D - P_{n+1}^2 \leq D,$$

*teremos $0 < Q_n < D$ para $n \geq N$. Sendo $D$ um número fixo, e com as desigualdades para $Q_n$ e $P_n$ só poderemos ter um número finito de possibilidades para $(P_n, Q_n)$. E desta forma, deve existir $i, j \in \mathbb{Z}$ tal que $P_i = P_j$ e $Q_i = Q_j$ com $i < j$. E assim,*

$$a_i = a_j, a_{i+1} = a_{j+1}, a_{i+2} = a_{j+2}, \ldots$$

*de tal modo que*

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \overline{a_k, \ldots, a_{k+t-1}}].$$

■

# 2 Equação de Pell

Objetivo deste capítulo é buscar métodos para solucionar a equação de Pell e a equação de Pell generalizada. A equação de Pell é uma equação diofantina em duas variáveis. O nome equação de Pell foi cunhado por Leonard Euler, pois acreditou que o matemático John Pell tinha descoberto as soluções da equação. No século XI o matemático indiano Bhaskara já apresentava solução para equação $x^2 - 61y^2 = 1$. Fermat propunha desafio a Wallis e Brouncker com as equações $x^2 - 151y^2 = 1$ e $x^2 - 313y^2 = 1$, bem como dizia possuir solucões gerais das mesmas. Mas foi Langrage que propôs um método baseado em frações contínuas para resolver tal equação.

**Definição 8.** *A equação diofantina*

$$x^2 - Dy^2 = N,$$

*onde $D$ e $N$ são inteiros, e $D$ é livre de quadrados, é denominada equação de Pell.*

Caso especial ocorre na equação quando tomamos $N = 1$.

A resolução da equação com $N = 1$ tem vasto tratamento na literatura com a abordagem de frações contínuas [2], [3], [13], [14], [15], [16].

A partir deste momento, apresentaremos com mais detalhes o modo de determinar as soluções da equação de Pell através das frações contínuas.

## 2.1 Equação de Pell com $N = 1$

**Teorema 11.** *Seja $p$ e $q$ uma solução positiva da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, então $\frac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua simples de $\sqrt{D}$.*

**Demonstração:** *Por hipótese temos $p^2 - Dq^2 = 1$. Fatorando podemos escrever $(p - q\sqrt{D})(p + q\sqrt{D}) = 1$. Como $p$ e $q$ são positivos, então $(p + q\sqrt{D})$ é positivo. E desta forma, para o produto $(p - q\sqrt{D})(p + q\sqrt{D})$ ser positivo teremos necessariamente $(p - q\sqrt{D}) > 0$. Mas isto implica $p > q\sqrt{D}$. Disto já podemos concluir*

$$\frac{p}{q} - \sqrt{D} \;=\; \frac{1}{q(p + q\sqrt{D})}.$$

*Com $p > q\sqrt{D}$ podemos concluir que $q(p + q\sqrt{D}) > q(q\sqrt{D} + q\sqrt{D})$, ou seja, $\frac{1}{q(p + q\sqrt{D})} < \frac{1}{q(q\sqrt{D} + q\sqrt{D})} < \frac{\sqrt{D}}{q(q\sqrt{D} + q\sqrt{D})}$. Com esta desigualdade e $\frac{p}{q} - \sqrt{D}$ temos:*

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} - \sqrt{D} &< \frac{\sqrt{D}}{2q^2\sqrt{D}} \\ \frac{p}{q} - \sqrt{D} &< \frac{1}{2q^2}.\end{aligned}$$

*Utilizando o Teorema 8 percebemos que* $\frac{p}{q}$ *é um convergente da fração contínua de* $\sqrt{D}$*. Não usamos o módulo, pois* $0 < \frac{p}{q} - \sqrt{D}$*.* ■

**Teorema 12.** *Se* $\frac{p_n}{q_n}$ *é um convergente da fração contínua simples de* $\sqrt{D}$*, então* $x = p_n$ *e* $y = q_n$ *é a solução de uma das equações*

$$x^2 - Dy^2 = k$$

*onde* $|k| < 1 + 2\sqrt{D}$*.*

**Demonstração:** *Se* $\frac{p_n}{q_n}$ *é um convergente de* $\sqrt{D}$ *então temos pela dedução apresentada no Teorema 6*

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

*Ou seja*

$$|p_n - q_n\sqrt{D}| < \frac{1}{q_n}.$$

*Por outro lado, somando* $q_n\sqrt{D} - q_n\sqrt{D}$ *em* $|p_n + q_n\sqrt{D}|$ *temos:*

$$|p_n + q_n\sqrt{D}| = |p_n - q_n\sqrt{D} + 2q_n\sqrt{D}|.$$

*Utilizando a desigualdade triangular podemos escrever:*

$$|p_n + q_n\sqrt{D}| \leq |p_n - q_n\sqrt{D}| + |2q_n\sqrt{D}|.$$

*Usando a desigualdade para* $|p_n - q_n\sqrt{D}|$ *podemos concluir:*

$$|p_n + q_n\sqrt{D}| \quad < \quad \frac{1}{q_n} + 2q_n\sqrt{D} < q_n + 2q_n\sqrt{D}.$$

*Tomando* $|p_n^2 - Dq_n^2|$ *temos:*

$$|p_n^2 - Dq_n^2| \quad = \quad |p_n - q_n\sqrt{D}||p_n + q_n\sqrt{D}|.$$

*Utilizando as desigualdades encontradas para* $|p_n - q_n\sqrt{D}|$ , $|p_n + q_n\sqrt{D}|$ *e equação podemos escrever*

$$|p_n^2 - Dq_n^2| < \frac{1}{q_n}(q_n + 2q_n\sqrt{D}) = 1 + 2\sqrt{D}$$

*que é o resultado desejado.* ■

**Exemplo 8.** *A fração contínua de* $\sqrt{221} = [14; \overline{1, 6, 2, 6, 1, 28}]$. *Tabulando os primeiros convergentes desta fração contínua temos:*

| $n$ | $\frac{p_n}{q_n}$ | $p_n^2 - 221q_n^2$ |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{14}{1}$ | $-25$ |
| 1 | $\frac{15}{1}$ | 4 |
| 2 | $\frac{104}{7}$ | $-13$ |
| 3 | $\frac{223}{15}$ | 4 |
| 4 | $\frac{1442}{97}$ | $-25$ |
| 5 | $\frac{1665}{112}$ | 1 |

*Portanto, a equação* $x^2 - 221y^2 = 1$ *tem solução* $p_5 = 1665$ *e* $q_5 = 112$. *Já equação* $x^2 - 221y^2 = -25$ *tem soluções* $(14, 1), (1442, 97)$.

Com a ajuda do Teorema 9 iremos provar o seguinte teorema:

**Teorema 13.** *Seja* $D > 0$ *e livre de quadrados, e* $\dfrac{p_n}{q_n}$ *o* $n-$*ésimo convergente do número irracional* $\sqrt{D}$. *Então*

$$p_n^2 - Dq_n^2 = (-1)^{n+1}Q_{n+1}$$

*onde* $Q_{n+1} > 0$ *e* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ .

**Demonstração:** *Se* $\sqrt{D} = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots, a_n, \alpha_{n+1}]$ *podemos pela Definição 6 escrever* $\sqrt{D}$ *da seguinte forma:*

$$\sqrt{D} = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

*Substituindo* $\alpha_{n+1} = \dfrac{P_{n+1} + \sqrt{D}}{Q_{n+1}}$ *na equação teremos:*

$$\sqrt{D} = \frac{\left(\dfrac{P_{n+1} + \sqrt{D}}{Q_{n+1}}\right) p_n + p_{n-1}}{\left(\dfrac{P_{n+1} + \sqrt{D}}{Q_{n+1}}\right) q_n + q_{n-1}}.$$

*Manipulando obtemos*

$$\sqrt{D} = \frac{p_nP_{n+1} + p_n\sqrt{D} + Q_{n+1}p_{n-1}}{q_nP_{n+1} + q_n\sqrt{D} + Q_{n+1}q_{n-1}}.$$

*Trabalhando para colocar os elementos com* $\sqrt{D}$ *no primeiro e demais elementos no segundo membro*

$$\sqrt{D}(q_nP_{n+1} + Q_{n+1}q_{n-1} - p_n) = p_nP_{n+1} + Q_{n+1}p_{n-1} - Dq_n.$$

*O lado esquerdo da equação é um número irracional e o lado direito um inteiro. Para que a igualdade seja válida devemos ter:*

$$\begin{aligned} q_nP_{n+1} + Q_{n+1}q_{n-1} - p_n &= 0 \\ p_nP_{n+1} + Q_{n+1}p_{n-1} - Dq_n &= 0. \end{aligned}$$

*Multiplicando a primeira equação por* $p_n$ *e somando a segunda equação multiplicada por* $-q_n$ *teremos:*

$$p_nq_nP_{n+1} + Q_{n+1}q_{n-1}p_n - p_n^2 - p_nq_nP_{n+1} - Q_{n+1}q_np_{n-1} + Dq_n^2 = 0$$

$$\begin{aligned} p_n^2 - Dq_n^2 &= Q_{n+1}q_{n-1}p_n - Q_{n+1}q_np_{n-1} \\ p_n^2 - Dq_n^2 &= Q_{n+1}(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n). \end{aligned}$$

*Pelo Teorema 3 temos a seguinte identidade* $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1}$, *e assim a última equação torna-se:*

$$\begin{aligned} p_n^2 - Dq_n^2 &= Q_{n+1}(-1)^{n-1} \\ p_n^2 - Dq_n^2 &= Q_{n+1}(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

*E a segunda equação é obtida da primera usando o seguinte fato* $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$.

*Para mostramos que* $Q_{n+1} > 0$ *usamos o fato que* $C_{2k} < \sqrt{D} < C_{2k+1}$ *para* $k \geq 0$. *Disto concluimos que* $p_k^2 - Dq_k^2 < 0$ *para* $k$ *par e* $p_k^2 - Dq_k^2 > 0$ *para* $k$ *ímpar. Assim,*

$$\frac{p_k^2 - Dq_k^2}{p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2} = \frac{(-1)^{k+1}Q_{k+1}}{(-1)^kQ_k} = -\frac{Q_{k+1}}{Q_k}.$$

*Mas na equação a fração do lado esquerdo será sempre negativa para* $k \geq 1$. *Isto implica que* $\dfrac{Q_{k+1}}{Q_k}$ *será sempre positivo. Temos* $Q_1 = D - a_0^2 > 0$, *e assim com um argumento indutivo pode-se mostrar* $Q_2 > 0$, $Q_3 > 0$, $\cdots$, $Q_{k+1} > 0$.

■

No próximo teorema utilizaremos a Definição 4.

**Teorema 14.** *Se* $n$ *é comprimento do período da expansão de* $\sqrt{D}$ *em fração contínua simples, então*

$$Q_j = 1$$

*se e somente se* $n|j$.

**Demonstração:** *Se temos* $\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n}]$, *teremos também* $a_1 = a_{n+1}$, $a_2 = a_{n+2}$, $a_3 = a_{n+3}$, $\ldots$. *Isto por sua vez implica que* $\alpha_1 = \alpha_{n+1}$, $\alpha_2 = \alpha_{n+2}$, $\alpha_3 = \alpha_{n+3}$, $\ldots$. *E de maneira mais geral:*

$$\alpha_{kn+1} = \alpha_1 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

*Com a última equação e as recorrências presentes no Teorema 9 podemos escrever:*

$$\frac{P_{kn+1}+\sqrt{D}}{Q_{kn+1}} = \frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1}.$$

*Manipulando para colocar os elementos dependentes de* $\sqrt{D}$ *no primeiro membro e os demais no segundo membro:*

$$\begin{aligned} Q_1(P_{kn+1}+\sqrt{D}) &= Q_{kn+1}(P_1+\sqrt{D}) \\ Q_1P_{kn+1}+Q_1\sqrt{D} &= Q_{kn+1}P_1+Q_{kn+1}\sqrt{D} \\ \sqrt{D}(Q_{kn+1}-Q_1) &= Q_1P_{kn+1}-Q_{kn+1}P_1. \end{aligned}$$

*Na última equação a irracionalidade de* $\sqrt{D}$ *implica que* $Q_{kn+1}-Q_1 = 0$ *e* $Q_1P_{kn+1}-Q_{kn+1}P_1 = 0$. *Ou* $Q_{kn+1} = Q_1$ *e* $P_{kn+1} = P_1$. *Pelo Corolário 2 temos que* $Q_0 = 1$. *Agora utilizando a recorrência* $Q_nQ_{n+1} = D - P_{n+1}^2$ *presente no Teorema 9 teremos:*

$$\begin{aligned} Q_0Q_1 &= D - P_1^2 \\ Q_{kn}Q_{kn+1} &= D - P_{kn+1}^2. \end{aligned}$$

*Mas como* $P_{kn+1} = P_1$ *teremos:*

$$Q_0Q_1 = Q_{kn}Q_{kn+1}.$$

*Agora utilizando o fato que* $Q_{kn+1} = Q_1$ *podemos concluir que* $Q_{kn} = Q_0 = 1$. *E desta forma,* $Q_j = 1$ *sempre que* $n|j$.

*Por outro lado, se* $Q_j = 1$ *para algum* $j$ *teremos:*

$$\alpha_j = \frac{P_j+\sqrt{D}}{Q_j} = \frac{P_j+\sqrt{D}}{1} = P_j+\sqrt{D}.$$

*Tomando a parte inteira de* $\alpha_j$ *temos:*

$$\lfloor \alpha_j \rfloor = \lfloor P_j+\sqrt{D} \rfloor = P_j + a_0.$$

*Utilizando* $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor}$ *temos que* $\alpha_{j+1}$ *é igual a:*

$$\alpha_{j+1} = \frac{1}{\alpha_j - \lfloor \alpha_j \rfloor}.$$

*Manipulando para colocar $\alpha_j$ no primeiro membro temos:*

$$\alpha_j = \lfloor \alpha_j \rfloor + \frac{1}{\alpha_{j+1}}.$$

*Substituindo $\lfloor \alpha_j \rfloor = P_j + a_0$ na equação temos:*

$$\alpha_j = P_j + a_0 + \frac{1}{\alpha_{j+1}}.$$

*Utilizando $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - \lfloor \alpha_n \rfloor}$ temos que $\alpha_1$ é igual a:*

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - \lfloor \alpha_0 \rfloor}.$$

*Manipulando para colocar o termo $\alpha_0$ no primeiro membro:*

$$\alpha_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor + \frac{1}{\alpha_1}.$$

*Como $\alpha_0 = \sqrt{D}$ e $\lfloor \alpha_0 \rfloor = a_0$ temos:*

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

*De $\alpha_j = P_j + \sqrt{D}$ e $\alpha_j = P_j + a_0 + \dfrac{1}{\alpha_{j+1}}$ podemos concluir, isolando $\alpha_j - P_j$ em ambas que:*

$$\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{\alpha_{j+1}}.$$

*Agora já podemos concluir:*

$$a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = a_0 + \frac{1}{\alpha_{j+1}}.$$

*E assim,* $\alpha_1 = \alpha_{j+1}$.

*Isto implica que* $\alpha_1 = \alpha_{j+1}$, $\alpha_2 = \alpha_{j+2}$, $\alpha_3 = \alpha_{j+3}$, .... *Por consequência,* $a_1 = a_{j+1}$, $a_2 = a_{j+2}$, $a_3 = a_{j+3}$, ... , *ou seja, um bloco de* $j$ *elementos irão se repitir na expansão de* $\sqrt{D}$ *e assim,* $n|j$.

■

**Definição 9.** *Seja* $(x_1, y_1)$ *uma solução positiva de* $x^2 - Dy^2 = 1$. *Dizemos que* $(x_1, y_1)$ *é uma solução fundamental se para qualquer outra solução positiva* $(x', y')$ *desta equação, temos que* $x_1 < x'$ *e* $y_1 < y'$. *A solução* $(x_1, y_1)$ *também poderá ser representada da seguinte forma* $x_1 + y_1\sqrt{D}$.

No próximo teorema veremos uma maneira de determinar todas as soluções positivas de $x^2 - Dy^2 = 1$ com a utilização dos convergentes $C_k$ da expansão em fração contínua simples de $\sqrt{D}$.

**Teorema 15.** *Seja* $\dfrac{p_k}{q_k}$ *os convergentes da expansão de* $\sqrt{D}$ *em fração contínua e seja* $n$ *o período da expansão*

*(a) Se* $n$ *é par, então todas as soluções positivas de* $x^2 - Dy^2 = 1$ *são dadas por*

$$x = p_{kn-1} \quad y = q_{kn-1} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

*(b) Se* $n$ *é ímpar, então todas as soluções positivas de* $x^2 - Dy^2 = 1$ *são dadas por*

$$x = p_{2kn-1} \quad y = q_{2kn-1} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

**Demonstração:** *Pelo Teorema 13 temos que:*

$$p_j^2 - Dq_j^2 = (-1)^{j+1} Q_{j+1}.$$

*Pelo Teorema (14) temos* $Q_{j+1} = 1$ *somente quando* $n|(j+1)$. *Assim,* $j+1$ *será um número par.*

*Quando* $n$ *é par teremos* $nk = (j+1)$, *onde* $k$ *pode ser par ou ímpar.*

*Quando* $n$ *é ímpar teremos necessariamente* $(j+1) = ln$, *onde* $l = 2k$, *ou seja* $(j+1) = 2kn$.

*De* $nk = (j+1)$ *tiramos* $j = nk - 1$, *para* $n$ *par.*
*De* $2nk = (j+1)$ *tiramos* $j = 2nk - 1$, *para* $n$ *ímpar.*

■

Pelo Teorema 15 as soluções positivas de $x^2 - Dy^2 = 1$ são definidas em termos das sequências $p_k$ e $q_k$. Sabendo que os $q_k$ formam uma sequência crescente como visto no Teorema 4, então temos duas opções para solução fundamental de $x^2 - Dy^2 = 1$ caso período da expansao de $\sqrt{D}$ seja par ou ímpar.

**Definição 10.** *A solução fundamental de* $x^2 - Dy^2 = 1$ *quando o período da expansão for ímpar será dado por:* $x_1 = p_{2n-1}$ *e* $y_1 = q_{2n-1}$.

**Definição 11.** *A solução fundamental de* $x^2 - Dy^2 = 1$ *quando o período da expansão for par será dado por:* $x_1 = p_{n-1}$ *e* $y_1 = q_{n-1}$.

Para calcularmos $q_k$ dependemos do cálculo de todos os $q_0$,$q_1$,$q_2$,..., $q_{k-1}$. Da mesma forma, para calcularmos $p_k$ dependemos do cálculo de todos os $p_0$,$p_1$,$p_2$,..., $p_{k-1}$. Assim, o cálculo das soluções de $x^2 - Dy^2 = 1$ como apresentado no Teorema 15 torna-se bastante trabalhoso. O objetivo do próximo teorema é mostrar uma maneira mais rápida de determinarmos todas as soluções positivas de $x^2 - Dy^2 = 1$, após termos encontrado a solução fundamental $(x_1, y_1)$.

**Teorema 16.** *Seja* $(x_1, y_1)$ *a solução fundamental de* $x^2 - Dy^2 = 1$. *Então, os inteiros* $(x_n, y_n)$ *definidos por*

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

*também são soluções positivas da equação.*

**Demonstração:** *De acordo com [18] utilizando expansão binomial pode-se mostrar que* $(x_1 - y_1\sqrt{D})^n = x_n - y_n\sqrt{D}$.

*Considerando este fato já podemos mostrar:*

$$x_n^2 - Dy_n^2 \;=\; (x_n + y_n\sqrt{D})(x_n - y_n\sqrt{D}).$$

*Com* $(x_1 + y_1\sqrt{D})^n = x_n + y_n\sqrt{D}$ *e* $(x_1 - y_1\sqrt{D})^n = x_n - y_n\sqrt{D}$, *temos:*

$$
\begin{aligned}
x_n^2 - Dy_n^2 &= (x_1 + y_1\sqrt{D})^n (x_1 - y_1\sqrt{D})^n \\
x_n^2 - Dy_n^2 &= [(x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})]^n \\
x_n^2 - Dy_n^2 &= [x_1^2 - Dy_1^2]^n \\
x_n^2 - Dy_n^2 &= (1)^n \\
x_n^2 - Dy_n^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

*Resta mostrar que todas as soluções positivas estão cobertas. Suponha uma solução positiva* $u + v\sqrt{D}$ *que não seja obtida por* $(x_1 + y_1\sqrt{D})^n$. *Do fato que* $x_1 + y_1\sqrt{D}$ *é menor solução positiva temos que* $x_1 + y_1\sqrt{D} > 1$, *e assim,* $(x_1 + y_1\sqrt{D})^n$ *cresce indefinidamente. Então existirá* $n$ *tal que:*

$$
\begin{aligned}
(x_1 + y_1\sqrt{D})^n &< u + v\sqrt{D} < (x_1 + y_1\sqrt{D})^{n+1} \\
(x_n + y_n\sqrt{D}) &< u + v\sqrt{D} < (x_n + y_n\sqrt{D})(x_1 + y_1\sqrt{D}).
\end{aligned}
$$

*Multiplicando a última desigualdade por* $(x_n - y_n\sqrt{D})$ *temos:*

$$(x_n^2 - Dy_n^2) < (x_n - y_n\sqrt{D})(u + v\sqrt{D}) < (x_n^2 - Dy_n^2)(x_1 + y_1\sqrt{D}).$$

*Do fato que* $x_n^2 - Dy_n^2 = 1$, *a desigualdade torna-se:*

$$1 < (x_n - y_n\sqrt{D})(u + v\sqrt{D}) < (x_1 + y_1\sqrt{D}).$$

*Desenvolvendo o produto* $(x_n - y_n\sqrt{D})(u + v\sqrt{D})$ *obtemos* $(x_n u - y_n vD) + (x_n v - y_n u)\sqrt{D}$ *que será solução da equação* $x^2 - Dy^2 = 1$. *Vamos definir* $g = x_n u - y_n vD$ *e* $h = (x_n v - y_n u)$. *Então por,* $1 < (x_n - y_n\sqrt{D})(u + v\sqrt{D}) < (x_1 + y_1\sqrt{D})$ *temos:*

$$1 < g + h\sqrt{D} < x_1 + y_1\sqrt{D}.$$

*Como* $g + h\sqrt{D}$ *é solução de* $x^2 - Dy^2 = 1$ *resta mostrar que tal solução é positiva. De* $(g + h\sqrt{D})(g - h\sqrt{D}) = 1$ *e* $1 < g + h\sqrt{D}$ *concluimos que* $0 < g - h\sqrt{D} < 1$. *Agora*

$$
\begin{aligned}
2g &= (g + h\sqrt{D}) + (g - h\sqrt{D}) > 1 + 0 > 0 \\
2h\sqrt{D} &= (g + h\sqrt{D}) - (g - h\sqrt{D}) > 1 - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

*Ou seja, encontramos uma solução $g + h\sqrt{D}$ menor que a solução mínima $x_1 + y_1\sqrt{D}$. E isto, é uma contradição.*

■

## 2.2 Equação de Pell com $|N| > 1$

No Teoreoma 12 já mostramos que os convergentes da fração contínua de $\sqrt{D}$ são soluções para algumas equações diofantinas da forma $x^2 - Dy^2 = k$, onde $|k| < 1+2\sqrt{D}$. Mostramos também pelo Teorema 15 que alguns convergentes da fração contínua de $\sqrt{D}$ darão a solução para equação $x^2 - Dy^2 = 1$.

Entretanto, dada uma equação da forma $x^2 - Dy^2 = N$, com $|N| > 1$, não temos como afirmar simplesmente utilizando o Teorema 12 que a equação terá solução.

Para encontrarmos as soluções da equação $x^2 - Dy^2 = N$, com $|N| > 1$, ou a impossibilidade delas, precisamos de métodos mais refinados. Segundo [20] existem pelo menos cinco métodos, a saber:

1. Método de busca exaustiva;
2. O algoritmo de Lagrange-Matthews-Mollin (LMM);
3. O sistema de reduções de Lagrange;
4. O método cíclico;
5. O uso de formas binárias quadráticas.

Aqui abordaremos o item 1. Para o item 1. seguiremos os passos de [16] e [19].

### 2.2.1 Método de Busca Exaustiva

**Teorema 17.** *Seja $(p, q)$ uma solução inteira da equação $x^2 - Dy^2 = 1$ e $(u, v)$ uma solução inteira da equação $x^2 - Dy^2 = N$ então $(pu + qvD, pv + qu)$ também é solução da equação $x^2 - Dy^2 = N$.*

**Demonstração:** *Temos por hipótese que $p^2 - Dq^2 = 1$ e $u^2 - Dv^2 = N$.*

*Agora,*

$$\begin{aligned}(pu+qvD)^2 - D(pv+qu)^2 &= p^2u^2 + 2puqvD + q^2v^2D^2 - D(p^2v^2 + 2pvqu + q^2u^2)\\ &= p^2u^2 + q^2v^2D^2 - Dp^2v^2 - Dq^2u^2\\ &= u^2(p^2 - Dq^2) - v^2D(p^2 - Dq^2).\end{aligned}$$

*Com a hipótese* $p^2 - Dq^2 = 1$ *conclui-se:*

$$(pu+qvD)^2 - D(pv+qu)^2 = u^2 - v^2D.$$

*Por fim, da última equação e a hipótese* $u^2 - Dv^2 = N$ *temos:*

$$(pu+qvD)^2 - D(pv+qu)^2 = N.$$

■

**Definição 12.** *Seja* $(p,q)$ *uma solução de* $x^2 - Dy^2 = 1$ *e* $(u,v)$ *uma solução de* $x^2 - Dy^2 = N$*. Dizemos que* $(pu+qvD, pv+qu)$ *é uma solução associada a solução* $(u,v)$*. Ou seja,* $(u,v)$ *gera uma classe de soluções de* $x^2 - Dy^2 = N$*.*

De acordo com [19], um critério para decidir se duas soluções $(u,v)$ e $(u',v')$ pertencem a mesma classe é descrito a seguir:

**Critério 1.** *Uma condição necessária e suficiente para duas soluções* $(u,v)$ *e* $(u',v')$ *de* $x^2 - Dy^2 = N$ *pertencerem a mesma classe é que os dois números*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} \qquad e \qquad \frac{vu' - uv'}{N}$$

*sejam inteiros.*

**Definição 13.** *Se a classe* $K$ *consiste das soluções* $u_i + v_i\sqrt{D}$ *para* $i = 1,2,3,\ldots$ *de* $x^2 - Dy^2 = N$*, também as soluções* $u_i - v_i\sqrt{D}$ *para* $i = 1,2,3,\ldots$ *de* $x^2 - Dy^2 = N$ *constituem uma classe* $\overline{K}$*. As classes* $K$ *e* $\overline{K}$ *são denominadas conjugadas. Em geral as classes conjugadas são distintas, mas quando elas são iguais elas são denominadas ambíguas.*

Dentre todas as soluções de uma classe $K$ pode-se definir uma *solução fundamental da classe.* De acordo com [21] existem maneiras diferentes para definir a solução fundamental da classe, em [6] temos uma, enquanto [19] temos outra, mas aqui utilizaremos a definição proposta por [19].

**Definição 14.** *Dentre todas as soluções $u + v\sqrt{D}$ numa dada classe $K$ escolhemos $u^* + v^*\sqrt{D}$ da seguinte forma. Seja $v^*$ o menor valor não negativo de $v$ que ocorre em $K$. Se $K$ não é ambígua $u^*$ também é determinado de forma única, de tal sorte que $-u^* + v^*\sqrt{D}$ irá pertencer a classe $\overline{K}$. Quando $K$ é ambígua prescrevemos $u^* \geq 0$. A solução $u^* + v^*\sqrt{D}$ assim escolhida é denominada solução fundamental da classe.*

**Teorema 18.** *Se $u + v\sqrt{D}$ é a solução fundamental da classe $K$ da equação*

$$x^2 - Dy^2 = N$$

*onde $N > 1$, e se $x_1 + y_1\sqrt{D}$ é a solução fundamental da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, nós temos as desigualdades*

$$0 \leq v \leq \frac{y_1}{\sqrt{2(x_1+1)}}\sqrt{N}$$

$$0 \leq |u| \leq \sqrt{\frac{(x_1+1)N}{2}}.$$

**Demonstração:** *Se as desigualdades para $v$ e $u$ são verdadeiras para a classe $K$, elas também serão para a classe conjugada $\overline{K}$. Desta forma, podemos supor que $u$ é um número positivo.*

*Por hipótese temos $u^2 - Dv^2 = N$ e $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$. Destas podemos concluir:*

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{u^2 - N}{D}} \\ y_1 &= \sqrt{\frac{x_1^2 - 1}{D}}. \end{aligned}$$

*Vamos considerar $ux_1 - Dvy_1$, e utilizando as duas equações anteriores temos:*

$$ux_1 - Dvy_1 = ux_1 - D\frac{\sqrt{u^2 - N}}{\sqrt{D}}\frac{\sqrt{x_1^2 - 1}}{\sqrt{D}} = ux_1 - \sqrt{(u^2 - N)(x_1^2 - 1)} > 0.$$

*Para justificar a desigualdade, podemos considerar que $(u^2 - N) < u^2$ e $(x_1^2 - 1) < x_1^2$. Quando extrairmos a raiz quadrada do produto teremos um valor menor que $ux_1$.*

*Por hipótese $x_1 + y_1\sqrt{D}$ é uma solução de $x^2 - Dy^2 = 1$. Com isto teremos também que $x_1 - y_1\sqrt{D}$ é uma solução desta equação. Utilizando $x_1 - y_1\sqrt{D}$ e o Teorema 17 podemos concluir que $ux_1 - Dvy_1 + (x_1v - y_1u)\sqrt{D}$ é uma solução de $x^2 - Dy^2 = N$. Tal*

*solução pertence a mesma classe de* $u+v\sqrt{D}$. *Já que* $u+v\sqrt{D}$ *é a solução fundamental da classe, e como* $ux_1 - Dvy_1$ *é positivo, nós devemos ter*

$$ux_1 - Dvy_1 \geq u.$$

*Manipulando para colocar os termos dependentes de* $u$ *no primeiro membro, e elevando ao quadrado obtemos*

$$u^2(x_1 - 1)^2 \quad \geq \quad D^2v^2y_1^2.$$

*Substituindo* $v = \sqrt{\dfrac{u^2 - N}{D}}$ *e* $y_1 = \sqrt{\dfrac{x_1^2 - 1}{D}}$ *na equação, e fazendo as simplificações necessárias teremos:*

$$\frac{(x_1 - 1)^2}{(x_1^2 - 1)} \quad \geq \quad \frac{(u^2 - N)}{u^2}.$$

*Manipulando para isolar* $u^2$ *no primeiro membro*

$$u^2 \quad \leq \quad \frac{N(x_1 + 1)}{2}.$$

*Extraindo a raiz quadrada:*

$$u \quad \leq \quad \sqrt{\frac{N(x_1 + 1)}{2}}.$$

*Por outro lado, substituindo* $D$ *obtido da equação* $x_1^2 - Dy_1^2 = 1$ *na equação* $u^2 - Dv^2 = N$ *temos:*

$$u^2 - N \quad = \quad \frac{x_1^2 - 1}{y_1^2}v^2.$$

*Utilizando a desigualdade obtida para* $u$ *podemos escrever:*

$$\frac{(x_1 + 1)N}{2} - N \geq u^2 - N.$$

*Substituindo* $u^2 - N = \dfrac{x_1^2 - 1}{y_1^2}v^2$ *na última desigualdade*

$$\frac{(x_1+1)N}{2} - N \geq \frac{(x_1^2-1)}{y_1^2}v^2.$$

*Manipulando a equação para colocar $v^2$ no primeiro membro e o demais elementos no segundo membro obtemos:*

$$v^2 \leq \frac{Ny_1^2}{2(x_1+1)}.$$

*Extraindo a raiz quadrada teremos:*

$$v \leq \frac{y_1\sqrt{N}}{\sqrt{2(x_1+1)}}.$$

■

**Teorema 19.** *Se $u + v\sqrt{D}$ é uma solução fundamental da classe $K$ da equação*

$$x^2 - Dy^2 = -N$$

*onde $N > 1$, e se $x_1 + y_1\sqrt{D}$ é a solução fundamental da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, nós temos as desigualdades*

$$0 < v \leq \frac{y_1}{\sqrt{2(x_1-1)}}\sqrt{N}$$

$$0 \leq |u| \leq \sqrt{\frac{(x_1-1)N}{2}}.$$

**Demonstração:** *Veja [19] para uma demonstração.*

■

**Exemplo 9.** *Encontrar a soluções fundamentais da equação $x^2 - 8y^2 = 41$. A equação $x^2 - 8y^2 = 1$ tem solução fundamental igual a $(3, 1)$. Assim, pelo Teorema 18 precisaremos buscar $v$ no intervalo:*

$$0 \leq v \leq 2.$$

*Portanto, devemos testar os valores de $v = 0{,}1$ ou $2$.*

| $v$ | $u = \pm\sqrt{41 + 8v^2}$ |
|---|---|
| 0 | $\sqrt{41 + 8 \times 0^2} = \sqrt{41} = \pm 6.40$ |
| 1 | $\sqrt{41 + 8 \times 1^2} = \sqrt{49} = \pm 7$ |
| 2 | $\sqrt{41 + 8 \times 2^2} = \sqrt{73} = \pm 8.54$ |

Tabela 1: Teste dos valores no intervalo para equação $x^2 - 8y^2 = 41$.

*Já mostramos no Teorema 17 que se $(p, q)$ é solução da equação $x^2 - Dy^2 = 1$ e $(u, v)$ é solução da equação $x^2 - Dy^2 = N$, podemos encontrar outra solução desta última equação fazendo $(p + q\sqrt{D})(u + v\sqrt{D})$. Sabemos ainda, pelo Teorema 16 que se $p + q\sqrt{D}$ é uma solução fundamental de $x^2 - Dy^2 = 1$ podemos encontrar infinitas soluções fazendo $x_n + y_n\sqrt{D} = (p + q\sqrt{D})^n$.*

*Resta verificar se as classes $(7, 1)$ e $(-7, 1)$ são ambíguas. Utilizando o Critério 1 temos:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{7 \times (-7) - 1 \times 1 \times 8}{41} = \frac{-49 - 8}{41} = \frac{-57}{41} = -1.39$$

*Portanto a condição não é satisfeita e as duas classes não são ambíguas.*

*Com as classes $(7, 1)$ e $(-7, 1)$, e com $(3, 1)$, a solução fundamental da equação $x^2 - 8y^2 = 1$, podemos enunciar todas as soluções da classe:*

$$(7 + \sqrt{8})(3 + \sqrt{8})^n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

*e*

$$(-7 + \sqrt{8})(3 + \sqrt{8})^n \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

# 3 Números Geométricos

Os objetivos deste capítulo são: definir os números geométricos utilizando progressões aritméticas, deduzir uma fórmula para o $n-$ésimo número geométrico, apresentar a interseção dos números geométricos, enunciar várias proposições referentes a interseção e apresentar resolução de interseções utilizando a equação de Pell.

## 3.1 Definição dos Números Geométricos

Apresentaremos agora os números geométricos.

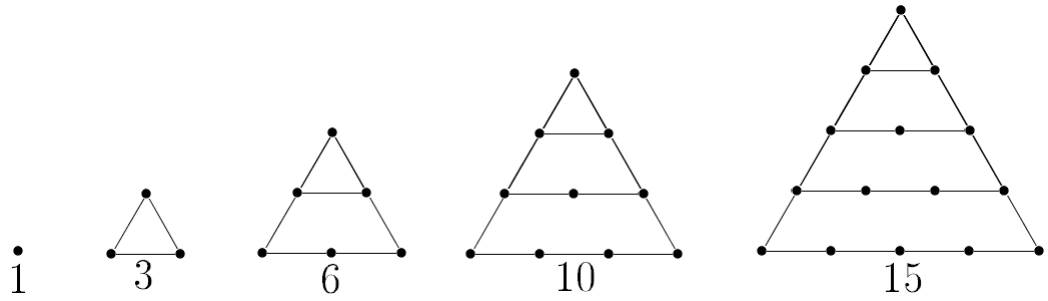


Figura 4: Números triangulares.

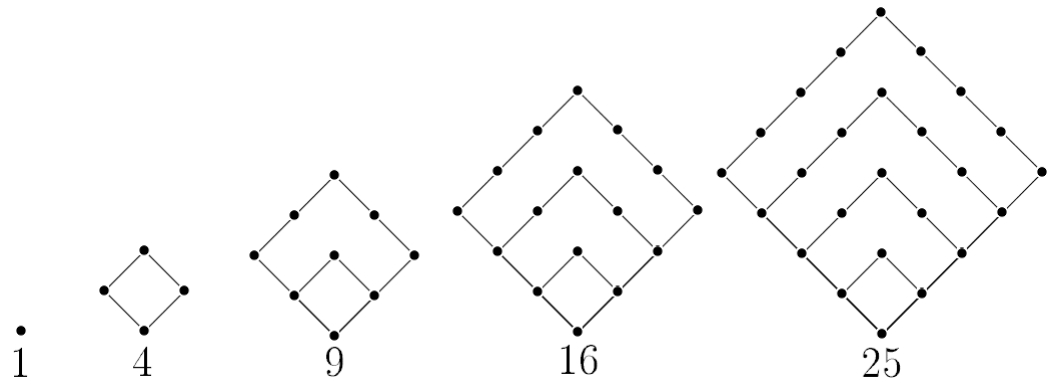


Figura 5: Números quadrangulares.

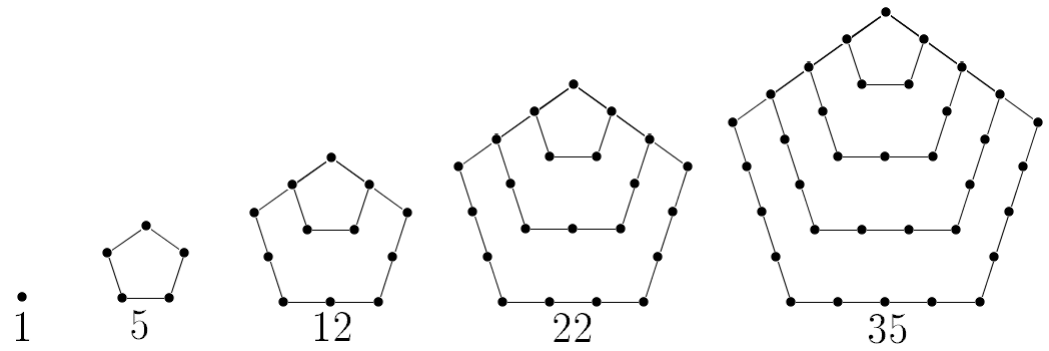


Figura 6: Números pentagonais.

Das figuras 4, 5 e 6 podemos depreender duas características dos números geométricos, a saber: números geométricos são sequências de inteiros e as sequências podem ser representadas no plano através de polígonos regulares. Como o polígono regular com menor número de lados é o triângulo, iniciamos a definição dos números geométricos por ele. Em seguida passamos ao quadrado, pentágono, hexágono, heptágono, etc.

Desta forma, se temos um polígono regular de $r$ lados podemos definir uma sequência de inteiros de tal forma que todos os elementos, excetuando o primeiro, poderão ser representados por polígonos regulares de $r$ lados.

Também nas figuras 4, 5 e 6 mostramos apenas os 5 primeiros elementos de cada sequência de inteiros. Nosso objetivo é determinar também qual seria o $n$-ésimo elemento de cada sequência.

**Definição 15.** *Fixado um número $r$ pertecente ao conjunto $\{3, 4, 5, 6, \ldots\}$ e se após isto fizermos $n$ percorrer todo o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ definiremos uma sequência, e esta será denominada sequência de números geométricos. Cada elemento da sequência será denotado por $p_r^n$, onde $r$ representa o número de lados do polígono regular e $n$ a posição do elemento.*

**Exemplo 10.** *Quando $r = 3$ então temos que a sequência*

$$p_3^1, p_3^2, p_3^3, p_3^4, p_3^5, p_3^6, p_3^7, p_3^8, \ldots$$

*representa os números geométricos triangulares.*

**Exemplo 11.** *Quando $r = 4$ então temos que a sequência*

$$p_4^1, p_4^2, p_4^3, p_4^4, p_4^5, p_4^6, p_4^7, p_4^8, \ldots$$

*representa os números geométricos quadrangulares.*

Nosso objetivo agora é: fixado $r$ determinarmos o valor de cada elemento da sequência $p_r^1$,$p_r^2$,$p_r^3$,$p_r^4$,$p_r^5$,$p_r^6$,.... Para realizarmos isto faremos uso das progressões aritméticas.

**Definição 16.** *Seja uma progressão aritmética com termo inicial igual a* 1 *e razão igual a* $(r-2)$. *Desta forma, geramos uma progressão aritmética com termos* $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. *Com isso, teremos:*

| | |
|---|---|
| $p_r^1$ | $= a_1$ |
| $p_r^2$ | $= a_1 + a_2$ |
| $p_r^3$ | $= a_1 + a_2 + a_3$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $p_r^n$ | $= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

*Se a soma dos* $n$ *primeiros termos da progressão aritmética é representada por* $S_n^{(r-2)}$, $p_r^n$ *será representado por:*

$$p_r^n = S_n^{(r-2)}.$$

**Exemplo 12.** *Determinando os termos da sequência* $p_3^n$. *O termo inicial da progressão aritmética é igual a* 1 *e a razão será igual a* $(3-2) = 1$. *Então temos que considerar a seguinte progressão aritmética* 1,2,3,4,5,6,7,8,...

| $p_3^1$ | $p_3^2$ | $p_3^3$ | $p_3^4$ | $p_3^5$ | $p_3^6$ | $p_3^7$ | $p_3^8$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 35 | ... |

$$p_3^n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Exemplo 13.** *Determinando os termos da sequência* $p_4^n$. *O termo inicial da progressão aritmética é igual a* 1 *e a razão será igual a* $(4-2) = 2$. *Então temos que considerar a seguinte progressão aritmética* 1,3,5,7,9,11,13,15,...

| $p_4^1$ | $p_4^2$ | $p_4^3$ | $p_4^4$ | $p_4^5$ | $p_4^6$ | $p_4^7$ | $p_4^8$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | $\ldots$ |

$$p_4^n = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1 = n^2.$$

**Exemplo 14.** *Determinando os termos da sequência $p_5^n$. O termo inicial da progressão aritmética é igual a 1 e a razão será igual a $(5-2) = 3$. Então temos que considerar a seguinte progressão aritmética* 1,4,7,10,13,16,19,22,...

| $p_5^1$ | $p_5^2$ | $p_5^3$ | $p_5^4$ | $p_5^5$ | $p_5^6$ | $p_5^7$ | $p_5^8$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 12 | 22 | 35 | 51 | 70 | 92 | $\ldots$ |

## 3.2 Fórmula Fechada para $p_r^n$

Da Definição 16 podemos deduzir que existe um relacionamento entre $p_r^{n-1}$ e $p_r^n$, pois $p_r^{n-1}$ é soma dos $(n-1)$ primeiros termos da progressão aritmética de termo inicial 1 e razão $(r-2)$ e $p_r^n$ a soma dos $n$ termos.

Nesse momento, nosso objetivo é encontrar uma fórmula fechada para $p_r^n$, ou seja, $p_r^n$ será escrito em termos de $n$ e $r$ somente.

Vejamos na figura 7 a representação de um número geométrico pentagonal. A partir desta buscaremos uma analogia para a fórmula de $p_r^n$.

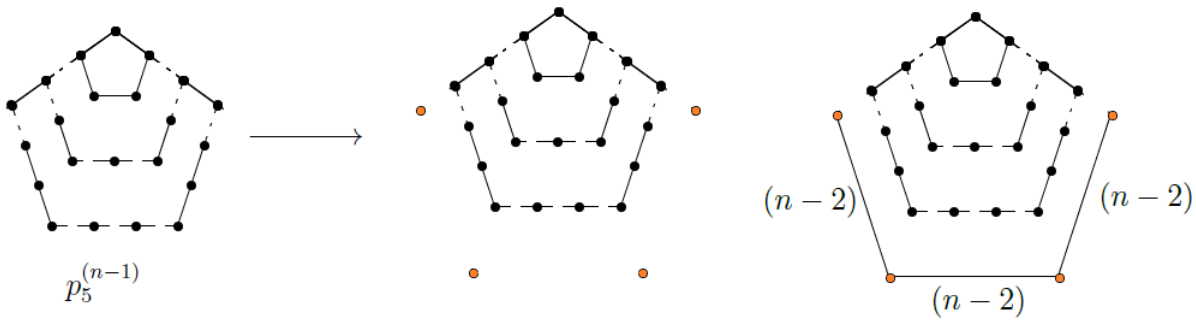


Figura 7: Número geométrico pentagonal.

O primeiro ponto que observamos na figura 7 é a escolha de um vértice do polígono regular para a partir do $p_5^{(n-1)}$ obtermos $p_5^n$. Um vez escolhido o vértice todas as outras expansões adotam o mesmo vértice.

Na figura 7 o polígono com os pontos em preto representa $p_5^{(n-1)}$ e para obtermos $p_5^n$ dois passos são necessários: colocar $(5-1)$ pontos no plano e em $(5-2)$ arestas colocarmos $(n-2)$ pontos. Assim, teremos:

$$p_5^n = p_5^{(n-1)} + (5-1) + (n-2)(5-2).$$

Agora utilizando esta analogia para $p_r^n$ teremos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} p_r^n &= p_r^{n-1} + (r-1) + (n-2)(r-2) \\ p_r^n &= p_r^{n-1} + r(n-1) - 2n + 3. \end{aligned}$$

Agora podemos resolver a recorrência utilizando o resultado apresentado em (1)

$$p_r^n = p_r^1 + \sum_{k=2}^{n} r(k-1) - 2k + 3.$$

Pela Definição 16 temos que $p_r^1 = S_1^{(r-2)}$, ou seja, a soma do primeiro termo da progressão aritmética de termo inicial igual a 1, ou seja $p_r^1 = 1$. Com esta informação e a expansão do somatório da equação obtemos:

$$p_r^n = 1 + r(1 + \ldots + n - 1) - 2(2 + \ldots + n) + 3(n-1).$$

Sabendo que a soma $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$, teremos:

$$p_r^n = r\left[\frac{(n+1)n}{2} - n\right] - 2\left[\frac{(n+1)n}{2} - 1\right] + 3n - 2.$$

Manipulando para colocar todos termos do segundo membro com denominador comum temos:

$$
\begin{aligned}
p_r^n &= r\left[\frac{(n+1)n-2n}{2}\right]-2\left[\frac{(n+1)n-2}{2}\right]+\frac{6n-4}{2}\\
p_r^n &= r\left[\frac{n^2+n-2n}{2}\right]-2\left[\frac{n^2+n-2}{2}\right]+\frac{6n-4}{2}\\
p_r^n &= \frac{rn^2-rn-2n^2-2n+4+6n-4}{2}\\
p_r^n &= \frac{rn^2-rn-2n^2+4n}{2}\\
p_r^n &= \frac{n^2(r-2)-n(r-4)}{2}.
\end{aligned}
$$

Com a última equação podemos montar uma tabela com as fórmulas fechadas para $p_r^n$:

| Lados ($r$) | Fórmula Fechada $p_r^n$ | Sequência |
|---|---|---|
| 3 | $p_3^n = \frac{n^2(3-2)-n(3-4)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ | $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, \ldots$ |
| 4 | $p_4^n = \frac{n^2(4-2)-n(4-4)}{2} = \frac{2n^2+0n}{2}$ | $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots$ |
| 5 | $p_5^n = \frac{n^2(5-2)-n(5-4)}{2} = \frac{3n^2-1n}{2}$ | $1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, \ldots$ |
| 6 | $p_6^n = \frac{n^2(6-2)-n(6-4)}{2} = \frac{4n^2-2n}{2}$ | $1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, \ldots$ |
| 7 | $p_7^n = \frac{n^2(7-2)-n(7-4)}{2} = \frac{5n^2-3n}{2}$ | $1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235, \ldots$ |
| 8 | $p_8^n = \frac{n^2(8-2)-n(8-4)}{2} = \frac{6n^2-4n}{2}$ | $1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280, \ldots$ |
| 9 | $p_9^n = \frac{n^2(9-2)-n(9-4)}{2} = \frac{7n^2-5n}{2}$ | $1, 9, 24, 46, 75, 111, 154, 204, 261, 325, \ldots$ |
| 10 | $p_{10}^n = \frac{n^2(10-2)-n(10-4)}{2} = \frac{8n^2-6n}{2}$ | $1, 10, 27, 52, 85, 126, 175, 232, 297, 370, \ldots$ |

Tabela 2: Fórmula fechada para $p_r^n$.

## 3.3 Interseção de Números Geométricos

Quando fazemos a interseção de dois números geométricos encontraremos uma equação associada. Se desejamos $p_r^m = p_s^n$, calculamos $D = (r-2)(s-2)$. Se

$D$ é um quadrado perfeito encontraremos uma equação que poderá ser fatorada em $(x+ky)(x-ky) = N$, onde $k^2 = D$. Neste caso, a resolução consistirá na busca de dois números cujo produto seja igual a $N$. De outra forma, $D$ não será um quadrado perfeito e a equação encontrada $x^2 - Dy^2 = N$ será a equação de Pell, e o método descrito anteriormente permitirá resolvê-la.

**Definição 17.** *Sejam $T_n$ o $n-$ésimo número geométrico triangular e $Q_n$ o $n-$ésimo número geométrico quadrangular.*

**Teorema 20.** *Se $T_n = Q_m$ então a equação de Pell associada será*

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos que $T_n = \dfrac{n^2+n}{2}$ e $Q_m = m^2$. Logo:*

$$\begin{aligned} \frac{n^2+n}{2} &= m^2 \\ n^2+n &= 2m^2. \end{aligned}$$

*Completando quadrado no primeiro membro temos:*

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2m^2.$$

*Multiplicando por 4 e incorporando aos elementos quadráticos obtemos:*

$$(2n+1)^2 - 1 = 2(2m)^2.$$

*Isolando os elementos quadráticos no primeiro membro e os demais elementos no segundo membro:*

$$(2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1.$$

*Fazendo as seguintes substituições $x = 2n+1$ e $y = 2m$ obtemos o resultado desejado $x^2 - 2y^2 = 1$.*

■

**Teorema 21.** *Se $T_n = p_{11}^m$ então a equação associada (não é equação de Pell) será*

$$x^2 - 9y^2 = 40.$$

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos que $T_n = \dfrac{n^2+n}{2}$ e pela fórmula fechada de $p_r^n$ teremos que $p_{11}^m = \dfrac{9m^2-7m}{2}$. Logo:*

$$\begin{aligned} \frac{n^2+n}{2} &= \frac{9m^2-7m}{2} \\ n^2+n &= 9m^2-7m \\ (n^2+n) &= 9\left(m^2 - \frac{7m}{9}\right). \end{aligned}$$

*Completando quadrado nos dois membros da equação temos:*

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 9\left[\left(m-\frac{7}{18}\right)^2 - \frac{7^2}{18^2}\right].$$

*Multiplicando por 4:*

$$4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{4} = 4\times 9\left[\left(m-\frac{7}{18}\right)^2 - \frac{7^2}{18^2}\right].$$

*Incorporando 4 no primeiro e segundo membro ao elemento quadrático:*

$$(2n+1)^2 - 1 = 9\left[\left(2m-\frac{7}{9}\right)^2 - \frac{7^2}{9^2}\right].$$

*Multiplicando por 9:*

$$9\,(2n+1)^2 - 9 = 9^2\left[\left(2m-\frac{7}{9}\right)^2 - \frac{7^2}{9^2}\right].$$

*Incorporando $9^2$ ao elemento quadrático no segundo membro temos:*

$$\begin{aligned} 9(2n+1)^2 - 9 &= (18m-7)^2 - 7^2 \\ (18m-7)^2 - 9(2n+1)^2 &= 49 - 9 \\ (18m-7)^2 - 9(2n+1)^2 &= 40. \end{aligned}$$

*Fazendo as substituições* $x = 18m-7$ *e* $y = 2n+1$ *obtemos* $x^2-9y^2 = 40$ *o resultado desejado.*

■

**Definição 18.** *Seja* $H_n$ *o* $n-$*ésimo número geométrico hexagonal.*

**Teorema 22.** *Se* $T_m = H_n$ *então* $m = 2n-1$.

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos* $T_m = \dfrac{m^2+m}{2}$ *e* $H_n = \dfrac{4n^2-2n}{2}$. *Logo*

$$\begin{aligned} \frac{m^2+m}{2} &= \frac{4n^2-2n}{2} \\ m^2+m &= 4n^2-2n. \end{aligned}$$

*Completando quadrado em ambos os membros da equação temos:*

$$\begin{aligned} m^2+m+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} &= 4\left[n^2-\frac{2}{4}n+\frac{4}{64}-\frac{4}{64}\right] \\ \left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] &= 4\left[\left(n-\frac{2}{8}\right)^2-\frac{4}{64}\right]. \end{aligned}$$

*Multiplicando por* 4 *ambos os membros:*

$$4\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] = 16\left[\left(n-\frac{2}{8}\right)^2-\frac{4}{64}\right].$$

*Incorporando* 4 *no primeiro membro e* 16 *no segundo membro aos elementos quadráticos:*

$$\begin{aligned} (2m+1)^2-1 &= (4n-1)^2-1 \\ (2m+1)^2 &= (4n-1)^2. \end{aligned}$$

*Extrando a raiz quadrada em ambos os membros:*

$$\begin{aligned} (2m+1) &= (4n-1) \\ 2m &= 4n-1-1 \\ m &= \frac{4n-2}{2} \\ m &= 2n-1. \end{aligned}$$

*E isto, é o resultado desejado.*

■

**Definição 19.** *Seja $P_n$ o $n-$ésimo número pentagonal.*

**Teorema 23.** *Se $P_n = p_{11}^m$ então a equação de Pell associada será*

$$x^2 - 3y^2 = 46.$$

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos que $P_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$ e $p_{11}^m = \dfrac{9m^2 - 7m}{2}$. Logo*

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 - n}{2} &= \frac{9m^2 - 7m}{2} \\ 3n^2 - n &= 9m^2 - 7m \\ 3\left(n^2 - \frac{n}{3}\right) &= 9\left(m^2 - \frac{7m}{9}\right). \end{aligned}$$

*Completando quadrado em ambos os membros da equação temos:*

$$\begin{aligned} 3\left(n^2 - \frac{n}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36}\right) &= 9\left(m^2 - \frac{7m}{9} + \frac{49}{324} - \frac{49}{324}\right) \\ 3\left[\left(n - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] &= 9\left[\left(m - \frac{7}{18}\right)^2 - \frac{49}{324}\right]. \end{aligned}$$

*Multiplicando por* 12 *ambos os membros:*

$$36\left[\left(n - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] = 3 \times 4 \times 9\left[\left(m - \frac{7}{18}\right)^2 - \frac{49}{324}\right].$$

*Incorporando* 36 *ao primeiro membro e* $4 \times 9$ *no segundo membro ao elemento quadrático:*

$$(6n - 1)^2 - 1 = 3\left[\left(6m - \frac{7}{3}\right)^2 - \frac{49}{9}\right].$$

*Multiplicando por* 3 *ambos os membros da equação*

$$3(6n-1)^2-3 = 9\left[\left(6m-\frac{7}{3}\right)^2-\frac{49}{9}\right].$$

*Incorporando* 9 *no segundo membro ao elemento quadrático*

$$\begin{aligned} 3(6n-1)^2-3 &= (18m-7)^2-49 \\ (18m-7)^2-3(6n-1)^2 &= 49-3 \\ (18m-7)^2-3(6n-1)^2 &= 46. \end{aligned}$$

*Fazendo as substituições* $x = 18m-7$ *e* $y = 6n-1$ *na equação obtemos* $x^2-3y^2 = 46$ *que é o resultado desejado.* ■

**Definição 20.** *Sejam* $O_n$ *o* $n-$*ésimo número geométrico octogonal e* $N_n$ *o* $n-$*ésimo número geométrico nonagonal.*

**Teorema 24.** *Se* $O_n = N_m$ *então a equação de Pell associada será*

$$x^2-42y^2 = 57.$$

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos que* $O_n = \dfrac{6n^2-4n}{2}$ *e* $N_m = \dfrac{7m^2-5m}{2}$. *Logo:*

$$\begin{aligned} \frac{6n^2-4n}{2} &= \frac{7m^2-5m}{2} \\ 6n^2-4n &= 7m^2-5m \\ 6\left(n^2-\frac{4n}{6}\right) &= 7\left(m^2-\frac{5m}{7}\right). \end{aligned}$$

*Completando quadrado no primeiro e segundo membros obtemos:*

$$6\left[\left(n-\frac{2}{6}\right)^2-\frac{4}{36}\right] = 7\left[\left(m-\frac{5}{14}\right)^2-\frac{25}{196}\right].$$

*Multiplicando por* 6 *temos:*

$$6^2\left[\left(n-\frac{2}{6}\right)^2-\frac{4}{36}\right] = 6\times 7\left[\left(m-\frac{5}{14}\right)^2-\frac{25}{196}\right].$$

*Incorparando* $6^2$ *no primeiro membro ao elemento quadrático:*

$$(6n-2)^2-4 = 6\times 7\left[\left(m-\frac{5}{14}\right)^2-\frac{25}{196}\right].$$

*Multiplicando por* $6\times 7$*:*

$$42(6n-2)^2-168 = 6^2\times 7^2\left[\left(m-\frac{5}{14}\right)^2-\frac{25}{196}\right].$$

*Incorporando* $6^2\times 7^2$ *ao elemento quadrático temos:*

$$\begin{aligned} 42(6n-2)^2-168 &= (42m-15)^2-225 \\ (42m-15)^2-42(6n-2)^2 &= 225-168 \\ (42m-15)^2-42(6n-2)^2 &= 57. \end{aligned}$$

*Fazendo as seguintes substituições* $x=42m-15$ *e* $y=6n-2$ *obtemos o resultado* $x^2-42y^2=57$.

■

**Teorema 25.** *Se* $Q_n=N_m$ *então a equação de Pell associada será*

$$x^2-14y^2=25.$$

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos que* $Q_n=n^2$ *e* $N_m=\dfrac{7m^2-5m}{2}$*. Logo:*

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{7m^2-5m}{2} \\ 2n^2 &= 7m^2-5m \\ 2n^2 &= 7\left(m^2-\frac{5m}{7}\right). \end{aligned}$$

*Completando quadrado no segundo membro temos:*

$$2n^2 = 7\left[\left(m-\frac{5}{14}\right)^2-\frac{25}{196}\right].$$

*Multiplicando por* $4\times 7$*:*

$$4\times 7\times 2n^2 = 4\times 7^2\left[\left(m-\frac{5}{14}\right)^2-\frac{25}{196}\right].$$

*Incorporando* $4$ *no primeiro membro e* $4\times 7^2$ *no segundo membro ao elemento quadrático:*

$$\begin{aligned} 14(2n)^2 &= (14m-5)^2-25 \\ (14m-5)^2-14(2n)^2 &= 25. \end{aligned}$$

*Fazendo as substituições* $x=14m-5$ *e* $y=2n$*, obtemos o resultado* $x^2-14y^2=25$ *desejado.*

■

**Teorema 26.** *Se* $p_{128}^n = p_{37}^m$ *então a equação de Pell associada será*

$$x^2-90y^2=286390.$$

**Demonstração:** *Por* $p_r^n = \dfrac{(r-2)n^2-(r-4)n}{2}$ *teremos que* $p_{128}^n = \dfrac{126n^2-124n}{2}$ *e* $p_{37}^m = \dfrac{35m^2-33m}{2}$*. Logo:*

$$\begin{aligned} \frac{126n^2-124n}{2} &= \frac{35m^2-33m}{2} \\ 126n^2-124n &= 35m^2-33m \\ 126\left(n^2-\frac{124n}{126}\right) &= 35\left(m^2-\frac{33m}{35}\right). \end{aligned}$$

*Completando quadrado no primeiro e segundo membro da última equação temos:*

$$126\left[\left(n-\frac{124}{252}\right)^2-\frac{124^2}{252^2}\right] = 35\left[\left(m-\frac{33}{70}\right)^2-\frac{33^2}{70^2}\right].$$

*Agora multiplicando por* $4 \times 35$ *temos:*

$$4 \times 35 \times 126 \left[ \left( n - \frac{124}{252} \right)^2 - \frac{124^2}{252^2} \right] = 4 \times 35^2 \left[ \left( m - \frac{33}{70} \right)^2 - \frac{33^2}{70^2} \right].$$

*Incorporando* 4 *no primeiro membro e* $4 \times 35^2$ *no segundo membro da última equação ao elemento quadrático:*

$$35 \times 126 \left[ \left( 2n - \frac{124}{126} \right)^2 - \frac{124^2}{126^2} \right] = (70m - 33)^2 - 33^2.$$

*Multiplicando por* 90 *temos:*

$$\begin{aligned} 90 \times 35 \times 126 \left[ \left( 2n - \frac{124}{126} \right)^2 - \frac{124^2}{126^2} \right] &= 90(70m - 33)^2 - 90 \times 33^2 \\ 2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2 \left[ \left( 2n - \frac{124}{126} \right)^2 - \frac{124^2}{126^2} \right] &= 90(70m - 33)^2 - 90 \times 33^2. \end{aligned}$$

*Incorporando* $2^2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2$ *no primeiro membro ao elemento quadrático da equação:*

$$\begin{aligned} (1260n - 620)^2 - 124^2 \times 5^2 &= 90(70m - 33)^2 - 90 \times 33^2 \\ (1260n - 620)^2 - 90(70m - 33)^2 &= 124^2 \times 5^2 - 90 \times 33^2 \\ (1260n - 620)^2 - 90(70m - 33)^2 &= 384400 - 98010 \\ (1260n - 620)^2 - 90(70m - 33)^2 &= 286390. \end{aligned}$$

*Substituindo* $x = 1260n - 620$ *e* $y = 70m - 33$ *na última equação, obtemos o resultado* $x^2 - 90y^2 = 286390$ *desejado.* ■

**Teorema 27.** *Se* $Q_n = p_7^m$ *então a equação de Pell associada será*

$$x^2 - 10y^2 = 9.$$

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos que* $Q_n = n^2$ *e* $p_7^m = \dfrac{5m^2 - 3m}{2}$. *Logo:*

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{5m^2-3m}{2} \\ 2n^2 &= 5m^2-3m \\ 2n^2 &= 5\left(m^2-\frac{3m}{5}\right). \end{aligned}$$

*Completando quadrado no segundo membro temos:*

$$\begin{aligned} 2n^2 &= 5\left(m^2-\frac{3m}{5}+\frac{9}{100}-\frac{9}{100}\right) \\ 2n^2 &= 5\left[\left(m-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{100}\right]. \end{aligned}$$

*Multiplicando ambos os membros por* 20 *temos:*

$$4\times 10n^2 = 100\left[\left(m-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{100}\right].$$

*Incorporando* 4 *no primeiro membro e* 100 *no segundo membro ao elementro quadrático temos:*

$$\begin{aligned} 10(2n)^2 &= (10m-3)^2-9 \\ (10m-3)^2-10(2n)^2 &= 9. \end{aligned}$$

*Fazendo as substituições* $x = 10m-3$ *e* $y = 2n$ *obtemos* $x^2-10y^2 = 9$ *que é o resultado desejado.* ■

**Teorema 28.** *Se* $T_n = O_m$ *então a equação de Pell associada será*

$$x^2-6y^2 = 10.$$

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos que* $T_n = \dfrac{n^2+n}{2}$ *e* $O_m = \dfrac{6m^2-4m}{2}$. *Logo:*

$$\begin{aligned} \frac{n^2+n}{2} &= \frac{6m^2-4m}{2} \\ n^2+n &= 5m^2-3m \\ n^2+n &= 6\left(m^2-\frac{4m}{6}\right). \end{aligned}$$

*Completando quadrado em ambos os membros temos:*

$$\begin{aligned} n^2+n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} &= 6\left(m^2-\frac{4m}{6}+\frac{16}{144}-\frac{16}{144}\right) \\ \left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} &= 6\left[\left(m-\frac{4}{12}\right)^2-\frac{16}{144}\right]. \end{aligned}$$

*Multiplicando ambos os membros por* 24 *temos:*

$$6\times 4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-6 = 144\left[\left(m-\frac{4}{12}\right)^2-\frac{16}{144}\right].$$

*Incorporando* 4 *no primeiro membro e* 144 *no segundo membro ao elemento quadrático:*

$$\begin{aligned} 6\left(2n+1\right)^2-6 &= \left(12m-4\right)^2-16 \\ \left(12m-4\right)^2-6\left(2n+1\right)^2 &= 16-6 \\ \left(12m-4\right)^2-6\left(2n+1\right)^2 &= 10. \end{aligned}$$

*Fazendo as substituições* $x=12m-4$ *e* $y=2n+1$ *obtemos* $x^2-6y^2=10$ *que é o resultado desejado.* ■

**Teorema 29.** *Se* $T_n=p_7^m$ *então a equação de Pell associada será*

$$x^2-5y^2=4.$$

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos que* $T_n=\dfrac{n^2+n}{2}$ *e* $p_7^m=\dfrac{5m^2-3m}{2}$. *Logo:*

$$\begin{aligned} \frac{n^2+n}{2} &= \frac{5m^2-3m}{2} \\ n^2+n &= 5m^2-3m \\ n^2+n &= 5\left(m^2-\frac{3m}{5}\right). \end{aligned}$$

*Completando quadrado em ambos os membros temos:*

$$\begin{aligned}\left(n^2+n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) &= 5\left(m^2-\frac{3m}{5}+\frac{9}{100}-\frac{9}{100}\right)\\ \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] &= 5\left[\left(m-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{100}\right].\end{aligned}$$

*Multiplicando ambos os membros por* 20 *temos:*

$$5\times 4\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right] = 100\left[\left(m-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{100}\right].$$

*Incorporando* 4 *ao primeiro membro e* 100 *ao segundo membro ao elemento quadrático temos:*

$$\begin{aligned}5\left[(2n+1)^2-1\right] &= \left[(10m-3)^2-9\right]\\ 5(2n+1)^2-5 &= (10m-3)^2-9\\ (10m-3)^2-5(2n+1) &= 9-5\\ (10m-3)^2-5(2n+1) &= 4.\end{aligned}$$

*Fazendo as substituições* $x=10m-3$ *e* $y=2n+1$ *obtemos* $x^2-5y^2=4$ *que é o resultado desejado.* ■

**Teorema 30.** *Se* $P_n=p_{12}^m$ *então a equação de Pell associada é*

$$x^2-30y^2=546.$$

**Demonstração:** *Pela Tabela 2 teremos que* $P_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$ *e* $p_{12}^m=\dfrac{10m^2-8m}{2}$. *Logo:*

$$\begin{aligned}\frac{3n^2-n}{2} &= \frac{10m^2-8m}{2}\\ 3n^2-n &= 10m^2-8m\\ 3\left(n^2-\frac{n}{3}\right) &= 10\left(m^2-\frac{8m}{10}\right).\end{aligned}$$

*Completando quadrado em ambos os membros temos:*

$$
\begin{aligned}
3\left(n^2-\frac{n}{3}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}\right) &= 10\left(m^2-\frac{8m}{10}+\frac{64}{400}-\frac{64}{400}\right)\\
3\left[\left(n-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}\right] &= 10\left[\left(m-\frac{8}{20}\right)^2-\frac{64}{400}\right].
\end{aligned}
$$

*Multiplicando ambos os membros por* 40 *temos:*

$$
30\times 4\left[\left(n-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}\right] = 400\left[\left(m-\frac{8}{20}\right)^2-\frac{64}{400}\right].
$$

*Incorporando* 4 *no primeiro membro e* 400 *no segundo membro ao elemento quadrático:*

$$
30\left[\left(2n-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right] = (20m-8)^2-64.
$$

*Multiplicando ambos os membros por* 9 *temos:*

$$
30\times 9\left[\left(2n-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right] = 9(20m-8)^2-9\times 64.
$$

*Incorporando* 9 *no primeiro e no segundo membro ao elemento quadrático temos:*

$$
\begin{aligned}
30\left[(6n-1)^2-1\right] &= (60m-24)^2-9\times 64\\
30(6n-1)^2-30 &= (60m-24)^2-576\\
(60m-24)^2-30(6n-1)^2 &= 576-30\\
(60m-24)^2-30(6n-1)^2 &= 546.
\end{aligned}
$$

*Com as substituições* $x=60m-24$ *e* $y=6n-1$ *obtemos* $x^2-30y^2=546$ *que é o resultado desejado.*

■

**Teorema 31.** *Se* $p_r^n = p_s^m$ *e* $D = (r-2)(s-2)$ *não é um quadrado perfeito, onde* $r \neq s$*, então a equação de Pell associada será* $x^2 - Dy^2 = N$*. Onde* $x = 2(r-2)(s-2)n - (r-4)(s-2)$*,* $y = 2(s-2)m - (s-4)$*,* $D = (r-2)(s-2)$ *e* $N = (r-4)^2(s-2)^2 - (r-2)(s-2)(s-4)^2$*.*

**Demonstração:** *De* $p_u^v = \dfrac{(u-2)v^2 - (u-4)v}{2}$ *teremos que*

$$p_r^n = \frac{(r-2)n^2 - (r-4)n}{2}$$

*e*

$$p_s^m = \frac{(s-2)m^2 - (s-4)m}{2}.$$

*Para facilitar nossos cálculos vamos realizar as seguintes substituições* $a = (r-2)$*,* $b = (r-4)$*,* $c = (s-2)$ *e* $d = (s-4)$*. Logo,*

$$\begin{aligned} \frac{an^2 - bn}{2} &= \frac{cm^2 - dm}{2} \\ an^2 - bn &= cm^2 - dm. \end{aligned}$$

*Colocando* $a$ *em evidência no primeiro membro da equação e* $c$ *no segundo membro, e após isto completando quadrado temos:*

$$\begin{aligned} a\left[\left(n^2 - \frac{b}{a}n + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] &= c\left[\left(m^2 - \frac{d}{c}m + \frac{d^2}{4c^2} - \frac{d^2}{4c^2}\right)\right] \\ a\left[\left(n - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] &= c\left[\left(m - \frac{d}{2c}\right)^2 - \frac{d^2}{4c^2}\right]. \end{aligned}$$

*Multiplicando ambos os membros da última equação por* $4a$ *temos*

$$4a^2\left[\left(n - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] = 4ac\left[\left(m - \frac{d}{2c}\right)^2 - \frac{d^2}{4c^2}\right].$$

*Incorporando* $4a^2$ *ao elemento quadrático do primeiro membro da equação temos:*

$$\left[(2an - b)^2 - b^2\right] = 4ac\left[\left(m - \frac{d}{2c}\right)^2 - \frac{d^2}{4c^2}\right].$$

*Multiplicando ambos os membros da equação por $c^2$, incorporando no primeiro membro $c^2$ ao elemento quadrático e incorporando no segundo membro $4c^2$ ao elementro quadrático temos:*

$$\begin{aligned} c^2\left[(2an-b)^2-b^2\right] &= 4c^2ac\left[\left(m-\frac{d}{2c}\right)^2-\frac{d^2}{4c^2}\right] \\ \left[(2acn-bc)^2-c^2b^2\right] &= ac\left[(2cm-d)^2-d^2\right]. \end{aligned}$$

*Desenvolvendo ambos os membros da equação temos*

$$(2acn-bc)^2-ac\,(2cm-d)^2=b^2c^2-acd^2.$$

*Agora na última equação façamos as seguintes substituições*

$$\begin{aligned} x &= 2acn-bc=2(r-2)(s-2)n-(r-4)(s-2) \\ y &= 2cm-d=2(s-2)m-(s-4) \\ D &= ac=(r-2)(s-2) \\ N &= b^2c^2-acd^2=(r-4)^2(s-2)^2-(r-2)(s-2)(s-4)^2. \end{aligned}$$

*E isto nos permite obtermos o resultado desejado*

$$x^2-Dy^2=N.$$

■

## 3.4 Resolução de Algumas Interseções

Neste momento buscaremos resolver algumas interseções anunciadas nas proposições anteriores.

**Exemplo 15.** *Vamos resolver a equação de Pell $x^2-2y^2=1$ presente no Teorema 20. Expandindo $\sqrt{2}$ em fração contínua teremos $[1;\overline{2}]$. Percebemos que o período da expansão da fração contínua é impar e será igual $n=1$. Pelo Teorema 15 a solução fundamental será da seguinte forma $x_1=p_{2kn-1}$ e $y_1=q_{2kn-1}$. E assim, tomando*

*$k = 1$ e $n = 1$ teremos $x_1 = p_{2\times1-1} = p_1$ e $y_1 = q_{2\times1-1} = q_1$. Pelas recorrências definidas no Teorema 2 temos que $p_1 = a_0a_1 + 1$ e $q_1 = a_1$. Disso resulta que*

$$x_1 = p_1 = 1 \times 2 + 1 = 3$$

*e*

$$y_1 = q_1 = 2.$$

*No Teorema 20 fizemos as seguintes substituições $x = 2m + 1$ e $y = 2n$. Disso, tiramos que $m = \dfrac{x-1}{2}$ e $n = \dfrac{y}{2}$. E ainda, com a solução fundamental $(x_1, y_1)$ e o Teorema 16 podemos construir a próxima tabela*

| $i$ | Solução | $m = \frac{x-1}{2}$ | $n = \frac{y}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $(3+2\sqrt{2})^1 = 3+2\sqrt{2}$ | $\frac{3-1}{2} = 1$ | $\frac{2}{2} = 1$ |
| 2 | $(3+2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}$ | $\frac{17-1}{2} = 8$ | $\frac{12}{2} = 6$ |
| 3 | $(3+2\sqrt{2})^3 = 99+70\sqrt{2}$ | $\frac{99-1}{2} = 49$ | $\frac{70}{2} = 35$ |
| 4 | $(3+2\sqrt{2})^4 = 577+408\sqrt{2}$ | $\frac{577-1}{2} = 288$ | $\frac{408}{2} = 204$ |
| 5 | $(3+2\sqrt{2})^5 = 3363+2378\sqrt{2}$ | $\frac{3363-1}{2} = 1681$ | $\frac{2378}{2} = 1189$ |
| 6 | $(3+2\sqrt{2})^6 = 19601+13860\sqrt{2}$ | $\frac{19601-1}{2} = 9800$ | $\frac{13860}{2} = 6930$ |

Tabela 3: Cálculo de algumas soluções positivas de $x^2 - 2y^2 = 1$.

*Com os dados da Tabela 3 já podemos exibir os primeiros números da interseção entre os números geométricos triangulares e os números geométricos quadrangulares*

| $i$ | $p_3^m$ | $p_4^n$ | Número Geométrico |
|---|---|---|---|
| 1 | $p_3^1$ | $p_4^1$ | 1 |
| 2 | $p_3^8$ | $p_4^6$ | 36 |
| 3 | $p_3^{49}$ | $p_4^{35}$ | 1225 |
| 4 | $p_3^{288}$ | $p_4^{204}$ | 41616 |
| 5 | $p_3^{1681}$ | $p_4^{1189}$ | 1413721 |
| 6 | $p_3^{9800}$ | $p_4^{6930}$ | 48024900 |

Tabela 4: Alguns elementos da interseção dos números triangulares e quadrangulares.

**Exemplo 16.** *Vamos resolver a equação* $x^2 - 9y^2 = 40$ *presente no Teorema 21. A equação não é de Pell, e pode ser fatorada em* $(x-3y)(x+3y) = 40$. *Como buscamos valores inteiros positivos para* $x$ *e* $y$ *teremos que* $(x+3y) > (x-3y)$. *Nosso objetivo é encontrar dois números que multiplicados seja igual a* 40 *sendo que o maior deles será igual* $(x+3y)$ *e o menor deles será igual a* $(x-3y)$. *A Tabela 5 resume as possibilidades:*

| *Possibilidade* | $(x+3y)$ | $(x-3y)$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 40 | 1 | – | – |
| 2 | 20 | 2 | 11 | 3 |
| 3 | 10 | 4 | 7 | 1 |
| 4 | 8 | 5 | – | – |

Tabela 5: Produto de dois números igual a 40.

*Agora vamos tomar as substituições utilizadas no Teorema 21 para* $x$ *e* $y$ *para vermos quais valores da Tabela 5 serão válidos.*

| $x$ | $y$ | $m = \frac{x+7}{18}$ | $n = \frac{y-1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 11 | 3 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | – | – |

Tabela 6: Teste dos valores de $x$ e $y$ encontrados para o produto.

*Portanto, a interseção dos números geométricos triangulares e os números geométricos da sequência* $p_{11}^m$ *tem somente um elemento que é o número* $T_1 = p_{11}^1 = 1$.

**Exemplo 17.** *Pelo Teorema 22 está claro que todo número geométrico hexagonal é também um número geométrico triangular. E assim, podemos utilizar o resultado para exibir os primeiros números da interseção.*

| $H_n$ | $T_m$ | Número Geométrico |
|---|---|---|
| $H_1$ | $T_1$ | 1 |
| $H_2$ | $T_3$ | 6 |
| $H_3$ | $T_5$ | 15 |
| $H_4$ | $T_7$ | 28 |
| $H_5$ | $T_9$ | 45 |
| $H_6$ | $T_{11}$ | 66 |
| $H_7$ | $T_{13}$ | 91 |
| $H_8$ | $T_{15}$ | 120 |
| $H_9$ | $T_{17}$ | 153 |

Tabela 7: Alguns números da interseção entre $H_n$ e $T_m$.

**Exemplo 18.** *Vamos resolver* $x^2 - 14y^2 = 25$ *presente no Teorema 25. Para tal vamos utilizar o Teorema 18 para encontrar a soluções fundamentais da equação* $x^2 - 14y^2 = 25$. *A equação* $x^2 - 14y^2 = 1$ *tem solução fundamental igual a* $(15, 4)$. *Assim, precisaremos buscar* $v$ *no intervalo:*

$$0 \leq \quad v \quad \leq 3.$$

*Portanto, devemos testar os valores de* $v = 0{,}1{,}2$ *ou* $3$.

| $v$ | $u = \pm\sqrt{25 + 14v^2}$ | Solução |
|---|---|---|
| 0 | $\sqrt{25 + 14 \times 0^2} = \sqrt{25} = \pm 5$ | Sim |
| 1 | $\sqrt{25 + 14 \times 1^2} = \sqrt{39} = \pm 6.24$ | Não |
| 2 | $\sqrt{25 + 14 \times 2^2} = \sqrt{81} = \pm 9$ | Sim |
| 3 | $\sqrt{25 + 14 \times 8^2} = \sqrt{546} = \pm 12.28$ | Não |

Tabela 8: Teste de alguns valores de $v$ na equação $x^2 - 14y^2 = 25$.

*Temos duas soluções* $(\pm 5, 0)$ *e* $(\pm 9, 2)$. *Vamos primeiramente verificar se estas duas soluções estão na mesma classe. Para isto aplicamos o Critério 1:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{5 \times 9 - 0 \times 2 \times 14}{25} = \frac{45}{25} = 1.8$$

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{(-5) \times 9 - 0 \times 2 \times 14}{25} = -\frac{45}{25} = -1.8$$

*Portanto, as soluções* $(\pm 5, 0)$ *e* $(\pm 9, 2)$ *não estão na mesma classe.*

*Resta verificar se* $(\pm 5, 0)$ *e* $(\pm 9, 2)$ *são ambíguas. Aplicando o Critério 1 a* $(\pm 5, 0)$ *temos:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{5 \times (-5) - 0 \times 0 \times 14}{25} = -\frac{25}{25} = -1$$

$$\frac{vu' - uv}{N} = \frac{0 \times (-5) - 5 \times 0}{25} = \frac{0}{25} = 0$$

*Portanto, as classes* $(\pm 5, 0)$ *são ambíguas e desta forma vamos tomar somente a classe* $(5, 0)$.

*Vamos verificar se as classes* $(9, 2)$ *e* $(-9, 2)$ *são ambíguas. Utilizando o Critério 1 temos:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{9 \times (-9) - 2 \times 2 \times 14}{25} = \frac{-137}{25} = -5.4$$

*Portanto, a condição não é satisfeita e as duas classes não são ambíguas. Vamos agora calcular algumas soluções da equação* $x^2 - 14y^2 = 25$. *No Teorema 25 fizemos as substituições* $x = 14m - 5$ *e* $y = 2n$, *donde tiramos* $m = \dfrac{x+5}{14}$ *e* $n = \dfrac{y}{2}$

*Algumas soluções na classe* $9 + 2\sqrt{14}$. *Com as substituições* $\alpha = 9 + 2\sqrt{14}$ *e* $\beta = 15 + 4\sqrt{14}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $n = \frac{y}{2}$ | $m = \frac{x+5}{14}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\alpha\beta^0 = 9 + 2\sqrt{14}$ | $\frac{2}{2} = 1$ | $\frac{9+5}{14} = 1$ |
| 1 | $\alpha\beta^1 = 247 + 66\sqrt{14}$ | $\frac{66}{2} = 33$ | $\frac{247+5}{14} = 18$ |
| 2 | $\alpha\beta^2 = 7401 + 1978\sqrt{14}$ | $\frac{1978}{2} = 989$ | $\frac{7401+5}{14} = 529$ |
| 3 | $\alpha\beta^3 = 221783 + 59274\sqrt{14}$ | $\frac{59274}{2} = 29637$ | $\frac{221783+5}{14} = 15842$ |

Tabela 9: Algumas soluções de $x^2 - 14y^2 = 25$ na classe $9 + 2\sqrt{14}$.

*Algumas soluções na classe* $-9+2\sqrt{14}$.

*Observação: Se* $x<0$ *e* $y<0$ *é uma solução da equação* $x^2-Dy^2=N$ *então* $-x>0$ *e* $-y>0$ *é também uma solução da equação* $x^2-Dy^2=N$. *Com as substituições* $\zeta=-9+2\sqrt{14}$ *e* $\xi=15+4\sqrt{14}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $n=\frac{\lvert y\rvert}{2}$ | $m=\frac{\lvert x\rvert+5}{14}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\zeta\xi^1=-23-6\sqrt{14}$ | $\frac{6}{2}=3$ | $\frac{23+5}{14}=2$ |
| 2 | $\zeta\xi^2=-681-182\sqrt{14}$ | $\frac{182}{2}=91$ | $\frac{681+5}{14}=49$ |
| 3 | $\zeta\xi^3=-20407-5454\sqrt{14}$ | $\frac{5454}{2}=2727$ | $\frac{20407+5}{14}=1458$ |
| 3 | $\zeta\xi^4=-611529-163438\sqrt{14}$ | $\frac{163438}{2}=81719$ | $\frac{611529+5}{14}=43681$ |

Tabela 10: Algumas soluções de $x^2-14y^2=25$ na classe $-9+2\sqrt{14}$.

*Algumas soluções na classe* $5+0\sqrt{14}$. *Com as substituições* $\beta=5+0\sqrt{14}$ *e* $\alpha=15+4\sqrt{14}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m=\frac{x+5}{14}$ | $n=\frac{y}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\beta\alpha^1=75+20\sqrt{14}$ | 5.71 | 10 |
| 2 | $\beta\alpha^2=2245+600\sqrt{14}$ | 160.71 | 300 |
| 3 | $\beta\alpha^3=67275+17980\sqrt{14}$ | 4805.71 | 8990 |
| 4 | $\beta\alpha^4=2016005+538800\sqrt{14}$ | 144000.71 | 269400 |
| 5 | $\beta\alpha^5=60412875+16146020\sqrt{14}$ | 4315205.71 | 8073010 |
| 6 | $\beta\alpha^6=1810370245+483841800\sqrt{14}$ | 129312160.71 | 241920900 |

Tabela 11: Algumas soluções de $x^2-14y^2=25$ na classe $5+0\sqrt{14}$.

*Com os dados presentes nestas três tabelas já podemos mostrar os primeiros números da interseção entre* $Q_n$ *e* $N_m$*:*

| $N_m$ | $Q_n$ | Número Geométrico |
|---|---|---|
| $N_1$ | $Q_1$ | 1 |
| $N_2$ | $Q_3$ | 9 |
| $N_{18}$ | $Q_{33}$ | 1089 |
| $N_{49}$ | $Q_{91}$ | 8281 |
| $N_{529}$ | $Q_{989}$ | 978121 |
| $N_{1458}$ | $Q_{2727}$ | 7436529 |
| $N_{15842}$ | $Q_{29637}$ | 878351769 |
| $N_{43681}$ | $Q_{81719}$ | 6677994961 |

Tabela 12: Alguns números da interseção entre $Q_n$ e $N_m$.

**Exemplo 19.** *Vamos resolver $x^2 - 3y^2 = 46$ presente no Teorema 23. Para tal vamos utilizar o Teorema 18 para encontrar a soluções fundamentais da equação $x^2 - 3y^2 = 46$. A equação $x^2 - 3y^2 = 1$ tem solução fundamental igual a $(2, 1)$. Assim, precisaremos buscar $v$ no intervalo:*

$$0 \leq \quad v \quad \leq 2.$$

*Portanto, devemos testar os valores de $v$ = 0,1, ou 2.*

| $v$ | $u = \pm\sqrt{46 + 3v^2}$ | Solução |
|---|---|---|
| 0 | $\pm\sqrt{46 + 3 \times 0^2} = \sqrt{46} = \pm 6.78$ | Não |
| 1 | $\pm\sqrt{46 + 3 \times 1^2} = \sqrt{49} = \pm 7$ | Sim |
| 2 | $\pm\sqrt{46 + 3 \times 2^2} = \sqrt{58} = \pm 7.61$ | Não |

Tabela 13: Teste de alguns valores de $v$ na equação $x^2 - 3y^2 = 46$.

*Temos a solução $(\pm 7, 1)$. Resta verificar se as classes $(7, 1)$ e $(-7, 1)$ são ambíguas. Utilizando o Critério 1 temos:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{7 \times (-7) - 1 \times 1 \times 3}{46} = -\frac{52}{46} = -1.13$$

*No Teorema 23 fizemos as seguintes substituições* $x = 18m - 7$ *e* $y = 6n - 1$, *donde tiramos* $m = \dfrac{x+7}{18}$ *e* $n = \dfrac{y+1}{6}$. *Algumas soluções na classe* $7 + \sqrt{46}$. *Com as substituições* $\theta = 7 + \sqrt{3}$ *e* $\gamma = 2 + \sqrt{3}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{x+7}{18}$ | $n = \frac{y+1}{6}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\theta\gamma^0 = 7 + \sqrt{3}$ | $\frac{7+7}{18} = 0.77$ | $\frac{1+1}{6} = 0.33$ |
| 1 | $\theta\gamma^1 = 17 + 9\sqrt{3}$ | $\frac{17+7}{18} = 1.33$ | $\frac{9+1}{6} = 1.67$ |
| 2 | $\theta\gamma^2 = 61 + 35\sqrt{3}$ | $\frac{61+7}{18} = 3.78$ | $\frac{35+1}{6} = 6$ |
| 3 | $\theta\gamma^3 = 227 + 131\sqrt{3}$ | $\frac{227+7}{18} = 13$ | $\frac{131+1}{6} = 22$ |
| 4 | $\theta\gamma^4 = 847 + 489\sqrt{3}$ | $\frac{847+7}{18} = 47.44$ | $\frac{489+1}{6} = 81.67$ |
| 5 | $\theta\gamma^5 = 3161 + 1825\sqrt{3}$ | $\frac{3161+7}{18} = 176$ | $\frac{1825+1}{6} = 304.33$ |
| 6 | $\theta\gamma^6 = 11797 + 6811\sqrt{3}$ | $\frac{11797+7}{18} = 655.78$ | $\frac{6811+1}{6} = 1135.33$ |
| 7 | $\theta\gamma^7 = 44027 + 25419\sqrt{3}$ | $\frac{44027+7}{18} = 2446.33$ | $\frac{25419+1}{6} = 4236.67$ |
| 8 | $\theta\gamma^8 = 164311 + 94865\sqrt{3}$ | $\frac{164311+7}{18} = 9128.78$ | $\frac{94865+1}{6} = 15811$ |
| 9 | $\theta\gamma^9 = 613217 + 354041\sqrt{3}$ | $\frac{613217+7}{18} = 34068$ | $\frac{354041+1}{6} = 59007$ |
| 10 | $\theta\gamma^{10} = 2288557 + 1321299\sqrt{3}$ | $\frac{2288557+7}{18} = 127142.44$ | $\frac{1321299+1}{6} = 220216.67$ |

Tabela 14: Algumas soluções de $x^2 - 3y^2 = 46$ na classe $7 + \sqrt{3}$.

*Algumas soluções na classe* $-7 + \sqrt{3}$.

*Observação: Se* $x < 0$ *e* $y < 0$ *é uma solução da equação* $x^2 - Dy^2 = N$ *então* $-x > 0$ *e* $-y > 0$ *é também uma solução da equação* $x^2 - Dy^2 = N$.

*Na próxima tabela teremos* $\beta = -7 + \sqrt{3}$ *e* $\alpha = 2 + \sqrt{3}$.

| $i$ | Solução | $m = \frac{\lvert x\rvert+7}{18}$ | $n = \frac{\lvert y\rvert+1}{6}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\beta\alpha^1 = -11 - 5\sqrt{3}$ | $\frac{11+7}{18} = 1$ | $\frac{5+1}{6} = 1$ |
| 2 | $\beta\alpha^2 = -37 - 21\sqrt{3}$ | $\frac{37+7}{18} = 2.44$ | $\frac{21+1}{6} = 3.67$ |
| 3 | $\beta\alpha^3 = -137 - 79\sqrt{3}$ | $\frac{137+7}{18} = 8$ | $\frac{79+1}{6} = 13.33$ |
| 4 | $\beta\alpha^4 = -511 - 295\sqrt{3}$ | $\frac{511+7}{18} = 28.78$ | $\frac{295+1}{6} = 49.33$ |
| 5 | $\beta\alpha^5 = -1907 - 1101\sqrt{3}$ | $\frac{1907+7}{18} = 106.33$ | $\frac{1101+1}{6} = 183.67$ |
| 6 | $\beta\alpha^6 = -7117 - 4109\sqrt{3}$ | $\frac{7117+7}{18} = 395.78$ | $\frac{4109+1}{6} = 685$ |
| 7 | $\beta\alpha^7 = -26561 - 15335\sqrt{3}$ | $\frac{26561+7}{18} = 1476$ | $\frac{15335+1}{6} = 2556$ |
| 8 | $\beta\alpha^8 = -99127 - 57231\sqrt{3}$ | $\frac{99127+7}{18} = 5507.44$ | $\frac{57231+1}{6} = 9538.67$ |
| 9 | $\beta\alpha^9 = -369947 - 213589\sqrt{3}$ | $\frac{369947+7}{18} = 20553$ | $\frac{213589+1}{6} = 35598.33$ |
| 10 | $\beta\alpha^{10} = -1380661 - 797125\sqrt{3}$ | $\frac{1380661+7}{18} = 76703.78$ | $\frac{797125+1}{6} = 132854.33$ |

Tabela 15: Algumas soluções de $x^2 - 3y^2 = 46$ na classe $-7 + \sqrt{3}$.

*Com os dados presentes nestas duas tabelas já podemos mostrar os primeiros números da interseção entre $P_n$ e $p_{11}^m$:*

| $P_n$ | $p_{11}^m$ | Número Geométrico |
|---|---|---|
| $P_1$ | $p_{11}^1$ | 1 |
| $P_{22}$ | $p_{11}^{13}$ | 715 |
| $P_{2556}$ | $p_{11}^{1476}$ | 9798426 |
| $P_{59007}$ | $p_{11}^{34068}$ | 5222709570 |

Tabela 16: Alguns números da interseção entre $P_n$ e $p_{11}^m$.

**Exemplo 20.** *Vamos resolver $x^2 - 42y^2 = 57$ presente no Teorema 24. Vamos utilizar o Teorema 18 para encontrar as soluções fundamentais da equação $x^2 - 42y^2 = 57$. A equação $x^2 - 42y^2 = 1$ tem solução fundamental igual a $(13, 2)$. Assim, precisaremos buscar $v$ no intervalo:*

$$0 \leq \quad v \quad \leq 4.$$

*Portanto, devemos testar os valores de $v = 0,1,2,3$ ou $4$.*

| $v$ | $u = \pm\sqrt{57 + 42v^2}$ | Solução |
|---|---|---|
| 0 | $\sqrt{57 + 42 \times 0^2} = \sqrt{57} = \pm 7.54$ | Não |
| 1 | $\sqrt{57 + 42 \times 1^2} = \sqrt{99} = \pm 9.94$ | Não |
| 2 | $\sqrt{57 + 42 \times 2^2} = \sqrt{225} = \pm 15$ | Sim |
| 3 | $\sqrt{57 + 42 \times 3^2} = \sqrt{435} = \pm 20.85$ | Não |
| 4 | $\sqrt{57 + 42 \times 4^2} = \sqrt{729} = \pm 27$ | Sim |

Tabela 17: Teste de alguns valores de $v$ na equação $x^2 - 42y^2 = 57$.

*Temos duas soluções* $(\pm 15, 2)$ *e* $(\pm 27, 4)$. *Vamos verificar primeiramente se as soluções estão na mesma classe. Para isto, vamos aplicar o Critério 1:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{15 \times 27 - 2 \times 4 \times 42}{57} = \frac{69}{57} = 1.21$$

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{-15 \times 27 - 2 \times 4 \times 42}{57} = \frac{-741}{57} = -13$$

$$\frac{vu' - uv'}{N} = \frac{2 \times 27 - (-15) \times 4}{57} = \frac{114}{57} = 2$$

*Portanto, as soluções* $(\pm 27, 4)$ *pertencem a classe* $(-15, 2)$, *e desta forma, será descartada.*

*Vamos verificar se as classes* $(15, 2)$ *e* $(-15, 2)$ *são ambíguas. Utilizando o Critério 1 temos:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{15 \times (-15) - 2 \times 2 \times 42}{57} = \frac{-393}{57} = -6.8$$

*E desta forma, as classes* $(15, 2)$ *e* $(-15, 2)$ *não são ambíguas.*

*No Teorema 24 fizemos as seguintes substituições* $x = 42m - 15$ *e* $y = 6n - 2$, *donde tiramos* $m = \dfrac{x + 15}{42}$ *e* $n = \dfrac{y + 2}{6}$. *Algumas soluções na classe* $15 + 2\sqrt{42}$. *Com as substituições* $\theta = 15 + 2\sqrt{42}$ *e* $\gamma = 13 + 2\sqrt{42}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{x+15}{42}$ | $n = \frac{y+2}{6}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\theta\gamma^0 = (15 + 2\sqrt{42})$ | 0.71 | 0.66 |
| 1 | $\theta\gamma^1 = 363 + 56\sqrt{42}$ | 9 | 9.67 |
| 2 | $\theta\gamma^2 = 9423 + 1454\sqrt{42}$ | 224.71 | 242.67 |
| 3 | $\theta\gamma^3 = 244635 + 37748\sqrt{42}$ | 5825 | 6291.67 |
| 4 | $\theta\gamma^4 = 6351087 + 979994\sqrt{42}$ | 151216.71 | 163332.67 |
| 5 | $\theta\gamma^5 = 164883627 + 25442096\sqrt{42}$ | 3925801 | 4240349.67 |
| 6 | $\theta\gamma^6 = 4280623215 + 660514502\sqrt{42}$ | 101919600.71 | 110085750.67 |
| 7 | $\theta\gamma^7 = 111131319963 + 17147934956\sqrt{42}$ | 2645983809 | 2857989159.67 |

Tabela 18: Algumas soluções de $x^2 - 42y^2 = 57$ na classe $15 + 2\sqrt{42}$.

*Algumas soluções na classe* $-15 + 2\sqrt{42}$.

*Observação: Se* $x < 0$ *e* $y < 0$ *é uma solução da equação* $x^2 - Dy^2 = N$ *então* $-x > 0$ *e* $-y > 0$ *é também uma solução da equação* $x^2 - Dy^2 = N$.

*Com as substituições* $\beta = -15 + 2\sqrt{42}$ *e* $\alpha = 13 + 2\sqrt{42}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $n = \frac{\lvert y\rvert+2}{6}$ | $m = \frac{\lvert x\rvert+15}{42}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\beta\alpha^1 = -27 - 4\sqrt{42}$ | $\frac{4+2}{6} = 1$ | $\frac{27+15}{42} = 1$ |
| 2 | $\beta\alpha^2 = -687 - 106\sqrt{42}$ | $\frac{106+2}{6} = 18$ | $\frac{687+15}{42} = 16.71$ |
| 3 | $\beta\alpha^3 = -17835 - 2752\sqrt{42}$ | $\frac{2752+2}{6} = 459$ | $\frac{17835+15}{42} = 425$ |
| 4 | $\beta\alpha^4 = -463023 - 71446\sqrt{42}$ | $\frac{71446+2}{6} = 11908$ | $\frac{4006921+5}{42} = 11024.71$ |
| 5 | $\beta\alpha^5 = -12020763 - 1854844\sqrt{42}$ | $\frac{1854844+2}{6} = 309141$ | $\frac{12020763+15}{42} = 286209$ |
| 6 | $\beta\alpha^6 = -312076815 - 48154498\sqrt{42}$ | $\frac{48154498+2}{6} = 8025750$ | $\frac{312076815+15}{42} = 7430400.71$ |
| 7 | $\beta\alpha^7 = -8101976427 - 1250162104\sqrt{42}$ | $\frac{1250162104+2}{6} = 208360351$ | $\frac{8101976427+15}{42} = 192904201$ |

Tabela 19: Algumas soluções de $x^2 - 42y^2 = 57$ na classe $-15 + 2\sqrt{42}$.

*Com os dados destas duas tabelas já podemos mostrar os primeiros números da interseção entre* $O_n$ *e* $N_m$*:*

| $N_m$ | $O_n$ | Número Geométrico |
|---|---|---|
| $N_1$ | $O_1$ | 1 |
| $N_{425}$ | $O_{459}$ | 631125 |
| $N_{286209}$ | $O_{309141}$ | 286703855361 |
| $N_{192904201}$ | $O_{208360351}$ | 130242107189808901 |

Tabela 20: Alguns números da interseção entre $O_n$ e $N_m$.

**Exemplo 21.** *Vamos resolver $x^2 - 10y^2 = 9$ presente no Teorema 27. Vamos utilizar o Teorema 18 para encontrar as soluções fundamentais da equação $x^2 - 10y^2 = 9$. A equação $x^2 - 10y^2 = 1$ tem solução fundamental igual a $(19, 6)$. Assim, precisaremos buscar $v$ no intervalo:*

$$0 \leq \quad v \quad \leq 2.$$

*Portanto, devemos testar os valores de $v = 0{,}1$ ou 2.*

| $v$ | $u = \pm\sqrt{9 + 10v^2}$ | Solução |
|---|---|---|
| 0 | $\sqrt{9 + 10 \times 0^2} = \sqrt{9} = \pm 3$ | Sim |
| 1 | $\sqrt{9 + 10 \times 1^2} = \sqrt{29} = \pm 5.38$ | Não |
| 2 | $\sqrt{9 + 10 \times 2^2} = \sqrt{49} = \pm 7$ | Sim |

Tabela 21: Teste de alguns valores de $v$ na equação $x^2 - 10y^2 = 9$.

*Temos duas soluções $(\pm 3, 0)$ e $(\pm 7, 2)$. Vamos verficar se as soluções estão na mesma classe. Para isso vamos aplicar o Critério 1:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{3 \times 7 - 0 \times 2 \times 10}{9} = \frac{21}{9} = -2.33$$

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{-3 \times 7 - 0 \times 2 \times 10}{9} = -\frac{21}{9} = -2.33$$

*Portanto, as duas soluções não estão na mesma classe. Agora resta verificar se $(\pm 3, 0)$ é ambígua e $(\pm 7, 2)$ é ambígua.*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{3 \times (-3) - 0 \times 0 \times 10}{9} = \frac{-9}{9} = -1$$

$$\frac{vu' - v'u}{N} = \frac{0 \times (-3) - 0 \times 3}{9} = \frac{0}{9} = 0$$

*Desta forma,* $(\pm 3, 0)$ *é ambígua e devemos tomar somente* $(3, 0)$ *como classe fundamental.*

*Vamos agora verificar se as classes* $(7, 2)$ *e* $(-7, 2)$ *são ambíguas. Utilizando o Critério 1 temos:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{7 \times (-7) - 2 \times 2 \times 10}{9} = -\frac{59}{9} = -6.55$$

*No Teorema 27 fizemos as seguintes substituições* $x = 10m - 3$ *e* $y = 2n$*, donde tiramos* $m = \dfrac{x+3}{10}$ *e* $n = \dfrac{y}{2}$*. Algumas soluções na classe* $7 + 2\sqrt{10}$*. Com as substituições* $\beta = 7 + 2\sqrt{10}$ *e* $\alpha = 19 + 6\sqrt{10}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{x+3}{10}$ | $n = \frac{y}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\beta\alpha^0 = 7 + 2\sqrt{10}$ | 1 | 1 |
| 1 | $\beta\alpha^1 = 253 + 80\sqrt{10}$ | 25.6 | 40 |
| 2 | $\beta\alpha^2 = 9607 + 3038\sqrt{10}$ | 961 | 1519 |
| 3 | $\beta\alpha^3 = 364813 + 115364\sqrt{10}$ | 36481.6 | 57682 |
| 4 | $\beta\alpha^4 = 13853287 + 4380794\sqrt{10}$ | 1385329 | 2190397 |
| 5 | $\beta\alpha^5 = 526060093 + 166354808\sqrt{10}$ | 52606009.6 | 83177404 |
| 6 | $\beta\alpha^6 = 19976430247 + 6317101910\sqrt{10}$ | 1997643025 | 3158550955 |
| 7 | $\beta\alpha^7 = 758578289293 + 239883517772\sqrt{10}$ | 75857828929.6 | 119941758886 |
| 8 | $\beta\alpha^8 = 28805998562887 + 9109256573426\sqrt{10}$ | 2880599856289 | 4554628286713 |
| 9 | $\beta\alpha^9 = 1093869367100413 + 345911866272416\sqrt{10}$ | 109386936710041.6 | 172955933136208 |
| 10 | $\beta\alpha^{10} = 41538229951252807 + 13135541661778382\sqrt{10}$ | 4153822995125281 | 6567770830889191 |

Tabela 22: Algumas soluções de $x^2 - 10y^2 = 9$ na classe $7 + 2\sqrt{10}$.

*Algumas soluções na classe* $-7 + 2\sqrt{10}$*.*

*Com as substituições* $\theta = -7 + 2\sqrt{10}$ *e* $\gamma = 19 + 6\sqrt{10}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{\lvert x\rvert+3}{10}$ | $n = \frac{\lvert y\rvert}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\theta\gamma^1 = -13 - 4\sqrt{10}$ | 1.6 | 2 |
| 2 | $\theta\gamma^2 = -487 - 154\sqrt{10}$ | 49 | 77 |
| 3 | $\theta\gamma^3 = -18493 - 5848\sqrt{10}$ | 1849.6 | 2924 |
| 4 | $\theta\gamma^4 = -702247 - 222070\sqrt{10}$ | 70225 | 111035 |
| 5 | $\theta\gamma^5 = -26666893 - 8432812\sqrt{10}$ | 2666689.6 | 4216406 |
| 6 | $\theta\gamma^6 = -1012639687 - 320224786\sqrt{10}$ | 101263969 | 160112393 |
| 7 | $\theta\gamma^7 = -38453641213 - 12160109056\sqrt{10}$ | 3845364121.6 | 6080054528 |
| 8 | $\theta\gamma^8 = -1460225726407 - 461763919342\sqrt{10}$ | 146022572641 | 230881959671 |
| 9 | $\theta\gamma^9 = -55450123962253 - 17534868825940\sqrt{10}$ | 5545012396225.6 | 8767434412970 |
| 10 | $\theta\gamma^{10} = -2105644484839207 - 665863251466378\sqrt{10}$ | 210564448483921 | 332931625733189 |

Tabela 23: Algumas soluções de $x^2 - 10y^2 = 9$ na classe $-7 + 2\sqrt{10}$.

*Algumas soluções na classe* $3 + 0\sqrt{10}$. *Com as substituições* $\beta = 3 + 0\sqrt{10}$ *e* $\alpha = 19 + 6\sqrt{10}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{x+3}{10}$ | $n = \frac{y}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\beta\alpha^1 = 57 + 18\sqrt{10}$ | 6 | 9 |
| 2 | $\beta\alpha^2 = 2163 + 684\sqrt{10}$ | 216.6 | 342 |
| 3 | $\beta\alpha^3 = 82137 + 25974\sqrt{10}$ | 8214 | 12987 |
| 4 | $\beta\alpha^4 = 3119043 + 986328\sqrt{10}$ | 311904.6 | 493164 |
| 5 | $\beta\alpha^5 = 118441497 + 37454490\sqrt{10}$ | 11844150 | 18727245 |
| 6 | $\beta\alpha^6 = 4497657843 + 1422284292\sqrt{10}$ | 449765784.6 | 711142146 |
| 7 | $\beta\alpha^7 = 170792556537 + 54009348606\sqrt{10}$ | 17079255654 | 27004674303 |
| 8 | $\beta\alpha^8 = 6485619490563 + 2050932962736\sqrt{10}$ | 648561949056.6 | 1025466481368 |
| 9 | $\beta\alpha^9 = 246282748084857 + 77881443235362\sqrt{10}$ | 24628274808486 | 38940721617681 |
| 10 | $\beta\alpha^{10} = 9352258807734003 + 2957443909981020\sqrt{10}$ | 935225880773400.8 | 1478721954990510 |

Tabela 24: Algumas soluções de $x^2 - 10y^2 = 9$ na classe $3 + 0\sqrt{10}$.

*Com os dados presentes nestas três tabelas já podemos mostrar os primeiros números da interseção entre* $Q_n$ *e* $p_7^m$*:*

| $Q_n$ | $p_7^m$ | Número Geométrico |
|---|---|---|
| $Q_1$ | $p_7^m$ | 1 |
| $Q_9$ | $p_7^6$ | 81 |
| $Q_{77}$ | $p_7^{49}$ | 5929 |
| $Q_{1519}$ | $p_7^{961}$ | 2307361 |
| $Q_{12987}$ | $p_7^{8214}$ | 168662169 |
| $Q_{111035}$ | $p_7^{70225}$ | 12328771225 |
| $Q_{2190397}$ | $p_7^{1385329}$ | 4797839017609 |
| $Q_{18727245}$ | $p_7^{11844150}$ | 350709705290025 |
| $Q_{160112393}$ | $p_7^{101263969}$ | 25635978392186449 |
| $Q_{3158550955}$ | $p_7^{1997643025}$ | 9976444135331412025 |
| $Q_{27004674303}$ | $p_7^{17079255654}$ | 729252434211108535809 |
| $Q_{230881959671}$ | $p_7^{146022572641}$ | 5330647930152127042824 1 |
| $Q_{4554628286713}$ | $p_7^{2880599856289}$ | 20744638830126197732344369 |
| $Q_{38940721617681}$ | $p_7^{24628274808486}$ | 151637980010572835753181 7761 |
| $Q_{332931625733189}$ | $p_7^{210564448483921}$ | 1108434674133442359418161 09721 |
| $Q_{6567770830889191}$ | $p_7^{4153822995125281}$ | 43135613687078894324987720634481 |

Tabela 25: Alguns números da interseção entre $Q_n$ e $p_7^m$.

**Exemplo 22.** *Vamos resolver* $x^2 - 6y^2 = 10$ *presente no Teorema 28. Vamos utilizar o Teorema 18 para encontrar as soluções fundamentais da equação* $x^2 - 6y^2 = 10$. *A equação* $x^2 - 6y^2 = 1$ *tem solução fundamental igual a* $(5, 2)$. *Assim, precisaremos buscar* $v$ *no intervalo:*

$$0 \leq \quad v \quad \leq 1.$$

*Portanto, devemos testar os valores de* $v = 0$ *ou* $1$.

| $v$ | $u = \pm\sqrt{10+6v^2}$ | Solução |
|---|---|---|
| 0 | $\sqrt{10+6\times 0^2} = \sqrt{10} = \pm 3.16$ | Não |
| 1 | $\sqrt{10+6\times 1^2} = \sqrt{16} = \pm 4$ | Sim |

Tabela 26: Teste de alguns valores de $v$ na equação $x^2 - 6y^2 = 10$.

*Vamos verificar se* $(\pm 4, 1)$ *é ambígua. Para isto vamos aplicar o Critério 1:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{4\times(-4) - 1\times 1\times 6}{10} = -\frac{22}{10} = -2.2$$

*No Teorema 28 fizemos as seguintes substituições* $x = 12m - 4$ *e* $y = 2n + 1$, *donde tiramos* $m = \dfrac{x+4}{12}$ *e* $n = \dfrac{y-1}{2}$. *Algumas soluções na classe* $4 + \sqrt{6}$. *Com as substituições* $\beta = 4 + \sqrt{6}$ *e* $\alpha = 5 + 2\sqrt{6}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{x+4}{12}$ | $n = \frac{y-1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\beta\alpha^1 = 32 + 13\sqrt{6}$ | 3 | 6 |
| 2 | $\beta\alpha^2 = 316 + 129\sqrt{6}$ | 26.67 | 64 |
| 3 | $\beta\alpha^3 = 3128 + 1277\sqrt{6}$ | 261 | 638 |
| 4 | $\beta\alpha^4 = 30964 + 12641\sqrt{6}$ | 2580.67 | 6320 |
| 5 | $\beta\alpha^5 = 306512 + 125133\sqrt{6}$ | 25543 | 62566 |
| 6 | $\beta\alpha^6 = 3034156 + 1238689\sqrt{6}$ | 252846.67 | 619344 |
| 7 | $\beta\alpha^7 = 30035048 + 12261757\sqrt{6}$ | 2502921 | 6130878 |
| 8 | $\beta\alpha^8 = 297316324 + 121378881\sqrt{6}$ | 24776360.67 | 60689440 |
| 9 | $\beta\alpha^9 = 2943128192 + 1201527053\sqrt{6}$ | 245260683 | 600763526 |
| 10 | $\beta\alpha^{10} = 29133965596 + 11893891649\sqrt{6}$ | 2427830466.67 | 5946945824 |

Tabela 27: Algumas soluções de $x^2 - 6y^2 = 10$ na classe $4 + 2\sqrt{6}$.

*Algumas soluções na classe* $-4 + \sqrt{6}$. *Com as substituições* $\theta = -4 + \sqrt{6}$ *e* $\gamma = 5 + 2\sqrt{6}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{\lvert x\rvert+4}{12}$ | $n = \frac{\lvert y\rvert-1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\theta\gamma^1 = -8 - 3\sqrt{6}$ | 1 | 1 |
| 2 | $\theta\gamma^2 = -76 - 31\sqrt{6}$ | 6.67 | 15 |
| 3 | $\theta\gamma^3 = -752 - 307\sqrt{6}$ | 63 | 153 |
| 4 | $\theta\gamma^4 = -7444 - 3039\sqrt{6}$ | 620.67 | 1519 |
| 5 | $\theta\gamma^5 = -73688 - 30083\sqrt{6}$ | 6141 | 15041 |
| 6 | $\theta\gamma^6 = -729436 - 297791\sqrt{6}$ | 60786.67 | 148895 |
| 7 | $\theta\gamma^7 = -7220672 - 2947827\sqrt{6}$ | 601723 | 1473913 |
| 8 | $\theta\gamma^8 = -71477284 - 29180479\sqrt{6}$ | 5956440.67 | 14590239 |
| 9 | $\theta\gamma^9 = -707552168 - 288856963\sqrt{6}$ | 58962681 | 144428481 |
| 10 | $\theta\gamma^{10} = -7004044396 - 2859389151\sqrt{6}$ | 583670366.67 | 1429694575 |

Tabela 28: Algumas soluções de $x^2 - 6y^2 = 10$ na classe $-4 + 2\sqrt{6}$.

*Com estas duas tabelas já podemos mostrar os primeiros números da interseção entre $T_n$ e $O_n$:*

| $T_n$ | $O_m$ | Número Geométrico |
|---|---|---|
| $T_1$ | $O_1$ | 1 |
| $T_6$ | $O_3$ | 21 |
| $T_{153}$ | $O_{63}$ | 11781 |
| $T_{638}$ | $O_{261}$ | 203841 |
| $T_{15041}$ | $O_{6141}$ | 113123361 |
| $T_{62566}$ | $O_{25543}$ | 1957283461 |
| $T_{1473913}$ | $O_{601723}$ | 1086210502741 |
| $T_{6130878}$ | $O_{2502921}$ | 18793835590881 |
| $T_{144428481}$ | $O_{58962681}$ | 10429793134197921 |
| $T_{600763526}$ | $O_{245260683}$ | 180458407386358101 |

Tabela 29: Alguns números da interseção entre $T_n$ e $O_m$.

**Exemplo 23.** *Vamos resolver $x^2 - 5y^2 = 4$ presente no Teorema 29. Vamos utilizar o Teorema 18 para encontrar as soluções fundamentais da equação $x^2 - 5y^2 = 4$. A*

*equação* $x^2 - 5y^2 = 1$ *tem solução fundamental igual a* $(9, 4)$. *Assim, precisaremos buscar* $v$ *no intervalo:*

$$0 \leq \quad v \quad \leq 1.$$

*Portanto, devemos testar os valores de* $v = 0$ *ou* $1$.

| $v$ | $u = \pm\sqrt{4 + 5v^2}$ | Solução |
|---|---|---|
| 0 | $\sqrt{4 + 5 \times 0^2} = \sqrt{4} = \pm 2$ | Sim |
| 1 | $\sqrt{4 + 5 \times 1^2} = \sqrt{9} = \pm 3$ | Sim |

Tabela 30: Teste de alguns valores de $v$ na equação $x^2 - 6y^2 = 10$.

*Temos duas soluções* $(\pm 2, 0)$ *e* $(\pm 3, 1)$. *Vamos verficar se as soluções estão na mesma classe. Para isso vamos aplicar o Critério 1:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{2 \times 3 - 0 \times 1 \times 5}{4} = \frac{6}{4} = 1.25$$

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{-2 \times 3 - 0 \times 1 \times 5}{4} = -\frac{6}{4} = -1.25$$

*Portanto, as duas soluções não estão na mesma classe. Agora resta verificar se* $(\pm 2, 0)$ *é ambígua e* $(\pm 3, 1)$ *é ambígua.*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{2 \times (-2) - 0 \times 0 \times 5}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\frac{vu' - v'uD}{N} = \frac{0 \times (-2) - 0 \times 2 \times 5}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

*Desta forma,* $(\pm 2, 0)$ *é ambígua e vamos tomar apenas* $(2, 0)$ *como classe fundamental. Agora aplicando o Critério 1* $(\pm 3, 1)$ *temos:*

$$\frac{uu' - vv'D}{N} = \frac{3 \times (-3) - 1 \times 1 \times 5}{4} = \frac{-14}{4} = -3.5$$

*No Teorema 29 fizemos as seguintes substituições* $x = 10m - 3$ *e* $y = 2n + 1$, *donde tiramos* $m = \dfrac{x+3}{10}$ *e* $n = \dfrac{y-1}{2}$. *Algumas soluções na classe* $3 + \sqrt{5}$. *Com as substituições* $\beta = 3 + \sqrt{5}$ *e* $\alpha = 9 + 4\sqrt{5}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{x+3}{10}$ | $n = \frac{y-1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\beta\alpha^1 = 47 + 21\sqrt{5}$ | 5 | 10 |
| 2 | $\beta\alpha^2 = 843 + 377\sqrt{5}$ | 84.6 | 188 |
| 3 | $\beta\alpha^3 = 15127 + 6765\sqrt{5}$ | 1513 | 3382 |
| 4 | $\beta\alpha^4 = 271443 + 121393\sqrt{5}$ | 27144.6 | 60696 |
| 5 | $\beta\alpha^5 = 4870847 + 2178309\sqrt{5}$ | 487085 | 1089154 |
| 6 | $\beta\alpha^6 = 87403803 + 39088169\sqrt{5}$ | 8740380.6 | 19544084 |
| 7 | $\beta\alpha^7 = 1568397607 + 701408733\sqrt{5}$ | 156839761 | 350704366 |
| 8 | $\beta\alpha^8 = 28143753123 + 12586269025\sqrt{5}$ | 2814375312.6 | 6293134512 |
| 9 | $\beta\alpha^9 = 505019158607 + 225851433717\sqrt{5}$ | 50501915861 | 112925716858 |
| 10 | $\beta\alpha^{10} = 9062201101803 + 4052739537881\sqrt{5}$ | 906220110180.6 | 2026369768940 |

Tabela 31: Algumas soluções de $x^2 - 5y^2 = 4$ na classe $3 + \sqrt{5}$.

*Algumas soluções na classe* $-3 + \sqrt{5}$. *Com as substituições* $\theta = -3 + \sqrt{5}$ *e* $\gamma = 9 + 4\sqrt{5}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{\lvert x\rvert+3}{10}$ | $n = \frac{\lvert y\rvert-1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\theta\gamma^1 = -7 - 3\sqrt{5}$ | 1 | 1 |
| 2 | $\theta\gamma^2 = -123 - 55\sqrt{5}$ | 12.6 | 27 |
| 3 | $\theta\gamma^3 = -2207 - 987\sqrt{5}$ | 221 | 493 |
| 4 | $\theta\gamma^4 = -39603 - 17711\sqrt{5}$ | 3960.6 | 8855 |
| 5 | $\theta\gamma^5 = -710647 - 317811\sqrt{5}$ | 71065 | 158905 |
| 6 | $\theta\gamma^6 = -12752043 - 5702887\sqrt{5}$ | 1275204.6 | 2851443 |
| 7 | $\theta\gamma^7 = -228826127 - 102334155\sqrt{5}$ | 22882613 | 51167077 |
| 8 | $\theta\gamma^8 = -4106118243 - 1836311903\sqrt{5}$ | 410611824.6 | 918155951 |
| 9 | $\theta\gamma^9 = -73681302247 - 32951280099\sqrt{5}$ | 7368130225 | 16475640049 |
| 10 | $\theta\gamma^{10} = -1322157322203 - 591286729879\sqrt{5}$ | 132215732220.6 | 295643364939 |

Tabela 32: Algumas soluções de $x^2 - 5y^2 = 4$ na classe $-3 + \sqrt{5}$.

*Algumas soluções na classe* $2+0\sqrt{5}$. *Com as substituições* $\xi = 2+0\sqrt{5}$ *e* $\eta = 9+4\sqrt{5}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{x+3}{10}$ | $n = \frac{y-1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\xi\eta^1 = 18 + 8\sqrt{5}$ | 2.1 | 3.5 |
| 2 | $\xi\eta^2 = 322 + 144\sqrt{5}$ | 32.5 | 71.5 |
| 3 | $\xi\eta^3 = 5778 + 2584\sqrt{5}$ | 578.1 | 1291.5 |
| 4 | $\xi\eta^4 = 103682 + 46368\sqrt{5}$ | 10368.5 | 23183.5 |
| 5 | $\xi\eta^5 = 1860498 + 832040\sqrt{5}$ | 186050.1 | 416019.5 |
| 6 | $\xi\eta^6 = 33385282 + 14930352\sqrt{5}$ | 3338528.5 | 7465175.5 |
| 7 | $\xi\eta^7 = 599074578 + 267914296\sqrt{5}$ | 59907458.1 | 133957147.5 |
| 8 | $\xi\eta^8 = 10749957122 + 4807526976\sqrt{5}$ | 1074995712.5 | 2403763487.5 |
| 9 | $\xi\eta^9 = 192900153618 + 86267571272\sqrt{5}$ | 19290015362.1 | 43133785635.5 |
| 10 | $\xi\eta^{10} = 3461452808002 + 1548008755920\sqrt{5}$ | 346145280800.5 | 774004377959.5 |

Tabela 33: Algumas soluções de $x^2 - 5y^2 = 4$ na classe $2 + 0\sqrt{5}$.

*Com os dados presentes nestas três tabelas já podemos mostrar os primeiros números da interseção entre $T_n$ e $p_7^m$:*

| $T_n$ | $p_7^m$ | Número Geométrico |
|---|---|---|
| $T_1$ | $p_7^1$ | 1 |
| $T_{10}$ | $p_7^5$ | 55 |
| $T_{493}$ | $p_7^{221}$ | 121771 |
| $T_{3382}$ | $p_7^{1513}$ | 5720653 |
| $T_{158905}$ | $p_7^{71065}$ | 12625478965 |
| $T_{1089154}$ | $p_7^{487085}$ | 593128762435 |
| $T_{51167077}$ | $p_7^{22882613}$ | 1309034909945503 |
| $T_{350704366}$ | $p_7^{156839761}$ | 61496776341083161 |
| $T_{16475640049}$ | $p_7^{7368130225}$ | 135723357520344181225 |
| $T_{112925716858}$ | $p_7^{50501915861}$ | 6376108764003055554511 |

Tabela 34: Alguns números da interseção entre $T_n$ e $p_7^m$.

**Exemplo 24.** *Vamos resolver $x^2 - 30y^2 = 546$ presente no Teorema 30. Vamos utilizar o Teorema 18 para encontrar as soluções fundamentais da equação $x^2 - 30y^2 = 546$. A*

*equação* $x^2 - 30y^2 = 1$ *tem solução fundamental igual a* $(11, 2)$. *Assim, precisaremos buscar* $v$ *no intervalo:*

$$0 \leq \quad v \quad \leq 9.$$

*Portanto, devemos testar os valores de* $v = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$ *ou* $9$.

| $v$ | $u = \pm\sqrt{546 + 30v^2}$ | Solução |
|---|---|---|
| 0 | $\sqrt{546 + 30 \times 0^2} = \sqrt{546} = \pm 23.36$ | Não |
| 1 | $\sqrt{546 + 30 \times 1^2} = \sqrt{576} = \pm 24$ | Sim |
| 2 | $\sqrt{546 + 30 \times 2^2} = \sqrt{666} = \pm 25.80$ | Não |
| 3 | $\sqrt{546 + 30 \times 3^2} = \sqrt{816} = \pm 28.56$ | Não |
| 4 | $\sqrt{546 + 30 \times 4^2} = \sqrt{1026} = \pm 32.03$ | Não |
| 5 | $\sqrt{546 + 30 \times 5^2} = \sqrt{1296} = \pm 36$ | Sim |
| 6 | $\sqrt{546 + 30 \times 6^2} = \sqrt{1626} = \pm 40.32$ | Não |
| 7 | $\sqrt{546 + 30 \times 7^2} = \sqrt{2016} = \pm 44.89$ | Não |
| 8 | $\sqrt{546 + 30 \times 8^2} = \sqrt{2466} = \pm 49.65$ | Não |
| 9 | $\sqrt{546 + 30 \times 9^2} = \sqrt{2976} = \pm 54.55$ | Não |

Tabela 35: Teste de alguns valores de $v$ na equação $x^2 - 30y^2 = 546$.

*Temos duas soluções* $(\pm 24, 1)$ *e* $(\pm 36, 5)$. *Pode-se mostrar aplicando o Critério 1 que elas não são ambíguas.*

*No Teorema 30 fizemos as seguintes substituições* $x = 60m - 24$ *e* $y = 6n - 1$, *donde tiramos* $m = \dfrac{x + 24}{60}$ *e* $n = \dfrac{y + 1}{6}$. *Algumas soluções na classe* $36 + 5\sqrt{30}$. *Com as substituições* $\beta = 36 + 5\sqrt{30}$ *e* $\alpha = 11 + 2\sqrt{30}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{x+24}{60}$ | $n = \frac{y+1}{6}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\beta\alpha^0 = 36 + 5\sqrt{30}$ | 1 | 1 |
| 1 | $\beta\alpha^1 = 696 + 127\sqrt{30}$ | 12 | 21.33 |
| 2 | $\beta\alpha^2 = 15276 + 2789\sqrt{30}$ | 255 | 465 |
| 3 | $\beta\alpha^3 = 335376 + 61231\sqrt{30}$ | 5590 | 10205.33 |
| 4 | $\beta\alpha^4 = 7362996 + 1344293\sqrt{30}$ | 122717 | 224049 |
| 5 | $\beta\alpha^5 = 161650536 + 29513215\sqrt{30}$ | 2694176 | 4918869.33 |
| 6 | $\beta\alpha^6 = 3548948796 + 647946437\sqrt{30}$ | 59149147 | 107991073 |
| 7 | $\beta\alpha^7 = 77915222976 + 14225308399\sqrt{30}$ | 1298587050 | 2370884733.33 |
| 8 | $\beta\alpha^8 = 1710585956676 + 312308838341\sqrt{30}$ | 28509765945 | 52051473057 |
| 9 | $\beta\alpha^9 = 37554975823896 + 6856569135103\sqrt{30}$ | 625916263732 | 1142761522517.33 |
| 10 | $\beta\alpha^{10} = 824498882169036 + 150532212133925\sqrt{30}$ | 13741648036151 | 25088702022321 |

Tabela 36: Algumas soluções de $x^2 - 30y^2 = 546$ na classe $36 + 5\sqrt{30}$.

*Algumas soluções na classe* $-36 + 5\sqrt{30}$. *Com as substituições* $\theta = -36 + 5\sqrt{30}$ *e* $\gamma = 11 + 2\sqrt{30}$ *teremos:*

| $i$ | Solução | $m = \frac{\lvert x\rvert+24}{60}$ | $n = \frac{\lvert y\rvert+1}{6}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\theta\gamma^1 = -96 - 17\sqrt{30}$ | 2 | 3 |
| 2 | $\theta\gamma^2 = -2076 - 379\sqrt{30}$ | 35 | 63.33 |
| 3 | $\theta\gamma^3 = -45576 - 8321\sqrt{30}$ | 760 | 1387 |
| 4 | $\theta\gamma^4 = -1000596 - 182683\sqrt{30}$ | 16677 | 30447.33 |
| 5 | $\theta\gamma^5 = -21967536 - 4010705\sqrt{30}$ | 366126 | 668451 |
| 6 | $\theta\gamma^6 = -482285196 - 88052827\sqrt{30}$ | 8038087 | 14675471.33 |
| 7 | $\theta\gamma^7 = -10588306776 - 1933151489\sqrt{30}$ | 176471780 | 322191915 |
| 8 | $\theta\gamma^8 = -232460463876 - 42441279931\sqrt{30}$ | 3874341065 | 7073546655.33 |
| 9 | $\theta\gamma^9 = -5103541898496 - 931775006993\sqrt{30}$ | 85059031642 | 155295834499 |
| 10 | $\theta\gamma^{10} = -112045461303036 - 20456608873915\sqrt{30}$ | 1867424355051 | 3409434812319.33 |

Tabela 37: Algumas soluções de $x^2 - 30y^2 = 546$ na classe $-36 + 5\sqrt{30}$.

*Com estas duas tabelas já podemos mostrar os primeiros números da interseção*

*entre $P_n$ e $p_{12}^m$:*

| $P_n$ | $p_{12}^m$ | Número Geométrico |
|---|---|---|
| $P_1$ | $p_{12}^1$ | 1 |
| $P_3$ | $p_{12}^2$ | 12 |
| $P_{465}$ | $p_{12}^{255}$ | 324105 |
| $P_{1387}$ | $p_{12}^{760}$ | 2884960 |
| $P_{224049}$ | $p_{12}^{122717}$ | 75296819577 |
| $P_{668451}$ | $p_{12}^{366126}$ | 670239774876 |
| $P_{107991073}$ | $p_{12}^{107991073}$ | 17493107717541457 |
| $P_{322191915}$ | $p_{12}^{176471780}$ | 155711444975954880 |
| $P_{52051473057}$ | $p_{12}^{28509765945}$ | 4064033771079369651345 |
| $P_{155295834499}$ | $p_{12}^{85059031642}$ | 36175194319033549954252 |

Tabela 38: Alguns números da interseção entre $P_n$ e $p_{12}^m$.

# Referências


[1] ANDO, Shiro. **A Note on the Polygonal Numbers**. The Fibonacci Quarterly, 19(2), p. 180-183, 1981.

[2] ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin; CUCUREZEANU, Ion. **An Introduction to Diophantine Equations : A problem-based Approach**. Boston: Birkhauser, 2010. p. 345.

[3] BURTON, David M.. **Elementary Number Theory**. 7. ed. New York: McGraw-Hill, 2011. p. 434.

[4] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta**. Rio De Janeiro: Sociedade Brasileira Matemática, 2012. p. 200.

[5] COOK, Charles K.; BACON, Michael R.. **Some Polygonal Number Summation Formulas**. The Fibonacci Quarterly, 52(4), p. 336-343, 2014.

[6] DELEON, M. J.. **Pell's Equation and Pell Number Triples**. The Fibonacci Quarterly, 14(5), p. 456-460, 1976.

[7] DICKSON, Leonard Eugene. **History of the theory of numbers. Volume II: Diophantine Analysis**. New York: American Mathematical Society, 1999. p. 1602.

[8] EGGAN, L. C.; EGGAN, Peter C.; SELFRIDGE, J. L.. **Polygonal products of polygonal numbers and the pell equation**. The Fibonacci Quarterly, 20(1), p. 24-28, 1982.

[9] HANSEN, Rodney T.. **Arithmetic of pentagonal numbers**. The Fibonacci Quarterly, 8(1), p. 83-87, 1970.

[10] HEATH, Thomas Little. **A History of Greek Mathematics. Volume I: From Thales to Euclid**. London: Oxford University Press, 1921. p. 476. Disponível em: `https://archive.org/details/cu31924008704219`. Acesso em: 13/03/2015.

[11] HINDIN, Harvey J.. **A Theorem Concerning Heptagonal Numbers**. The Fibonacci Quarterly, 18(3), p. 258-259, 1980.

[12] HIROSE, Shoichi. **On some polygonal numbers which are, at the same time, the sums, differences and products of two other polygonal numbers**. The Fibonacci Quarterly, 24(2), p. 24-28, 1981.

[13] KOSHY, Thomas. **Elementary Number Theory with Applications**. 2. ed. California: Academic Press, 2007. p. 801.

[14] LENSTRA JUNIOR, H. W.. **Solving the pell equation**. Notices of the American Mathematical Society, 49, No. 2, p. 182-192, 2002.

[15] MOLLIN, Richard A.. **Simple continued fraction solutions for Diophantine Equations**. Expositiones Mathematicae, 19, No 1, 55-73, 2001.

[16] MOLLIN, Richard A.. **Fundamental Number Theory with Applications**. 2. ed. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008. p. 380.

[17] MORREIRA, Carlos Gustavo T. de A.. **Sequências recorrentes**. 2008. Disponível em: http://w3.impa.br/g̃ugu/SequenciasRecorrentes.pdf. Acesso em: 13/03/2015.

[18] MORREIRA, Carlos Gustavo T. de A.; MARTÍNEZ, Fábio E. Brochero; SALDANHA, Nicolau C.. **Tópicos de teoria dos números**. Rio De Janeiro: Sociedade Brasileira Matemática, 2012. p. 248.

[19] NAGELL, Trygve. **Introduction to Number Theory**. New York: American Mathematical Society, 2001. p. 309.

[20] ROBERTSON, John P.. **Solving the genaralized pell equation** $x^2 - Dy^2 = N$. 2004. Disponível em: `http://www.jpr2718.org/pell.pdf`. Acesso em: 13/03/2015.

[21] ROBERTSON, John P.. **Characterization of fundamental solutions to generalized pell equations**. 2014. Disponível em: `http://www.jpr2718.org/Characterization of Fundamental Solutions-Long Version.pdf`. Acesso em: 13/03/2015.