Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão

Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

# A Importância da Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem

Herton Renz Júnior

Catalão

2015

sibi sistema de bibliotecas ufg

UFG

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:** **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

**2. Identificação do Trabalho**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Autor (a):** | Herton Renz Júnior | | | | | |
| **E-mail:** | herton_junior@hotmail.com | | | | | |
| **Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?** [x]Sim [ ] Não | | | | | | |
| **Vínculo empregatício do autor:** | Não existente. | | | | | |
| **Agência de fomento:** | Não existente. | | | | **Sigla:** | Não há. |
| **País:** | Brasil | **UF:** | GO | **CNPJ:** | Não existente. | |
| **Título:** | A Importância da Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem. | | | | | |
| **Palavras-chave:** | Modelagem Matemática; ensino-aprendizagem. | | | | | |
| **Título em outra língua:** | The Importance of Mathematical Modeling in Teaching and Learning. | | | | | |
| **Palavras-chave em outra língua:** | Mathematical Modeling; teaching and learning. | | | | | |
| **Área de concentração:** | Matemática do Ensino Básico | | | | | |
| **Data defesa: (dd/mm/aaaa)** | 29/05/2015 | | | | | |
| **Programa de Pós-Graduação:** | Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. | | | | | |
| **Orientador (a):** | Plíno José Oliveira | | | | | |
| **E-mail:** | plinio127@gmail.com | | | | | |
| **Co-orientador(a):*** | Não existente. | | | | | |
| **E-mail:** | Não existente. | | | | | |

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento? [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Herton Renz Júnior

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 15 / 06 / 15

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

**Herton Renz Júnior**

# A Importância da Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

**Área de Concentração:** Matemática do Ensino Básico.
**Orientador:** Prof. Dr. Plínio José Oliveira

Catalão

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Renz, Herton Júnior
A Importância da Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem [manuscrito] / Herton Júnior Renz. - 2015.
LXXI, 62 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Plínio José Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Modelagem Matemática. 2. Ensino-Aprendizagem. I. Oliveira, Plínio José, orient. II. Título.

## Herton Renz Júnior

# A IMPORTÂNCIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO-APRENDIZAGEM

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Departamento de Matemática da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 29 de maio de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Plínio José Oliveira

**Prof. Dr. Plínio José Oliveira**
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

**Prof. Dr. Glen César Lemos**
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias de Goiás – IFG

**Prof. Dr. Romes Antonio Borges**
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

**Herton Renz Júnior** graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela UNOESTE Universidade do Oeste Paulista em 2005. Em 2007 concluiu o curso de pós-graduação em Docência do Ensino Superior na Universidade Candido Mendes. Adquiriu especialização em Matemática e Estatística pela Universidade Federal de Lavras em 2009. Atualmente é professor efetivo da Secretaria de Estado de Educação de Goiás e da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal. É também professor de educação superior na Faculdade Anhanguera de Taguatinga.

Dedico este trabalho a todos os meus professores que, de alguma forma, contribuíram para a construção do meu conhecimento. Dedico também a todos os meus colegas de trabalho que me acompanharam nesses longos anos de magistério. E dedico, de forma especial, a todos os meus alunos, pois estes são a razão pela qual cheguei até aqui.

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por todos os dias que Ele me ofereceu para caminhar ao encontro das conquistas na trajetória da minha existência. Agradeço à minha filha Jennifer Silva Renz e aos meus sobrinhos Vinícius Renz Mendes, Ulisses Renz Belarmino, Lavínia de Sousa Renz e Álvaro Luís Renz que me proporcionam os momentos mais felizes da minha vida. Agradeço especialmente à minha mãe Lurdes Renz, que tanto me amou, e ao meu pai Herton Renz, por me tornar o homem que sou. À minha amada e companheira Laura Elise Alves Zica, por estar presente comigo durante a trajetória deste curso. Aos meus irmãos Jaqueline Fabiana Renz e Marcus Vinícius Renz, que me estenderam a mão nos momentos em que mais precisei. Aos meus amigos, por compartilharem da minha alegria em viver. Agradeço àqueles que foram mais que bons amigos: Lourival Carlos Cunha Júnior e Elismar José de Araújo, pois muito contribuíram para a realização desse sonho. Ao professor doutor e orientador Plínio José Oliveira, pelo apoio e encorajamento contínuos na pesquisa. Agradeço também aos demais Mestres e Doutores da casa, pelos conhecimentos transmitidos, e à Diretoria do curso de mestrado da Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, pelo apoio institucional e pelas facilidades oferecidas. Por fim, agradeço a CAPES pelo suporte financeiro que tanto contribui para o custeio do meu curso.

# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a Modelagem Matemática como uma proposta alternativa para uma aprendizagem significativa, dinâmica e eficaz. Neste sentido, os aspectos favoráveis e os obstáculos para um ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática serão citados no decorrer da obra. Inicia-se a conversa com um breve resumo do surgimento da Modelagem Matemática na educação mundial e no Brasil, a fim de compreender sua real importância no atual cenário escolar. Os conceitos necessários para a definição de Modelagem Matemática são apresentados no desenvolvimento da obra dando ênfase para as fases da Modelagem Matemática propostas por Lourdes Werle Almeida em seu livro "Modelagem Matemática na Educação Básica". O trabalho ainda apresenta a Modelagem Matemática como ferramenta no ensino da Matemática, destacando os cinco passos para se pôr em prática a metodologia de ensino através da modelação sugeridos por Maria Salett Biembengut e Nelson Heim, no livro "Modelagem Matemática no Ensino". Destaca-se também a materialização da Modelagem Matemática, conforme Jonei Cerqueira Barbosa, identificando os três possíveis casos de distribuição das tarefas de modelação para professores e alunos. O trabalho relata a importância da utilização dos modelos matemáticos clássicos na iniciação de atividades de Modelagem Matemática. O modelo matemático proposto por Tales para calcular a altura de uma pirâmide, descrito por Johannes Hisrschberger na obra História da Filosofia na Antiguidade, e o modelo de Malthus para acompanhar o crescimento populacional, relatado por Rodney Carlos Bassanezi, são mencionados para se ter conhecimento da evolução dos modelos matemáticos clássicos. A proposta do modelo matemático clássico para calcular áreas por fracionamento em figuras planas é sugerida para os níveis de educação fundamental, médio e superior, concretizando a ideia de que, através das adaptações, o mesmo tema pode ser explorado em diferentes momentos do ensino da Matemática. Por fim, a obra apresenta três atividades desenvolvidas em sala de aula com alunos do Ensino Médio para que se pudesse vivenciar na prática a importância da Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem.

**Palavras-chave:**

Modelagem Matemática; ensino-aprendizagem.

# Abstract

This study aims to present the Mathematical Modeling as an alternative proposal for a significant, dynamic and effective learning. In this sense, the favorable aspects and obstacles to teaching and learning with mathematical modeling will be cited in the course of the work. It begins the conversation with a brief overview of the rise of Mathematical Modeling in the global education and Brazil in order to understand their real importance in the current school setting. The concepts necessary for the mathematical definition of modeling are presented in the development of work with emphasis on the phases of the Mathematical Modeling proposed by Lourdes Almeida Werle in his book "Mathematical Modeling in Basic Education". The paper also describes the mathematical modeling as a tool in the teaching of mathematics, highlighting the five steps to implement the methodology of teaching by modeling suggested by Maria Salett Biembengut and Nelson Heim, in the book "Mathematical Modeling in Education". It also highlights the materialization of the Mathematical Modeling as Jonei Cerqueira Barbosa, identifying three possible cases of distribution of the modeling tasks for teachers and students. The paper describes the importance of using the classical mathematical models in the initiation of mathematical modeling activities. The mathematical model proposed by Thales to calculate the height of a pyramid, described by Johannes Hisrschberger in the work history of philosophy in antiquity, and the model of Malthus to keep up with population growth, reported by Rodney Carlos Bassanezi, are mentioned to be aware of evolution of the classic mathematical models. The proposal of the classical mathematical model to calculate areas by division into plane figures is suggested for elementary education, secondary and higher education, realizing the idea that, by adaptations, the same theme can be explored at different times of mathematics teaching. Finally, the work presents three activities in the classroom with high school students so that they could live in practice the importance of Mathematical Modeling in teaching and learning.

**Keywords:**

Mathematical Modeling; teaching and learning.

# Lista de Figuras

# Sumário

# 1 Introdução

Muitos são os casos em que alunos perguntam ao professor o motivo pelo qual se deve estudar determinados conteúdos de Matemática, para que servem tais conteúdos ou se, em algum dia, esses conteúdos terão utilidade. Isto tem acontecido porque a atual educação segue moldes tradicionais de ensino visando uma Matemática apresentada por meio de um conjunto de regras e técnicas que se importa somente na parte mecânica de como fazer, sem se importar do porque fazer e para que fazer.

O professor tem utilizado em sala de aula situações que fogem da realidade do aluno, sem significado algum em suas vidas, o que certamente dificultará sua participação no desenvolvimento da aprendizagem. Desta forma, tais situações apenas servirão para justificar o conteúdo estudado.

Caldeira (2007) afirma que as escolas estão focadas em apenas repassar conteúdos, de forma descontextualizada, fragmentada e pouco centrada nos estudantes. Os conteúdos são trabalhados separadamente sem apresentar relação com os demais. Para Lima (2001), o maior defeito no ensino da Matemática em todas as séries escolares é a falta de aplicações para os conteúdos estudados em sala.

Um caminho para que a escola possa contribuir para a aprendizagem do próprio aluno é repensar numa proposta pedagógica democrática, crítica e reflexiva sobre o seu papel, de modo que o estudante seja o elemento principal da aprendizagem. É de fundamental importância que o professor de Matemática comece a refletir em sua prática pedagógica, no sentido de encontrar novas estratégias e metodologias que possam fazer o ensino da Matemática ficar mais próximo do contexto do aluno. Nesta perspectiva, apresenta-se a Modelagem Matemática como uma ferramenta de contribuição para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, no intuito de motivar e estimular a construção do conhecimento matemático.

Aplicações matemáticas apresentadas através de modelos exigem um comportamento ativo de professores e alunos na própria definição de problemas e não apenas na resolução de problemas já propostos que aparecem nos livros didáticos. Um ensino com Modelagem Matemática permite refletir sobre a realidade, compreendendo e agindo sobre ela ao formalizá-la através de um modelo matemático. Assim, conforme Bassanezi (1994):

> *Modelagem Matemática é um processo que consiste em traduzir uma situação ou tema do meio que vivemos para uma linguagem matemática. Essa linguagem que denominamos modelo matemático pressupõe um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o fenômeno em questão.*

Existem diversas formas de entender uma atividade de Modelagem Matemática. Conforme Biembengut (2014):

> *Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de Matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.*

Este ainda não é um procedimento usual na educação básica. Daí a importância de realizar a integração de atividades de Modelagem Matemática às aulas, com a expectativa de que se criem perspectivas otimistas em relação ao uso da modelagem durante a prática docente. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar a Modelagem Matemática e partilhar algumas experiências desenvolvidas em sala de aula. A obra está dividida em quatro capítulos.

No capítulo 2 é apresentado um breve relato sobre o surgimento da Modelagem Matemática no cenário internacional e também no Brasil, além de também apresentar definições a respeito de modelo matemático e Modelagem Matemática, descrevendo as fases de uma atividade de modelação propostas por Lourdes Werle de Almeida, em sua obra "Modelagem Matemática na Educação Básica".

No capítulo 3, tem-se a Modelagem Matemática como uma proposta para a dinamização do ensino-aprendizagem de Matemática nas escolas, apontando as possíveis falhas provocadas pelo ensino tradicional e enumerando as vantagens de se trabalhar com modelos matemáticos. Ainda neste capítulo têm-se os passos propostos por Maria Salett Biembengut e Nelson Heim, na obra "Modelagem Matemática no Ensino", para a inserção da Modelagem Matemática em sala de aula. O capítulo descreve também como a Modelagem Matemática é materializada em sala de aula, segundo Jonei Cerqueira Barbosa, e encerra-se com os obstáculos enfrentados ao se propor um ensino de Matemática através da Modelagem Matemática.

No capítulo 4, tem-se a apresentação de alguns modelos matemáticos clássicos, como o modelo de Tales para calcular a altura de uma pirâmide e o modelo de Malthus para determinar o crescimento de uma população, que muito contribuíram para a evolução do conhecimento. Neste capítulo têm-se ainda sugestões para a utilização do modelo matemático clássico de decompor uma figura geométrica plana para o cálculo de sua área, apresentado por Lourdes Werle Almeida, nos diferentes níveis do ensino.

Por fim, no capítulo 5 tem-se a apresentação de três experiências com Modelagem Matemática realizadas em sala de aula: "obtendo o volume das esferas", "a forma ideal para a embalagem do leite" e "calculando a vazão de água de um córrego". Os experimentos são adaptações de modelos idealizados por outros pesquisadores que muito contribuíram para a concretização do presente trabalho.

# 2 O que é Modelagem Matemática?

A Modelagem Matemática surge com a necessidade do homem em dominar o meio em que vive e é tão antiga quanto a própria Matemática. Desde a construção da primeira roda até os dias atuais têm-se relatos de modelos matemáticos que muito contribuíram para a evolução da espécie humana.

Antes de conceituar Modelagem Matemática é importante relatar como ocorreu o seu surgimento no Brasil e no mundo e também definir o que é modelo matemático, uma vez que o ato de modelar consiste em criar um modelo, conforme veremos a seguir.

## 2.1 O surgimento da Modelagem Matemática no Ensino

Segundo Biembengut (2009), nas primeiras décadas do século XX aconteceram as primeiras tentativas de inserir a Modelagem Matemática no campo da educação matemática, mas foi somente na década de 60, com um movimento chamado "utilitarista", definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, que pesquisadores e professores do cenário internacional começaram a debater sobre construções de modelos matemáticos como estratégia de ensino. Dentre os principais eventos destaca-se o *"Lausanne Symposium"*, que aconteceu em 1968, na Suíça, e tinha como tema central debater como ensinar Matemática de uma forma aplicada e útil, destacando a realidade do estudante e não apenas aplicações padronizadas, mas que favorecessem as habilidades dos alunos em modelar situações do cotidiano.

Ainda de acordo com Biembengut (2009), tais movimentos influenciaram, praticamente ao mesmo tempo, os professores de Matemática do Brasil a inserir a Modelagem Matemática no ensino da Matemática. A proposta de se trabalhar com modelo matemático surge por aqui ao final da década de 60, através de professores e pesquisadores brasileiros que participaram de congressos internacionais de Modelagem Matemática. A ideia inicial era utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula para facilitar o ensino da Matemática e motivar o aluno a pesquisar.

Dentre os professores e pesquisadores, Biembengut (2009) destaca Aristides C. Barreta, Ubiratan D'Ambrósio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani como os responsáveis pela iniciação do movimento pela Modelagem Matemática que ocorreu entre o final dos anos 70 e início dos anos 80, despertando interesse de muitos adeptos espalhados pelo país. Foi graças a esses precursores que debates de como se fazer um modelo matemático ensinando Matemática ao mesmo tempo permitiram a evolução da Modelagem Matemática no ensino de Matemática no Brasil.

Biembengut (2009) relata ainda que, entre os precursores citados, Barreto e Bassanezi deram os primeiros passos para a implantação e disseminação da Modelagem Matemática no ensino de Matemática no Brasil. Os resultados de suas experiências foram positivos e os inspiraram a propor novas possibilidades de modelagem. Aristides Camargos Barreto começou a utilizar modelos matemáticos como estratégia de ensino em meados da década de 70. Juntamente com seus alunos, criou vários modelos matemáticos em diferentes áreas do conhecimento. Já Rodney Carlos Bassanezi teve suas primeiras experiências com a Modelagem Matemática como estratégia de ensino-aprendizagem através da Matemática Aplicada, na década de 80. Bassanezi promoveu o primeiro curso de especialização em Modelagem Matemática e impulsionou a realização de muitos outros cursos voltados para essa área, nas mais diversas instituições de Ensino Superior no Brasil.

Conforme Biembengut (2009), Barreto e Bassanezi tiveram suas experiências com Modelagem Matemática realizadas apenas em cursos de graduação e especialização, nunca atuando na esfera da Educação Básica. Sempre que tais experiências eram divulgadas em eventos, as mesmas eram expressas em uma concepção geral, apontando os resultados positivos e direcionando professores da Educação Básica a realizarem adaptações nos modelos propostos para que pudessem trabalhar com seus alunos. Por consequência, vários professores foram instigados a novos entendimentos, concepções e tendências de modelagens. A autora Biembengut (2009) afirma que:

> *"Não há como subestimar o mérito e a validade das propostas dos precursores. Importa, antes de tudo, reconhecer as contribuições positivas oriundas pelos precursores da modelagem na educação; daquele pequeno grupo de professores que teve a iniciativa em realizar propostas de ensino de Matemática por outros vieses e, por consequência, se motivou a contar sobre esta realização para outro professor, e para tantos outros. E qualquer que seja o ponto teórico em questão, é fato que impulsionaram a Educação Matemática e, por recorrência, crenças matemáticas que permeiam o contexto social".*

Nos dias atuais, o número de pesquisas e relatos de experiências com Modelagem Matemática em sala de aula apresentados por alunos e professores em eventos de Educação Matemática tem sido cada vez maior. Tem aumentado também o número de interessados em cursos e publicações voltados para o tema. Os cursos de Licenciatura em Matemática já ofertam a Modelagem Matemática como disciplina da grade curricular ou como parte de outros componentes curriculares. Desta forma, é cada vez mais presente o uso de modelos matemáticos no ensino e na aprendizagem da Matemática.

## 2.2 O que é Modelo Matemático?

De acordo com o Dicionário Aurélio (2001), um dos conceitos de modelo seria aquilo que serve de referência ou que é dado para ser representado. O termo modelo tem origem do latim *"modellum"*, com o significado de "medida em geral", mas o presente estudo será caracterizado como representação de alguma coisa.

O homem está sempre recorrendo ao uso de modelos, seja para comunicar-se com outros, seja para preparar uma ação. No contexto da Matemática é comum a utilização de modelos para representar, explicar e compreender situações que podem ou não ser matemáticas. Segundo Biembengut e Heim (2014), um modelo pede ser formulado em termos familiares, utilizando-se expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, programas computacionais, dentre outros.

Embora haja diferentes definições para modelo matemático, a essência de seu conceito é sempre a mesma: uma representação simplificada da realidade sob a visão do investigador. Seguem algumas definições de modelo matemático:

> *Qualquer representação simplificada da realidade ou de um aspecto do mundo real que surja como de interesse ao pesquisador, que possibilite reconstruir a realidade, prever um comportamento, uma transformação ou uma evolução. (CRISTOFOLETTI, 1999).*

> *Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado (BASSANEZI, 2013).*

> *Uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procu-*

*rando relacionar com algo já conhecido, efetuando deduções (GRANJER, 1969, apud. BIEMBENGUT, 2014).*

Segundo Bassanezi (2013), os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificados conforme o tipo de Matemática utilizada: Linear ou não linear, conforme suas equações básicas tenham essas características; Estático, quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; Dinâmico, quando simula variações de estágios do fenômeno – por exemplo, o crescimento populacional de uma colmeia; Educacional, quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas.

Segundo Sodré (2007), um modelo matemático é normalmente caracterizado como uma simplificação do mundo real ou alguma forma conveniente de trabalhar com este mundo, mas as características essenciais do mundo real devem estar presentes nesse modelo matemático, de modo que seu comportamento seja igual ou semelhante àquele do sistema modelado.

## 2.3 A definição de Modelagem Matemática

Definido modelo matemático, a Modelagem Matemática seria o ato de obter tal modelo, ou seja, um processo que transforma uma situação da realidade em uma expressão matemática. Segundo o Dicionário Aurélio (2001), a palavra "modelagem" significa dar forma ou contorno a algo por meio de um modelo. Nesta perspectiva, segundo Almeida (2013), a Modelagem Matemática visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. Assim, o modelo matemático é o que dá forma à solução do problema enquanto que a Modelagem Matemática é o processo de obtenção dessa solução. Nesta proposta, a resolução de problemas através da utilização de modelos matemáticos remete ao desenvolvimento da Matemática e de suas aplicações.

Dentre as principais definições apontadas por diferentes pesquisadores sobre a Modelagem Matemática, vale ressaltar a seguinte:

*Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste,* *essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2013).*

Sob o olhar de Biembengut (2014), a Modelagem Matemática caracteriza-se como uma arte ao formular, resolver e elaborar expressões que sirvam não apenas para uma solução particular, mas sirvam também como suporte para outras aplicações e teorias.

A Modelagem Matemática teve papel fundamental na construção da Matemática. Segundo D'Ambrósio em Prefácio de Bassanezi (2014), a Modelagem Matemática é Matemática por excelência. Os modelos matemáticos foram pouco a pouco surgindo através das tentativas do homem em representar fatos e fenômenos da realidade, utilizando símbolos e relações matemáticas que pudessem ser compartilhadas. Então, o desenvolvimento da Matemática ocorreria de forma natural.

Desta maneira, pode-se definir Modelagem Matemática como um conjunto de ações que nos permite representar a realidade à nossa volta através de um modelo matemático que, por sua vez, descreve tal realidade. Este modelo permite interpretar a relação entre os acontecimentos e o mundo através de análises de dados, reflexões, deduções de resultados e previsões. Porém, para ter uma exata noção do grau de relação entre o modelo e o mundo, deve-se testá-lo de formas diferentes.

No âmbito educacional, a Modelagem Matemática é uma ferramenta alternativa para o ensino de Matemática. Deve ser vista como um processo dinâmico de educação que serve como estratégia de interversão no ensino tradicional. Tem como proposta trazer o cotidiano para a sala de aula através da construção de modelos. Assim, a Modelagem Matemática pode ser vista como um ambiente de aprendizagem:

*Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. (BARBOSA, 2001).*

A Modelagem Matemática não deve servir apenas como motivo para a aplicação de um conteúdo, mas sim para revelar como ele surgiu, justificando o porquê de aprendê-lo e qual o seu verdadeiro significado na vida do estudante. O crescimento de uma árvore, a construção de uma casa, o fluxo de caixa de uma empresa, o sistema de coleta de lixo da cidade e o controle populacional de uma comunidade são algumas situações onde se é possível construir um modelo matemático e fazer do estudante um cidadão mais responsável e participativo.

Em uma atividade de Modelagem Matemática, iniciamos a construção de um modelo matemático através de uma situação-problema, proporcionando motivação no processo de aprendizagem, uma vez que o indivíduo, ao buscar soluções para o problema, procura formas e estratégias diversificadas potencializando, assim, sua criatividade e raciocínio.

## 2.4 As fases da Modelagem Matemática

Sob o olhar de Almeida (2013), uma atividade de Modelagem Matemática envolve fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema as quais são caracterizadas por inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

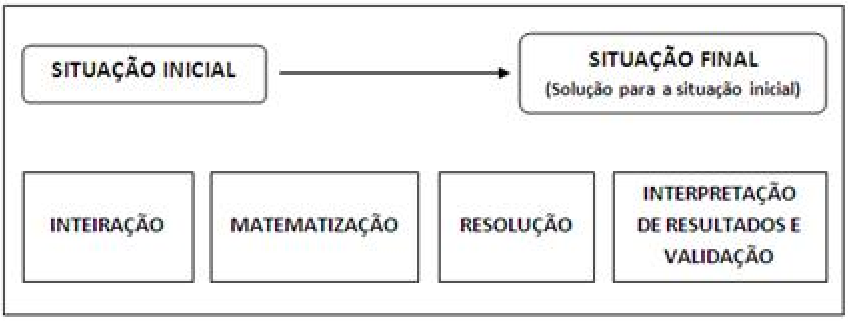


Figura 1: Fases da Modelagem Matemática.

### 2.4.1 Inteiração

Essa fase representa o primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar. É o momento em que se conhecem as características e especificidades da situação. Para tanto, é necessário obter informações dessa situação através de coletas de dados quantitativos ou qualitativos. Nesta fase são definidas as metas para a resolução do problema.

A inteiração tem a função de tornar aspectos conhecidos. Mesmo sendo a fase inicial da atividade de Modelagem Matemática, pode acontecer a qualquer momento, uma vez que a necessidade de se obter novas informações pode surgir no decorrer do processo.

### 2.4.2 Matematização

Essa etapa consiste em descrever a situação-problema através da linguagem matemática. É a etapa mais complexa e desafiante de uma atividade de Modelagem Matemática, uma vez que a situação-problema identificada e estruturada na fase de inteiração apresenta-se em uma linguagem natural. O objetivo da matematização é encontrar expressões aritméticas, fórmulas, equações algébricas, gráficos, representações ou programa computacional que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução da situação-problema. Com esse raciocínio, parece adequado caracterizar matematização como sendo a fase em que se dá significado matemático para a organização da realidade.

### 2.4.3 Resolução do Problema

A fase de resolução consiste na construção de um modelo matemático que descreve a situação-problema, o qual irá permitir a análise de aspectos relevantes da situação respondendo às perguntas formuladas sobre o problema investigado. Ainda nesta fase, é possível realizar previsões para a situação-problema analisada.

Para a conclusão do modelo matemático é importante realizar uma avaliação para verificar se o mesmo representa a situação-problema estudada. Caso o modelo não atenda as expectativas geradas, o processo deve ser retomado a partir da fase de matematização, realizando ajustes e mudanças necessárias.

### 2.4.4 Interpretação de Resultados e Validação

Interpretar o resultado implica em fazer análise para possíveis soluções do problema. A análise, por sua vez, consiste num processo avaliativo e implica na validação da representação matemática associada ao problema, considerando procedimentos matemáticos e adequações para a representação da situação.

Segundo Bassanezi (2014), um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram. Um bom modelo é aquele que tem capacidade de previsão de novos fatos ou relações insuspeitas. Assim, é de suma importância realizar a interpretação do modelo através da análise das implicações da solução da situação-problema e a validação de sua adequabilidade, avaliando o grau de confiabilidade da solução.

# 3 Modelagem Matemática como ferramenta de ensino da Matemática

Nos dias atuais, muito se tem debatido sobre o fracasso escolar do aluno na disciplina de Matemática. Isto tem provocado preocupações a professores e alunos diante do baixo rendimento escolar. Assim, é fácil perceber que a metodologia de ensino matemático apresentada em algumas escolas não é a adequada para uma aprendizagem eficaz.

A proposta atual do ensino da Matemática é caracterizada pela memorização e mecanização de conceitos, o que se conhece por ensino tradicional. Nesta proposta, o papel do aluno é o de decorar fórmulas e aplicá-las em listas de exercícios com uma vasta quantidade de questões. Porém, os resultados desta metodologia nem sempre são significantes.

Ainda que haja muitos esforços no intuito de mudar a forma tradicional de ensinar Matemática, esta área do conhecimento continua sendo uma das responsáveis pelos elevados índices de reprovação acadêmica.

Como afirma Bassanezi (2013), os problemas apresentados por professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática em todos os níveis de ensino são inúmeros e quase sempre difíceis de resolver. Algumas barreiras impedem o desenvolvimento da Educação Matemática. O aluno, antes mesmo de um primeiro contato, já considera que a Matemática é difícil. A má formação de professores desta disciplina favorece o uso do método tradicional de ensino e à baixa exploração de recursos didáticos. A falta de aplicação e a dificuldade de escrever e compreender a simbologia matemática também contribuem para o fracasso desta que é uma das mais importantes área do conhecimento.

Para que aconteçam mudanças desse quadro, é preciso apresentar propostas que atendam as necessidades das novas demandas de ensino. Propostas estas que transformem o aluno em principal responsável pelo seu próprio desenvolvimento matemático, que o motive a aprender a buscar respostas e a raciocinar, tornando-o, assim, um ser crítico.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999), a disciplina de Matemática apresenta como objetivos no Ensino Médio, entre outros: aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas; desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo e estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo. Contudo, é improvável a conquista de tais objetivos através do ensino tradicional da Matemática.

Para Bassanezi (2013), o ensino da Matemática não se justifica somente por ser uma ciência muito importante e que algum dia será útil, como dito por muitos professores, mas principalmente por atender às várias características, que são essenciais à formação do indivíduo. Ainda segundo o autor, a Matemática pode ser utilizada ou como ferramenta para a vida, onde o aluno desenvolve a capacidade de manejar situações reais que se apresentam a cada momento, de maneiras distintas, ou como instrumentadora para o trabalho, onde o aluno desenvolve condições para compreender um fenômeno e atuar em sua transformação.

Segundo Correa (1999), o professor deve abandonar o método expositivo tradicional em que o aluno é apenas um mero espectador do seu fazer pedagógico e procurar meios diversificados de aprendizagem estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, na medida do possível, à redescobertas.

Para que o aluno deixe de ser apenas copiador e repetidor de conteúdos é necessário que o professor abandone a postura de expor conteúdos, realizar exercícios de fixação e avaliar e adote tendências metodológicas diversificadas como o uso de recursos tecnológicos, a resolução de problemas, a História da Matemática, jogos didáticos e a Modelagem Matemática, dentre outros.

Conforme Biembengut e Heim (2014), há um consenso no que diz respeito ao ensino de Matemática precisar voltar-se para a promoção do conhecimento matemático e da habilidade em utilizá-lo. Segundo estes autores, isto significa ir além de resolver questões matemáticas que, por muitas vezes, não têm significado algum para os alunos e conduzi-los a uma melhor compreensão tanto da teoria matemática quanto do problema a ser modelado.

Assim, a Modelagem Matemática no ensino da Matemática é um caminho para despertar no aluno o interesse em aprender Matemática ao mesmo tempo em que aprende a criar modelos matemáticos. Tal fato é consequência da oportunidade que o aluno possui para estudar e resolver problemas por intermédio de pesquisas, despertando sua vontade em aprender e potencializando seu senso crítico.

De acordo com Bassanezi (2014), a inclusão de aspectos de aplicações no ensino da Matemática, a inclusão de resoluções de problemas e a inclusão da Modelagem Matemática têm sido defendida por várias pessoas envolvidas com a Educação Matemática. A matéria deve ser ensinada de um modo significativo para o aluno, considerando a própria realidade do sistema educacional.

## 3.1 A Modelagem Matemática em sala de aula

Segundo Biembengut e Heim (2014), a Modelagem Matemática pode valer como método de ensino-aprendizagem de Matemática em qualquer nível escolar, das séries iniciais a um curso de pós-graduação. Não existem restrições quanto sua utilização. Os autores destacam ainda que os principais objetivos dessa metodologia de ensino são: aproximar da Matemática outras áreas do conhecimento; enfatizar a importância da Matemática na formação do aluno; despertar, através da aplicabilidade, o interesse dos alunos pela Matemática; melhorar a aprendizagem de conceitos matemáticos; desenvolver habilidades nas resoluções de problemas e estimular a criatividade.

Biembengut e Heim (2014) ainda ressaltam que:

> *A condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino – modelação – é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas. Um embasamento na literatura disponível sobre Modelagem Matemática, alguns modelos clássicos e sobre pesquisas e experiências no ensino são essenciais.*

De acordo com Barbosa (2001), para que o professor insira a Modelagem Matemática dentro do programa curricular de ensino da escola é necessário que o mesmo: conheça os limites da instituição de ensino; inicie com modelos matemáticos simples; analise o tempo disponível para o desenvolvimento da Modelagem Matemática; faça uma avaliação diagnóstica do seu saber e do saber de seus alunos; avalie a disposição, o grau de interesse e a motivação dos alunos e avalie a disposição e apoio da direção da comunidade escolar.

Segundo Almeida (2014), o papel do professor em aulas mediadas por atividades de Modelagem Matemática é o de orientador. Para a autora, essa indicação tem uma dupla interpretação:

> *Orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos; Orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar que tudo é válido; Orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; Orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função; Orientar não é despir-se da autoridade de professor. (ALMEIDA, 2014).*

### 3.1.1 Colocando a Modelagem Matemática em prática

Conforme Biembengut e Heim (2014), para pôr em prática a metodologia de ensino através da Modelagem Matemática são sugeridos cinco passos: o diagnóstico, a escolha do tema ou modelo matemático, o desenvolvimento do conteúdo programático, a orientação de modelagem e a avaliação do processo.

**Diagnóstico:** Biembengut e Heim (2014) sugerem que, inicialmente, o professor deve realizar uma avaliação diagnóstica com seus alunos atento para a realidade socioeconômica dos mesmos para efetuar a escolha do tema, o grau de conhecimento matemático da turma para assim estabelecer os conteúdos matemáticos, o horário da disciplina para determinar a dinâmica da aula, o número de alunos para conduzir a distribuição dos mesmos em grupos facilitando a orientação dos trabalhos de modelagem e a disponibilidade dos alunos para atividades extraclasses.

**Escolha do Tema ou Modelo Matemático:** Conforme Biembengut e Heim (2014), para o desenvolvimento do conteúdo programático utiliza-se um tema único, a cada tópico matemático do programa ou conteúdo de um período letivo, este deve ser abrangente o suficiente para desenvolver o conteúdo programático e ao mesmo tempo despertar o interesse dos alunos. O professor pode optar por escolher o tema ou permitir que os alunos o escolham. A vantagem da escolha do tema pelos alunos é que os mesmos se sentirão participantes no processo. Por outro lado, a desvantagem é que se o tema escolhido não for adequado para o desenvolvimento dos conteúdos ou, ainda, se o mesmo for muito complexo, os alunos terão muita dificuldade em desenvolver a atividade. Seja qual for a forma adotada, o professor deve se inteirar do tema adotado. O tema deve estar em sintonia com o conhecimento e a expectativa dos alunos.

**Desenvolvimento do Conteúdo Programático:** Ainda de acordo com Biembengut e Heim (2014), para o desenvolvimento do conteúdo programático, o professor deve recorrer aos mesmos procedimentos adotados no processo da modelação matemática, ou seja, a inteiração (reconhecimento e familiarização da situação-problema), a matematização (formulação e resolução do problema) e a modelação matemática (interpretação e validação). Na matematização acrescenta-se o desenvolvimento do conteúdo necessário para a formulação e resolução da situação-problema. Biembengut e Heim (2014) afirmam que durante a inteiração é feita uma breve exposição sobre o tema, permitindo certa delimitação do aluno com uma área em questão. Em seguida, faz-se um levantamento de questões, instigando os alunos a contribuir com sugestões. Na fase da matematização, seleciona-se e formula-se uma das questões levantadas a fim de levar os alunos a proporem respostas. As respostas irão abrir caminhos para que as metas propostas sejam atingidas. Ao mesmo passo em que as questões são formuladas, ao suscitar um conteúdo matemático para obtenção de um resultado, interrompe-se a exposição para trabalhar a Matemática necessária. Depois que o conteúdo matemático necessário for desenvolvido o suficiente para resolver essa etapa do trabalho, exemplos análogos devem ser propostos para que o conteúdo não se restrinja ao modelo. Neste momento do processo, exercícios podem ser propostos para aprofundamento da aprendizagem do conteúdo. A resolução da questão levantada faz com que o aluno retorne ao problema e identifique a Matemática como uma importante ferramenta. Ao equacionar a questão da situação-problema, tem-se um modelo matemático. Neste momento, verifica-se a validade e a importância do modelo proposto. Então, os alunos avaliam o resultado obtido, que se denomina validação. Findada a etapa do processo, pode-se deixar um precedente para uma possível retomada a fim de melhorias do modelo.

**Orientação de Modelagem:** Segundo Biembengut e Heim (2014), a Modelagem Matemática no ensino da Matemática tem como objetivo principal criar condições para que os alunos aprendam a construir modelos matemáticos. Cabe ao professor promover a autonomia para que os alunos escolham o tema e a direção do próprio trabalho. Espera-se por meio da Modelagem Matemática: incentivar a pesquisa; promover a habilidade em formular e resolver problemas; lidar com tema de interesse; aplicar o conteúdo de Matemática e desenvolver a criatividade. Para que o professor possa realizar as orientações e acompanhar os alunos é de fundamental importância que o mesmo faça um planejamento sobre a inteiração com o assunto, bem como a forma de encaminhamento e quando ou em que momento norteará seus alunos. Biembengut e Heim (2014) afirmam que há uma tendência apresentada pelos alunos em elaborar modelos matemáticos que se restringem a conteúdos matemáticos conhecidos. Assim, se o professor quiser melhorar as condições propostas, deve orientar seus alunos para a resolução de questões cujo conteúdo matemático não é conhecido proporcionando, assim, maior aprofundamento do assunto.

**Avaliação do Processo:** Para Biembengut e Heim (2014), o ensino da Matemática deve propiciar ao aluno: uma sólida formação matemática; a capacidade para enfrentar e solucionar problemas; saber realizar uma pesquisa; a capacidade em utilizar recursos tecnológicos e a capacidade em trabalhar em grupos. O professor pode avaliar seus alunos sobre o aspecto subjetivo, através do empenho do mesmo na participação, na assiduidade, no cumprimento das tarefas e no espírito comunitário, e também sobre o aspecto objetivo, através da produção e conhecimento matemático, da produção de um trabalho de Modelagem Matemática em grupo e da extensão e aplicação do conhecimento. É importante que os alunos conheçam os critérios e os indicadores de avaliação adotados.

### 3.1.2 Materialização da Modelagem Matemática

Conforme o Dicionário Aurélio (2001), materializar significa tornar material, atribuir as qualidades de matéria, realizar. No cotexto da Modelagem Matemática aplicada no ensino-aprendizagem da Matemática, materializar quer dizer colocar em prática o processo de modelação em sala de aula.

Segundo Barbosa (2004), a Modelagem Matemática propicia potencialidade na interversão de debates e tomadas de decisões que envolvem aplicações matemáticas, contribuindo para a democratização de sociedades através de construções e consolidações das mesmas. O autor apresenta argumentos favoráveis que decorrem do ensino através de modelos matemáticos tais como a motivação, a facilitação da aprendizagem, a preparação para o uso da Matemática em áreas diferentes, o desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da Matemática.

Para a materialização, ou seja, para a utilização da Modelagem Matemática em sala de aula, Barbosa (2004) identifica três regiões de possibilidades, as quais o autor chama de casos:

*No caso 1, o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação; No caso 2, os alunos deparam-se apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados; No caso 3, trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas "não-matemáticos", que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos.*

Os três casos apresentados por Barbosa (2004) são categorizados de acordo com a quantidade de tarefas designadas ao professor e/ou aos alunos a desenvolverem dentro da atividade de modelação. A tabela a seguir descreve a distribuição das tarefas segundo o autor:

| | **Caso 1** | **Caso 2** | **Caso 3** |
|---|---|---|---|
| **Formulação do Problema** | professor | professor | professor/aluno |
| **Simplificação** | professor | professor/aluno | professor/aluno |
| **Dados Qualitativos e Quantitativos** | professor | professor/aluno | professor/aluno |
| **Resolução do Problema** | professor/aluno | professor/aluno | professor/aluno |

Figura 2: Distribuição de tarefas para o professor e para os alunos.

Note que de acordo com a distribuição de tarefas proposta, na medida em que diminui a quantidade de tarefas designadas ao professor, aumentam as tarefas dos alunos, transferindo para estes a responsabilidade da solução do problema. Com isso, o aluno se torna cada vez mais independente sem extrair do professor a responsabilidade pela condução do processo.

Barbosa (2004) ainda sugere que, para um professor iniciante na metodologia de ensino através da Modelagem Matemática, o ideal seria optar pelo caso 1, tomando para si a maior quantidade de tarefas a serem desenvolvidas e, na medida em que adquirir maior confiança, transferir mais tarefas aos alunos, optando assim pelos outros casos. Desta forma, o professor desenvolve uma postura predominante de mediador entre o conhecimento e o aluno, deixando de ser apenas o ser que possui e transmite o conhecimento para ser aquele que oportuniza a aquisição do conhecimento, ou seja, aquele que ensina a aprender.

Para alguns autores, a etapa da criação de um modelo matemático é considerara essencial. Para Barbosa (2004), uma atividade de Modelagem Matemática consiste na escolha de um tema e na formulação de um problema a partir desse tema, de modo que a busca pela solução do problema levará o aluno a levantar hipóteses, simplificá-las e coletar dados para a resolução matemática do mesmo. Assim, o autor acredita que modelos matemáticos são modos de representar a realidade e que tabelas, gráficos e funções são apenas alguns exemplos de modelos matemáticos. Em muitos casos, a resolução de um problema acarretará na formulação de um modelo matemático, porém gráficos, funções ou equações não são os únicos considerados como modelos, eles são apenas consequências de atividades desenvolvidas com Modelagem Matemática.

## 3.2 Obstáculos para o ensino com Modelagem Matemática

A utilização da Modelagem Matemática como ferramenta de ensino da Matemática vem de encontro com as expectativas de professores que pretendem trabalhar algo diferente em sala de aula. Estes professores desejam a motivação de seus alunos para um aprendizado matemático em nível adequado para a compreensão de sua realidade e para a aplicação em problemas de outras áreas do conhecimento. Entretanto, a maioria dos professores de Matemática faz pouco uso da Modelagem Matemática. Conforme Bassanezi (2013), apesar de todos os argumentos favoráveis para a utilização da Modelagem Matemática, muitos colocam obstáculos, principalmente em cursos regulares. Alguns dos obstáculos apontados pelo autor são:

- O currículo deve ser cumprido integralmente. Como a Modelagem Matemática é um processo demorado, interfere no cumprimento do programa dos cursos regulares;

- Alguns professores de Matemática afirmam não ser de sua competência resolver problemas ou estabelecer conexões com outras áreas do conhecimento;

- O aluno está adaptado ao ensino tradicional. Uma metodologia diversificada poderia dificultar ainda mais a sua aprendizagem;

- Na Modelagem Matemática, o aluno é responsável pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo. Assim, a aula poderia caminhar em um ritmo mais lento;

- A formação heterogênea de uma turma pode dificultar o desenvolvimento do processo de Modelagem Matemática;

- O tema escolhido pode ser motivador e interessante para alguns alunos e desmotivador e desinteressante para outros;
- Por falta de conhecimentos da metodologia ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas, os professores não se sentem habilitados a desenvolver a Modelagem Matemática em suas turmas.

Apesar de se ter que cumprir o currículo preestabelecido no início de cada ano letivo, o professor deve ser flexível para pequenas adaptações e incluir metodologias que podem contribuir para uma aprendizagem significativa do aluno. É necessário compreender que, mesmo com perda de tempo, um ensino com Modelagem Matemática muito contribui para a fixação de um conteúdo trabalhado em sala de aula. O professor deve estar aberto à interdisciplinaridade, ou seja, deve relacionar o que ensina com outras áreas do conhecimento, para assim dar sentido ao conteúdo trabalhado. O aluno, ao primeiro momento, sentirá dificuldade em trabalhar com o novo, mas isto não deve servir de empecilho para o uso desta técnica, uma vez que, ao se ter experiência com a aplicação, barreiras serão vencidas. A escolha do tema e a falta de conhecimento para aplicação desta metodologia de ensino podem ser superadas com dedicação e compromisso por uma educação de qualidade, uma vez que as vantagens oferecidas para o aprendizado do aluno superam todos os obstáculos apresentados.

Segundo pesquisa realizada por Barbosa (1999), os professores até reconhecem os obstáculos impostos para a implementação da Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem, embora reconheçam todas as vantagens para o ensino matemático. Os resultados dessa pesquisa levaram o autor a classificar as dificuldades identificadas em três eixos: alunos, escola e professores. Alunos desmotivados não se adequariam para abordagens diversificadas de ensino. A escola, com sua estrutura organizacional, inibi ou não apoia iniciativas de professores que almejam trabalhar nesta perspectiva. Os professores colocam-se como barreiras à proposta de Modelagem Matemática uma vez que a mesma provoca mudanças nas suas atitudes em relação à Matemática.

De acordo com Bassanezi (2013), a falta de tempo para o cumprimento do currículo, a inércia dos estudantes para desenvolver a Modelagem Matemática e a inexperiência de professores são dificuldades que podem ser contornadas conforme mudamos o processo prático de modelação. O autor relata que:

> *A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido,*

*mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado.*

Nesse contexto, entre o reconhecer vantagens do processo e vencer os possíveis obstáculos é que muitos professores têm buscado alternativas para que a Modelagem Matemática seja trabalhada em sala de aula como uma estratégia no ensino da Matemática. Com isto, adaptações devem ser feitas, se necessárias, para tornar possível a utilização desta metodologia de ensino-aprendizagem. Entretanto, não se deve perder a essência que é o favorecimento à pesquisa e à criação de modelos matemáticos pelos alunos, sem desrespeitar as regras escolares vigentes, coforme afirmam Biembengut e Heim (2014).

# 4 Modelos Matemáticos Clássicos

Segundo relatos de Bassanezi (2012), o estudo de problemas semelhantes aos problemas propostos na Modelagem Matemática contribui para o aprendizado. O autor ressalta que esse é o momento de mostrar que a Matemática pode ser compreendida em situações diferentes, mas com desenvolvimentos semelhantes. A utilização de modelos clássicos permite a compreensão de técnicas a serem aplicadas nas novas situações-problemas. Daí, modelar passa a ser uma busca de analogias com situações conhecidas.

> *Uma maneira de se propor um problema novo é perguntar "e se?" quando se tem um modelo clássico. Este é o primeiro passo de uma modelagem. É como retocar um quadro de outro pintor e, muitas vezes, os resultados são impressionantes, parecendo um quadro completamente novo. Em se tratando de pesquisa em Matemática, este procedimento é muito frequente e tem sido um dos fatores responsáveis pelo desenvolvimento desta ciência. (BASSANEZI, 2012).*

Nessa perspectiva, um primeiro contato de professores e alunos com modelos matemáticos clássicos é de fundamental importância para a familiarização e podem ser úteis para despertar o interesse pela Modelagem Matemática, bem como oportunizar o desenvolvimento de habilidades para a matematização e a interpretação de novas situações-problemas. Desta forma, o uso de modelos matemáticos clássicos serve como norteador para a criação de novos trabalhos com Modelagem Matemática em sala de aula.

No decorrer dos tempos, o processo de modelação matemática tem sofrido constantes adaptações e se aperfeiçoando para a criação de novos modelos. Esta evolução permitiu que determinados fenômenos e problemas, até então inexplicáveis, fossem compreendidos e solucionados.

Dentre grandes modelos matemáticos clássicos registrados na história da Matemática, destaca-se o trabalho apresentado pelo grande matemático Tales de Mileto (624 – 548 a.C.), mencionado por Hisrschberger (1965). Tales, através de seu empenho na formalização de construções e através de sua criatividade, desenvolveu métodos matemáticos para propor soluções a várias situações-problemas. Dentre estes, propôs uma estratégia para calcular a altura de uma pirâmide sem ter que subir nela.

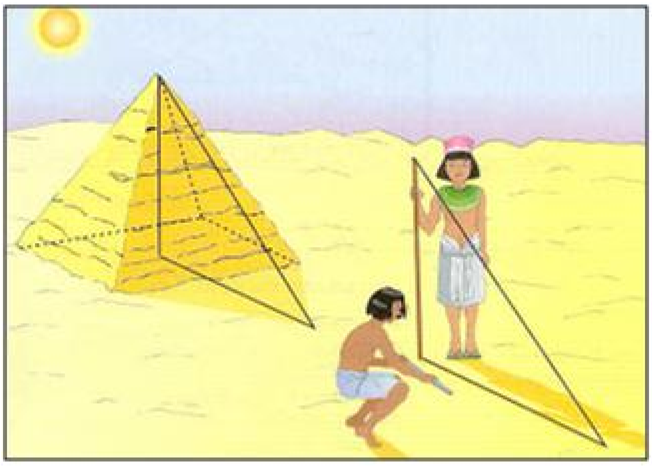

Figura 3: Cálculo da altura de uma pirâmide proposto por Tales.

Tales colocou um bastão com posição vertical no vértice da sombra formada pela pirâmide no mesmo instante em que o comprimento da sombra do bastão tinha medida igual à sua altura. Desta forma, bastava medir o comprimento da sombra da pirâmide para encontrar a altura da mesma. Tales recorreu à semelhança de triângulos para determinar a altura da pirâmide a partir da sombra projetada por ela.

Partindo dessa premissa, Tales calculou a altura da pirâmide usando apenas um bastão e as medidas dos comprimentos das sombras da pirâmide e do bastão. Assim, Tales acabara de criar um modelo matemático para calcular alturas de pirâmides. Tal modelo matemático teve grande contribuição para a realização do cálculo de distâncias inacessíveis.

## 4.1 A evolução dos modelos matemáticos clássicos

Um modelo matemático é uma representação simbólica de uma situação que envolve uma formulação matemática abstrata. Uma expressão matemática somente se torna um modelo matemático quando as variáveis relacionadas têm significados próprios que revelam a situação modelada. Desta forma, para que um modelo matemático descreva de maneira mais adequada uma situação, talvez seja necessário que o mesmo sofra modificações.

> *Um modelo matemático é considerado adequado quando for satisfatório na opinião do seu modelador, o que torna qualquer modelo matemático vulne-*

*rável e sempre passível de ser modificado – e esta é uma das características mais importantes da modelagem. (BASSANEZI, 2013).‘*

Segundo Bassanezi (2013), o estudo do crescimento de uma população dá uma ideia clara da evolução e das adaptações ocorridas nos modelos clássicos ao passar dos tempos. A primeira proposta apresentada para se determinar um modelo matemático referente ao crescimento populacional foi a do economista inglês Thomas Robert Malthus. Seu trabalho previa um crescimento populacional em progressão geométrica e um crescimento na disponibilidade de alimentos em progressão aritmética. Neste modelo, Malthus não considerou fatores externos como fome, guerras, epidemias ou qualquer outra catástrofe e, desta forma, o crescimento da população ocorreria sem qualquer inibição. Suas previsões referentes ao crescimento da quantidade de alimentos disponíveis também estavam erradas, pois o mesmo não tinha previsto o grande salto da produção mundial de alimentos que ocorreu entre os anos de 1950 e 2000 através dos avanços tecnológicos da agricultura.

Bassanezi (2013) nos relata que o modelo matemático apresentado por Malthus sofreu várias modificações que contribuíram para sua evolução. Um dos modelos que descreve tal evolução, que tem grande importância e conhecimento, é o do sociólogo belga Pierre François Verhulst, que supôs que toda e qualquer população é predisposta a sofrer inibições naturais no decorrer de seu crescimento, ou seja, Verhulst considerou os fatores externos que poderiam contribuir no crescimento de uma população.

O modelo matemático de Malthus é formulado a partir da taxa de variação da população e é proporcional ao valor atual da população. Desta forma, tem-se a equação exponencial $y(t) = be^{at}$, com $a \neq 0$ e $b > 0$, que expressa o crescimento populacional proposto por Malthus. Os valores dos parâmetros $a$ e $b$ são encontrados a partir do método dos mínimos quadrados. Este modelo é utilizado para crescimento de pequenas populações em espaços curtos de tempo. Um exemplo para uma boa aplicação desse modelo seria o crescimento da população de bactérias, onde muitos fatores externos que poderiam influenciar no desenvolvimento desta população não são considerados.

O modelo de Verhulst supõe que certa população, vivendo em um determinado ambiente, cresce até um limite máximo sustentável e, então, se estabilizada. Conforme Bassanezi (2013), esse modelo é a versão modificada do modelo de Malthus e considera que a taxa de crescimento é proporcional à população a cada instante. O modelo é formulado pela equação $y(t) = \frac{k}{(be^{-at}+1)}$, com $a$, $b$, $k > 0$, sendo $k$ a constante que representa a capacidade ambiental de sustentação ou nível de saturação.

## 4.2 Uso de modelos matemáticos clássicos em sala de aula

Almeida (2013) relata que a investigação das situações-problema presentes nas atividades abordadas em modelos matemáticos clássicos pode tomar uma direção que depende das experiências e dos conhecimentos de professores e alunos envolvidos com a situação. A princípio, nem professor nem aluno sabem ao certo quais os conceitos ou conteúdos matemáticos que serão utilizados durante o processo da modelação matemática. Assim, diferentes caminhos para a resolução do problema são apresentados, mesmo que o conjunto de informações obtidas na fase de inteiração do problema seja o mesmo. Desta forma, o modelo matemático construído nada mais é do que uma representação da visão daqueles que estudam a situação.

> *As temáticas de que tratam as situações podem ser abordadas nas diferentes séries da educação básica, buscando a abordagem do problema com a Matemática que aqueles alunos e professores estão dispostos a fazer. (ALMEIDA, 2013).*

Nesse sentido, uma mesma atividade desenvolvida sob um modelo matemático clássico pode configurar-se nos diferentes níveis da Educação Básica e até mesmo na Educação Superior. De acordo com Almeida (2013), um exemplo de modelo matemático clássico que representa essa possibilidade de adaptação para os diferentes níveis de escolaridade é o modelo que utiliza decomposição de uma figura geométrica em figuras geométricas menores para determinar a área total aproximada da mesma.

Em um projeto que tinha como objetivo verificar a quantidade de tinta necessária para pintar a fachada de uma igreja, Almeida (2013) apresentou propostas de desenvolvimento da atividade para o Ensino Fundamental, o Ensino Médio e a Educação Superior.

Inicialmente, os dados referentes às medidas da fachada da igreja foram coletados com o auxílio de instrumentos de medição como a trena a laser e um inclinômetro, que fornece o ângulo de inclinação da trena. A partir das medidas realizadas, a área a ser pintada na fachada foi determinada considerando possibilidades e conteúdos matemáticos para os três diferentes níveis de escolaridade.

Figura 4: Fachada do Santuário Eucarístico Diocesano, Cianorte-PR.

### 4.2.1 Sugestões do modelo para o Ensino Fundamental

Conforme Almeida (2013), em se tratando do Ensino Fundamental, a área total da fachada da igreja seria determinada por partes, considerando que cada parte poderia ser representada por meio de figuras geométricas planas, tal como retângulos, triângulos e semicircunferências. Dessa forma, a área total da fachada seria dada pela soma das áreas de cada parte.

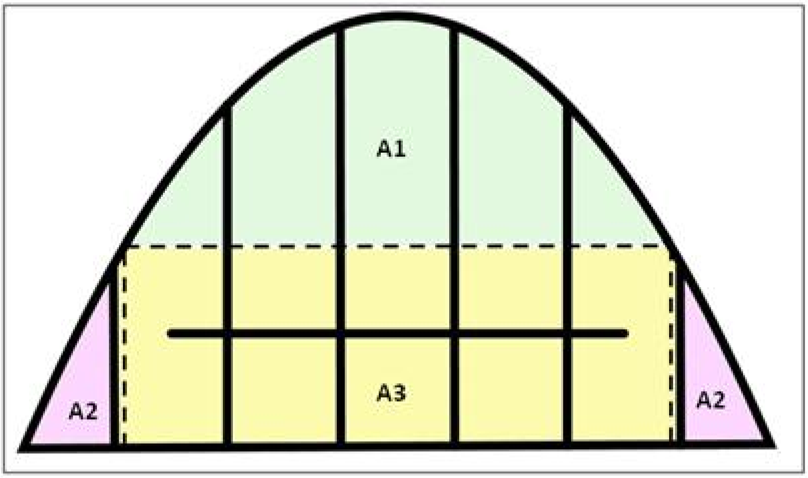


Figura 5: Divisão da fachada da igreja em figuras planas.

No entanto, antes de se calcular a área total, é preciso determinar as medidas de cada uma das figuras planas. Utilizando fórmulas para cálculo de áreas de figuras planas, tem-se a área de cada uma dessas figuras. Assim, o modelo matemático para representar a área total da fachada é dado por $A_T = A_1 + 2A_2 + A_3$, onde $A_1$ é a área da semicircunferência, $A_2$ é a área do triângulo e $A_3$ é a área do retângulo. Lembrando que portas e vitrais não recebem tinta, a área a ser pintada é dada pela diferença entre a área total da fachada e as áreas dos vitrais e das portas, somadas. Portanto, para o cálculo da área da fachada a ser pintada, temos a equação $A_F = A_T(A_V + A_P)$, o modelo que descreve a situação, onde $A_F$ é a área da fachada a ser pintada, $A_V$ representa a área ocupada pelos vitrais e $A_P$ a área das portas.

Almeida (2013) destaca que, nessa abordagem de atividade, os conteúdos de "área de figuras planas", "semelhança de triângulos" e "proporção" são utilizados para possibilitar a determinação da área da fachada da igreja a ser pintada. Nesse caso, o modelo matemático associado à situação corresponde à área total da fachada que irá receber tinta.

### 4.2.2 Sugestão do modelo para o Ensino Médio

Ainda conforme Almeida (2013), a abordagem da atividade de modelação para a pintura da fachada da igreja no Ensino Médio consiste em aproximar as regiões referentes à fachada da igreja em figuras planas, como trapézios, triângulos e retângulos. Assim, a fachada seria dividida em três regiões. Dessa forma, a área total seria a soma das áreas das três regiões.

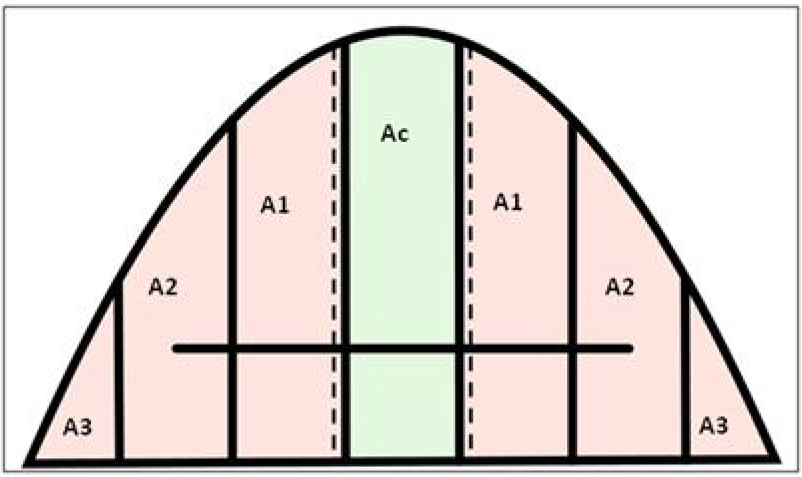


Figura 6: Divisão da fachada em três regiões.

Do mesmo modo que no encaminhamento anterior, da área total da fachada é necessária a subtração das áreas dos vitrais e das portas, que não recebem tinta, e acrescentar as áreas relativas às laterais dos pilares e da marquise, que não foram consideradas anteriormente. Para o cálculo das medidas das figuras planas formadas se faz necessária a utilização de conceitos das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Contudo, o modelo matemático que representa a área total da fachada é dado pela relação $A_T = A_C + 2A_1 + 2A_2 + 2A_3$, onde $A_C$ fornece a área do retângulo central, $A_1$ é a área do primeiro trapézio, $A_2$ é a área do segundo trapézio e $A_3$ representa a área do triângulo.

A área referente às portas e aos vitrais é calculada do mesmo modo que no encaminhamento anterior. A área da lateral de cada pilar é dada pelo cálculo de área dos retângulos que os constituem. A área da marquise é dada pela área superficial de um prisma retangular, subtraído de uma de suas faces que se apoia na fachada. Desta forma, somada a área total da fachada com as áreas laterais dos pilares e a área da marquise e subtraindo as áreas dos vitrais e das portas, encontramos a área da fachada a ser pintada. Desse modo, a área da fachada a ser pintada é representada pelo modelo matemático $A_F = A_T(A_V + A_P) + A_{LP} + A_M$, sendo $A_{LP}$ a área lateral dos pilares e $A_M$ a área da marquise.

Conforme Almeida (2013), essa atividade aborda os tópicos matemáticos como "áreas de figuras planas", "conceitos de trigonometria no triângulo retângulo" e "proporção".

### 4.2.3 Sugestão do modelo para o Ensino Superior

A abordagem da mesma atividade para a Educação Superior consiste em aproximar a fachada da igreja a uma parábola descrita por uma função quadrática decrescente. Assim, a área total da fachada seria calculada por integração da função quadrática em um intervalo determinado, ou seja, a região entre o intervalo positivo da parábola e o eixo cartesiano.

De acordo com Almeida (2013), colocando-se a igreja em um eixo cartesiano, encontram-se os pontos necessários para descrever o modelo matemático que representa o arco dessa igreja. De posse desse modelo, tem-se uma aproximação de uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + c$, uma vez que o arco da fachada nos fornece uma parábola decrescente e, pelo fato do foco estar no eixo das ordenadas, o coeficiente $b$ da equação é nulo. Então, a área total da fachada é obtida através da integração dessa função nos pontos em que a parábola corta o eixo cartesiano.

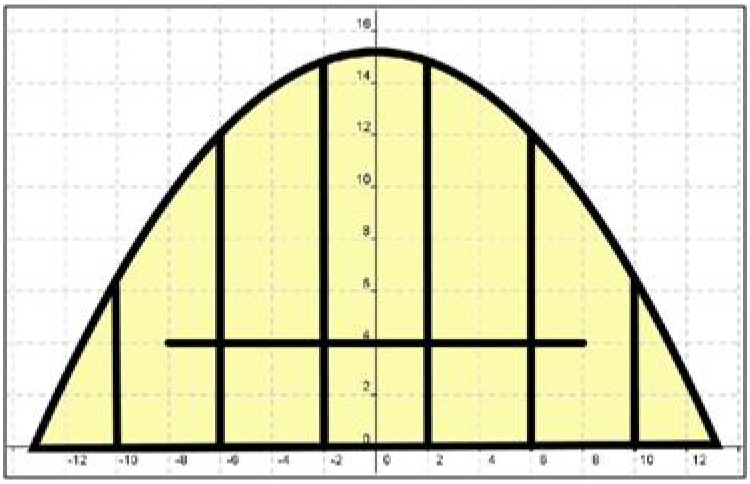

Figura 7: Fachada da igreja colocada sobre um eixo cartesiano.

A área da fachada a ser pintada, de modo análogo à sugestão anterior, é dada pela soma da área total com as áreas dos pilares e da marquise subtraída das áreas dos vitrais e das portas. O cálculo das áreas laterais dos pilares, das portas, dos vitrais e da marquise segue conforme visto nos casos anteriores. Desta forma, temos $A_F = A_T(A_V + A_P) + A_{LP} + A_M$ como o modelo matemático utilizado para representar a área da fachada da igreja a ser pintada.

Na construção desse modelo, onde a área total da fachada é dada pela relação expressa por uma função quadrática, abordam-se tópicos como "cálculo de áreas de figuras planas", "funções quadráticas" e "cálculo de áreas através da integração de funções".

# 5 Aplicações em Sala de Aula

Difícil falar de Modelagem Matemática e não vivenciá-la na prática. Neste capítulo serão apresentadas três atividades desenvolvidas com alunos do 2° Ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Maria do Carmo Lima, no 3° bimestre do ano letivo de 2014, em Águas Lindas de Goiás – GO. É preciso relatar que os experimentos são limitados e que alguns recursos matemáticos utilizados como derivadas, integrais e análise de regressão linear não fazem parte do currículo; que os alunos demonstram dificuldades em conceitos básicos de Matemática e que os recursos didáticos disponíveis são escassos, uma vez que se trata de uma escola carente de recursos materiais.

É importante ressaltar que estes foram os primeiros contatos realizados com a Modelagem Matemática e que, por esse motivo, os modelos matemáticos apresentados aqui são adaptações de modelos já mencionados por outros professores e alunos. De acordo com Maria Sallet Biembengut e Nelson Hein (2014):

> *Vale ressaltar que um curso, uma palestra ou um artigo contendo definições e resultados positivos de trabalhos realizados não são suficientes para se por em prática, num primeiro momento, a modulação, com todas as turmas e alunos de que o professor dispõe. Habilidade e segurança só se ganham com a experiência. Uma experiência que deve ser feita de forma gradual, em consonância com o tempo disponível que se tem para planejar.*

Nesta perspectiva, aqueles que querem fazer um trabalho utilizando Modelagem Matemática, mas não se sentem devidamente seguros, devem procurar conhecer alguns modelos clássicos adaptando-os para a sala de aula, aplicar trabalhos ou projetos realizados por outros colegas e propor que os alunos busquem exemplos ou tentem criar seus próprios modelos, sempre a partir da realidade. Essa estratégia deve ser utilizada até que o professor tenha confiança suficiente para propor um modelo matemático ou para até mesmo construir um modelo a partir das experiências de seus alunos.

## 5.1 Experimento I: obtendo o volume das esferas

Esse primeiro modelo matemático trata de um experimento adaptado do modelo apresentado pelas professoras Maria Alice Gravina, Luciana Peixoto e Márcia Rodrigues Notare, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do

Sul. Naquela ocasião, as professoras utilizaram um cilindro acrílico e um copo no formato de cone como recipientes para a água. Nesse experimento, substitui-se o cilindro e o cone por uma caixa acrílica no formato de um cubo como recipiente da água.

A ideia do experimento seria descobrir o volume de esferas utilizando o nível da água presente no cubo uma vez que o nível da água estava em função da quantidade de esferas que se colocava no recipiente. Assim, tinha-se a quantidade de esferas como a variável independente e o nível da água como variável dependente. Para sua realização foram utilizadas, além de caixas acrílicas com arestas de $18cm$, esferas representadas por bolinhas de gude, água, régua e folhas de papel para registro dos resultados.

Figura 8: Material utilizado na realização do experimento I.

Inicialmente, a turma foi dividida em quatro grupos. Cada grupo deveria, no primeiro momento, registrar as dimensões da base da caixa cúbica com auxílio de régua para depois colocar água no cubo até atingir a altura de $10cm$. Então, utilizando o cálculo de volume dos prismas, o volume foi obtido através do produto da área da base pela altura. Assim, o resultado obtido para o volume da água presente na caixa acrílica foi $V_0 = 18.18.10 = 3240cm^3$.

Figura 9: Calculando o volume da água presente no cubo.

A partir desse ponto, foram acrescentadas as bolinhas de gude ao recipiente. Como a diferença era imperceptível para o acréscimo de apenas uma bolinha de gude, foi sugerido que acrescentassem, a cada vez, cinco bolinhas. Os grupos realizaram tal procedimento por quatro vezes. Embora nem todos os alunos tenham apresentado os resultados esperados, os resultados satisfatórios para a resolução do problema foram registrados na tabela abaixo.

| Quantidade de Bolinhas de Gude | Nível da Água | Volume Registrado |
|---|---|---|
| 0 | $10cm$ | $3240,0cm^3$ |
| 5 | $10,3cm$ | $3304,8cm^3$ |
| 10 | $10,5cm$ | $3402,0cm^3$ |
| 15 | $10,7cm$ | $3466,8cm^3$ |
| 20 | $10,9cm$ | $3531,6cm^3$ |

Figura 10: Volumes registrados após acréscimos de bolinhas de gude.

Após o registro dos dados obtidos, cada grupo deveria construir um gráfico no computador, utilizando a planilha de cálculo do Excel, que relacionava a quantidade das esferas colocadas no recipiente com seu respectivo volume registrado. O gráfico deveria apresentar as características de uma reta, uma vez que os dados apontavam uma tendência linear. O esboço do gráfico é dado a seguir.

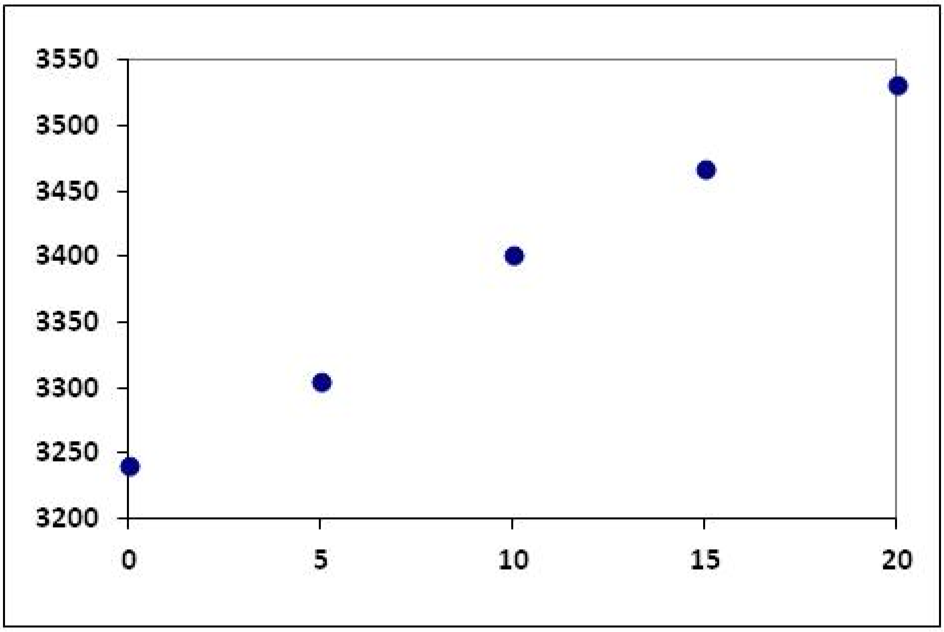


Figura 11: Quantidade de esferas no recipiente por volume de água.

Considerando a hipótese de que uma função polinomial de primeiro grau ajustaria os dados, dois pontos quaisquer foram tomados de forma aleatória para construir um sistema para a obtenção de um modelo que descreveria a situação. Logo, a partir da função $f(x) = ax + b$ encontrou-se a equação da reta que representou os pontos do gráfico, onde $x$ era a quantidade de bolinhas colocadas no recipiente. Assim, em discussão entre seus componentes, cada grupo adotaria um par de pontos para o cálculo da equação desejada.

Tomando $x = 5$, tem-se $f(5) = 5a + b$. Mas $f(5) = 3304,8$. Logo, conclui-se que $5a + b = 3304,8$. Para $x = 20$, tem-se $f(20) = 20a + b$. Mas $f(20) = 3531,6$. Então, $20a + b = 3531,6$. Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, segue que $a = 15,12$ e $b = 3229,2$. Desta forma, a equação da reta desejada é dada por $f(x) = 15,12x + 3229,2$.

Esta não seria a única forma para obtenção do modelo matemático da situação apresentada. Uma segunda alternativa sugerida seria deduzir uma equação que representasse o volume inicial da água acrescido do produto do volume de uma única esfera pela quantidade de esferas adicionadas. Para tanto, seria necessário concluir que a diferença entre os volumes registrados era exatamente o volume das esferas colocadas no recipiente. Por exemplo, o volume inicial era $V_0 = 3240cm^3$ e, depois de colocadas vinte bolinhas de gude, o volume passou para $V = 3531,6cm^3$. Logo, tinha-se $V - V_0 = 291,6cm^3$, que representa exatamente o volume das vinte bolinhas acrescentadas. Assim, dividindo a diferença obtida entre os volumes pela quantidade de bolinhas de gude acrescidas, chegariam à conclusão de que o volume de uma bolinha de gude era de aproximadamente $14,58cm^3$. Agora, tendo o volume inicial dado por $V_0 = 3240cm^3$ e o volume de cada bolinha dado por $14,58cm^3$, a equação da reta que descreveria o experimento proposto seria dada por $y = 14,58x + 3240$.

Nota-se uma pequena diferença entre as duas equações apresentadas. O primeiro modelo traz a função dada por $f(x) = 15,12x + 3229,2$ enquanto que o segundo modelo fornece, para as mesmas condições apresentadas, a equação de reta dada por $y = 14,58x + 3240$. Essa diferença ocorre quando se utilizam modelos lineares para representar situações não lineares. Para obter um modelo que ajuste os dados o mais próximo possível de uma equação de reta, comentou-se aos alunos que seria necessário recorrer a uma análise de regressão linear, elemento fundamental dentro do campo da Estatística, conteúdo do programa curricular da Educação Superior. Como objetivo desse experimento não era expandir o conteúdo a tal ponto, utilizou-se o programa de computador Estat D+ desenvolvido pelos professores Carlos Takeo Akamine e Roberto Katsuhiro Yamamoto, de fácil manuseio, para fornecer uma equação de reta ideal para representar a situação-problema apresentada. Os passos para tal procedimento são registrados a seguir.

Na janela principal do Estat D+, seleciona-se o tipo de dado de entrada a ser utilizado. Nesse caso, a opção desejada seria um par $(x, y)$. Então, registram-se os dados do experimento em uma tabela presente no quadro indicado por $x$ e $y$.

Em seguida, clica-se em “Regressão Linear”. Uma nova janela surge fornecendo uma análise de regressão linear completa juntamente com um diagrama de dispersão e uma reta de ajuste da tendência linear, conforme a figura a seguir:

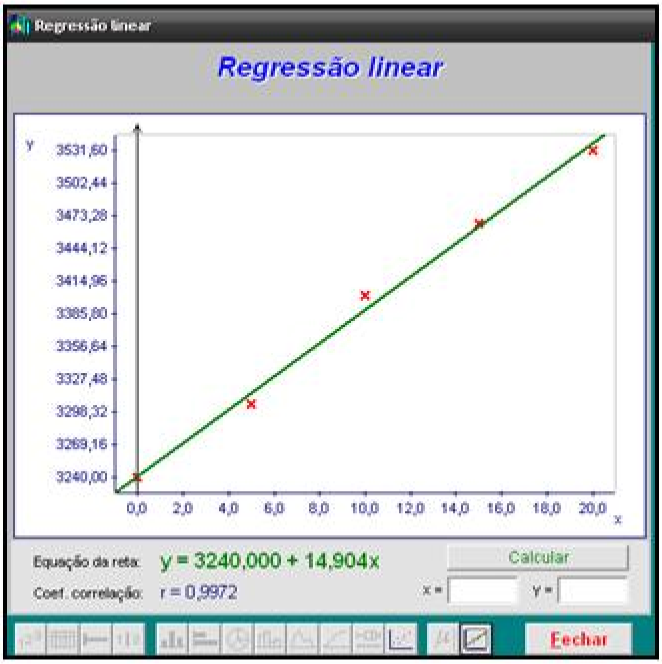


Figura 12: Registro de dados do experimento I no programa Estat D+.

A regressão linear nos fornece uma equação de reta $y = 3240 + 14,904x$ que seria a que mais se aproxima da reta ideal para a situação, ou seja, com menores erros de aproximação dos valores apontados no experimento. Essa relação é quase perfeita, conforme nos informa a análise de regressão descrita, uma vez que o coeficiente de correlação foi $r = 0,9972$ e, quanto mais próximo de $1,0$ for o coeficiente, maior a relação.

A partir dos modelos matemáticos encontrados, os alunos concluíram que para determinar o volume de uma esfera, indiferentemente do modelo adotado, não era mais necessário realizar o procedimento prático para determinar o volume de água em função da quantidade de bolinhas de gude acrescentadas ao recipiente. Agora, utilizando uma das equações encontradas, estipula-se uma quantidade $x$ de bolinhas e o volume da água é obtido. Como o volume de 20 esferas era de $291,6cm^3$, concluía-se também que o volume de uma esfera era de aproximadamente $15cm^3$. Observando os coeficientes angulares das equações obtidas pelos diferentes modelos matemáticos apresentados, concluíram que o volume de uma esfera era de aproximadamente $15cm^3$. Assim, chegaram à conclusão de que se o volume desejado fosse somente o das esferas, bastaria utilizar a equação $y = 15x$.

## 5.2 Experimento II: a forma ideal para a embalagem de leite

O tema proposto para este experimento permitiu desenvolver conceitos do currículo de Matemática do 2° ano do Ensino Médio como geometria plana e geometria espacial. Conceitos como função polinomial de segundo grau, sistemas de medidas e derivadas também foram abordados.

O modelo matemático apresentado é uma adaptação do modelo proposto pelos matemáticos Maria Salett Biembengut e Nelson Hein descrito na obra Modelagem Matemática no Ensino. Naquele experimento, a ideia seria criar um modelo matemático que permite encontrar o sólido geométrico que forneceria a menor área superficial para a construção de uma embalagem de determinado volume. O experimento apresentado neste trabalho limita-se a encontrar um modelo matemático para representar o paralelepípedo retângulo de menor área superficial dado um determinado volume.

A escolha do tema veio para enfatizar a importância da embalagem para o produto. Além da proteção que a mesma propicia ao produto, deve valorizar sua apresentação. É importante que seja de fácil manuseio e que mantenha o produto protegido da ação do transporte, dos efeitos provocados pelas condições climáticas e do tempo.

Ao comprar determinado produto, paga-se também pelo valor de sua embalagem. Assim, quanto mais cara for a embalagem, mais caro se torna o produto. Desta forma, o desafio do fabricante é oferecer um bom produto, com boa aparência e menor preço. No entanto, ele precisa detectar as diversas variáveis que permitem baratear o produto. Uma dessas variáveis é o custo da produção das embalagens. A proposta seria oferecer um formato adequado utilizando a menor quantidade possível de material obtendo o maior volume.

Existem diversas formas geométricas presentes na construção das embalagens. Devido ao fato de possuir fácil manuseio e praticidade no empilhamento, as mais comuns possuem o formato de paralelepípedos retângulos. Observando as embalagens de leite do tipo longa vida, notou-se que existiam no mercado modelos diferentes de embalagem para a mesma quantidade do produto. Daí veio a problemática que norteou a escolha do tema para esse experimento: Qual das embalagens apresenta menor custo para o fabricante? Qual teria o melhor manuseio? Qual seria o formato ideal para esse tipo de embalagem?

Figura 13: Embalagens de leite utilizadas no Experimento II.

Para responder a essas questões, toma-se a modelação matemática que permite encontrar uma equação na qual são fornecidas as dimensões do paralelepípedo retângulo com menor área superficial para um determinado volume. Com a obtenção do modelo, conclusões sobre custo, manuseio e formato foram apresentadas.

Inicialmente, os alunos realizaram as medições das dimensões das duas formas de embalagens de leite apresentadas. Para a primeira embalagem $E_1$, os resultados obtidos foram $7,2cm$ de comprimento, $7cm$ de largura e $19,85cm$ de altura, totalizando assim um volume $V_1 = 1000,44cm^3$. Para a segunda embalagem $E_2$, encontraram $9,4cm$ de comprimento, $6,3cm$ de largura e $16,9cm$ de altura, com volume $V_2 = 1000,81cm^3$. Uma vez que $1cm^3 = 1ml$, notou-se que os volumes das embalagens eram maiores do que os respectivos volumes de leite registrados nas mesmas. Tal fato explica-se pela necessidade de haver um pequeno espaço vazio na embalagem para melhor comportar o produto. Se embalagem e produto tivessem o mesmo volume, certamente haveria maior probabilidade de ter-se um menor volume do produto do que aquele indicado na embalagem.

Em um segundo momento, foram calculadas as medidas da área superficial de cada embalagem, a fim de encontrar a quantidade de material utilizado na construção das mesmas. Para tanto, as embalagens foram planificadas e calculadas as áreas de cada retângulo presente na planificação de cada sólido geométrico, desprezando as medidas

das emendas. A área total da superfície de cada embalagem foi dada pela soma das áreas de seus respectivos retângulos. Os valores foram registrados no quadro a seguir.

| | Embalagem I | Embalagem II |
|---|---|---|
| Retângulo 01 | $7{,}2cm \times 7cm = 50{,}4cm^2$ | $9{,}4cm \times 6{,}3cm = 59{,}22cm^2$ |
| Retângulo 02 | $7{,}2cm \times 19{,}85cm = 142{,}92cm^2$ | $9{,}4cm \times 16{,}9cm = 158{,}86cm^2$ |
| Retângulo 03 | $7cm \times 19{,}85cm = 138{,}95cm^2$ | $6{,}3cm \times 16{,}9cm = 106{,}47cm^2$ |
| Retângulo 04 | $7{,}2cm \times 7cm = 50{,}4cm^2$ | $9{,}4cm \times 6{,}3cm = 59{,}22cm^2$ |
| Retângulo 05 | $7{,}2cm \times 19{,}85cm = 142{,}92cm^2$ | $9{,}4cm \times 16{,}9cm = 158{,}86cm^2$ |
| Retângulo 06 | $7cm \times 19{,}85cm = 138{,}95cm^2$ | $6{,}3cm \times 16{,}9cm = 106{,}47cm^2$ |
| Área Total | $664{,}54cm^2$ | $649{,}10cm^2$ |

Figura 14: Áreas dos retângulos que formam as caixas de leite.

Comparando os resultados obtidos, observamos que a embalagem $E_1$ tem área superficial maior que a área superficial da embalagem $E_2$ para comportar 1 litro do produto. Desta forma, conclui-se que o custo da embalagem $E_2$ é menor que o custo da embalagem $E_1$. Nota-se que a diferença encontrada é pequena, mas quando somada a milhares de embalagens, essa diferença se torna significativa. Neste experimento não foram consideradas as áreas relativas às dobras das caixas de leite.

De modo geral, pode-se determinar um modelo matemático para calcular qualquer área superficial total de um paralelepípedo retângulo usando a ideia que permitiu calcular a área superficial das embalagens de leite. Nota-se que cada retângulo da planificação de uma embalagem é contado duas vezes. Tomando um paralelepípedo retângulo de comprimento $a$, largura $b$ e altura $c$, a área superficial é dada por $A_T = 2ab + 2ac + 2bc$. Dessa expressão tem-se $A_T = 2(ab + ac + bc)$, que seria o modelo desejado.

Para a segunda etapa do experimento, deseja-se encontrar uma relação válida para quaisquer medidas, ou seja, encontrar uma equação que descreva de forma geral as dimensões de um paralelepípedo retângulo que apresente a menor área possível para um determinado volume. Para tanto, deve-se encontrar um modelo que apresentasse a maior área de base possível e a altura ideal. Para esse fim, sugeriu-se a utilização da relação que existe entre a área de um retângulo e o seu perímetro.

Determina-se a área da base de um paralelepípedo retângulo através do produto entre o comprimento e a largura do retângulo que a constitui. Tomando $x$ como o comprimento desse retângulo e $y$ como a sua largura, a área da base é dada por $A_b = x.y$. Como o perímetro do retângulo que constitui a área da base é determinado pela soma de seus lados, temos $P = 2x+2y$, de onde se tem que $y = \frac{P}{2} - x$. Substituindo $y$ na equação da área da base $A_b = x.y$, encontra-se a expressão matemática $A_b = -x^2 + \frac{P}{2}x$, que é uma função de 2° grau.

A função $A_b = -x^2 + \frac{P}{2}x$ é decrescente, pois $a < 0$. Desta forma, a função atinge seu valor máximo quando $x_v = \frac{b}{2a}$, ou seja, $x_v = \frac{P}{4}$, pois $a = -1$ e $b = \frac{1}{2}$. Mas $y = \frac{P}{2} - x$. Então, substituindo $x$ por $\frac{P}{4}$, tem-se que $y = \frac{P}{2} - \frac{P}{4}$, ou seja, $y = \frac{P}{4}$. Nota-se que os valores de $x$ e $y$ são iguais. Assim, conclui-se que a maior área possível para um retângulo de comprimento $x$ e largura $y$ ocorre quando $x = y$. Portanto, o retângulo deve ser um quadrado.

Sabe-se que o volume de um prisma qualquer é dado pelo produto da área de sua base por sua altura. Como a área da base deve ser um quadrado, podemos tomar, sem perda de generalidade, $A_b = x^2$. Daí, o volume do paralelepípedo retângulo desejado é dado por $V = x^2.h$, de onde concluímos que $h = \frac{V}{x^2}$. Por outro lado, a área superficial do paralelepípedo retângulo é dada por $A = 2(ab + ac + bc)$. Tomando $a = b = x$ e $c = h$, tem-se $A = 2(x^2 + 2xh)$ que resulta em $A = 2x^2 + 4\frac{V}{x}$, quando se substitui $h$ por $\frac{V}{x^2}$.

Derivando a função polinomial $A$, tem-se $A' = 4x - 4\frac{V}{x^2}$, cujo valor máximo é obtido por $A' = 0$, ou seja, $4x - 4\frac{V}{x^2} = 0$. Resolvendo esta última equação, tem-se $4\frac{V}{x^2} = 4x$ de onde se conclui que $x = \sqrt[3]{V}$. Mas $h = \frac{V}{x^2}$. Substituindo $x$, tem-se que $h = \frac{V}{(\sqrt[3]{V})^2}$, que resulta em $h = \sqrt[3]{V}$. Então, para que o sólido geométrico estudado tenha volume máximo deve-se tomar $x = h$. Portanto, o paralelepípedo retângulo que apresenta menor área superficial para um determinado volume é um cubo cujo modelo matemático que representa sua aresta é dado por $x = \sqrt[3]{V}$.

As embalagens de leite analisadas continham 1 litro do produto que, convertidos, correspondiam a $1000cm^3$. Assim, a aresta da embalagem ideal seria dada por $x = \sqrt[3]{1000}$, de onde $x = 10cm$. A área superficial de um cubo de $10cm$ de aresta é $A = 2(10^2 + 2.10.10)$ que, efetuando os cálculos, tem-se $A = 600cm^2$. Logo, a área superficial de um cubo é inferior às áreas apresentadas pelas embalagens analisadas no experimento. Isso significa que é utilizado mais material do que se a embalagem tivesse o formato de um cubo.

Tal fato causou espanto aos alunos e daí surgiu a indagação: "Se a embalagem de menor custo seria a que tivesse o formato de um cubo, então porquê as empresas insistem em utilizar embalagens com formatos diferentes?" Para tal questionamento comentou-se que nem sempre a embalagem ideal deveria ser aquela que apresentasse a menor área superficial. Para o fabricante do produto importaria também o formato ideal para sua armazenagem e transporte, manuseio da embalagem e aparência. Portanto, ao criar-se uma embalagem, o fabricante deve chegar a um equilíbrio entre todos os aspectos apontados. O custo do material gasto para a construção da embalagem deve ser apenas um dos aspectos observados, talvez o mais importante, mas não o único.

Figura 15: Escrevendo um modelo matemático para o problema proposto.

## 5.3 Experimento III: calculando a vazão de água de um córrego

Neste experimento, procura-se mostrar um modelo matemático para determinar a vazão de água de um córrego. Inicialmente comenta-se sobre a importância de se calcular a vazão em cursos d'água citando, como exemplos, pontes, obras de drenagens, navegação, abastecimento urbano, barragens, controle de poluição e geradores de energia elétrica. A ideia desta experiência é encontrar uma razão entre o volume de água, em metros cúbicos, que atravessa uma secção transversal do curso d'água, e o tempo, dado em segundos.

A atividade de modelação acontece em dois momentos distintos. No primeiro momento realiza-se uma pesquisa de campo no Córrego do Boi, em um trecho que corta o município de Águas Lindas de Goiás – GO, onde todos os dados são coletados e registrados, caracterizando a fase da inteiração da modelagem. No segundo momento, tem-se o desenvolvimento da modelação em sala de aula, onde se trabalham a matematização, a resolução e a interpretação de resultados e a validação do modelo matemático. Embora toda a turma tenha participado das tarefas realizadas em sala de aula, somente alguns alunos participaram da pesquisa de campo, uma vez que se trata de uma tarefa realizada em um córrego que, mesmo não tendo águas profundas, oferece riscos a integridade física dos alunos.

Durante a pesquisa de campo, discutiu-se sobre a escolha de um trecho do córrego que melhor permitisse o cálculo de seu volume. Isso implicaria em escolher uma região que melhor aproximasse das características de um prisma, uma vez que para se determinar o seu volume, bastaria calcular o produto entre a área de sua base e a sua altura. Para a escolha do local, questões como acessibilidade, características do fundo e praticidade no registro de profundidades foram observadas. Feita a escolha, o trecho foi demarcado com linhas de barbante.

Figura 16: Trecho do córrego delimitado para o experimento.

Depois de demarcado o trecho do córrego a ser analisado, o fundo da região delimitada foi mapeada e as profundidades de diferentes locais do trecho foram registradas com o auxílio de uma haste de metal e uma trena.

Notou-se que o trecho tinha o formato de um sólido geométrico irregular que apresentava semelhança com um prisma de base triangular. Na primeira linha do trecho, com comprimento de $6,76m$, registra-se $1,72m$ como ponto de maior profundidade. Na segunda linha do trecho, com comprimento de $7,24m$, tem-se $1,57m$ como ponto mais profundo. A distância entre uma linha e outra, paralelas entre si, era de $5,23m$.

A fim de ter-se uma melhor visão do que seria o fundo desse trecho, fez-se um esboço da região delimitada registrando os dados observados.

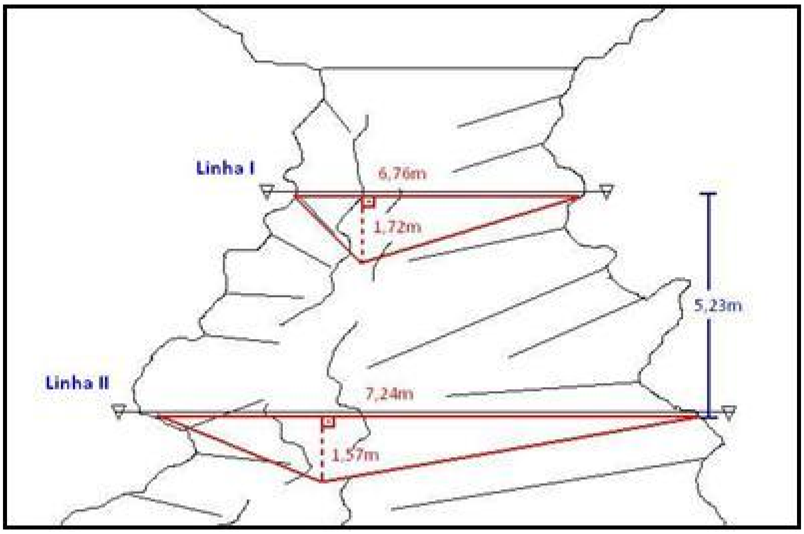


Figura 17: Mapeamento do trecho do córrego demarcado.

Para findar a pesquisa de campo, registram-se os tempos necessários para a bolinha percorrer a mesma distância em posições de diferentes velocidades da correnteza. O processo foi realizado em cinco pontos distintos a fim de se determinar o tempo médio de descida da bolinha, uma vez que imperfeições no caminho percorrido, profundidade e perturbações no curso da água foram observadas. Os tempos registrados foram: 1 minuto e 24 segundos; 1 minuto e 19 segundos; 1 minuto e 27 segundos; 1 minuto e 30 segundos e 1 minuto e 38 segundos. Assim, o tempo médio de descida da bolinha no trecho delimitado pelas duas linhas paralelas é de $87,6$ segundos.

Figura 18: Registrando o tempo de deslocamento da bolinha.

Finalizada a etapa da inteiração, os dados foram apresentados para os demais alunos da turma que, divididos em pequenos grupos, tinham por objetivo apresenta modelos matemáticos válidos para a situação estudada. Para tanto, deveriam através de discussão, encontrar a melhor forma de se calcular o volume do trecho apresentado. O desafio proposto era o de encontrar um modelo matemático que permitisse calcular o volume de água do trecho delimitado que, por sua vez, apresentava forma de um sólido geométrico irregular. Para tanto, deveriam associar tal forma a um prisma e, assim, encontrar uma maneira de determinar o volume aproximado de água. Comentou-se que para ter-se exatidão no resultado procurado seriam necessárias técnicas mais apuradas de cálculo, como a integração, e também instrumentos mais adequados para o mapeamento do trecho demarcado. Três diferentes propostas de modelos matemáticos foram apresentadas. Eram caminhos diferentes que resultavam em um volume de vazão da água bem próximo um do outro. Os resultados dos modelos matemáticos apresentados pelos alunos são descritos a seguir.

**1° Modelo Matemático**

Para o primeiro modelo matemático apresentado, calcularam a área dos triângulos formados pelas secções transversais delimitadas pela linha e o fundo do córrego e encontraram para o triângulo superior, de base linha I, uma área de $A_1 = 5,8136m^2$ e para o triângulo inferior, de base linha II, uma área $A_2 = 5,6834m^2$. Então, determinaram a área média entre os dois triângulos e chegaram ao valor de $A_m = 5,7485m^2$. Para o cálculo da vazão de água do córrego, multiplicaram a área média $A_m$ encontrada pela distância $d$ entre as linhas que delimitam o trecho do córrego e o resultado, dividiram pelo tempo médio $t_m$ de descida da bolinha. Assim, chegaram ao modelo matemático $V_z = \frac{(A_m.d)}{t_m}$, que registrou uma vazão de $0,343$ metros cúbicos de água por segundo.

**$2^\circ$ Modelo Matemático**

O segundo modelo matemático sugeriu considerar o cálculo do volume de dois prismas com bases triangulares tomando as medidas apresentadas na inteiração e tirando daí o volume médio dos resultados apresentados. Tomando o prisma formado pelo triângulo delimitado pela secção transversal superior, de base linha I, encontraram $V_1 = 30,405m^3$. Tomando o prisma formado pelo triângulo delimitado pela secção transversal inferior, de base linha II, encontraram o volume $V_2 = 29,724m^3$. Então, o volume médio entre os prismas apresentados era de $V_m = 30,064m^3$. Para determinar a vazão de água do córrego, dividiram o volume médio registrado pelo tempo gasto na descida das bolinhas. Então, através do modelo matemático $V_z = \frac{(V_1+V_2)}{(2t_m)}$, encontraram uma vazão de $0,343$ metros cúbicos de água por segundo.

**$3^\circ$ Modelo Matemático**

Para o terceiro modelo matemático, consideraram a profundidade média do córrego e o comprimento médio das linhas que delimitaram o trecho a ser analisado. Assim, sugeriram um prisma de base triangular composto por um triângulo formado pela profundidade média como altura e comprimento médio como base. A profundidade média do córrego foi dada pela média das profundidades registradas nas secções transversais que delimitam o trecho analisado. Neste caso, encontraram $p_m = 1,645m$. Para o registro do comprimento médio das linhas que delimitam o trecho, encontraram $c_m = 7m$. Logo, o volume do prisma, obedecendo estas condições, é dado por $V = 30,111m^3$. A vazão de água do córrego neste modelo matemático foi dada pelo quociente entre o volume obtido e o tempo médio de descida das bolinhas. Logo, $V_z = \frac{(p_m.c_m.d)}{t_m}$. O resultado encontrado foi de $0,343$ metros cúbicos de água por segundo.

Não foram todos os grupos que conseguiram propor um modelo matemático para resolver o problema proposto. Os resultados apresentados pelos demais grupos foram discutidos e avaliados pela turma com mediação do professor. Embora o resultado obtido tenha sido o mesmo nos três casos, foi importante observar que os modelos matemáticos apresentados foram distintos e que havia pequenas discrepâncias nos valores encontrados. Contudo, os três modelos foram válidos para nos fornecer um valor aproximado de vazão de água do córrego estudado. Portanto, pode-se considerar que o curso d'água analisado neste trabalho apresenta uma vazão aproximada de 343 litros de água por segundo.

# 6 Considerações Finais

A Modelagem Matemática tem se apresentado como uma importante ferramenta no processo de construção da aprendizagem matemática. Através dela é possível desenvolver a criatividade e o senso crítico dos alunos projetando, assim, a possibilidade de mudar concepções sobre o ensino da Matemática.

Durante a realização deste trabalho foi constatado que a Modelagem Matemática é uma metodologia de ensino muito distante da realidade das escolas brasileiras. Embora existam muitos professores que defendam a importância da aplicação da Matemática no cotidiano do aluno, poucos são aqueles que de fato fazem uso deste procedimento. Ainda prevalece dentro da sala de aula o ensino tradicional. Em entrevista com a comunidade escolar, notou-se que muitos professores ainda se mostram como meros transmissores de conteúdos, o que tem resultado, na maioria das vezes, na formação de um aluno sem senso crítico e pouco criativo.

Conversando com alguns professores de Matemática, constatou-se que muitos são os obstáculos enfrentados para o uso da Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem. Apontaram que já na própria formação de professores falta o compromisso na aplicação do contexto matemático na vida do cidadão. Até existem disciplinas no currículo que enfocam a importância do ensino contextualizado da Matemática, porém são meras teorias que o futuro professor certamente não fará uso por não tê-las vivenciadas na prática.

Pode-se ainda apontar, como barreiras para a utilização dessa metodologia, a dificuldade em adquirir material pedagógico necessário para a criação de modelos matemáticos sendo às vezes necessário improvisar; o número elevado de alunos em sala de aula que tem dificultado o acompanhamento individual do professor ao aluno; a falta de conceitos básicos de Matemática demonstrada pelos alunos que muitas vezes limita a ampliação do modelo; o pouco tempo disponível aos professores para o planejamento de suas aulas uma vez que o mesmo precisa trabalhar por até três turnos para conseguir um salário suficiente; a falta de flexibilidade entre os conteúdos abordados no modelo matemático e os conteúdos propostos no currículo e a falta de compromisso de alguns profissionais da educação para os seus alunos, não demonstrando interesse algum em construir um cidadão melhor.

A pesquisa permitiu observar que o ensino com Modelagem Matemática é um procedimento muito eficiente. Quando trabalhado de forma organizada, envolve o aluno de tal forma que o mesmo passa a ser o elemento principal da construção de sua aprendizagem. Percebe-se que o aluno sente a necessidade de interagir na construção do modelo demonstrando motivação e senso participativo.

Durante a realização dos experimentos deste trabalho, notou-se o comprometimento por parte dos alunos na busca da construção do conhecimento. Tal atitude não era demonstrada em aulas somente teóricas. Aplicar os conhecimentos adquiridos em situações práticas, com o envolvimento de toda a turma, reforçou a fixação dos conceitos trabalhados.

Em conversa com os alunos, constatou-se que a grande maioria aprovou a nova metodologia de ensino apresentada. Alguns ainda se mostraram resistentes devido ao fato de que estavam acostumados com o método tradicional de ensino, porém ainda assim afirmaram que a metodologia também é válida.

Trabalhar todas as fases da Modelagem Matemática é de fato um processo complicado e cansativo que exige muito comprometimento do professor. Existem riscos quando a proposta exige uma pesquisa de campo fora da unidade escolar. Nem sempre o material necessário para a realização do experimento é de fácil aquisição. A má formação acadêmica dos alunos impossibilita o aprofundamento da metodologia. O tempo nem sempre é suficiente. Todos esses obstáculos foram vivenciados durante a execução dos experimentos. Contudo, a satisfação do objetivo alcançado de certa forma compensou todos os esforços, uma vez que praticamente todos os alunos participantes tiveram crescimento significativo no saber matemático. A descoberta do conhecimento pelo aluno faz acreditar que essa técnica de trabalho é produtiva.

Neste primeiro contato ainda não foi possível vivenciar todos os benefícios que a Modelagem Matemática pode propiciar ao processo de construção do conhecimento matemático, mas é o início de uma nova concepção de que a Matemática não precisa mais ser apenas a decoração de regras que muitas vezes não fazem sentido algum para o aluno e até mesmo para os professores.

A Matemática por tempos tem se mostrado como pesadelo para o aluno, uma vez que para a sua compreensão não basta o conhecimento de modelos pré-estabelecidos. É necessário raciocinar. O pensamento crítico não se constrói somente com aulas teóricas.

O aluno precisa vivenciar para compreender e assim parar de se perguntar o porquê de estudar tais conteúdos. Daí vem a importância do uso da Modelagem Matemática em sala de aula uma vez que a mesma torna prático o conteúdo teórico aprendido.

É evidente que ao se trabalhar Modelagem Matemática com frequência o aprimoramento se dará naturalmente. É preciso colocar essa metodologia em prática sempre que possível, enfrentando todos os obstáculos apresentados neste trabalho. Assim, é certo que as aulas serão mais atrativas e a Matemática terá uma nova face para o aluno. Este, por sua vez, irá desenvolver seu senso crítico e apresentar uma forma diferenciada de compreensão do novo.

# Referências


[1] Akamine, Carlos Takeo; Yamamoto, Roberto Katsuhiro. **Estudo Dirigido de Estatística Descritiva.** São Paulo: Editora Érica, 1998.

[2] Almeida, Lourdes Werle de; Silva, Karina Pessôa da; Vertuan, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** 1. ed. 1ª reimpressão. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

[3] Barbosa, Jonei Cerqueira. **O que pensam os professores sobre a Modelagem Matemática?** Zetetiké, Campinas, n° 11, 1999. Disponível em http://sites.uol.com.br/joneicb.

[4] Barbosa, Jonei Cerqueira. **Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o debate teórico.** In: Reunião Anual da APNED, 24, Caxambu. Anais. Rio de Janeiro: APNED, 2001.

[5] Barbosa, Jonei Cerqueira. **Modelagem na Educação e os Professores: A Questão da Formação.** Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, Ano 14, n° 15, p. 5-23, 2001.

[6] Barbosa, Jonei Cerqueira. **Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como?** Veritati, n° 4, p. 73-80, 2004.

[7] Bassanezi, Rodney Carlos. **Modelagem como Metodologia de Ensino da Matemática.** Boletim de Educação da SBMAC. São Paulo: IMECC/Unicamp, 1994.

[8] Bassanezi, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática.** Versão Preliminar. UFABC – Universidade Federal do ABC. Santo André: IMECC/Unicamp, 2012. Disponível em http://gradmat.ufabc.edu.br.

[9] Bassanezi, Rodney Carlos. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma Nova Estratégia.** 3. ed. 4ª reimpressão. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

[10] Biembengut, Maria Salett; Hein, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino.** 5. ed. 4ª reimpressão. São Paulo: Editora Contexto, 2014.

[11] Biembengut, Maria Salett; Martins, Rosane. **Mapeamento dos Programas Curriculares de Modelagem Matemática dos Cursos de Formação de Educadores de Matemática (licenciaturas) do Brasil.** Relatório Final de Iniciação Científica. Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica – PIBIC/FURB, 2009.

[12] Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília: MEC/SEMT, 1999.

[13] Caldeira, Ademir Donizeti. **Modelagem Matemática e Formação de Professores: o que isto tem a ver com as licenciaturas?** In: V Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. Anais. Ouro Preto: UFOP, 2007.

[14] Correa, Jane. **Um Estudo Intercultural da Dificuldade Atribuída à Matemática,** 1999. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php.

[15] Cristofoletti, Antônio. **Modelagem de Sistemas Ambientais.** São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1999.

[16] Ferreira, Aurélio Buarque de Holanda. **Miniaurélio Século XXI Escolar: O Minidicionário da Língua Portuguesa.** 4. ed. revista ampliada. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

[17] Hisrschberger, Johannes. **História da Filosofia na Antiguidade.** 2. ed. São Paulo: Editora Herder, 1965.

[18] Lima, Elon Lages. **Matemática e Ensino.** Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2001.

[19] Sodré, Ulysses. **Modelos Matemáticos.** Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Londrina-PR, 2007.