



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# Aplicações para o Princípio de Indução Matemática

Normando Silva Junior

Goiânia

2014

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

### 1. Identificação do material bibliográfico: Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional

#### 2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	<b>Normando Silva Junior</b>				
E-mail:	<b>normado.prof@gmail.com</b>				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim		<input type="checkbox"/> Não		
Vínculo empregatício do autor	<b>Mestrando Bolsista</b>				
Agência de fomento:	<b>Coord. Aperf. De Pessoal de Nível Superior</b>			Sigla:	<b>CAPES</b>
País:	<b>Brasil</b>	UF:	<b>GO</b>	CNPJ:	<b>00889834/0001-08</b>
Título:	<b>Aplicações para o Princípio de Indução Matemática</b>				
Palavras-chave:	<b>Recorrência, Indução, Fibonacci, Teoria dos Números.</b>				
Título em outra língua:	<b>Applications for the principle of mathematical induction</b>				
Palavras-chave em outra língua:	<b>Recurrence, Induction, Fibonacci, Numbers Theory.</b>				
Área de concentração:	<b>Matemática do Ensino Básico</b>				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	<b>26/09/2014</b>				
Programa de Pós-Graduação:	<b>Mestrado</b>				
Orientador (a):	<b>Professor Dr. Maxwell Lizete da Silva</b>				
E-mail:	<b>maxwelllizete@hotmail.com</b>				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

### 3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do (a) autor (a)

Data: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Normando Silva Junior

# Aplicações para o Princípio de Indução Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Maxwell Lizete

Goiânia

2014

Ficha catalográfica elaborada  
automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva Júnior, Normando  
Aplicações para o princípio de indução matemática [manuscrito] /  
Normando Silva Júnior. - 2014.  
54 f.: il.

Orientador: Prof. Maxwell Lizete.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de  
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Goiânia, 2014.

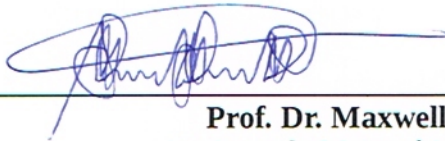
Bibliografia.  
Inclui lista de figuras.

1. Recorrência. 2. Indução. 3. Fibonacci. 4. Teoria dos números. I.  
Lizete, Maxwell , orient. II. Título.

**Normando Silva Junior**

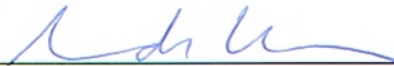
**Aplicações para o Princípio de Indução  
Matemática**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 26 de setembro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



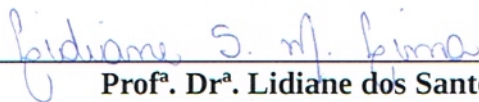
---

**Prof. Dr. Maxwell Lizete da Silva**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca - Orientador



---

**Prof. Dr. André Krindges**  
Departamento de Matemática/ICET/UFMT



---

**Prof.ª Dr.ª Lidiane dos Santos Monteiro Lima**  
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Normando Silva Junior** graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, especializou-se em Psicopedagogia pela Unip- Universidade Paulista, é professor do ensino fundamental e médio em Goiânia, nas escolas IPE e WRJ, atua como coordenador de turno pela secretaria municipal de educação e professor universitário nas faculdades Alfa.

Dedico este trabalho a minha família, presente sempre, aos meus amigos pela torcida, compreensão da ausência, coordenadores das instituições que leciono pela motivação e compreensão eterna e por fim aos meus alunos que sempre se envolveram com votos de sucesso em todos os momentos compartilhados.

# Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, amigos e a Deus pela presença constante e suporte gratuito.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro. A bolsa de mestrado oportunizou a possibilidade de minimizar a quantidade de aulas durante os créditos cursados, e que neste período, viabilizou os estudos tão necessários para a formação sólida que obtive nestes dois anos junto à UFG.

Ao grande mestre e orientador professor Maxwell pela paciência infinita e tolerância incomensurável apresentada durante todo o processo de criação deste trabalho.

Em especial, agradeço aos amigos Marcelo Santos, Evandro Rios, Vitor Braga e Ricardo Cunha pela amizade verdadeira, troca de experiências e inclusive oportunidades profissionais, além de constantemente ensinar-me matemática e viver a vida.



## Resumo

Neste trabalho procurou-se apresentar sistematicamente conhecimentos da teoria dos números de maneira clara e acessível a um público mais abrangente do que o usual em trabalhos acadêmicos dentro da matemática. O princípio de Indução Matemática, *PIM*, foi sempre o pano de fundo e abordado como ferramenta para demonstrações, de maneira a permear quase todos resultados, e em cada seção, ao menos um exemplo numérico foi dado facilitando assim o proeminente leitor que esteja iniciando seus estudos em matemática e intencionando sempre no mínimo instigar o sentimento investigativo em todos leitores. As frações contínuas, assunto não tão explorado mas extremamente rico em aplicações na física e cálculo, também mostrou-se familiar com os números de Fibonacci. Em sequência, foram apresentados dois problemas clássicos de caráter lúdicos, Torre de Hanoi e o Problema da Moeda Falsa, que a partir de exemplos simples conseguiu-se logo em sequência generalizar demonstrando uma solução para os problemas para qualquer número natural. Por fim, as Recorrências Lineares de Segunda Ordem e Progressão Aritmética de Ordem Superior foram expostas e suas relações íntimas com a sequência de Fibonacci, e esses números então acabaram se tornando motivadores para todo o trabalho, que preza por resultados demonstráveis através do *PIM* ou que tenha relação com essa sequência, sendo que sempre se procurou fortalecer a admiração pelos seus diálogos com ramos tão aparentemente estanques e que são familiares senão pelo surgimento dos números de Fibonacci nesses tópicos.

## Palavras-chave

Recorrência, Indução, Fibonacci, Teoria dos Números.

## Abstract

This paper sought to systematically present knowledge on the number theory in a clear and accessible way to a broader community than the mathematical academics. The principle of mathematical induction *PMI*, was the background and the main tool to all demonstrations so to permeate almost all the results and, in each section, at least one numerical example was given, thus making it easier to readers beginning their studies in math and always seeking to at least encourage the investigative feeling on all readers. The continuous fractions, subject commonly overlooked, yet with vast applications in Physics and Calculus, proved to be familiar with the Fibonacci numbers. Sequentially, two classic game problems were presented, The Hanoi Tower and the problem of the false coin, which could, from simple examples be generalized demonstrating solutions for the problems at any given natural number. Finally, the linear recurrences of second order and the higher order arithmetic progression were shown to have deep connections with the Fibonacci sequence, so then, these numbers became the main motivators for all the paper, that prizes for demonstrable results through *PMI* or related to this sequence of numbers, and always sought to strengthen the admiration of the dialogues with branches apparently so fixed that are the familiar through the appearance of the Fibonacci numbers in these topics.

## Keywords

Recurrence, Induction, Fibonacci, Numbers Theory.

# Lista de Figuras

3.1	Torre de Hanoi. . . . .	34
3.2	Balança de dois pratos. . . . .	38

# Sumário

<b>1</b>	<b>O começo de uma pequena era</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Indução e Fibonacci</b>	<b>15</b>
2.1	Princípio de Indução Matemática . . . . .	15
2.2	Sequência de Fibonacci . . . . .	17
2.2.1	Propriedades da sequência de Fibonacci . . . . .	18
2.3	Frações Contínuas e os números de Fibonacci . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Uso do <i>PIM</i> de maneira lúdica</b>	<b>34</b>
3.1	Torre de Hanoi . . . . .	34
3.2	Problema das Moedas . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Sequências e Recorrência Linear de Segunda Ordem</b>	<b>41</b>
4.1	Progressão Aritmética de Ordem Superior . . . . .	41
4.2	Recorrência Linear de Segunda Ordem . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Uma Aula Sobre Indução</b>	<b>48</b>
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>51</b>

# Capítulo 1

## O começo de uma pequena era

### Como surgiram as ideias

Quando em 2011 iniciava o preparatório para realização do exame de acesso ao programa de mestrado profissional em matemática - PROFMAT - era impossível vislumbrar os cunhos que se formariam pelos estudos e abdições necessárias para concretizá-los. Em especial, as disciplinas de Matemática Discreta já no primeiro semestre de curso e Aritmética no que se seguiria, seriam vitais para esse trabalho, quando em tempo, era possível analisar as avaliações anteriores destas disciplinas no portal nacional do programa, e aquela curiosidade natural surgindo pela admiração sempre presente no que tange tópicos de matemática.

Em uma tentativa de fazer relação entre os estudos realizados no curso de mestrado profissional - PROFMAT - e nos conteúdos ministrados no Ensino Médio contidos nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) nasceu a ideia de discorrer sobre a sequência de Fibonacci, pois além de ser contemplada no ensino de recorrência durante os estudos do ensino médio, trata-se de um assunto interessantíssimo pelas características intrínsecas e de incrível relação com outros campos da matemática, incluindo o Princípio de Indução Matemática (PIM) além da razão áurea.

Na primeira seção do capítulo 2, quando fala-se do PIM, utilizado para provar alguns teoremas acerca da sequência de Fibonacci, define-se o axioma de indução e então o Princípio de Indução Matemática, este então será instrumento valioso para demonstrações de propriedades da sequência de Fibonacci.

Já no capítulo seguinte, apresenta-se exemplos práticos do uso do PIM, tal como

o problema da Torre de Hanoi, inclusive sua parte histórica, e também o problema da Moeda Falsa, quando tem-se um problema de transportar discos em três hastes de uma maneira bem particular com regras claras, e na moeda, conseguir encontrar uma moeda com peso distinto em meio de tantas outras realizando apenas pesagens em uma balança constituída apenas por dois pratos. Esses problemas, foram inicialmente formulados para um número bem particular de discos e moedas, em seguida generalizado para qualquer quantidade, sendo que para isso, caminhamos através do Princípio da Boa Ordenação quando oportunamente traz-se a demonstração.

No quarto capítulo, são apresentadas as recorrências lineares de ordem superior, e aproveitando as recorrências, usa-se o PIM para demonstrar as fórmulas da progressão aritmética-geométrica. Logo em seguida, faz-se um elo com as recorrências de segunda ordem e os números da sequência de Fibonacci quando é apresentado uma fórmula explícita para os números dessa sequência.

Já no final, apresenta-se um plano de aula para aplicação de indução em fórmulas matemáticas apresentadas no ensino médio.

# Capítulo 2

## Indução e Fibonacci

### 2.1 Princípio de Indução Matemática

Na motivação de formalizar os conjuntos numéricos, em especial dos números naturais,  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , fez-se necessário a construção do Princípio de Indução Matemática, que então, foi adotado como o axioma:

**Axioma1:** *Axioma de indução:* Seja  $S$  um subconjunto de  $\mathbb{N}$  tal que

i)  $0 \in S$ .

ii)  $S$  é fechado na operação de somar 1 a seus elementos, ou seja,  $\forall n, n \in S \Rightarrow n+1 \in S$  então,  $S = \mathbb{N}$ .

A nossa ferramenta principal será o primeiro *PIM* que formula-se como um teorema da seguinte forma com sua demonstração baseada em [7].

**Teorema 2.1.1** (Princípio de Indução Matemática). *Seja  $a \in \mathbb{N}$  e seja  $p(n)$  uma sentença aberta em  $n$ <sup>1</sup>. Suponha que*

i)  $p(a)$  é verdade, e que

ii) para todo  $n \geq a$ ,  $p(n)$  implica  $p(n+1)$  é verdade, então,  $p(n)$  é verdade para todo  $n \geq a$ .

*Demonstração 1.* Seja  $W = \{n \in \mathbb{N}; \text{vale } p(n)\}$ , ou seja,  $W$  é o subconjunto dos elementos de  $\mathbb{N}$  para os quais  $p(n)$  é verdade.

---

<sup>1</sup>Frase de cunho matemático onde figura a letra  $n$  como palavra e que se torna uma sentença verdadeira ou falsa quando  $n$  é substituído por um número natural específico.

Pelo fato de  $p(a)$  ser verdadeira assegura que  $a$  pertence a  $W$ . A validade de  $p(n)$  implica na validade de  $p(n + 1)$ , se  $n$  pertence a  $W$ , então  $n + 1$  também pertence a  $W$ . Pelo **Axioma 1**, todo número natural pertence a  $W$ , quer dizer,  $p(n)$  é verdadeira para todo  $n$ .  $\square$

Uma outra demonstração demasiadamente simplista pode ser assim formulada:

*Demonstração 2.* Supondo por simplicidade que  $a = 0$  e por absurdo que  $W \neq \mathbb{N}$ , tem-se  $n_0 \in \mathbb{N}$  e  $\notin W$ , logo,  $P(n_0)$  não é válido, de maneira que o seu antecessor também não o é, ou seja,  $P_{n_0-1}$  não é válido, e repetindo esse processo todo  $n_0 + 1$  vezes é suficiente para chegar a  $P(0)$  também invalido, o que é uma contradição já que  $P(a)$  é válido por hipótese, logo,  $W = \mathbb{N}$ .  $\square$

Além do princípio de Indução Matemática clássico, acima demonstrado, existe uma segunda versão usada para provar identidades quando é preciso confirmar a validade da proposição para valores menores do que  $n$ , geralmente na passagem da hipótese de indução supondo válida para  $n$  e provar a implicação de  $n + 1$ .

Para isso, como há o requisito do *Princípio da Boa Ordenação*, segue sua formulação e sua demonstração logo em seguida usando argumentos de [4].

**Teorema 2.1.2** (Princípio da Boa Ordenação). *Todo subconjunto  $A \subset \mathbb{N}$  não vazio possui um menor elemento, isto é, um elemento  $t$  tal que  $t \leq n$  para todo  $n \in A$ .*

*Demonstração.* Nesta demonstração vamos denotar  $I_n = \{p \in \mathbb{N} / 0 \leq p \leq n\}$  o conjunto dos naturais menores ou iguais a  $n$ . Se  $1 \in A$  então será o menor elemento de  $A$ . Porém, se  $1 \notin A$  então considera-se o conjunto  $X$  dos naturais  $n$  com a propriedade de que  $I_n \subset A^c$ . Uma vez que  $I_1 \subset \mathbb{N} \setminus A$ , nota-se que  $1 \in X$ . Por outro lado, já que  $A$  é não vazio, conclui-se que  $X \neq \mathbb{N}$  negando a hipótese (ii), devendo então existir um  $n \in X$  tal que  $n + 1 \notin X$ . Então,  $I_n = 1, 2, 3, \dots, n \subset \mathbb{N} - A$  mas  $n_0 = n + 1 \in A$ . Portanto tem-se que  $n_0$  é o menor elemento do conjunto  $A$ .  $\square$

Oportunamente, sendo possível agora pelo fato do P.B.O. explicitado e comprovado, formula-se:

**Teorema 2.1.3** (2ª forma do Princípio de Indução Matemática). *Seja  $p(n)$  uma sentença aberta tal que*

*i)  $p(a)$  é verdade, e que*



ii) Se para cada  $n$  natural,  $p(a), p(a+1), \dots, p(n)$  implica que  $p(n+1)$  é verdade, então  $p(n)$  é verdade para todo  $n \geq a$ .

*Demonstração.* Considere o conjunto  $(a+\mathbb{N}) = (a, a+1, a+2, \dots)$ . Construindo o conjunto  $S = \{m \in (a+\mathbb{N}) \text{ tal que vale } p(m)\}$ . Esse é o conjunto dos elementos  $m$  que valem  $p(m)$  sendo os termos dos naturais mais  $a$  q

Intenciona-se mostrar que

$$W = \{(a+\mathbb{N}) \setminus S\}$$

é vazio. Supondo por redução ao absurdo que vale o contrário, então, pelo princípio da boa ordenação,  $W$  teria de fato um menor elemento chamado aqui de  $t$ , e pela hipótese (i) nos garante que  $t \notin W$  é imediato inferir que existe um natural  $m$  de maneira a nos fazer  $t = a+m > a$ . Então,  $a, a+1, a+2, \dots, a-1 \notin W$ , então  $a, a+1, \dots, a-1 \in S$ . Agora, (ii) permite concluir que  $t = t-1+1 \in S$ , o que contradiz o fato de  $t \in W$  garantindo  $W = \emptyset$ .  $\square$

## 2.2 Sequência de Fibonacci

Leonardo Fibonacci (filho de Bonaccio), natural de Pisa, região comercial no centro da Itália, foi um matemático muito influente no seu tempo, e até hoje reconhecido pelas suas contribuições, dentre elas a recomendação do uso dos algarismos indo-arábicos e o uso do símbolo 0 para o número zero (chamado de *zephirum* em árabe).

Dentre seus problemas contidos em seus trabalhos, talvez o mais famoso se trata do problema dos coelhos, ou como ficaria conhecido, a sequência de Fibonacci, que no original, *Liber Abacci* de 1202 rotula-se assim: *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.*

Traduzindo para uma linguagem contemporânea poderia livremente ser assim: um casal de coelhos recém nascidos foi separado. Supondo que a cada mês um casal de coelhos produz outro casal e que cada um destes começa a procriar dois meses depois do seu nascimento, determinar quantos casais haverão passado um ano.

Uma solução para o problema, poderia ser através da construção da sequência onde cada número representa a quantidade de casais:  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, u_n, \dots$ , onde cada termo, pode ser expresso pela fórmula de recorrência  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ . Esta fórmula tem diversas aplicações e curiosidades, que, prepotentemente poderíamos dizer que Leonardo não havia como mensurar em sua criação, algumas destas belas propriedades serão formuladas e demonstradas aqui fazendo uso do *PIM*.

Para visualizar a sequência, vamos contruir uma tabela contendo o mês em questão, número de casais de coelhos recém-nascidos, o número de casais de coelhos do mês anterior e o total de casais de coelhos.

Tabela 2.1: Número de casais de coelhos mês a mês

Mês	Número de casais recém-nascidos	Número de casais do mês anterior	Total de casais de coelhos
1°	1	0	1
2°	0	1	1
3°	1	1	2
4°	1	2	3
5°	2	3	5
6°	3	5	8
7°	5	8	13
8°	8	13	21
9°	13	21	34
10°	21	34	55
11°	34	55	89
12°	55	89	144

Fica fácil entender que a quantidade de coelhos em um determinado mês é de fato igual ao número de casais do mês anterior aumentado do mês anterior ao anterior.

### 2.2.1 Propriedades da sequência de Fibonacci

Denotando por  $u_n$  um número da sequência de Fibonacci, vamos provar algumas propriedades relacionando Máximo Divisor Comum (MDC) com os índices dos números de Fibonacci e os próprios números. Para isso, será usada a notação  $(u_n, u_m)$  para representar o M.D.C. entre os números  $u_n$  e  $u_m$ . que neste texto, será assumido que o

M.D.C. entre quaisquer dois números sempre existe, sem a necessidade de demonstrar tal fato.

De acordo com a necessidade, algumas propriedades serão prescritas por resultados e suas respectivas demonstrações, como por exemplo, a propriedade dos números consecutivos de Fibonacci que fará uso do Lema de Euclides que segue.

**Lema 2.2.1 (Lema de Euclides).** *Sejam  $a, b, n \in \mathbb{N}$  com  $a < na < b$ , então*

$$(a, b) = (a, b - na)$$

*Demonstração.* Seja  $d = (a, b - na)$ . Como  $a$  é um múltiplo de  $d$  e  $(b - na)$  é um múltiplo de  $d$ , segue que  $b$  é múltiplo de  $d$  e  $b = b - na + na$ . Logo,  $d$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ , quer dizer,  $d \leq (a, b)$ . Supondo  $x = (a, b)$ , quer dizer,  $x \leq (a, b - na) \Leftrightarrow x \leq d$ . Mas como  $d = (a, b - na)$  então  $d \leq x$ , fazendo então com que  $x = d$  e não só um divisor de  $(a, b - na)$  como também o maior deles.  $\square$

**Lema 2.2.2.** *Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.*

*Demonstração.* Fazendo uso do PIM vamos mostrar que o M.D.C. entre dois números consecutivos é um. Como os dois primeiros números de Fibonacci são o 1 e o próprio 1,  $(1, 1) = 1$ , quer dizer,

$$(u_1, u_2) = 1.$$

e com isso já temos válida a afirmação para  $n = 1$

Supondo válido a afirmação para algum  $n$ , quer dizer,  $(u_{n+1}, u_n) = 1$  além do fato de  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  então  $u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$

Tem-se então pelo **Lema de Euclides** acima, onde  $a = u_{n+1}$  e  $b = u_{n+2}$  que

$$(u_{n+2}, u_{n+1}) = (u_{n+2} - u_{n+1}, u_{n+1}).$$

Logo,  $(u_{n+2} - u_{n+1}, u_{n+1}) = (u_n, u_{n+1}) = 1$  ficando validado pelo P.I.M. para todo  $n$  natural.  $\square$

**Exemplo 1.** *Escolhendo  $u_8$  e  $u_9$  temos que 21 e 34 são de fato primos entre si, quer dizer,  $(u_8, u_9) = (21, 34) = 1$*

Para a demonstração do próximo Lema, será usada a seguinte identidade:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1} \tag{2.1}$$

verificável em [1].

**Lema 2.2.3.** *Sejam  $n, m \in \mathbb{N}^*$  tais que,  $m$  e  $n$  são múltiplos entre si, então os números de Fibonacci nos respectivos índices também o são.*

*Demonstração.* Vamos demonstrar pelo PIM para  $k$  que uma vez  $m$  múltiplo de  $n$  vale  $u_m$  múltiplo de  $u_n$ . Para  $k = 1$  temos que  $1 = k * 1$  com  $k = 1$  e  $u_1 = 1 * u_1$ . Supondo agora válido para algum  $k$ , isto é,  $u_m = ku_n$ , quer dizer,  $u_m$  múltiplo de  $u_n$ . Uma vez que (2.1) garante

$$u_{m(k+1)} = u_{mk+m} = u_{mk-1}u_m + u_{mk}u_{m+1} \quad (2.2)$$

temos que  $u_{mk-1}u_m$  é múltiplo de  $u_m$  e pela hipótese de indução,  $u_{mk}u_{m+1}$  múltiplo de  $u_m$ , implicando que  $u_{m(k+1)}$  é múltiplo de  $u_m$  validando assim o resultado.  $\square$

### Exemplo 2.

Escolhendo 4 e 12, vamos verificar que  $u_{12}$  é múltiplo de  $u_4$ . De fato,  $u_{12} = 144$  e  $u_4 = 3$ . Facilmente verifica-se que  $144=3 \cdot 48$  conforme queríamos demonstrar.

**Teorema 2.2.1.** *Dada uma sequência  $(u_n)_n$  tal que  $\forall m \geq n, (a_m, a_n) = (a_n, a_r)$ , onde  $r$  é o resto da divisão de  $m$  por  $n$ , então tem-se que*

$$(a_m, a_n) = a_{(m,n)}$$

*Demonstração.* Sejam  $r_1, r_2, \dots, r_s, r_{s+1} = 0$  os restos parciais no Algoritmo de Euclides, logo, temos que  $r_s = (m, n)$ . Portanto, pela propriedade de  $(a_n)$ ,

$$(a_m, a_n) = (a_n, a_{r_1}) = \dots = (a_{r_s}, a_{r_{s+1}}) = (a_{r_s}, 0) = a_{(m,n)}$$

$\square$

Com esses três lemas e o teorema acima podemos provar um teorema de grande relevância, uma vez que a propriedade pode não ser tão evidente de se visualizar porém, de modo muito elegante podemos formular assim:

**Teorema 2.2.2.** *O M.D.C. de dois números de Fibonacci  $u_n$  e  $u_m$  é um número de Fibonacci em que seu índice é dado pelo M.D.C. entre os índices  $n$  e  $m$ , quer dizer,*

$$(u_n, u_m) = u_{(n,m)}$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade vamos supor que  $m \geq n$ , então, podemos escrever  $m = nq + r$ , e portanto, usando (2.1) temos

$$u_m = u_{nq+r} = u_{nq-1} + u_{nq}u_{r+1}.$$

Logo, como o **Lema 2.2.2** nos garante que  $u_{nq}$  é múltiplo de  $u_n$ , tem-se também que o **Lema de Euclides** permite afirmar que

$$(u_n, u_m) = (u_{nq-1}u_r + u_{nq}u_{r+1}, u_n) = (u_{nq-1}u_r, u_n) \quad (2.3)$$

O **Lema 2.2.1** garante que  $(u_{nq-1}, u_{nq}) = 1$ , e por isso  $(u_{nq-1}, u_n)$ , consequentemente de (2.2) segue-se que

$$(u_m, u_n) = (u_n, u_r).$$

Uma vez que já foi provado o **Teorema 2.2.1**, o resultado segue diretamente e

$$(u_n, u_m) = u_{(n,m)}$$

□

**Exemplo 3.** Na sequência de Fibonacci, o décimo quinto número é 610 e o vigésimo termo é o 6765, pelo teorema acima,

$$(u_{15}, u_{20}) = (610, 6765) = u_{(15,20)}.$$

Logo, como  $(15, 20) = 5$  então  $(610, 6765) = u_5 = 5$

**Exemplo 4.** Na sequência de Fibonacci, o vigésimo quarto termo é o número 46368 e o décimo sexto é o 987 de maneira que

$$(u_{24}, u_{16}) = (46368, 987) = u_{(24,16)}.$$

Logo, como  $(24, 16) = 8$  então  $(46368, 987) = u_8 = 21$

Os próximos problemas são clássicos e se referem a somas de termos da sequência de Fibonacci onde trataremos inicialmente uma solução mais simples e então apresentaremos todas elas fazendo uso do Princípio de Indução Matemática:

**Problema 1.** Dê uma fórmula para a soma dos  $n$  primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Solução: Temos que pela natureza da sequência todo termo é a adição dos dois antecedentes sendo que a sequência começa pelos dois primeiros numericamente iguais a 1. Isso quer dizer que

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 1$$

$$u_3 = u_1 + u_2 = 2$$

Então podemos escrever assim:

$$u_1 = u_3 - u_2 = 1$$

quer dizer, cada termo pode ser representado pela diferença dos dois sucessores em módulo.

$$u_1 = u_3 - u_2$$

$$u_2 = u_4 - u_3$$

$$u_3 = u_5 - u_4$$

$$\vdots = \vdots$$

$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$

$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$

Fazendo a soma termo a termo nos dois membros obtemos:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + (u_5 - u_4) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1})$$

Cancelando os termos do segundo membro que se anulam obtem-se:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

Uma vez que  $u_2 = 1$  então

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1 \tag{2.4}$$

**Problema 2.** *Dê uma fórmula para a soma dos  $n$  primeiros termos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci.*

Solução: Como já é sabido,

$$\begin{aligned}
 u_2 &= u_1 \\
 u_4 &= u_3 + u_2 \Rightarrow u_3 = u_4 - u_2 \\
 u_6 &= u_5 + u_4 \Rightarrow u_5 = u_6 - u_4 \\
 &\vdots = \vdots \\
 u_{2n} &= u_{2n-1} + u_{2n-2} \Rightarrow u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}
 \end{aligned}$$

A soma dos  $n$  primeiros números de Fibonacci de ordem ímpar então fica assim

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1}$$

e fazendo a substituição pelos números encontrados acima

$$u_2 + u_4 - u_2 + u_6 - u_4 + \cdots + u_{2n} - u_{2n-2}$$

que cancelando os números sobra apenas o termo  $u_{2n}$  nos dando a igualdade

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} \tag{2.5}$$

**Problema 3.** *Dê uma fórmula para a soma dos  $n$  primeiros termos de ordem par da sequência de Fibonacci.*

Solução: Se a soma dos termos da sequência de Fibonacci até a ordem  $2n$  é:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

e dos ímpares até a ordem  $2n - 1$  fica assim:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}.$$

Subtraindo membro a membro a primeira igualdade da segundo obtem-se a soma dos termos da sequência de ordem par já no segundo membro

$$u_{2n+2} - u_{2n} - 1$$

Uma vez que  $u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n}$  temos

$$u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

Tendo mostrado a solução para os três problemas, vamos apresentar um exemplo para cada um deles e então formalmente apresentar uma demonstração das fórmulas através do Princípio de Indução Matemática.

**Exemplo 5.** A soma dos dez primeiros termos da sequência de Fibonacci seria

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = u_{12} - 1$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = 144 - 1$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = 143$$

**Exemplo 6.** A soma dos sete primeiros números de ordem ímpar da sequência de Fibonacci seria

$$u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} + u_{13} = 1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 + 233$$

$$u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} + u_{13} = u_{14}$$

$$u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + u_{11} + u_{13} = 377$$

**Exemplo 7.** A soma dos oito primeiros números de ordem par da sequência de Fibonacci seria

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} + u_{16} = 1 + 3 + 8 + 21 + 55 + 144 + 377 + 987$$

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} + u_{16} = u_{17} - 1$$

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} + u_{16} = 1577 - 1$$

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} + u_{16} = 1576$$

**Problema 4.** Demonstre que a soma dos  $n$  primeiros termos da sequência de Fibonacci é dado por  $u_{n+2} - 1$ .

*Demonstração.* Solução: Pelo PIM é fácil ver que é válida para  $n = 1$ . Supondo válido para algum  $k$ , quer dizer

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k = u_{k+2} - 1$$

vamos somar  $u_{k+1}$  nos dois membros da igualdade obtemos

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_{k+1} = u_{k+2} + u_{k+1} - 1$$

Como  $u_{k+3} = u_{k+2} + u_{k+1}$  então temos imediatamente que

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_{k+1} = u_{k+3} - 1$$

□



**Problema 5.** *Demonstre que a soma dos  $n$  primeiros termos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci é dado por  $u_{n+1}$ .*

*Demonstração.* Solução: Pelo *PIM* é fácil de ver que é válida para  $n = 1$ . Supondo válida para algum  $k$ , quer dizer,

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2k-1} = u_{2k}$$

Somando  $u_{2k+1}$  aos dois membros da igualdade acima encontramos

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2k-1} + u_{2k+1} = u_{2k} + u_{2k+1}$$

Como  $u_{2k} + u_{2k+1} = u_{2k+2}$  então é imediato inferir que

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2k-1} + u_{2k+1} = u_{2k+2}$$

□

**Problema 6.** *Demonstre que a soma dos  $n$  primeiros termos de ordem par da sequência de Fibonacci é dado por  $u_{2n+1} - 1$ .*

*Demonstração.* Solução: Pelo *PIM* é fácil de ver que é válida para  $n = 1$ . Supondo válida para algum  $k$ , quer dizer,

$$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2k} = u_{2k+1} - 1$$

Somando  $u_{2n+2}$  aos dois membros da igualdade obtem-se

$$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2k} + u_{2n+2} = u_{2k+1} + u_{2n+2} - 1$$

Como  $u_{2k+1} + u_{2n+2} = u_{2k+3}$  podemos substituir no segundo membro da igualdade acima e obter

$$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2k} + u_{2n+2} = u_{2k+3} - 1$$

□

## 2.3 Frações Contínuas e os números de Fibonacci

Nesta seção, vamos introduzir mais uma relação belíssima entre dois campos da matemática aparentemente estanques, e que mais uma vez trará uma surpreendente

relação com os números da sequência de Fibonacci. Para tal, será definida as frações contínuas, que aqui seguirá conforme outras traduções para nossa língua, porém, com a ressalva que na língua portuguesa seria mais coerente traduzir por *frações continuadas*, mas como a expressão já adentrou assim, será conservada essa tradução mesmo que não traga o real significado, já que o processo realmente faz é continuar a fração conforme será mostrada e motivada por um exemplo numérico com a fração  $\frac{79}{29}$ .

**Exemplo 8.** *Fazendo uso do algoritmo de Euclides sucessivamente, tem-se:*

$$79 = 2 \cdot 29 + 21$$

$$29 = 1 \cdot 21 + 8$$

$$21 = 2 \cdot 8 + 5$$

$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

Quer dizer,  $\frac{79}{29} = 2 + \frac{21}{29}$ , onde o número 2 e a fração  $\frac{21}{29}$  obtêm-se imediatamente da primeira linha das divisões sucessivas, e usando o mesmo raciocínio na fração  $\frac{21}{29}$  tem-se

$$\frac{79}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{21}{29}}$$

e continuando esse processo até o final, obtêm-se em cada passo as seguintes frações:

$$\frac{79}{29} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{8}{21}}$$

$$\frac{79}{29} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{21}{8}}}$$

$$\frac{79}{29} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{8}{5}}}}$$

$$\frac{79}{29} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}}}}$$

$$\frac{79}{29} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{3}}}}}$$

$$\frac{79}{29} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2}}}}}}$$

Dessa última expressão decorre a definição de fração contínua que representa o número racional  $\frac{79}{29}$  e os números  $(2, 1, 2, 1, 1, 1, 2)$  são os quocientes parciais dessa fração.

De uma maneira geral:

**Definição 2.3.1.** A expressão

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \ddots + \frac{1}{q_n}}}}$$

onde  $q_0 \in \mathbb{Z}$  e  $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}^*$ , é chamada de fração contínua e os  $q_i$ 's recebem o nome de quocientes parciais.

Caso a fração seja negativa, faz-se todo o processo considerando o oposto da fração contínua evitando assim incoerência com as restrições impostas para os quocientes parciais.

O objeto de estudo dessa seção envolverá apenas as frações contínuas de quocientes parciais inteiros, classificadas como simples, de maneira que ao ser dito frações contínuas, fica sempre subentendido tratar-se do caso delas serem simples e serão abordadas apenas as contínuas finitas.

Para encontrar os quocientes parciais para a fração  $\frac{a}{b}$ , conforme exemplificado, efetua-se a divisão euclidiana do numerador pelo denominador, quer dizer, na fração  $\frac{a}{b}$  faz-se

$$a = bq_0 + r_1$$

onde  $0 \leq r_1 < b$ . Em seguida, efetua-se novamente a divisão, dessa vez de  $b$  dividido por  $r_1$  e assim sucessivamente ficando assim,

$$b = r_1q_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3$$

$$\vdots = \vdots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = r_nq_n.$$

Este procedimento não pode continuar indefinidamente, pois teríamos uma sequência de números naturais  $r_1 > r_2 > \dots$  que não possui menor elemento, o que não é possível pelo princípio da boa ordenação. Logo, para algum  $n$ ,  $r_{n-1} = r_nq_n$ . Da primeira destas equações, obtém-se

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$

E da segunda,

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

Da terceira é possível implicar

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

Então, pode-se escrever a fração contínua apenas pelos seus quocientes parciais, assim:

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_n}}}}$$

É pertinente ressaltar, neste ponto, o fato de  $q_n$  (último quociente parcial) ser sempre maior do que 1, pois se fosse igual a 1,  $r_{n-1}$  seria igual a  $r_n$  e  $r_{n-2}$  divisível por  $r_{n-1}$  e a divisão teria encerrado no passo anterior. Por isso, pensando em  $q_n = (q_n - 1) + \frac{1}{1}$  e que de fato,  $q_n - 1$  e 1 são os últimos quocientes incompletos de qualquer fração contínua, logo, sempre que  $r_n > 1$  pode-se escrever os quocientes parciais  $(r_0, r_1, \dots, r_n) = (r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, 1)$ .

No caso do específico do **Exemplo 7** então tem-se:

$$\frac{79}{29} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}}$$

$$\frac{79}{29} = (2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Aplicando essa ideia na fração  $\frac{35}{8}$  obtemos

$$35 = 4 \cdot 8 + 3$$

uma vez que o quociente da divisão é 4 e o resto 3. Continuando as divisões

$$8 = 2 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

fazendo com que tenha-se na expressão

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}}$$

o coeficiente  $q_0 = 4, q_1 = q_2 = 1$  e  $q_3 = 2$  além de  $r_1 = 8, r_2 = 3$  e  $r_3 = 2$  obtendo a fração contínua

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

**Exemplo 9.** Construir a fração contínua que possui os quocientes parciais  $(4, 2, 1, 3)$ .

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

Esse fração contínua pode-se desenvolver para

$$4 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4}}$$

$$4 + \frac{4}{11} = \frac{48}{11}$$

Agora, haverá a necessidade de conhecer as reduzidas de uma fração contínua.

**Definição 2.3.2.** Seja  $\alpha$  uma fração contínua, quer dizer,

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \ddots}}}$$

$$+ \frac{1}{q_n}$$

Considerando os números

$$q_0, q_0 + \frac{1}{q_1}, q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}, q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}}, \dots$$

chama-se reduzidas da fração contínua  $\alpha$  as razões na forma irredutível conforme segue:

$$\alpha_0 = \frac{q_0}{1} = \frac{P_0}{Q_0}$$

$$\alpha_1 = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_1 q_0 + 1}{q_1} = \frac{P_1}{Q_1}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_2 q_1 q_0 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{P_2}{Q_2} \\ \alpha_3 &= \frac{P_3}{Q_3} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}} \\ &\vdots = \vdots = \vdots \\ \alpha_n &= \cdots = \frac{P_n}{Q_n}\end{aligned}$$

Observe que  $\alpha_n = \alpha$  e para obter  $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$  basta substituir em  $\frac{P_n}{Q_n}$  o último quociente  $q_n$  por

$$q_n + \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Resultado que será usado no próximo teorema, que já antecede o teorema central desta seção, quando será tratado de frações contínuas e razão entre termos da sequência de Fibonacci de uma maneira surpreendente.

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $\alpha_i$  a  $i$ -ésima reduzida da fração contínua  $(q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, 1)$ , então valem para o numerador  $P_i$  e denominador  $Q_i$  as seguintes relações*

$$i) \quad P_{i+1} = q_i P_i + P_{i-1}$$

$$ii) \quad Q_{i+1} = q_i Q_i + Q_{i-1}$$

$$iii) \quad P_{i+1} Q_i - P_i Q_{i+1} = (-1)^i$$

com  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Uma vez que o intuito deste trabalho envolve aplicações do *PIM* e neste capítulo essas na sequência de Fibonacci, será omitida a demonstração do último teorema, facilmente verificáveis em [9], sendo aqui apresentado para a demonstração deste caso particular das frações contínuas e suas relações com os números  $u_n$  da sequência de Fibonacci.

**Teorema 2.3.2.** *Seja  $\alpha$  uma fração contínua com  $n$  quocientes parciais todos iguais a 1, então  $\alpha = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ , onde  $u_n$  é o  $n$ -ésimo termo da sequência dos números de Fibonacci.*

*Demonstração.* Fazendo uso das reduzidas  $\alpha_n$ , temos

$$\alpha_i = \frac{P_i}{Q_i}$$

onde  $\alpha_1 = 1 = \frac{1}{1}, \alpha_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$  de maneira que imediatamente de i) em **Teorema 2.3.1.**

$$P_{i+1} = q_i P_i + P_{i-1} = P_i + P_{i-1}$$

uma vez que todos quocientes parciais são unitários, e, pela característica da recorrência e os termos iniciais, pode-se afirmar  $P_n = u_{n+1}$ , já em relação aos denominadores,  $Q_1 = Q_2 = 1$  e também

$$Q_{i+1} = Q_i q_i + 1 + Q_{i-1} = Q_i + Q_{i-1}$$

e novamente, pela particularidade dessa recorrência e mais uma vez pelos valores iniciais,  $Q_i = u_i$  fazendo com que

$$\alpha_i = \frac{u_{i+1}}{u_i}$$

□

Esse teorema afirma que uma vez que os quocientes parciais de uma fração contínua são todos unitários, então, para  $n$  quocientes parciais, tem-se que a fração é igual à razão entre o termo  $n+1$  e  $n$  da sequência de Fibonacci conforme pode-se exemplificar abaixo:

**Exemplo 10.** *Seja a fração contínua  $\alpha = (1, 1, 1, 1, 1)$ , quer dizer, cinco quocientes parciais iguais a 1,*

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$$

*Efetuando os cálculos passo a passo, visualizamos*

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = \frac{u_6}{u_5}$$

**Exemplo 11.** *Outra fração contínua, agora com oito quocientes parciais unitários,*



espera-se que seja igual à fração  $\frac{u_9}{u_8} = (1,1,1,1,1,1,1,1) =$

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}} = \\
 & = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}}} = \\
 & = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{9}}}}}}} = \\
 & = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11}}}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{13}}}}}}} = \\
 & = 1 + \frac{1}{\frac{13}{13}} = 1 + \frac{13}{21} = \frac{34}{21}
 \end{aligned}$$

que se trata exatamente da razão esperada.

# Capítulo 3

## Uso do *PIM* de maneira lúdica

### 3.1 Torre de Hanoi

A torre de Hanoi, jogo de quebra-cabeça que consiste de uma base com três pinos, em um deles, discos furados no centro com diâmetros distintos e em ordem crescente de menor diâmetro para maior diâmetro estão empilhados um sobre o outro.

A figura abaixo ilustra isso.

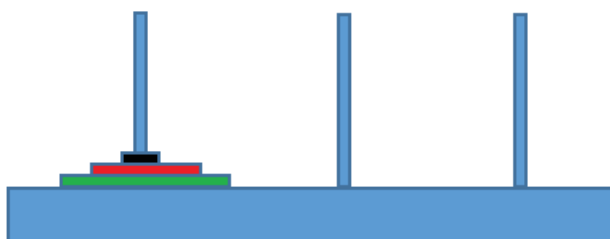


Figura 3.1: Torre de Hanoi.

A lenda por trás do jogo [5] diz que no centro do mundo, havia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, e que durante a criação, Deus colocara 64 discos de ouro puro empilhadas em uma agulha com o maior dos discos sobre a bandeja e o restante cada vez menor sobre essa agulha. Essa então ficaria conhecida como a Torre de Hanoi.

De dia e de noite, os sacerdotes trocavam os discos de agulha obedecendo duas leis, a primeira, que seria movido um disco de cada vez, e a segunda versando que um disco nunca poderia ser colocado sobre outro disco menor do que ele. Diz ainda a lenda, que uma vez que todos os discos transferidos de uma agulha pra outra e obedecendo todas as leis e em ordem conforme iniciara na criação, aí então se daria o fim de toda criação.

O jogo de fato foi criado pelo matemático Francês Édouard Lucas em 1883. E sobre ele faremos duas perguntas, existe um número mínimo de movimentos necessários para transportar todos os discos para outra haste e, existe solução para qualquer número de discos? Para a segunda pergunta, a resposta é fácil de formular.

Faça a seguinte sentença aberta:  $p(n) = \{\text{O jogo tem solução com } n \text{ discos}\}$  .

Obviamente  $p(1)$  é verdade pois a solução é trivialmente encontrada apenas movendo o único disco.

Supondo que  $p(n)$  seja válida para algum  $n$ , vamos provar que vale para  $p(n + 1)$ .

Para isso, vamos mover todos os  $n$  discos para uma outra haste, sendo que isso é possível pela hipótese de indução, e deixar o maior disco na haste inicial. Uma vez que todos  $n$  estão em outra haste, move-se o disco restante para a outra haste que esteja vazia, e então, move-se os  $n$  discos para essa terceira haste de modo que é possível pela hipótese de indução.

Para a primeira pergunta, vamos definir uma progressão aritmético-geométrica.

**Definição 3.1.1** (Progressão Aritmético-Geométrica). *Uma sequência de números reais do tipo*

$$a_{n+1} = qa_n + r$$

com  $a_1$  real é chamada de *Progressão Aritmético-Geométrica*.

Tendo feito isso, se dissermos que  $b_j$  é a sequência que nos dá o número mínimo de movimentos ( $b_i$ ), determinar essa fórmula não será tão trivial. Um fato perceptível é que, se  $(b_j)$  é a sequência que exprime o número de movimentos para  $n$  discos, para resolver para  $n + 1$  discos, o número de movimentos terá que obrigatoriamente passar duas vezes pela solução mínima com  $n$  discos, nos dando:

$$b_{j+1} = 2b_j + 1 \tag{3.1}$$

quer dizer,  $b_j$  movimentos para os  $n$  discos, um movimento para o disco acrescentado mover-se para uma haste vazia, e novamente  $b_j$  movimentos para os  $n$  discos passados para a haste com o maior disco. A solução para essa fórmula será feita usando novamente o *PIM* e está apresentada aqui:

**Problema 7.** *Mostrar que a Progressão Aritmético-Geométrica é definida pela fórmula*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} + r \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

*Demonstração.* Vamos verificar que a igualdade é válida para  $n = 1$

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} + r \cdot \frac{q^{1-1} - 1}{q - 1}$$

$$a_1 = a_1 + r \cdot \frac{0}{q - 1}$$

$$a_1 = a_1$$

Supondo válido para algum  $k$ , temos

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1} + r \cdot \frac{q^{k-1} - 1}{q - 1} \quad (3.2)$$

Multiplicando os dois membros por  $q$  e adicionando  $r$  obtemos:

$$(a_k) \cdot q + r = \left( a_1 \cdot q^{k-1} + r \cdot \frac{q^{k-1} - 1}{q - 1} \right) \cdot q + r$$

$$a_{k+1} = a_1 q^k + \frac{qr(q^{k-1} - 1)}{q - 1} + r$$

$$a_{k+1} = a_1 q^k + \left( \frac{q^k - q + q - 1}{q - 1} \right) \cdot r$$

$$a_{k+1} = a_1 \cdot q^k + r \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} \quad \square$$

Tendo feito isso, passamos a evidenciar as nossas razões  $q$  e  $r$ .

Com um disco, o número de movimento é 1, com dois discos, um movimento para tirar o menor disco, e outros dois; uma para mover o disco maior para a haste vazia e mais outro para mover o menor para cima deste.

Com três discos, 7 movimentos, pois, serão necessários os três movimentos acima, um para mover esse disco acrescido, e outros três movimentos para então levar os dois discos para cima do maior disco. A sequência **(3.1)** teria soluções

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 3$$

$$b_3 = 7$$

$$b_4 = 15$$

$$b_5 = 31$$

$$b_6 = 63$$

Nos levando a formular a sequência  $b_j = 2^j - 1$ . Como mostramos a solução da recorrência de uma *Progressão Aritmético Geométrica* e a solução  $b_j$  nada mais é do que essa *PAG*, podemos comparar  $(a_k) \cdot q + r$  com  $b_j = 2^j - 1$  nos levando a inferir que na recorrência tem-se  $a_1 = 1, q = 2$  e  $r = 1$ , por isso substituindo em (3.2) nos dá

$$a_k = 1 \cdot 2^{k-1} + 1 \cdot \frac{2^{k-1} - 1}{2 - 1}$$

$$a_k = 2^{k-1} + \frac{2^{k-1} - 1}{1}$$

$$a_k = 2 \cdot 2^{k-1} - 1$$

$$a_k = 2^{k-1+1} - 1$$

$$a_k = 2^k - 1$$

nos dando uma sequência que exprime o número mínimo de movimento para realizar a transposição de  $n$  discos na torre de Hanoi.

## 3.2 Problema das Moedas

Nesta seção será proposto mais um problema, em forma de passatempo, para motivar a solução otimizada através da indução. Inicialmente, vamos propor o problema para um número específico de possibilidades para a quantidade de moedas e então generalizando para qualquer número de moedas.

**Problema 8.** *Em um conjunto de  $m$  moedas onde figura uma falsa, com peso distinto de todas as demais, determinar o número mínimo de pesagens para descobrir qual é a única moeda falsa usando apenas uma balança de dois pratos.*

Esse problema da moeda falsa desperta curiosidade suficiente para demonstrar interesse em sala de aula por parte de alunos que tenham o mínimo de formalismo matemático, quer dizer, a partir do oitavo ano do ensino fundamental, obviamente sendo possível a compreensão plena já no primeiro ano do Ensino Médio pela bagagem matemática acumulada e familiaridade adquirida com demonstrações matemáticas.

**Problema 9.** *Dispõe-se de  $3^n$  moedas onde **uma** delas é falsa, quer dizer, apenas uma tem peso distinto das demais, a saber, mais leve que todas as outras. Com uma balança de dois pratos apenas, mostrar que com  $n$  pesagens encontra-se a moeda falsa.*



Figura 3.2: Balança de dois pratos.

Para motivar a solução, vamos exemplificar alguns casos particulares e então, provar que  $n$  pesagens é suficiente para a solução esperada.

**Exemplo 12.** *Com três moedas sendo uma falsa e duas idênticas e a balança de dois pratos é fácil notar que uma pesagem apenas é suficiente para identificar a falsa, para isso pesa-se duas com uma separada, pois, se a pesagem for equilibrada a excluída da pesagem trata-se da referida, e do contrário a própria balança indicará a moeda mais leve dentre as duas.*

**Exemplo 13.** *Mostrar que com 9 moedas são suficiente duas pesagens. Para isso, separa-se em três montes de três moedas, realiza-se uma pesagem com dois montes, caso já figure pesos distintos, retoma-se o **Exemplo 11** com o grupo de três moedas mais leve, do contrário, caso o peso seja igual, faremos nesse mesmo procedimento no grupo que não foi pesado.*

**Solução para o problema 9 :** Pelo *PIM* temos que para  $n = 1$  de fato é necessário uma única pesagem, conforme **Exemplo 11**. Supondo que seja válida a informação para um  $k$ , quer dizer, com  $3^k$  moedas bastam  $k$  pesagens para destacar a moeda falsa, então, com  $3^{k+1}$  moedas, faremos 3 grupos de  $3^k$  moedas, e faz-se a pesagem com um dos grupos. Caso fique equilibrada, basta realizar as  $k$  pesagens no grupo de  $3^k$  moedas que ainda não foram pesadas, e do contrário, ou seja, se a balança tender mais leve para um grupo, faz-se as  $k$  pesagens neste grupo de  $3^k$  moedas que ficou mais leve na balança terminando assim a demonstração.

**Problema 10.** *Mostrar que com  $2^n$  moedas e uma delas falsa, são necessárias  $n$  pesagens.*

**Solução para o Problema 10:** Para  $n = 1$  é fácil perceber pois a pesagem com uma moeda em cada prato da balança já mostra a moeda mais leve.

Supondo que para  $2^k$  são necessárias  $k$  pesagens. Para achar a moeda falsa em  $2^{k+1}$  moedas, separa-se as moedas em dois grupos de exatas  $2^k$  moedas em cada grupo, sendo que coloca-se um grupo de  $2^k$  em cada prato para descobrir qual grupo contém a moeda mais leve, separando esse grupo de  $2^k$  moedas e pela hipótese de indução,  $k$  pesagens são suficientes para descobrir a moeda falsa, com a pesagem já efetuada, somam  $k + 1$  pesagens

A seguir, propõe-se um problema para um número qualquer de moedas e apenas uma falsa, quando apresenta-se a solução desta vez usando a segunda versão do *PIM*

**Problema 11.** *Determinar o número mínimo de pesagens para descobrir qual é a moeda falsa em um conjunto de  $m$  moedas.*

Para a solução será explicado como fazer a expansão binária de um número  $a \in \mathbb{Z}$ .

Começando por  $a$  seguido do quociente  $q_0$  da divisão de  $a$  por 2, seguindo pelo quociente  $q_1$  da divisão de  $q_0$  por 2, seguindo pelo quociente  $q_2$  da divisão de  $q_1$  por 2, etc.

Na divisão euclidiana sucessiva, tem-se duas possibilidades, se  $a$  é ímpar, então o resto  $r_0$  da primeira divisão acima é 1, caso contrário zero; tem-se  $r_1 = 1$  se  $q_0$  ímpar e igual a 0 caso contrário. De modo geral,  $r_{i+1} = 1$  se  $q_i$  ímpar e  $r_{i+1} = 0$  do contrário. Seguindo a divisão sucessivamente até encontrar  $q_{n-1} = 1$ , quando coloca-se  $r_n = 1$ . Segue diretamente que

$$a = r_0 + r_1 2^1 + r_2 2^2 + \dots + r_n 2^n.$$

**Exemplo 14.** *Escrever o número 9 na base binária. Fazendo a divisão de 9 por 2, encontra-se quociente 4 e resto 1. Na divisão de 4 por 2 obtem-se quociente 2 e resto 0. Como de se esperar a divisão de 2 por 2 dá quociente 1 e resto 0. Então, pode-se fazer a expansão*

$$9 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1$$

**Solução para o problema 12 :** Fazendo a expansão binária de  $m$  obtem-se:

$$m = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_r}; n \in \mathbb{N};$$

Objetiva-se mostrar que  $n_1$  (maior expoente da base 2) pesagens basta para evidenciar a moeda falsa e será feito através da segunda versão do *PIM* sobre  $n_1$ .

Supondo  $n_1 = 1$ , tem-se no máximo apenas três moedas, e **Exemplo 7** já mostrou como fazer isso pesando uma única vez. Supondo o resultado válido para todo  $k < n_1$ .

Separando as  $m$  moedas em duas partes, uma delas com  $2^{n_1}$  e o outro com  $2^{n_2} + \dots + 2^{n_r}$ , temos duas hipóteses para o lote com a moeda falsa. Se a moeda falsa estiver no lote com  $2^{n_1}$  moedas, o **Problema 9** já garante que  $n_1$  pesagens irá solucionar o problema. Esse é um fato averiguável com apenas uma pesagem, quer dizer, divide o lote em duas metades já que trata-se de um número par de moedas, efetua-se a pesagem e averigua-se se a balança encontra equilibrada.

Se a moeda falsa não estiver neste lote de  $2^{n_1}$  moedas, sobram as  $2^{n_2} + \dots + 2^{n_r}$  moedas para encontrar a falsa, e a hipótese de indução garante que  $n_2$  pesagens são suficientes para constatar a falsa dentre todas, nos dando um total de  $n_2 + 1$  pesagens, assegurando a solução da moeda falsa com um número de pesagens menor ou igual a  $n_1$ .



# Capítulo 4

## Sequências e Recorrência Linear de Segunda Ordem

### 4.1 Progressão Aritmética de Ordem Superior

Neste capítulo, vamos definir uma progressão aritmética de ordem superior além de trabalhar com as recorrências lineares de segunda ordem e sua ligação imediata com a sequência de Fibonacci amplamente discutida no **Capítulo 2**.

**Definição 4.1.1.** *Uma progressão aritmética é uma sequência numérica em que a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é constante.*

**Exemplo 15.** *Para a próxima definição, será usada a sequência dos números quadrados perfeitos, quer dizer,  $a_n = n^2$ . Os primeiros termos são,  $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, \dots, a_n = n^2$ . Imediatamente verifica-se que a diferença entre os termos não é constante, fazendo  $\Delta a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$  tem-se*

$$\Delta a_{1+1} = a_{1+1} - a_1 = 4 - 1 = 3.$$

$$\Delta a_{2+1} = a_{2+1} - a_2 = 9 - 4 = 5.$$

$$\Delta a_{3+1} = a_{3+1} - a_3 = 16 - 9 = 7.$$

*De maneira geral,*

$$\Delta a_{n+1} = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2$$

$$\Delta a_{n+1} = 2n + 1$$

onde facilmente verifica que se fizer a diferença de quaisquer dois termos dessa sequência, quer dizer,  $\Delta(\Delta a_n) = 2$  e então uma progressão aritmética de ordem 2, e para simplificar, será usada a notação  $\Delta(\Delta a_n) = \Delta^2 a_n$ .

**Definição 4.1.2** (Progressão Aritmética de ordem 2). *Uma sequência numérica na qual as diferenças quaisquer de dois termos consecutivos formam uma nova sequência sendo esta última uma P.A.*

Seguindo esse mesmo raciocínio das diferenças de termos defini-se:

**Definição 4.1.3.** *Uma sequência numérica em que  $\Delta^k a_n$  trata-se de uma sequência monótona é chamada de Progressão Aritmética de ordem  $k$ .*

**Exemplo 16.** *Seja uma sequência  $b_n$  onde o termo geral é dado pela fórmula  $b_n = n^3 - n^2$ . Faremos uma tabela para exemplificar a ideia de que trata-se de uma P.A. de terceira ordem, usaremos o símbolo  $\Delta$  para representar a diferença entre os termos de ordem  $n$  e  $n + 1$  de  $b_n$ . Na mesma lógica, será criada uma nova sequência para esses resultados que chamando de  $c_n = \Delta b_n$  e  $d_n = \Delta c_n$ . Para facilitar a notação, usa-se  $\Delta b_n = c_n$ ,  $\Delta^2 b_n = \Delta c_n$  e por fim  $\Delta^3 b_n = \Delta d_n$ .*

Tabela 4.1: Termos das Progressões

$n$	$b_n$	$\Delta b_n$	$\Delta^2 b_n$	$\Delta^3 b_n$
0	0	0	4	6
1	0	4	10	6
2	4	14	16	6
3	18	30	22	6
4	48	52	28	6
5	100	80	34	6
6	180	114	40	
7	294	154		
8	448			

Fazendo  $\Delta b_n := b_{n+1} - b_n$  para encontrar o termo geral da progressão aritmética de ordem inferior à  $a_n$ .

$$\Delta b_n = [(n+1)^3 - (n+1)^2] - (n^3 - n^2)$$

$$\Delta b_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^2 - 2n + 1 - n^3 + n^2$$

$$\Delta b_n = 3n^2 + n + 2$$

Que facilmente verifica tratar-se da fórmula para o termo geral da progressão aritmética de ordem inferior à  $b_n$  que indicaremos por  $\Delta b_n$ , e fazendo  $\Delta^2 b_n = \Delta b_{n+1} - \Delta b_n$

$$\Delta^2 b_n = [3(n+1)^2 + (n+1) + 2] - (3n^2 + n + 2)$$

$$\Delta^2 b_n = 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 + 2 - 3n^2 - n - 2$$

$$\Delta^2 b_n = 6n + 4$$

E novamente é de fácil inspeção tratar-se do termo geral da progressão de ordem inferior à  $\Delta b_n$  doravante indicado por  $\Delta^2 b_n$ . Por último faremos  $\Delta^3 b_n = \Delta^2 b_{n+1} - \Delta^2 b_n$ .

$$\Delta^3 b_n = [6(n+1) + 4] - (6n + 4)$$

$$\Delta^3 b_n = 6$$

A **Tabela 4.1** nos ajuda a vislumbrar que  $\Delta^3 b_n$  é constante exatamente como mostramos acima, indicando assim que  $\Delta b_n$  pode ser uma P.A. de terceira ordem conforme enunciaremos no **Teorema 4.1.2** e para isso precisaremos do teorema que segue:

**Teorema 4.1.1.**  $1^p + 2^p + \dots + n^p = \sum_{i=1}^n i^p$  é um polinômio de grau  $p+1$  na variável  $n$

*Demonstração.* Como de praxe, estabeleceremos a igualdade através do PIM. Para  $p=1$  temos que a soma é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.A. de razão 1. que é sabido tratar-se de

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

um polinômio do segundo grau. Supondo que o teorema vale para  $p \in \{1, 2, 3, \dots, t\}$  objetiva-se mostrar que vale para  $p = t+1$ , ou seja, validar que a igualdade  $\sum_{i=1}^n i^{p+1}$  trata-se de um polinômio de grau  $p+2$  na variável  $n$ .

Para isso, o atento leitor deverá notar a validade de  $(i+1)^{p+2} = i^{p+2} + (p+2)i^{p+1} + \dots$ , em que os termos omitidos formam um polinômio de grau  $p$  em  $i$ . Então, usando essa igualdade tem-se que

$$\sum_{i=1}^n (i+1)^{p+2} = \sum_{i=1}^n i^{p+2} + (p+2) \sum_{i=1}^n i^{p+1} + G(n)$$

tendo  $G(n)$  um polinômio de grau  $p+1$  em  $n$  pela própria hipótese de indução. Continuando, se simplificar os dois membros da igualdade obtém-se

$$(n+1)^{p+2} = 1 + (p+2) \sum_{i=1}^n i^{p+1} + G(n).$$

Isolando  $\sum_{i=1}^n i^{p+1}$  encontra-se

$$\sum_{i=1}^n i^{p+1} = \frac{(n+1)^{p+2} - 1 - G(n)}{p+2}$$

tratando-se de um polinômio de grau  $p+2$  na variável  $n$ , □

**Teorema 4.1.2.**  $(b_n)$  é uma progressão aritmética de ordem  $k$  com  $k \geq 2$  se, e somente se  $(b_n)$  é um polinômio de grau  $k$  em  $n$ .

*Demonstração.* Fazendo uso do PIM em  $k$ , será suposto  $b_n$  um polinômio de grau  $k=2$ , tem-se:

$$b_n = an^2 + bn + c$$

com  $a \neq 0$  e  $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n$ . De fato

$$\Delta b_n = [a(n+1)^2 + b(n+1) + c] - (an^2 + bn + c)$$

$$\Delta b_n = [a(n^2 + 2n + 1) + bn + c] - an^2 - bn - c$$

$$\Delta b_n = 2an + a + b$$

que trata-se de um polinômio de primeiro grau e  $\Delta b_n$  é não constante.

Agora, supondo  $b_n$  é uma P.A. de segunda ordem,  $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n$  é uma P.A. com razão diferente de zero e

$$\Delta b_1 + \Delta b_2 + \dots + \Delta b_{n-2} + \Delta b_{n-1} + \Delta b_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1}) + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$$

que ainda é um polinômio do segundo grau em  $n$  provando assim que para  $k = 2$  vale o teorema.

Supondo que o teorema seja válido para todo  $k \in \{2, 3, 4, \dots, t\}$ . O objetivo é mostrar a validação para  $k = t + 1$

Se  $b_n$  trata-se de uma P.A. de ordem  $t + 1$ , temos que  $\Delta b_n$  é uma progressão de ordem  $t$  e a hipótese de indução nos garante  $\Delta b_n$  um polinômio de grau  $t$  na variável  $n$ . Então,

$$\sum_{i=1}^n \Delta b_i$$

é um polinômio de grau  $t + 1$  em  $n$  pelo **Teorema 4.1.1**, que versa exatamente sobre  $\sum_{i=1}^n i^t$  ser um polinômio de grau  $t + 1$  em  $n$  conforme intencionava-se concluir.

Agora, se  $b_n$  tem grau  $t + 1$  em  $n$ ,  $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n$  é um polinômio de grau  $t$  e a hipótese de indução já garante  $\Delta b_n$  uma P.A. de ordem  $t$ , quer dizer,  $b_n$  de fato é uma P.A. de ordem  $t + 1$  □

## 4.2 Recorrência Linear de Segunda Ordem

Nesta seção vai ser definida as Recorrências de ordem 2 as homogêneas e um método de resolução através da equação característica enfatizando mais uma vez a sequência de Fibonacci.

**Definição 4.2.1** (Recorrência de Ordem 2 homogênea). *Toda sequência em que cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos é chamada de Recorrência de Ordem 2 com coeficientes constantes e fica explicitada pela fórmula  $u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$*

**Exemplo 17.** *A sequência de Fibonacci  $u_n$  na qual cada termo é determinado pela soma dos dois imediatamente anteriores onde  $u_1 = u_2 = 1$  é definida assim:*

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n (n \geq 0)$$

**Definição 4.2.2** (Equação Característica). *A cada recorrência linear de segunda ordem homogênea de coeficientes constantes da forma  $u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$ , associaremos a uma equação de grau dois em  $y$ :*

$$y^2 + py + q = 0$$

e denotaremos pela equação característica da recorrência  $u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$ .

Agora vamos mostrar como evidenciar soluções para uma recorrência linear de segunda ordem homogênea.

**Teorema 4.2.1.** *Se as raízes de  $y^2 + py + q = 0$  são  $y_1$  e  $y_2$  então  $u_n = C_1y_1^n + C_2y_2^n$  é solução da recorrência  $u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$  com  $C_1$  e  $C_2$  constantes reais.*

*Demonstração.* Substituindo  $u_n = C_1y_1^n + C_2y_2^n$  em  $u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n = 0$  encontramos

$$C_1y_1^{n+2} + C_2y_2^{n+2} + p(C_1y_1^{n+1} + C_2y_2^{n+1}) + q(C_1y_1^n + C_2y_2^n) = 0$$

Colocando  $C_1y_1^n$  e  $C_2y_2^n$  em evidencia agrupando de maneira conveniente obtemos

$$C_1y_1^n(y_1^2 + py_1 + q) + C_2y_2^n(y_2^2 + py_2 + q) = 0$$

Como  $y_1$  e  $y_2$  são raízes da equação característica, temos que

$$(y_1^2 + py_1 + q) = (y_2^2 + py_2 + q) = 0$$

e

$$C_1y_1^n \cdot 0 + C_2y_2^n \cdot 0 = 0$$

□

**Problema 12.** *Dê a sequência que exprime o termo geral da sequência de Fibonacci  $u_n$  com  $u_0 = u_1 = 1$*

Solução: Uma vez a equação característica é da forma  $y^2 - y - 1 = 0$  Calculando as raízes encontramos

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } y_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Com isso, a solução será

$$u_n = C_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Para explicitar  $C_1$  e  $C_2$  vamos usar as condições iniciais  $u_0 = u_1 = 1$  obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} u_0 = C_1 + C_2 \\ u_1 = C_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 1 = C_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \end{cases}$$

Resolvendo encontramos solução para  $C_1$  e  $C_2$

$$C_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \text{ e } C_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}$$

Logo a solução  $u_n$  que procuramos é

$$u_n = \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \right) \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Efetuada as operações simplificamos para a expressão:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

**Exemplo 18.** Usando a fórmula encontrada no **Problema 9** explicita  $u_3$ .

Solução:

Para  $n = 3$  teremos

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{3+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{3+1}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{56 + 24\sqrt{5} + 30 + 20\sqrt{5} + 25}{16} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - 4\sqrt{5} + 30 - 20\sqrt{5} + 25}{16} \right)$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{56 + 24\sqrt{5}}{16\sqrt{5}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{56 - 24\sqrt{5}}{16\sqrt{5}} \right)$$

$$u_3 = \frac{56 + 24\sqrt{5} - 56 + 24\sqrt{5}}{16\sqrt{5}}$$

$$u_3 = \frac{48\sqrt{5}}{16\sqrt{5}}$$

$$u_3 = 3.$$

# Capítulo 5

## Uma Aula Sobre Indução

Neste capítulo será apresentado um plano de aula envolvendo sequências e a demonstração da fórmula do somatório dos termos de uma progressão aritmética através da indução matemática.

**Tema:** Sequências, soma dos termos da Progressão Aritmética

**Objetivos:**

- Construir a definição de Progressão Aritmética;
- Efetuar o somatório dos termos de uma P.A. e especular uma fórmula para a soma genérica assim como comprová-la através da Indução Matemática;
- Fazer uma aplicação das progressões Aritméticas em uma situação prática.

**Conteúdos:**

- Sequência Matemática;
- Progressão Aritmética;

**Duração:**

- 2 aulas de 50 minutos;

**Recursos:**

- Lousa branca;
- Giz;



- Projetor;
- Notebook;

### Conhecimentos prévios:

- Processo indutivo pelo *P.I.M.*

### Metodologias:

- Aula expositiva dialogada;
- Apresentação *power point* contendo um modelo de sequência matemática e um problema motivador para efetuar o somatório de uma lista grande de termos;
- Exemplos e contra exemplo;
- Resolução de exercícios;
- Recepção de alunos. Introduzir sequência. Através de projeção em slide, motivar a criação da definição de progressão aritmética. Exemplificar e mostrar contra exemplos.
- Usar o processo dedutivo dos alunos para conseguir estabelecer relação entre os membros da sequência para então fazer o mesmo para soma dos  $n$  termos da P.A.
- Usar indução para mostrar a fórmula da soma dos termos da P.A. denotada por  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$  onde  $r$  trata-se da razão da P.A. conforme se segue:

*Demonstração.* Verificando a soma para  $n = 1$  tem-se:

$$S_1 = \frac{(a_1 + a_1)1}{2}$$

$$S_1 = \frac{2a_1}{2}$$

$$S_1 = a_1$$

Agora, supondo válido para algum  $n \geq 2$  prova-se que é válida para  $n + 1$  :

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^n a_i + a_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} a_i &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} + a_{n+1} = \frac{(na_1 + na_n + 2a_{n+1})}{2} \\ &= \frac{(2(n+1)a_1 + n(n+2-1)r)}{2} \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i &= \frac{(n+1)(2a_1 + nr)}{2} = \frac{(n+1)(a_1 + (a_1 + nr))}{2} \\ &= \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2} \end{aligned}$$

□

# Capítulo 6

## Considerações finais

### O fim de uma era

No início deste trabalho acadêmico não poderíamos mensurar a dimensão que tomaria nas aplicações em sala de aula que este professor potencialmente compartilharia. O método de indução por si mesmo nas aulas de olimpíada de matemática, e por que não nas demonstrações formais durante o curso, normalmente tornaram-se uma ferramenta riquíssima. As curiosidades apresentadas em forma de exemplos no estudo de recorrências, o quanto a sequência de Fibonacci tem surpreendentemente se mostrado em campos nunca antes imaginados, como na biologia, o número de ouro e o próprio triângulo de Pascal, que agora mais do nunca se mostrou ainda um campo mais belo da matemática e reforça aquela máxima de que na matemática nada é uma ilha.

A riqueza e importância do Princípio de Indução Matemática, que se bem explorado com significado para qualquer estudante, aliada à sua propriedade de ser tão singela e eficaz, foram o grande atrativo para começar, porém, os caminhos tomados foram quase que automáticos, mesmo existindo sim um norte inicial, as aplicações e preocupação constante de ser um texto acessível até certo ponto para alunos de graduação dos diversos campos das exatas, quase que fizeram o caminho a ser trilhado este único, talvez, pelas características intrínsecas que certas propriedades passíveis de demonstração pelo *PIM* possuem, ou talvez, pelo interesse despertado de maneira surpreendente, fazendo desse texto seu produto final, levando este autor a ficar absorto com o resultado atingido.

O objetivo de formalizar e compilar as aplicações do método indutivo em um único

trabalho, obviamente por se tratar de um estudo em matemática, longe de ser completo e supremo nas suas contemplações, se mostra alcançado, sendo que deixa em aberto aquela sensação de formigamento no cérebro do leitor ao se perguntar se existem mais pra se beber dessa fonte, como seriam essas outras possibilidades, que não poderiam ser esgotadas aqui, porém efetivamente instigando, fazendo pelo menos um referencial de possibilidades para o aprofundamento no tema, seja no método indutivo ou mesmo nos problemas propostos e suas variações, uma vez que recorrentemente aparecem nas provas de olimpíadas matemáticas e desafios propostos durante a prática docente nas áreas exatas a nível médio e superior.

No final da leitura, espera-se que o aplicado leitor possa ter adquirido embasamento teórico e fortalecimento das notações matemáticas além do reconhecimento do formalismo necessário para construção do raciocínio matemático e o seu método axiomático presente em todas ramificações da matemática, assim como reconhecimento pela beleza matemática e o que ela é capaz de realizar pelo ser humano.

## Referências Bibliográficas

- [1] HEFEZ, A., *Elementos de Aritmética*, 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011 .
- [2] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C., *A Matemática do Ensino Médio Volume 2*, 6<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998.
- [3] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C., *A Matemática do Ensino Médio Volume 4*, 6<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998.
- [4] LIMA, E. L., *Curso de Análise*, 14<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012 .
- [5] MENDES, I. A., *Instrumentação Para o Ensino de Matemática III*, 1<sup>a</sup> ed. Natal: EDUFRN, 2009 .
- [6] SANTOS, J. P. O., *Introdução à Teoria dos Números*, 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998 .
- [7] SILVA, VALDIR VILMAR DA, *Números, Construções e Propriedades*, 1<sup>a</sup> ed. Goiânia: Ed. UFG, 2005.
- [8] SOMINSKII, I. S., *The Method of Mathematical Induction Volume 1*, 1<sup>a</sup> ed. Nova York: Blaisdell Publishing Company, 1961.
- [9] VOROBIOV, N. N., *Numeros de Fibonacci*, 1<sup>a</sup> ed. Moscou: Editorial Mir, 1974 .