PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Sérgio Ferreira Silva

Geometria Analítica: caminhos para aprendizagem

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer

Rio de Janeiro
Julho de 2015

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Sérgio Ferreira Silva

Geometria Analítica: caminhos para aprendizagem

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Marcos Craizer
Orientador
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Profª Débora Freire Mondaini
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Profª. Dirce Uesu Pesco
Instituto de Matemática e Estatística - UFF

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de julho de 2015

Sérgio Ferreira Silva

Graduação em Matemática pela Federação das Faculdades Celso Lisboa, em 1993. Pós-Graduação “Lato Sensu” em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática pela Universidade Federal Fluminense, em 2009, onde escreveu a monografia “Contribuições do *Software* de Matemática *Geogebra* na Prática Educativa do Ensino Fundamental.” É professor efetivo da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro e da Secretaria Municipal de Educação de Duque de Caxias.

Ficha Catalográfica

Silva, Sérgio Ferreira

Geometria analítica: caminhos para aprendizagem / Sérgio Ferreira Silva ; orientador: Marcos Craizer. – 2015.
81 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2015.
Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Geometria analítica. 3. Geogebra. 4. Ensino de geometria. I. Craizer, Marcos. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Dedico esta dissertação a minha família em especial a minha esposa, Regina, pelo convívio diário, sempre lado a lado, parceira, cúmplice, colaboradora, incentivadora no meu caminhar profissional e aos meus filhos Rafael e Carolina.

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Marcos Craizer pelo incentivo, orientações importantes para o aprimoramento deste estudo.

A todos os professores e colegas que convivi no Profmat – PUC – Rio pela troca de saberes.

Às professoras Débora Freire Mondaini e Dirce Ueso Pesco que aceitaram participar da banca e pelas contribuições para melhoria deste estudo.

Ao meu amigo professor Hélio Fernandes pelas nossas discussões na busca de novos caminhos para o ensino da matemática.

Resumo

Silva, Sérgio Ferreira; Craizer, Marcos. **Geometria Analítica: Caminhos para aprendizagem.** Rio de Janeiro, 2015. 81p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A presente pesquisa tem como tema o processo de ensino e aprendizagem de geometria analítica, assunto no qual os alunos do ensino médio têm apresentado dificuldades. Por isto se faz necessário que o professor utilize um maior número de ferramentas pedagógicas, explorando os caminhos algébrico e geométrico para resolução de problemas. O objetivo deste estudo é propor caminhos para o ensino da geometria analítica tendo como base três eixos norteadores: A história das geometrias, a proposição de problemas matemáticos que podem ser resolvidos tanto pela geometria plana como pela geometria analítica e o uso da ferramenta tecnológica através do software Geogebra. Utilizamos neste trabalho materiais didáticos disponibilizados em escolas públicas estaduais do Estado do Rio de Janeiro, material voltado para a formação do professor de matemática e livros sobre a história da matemática.

Palavras-Chave

Geometria Analítica; Geogebra; Ensino de Geometria.

Abstract

Silva, Sérgio Ferreira; Craizer, Marcos (Advisor). **Analytic Geometry: pathways to learning**. Rio de Janeiro, 2015. 81p. MSc. Dissertation – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The topic of this research is the process of teaching and learning analytical geometry, a theme in which the students from high school have great difficulties. It is necessary that the teacher use a greater number of educational tools, exploring the algebraic and geometric aspects for problem solving. The aim of this study is to propose new methods for teaching analytical geometry based on three guiding principles: The history of geometry, the proposition of mathematical problems that can be solved either by analytical geometry or by plane geometry and the use of a technological tool, the software Geogebra. In this work, we use teaching materials available in public schools of the state of Rio de Janeiro, material focused in the training of mathematical teachers and books of history of mathematics.

Keywords

Analytic Geometry; Geogebra; Teaching of Geometry.

Sumário

Lista de figuras

1 INTRODUÇÃO:

As pesquisas brasileiras desenvolvidas sobre o processo de ensino e aprendizagem de geometria analítica foram levantadas na década de 90 por Di Pinto em sua dissertação sobre o “Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica: as pesquisas brasileiras da década de 90”, defendida em 2000, em que se concluiu:

> [...] as pesquisas analisadas mostraram que, independentemente do objeto a ser estudado, deve-se buscar a sua significação, utilizando-se do maior número de recursos possíveis, explorando os quadros algébrico e geométrico concomitantemente, mesmo que a dificuldade dos educandos em cada uma dessas áreas acabe intervindo em sua aprendizagem. É oportuno lembrar, a todo momento, que só quando o aluno constrói e articula um objeto matemático ele lhe dará um significado. A abstração dos conceitos que tanto se deseja só será concretizada (compreendida) quando o educando conseguir visualizar o objeto matemático como um todo. Sendo capaz de agir sobre ele, externando seus conhecimentos a [seu] respeito em qualquer linguagem — conhecimentos esses que o permitam fazer generalizações sobre o objeto estudado. (DI PINTO apud JUNHO, 2011, p.99)

Segundo essas pesquisas os processos de construção do conhecimento da matemática voltada para aprendizagem da geometria analítica são complexos e, necessitam que o professor proponha caminhos possíveis, entre eles o uso de ferramentas tecnológicas para a solução dos problemas propostos. Dessa forma, o professor em sua prática pedagógica assume o papel de mediador do processo de ensino e aprendizagem de seus alunos.

Partindo dessas premissas, o presente estudo tem como objetivo propor caminhos para o ensino da geometria analítica tendo como base três eixos norteadores: a história das geometrias, a proposição de problemas matemáticos que podem ser resolvidos tanto pela geometria plana quanto analítica e o uso da ferramenta tecnológica através do *software* Geogebra.

A metodologia utilizada para o desenvolvimento deste estudo foi a pesquisa bibliográfica que teve como base materiais didáticos de geometria analítica, sendo selecionados: dois livros didáticos disponibilizados em escolas públicas estaduais de ensino médio[1] e um livro didático para o ensino universitário e uma revista voltada para formação de professores de matemática.[2]

Para o desenvolvimento de cada um destes eixos norteadores foram utilizadas como fundamentação teórica as ideias e/ou teorias de alguns autores. No eixo da história das geometrias o conhecimento histórico da matemática que tem sua relevância não apenas pela sua descoberta, mas também pela reflexão que este conhecimento gera no processo de ensino e aprendizagem, utilizamos GARBI, Gilberto G.[3] e EVES, Howard[4].

Na demonstração dos pré-requisitos para a solução dos problemas de geometria analítica plana e na breve análise do perfil das soluções utilizou-se LIMA, Elon L.[5]

O estudo está estruturado em três capítulos sendo que um dos capítulos aborda uma breve história das geometrias a partir dos três séculos iniciais da matemática grega com as contribuições de Tales, de Euclides e de Apolônio antes de Cristo e a partir do século XVII a invenção da geometria analítica pelos franceses René Descartes e Pierre de Fermat.

No outro capítulo são apresentadas demonstrações como pré-requisitos básicos para solução de problemas de geometria analítica plana, os problemas que foram retirados de materiais didáticos (livros, revista e site do Profmat) com suas respectivas soluções e uma breve análise do perfil das soluções pela geometria analítica em problemas de geometria.

O último capítulo apresenta as características do *software GeoGebra,* o qual permite a realização de investigações sobre propriedades geométricas que

---

[1] O autor desta pesquisa é professor de matemática e utiliza esses livros com seus alunos na sala de aula, nas escolas públicas estaduais de ensino médio em que leciona.

[2] O autor desta pesquisa teve acesso a esses materiais em curso de formação de professores que realizou no Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

[3] Vencedor do 40º Prêmio Jabuti da categoria Ciências Exatas, Tecnologia e Informática com o seu livro O Romance das Equações Algébricas que representa algo inovador no Brasil em relação aos métodos de ensino da matemática.

[4] Foi um matemático especializado em geometria e história da matemática, nascido nos Estados Unidos em 1911 e faleceu em 2004.

[5] Matemático brasileiro, pesquisador titular do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), instituição na qual foi diretor em três períodos distintos. É autor de vinte e cinco livros sobre matemática, seis dos quais se destinam à formação e aperfeiçoamento de professores do ensino médio.

dificilmente se consegue observar sem o uso de uma ferramenta computacional. Dessa forma, utilizou-se dois pré-requisitos: ponto médio de um segmento e rotação de um segmento de um ângulo de 90 graus**,** de três problemas de geometria solucionados pela geometria plana e analítica apresentados no capítulo 2 e a resolução de três problemas clássicos do desenho geométrico baseados na obra de Apolônio.

2 HISTÓRIA DAS GEOMETRIAS

2.1 Breve História a.C.

Nesta breve história se pretende abordar os três séculos iniciais da matemática grega com destaque aos esforços de Tales por uma geometria demonstrativa, os Elementos de Euclides que apresentam a geometria como um sistema lógico e as contribuições de Apolônio que, segundo Eves (2004), "constituem um período de realizações extraordinárias".

No período 2000 a.C. a 1600 a.C. os babilônios relacionavam a geometria com a mensuração prática. Dessa forma, a principal característica da geometria babilônica é o seu caráter algébrico. Pois, segundo Eves (2004, p.61), "Os problemas mais intricados expressos em terminologia geométrica são essencialmente problemas de álgebra não-triviais."

Os aparecimentos de novas civilizações nas costas da Ásia Menor, na parte continental da Grécia, na Sicília e no litoral da Itália, trouxeram mudanças econômicas e políticas levando o homem a questionar o como e o porquê. Segundo Eves:

> Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como: "Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?" e "Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?" Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de como, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de por quê. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou para o primeiro plano. (EVES, 2004, p.94)

A geometria demonstrativa teve início com Tales de Mileto, que no Egito, no século VI a.C., ao admirar a Grande Pirâmide (Quéops) ficou interessado em calcular a altura deste monumento. Segundo Garbi:

> Para respondê-la, empregou um método, por ele mesmo criado e que ainda hoje nos cativa pela simplicidade e precisão: plantou sobre a areia, verticalmente, um bastão de madeira, cujo comprimento conhecia, e mediu-lhe a sombra. Após fazer o mesmo com a sombra da pirâmide deduziu-lhe a altura porque sombras e alturas, tanto em pirâmides quanto em bastões, quaisquer que sejam seus tamanhos, são sempre proporcionais. No momento em que a altura de um bastão é igual à sua sombra,

> a altura da pirâmide também será igual à sombra do monumento. (GARBI, 2007, p.205)

A proporcionalidade entre alturas e sombras é um conteúdo que está presente nas aulas de matemática até hoje nas escolas, denominado Teorema de Tales, podendo ser aplicado na solução de vários problemas. Segundo Eves, na geometria creditam-se a Tales os seguintes resultados elementares:

> 1-Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
> 2-Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
> 3-Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
> 4-Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais. (Tales talvez tenha usado esse resultado na determinação que fez da distância de um navio à praia.)
> 5-Um ângulo inscrito num semi-círculo é reto. (Este resultado era do conhecimento dos babilônios cerca de 1.400 anos antes.)
> 6-O valor desses resultados não deve ser aquilatado por eles mesmos, mas antes pela crença de que Tales obteve-os mediante alguns raciocínios lógicos e não pela intuição ou experimentalmente. (EVES, 2004, p.95)

Pode-se observar, por exemplo, que Tales ao nomear os quatro ângulos formados pela interseção de duas retas, identificou um ângulo comum a dois ângulos rasos, concluindo que os outros dois ângulos (opostos) eram iguais, utilizando para esta conclusão o raciocínio lógico e, não mais apenas a intuição ou o experimento.

Segundo Garbi:

> ... Tales revolucionou o pensamento matemático ao estabelecer que as verdades precisam ser demonstradas, com o que criou a matemática dedutiva. Euclides manteve este conceito, mas fez nele uma ressalva que, por si só, bastaria para imortalizá-lo: **nem todas as verdades podem ser provadas**; **algumas delas, as mais elementares devem ser admitidas sem demonstração**. (GARBI, 2007, p.19)

Euclides foi o primeiro a utilizar o método, denominado axiomático. No século III a.C., na Universidade de Alexandria escreveu os Elementos em 13 livros, sistematizando os conhecimentos da Geometria elementar com os meios que dispunha na época. Dessa maneira, alguns dos seus resultados foram intuitivos, sem demonstração, mas a ideia básica dos Elementos influenciou toda a produção científica até hoje em dia, admirada pelos filósofos e matemáticos, pela pureza do estilo geométrico e pela concisão luminosa da forma, com as definições, os axiomas ou postulados e os teoremas não aparecem agrupados ao acaso, mas antes expostos numa ordem perfeita.

Segundo Eves:

> A maioria dos matemáticos gregos antigos fazia distinção entre: “postulados” e “axiomas”. Pelo menos três distinções eram advogadas pelas várias partes.
> 1.Um axioma é uma afirmação assumida como auto-evidente e um postulado é uma construção de algo assumida como auto-evidente; assim, os axiomas e os postulados estão entre si, em grande parte, como os teoremas e os problemas de construção.
> 2.Um axioma é uma suposição comum de todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo.
> 3. Um axioma é uma suposição de algo que é, ao mesmo tempo, óbvio e aceitável para o aprendiz; um postulado é uma suposição de algo que não é nem necessariamente óbvio nem necessariamente aceitável para o aprendiz (Essa última é uma distinção necessariamente aristotélica.) Na matemática moderna não se faz nenhuma distinção nem se leva em conta a qualidade da auto-evidência ou a da obviedade. Houve alguns gregos antigos que adotaram este ponto de vista. (EVES, 2004, p.179)

Não há uma precisão em qual definição de axiomas e postulados Euclides empregou, mas para Eves (2004) há evidências de que utilizou a segunda definição com conceitos e proposições admitidos sem demonstração que constituem os fundamentos especificamente geométricos e fixam a existência dos entes fundamentais: ponto, reta e plano, ao definir os cinco axiomas ou noções comuns e cinco postulados geométricos.

Os cinco axiomas são:

> A1 Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.
> A2 Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.
> A3 Subtraindo-se iguais de iguais, as diferenças são iguais.
> A4 Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.
> A5 O todo é maior do que a parte. (EVES, 2004, p.179 e 180)

Os cinco postulados são:

> P1 É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.
> P2 É possível prolongar uma reta finita indefinitivamente em linha reta.
> P3 É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
> P4 Todos os ângulos retos são iguais entre si.
> P5 Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos. (EVES, 2004, p.180)

Euclides pede para o leitor aceitar as cinco proposições geométricas que formula nos postulados a partir de três conceitos fundamentais o ponto, a reta e o círculo que servem de base para toda a geometria euclidiana. Vale ressaltar que os postulados dos Elementos de Euclides se restringem ao uso dos instrumentos (a régua e o compasso).

Segundo Eves (2004) Euclides escreveu outros tratados além dos Elementos, a saber:

> - Os Dados - tendo como referência os primeiros livros dos Elementos. "Pode-se definir um dado como um conjunto tal de partes ou relações de uma figura que, tendo-se todas, menos uma delas, então a restante está determinada."
> - Divisão de Figuras - "Encontramos nesta obra problemas de construção em que se pede a divisão de uma figura por meio de uma reta, impondo-se que as áreas das partes estejam numa razão dada"
> - Pseudaria – "ou livro das falácias geométricas."
> - Porismas – "uma proposição que expressa uma condição que se traduz num certo problema solúvel."
> - Cônicas – "um tratado em quatro livros que foi mais tarde ampliado por Apolônio." (EVES, 2004, p.180 e 181)

Há outros trabalhos de Euclides que se referem à matemática aplicada os quais destacam-se dois: "Os Fenômenos", obra que focaliza a geometria esférica necessária para a astronomia de observação e a "Óptica", tratado elementar de perspectiva.

Segundo Garbi:

> Depois de Euclides, ainda no período ptolemaico, passaram pela Universidade de Alexandria outros grandes matemáticos, como **Aristarco** (310 a.C. – 230 a.C.); **Arquimedes** (287 a.C. – 212 a.C.), **o maior gênio da Antiguidade e um dos três maiores de todos os tempos**; **Eratóstenes** (274 a.C. – 194 a.C); **Apolônio** (262 a.C – 190 a.C.) autor de magistral obra sobre as secções cônicas e **Hiparco** (180 a.C – 125 a.C), o criador da **Trigonometria**. (GARBI, 2007, p.20 e 21)

Apolônio pela sua magistral obra sobre as secções cônicas e, entre outros, pelo seu tratado sobre tangências conhecido como "O Problema de Apolônio", será também apresentado neste capítulo. Ele nasceu em torno de 262 a.C., em Perga no sul da Ásia Menor, e quando jovem foi para Alexandria para estudar com os assessores de Euclides, ficando por lá um bom tempo. Mais tarde foi para Pergamo, no oeste da Ásia Menor, onde existia recentemente uma universidade e uma biblioteca nos moldes de Alexandria. Um tempo depois, voltou para Alexandria onde faleceu por volta de 190 a.C.

Apolônio era um astrônomo que escreveu sobre múltiplos assuntos matemáticos. Algumas de suas obras se perderam, mas foram resgatadas por Pappus, que viveu no final do século III. Segundo Pappus na obra “Os contatos” é que são tratados os problemas de tangência propostos por Apolônio.

No capítulo 4 deste trabalho serão apresentadas três construções entre as dez propostas por Apolônio através do desenho geométrico e, também, do uso do *software Geogebra*.

2.2. Breve História da Geometria Analítica

No início do século XVII vivia-se uma revolução científica na qual os Elementos, de Euclides já não atendiam as necessidades da época e a matemática precisava se renovar para continuar a ser a base das transformações científicas, não só ampliando seu campo de ação, mas na busca de novos métodos.

Os historiadores divergem sobre quem inventou a Geometria Analítica e a época desta invenção, mas segundo Eves:

> As apreciações precedentes sobre a geometria analítica parecem confundir o assunto com um ou mais de seus aspectos. Mas a essência real desse campo da matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes de a geometria analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve que esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados. (EVES, 2004, p.383)

Em concordância com as argumentações que Eves utiliza para afirmar que foi no século XVII que os franceses René Descartes e Pierre de Fermat foram os inventores da geometria analítica, serão descritas nesta breve história as contribuições de cada um deles. Inicia-se apresentado os fundamentos de René Descartes (1596-1650) um grande expoente fundamental para o desenvolvimento da matemática e da ciência.

A obra prima de René Descartes é o Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências (*Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences*) este tratado era acompanhado de três apêndices, sendo o último voltado para a geometria (La géometrie), sua única publicação matemática, em 1637. Tendo na primeira parte a explanação de alguns princípios da geometria algébrica é revelado um avanço em relação aos gregos, que consideravam que uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de algum retângulo e o produto de três variáveis ao volume de algum paralelepípedo retângulo. Dessa forma:

> Para Descartes, por outro lado, x^2 não sugeria uma área, antes porém o quarto termo da proporção $1 : x = x : x^2$, suscetível de ser representado por um segmento de reta fácil de construir quando se conhece x. Usando-se um segmento unitário é possível, dessa maneira, representar qualquer potencia de uma variável, ou um produto de variáveis, por meio de um segmento de reta e então, quando se atribuem valores a essas variáveis, construir efetivamente o segmento de reta com os instrumentos euclidianos." (EVES, 2004, p.384)

Nesta primeira parte, com a aritmetização da geometria, Descartes marcava x num eixo dado e então um comprimento y, formando um ângulo fixo com esse eixo com o objetivo de construir pontos cujo x e cujo y satisfizessem uma relação.

Na segunda parte da geometria de Descartes é feita uma classificação de curvas agora superada e um método interessante de construir tangentes a curvas e na terceira parte aborda a resolução de equações de grau maior que dois.

Segundo Eves:

> La géométrie não é de maneira nenhuma, um desenvolvimento sistemático do método analítico, e o leitor é obrigado a quase construir o método por si mesmo, a partir de certas informações isoladas. Há trinta e duas figuras no livro, mas em nenhuma delas se encontram colocadas explicitamente os eixos coordenados. O texto foi escrito intencionalmente de maneira obscura e como resultado era difícil de ler, o que limitava muito a divulgação de seu conteúdo. (EVES, 2004, p.388)

Pesquisas sobre a história da matemática têm demonstrado que o resgate histórico do conhecimento leva a uma maior compreensão da evolução do conceito matemático favorecendo a aprendizagem da evolução dos conceitos da geometria analítica, conforme cita AMBRÓZIO[6] (2010), tendo como base esta afirmação destacamos duas lendas descritas por EVES (2004) sobre a visão inicial de Descartes sobre a geometria analítica:

> De acordo com uma delas isso ocorreu num sonho. Na véspera do dia de São Martinho, 10 de novembro de 1616, no acampamento de inverno se sua tropa às margens do Danúbio, Descartes passou pela experiência de três sonhos singularmente vividos e coerentes que, segundo ele, mudaram o curso de sua vida. Os sonhos, conforme suas palavras, iluminaram os propósitos de sua vida e determinaram seus futuros esforços revelando-lhe uma "ciência maravilhosa" e uma "descoberta assombrosa". Descartes nunca revelou explicita ou exatamente do que se tratava, mas há suposições de que essa ciência seria a geometria analítica, ou a aplicação da álgebra à geometria. Só dezoito anos mais tardes ele iria expor algumas de suas idéias em seu Discours. Outra lenda, parecida com a história da queda da maça de Isaac Newton, dá conta de que o estalo inicial da geometria analítica teria ocorrido a Descartes ao observar uma mosca que caminhava pelo forro de seu quarto, junto a um dos cantos
> . Teria chamado a sua atenção que o caminho da mosca sobre o forro poderia ser descrito se, e somente se, a relação ligando as distâncias dela às paredes adjacentes fosse conhecida. (EVES, 2004, p. 388-399)

A contribuição de Descartes fez com que os indivíduos passassem a enxergar um ponto como um par ordenado de números no plano cartesiano. Dessa forma as retas, os círculos e outras figuras geométricas são representadas por equações em x e y nascendo desta forma a geometria analítica a qual faz uso da álgebra para solução de problemas geométricos.

Pierre de Fermat foi um gênio matemático francês que também estudava as bases da geometria analítica. Dentre suas contribuições encontramos a equação geral da reta e da circunferência e uma discussão sobre hipérboles, elipses e parábolas. Conforme EVES:

> Num trabalho sobre tangentes e quadraturas, concluído antes de 1637, Fermat definiu muitas curvas novas analiticamente. Onde Descartes sugeriu umas poucas curvas novas, geradas por movimentos mecânicos, Fermat propôs muitas curvas novas, definidas por equações algébricas. As curvas $x^m y^n$ = a, y^n = a x^m e r^n = aθ são ainda conhecidas como hipérboles, parábolas e espirais de Fermat. (EVES, 2004, p.389)

[6] Http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses /MATEMATICA /Artigo_Beatriz.pdf acessada em 25/03/2015 as 19 h.

Fermat contribuiu, também, para a fundação da moderna teoria dos números uma outra área da matemática que não relataremos neste capítulo por não fazerem do objeto deste estudo.

3 ATIVIDADES DE GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA – GA

Neste capítulo serão abordados 12 (doze) problemas de geometria, com a apresentação das demonstrações que são pré-requisitos para solucioná-los e o desenvolvimento das soluções, utilizando ferramentas da geometria sintética plana e da geometria analítica plana. Dessa forma, contribuindo para que os alunos compreendam que a geometria analítica plana é mais um caminho que eles têm para resolver problemas envolvendo a geometria em geral.

Os problemas de geometria analítica serão retirados de materiais didáticos, onde serão destacadas atividades voltadas para a aprendizagem de Geometria Analítica Plana (GA) propostas nos seguintes livros didáticos: Matemática Dante[7], Matemática Ciência e Aplicações[8], Geometria Analítica e Álgebra Linear[9], na Revista do Professor de Matemática[10], site Profmat[11] com o objetivo de demonstrar que esses exercícios de enunciados aparentemente específicos de geometria sintética plana podem ser solucionados com os recursos aprendidos na geometria analítica plana.

Primeiramente serão demonstrados os pré-requisitos necessários para a solução dos problemas, baseados em LIMA (2005), a saber:

- Rotação de um Segmento de um Ângulo de 90º

> Dado o ponto P = (x, y), submetamos o segmento de reta OP a uma rotação de 90^0 no sentido positivo em torno do ponto O = (0, 0), obtemos assim o segmento OQ. Quais são as coordenadas do ponto Q ?

[7] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**, volume único: livro do professor. 1.ed. São Paulo: Ática.2005.

[8] IEZZI, G. DOLCE, O. DEGENSZAJN, D. PÉRIGO, R. ALMEIDA, N. de. **Matemática Ciência e Aplicações,** 3ª série : ensino médio. 2 ed. São Paulo: Atual, 2004.

[9] LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[10] NERY, Chico. **A Geometria Analítica no ensino médio.** Artigo da Revista do Professor de Matemática nº 67, 3º quadrimestre de 2008. Sociedade Brasileira de Matemática com o apoio da USP – Universidade de São Paulo.

[11] www.profmat-sbm.org.br

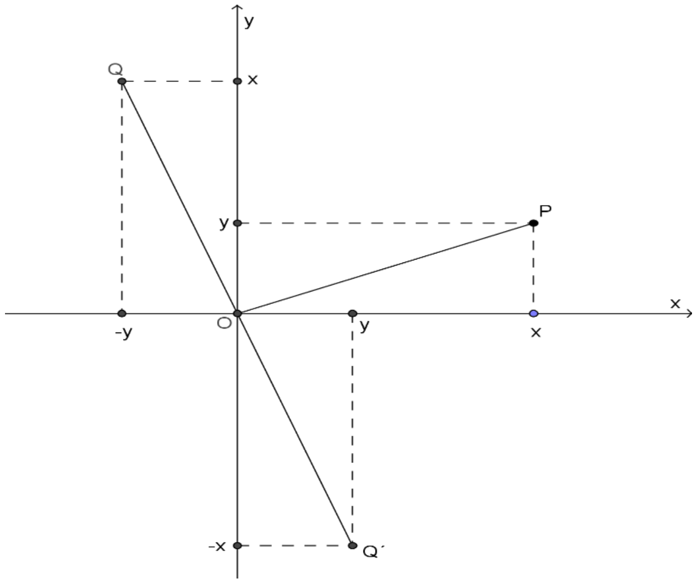


Figura 1: Rotação de um Segmento de um Ângulo de 90º

A rotação de 90^0 no sentido positivo leva o ponto (x, 0) no ponto (0, x), logo transforma o retângulo que tem diagonal OP no retângulo de diagonal OQ. Segue-se que Q = (-y, x).

Se tivéssemos submetido o segmento OP a uma rotação de -90^0 (isto é, de 90^0 no sentido negativo), teríamos obtido o segmento OQ´, onde Q´ = (y, -x). (LIMA, 2005, p.11 e 12)

- Ponto Médio de um Segmento

Dados os pontos A = (a, b) e A´ = (a´, b´), quais são as coordenadas do ponto médio M = (x, y) do segmento de reta AA´ ?

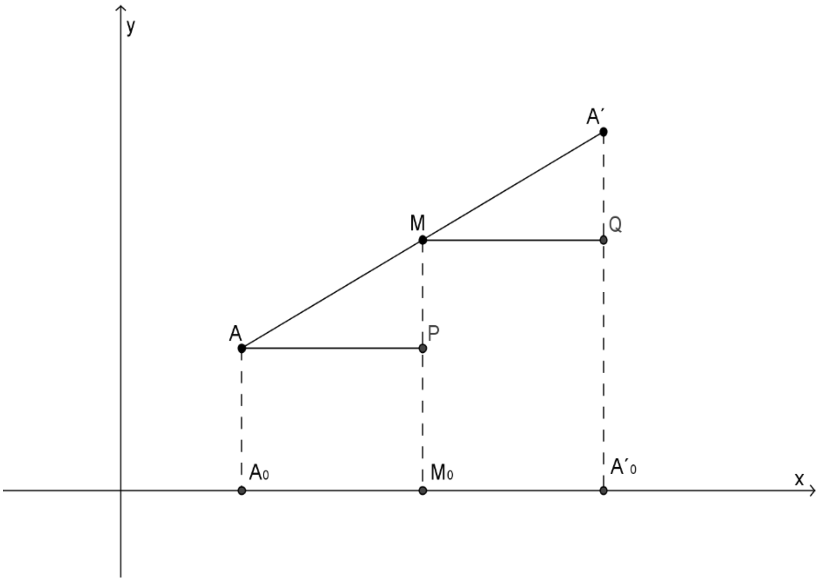


Figura 2: Ponto Médio de um Segmento

Suponhamos inicialmente que a ≠ a´ e b ≠ b´ , isto é, o segmento AA´ não é vertical (paralelo ao eixo OY) nem horizontal (paralelo ao eixo OX). Então , considerando os pontos P = (x, b) e Q = (a´, y), vemos que APM e MQA´ são triângulos retângulos cujas hipotenusas AM e MA´ têm o mesmo comprimento, já que M é o ponto médio de AA´.

Além disso, os ângulos agudos P$\hat{A}$M e Q$\widehat{M}$A´ são congruentes porque os lados AP e MQ são paralelos. Portanto APM e MQA´são triângulos congruentes.

Daí resulta que os segmentos AP e MQ têm o mesmo comprimento. Logo, pondo A_0 = (a, 0), M_0 = (x, 0) e A_0' = (a´, 0), concluímos que M_0 é o ponto médio do segmento A_0A_0' no eixo OX. Segue-se então que x = $\frac{(a+a')}{2}$, que é o ponto médio de um segmento localizado sobre um eixo. De modo análogo se vê que, y = $\frac{(b + b')}{2}$. (LIMA, 2005, p. 15 e 16)

- Segmentos Equipolentes

São dados o segmento de reta orientado AA´, com A = (a, b) , A´ = (a´, b´) e o ponto C = (c, d), fora da reta AA´. Quer-se determinar as coordenadas do ponto C´ = (x, y) de modo que CC´ seja o segmento orientado (começando em C) obtido quando se translada AA´ paralelamente até fazer A coincidir com C.

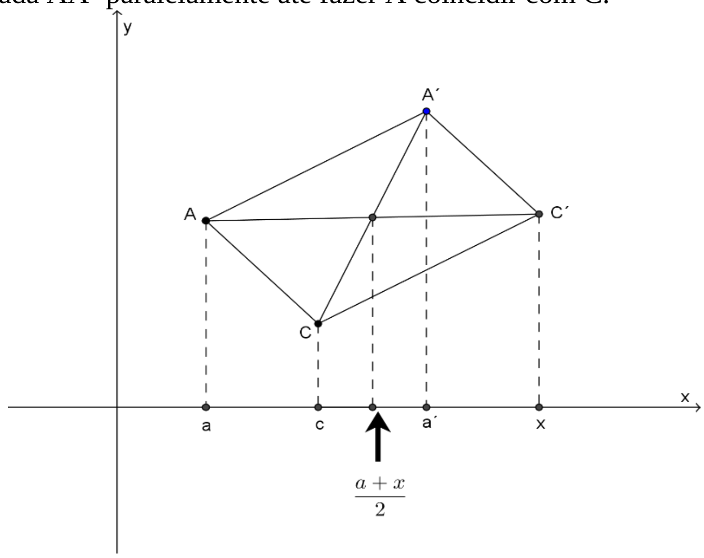


Figura 3.1: Segmentos Equipolentes

Em termos mais precisos: dados os pontos A, A´ e C, quer-se obter C´ tal que AA´ e CC´ sejam os lados opostos de um paralelogramo cujos outros lados opostos são AC e A´C´. Pomos C´ = (x, y) e nos propomos a calcular x e y.

Da Geometria Plana, sabemos que as diagonais de um paralelogramo cortam-se mutuamente ao meio. Assim os segmentos AC´ e A´C têm o mesmo ponto médio. Isto nos dá

$\frac{a+x}{2} = \frac{a'+x}{2}$ e $\frac{b+y}{2} = \frac{b'+d}{2}$

Daí x = c + (a´ - a) e y = d + (b´- b)

Os segmentos AA´ e CC´ são chamados de segmentos equipolentes. Portanto, se A = (a, b), A´ = (a´, b´), C = (c, d) e C´ = (c´, d´) os segmentos AA´, CC´, não situados sobre a mesma reta, são equipolentes se, e somente se, tem-se :

a´ - a = c´- c e b´- b = d´- d.

Em particular, se transladarmos paralelamente o segmento AA´ até fazer o ponto A coincidir com a origem O = (0,0) do sistema de coordenadas então o ponto A´ cairá sobre C´ = (a´ - a, b´- b) = (α , β), onde α = a´ - a e β = b´- b. (LIMA, 2005, p.18,19 e 20)

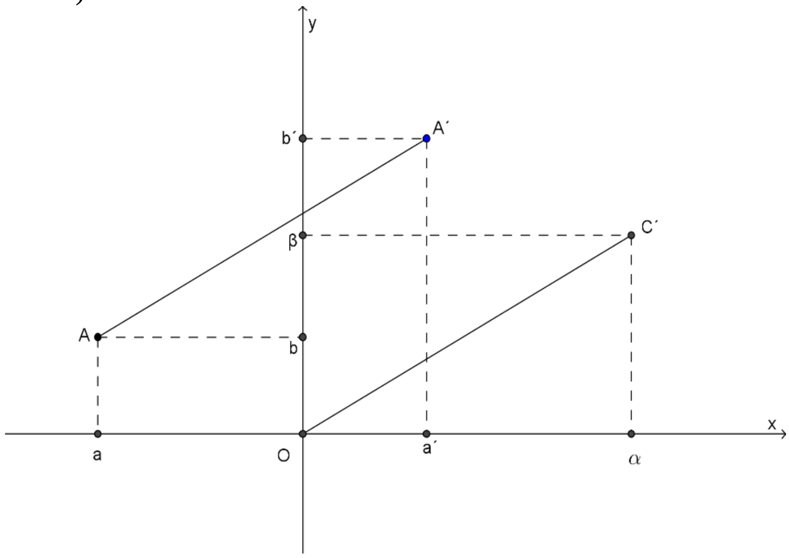


Figura 3.2: Segmentos Equipolentes

- Distância entre dois Pontos

Sendo P = (x, y) e Q = (u, v) pontos com abscissas e ordenadas diferentes a distância entre eles pode ser obtida da forma abaixo.

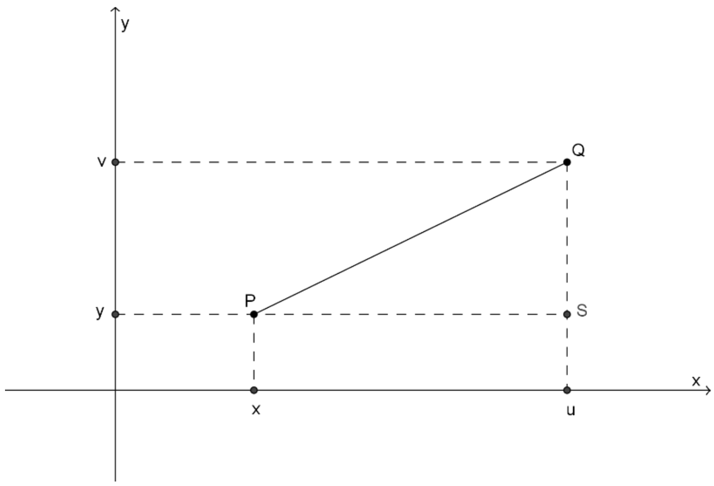


Figura 4: Distância entre dois pontos

Considerando o ponto S = (u, y), vemos que PSQ é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é PQ. Como P e S têm a mesma ordenada, enquanto S e Q têm a mesma abscissa, segue-se que d(P, S) = $|x - u|$ e d(S, Q) = $|y - v|$.

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever

$d(P,Q)^2 = d(P,S)^2 + d(S,Q)^2$.

Portanto,

$d(P,Q)^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2$,

Logo d(P, Q) = $\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$.

Em particular, a distância do ponto P = (x, y) à origem O = (0, 0) é D(O, P) = $\sqrt{x^2 + y^2}$. (LIMA, 2005, p. 23, 24 e 25)

- Perpendicularismo de segmentos quaisquer

Dados os pontos P = (x, y) e Q = (u, v), qual é a condição, em termos dessas coordenadas, que assegura o perpendicularismo dos segmentos OP e OQ, onde O = (0, 0) é a origem ?

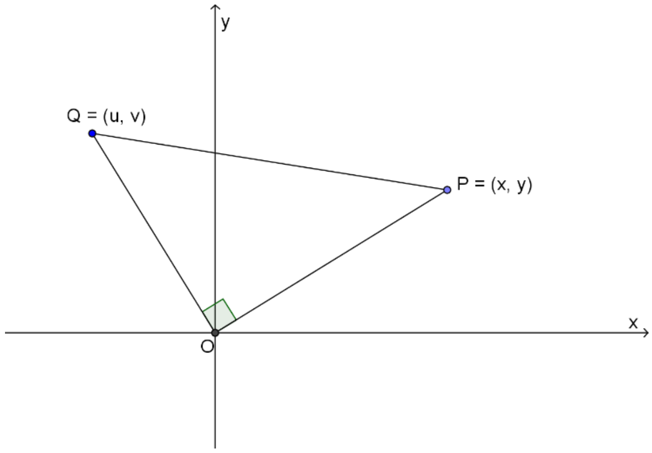


Figura 5.1: Perpendicularismo de segmentos quaisquer

Pelo teorema de Pitágoras, os segmentos OP e OQ são perpendiculares se, e somente se,

$d(P,Q)^2 = d(O,P)^2 + d(O,Q)^2$.

A fórmula da distância entre dois pontos nos permite escrever esta equação como

$(x-u)^2 + (y-v)^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2$,

Ou seja:

x^2- 2ux + u^2 + y^2 -2vy + v^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2

Simplificando:

-2ux – 2vy = 0

E daí

ux + vy = 0.

A igualdade ux + vy = 0 expressa portanto a condição necessária e suficiente para que os segmentos OP e OQ sejam perpendiculares, quando O é origem, P = (x, y) e Q = (u, v).

Se os segmentos perpendiculares OP e OQ têm o mesmo comprimento então OQ resulta de OP por uma rotação de 90^0 em torno da origem. Neste caso se P = (x, y) então Q = (-y, x) ou

Q = (y, -x), conforme a rotação seja no sentido positivo ou negativo. É claro que x(-y) + yx = 0 e xy + y(-x) = 0, confirmando que OP e OQ são perpendiculares.

Mais geralmente, sejam A = (a, b), A´ = (a´, b´), C = (c, d) e C´= (c´, d´) com A ≠ A´ e C ≠ C´.

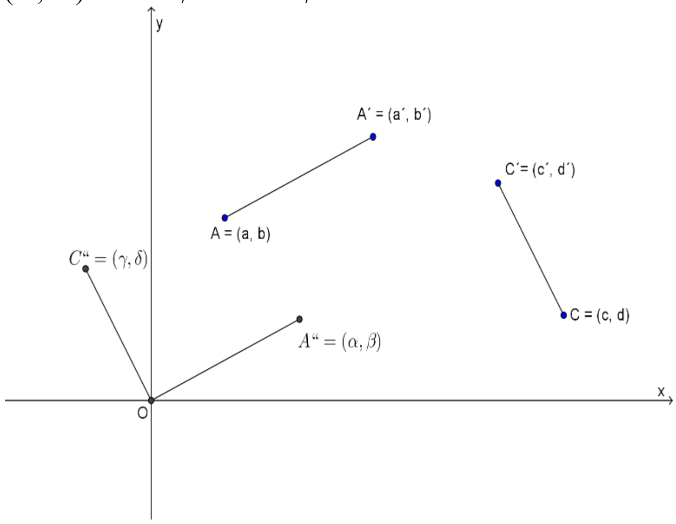


Figura 5.2: Perpendicularismo de segmentos quaisquer

Transladando paralelamente os segmentos AA´ e CC´ de modo a fazer os pontos A e C coincidirem com a origem O = (0, 0), obtemos os pontos A´´ = (α, β) e C´´ = (γ, δ) tais que OA´´ é paralelo a AA´ e OC´´ é paralelo a CC´´ .

Sendo α = a´- a , β = b´ - b, γ = c´ - c, δ = d´ - d.

Além disso os segmentos AA´ e CC´ são perpendiculares se, e somente se, OA´´ é perpendicular a OC´´ , ou seja αγ + βδ = 0.

Assim a condição de perpendicularismo dos segmentos de reta AA´ e CC´ se exprime, em termos das coordenadas dos pontos extremos desses segmentos, como

(a´ - a)(c´ - c) + (b´ - b)(d´ - d) = 0. (LIMA, 2005, p.24, 25 e 26)

- Distância de um Ponto a uma Reta

Observação : Para demonstrar a distância de um ponto a uma reta é suposto que o aluno conheça as formas da equação de uma reta e a condição de retas perpendiculares.

Determinemos primeiramente a distância entre as retas paralelas ax + by = c e ax + by = c´. Ambas são perpendiculares à reta bx – ay = 0, que passa pela origem e as corta nos pontos P q Q respectivamente. As coordenaqdas desses pontos são obtidas resolvendo os sistemas

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx - ay = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by = c' \\ bx - ay = 0. \end{cases}$$

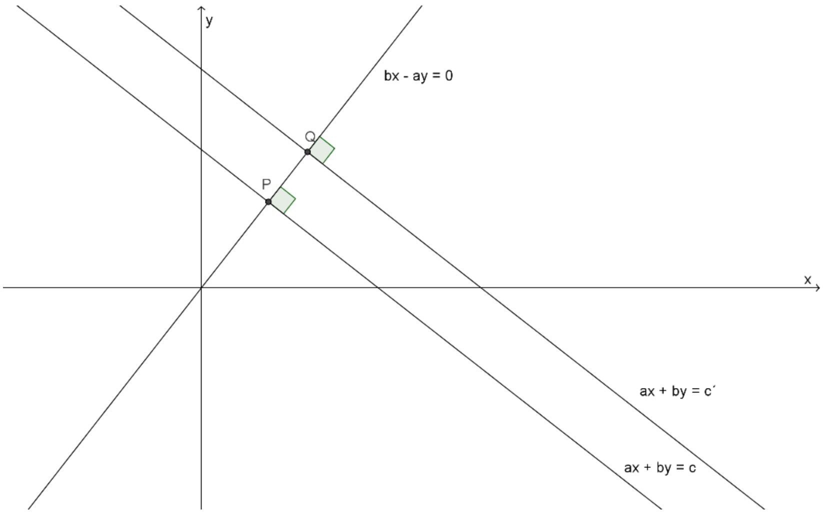


Figura 6.1: Distância de um Ponto a uma Reta

Facilmente obtemos

$$P = \left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right) \quad \text{e} \quad Q = \left(\frac{ac'}{a^2+b^2}, \frac{bc'}{a^2+b^2}\right)$$

A distância entre as duas retas dadas é a distância entre os pontos P e Q. Outro cálculo fácil nos dá

$$d(P, Q) = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

Para calcular a distância do ponto P = (x_0, y_0) à reta r, dada por ax + by = c, observamos que a reta paralela a r passando por P tem a equação ax + by = c´ , onde c´ = ax_0 + by_0 , e que a distância de P a r é igual à distância entre essas duas retas paralelas mesma distância de P a Q.

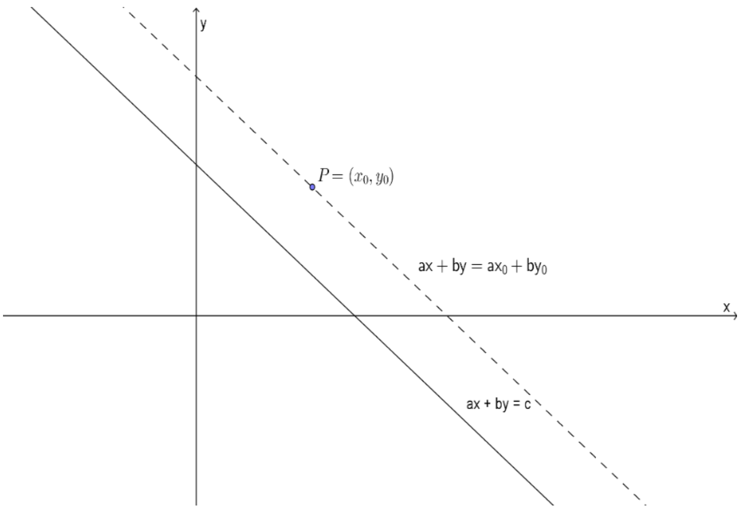


Figura 6.2: Distância de um Ponto a uma Reta

Pelo que acabamos de ver, tem-se então a expressão

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

para a distância do ponto P = (x_0, y_0) à reta ax + by = c. (LIMA, 2005, p.24, 25 e 26)

- Área de um Triângulo

Consideremos inicialmente um triângulo A_1, A_2, A_3 do qual o vértice A_3 = (0, 0) é a origem. Sejam A_1 = (a_1, b_1) e A_2 = (a_2, b_2). A numeração foi feita de modo que o lado A_1A_3 não é vertical, isto é, $a_1 \neq 0$.

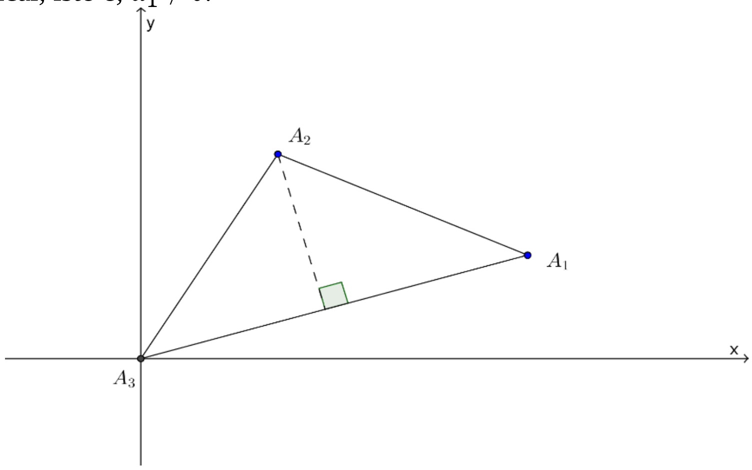


Figura 7.1: Área de um Triângulo

Seja A_1A_3 a base do triângulo. Assim, a distância de A_2 até a reta A_1A_3 é a sua altura. Como a equação da reta A_1A_3 é b_1x - a_1y = 0 temos:

Área de $A_1A_2A_3$ = $\frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}$. $\frac{|b_1a_2 - a_1b_2|}{\sqrt{{b_1}^2 + (-a_1)^2}}$ = $\frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$.

No caso geral, temos um triângulo $A_1A_2A_3$ onde os vértices A_1 = (a_1, b_1), A_2 = (a_2, b_2) e A_3 = (a_3, b_3) são pontos quaisquer. A partir da Origem O, traçamos os segmentos OP e OQ, respectivamente equipolentes a A_3A_1 e A_3A_2, logo P = (α_1,β_1) e Q = (α_2,β_2), com α_1 = a_1 - a_3,β_1 = b_1 - b_3 , α_2 = a_2 - a_3 , β_2 = b_2 - b_3.

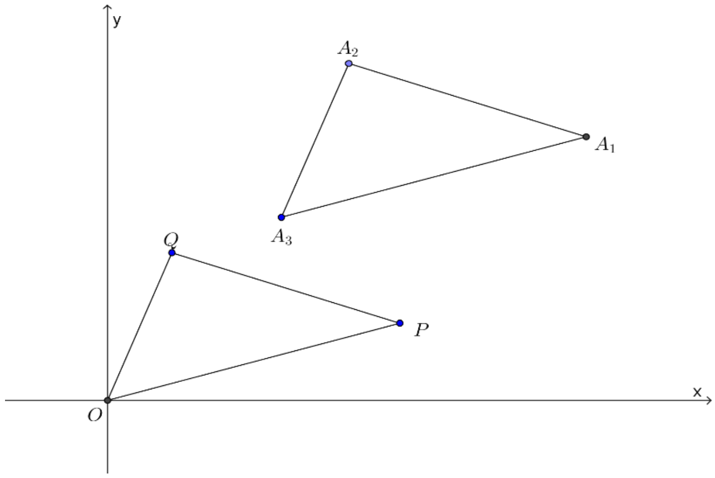


Figura 7.2: Área de um Triângulo

> Uma translação leva o triângulo $A_1A_2A_3$ para a posição PQO.
>
> Então a área de $A_1A_2A_3$ = área de OPQ = $\frac{1}{2}|\alpha_1\ \beta_2 - \alpha_2\ \beta_1|$, ou seja: área de $A_1A_2A_3$ = $\frac{1}{2}|(a_1 - a_3)(b_2 - b_3) - (a_2 - a_3)(b_1 - b_3)|$.
>
> Tradicionalmente se escreve $a_1b_2 - a_2b_1$ como determinante:
>
> $a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.
>
> Assim, a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_3b_2 - a_1b_3 é, em valor absoluto, o dobro da área do triângulo $A_1A_2A_3$, onde A_1 = (a_1, b_1), A_2 = (a_2, b_2) e A_3 = (a_3, b_3). Lembrando esta notação, não é preciso transladar o triângulo. (LIMA, 2005, p.61, 62 e 63)

Após estas demonstrações serão apresentados os exercícios de GA dos livros didáticos e da revista os quais serão solucionados por geometria sintética plana e, resolvidos também com recursos de geometria analítica plana. Este grau de satisfação da atividade baseia-se nas afirmações segundo Nery[12]:

> Não nego que devemos valorizar as fórmulas, afinal a GA é basicamente isso, um estudo da GP por meio das equações.
>
> Mas, se a GA é isso, é primordial que nós, professores, revisitemos a GP para resolver alguns exercícios de enunciados aparentemente específicos de GP, porém utilizando recursos aprendidos na GA.
>
> Caso contrário, fazendo uma analogia seria acreditar que dar uma caixa de ferramentas para um aluno já seria suficiente para transformá-lo num mecânico.
>
> Eu, particularmente, gosto de olhar estas duas geometrias como irmãs gêmeas. Passo a maior parte do meu trabalho em frente à lousa, interagindo, se possível, com os meus alunos e noto que alguns deles preferem a GA (e não são poucos?) assim como outros se sentem mais

[12] O autor utiliza a abreviatura de GA para a Geometria Analítica Plana e de GP para a Geometria Plana.

> à vontade com a GP. Muitos deles ficam encantados ao ver o mesmo exercício sendo resolvido de duas maneiras. (NERY, 2008, P.20)

A seguir com base nestas contribuições de Nery serão apresentados e comentados 12 (doze) exercícios sendo um do site do Profmat, um de um livro didático e dois dos outros dois livros didáticos, supracitados e cinco da revista.

- **Proposta de Exercício retirados do site Profmat do Exame Nacional de Qualificação 2012.1, Questão 4.** (www.profmat-sbm.org.br)

  Exercício 1:

  Enunciado:

ABCD é um quadrado, M é o ponto médio do lado BC e N é o ponto médio do lado CD. Os segmentos AM e BN cortam-se em P.

a) Mostre que $\frac{PB}{PN} = \frac{2}{3}$

b) Calcule a razão $\frac{PA}{PM}$

c) Se AB = 1 calcule a área do quadrilátero PMCN.

Obs: Para mostrar os itens (b) e (c) você pode usar o resultado do item (a) mesmo que não o tenha demonstrado.

Solução pela Geometria Analítica Plana: Encaixemos o quadrado ABCD no primeiro quadrante do plano cartesiano, fazendo os lados AD e AB ficarem contidos, respectivamente, nos eixos x e y.

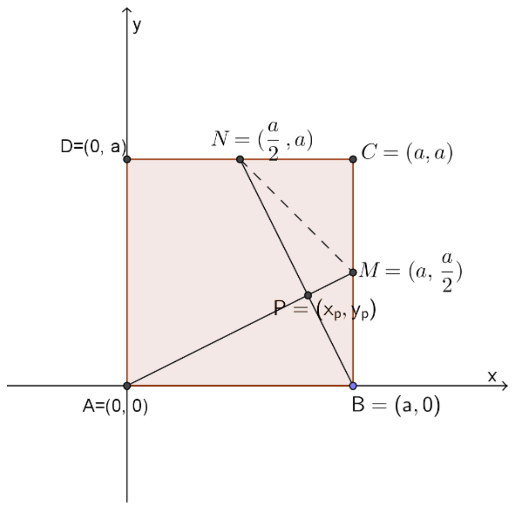


Figura 8.1: Quadrado

Item (a):

Assim as coordenadas do ponto P(x_p, y_p) podem ser obtidas encontrando a intersecção das retas suporte dos segmentos AM e BN : $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -2x + 2a \end{cases}$

Então: $x_p = \frac{4}{5}$a e $y_p = \frac{2}{5}$a e os segmentos PB e PN podem ser obtidos pela fórmula da distância entre dois pontos, onde,

d(P, B) = $\sqrt{(\frac{4}{5}\text{a} - \text{a})^2 + (\frac{2}{5}\text{a} - 0)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ a

d(P, N) = $\sqrt{(\frac{4}{5}\text{a} - \frac{a}{2})^2 + (\frac{2}{5}\text{a} - \text{a})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ a

Portanto $\frac{PB}{PN} = \frac{a.\frac{\sqrt{5}}{5}}{a.\frac{3\sqrt{5}}{10}} = \frac{2}{3}$

Item (b):

Obtendo os segmentos PA e PM ,

d(P, A) = $\sqrt{(\frac{4}{5}\text{a} - 0)^2 + (\frac{2}{5}\text{a} - 0)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ a

d(P, M) = $\sqrt{(\frac{4}{5}\text{a} - \text{a})^2 + (\frac{2}{5}\text{a} - \frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{10}$ a

Portanto $\frac{PA}{PM} = \frac{a.2\frac{\sqrt{5}}{5}}{a.\frac{\sqrt{5}}{10}} = 4$

Item (c):

Como AB = 1 temos os pontos P = ($\frac{4}{5}$, $\frac{2}{5}$) , M = (1, $\frac{1}{2}$) , N = ($\frac{1}{2}$, 1) ,

C = (1, 1).

A área do quadrilátero PMCN é igual à soma das áreas dos triângulos PNM e NMC, que são obtidas, em valores absolutos, calculando a metade dos determinantes gerados utilizando as coordenadas dos vértices desses triângulos.

Área do triângulo PNM = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_P & x_N & x_M \\ y_P & y_N & y_M \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\frac{4}{5} . 1 . 1 + \frac{1}{2} . \frac{1}{2} . 1 + 1.1.\frac{2}{5} - 1.1.1 - \frac{1}{2} . \frac{2}{5} . 1 - \frac{4}{5} . 1 . \frac{1}{2}) = \frac{3}{40}$ (em valor absoluto).

Área do triângulo NMC = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_N & x_M & x_C \\ y_N & y_M & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ = $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$ .1 + 1 .1 .1 + 1 .1 .1 − 1 . $\frac{1}{2}$ .1 − 1 . 1 .1 − $\frac{1}{2}$ .1 .1) = $\frac{1}{8}$ (em valor absoluto).

Portanto a área do quadrilátero PMCN = $\frac{3}{40} + \frac{1}{8} = \frac{1}{5}$

É interessante observar, que após os eixos cartesianos terem sidos colocados, a solução pode ser planejada utilizando as ferramentas da geometria analítica.

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana:

Item (a):

Há várias maneiras de se calcular esta proporção. Vejamos duas:

Primeira: Bastará mostrar que $\frac{PB}{BN} = \frac{2}{5}$. Como AM é perpendicular a BN, então os triângulos BPM e BCN são semelhantes. Logo,

$$\frac{PB}{BC} = \frac{BM}{BN} .$$

Isso implica

$$\frac{PB}{BN} = \frac{BC.BM}{BN^2}.$$

Como $BN^2 = NC^2 + BC^2 = \frac{5}{4}BC^2$ e 2BM = BC, todos os termos do lado direito deve ser colocados em função de BC e a igualdade segue.

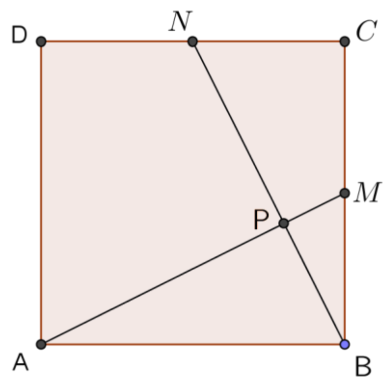


Figura 8.2: Quadrado

Segunda: De fato não é necessário usar a perpendicularidade, pois a afirmação vale mesmo que ABCD seja um paralelogramo. Seja F o ponto médio de AB. O segmento NF corta AM em E que é o ponto médio de AM.

Então FE = $\frac{1}{2}$ BM = $\frac{1}{4}$ BC e EM = $\frac{3}{4}$ BC. Como os triângulos PMB e PEN são semelhantes, segue que

$$\frac{PB}{PN} = \frac{BM}{EN} = \frac{\frac{1}{2}\,BC}{\frac{3}{4}\,BC} = \frac{2}{3}$$

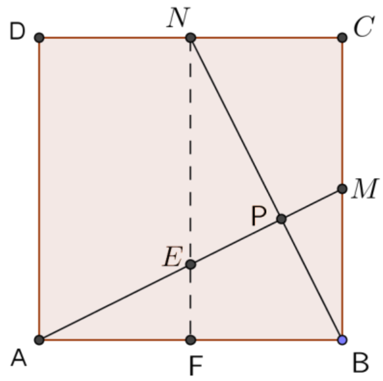


Figura 8.3: Quadrado

Item (b):

Aproveitando a construção da segunda solução de (a), a mesma semelhança de triângulos nos dá $\frac{PM}{PE} = \frac{2}{3}$ e sendo AE = PE + PM, segue que AE = ($\frac{3}{2}$ + 1).PM

$$\frac{PA}{PM} = \frac{AE+PE}{PM} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4.$$

Item (c):

Usaremos $[polígono\ \gamma]$ para denotar a área do polígono γ. Evidentemente $[BNC]$ = $\frac{1}{4}$. Queremos calcular $[PMCN]$ = $\frac{1}{4}$ - $[BMP]$. Mas por causa da semelhança entre os triângulos BPM e BCN, compartilhando o ângulo oposto a PM e NC, respectivamente,

$$\frac{[BMP]}{[BCN]} = \frac{BP.BM}{BN.BC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}\,.$$

Portanto $[PMCN]$ = $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{5}.\frac{1}{4}$ = $\frac{1}{5}$.

Exercício 2:

Enunciado: **“**Prove que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.” (IEZZI et al, 2004, exercício 51, p.90)

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: A escolha dos eixos é importante para facilitar a resolução por geometria analítica, usar os eixos como suporte dos lados das figuras geométricas e explorando a simetria existente.

No caso do problema proposto iremos apoiar um dos lados do paralelogramo sobre o eixo das abscissas onde teremos de imediato o Ponto O(0,0) como o primeiro vértice do paralelogramo e R(a,0) como um segundo vértice, sendo “a” o comprimento de um dos lados.

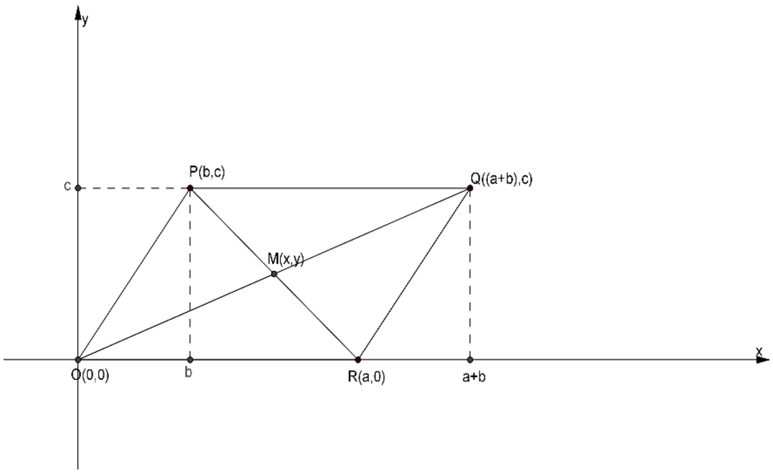


Figura 9.1: Ponto de intersecção das diagonais do paralelogramo

Iremos neste problema considerar que o aluno conhece a fórmula que obtém o ponto médio de um segmento dado as coordenadas das suas extremidades.

Assim, teremos M(x,y) o ponto de interseção das diagonais $\overline{OQ}$ e $\overline{PR}$ do paralelogramo ORQP.

Como, as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{OQ}$ são encontradas fazendo a média aritmética das coordenadas correspondentes dos pontos O e Q, teremos: $x = \frac{0+(a+b)}{2} = \frac{a+b}{2}$ e $y = \frac{0+c}{2} = \frac{c}{2}$, logo as coordenadas do ponto médio de $\overline{OQ} = (\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$

Analogamente, achando as coordenadas do médio de $\overline{PR}$ teremos:

$x = \frac{a+b}{2}$ e $y = \frac{0+c}{2} = \frac{c}{2}$, logo as coordenadas do ponto médio de $\overline{PR} = (\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2})$

Portanto as diagonais cortam-se ao meio no ponto M($\frac{a+b}{2}$, $\frac{c}{2}$).

Uma solução usando Geometria Plana poderia ser construída com os alunos, como a desenvolvida abaixo.

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana: Utilizando o caso de congruência ALA (Ângulo, Lado, Ângulo) temos os triângulos PMQ e RMO congruentes, pois possuem os ângulos M$\hat{O}$R = M$\hat{Q}P$ e M$\hat{R}$O = M$\hat{P}Q$ e os lados PQ = OR .

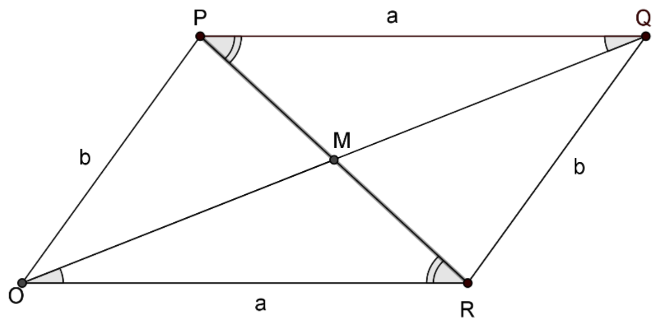


Figura 9.2: Ponto de intersecção das diagonais do paralelogramo

Assim PM = MR e OM = MQ , logo M é o ponto médio das diagonais.

- **Proposta de Exercícios retirados do livro didático: Matemática (DANTE, 2005)**

Exercício 3:

Enunciado:

> Seja ABC um triângulo retângulo de catetos $\overline{AB}$ medindo m, $\overline{AC}$ medindo n e hipotenusa $\overline{BC}$. Mostrar que a mediana $\overline{AM}$ mede a metade da hipotenusa. (DANTE, 2005, p.412)

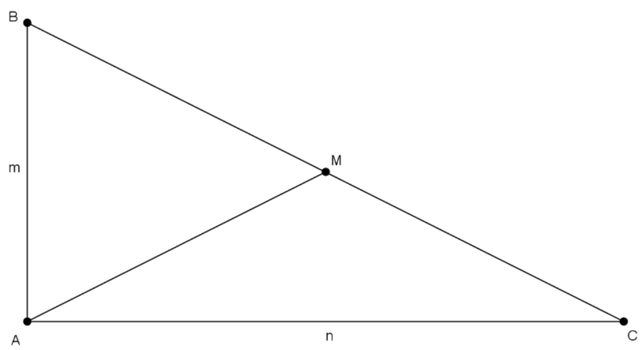


Figura 10.1: Mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: O mais conveniente é colocar os dois catetos sobre os eixos coordenados; portanto, o vértice A deve coincidir com a origem:

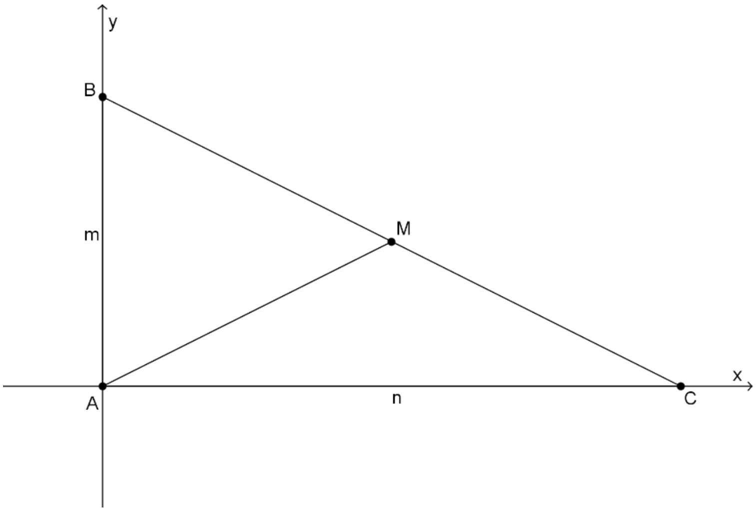


Figura 10.2: Mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo

Assim, A(0, 0), B(0, m) e C(n, 0) são as coordenadas dos vértices, e M($\frac{n}{2}$, $\frac{m}{2}$). O comprimento da hipotenusa $\overline{BC}$ é d(B, C) = $\sqrt{m^2 + n^2}$ e o comprimento da mediana $\overline{AM}$ é d(A, M) = $\sqrt{(\frac{m}{2})^2 + (\frac{n}{2})^2}$ = $\sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4}}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$

Assim, d(A, M) = $\frac{1}{2}$ d(B, C).

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana: Traçando uma perpendicular a $\overline{AC}$ passando por M, obtemos o ponto D médio de $\overline{AC}$, logo os triângulos MDA e MDC são congruentes, caso LAL (lado, ângulo, lado).

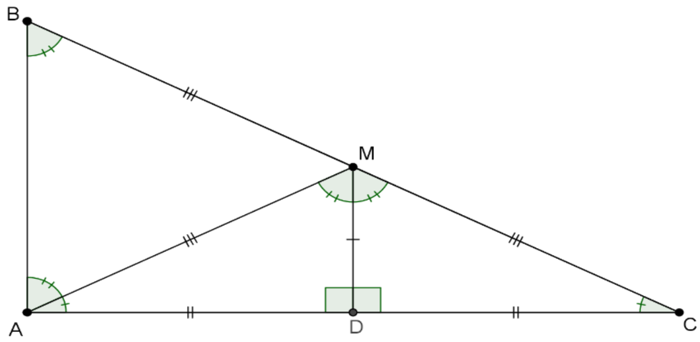


Figura 10.3: Mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo

Portanto a mediana $\overline{AM} = \overline{MC}$ (metade da hipotenusa).

Exercício 4:

Enunciado:

> Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo:
> a) é paralelo ao terceiro lado;
> b) tem comprimento igual à metade do comprimento do terceiro lado.
>
> (DANTE, 2005, p.412)

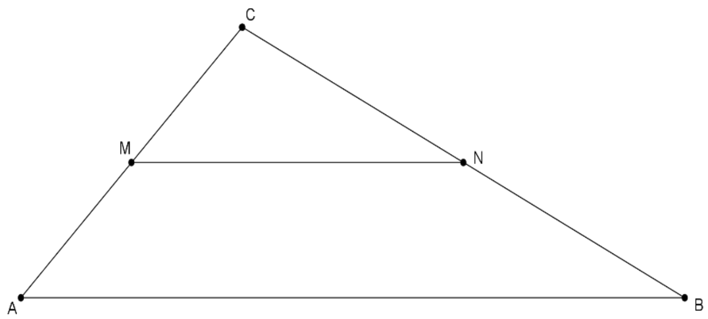


Figura 11.1: Base média de um triângulo

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: Visando simplificar a resolução do problema, vamos adotar um sistema eixos coordenados onde o eixo das abcissas serve de suporte para o lado $\overline{AB}$ e o eixo das ordenadas passa pelo vértice C do triângulo.

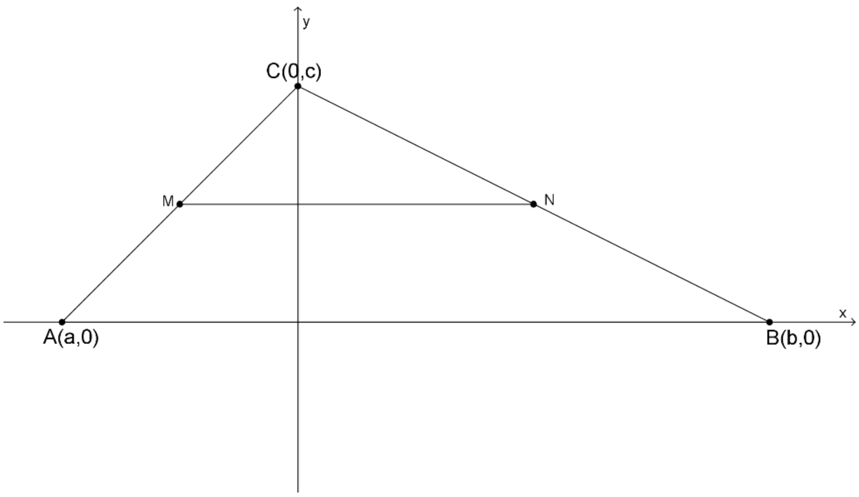


Figura 11.2: Base média de um triângulo

Assim, A(a, 0), B(b, 0) e C(0, c) são as coordenadas dos vértices, M($\frac{a}{2}$, $\frac{c}{2}$) e N($\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$) as coordenadas dos pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$respectivamente. Logo a reta suporte do segmento $\overline{MN}$ tem coeficiente angular $= \frac{\frac{c}{2} - \frac{c}{2}}{\frac{b}{2} - \frac{a}{2}} = 0$, portanto a reta suporte de $\overline{MN}$ é horizontal, isto é, paralela à reta suporte de $\overline{AB}$.

O comprimento $\overline{MN}$ é d(M, N) = $\sqrt{(\frac{c}{2} - \frac{c}{2})^2 + (\frac{b}{2} - \frac{a}{2})^2} = \sqrt{(\frac{b}{2} - \frac{a}{2})^2} = \frac{b-a}{2}$, portanto o comprimento $\overline{MN}$ é metade do comprimento $\overline{AB}$.

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana:

Traçando pelo vértice B uma paralela a $\overline{AC}$ e a seguir prologando $\overline{MN}$ encontramos o ponto D. Obtemos assim os triângulos congruentes CNM e BND, caso ALA (ângulo, lado, ângulo), sendo $\overline{CN} = \overline{NB}$ o lado entre os ângulos iguais. Então $\overline{MN} = \overline{ND}$, $\overline{BD} = \overline{CM}$ e como $\overline{AM} = \overline{CM}$, temos $\overline{BD} = \overline{AM}$ e assim o quadrilátero AMDB é um paralelogramo.

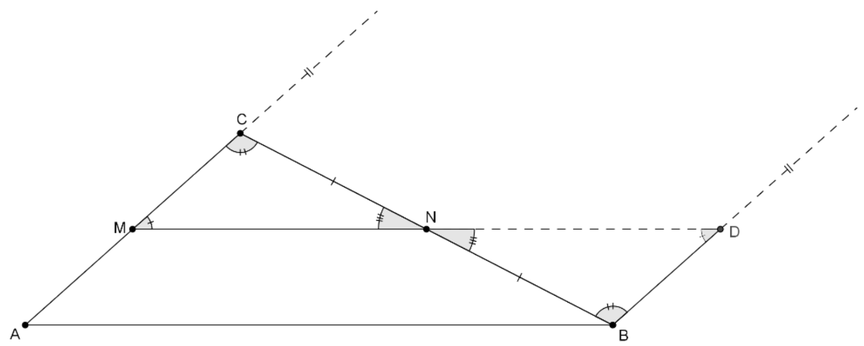


Figura 11.3: Base média de um triângulo

Portanto a mediana $\overline{MN}$ é paralela ao lado $\overline{AB}$ e como $\overline{MN} = \overline{ND}$, temos:

$\overline{MN} = \frac{\overline{AB}}{2}$

- **Proposta de Exercícios retirados da RPM – Revista do Professor de Matemática 67 (NERY, 2008)**

  Exercício 5 :

  Enunciado:

> Na figura abaixo, o quadrado ABCD tem lado 9 e os pontos P e Q dividem o lado CD em três segmentos congruentes. Calcule a distância do vértice A ao baricentro G do triângulo BPQ.

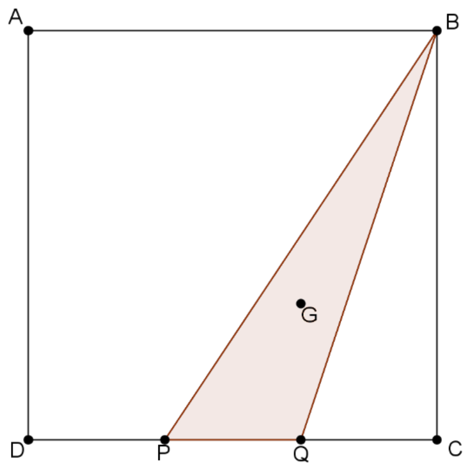


Figura 12.1: Distância do vértice A ao baricentro G

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: "Encaixemos" o quadrado ABCD no primeiro quadrante do plano cartesiano, com o vértice D coincidindo com a origem. Sendo A = (0,9), B = (9,9), P = (3,0) e Q = (6,0) é conhecido que as coordenadas do baricentro G são:

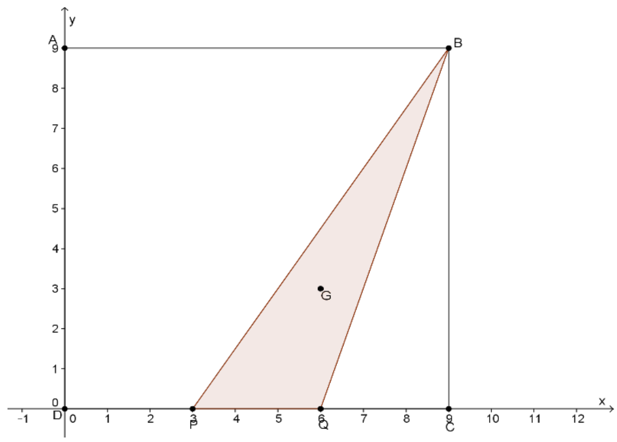


Figura 12.2: Distância do vértice A ao baricentro G

$X_G = \frac{X_B + X_P + X_Q}{3} = \frac{9+3+6}{3} = 6,$

$Y_G = \frac{Y_B + Y_P + Y_Q}{3} = \frac{9 + 0+0}{3} = 3,$

Portanto, G = (6,3).

A distância procurada é:

$d_{AG} = \sqrt{(X_G - X_A)^2 + (Y_G - Y_A)^2} = \sqrt{(6 - 0)^2 + (3 - 9)^2}$
$= \sqrt{72}$

$d_{AG} = 6\sqrt{2}$

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana:

Seja M o ponto médio de PQ que também é o ponto médio de DC. Traçamos BM a AC que se cortam em E. Os triângulos ABE e CME são semelhantes e , como AB = 2MC, temos BE = 2EM. Logo, E é o baricentro do triângulo BPQ e os pontos G e E coincidem. Assim, AG = $\frac{2}{3}$ AC = $\frac{2}{3}$ x $9\sqrt{2}$ = $6\sqrt{2}$.

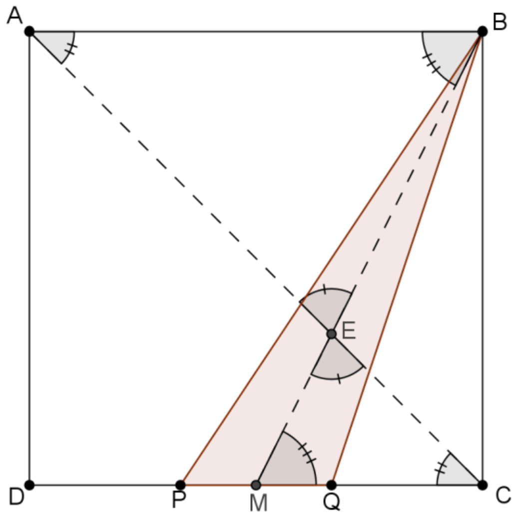


Figura 12.3: Distância do vértice A ao baricentro G

(NERY, 2008, p.20)

Exercício 6 :

Enunciado:

Problema: Os catetos de um triângulo ABC, retângulo em A, medem AB=10 cm e AC=15 cm. Se AD é bissetriz do ângulo A, calcule as áreas dos triângulos ABD e ACD.

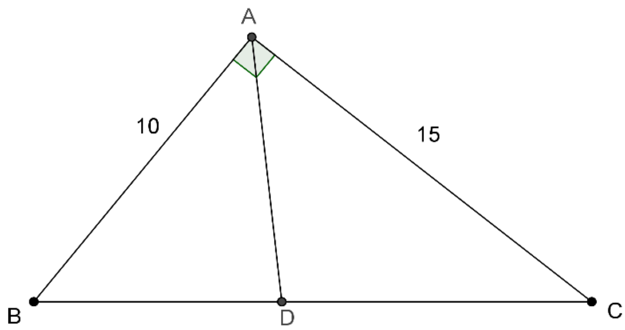


Figura 13.1: Áreas dos triângulos ABD e ACD

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: Coloquemos o triângulo ABC encaixado no 1º quadrante do plano cartesiano, de modo que o vértice A coincida com a origem. Teremos: A=(0,0), B=(0,10) e C=(15,0).

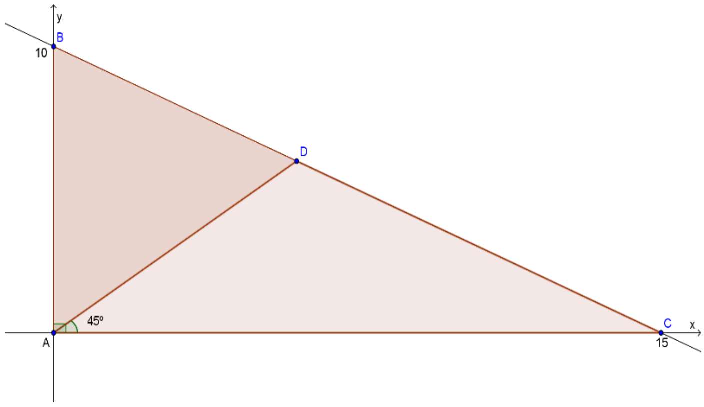


Figura 13.2: Áreas dos triângulos ABD e ACD

A reta AD tem equação y = x, pois passa pelo ponto (0,0) e tem coeficiente angular m = tg 45º = 1.
A reta BC tem equação segmentária $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} = 1$, pois determina nos eixos x e y segmentos de medidas 15 e 10 respectivamente. O ponto D, pé da bissetriz AD na hipotenusa BC, que é intersecção dessas duas retas, pode ser obtido resolvendo-se o sistema formado pelas suas respectivas equações:

$$\begin{cases} y = x \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{10} = 1 \end{cases}$$, ou seja, D = (6,6).

A partir desse momento, podemos calcular as áreas tanto por GA como por GP. O triângulo ACD tem vértices A = (0,0), C = (15,0) e D = (6,6) e o triângulo ABD tem vértices A = (0,0), B = (0,10) e D = (6,6); logo, suas áreas são:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 45, ou\ S_{ACD} = \frac{base\ X\ altura}{2} = \frac{15\ X\ 6}{2} = 45\ cm^2$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 30, ou\ S_{ABD} = \frac{base\ X\ altura}{2} = \frac{10\ X\ 6}{2} = 30\ cm^2$$

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana:
A partir da figura

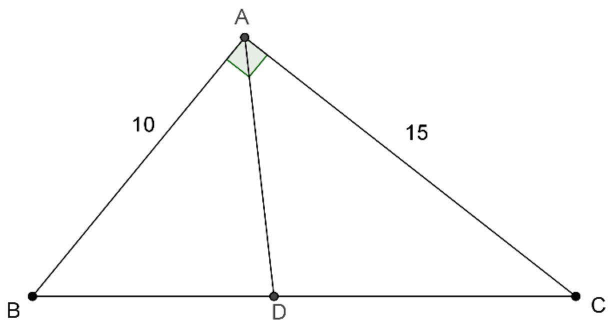


Figura 13.3: Áreas dos triângulos ABD e ACD

Como D equidista dos lados AB e AC, então as áreas dos triângulos ABD e ACD são proporcionais a 10 e 15 (ou seja, a 2 e 3). Como a área do triângulo ABC é 75, as áreas dos dois triângulos são 30 e 45. (NERY, 2008, p.21)

Exercício 7 :

Enunciado:

As medianas AM e BN de um triângulo ABC são perpendiculares e medem, respectivamente, 9cm e 12 cm. Calcule o comprimento da terceira mediana desse triângulo.

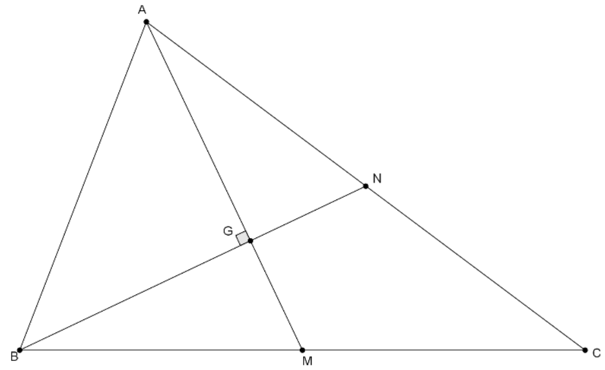


Figura 14.1: Comprimento da mediana do lado AB

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: O encontro das medianas é o baricentro G do triângulo ABC. Usando o fato de que as medianas AM e BN se cortam perpendicularmente em G, coloquemos esse triângulo no plano cartesiano com origem em G.

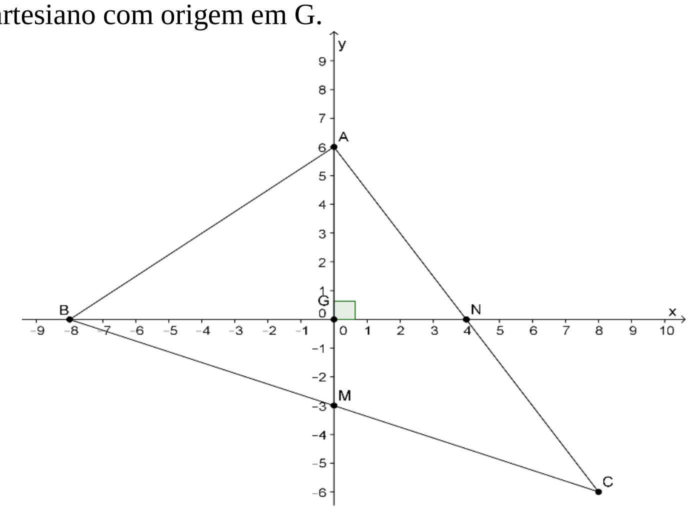


Figura 14.2: Comprimento da mediana do lado AB

Usando a conhecida proporção em que G divide as medianas, temos:

$$\begin{cases} AM = 9 \rightarrow AG = 6\ e\ GM = 3 \\ BN = 12 \rightarrow BG = 8\ e\ GN = 4 \end{cases}$$, ou seja, A = (0,6).

M = (0, -3), B = (-8, 0) e N = (4, 0), As equações segmentárias das retas NA e BM são, respectivamente,

$\frac{x}{4}+\frac{y}{6}= 1$ e $\frac{x}{-8}+\frac{y}{-3}=1$

Resolvendo o sistema anterior, encontramos o ponto C = (8, -6). O comprimento da terceira mediana é $\frac{3}{2}$ da distância entre C e G:

$$\frac{3}{2}\sqrt{(X_C - X_G)^2 - (Y_C - Y_G)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{(8-0)^2 - (-6-0)^2}$$

= 15 cm.

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana: Trace CG, que, como também é mediana, corta AB no seu ponto médio P. Pela Propriedade do baricentro, temos AG = 6 e BG = 8.

Logo AB = 10 e GP = PA = PB = 5. Se GP = 5, então CP = 15.

(NERY, 2008, P.22)

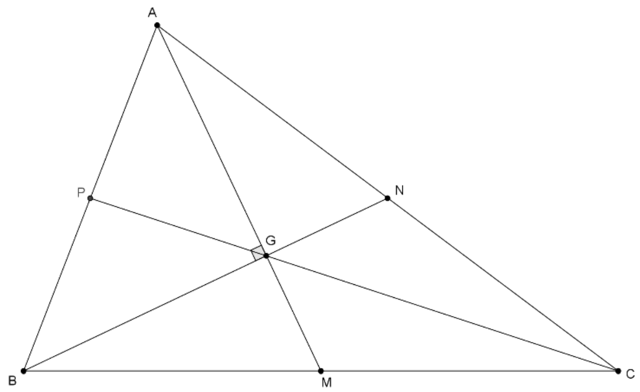


Figura 14.3: Comprimento da mediana do lado AB

Exercício 8 :

Enunciado:

Calcule a área do triângulo ADE retângulo em E, inscrito num trapézio retângulo ABCD, com AB = 10 cm, AD = 30 cm e CD = 20 cm

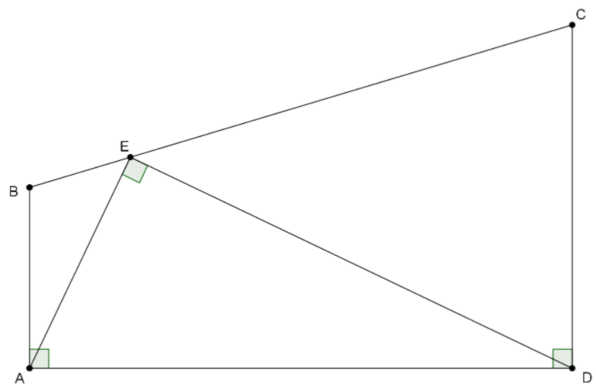


Figura 15.1: Área do triângulo ADE

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: Encaixemos o trapézio ABCD no primeiro quadrante do plano cartesiano, fazendo os lados AD e AB ficarem contidos, respectivamente, nos eixos x e y.

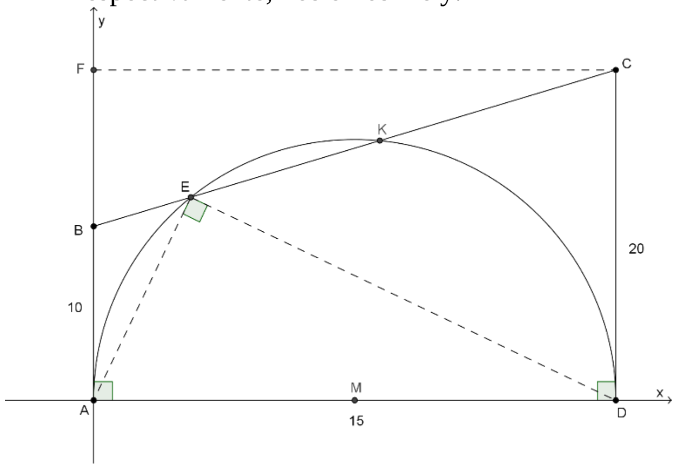


Figura 15.2: Área do triângulo ADE

Como a reta BC tem coeficiente angular m = $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{20-10}{30-0} = \frac{1}{3}$ e coeficiente linear 10, sua equação reduzida é y = $\frac{1}{3}$ x + 10. A circunferência de diâmetro AD, com centro M = (15, 0), passa pelo ponto E e tem equação:

$(x-15)^2 + y^2 = 15^2$.

O ponto E é dado pela solução do sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 10 \\ (x-15)^2 + y^2 = 225 \end{cases}$$

Ou seja, E = (6,12) ou E = (15, 15). Portanto, a área do triângulo ADE é:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & 1 \\ 6 & 12 & 1 \end{bmatrix} = 180\ cm^2 \text{ ou } \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & 1 \\ 15 & 15 & 1 \end{bmatrix} = 225\ cm^2$$

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana: Tomemos os pontos F em CD, e H em AD, de modo que BF seja perpendicular a CD e EH perpendicular a AD, com L na intersecção de BF com EH.

Sendo EL = x, e sendo semelhantes os triângulos BLE e BFC, com CF = 10 e BF = 30, temos BL = 3x. Assim AH = 3x e HD = 30 – 3x.

No triângulo retângulo AED, temos EH^2 = AH . HD, ou seja, $(10+x)^2$ = 3.(30 – 3x), de onde tiramos x = 2 ou x = 5. A área do triângulo AED pode ser:

$\frac{1}{2}$ AD . EH = $\frac{1}{2}$. 30 . 12 = 180 cm^2ou $\frac{1}{2}$. 30 . 15 = 225cm^2

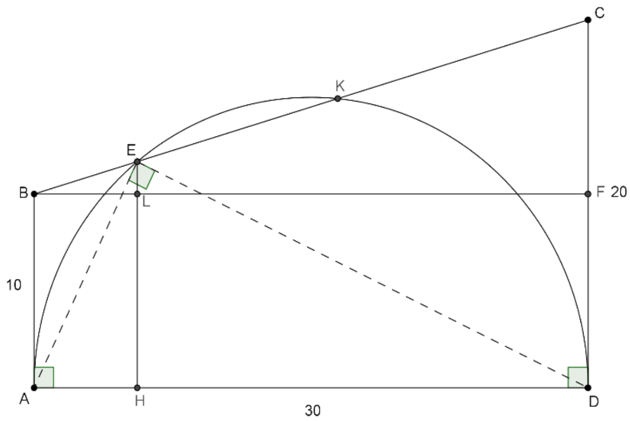


Figura 15.3: Área do triângulo ADE

(NERY, 2008, p.23)

Exercício 9 :

Enunciado:

> ABCD é um retângulo com AB = 60 e BC = 80. Calcule a distância da diagonal AC ao centro de uma circunferência que tangencia os lados AD, AB e BC. (NERY, 2008, p.23 e 24)

Com a construção da figura temos: O ponto E como centro da circunferência que tangencia os lados AD, AB e BC. O ponto G como o pé da perpendicular a AC que passa por E , sendo EG a distância solicitada no problema.

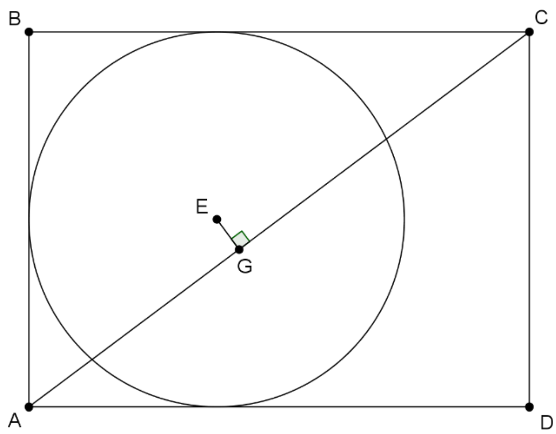


Figura 16.1: Distância de um ponto a uma reta

Solução utilizando recursos da geometria analítica plana:

Colocando os eixos x e y com origem no ponto E obtemos a figura onde M é o ponto de AB e N é o ponto médio de CD e temos os vértices A(-30, 30) e C(50, 30). Portanto precisamos achar a distância do ponto E(0, 0) à reta AC.

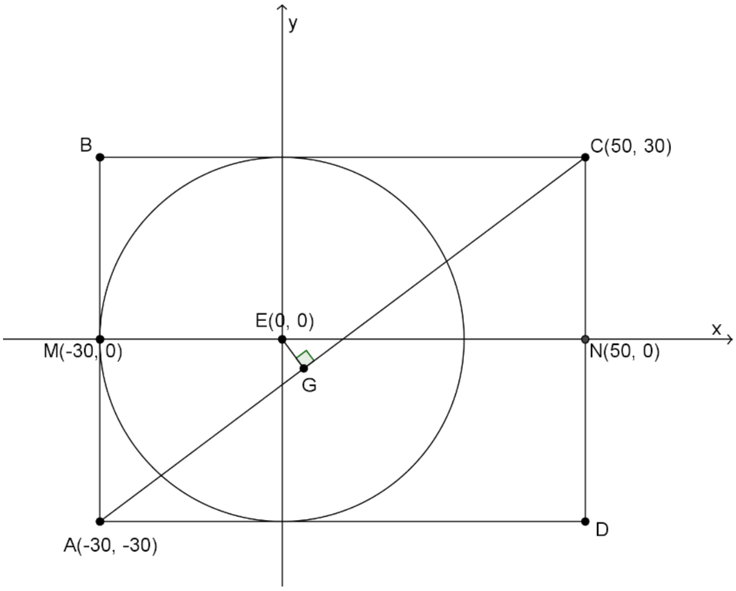


Figura 16.2: Distância de um ponto a uma reta

Como a reta AC tem coeficiente angular m = $\frac{30-(-30)}{50-(-30)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, podemos escrever $\frac{y-30}{x-50} = \frac{3}{4}$ obtendo a equação da reta AC: 3x -4y - 30 = 0.

Sabemos que expressão que fornece a distância (d) de um ponto (x, y) a uma reta é dada por : d = $\frac{|a.x+b.y+c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Sendo E = (0, 0) e a reta AC : 3x -4y - 30 = 0. temos: d = $\frac{|7.0-4.0-30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{30}{\sqrt{25}} = 6$

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana:

Os triângulos AHL e ADC como os triângulos AHL e EGL são semelhantes, caso de semelhança AA (ângulo, ângulo).

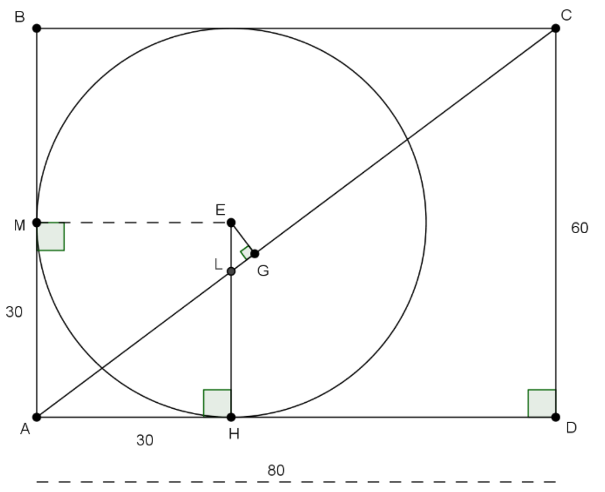


Figura 16.3: Distância de um ponto a uma reta

Então : $\frac{LH}{CD} = \frac{AH}{AD}$, LH = 60. $\frac{30}{80} = \frac{45}{2}$, logo EL = 30 - $\frac{45}{2} = \frac{15}{2}$

Aplicando Pitágoras no triângulo ALH pra obtermos AL.

$$AL = \sqrt{30^2 + (\frac{45}{2})^2} = \sqrt{\frac{5625}{4}} = \frac{75}{2}$$

Pela semelhança dos triângulos AHL e EGL temos:

$\frac{EG}{AH} = \frac{EL}{AL}$, portanto EG = 30. $\frac{\frac{15}{2}}{\frac{75}{2}}$ = 6.

- **Proposta de Exercícios retirados do livro: Geometria Analítica e Álgebra Linear (LIMA, 2005)**

  Exercício 10:

Enunciado:

> Dado um triângulo ABC, provar que suas três alturas se encontram no mesmo ponto.

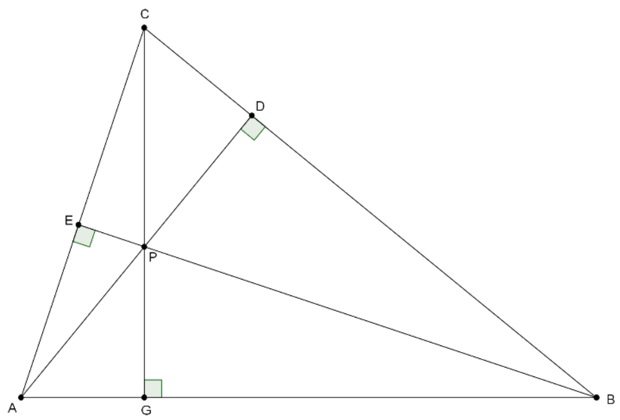


Figura 17.1: Ortocentro de um triângulo

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: Podemos escolher o sistema de eixos coordenados onde o eixo OX contém o lado AB e o eixo OY contém a altura baixada do vértice C sobre o lado AB.

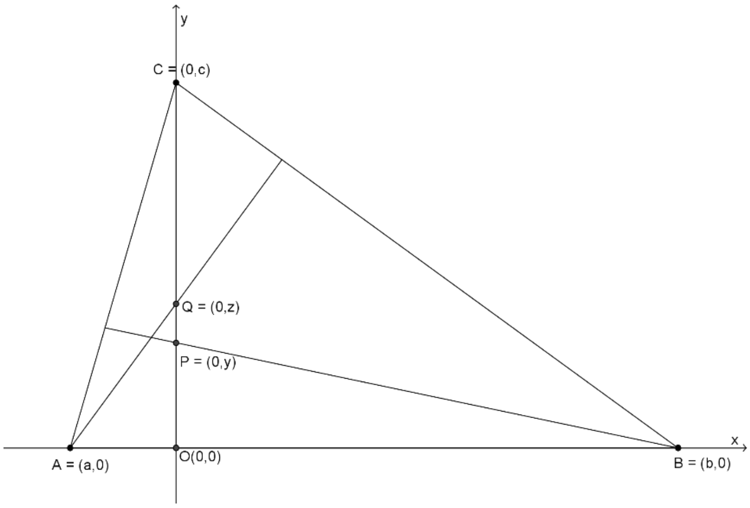


Figura 17.2: Ortocentro de um triângulo

Com esse sistema de eixos coordenados obtemos os pontos: A = (a, 0) , B = (b, 0) e C = (0, c), onde $c \neq 0$. A altura baixada do vértice B encontra a altura OC no ponto P = (0, y). Os segmentos BP e AC são perpendiculares. Utilizando-se a condição de perpendicularismo de dois segmentos obtemos :
(0 – b).(0 – a) + (y-0).(c – 0) = 0 , ou seja, ab+ cy = 0.
Por sua vez, a altura baixada do vértice A encontra a altura OC no ponto
Q = (0,z). Novamente, os segmentos AQ e BC são perpendiculares e utilizando a mesma relação obtemos (0 – a).(0 – b) + (z – 0).(c – 0) = 0, ou seja, ab + cz = 0. Vemos então que z = y = $-\frac{ab}{c}$, portanto P = Q = (0, $-\frac{ab}{c}$) é o ponto de encontro das três alturas do triângulo ABC. (LIMA, 2005, p.33 e 34)

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana: Traçando por cada vértice A, B e C uma paralela ao lado oposto do triângulo ABC obtemos um novo triângulo DEF e diversos paralelogramos.

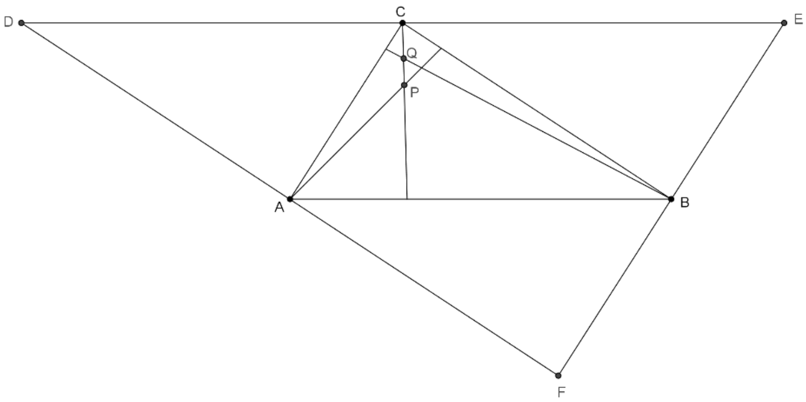


Figura 17.3: Ortocentro de um triângulo

No paralelogramo ABCD temos AB = DC e no paralelogramo ABEC temos AB = CE, assim temos DC = CE, logo a altura traçada do vértice C é mediatriz do segmento DE, lado do triângulo DEF, analogamente as outras duas alturas são mediatrizes dos outros dois lados do triângulo DEF.

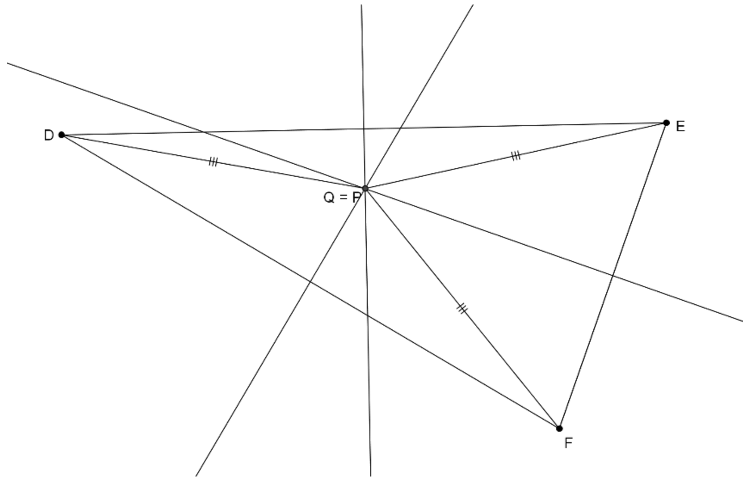


Figura 17.4: Ortocentro de um triângulo

Como os pontos das mediatrizes de um segmento são equidistantes dos extremos do segmento, tomando as mediatrizes duas a duas do triângulo DEF verificamos que os ponto Q e P são os mesmos. Portanto as três alturas de um triângulo se encontram num mesmo ponto.

Exercício 11:

Enunciado:

"Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica das projeções(ortogonais) dos catetos sobre essa hipotenusa." Prove este fato escolhendo um sistema de coordenadas onde a hipotenusa está sobre o eixo OX e o vértice do ângulo reto sobre o eixo OY.
Provar : h = $\sqrt{m.n}$ (LIMA, 2005, p.36)

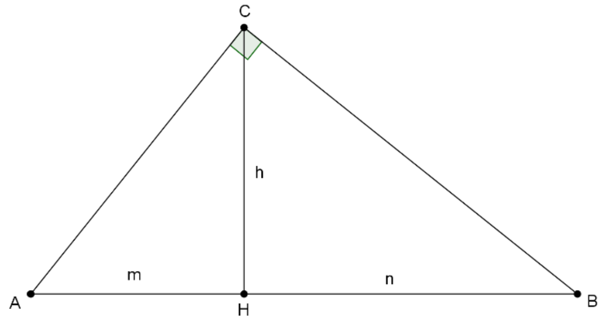


Figura 18.1: Altura relativa à hipotenusa

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: Podemos escolher o sistema de eixos coordenados onde o eixo OX contém o lado AB e o eixo OY contém a altura baixada do vértice C sobre o lado AB.

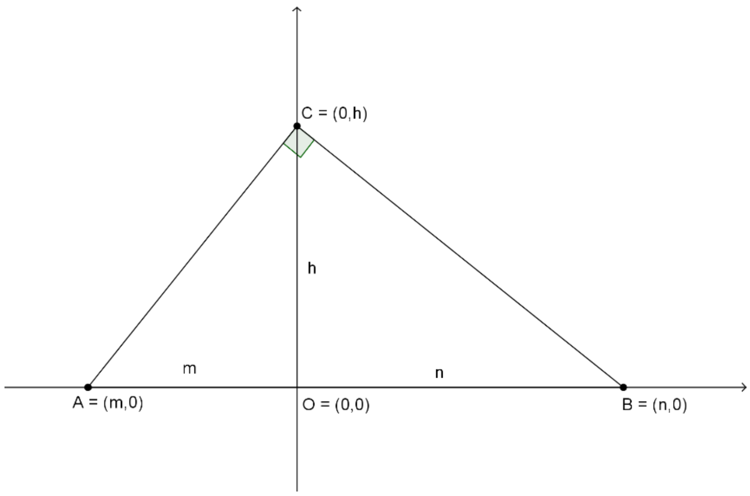


Figura 18.2: Altura relativa à hipotenusa

Com esse sistema de eixos coordenados obtemos os pontos:
A = (m, 0) , B = (n, 0) e C = (0, h). Os segmentos AC e CB são perpendiculares. Utilizando-se a condição de perpendicularismo de dois segmentos obtemos:
(0 – m).(n – 0) + (h-0).(0 – h) = 0 , ou seja, - mn - h^2 = 0.

Portanto h^2 = - mn , onde, de acordo com a figura: m é um número negativo e n um número positivo.

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana: Podemos aplicar o teorema de Pitágoras nos triângulos AHC, BHC e ACB.

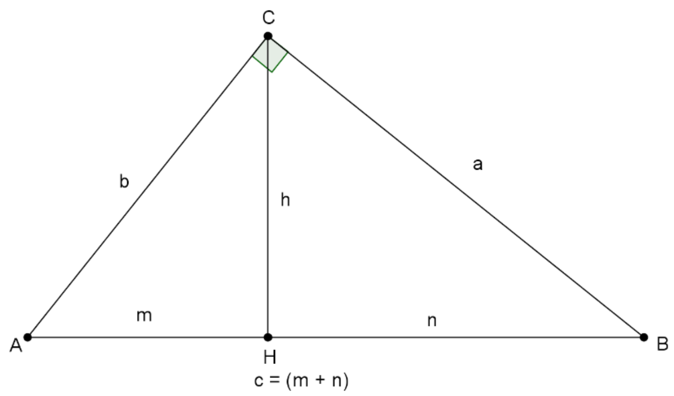


Figura 18.3: Altura relativa à hipotenusa

Temos : $b^2 = h^2 + m^2$, $a^2 = h^2 + n^2$ e $c^2 = (m+n)^2 = a^2 + b^2$.
Então, $(m+n)^2 = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$
Assim, $m^2 + n^2 + 2.m.n = h^2 + n^2 + h^2 + m^2$
Logo, $h^2 = m.n$

Portanto, a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica das projeções dos catetos sobre essa hipotenusa, isto é, h = $\sqrt{m.n}$

- **Exercício Proposto**

Exercício 12:

Enunciado: Dado um quadrado ABCD de lado 4, sabendo que M é o ponto médio do lado AB e N é o ponto médio do lado AD, achar a distância do vértice A ao ponto de interseção de DM com BN.

Solução utilizando recursos da Geometria Analítica Plana: Podemos escolher o sistema de eixos coordenados onde o eixo OX contém o lado AB e o eixo OY contém o lado AD.

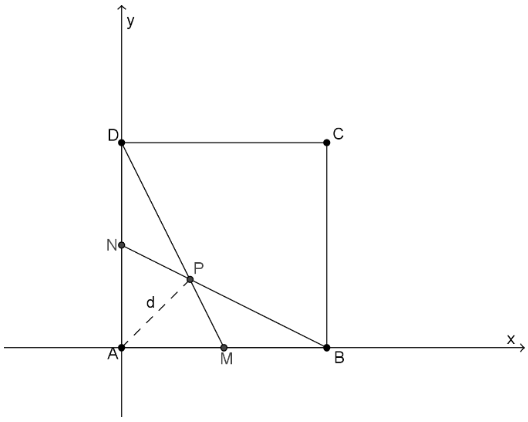


Figura 19.1: Distância do vértice A ao ponto P

Com esse sistema de eixo coordenados obtemos os pontos:

A = (0,0), B = (4,0), C = (4,4), D = (0,4), M = (2, 0) e N = (0, 2).

Podemos obter escrever a equação da reta DM como y = -2x + 4 e BN como y = - $\frac{x}{2}$ + 2 , assim o ponto P é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = -\frac{x}{2} + 2 \end{cases} \quad P = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Logo a distância AP (d) pode ser obtida por $(AP)^2 = (\frac{4}{3} - 0)^2 + (\frac{4}{3} - 0)^2$, portanto a distância AP = $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Solução utilizando recursos da Geometria Sintética Plana:

Como os triângulos retângulos NAB e MAD são congruentes, caso LAL (lado, ângulo, lado), então as alturas PH e PK são iguais. Os triângulos BAN e BHP são semelhantes assim, $\frac{h}{4-h} = \frac{2}{4}$, e obtemos h = $\frac{4}{3}$ e aplicando Pitágoras no triângulo AHP temos,

$$(AP)^2 = \frac{4^2}{3} + \frac{4^2}{3}.$$

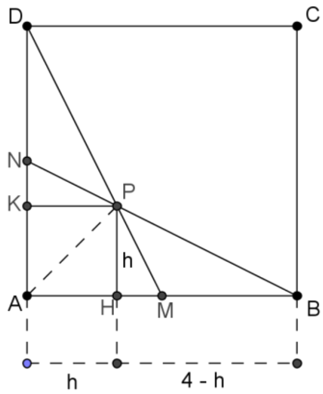


Figura 19.2: Distância do vértice A ao ponto P

Portanto a distância AP = $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Os doze problemas geométricos apresentados foram resolvidos usando não só a geometria sintética plana mas também a geometria analítica através da introdução no plano de um sistema de coordenadas que se acha mais conveniente para a resolução de cada exercício. Assim, na verdade as coordenadas são colocadas nos problemas, pois os enunciados dos problemas não são formulados com a presença de um sistema de coordenadas. Apesar dos problemas não fazerem uma menção a um sistema de coordenadas, há um convite no próprio enunciado para o uso deste sistema.

Segundo Nery (2008):

> A Geometria Analítica Plana (GA), aquela que se estuda no plano cartesiano, costuma aparecer na 3ª série, e as vezes na 2ª série, do ensino médio, depois de o aluno ter tido bastante contato com a tradicional Geometria Plana (sintética) (GP). Essa “mudança de geometria” costuma ser um balde de água fria na vida dos dois personagens envolvidos: do aluno e do professor.
>
> Geralmente, com o decorrer das aulas, dependendo de como a GA é lecionada, o aluno acaba vendo um apanhado de fórmulas a serem decoradas: fórmulas de ponto médio, baricentro e distância entre dois pontos; as várias equações da reta (geral, reduzida, segmentária, etc.), as condições de paralelismo, perpendicularismo, distância entre ponto e reta (cuja fórmula raramente o professor deduz); as duas equações da circunferência reduzida e geral) e as condições de tangenciamento. (NERY, 2008, p.19)

Nery reflete sobre as condições do ensino da geometria plana que em sua maioria apresenta fórmulas seguidas de exercícios com meras aplicações diretas, por isso a importância de se revisitar a geometria clássica introduzindo os sistemas de eixos coordenados, como uma ferramenta, para resolver problemas envolvendo geometria em geral.

4 O USO DO *SOFTWARE GEOGEBRA*

Este capítulo aborda as contribuições das tecnologias da informação e comunicação – TICs na prática educativa, apresentando as características do *software GeoGebra* e sua exploração que permite a realização de investigações sobre propriedades geométricas que dificilmente se consegue observar sem o uso de uma ferramenta tecnológica.

4.1 O Uso das TICs no Ensino da Matemática

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB nº 9394/96 em sua proposta estabelece as diretrizes gerais para a organização curricular nas unidades escolares, através das Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN’S) de caráter obrigatório e propõe os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental e médio de caráter orientador voltado para as propostas curriculares.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, de 1998, voltados para a prática educativa, do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental voltados para o ensino da Matemática enfatizam entre outros aspectos a importância da interação entre professor-aluno e entre alunos para o desenvolvimento das capacidades cognitivas, afetivas e de inserção social num ambiente escolar que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.44) fazem uma previsão da utilização em maior escala dos computadores nas escolas e destaca várias finalidades desta tecnologia nas aulas de Matemática, como: fonte de informação; auxiliar no processo de construção do conhecimento; meio para desenvolver a autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções; ferramenta para realizar determinadas atividades; possibilidade de desenvolver atividades que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permita que o aluno aprenda com seus erros.

Estes referenciais nacionais enfatizam que o bom uso do computador na sala de aula, também, depende da escolha de softwares educacionais que atendam a concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo de ensino-aprendizagem. Para Valente:

> O computador pode ser um importante recurso para promover a passagem da informação para o usuário ou promover a aprendizagem. No entanto, da análise dos software é possível entender que o aprender não deve estar restrito ao software, mas à interação do professor - aluno - software. Alguns software apresentam características que favorecem a atuação do professor, como no caso da programação; outros, em que certas características não estão presentes e requerem um maior envolvimento do professor para auxiliar o aluno a aprender, como no caso do tutorial. Assim, a análise dos software educacionais em termos do aprender e do papel que o professor deve desempenhar para que o aprendizado ocorra, permite classificá-los em posições intermediárias entre os tutoriais e a programação. No entanto, cada um dos diferentes *software* usados na educação como os tutoriais, a programação, o processador de texto, os *software* multimídia (mesmo a Internet), os *software* para construção de multimídia, as simulações e modelagens e os jogos, apresentam características que podem favorecer, de maneira mais explícita, o processo de construção do conhecimento. É isso que deve ser analisado quando escolhemos um software para ser usado em situações educacionais. (VALENTE, 2009, p.89)

No ensino da matemática, quando se utiliza os recursos de um *software* disponível nos computadores de uma escola pública de educação básica para demonstrar uma propriedade ou um teorema, provoca-se ainda muitas controvérsias entre os matemáticos, pois toda demonstração necessita de rigor e formalidade e, com o uso de um *software* pode-se estar sujeito aos erros de um programa de computador ou falhas da própria máquina.

Por exemplo: quando se usa o *software Geogebra* para mostrar a existência do ortocentro, ponto notável de um triângulo, onde se intersectam as três alturas relativas, isto é, as perpendiculares traçadas dos vértices até os lados opostos (ou seus prolongamentos), pode ocorrer a dúvida que uma das alturas passe bem próximo da interseção das outras duas e que não seja possível visualizar no *software*. No entanto, essa incerteza, pode contribuir para que o professor aproveite o interesse por parte dos alunos para desenvolver uma demonstração mais rigorosa em sala de aula.

Por outro lado, durante uma atividade como essa em uma sala de informática com a visualização dos objetos geométricos e o uso dos diversos recursos existentes nesse software, possibilita-se que o professor explore outros temas, como ângulos, perpendicularidade, criando novos caminhos e colaborando no processo de investigação de um problema geométrico e a observação das regularidades apresentadas.

A potencialidade de um software como o *Geogebra* pode fazer com que a aprendizagem da matemática alcance um resultado mais eficaz, sendo mais uma ferramenta importante na superação de obstáculos e no despertar do interesse dos alunos no processo da demonstração em matemática.

As considerações apresentadas no início deste capítulo contribuem no olhar crítico e investigador do professor para o conhecimento técnico e pedagógico do *software GeoGebra.* Na seção seguinte serão apresentadas as características desta ferramenta.

4.2 Apresentação do *software GeoGebra*

O GeoGebra é um *software* livre e gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, criado por Markus Hohenwarter, disponível, em português, na Internet para vários sistemas operacionais inclusive para Linux que existe nas escolas públicas do Rio de Janeiro e pode ser localizado no endereço eletrônico http://www.geogebra.at/.

Todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica como pontos, segmentos, retas e seções cônicas estão presentes no GeoGebra. Um dos seus diferenciais está na visualização de duas janelas, uma algébrica e a outra geométrica possibilitando ao aluno visualizar duas representações diferentes de um mesmo objeto, sua representação geométrica e sua representação algébrica que interagem entre si (Figura 20.1). Por exemplo:

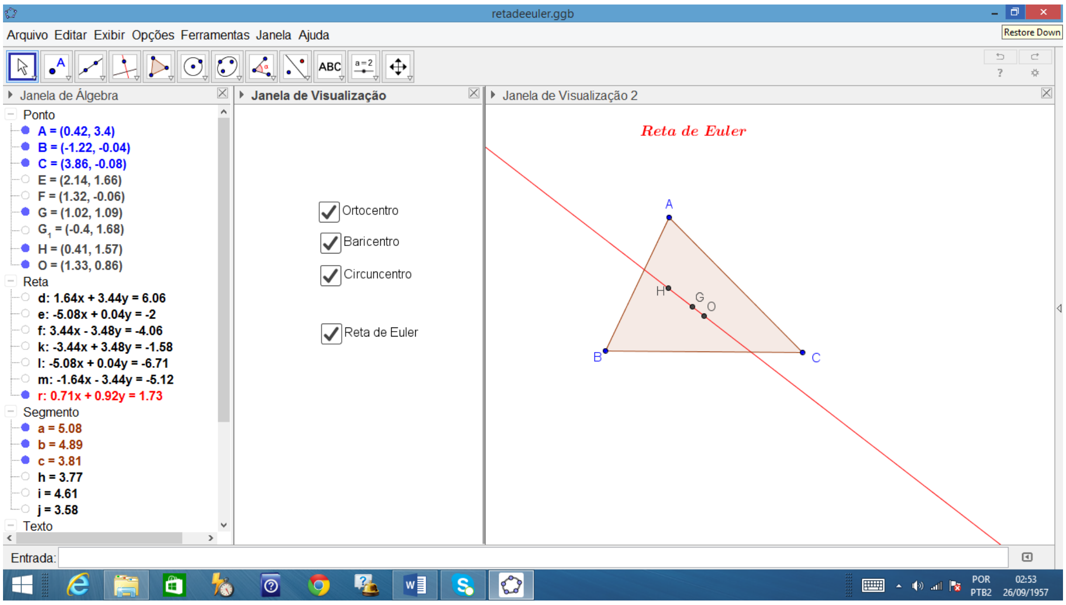
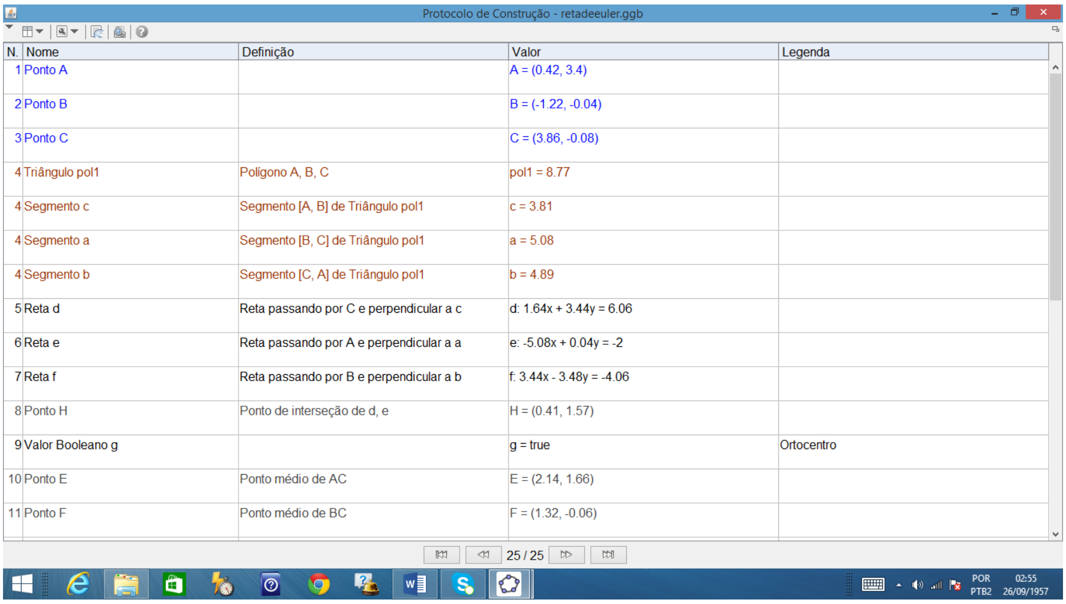


Figura 20: *Geogebra* - Reta de Euler

Um outro diferencial presente no *software GeoGebra* é o protocolo de construção onde em uma tabela são apresentadas todas as etapas da construção geométrica realizada pelo aluno, possibilitando aos alunos comparar as construções realizadas por outros colegas de classe que chegaram a mesma solução do problema. A Figura 20.2 mostra um exemplo desta tabela.


Protocolo de Construção - retadeeuler.ggb

N.	Nome	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto A		A = (0.42, 3.4)	
2	Ponto B		B = (-1.22, -0.04)	
3	Ponto C		C = (3.86, -0.08)	
4	Triângulo pol1	Polígono A, B, C	pol1 = 8.77	
4	Segmento c	Segmento [A, B] de Triângulo pol1	c = 3.81	
4	Segmento a	Segmento [B, C] de Triângulo pol1	a = 5.08	
4	Segmento b	Segmento [C, A] de Triângulo pol1	b = 4.89	
5	Reta d	Reta passando por C e perpendicular a c	d: 1.64x + 3.44y = 6.06	
6	Reta e	Reta passando por A e perpendicular a a	e: -5.08x + 0.04y = -2	
7	Reta f	Reta passando por B e perpendicular a b	f: 3.44x - 3.48y = -4.06	
8	Ponto H	Ponto de interseção de d, e	H = (0.41, 1.57)	
9	Valor Booleano g		g = true	Ortocentro
10	Ponto E	Ponto médio de AC	E = (2.14, 1.66)	
11	Ponto F	Ponto médio de BC	F = (1.32, -0.06)	

25 / 25

Figura 21: *Geogebra* - Protocolo de Construção

A informação da gratuidade da versão em português disponível na Internet são pontos favoráveis desse *software* para a sua implantação nas escolas públicas, que estão sendo equipadas por computadores, por políticas governamentais de inclusão digital, que ainda não dão conta de criar salas de aula informatizadas.

Essas iniciativas têm possibilitado a construção de laboratórios informatizados que podem e devem ser utilizados pelos professores e alunos. A realidade retratada por Gomes e Costa, infelizmente ainda está presente e precisa ser derrubada para que professores e alunos possam usufruir dos espaços informatizados presentes no ambiente escolar.

> algumas escolas até dispõem de laboratórios informatizados, mas acostumados com o método tradicional de ensino (quadro e giz), ou devido à falta de tempo (carga excessiva de trabalho) para cursos de atualização acabam não usando estas tecnologias a seu favor. (GOMES e COSTA, 2006, p.37)

Outra questão importante de ressaltar é que:

> Ninguém pode, em sã consciência, negar a enorme importância prática das calculadoras e muito menos a posição de computadores na organização da sociedade moderna. O papel desses artefatos no ensino, mais especialmente no ensino da Matemática, tem sido objeto de estudos, debates e controvérsias. Eles são uma tentação muito grande para os políticos e para os educadores adeptos de soluções milagrosas. E, naturalmente, a difusão dessas máquinas por todas as escolas dos países latino-americanos e africanos trará grande satisfação e fantásticos lucros à indústria de computadores. Enquanto isso, os professores nesses países têm salários miseráveis e as próprias instalações das escolas estão abandonadas. O assunto merece um tratamento mais longo, para o qual não dispomos de tempo aqui. Gostaria de encerrá-lo reafirmando que, para aprender Matemática (ou qualquer outra matéria) não há alternativas mágicas que substituam o trabalho persistente, o esforço, a dedicação e a vontade de progredir. (LIMA, 2002, p.168)

Lima alerta para que não se tenha uma visão ingênua e fantasiosa acerca do uso das tecnologias no ambiente escolar, mas, por ser tão enfático em seu posicionamento acaba negando as contribuições do uso do computador no ensino da Matemática, que já podem ser adotadas em várias escolas públicas.

A visualização de duas janelas (uma algébrica e a outra geométrica) no software *GeoGebra* favorecem a aprendizagem de dois tipos de objetos presentes na matemática, os números e o espaço (figuras geométricas), possibilitando ao aluno perceber a correspondência de qualquer expressão introduzida na janela algébrica com a figura presente na janela geométrica ou vice-versa, contribuindo para que o aluno tenha uma visão mais ampla da matemática.

O conhecimento técnico e pedagógico desse *software* apresenta a princípio condições favoráveis que contribuem no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Porém, se faz necessário fundamentar estes conhecimentos com a sua aplicação em sala de aula.

4.3 O Uso do *software GeoGebra* para Solução de Problemas de Geometria Analítica Plana

Inicialmente se utilizou a construção de dois pré-requisitos: ponto médio de um segmento e rotação de um segmento de um ângulo de 90 graus[13]**,** de três problemas de geometria solucionados pela geometria plana e analítica apresentados no capítulo 3, um deles tem o objetivo de provar que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio[14], outro que visa mostrar que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual a metade do comprimento do terceiro lado[15] e o último buscou provar que as três alturas de um triângulo se encontram no mesmo ponto.[16] E a resolução de três problemas clássicos do desenho geométrico baseados na obra de Apolônio[17] onde se buscou: - traçar uma circunferência passando por dois pontos dados e tangente a uma reta dada; - traçar uma circunferência tangente a duas retas dadas e passando por um ponto dado; - traçar uma circunferência passando por dois pontos dados e tangente a uma circunferência dada. Vale ressaltar que nestes três

---

[13] Retirados do livro LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[14] Retirado do livro IEZZI, G. DOLCE, O. DEGENSZAJN, D. PÉRIGO, R. ALMEIDA, N. de. **Matemática Ciência e Aplicações,** 3ª série : ensino médio. 2 ed. São Paulo: Atual, 2004.

[15] Retirado do livro DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**, volume único: livro do professor. 1.ed. São Paulo: Ática.2005.

[16] Retirado do livro LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[17] Retirado de BONGIOVANNI, Vincenzo. **As cônicas como ferramentas para resolver problemas geométricos.** Artigo da Revista do Professor de Matemática nº 60, 2º quadrimestre de 2006. Sociedade Brasileira de Matemática com o apoio da USP – Universidade de São Paulo.

últimos problemas geométricos baseados na obra de Apolônio foram, também, demonstrados utilizando as técnicas do desenho geométrico.

4.3.1. Construção dos dois pré-requisitos

- Ponto Médio de um Segmento

Dados os pontos A e B, podemos obter as coordenadas do ponto médio M do segmento de reta AB no Software *Geogebra*, usando a ferramenta, *Ponto Médio* e observarmos os valores de x e y quando arrastamos os pontos A e B.

Podem ser observados, as coordenadas do ponto M quando movimentamos os pontos A e B sobre um dos eixos coordenados.

O passo a passo da construção é mostrado no *Geogebra* no protocolo de construção.

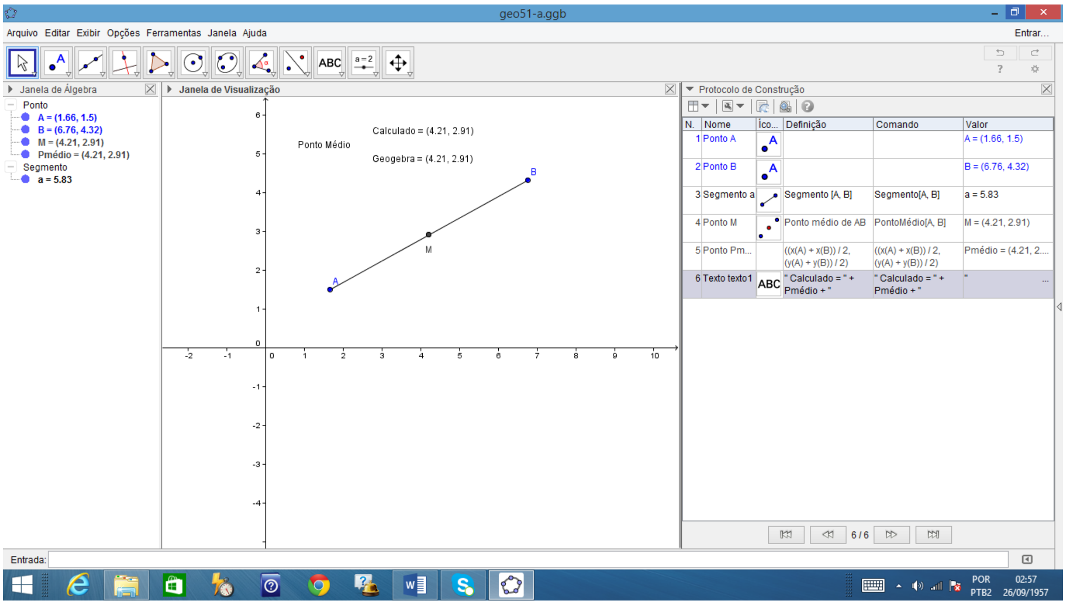


Figura 22: *Geogebra* - Ponto médio de um segmento

- Rotação de um Segmento de um Ângulo de 90º

Dados os pontos A = (0,0) e B = (x, y), submetemos o segmento de reta AB a uma rotação de 90^0 no sentido positivo ou negativo em torno do ponto A = (0, 0), obtendo respectivamente os pontos B_1 = (-y, x) e B_2 = (y, -x).

No Software *Geogebra* podemos usar as ferramentas *Segmento e Rotação em Torno de um Ponto* para construir os segmentos com rotação de 90^0 nos sentidos positivo e negativo em torno do ponto A = (0, 0), obtendo assim, os segmentos AB_1 e AB_2 desejados e suas respectivas coordenadas.

O passo a passo da construção é mostrado no *Geogebra* no protocolo de construção.

Poderá ser observado os pontos B_1 e B_2 quando o ponto B é arrastado para o eixo das ordenadas.

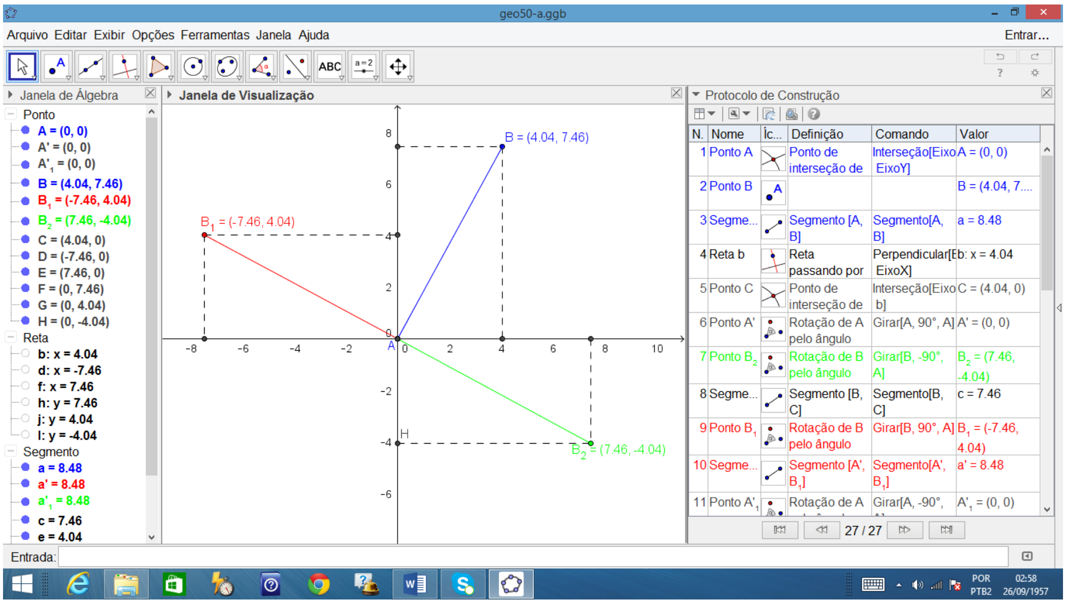


Figura 23.1: *Geogebra* - Rotação de um Segmento de um Ângulo de 90º

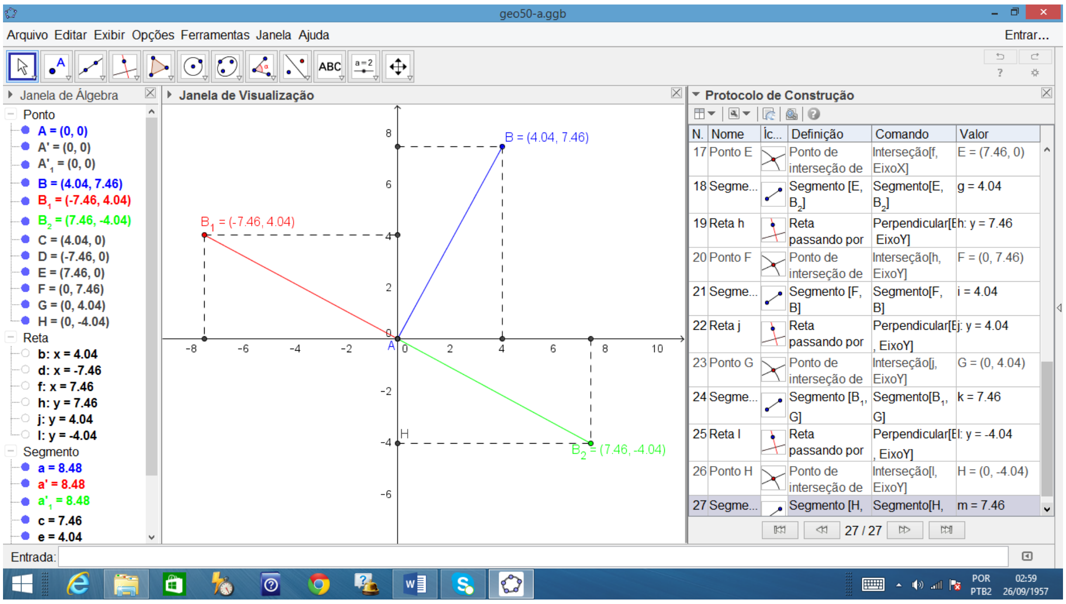


Figura 23.2: *Geogebra* - Rotação de um Segmento de um Ângulo de 90º

4.3.2. Três problemas de geometria solucionados pela geometria plana e analítica

- Provar que as diagonais de um paralelogramo se cortam mutuamente ao meio

Enunciado: "Prove, analiticamente, que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio." (IEZZI et al, 2004, exercício 51, p.90)

Dado o paralelogramo ABCD, podemos obter as coordenadas do ponto M, interseção das diagonais BD e AC, utilizando a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* no Software Geogebra.

Podem ser observados, as coordenadas do ponto M quando movimentamos os pontos A, B e C (livres).

O passo a passo da construção é mostrado no Geogebra no protocolo de construção.

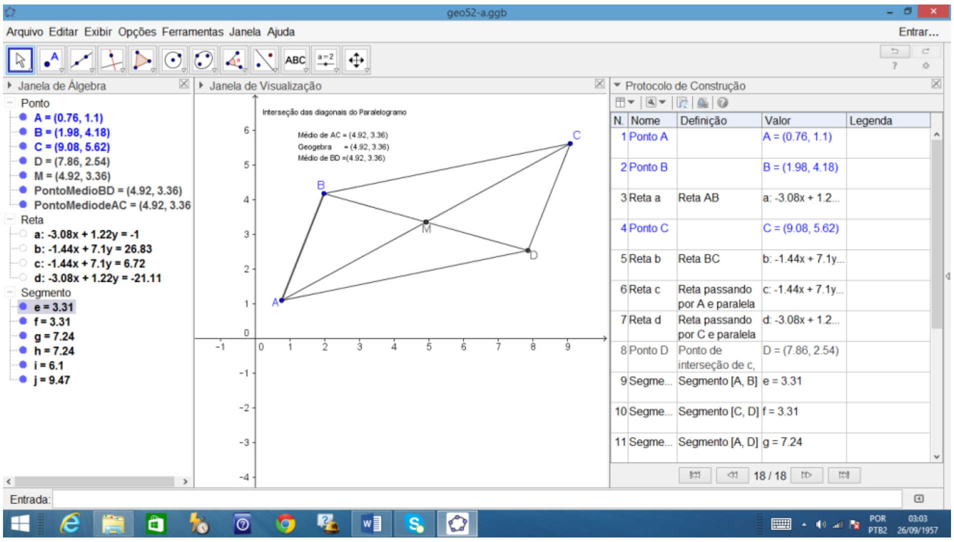


Figura 24.1: *Geogebra* – Ponto de Intersecção das diagonais de um paralelogramo

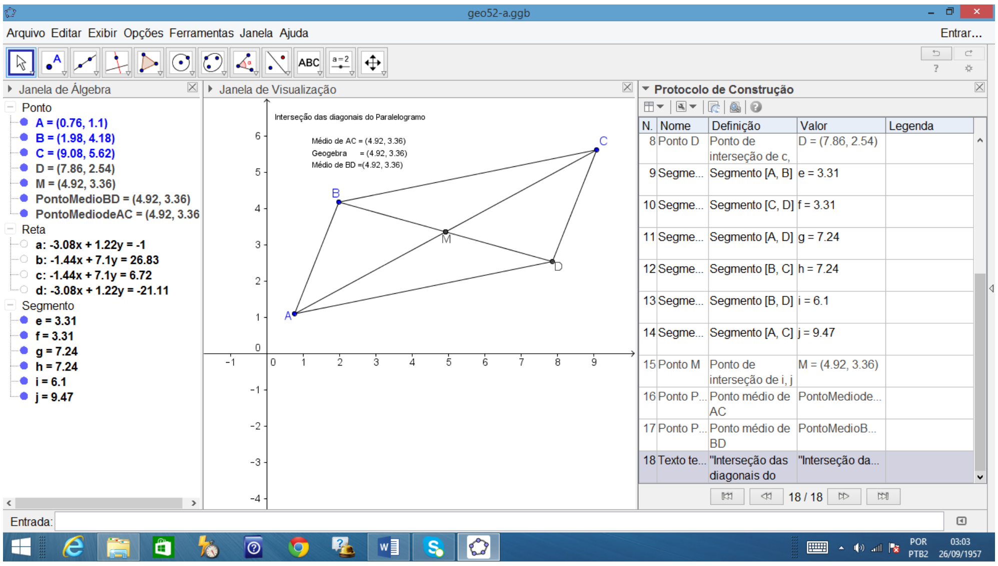


Figura 24.2: *Geogebra* – Ponto de Intersecção das diagonais de um paralelogramo

- Mostrar que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem comprimento igual à metade do comprimento do terceiro lado.

Enunciado: "Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo:

a) é paralelo ao terceiro lado;

b) tem comprimento igual à metade do comprimento do terceiro lado.." (DANTE, 2005, p.412)

Dados o triângulo ABC e o segmento MN que une os pontos médios de AC e BC, respectivamente, podemos mostrar no Geogebra os comprimentos de MN e AC, como também o ângulo formado por eles, utilizando as ferramentas *Segmento e Ângulo*, respectivamente.

Podem ser observados, o comprimento e o ângulo quando movimentamos os vértices A, B e C (livres).

O passo a passo da construção é mostrado no Geogebra no protocolo de construção.

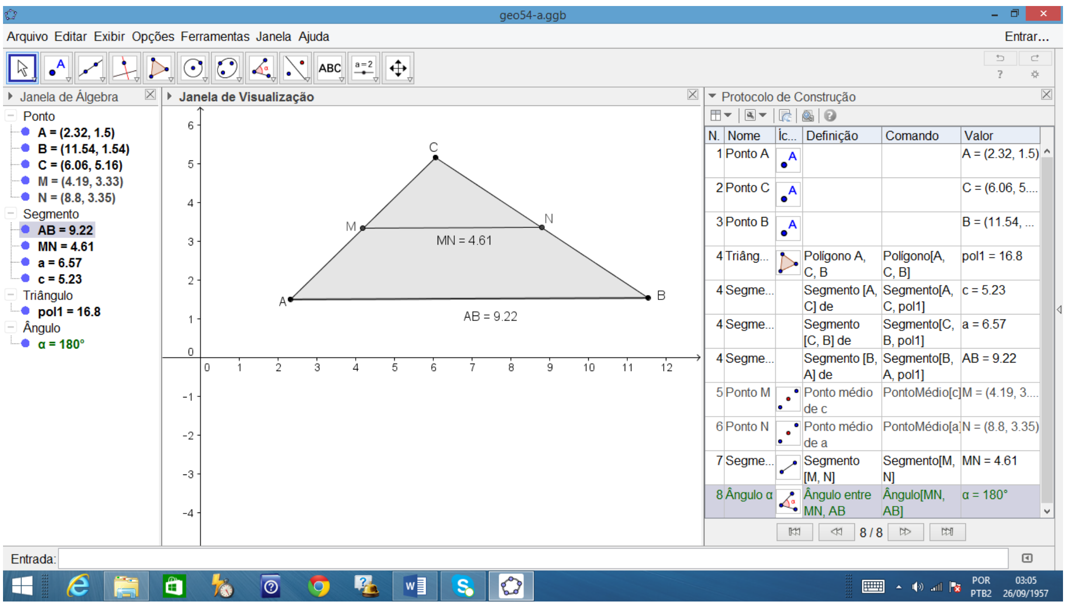


Figura 25: *Geogebra* – Base média de um triângulo

- Provar que as três alturas de um triângulo se encontram no mesmo ponto.

Enunciado: Dado um triângulo ABC, provar que suas três alturas se encontram no mesmo ponto. (LIMA,2005).

Dado o triângulo ABC, podemos mostrar no Geogebra o ponto O, interseção das três alturas, utilizando as ferramentas *Reta Perpendicular* e *Interseção de Dois Objetos*.

Pode ser observada a posição assumida pelo ponto O quando movimentamos os vértices A, B e C, formando triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos.

O passo a passo da construção é mostrado no Geogebra no protocolo de construção.

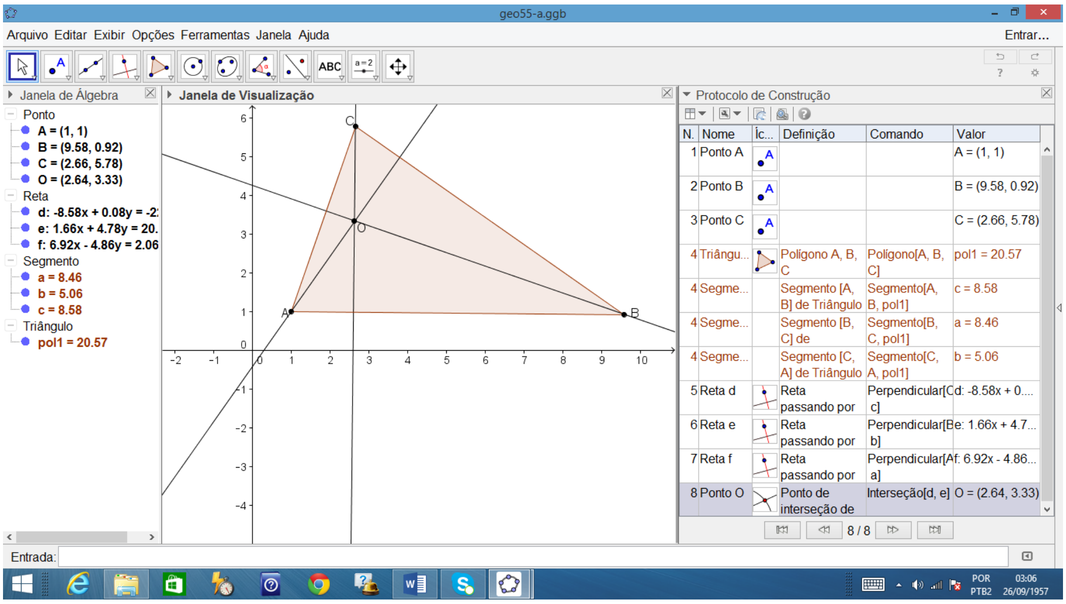


Figura 26: *Geogebra* – Ortocentro de um triângulo

4.3.3. Resolução de três problemas clássicos do desenho geométrico baseados na obra de Apolônio.

Traçar uma circunferência passando por dois pontos dados e tangente a uma reta dada;

- Demonstrados utilizando as técnicas do desenho geométrico

Enunciado: Construir uma circunferência que passe por dois pontos dados e tangente a uma reta dada (PPR).

Caso os pontos estejam em semiplanos distintos da reta não existe solução, se ambos os pontos estiverem no mesmo semiplano, teremos dois casos.

Caso 1: Se os pontos estiverem em uma reta paralela à reta dada.

Construção: São dados os pontos A e B e a reta r.

1. Construa a mediatriz m do segmento $\overline{AB}$.
2. Na interseção de m com a reta r obtemos o ponto T que pertence a circunferência.
3. Construa a mediatriz n do segmento $\overline{AT}$, a interseção de m e n é o ponto O centro da circunferência procurada.

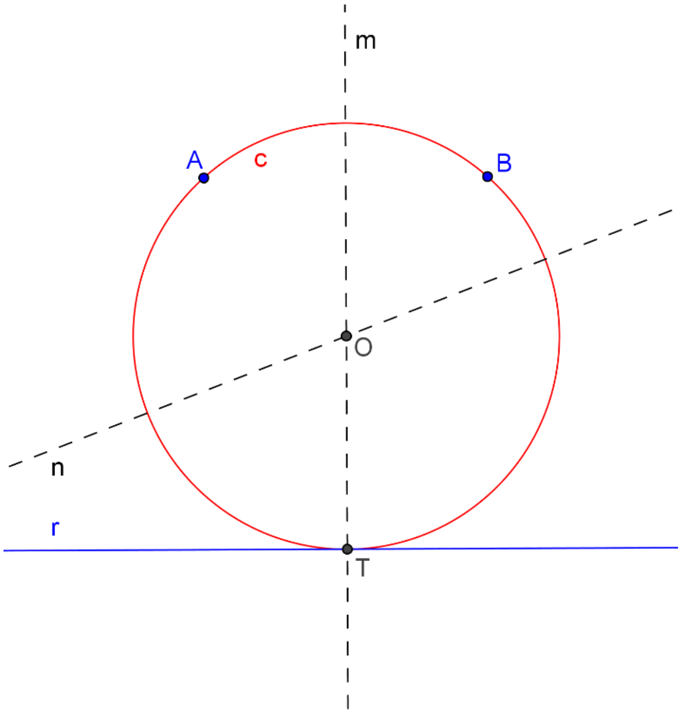


Figura 27: Apolônio PPR - caso 1

Caso 2: Se os pontos não pertencem a uma reta paralela à reta dada.

Construção: São dados os pontos A e B e a reta r.

1. Construa a reta que passa por A e B marque o ponto R interseção com a reta r.
2. Ache o ponto M médio de do segmento $\overline{RB}$ e construa o círculo a_1 de centro em M e raio $\overline{RM}$.
3. Construa a perpendicular h passando por A e marque a interseção E com a circunferência a_1.
4. Construa a circunferência de centro em R e raio $\overline{RE}$ achando os pontos T_1 e T_2 que são pontos das circunferências procuradas.

5. Construa as perpendiculares por T_1 e T_2 achando os pontos O_1 e O_2 interseção com a mediatriz m , esses pontos são os centros das circunferências procuradas.

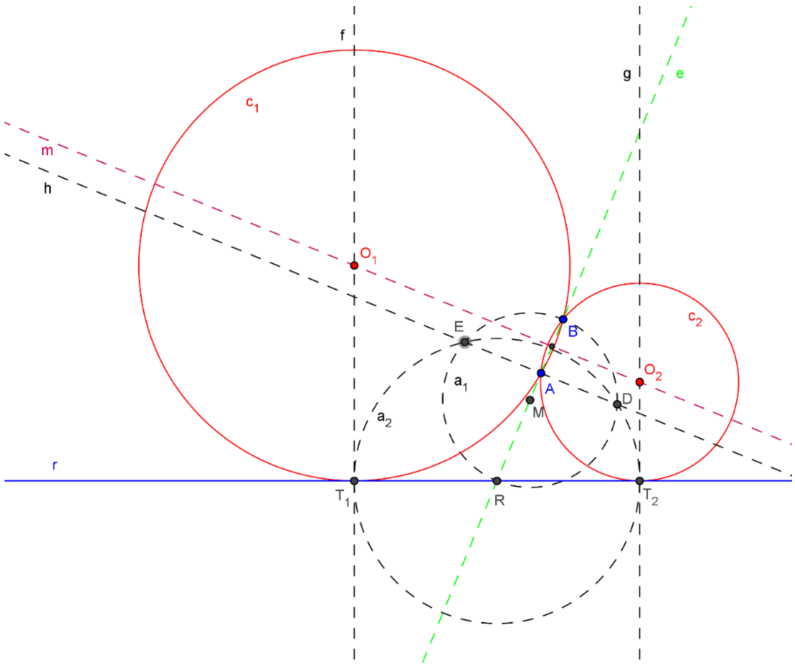


Figura 28: Apolônio PPR - caso 2

- Demonstração utilizando o *Geogebra*

Enunciado: Construir uma circunferência que passe por dois pontos dados e tangente a uma reta dada (PPR).

Dados os pontos A e B e a reta r, sendo c uma circunferência procurada de centro O_1 e ponto de tangência T_1 temos:

distância(O_1, A) = distância(O_1, r) e

distância(O_1, B) = distância(O_1, r) ,

Logo os centros das circunferências que passam por A e B e são tangentes à reta r são as intersecções da parábola de focos A e diretriz r com a parábola de focos B e diretriz r.

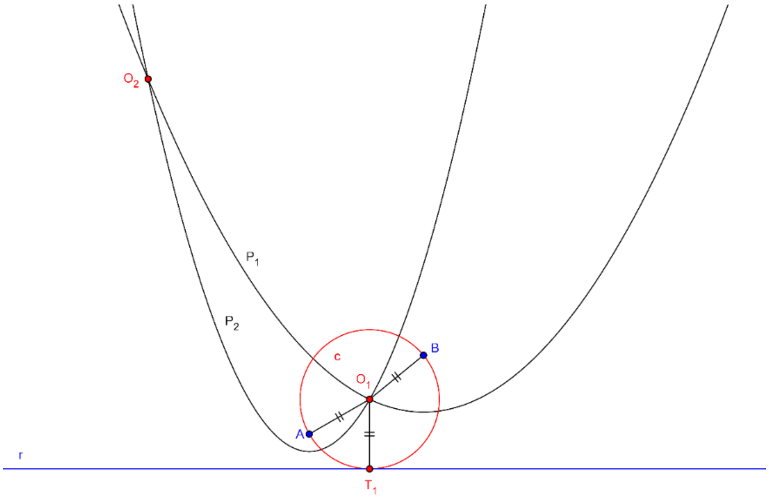


Figura 29.1: *Geogebra* Apolônio PPR

Assim no *Geogebra* podemos usar a ferramenta *Parábola* para plotar as duas curvas e obter o centro das circunferências que são solução do problema.

O passo a passo da construção é mostrado no *Geogebra* no protocolo de construção.

Os pontos A e B quando movimentados farão com que as circunferências que são soluções sejam mostradas dinamicamente. Deverá ser observado quando os pontos A e B estiverem em uma reta paralela à diretriz r e também quando estiverem em semiplanos diferentes em relação à reta r.

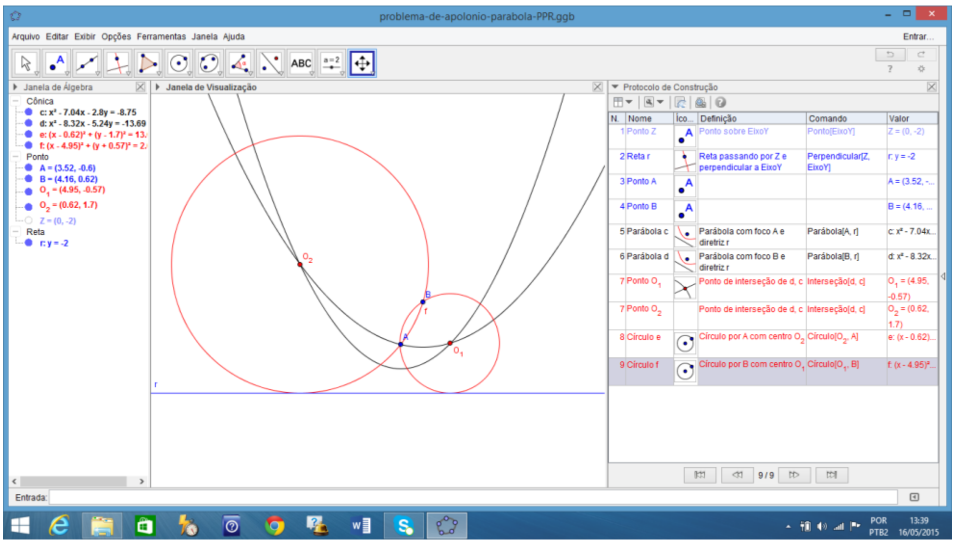


Figura 29.2: *Geogebra* Apolônio PPR

Traçar uma circunferência tangente a duas retas dadas e passando por um ponto dado.

- Demonstração utilizando as técnicas do desenho geométrico

Enunciado: Construir uma circunferência que passe por um ponto dado e tangente a duas retas dadas (PRR).

Caso 1 : Se as retas são concorrentes e o ponto não está sobre nenhuma das duas.

Construção: São dados as retas r e s e o ponto P.

1. Construa a bissetriz do ângulo formado pelas duas retas.
2. Encontre o ponto P’ simétrico de P em relação à bissetriz. O ponto P’ pertence à circunferência procurada.
3. Recaindo no problema de Apolônio PPR utilizando os pontos P e P’ e a reta s.

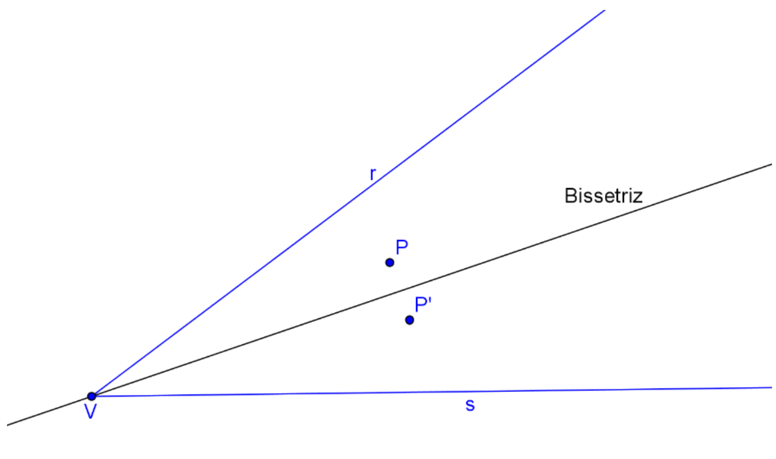


Figura 30: Apolônio PRR – caso 1

Caso 2 : Se as retas são parelalas.

1. Construa a reta m equidistante das retas r e s.
2. Construa a circunferência a_1 de centro no ponto P e raio metade da distância entre as retas r e s.
3. Os pontos de interseção, O_1 e O_2 , de a_1 com a reta m são os centros das circunferências , c_1 e c_2 , procuradas.

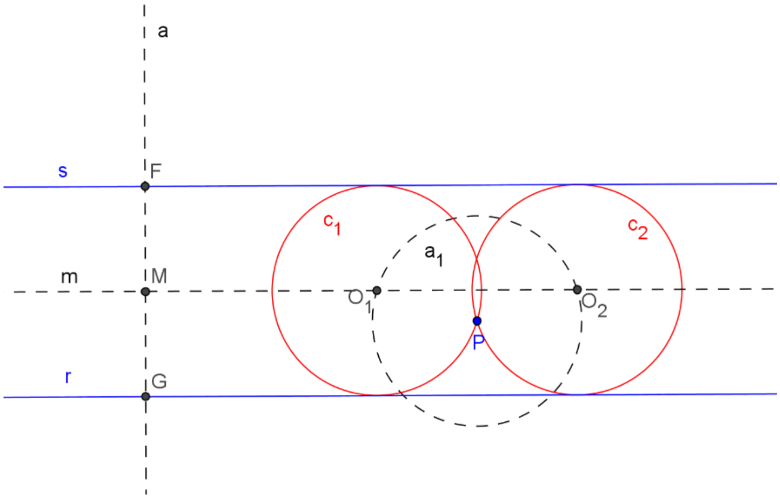


Figura 31: Apolônio PRR – caso 2

Caso 3 : Se as retas não são paralelas e o ponto P pertence a uma reta.

1. Construa as bissetrizes dos ângulos formado pelas retas r e s.
2. Construa a perpendicular a r passando por P.
3. Os pontos de interseção, O_1 e O_2 , são os centros das circunferências , c_1 e c_2 , procuradas.

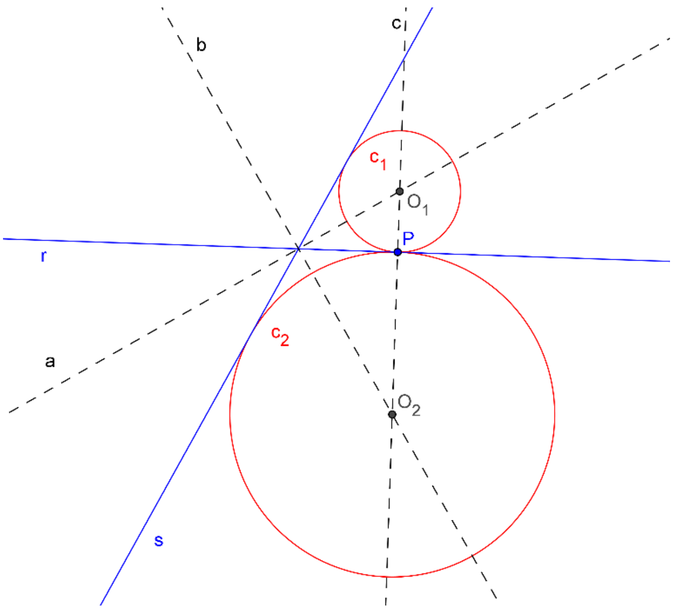


Figura 32: Apolônio PRR – caso 3

- Demonstração utilizando o *Geogebra*

Enunciado: Construir uma circunferência que passe por um ponto dado e seja tangente a duas retas dadas (PRR).

Dado o pontos A e as retas r e s , sendo c_1 uma circunferência procurada de centro O_1 temos:

distância(O_1, A) = distância(O_1, r) e

distância(O_1, A) = distância(O_1, s) ,

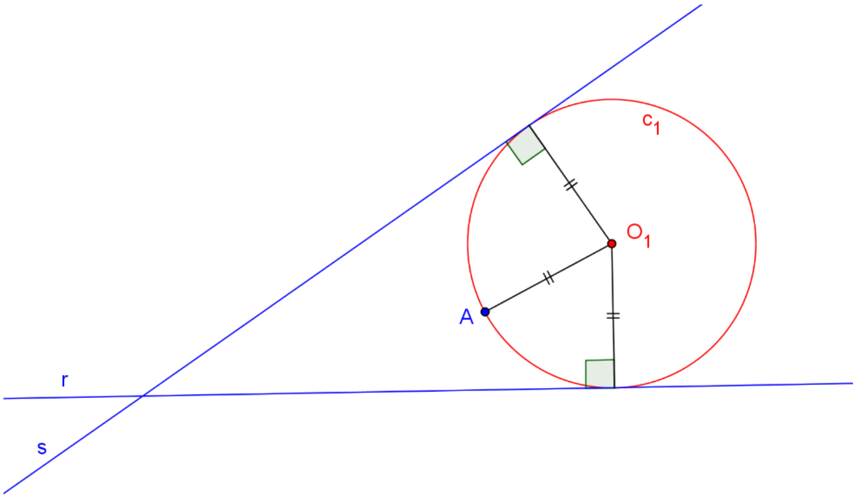


Figura 33.1: *Geogebra* Apolônio PRR

Logo, os centros das circunferências que passam por A e são tangentes às retas r e s são as intersecções da parábola de foco A e diretriz r com a parábola de foco A e diretriz s.

Assim no *Geogebra* podemos usar a ferramenta *Parábola* para plotar as duas curvas e obter o centro das circunferências que são soluções do problema.

O passo a passo da construção é mostrado no *Geogebra* no protocolo de construção.

O ponto A e a reta r quando movimentados farão com que as circunferências que são soluções sejam mostradas dinamicamente.

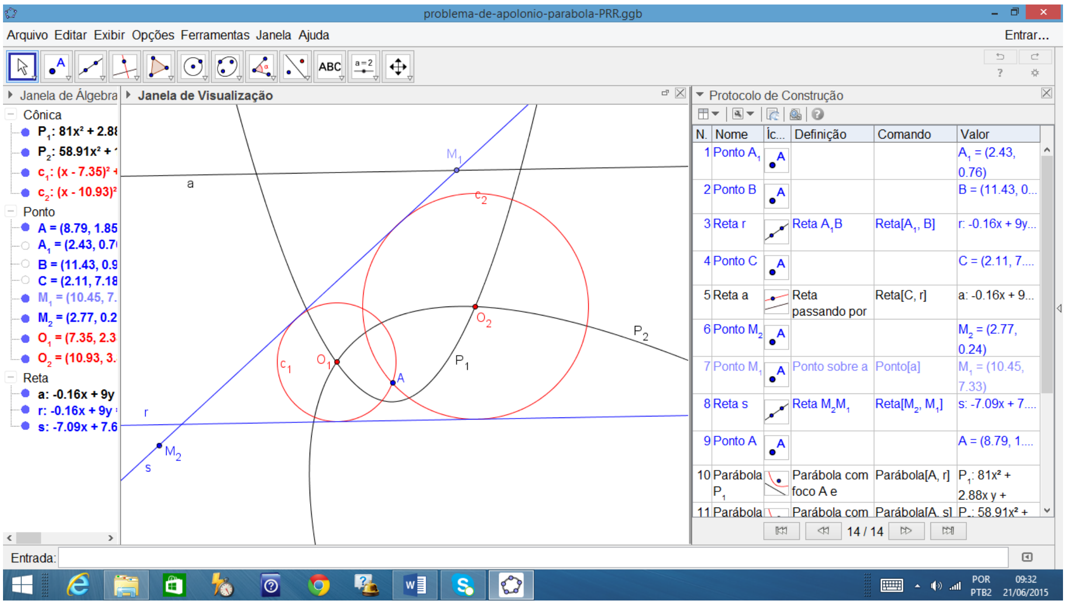


Figura 33.2: *Geogebra* Apolônio PRR

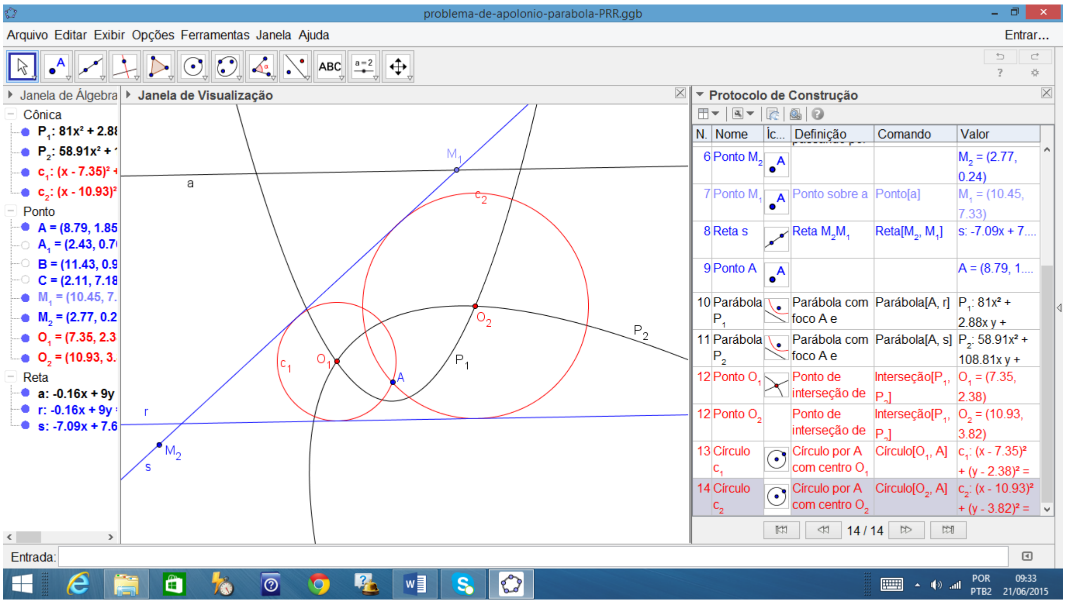


Figura 33.3: *Geogebra* Apolônio PRR

Traçar uma circunferência passando por dois pontos dados e tangente a uma circunferência dada.

- Demonstração utilizando as técnicas do desenho geométrico

Enunciado: Construir uma circunferência que passe por dois pontos dados e seja tangente a uma circunferência dada (PPC).

Caso os pontos estejam em regiões distintas da circunferência não existe solução, se ambos os pontos estiverem no interior ou exterior, temos:

Construção: São dados os pontos A e B e a circunferência c de centro O.

Construa a mediatriz a do segmento $\overline{AB}$.

1. Escolha um ponto Z sobre a mediatriz de $\overline{AB}$ construindo a circunferência d de centro em Z passando por A e B e secante à circunferência c de centro O.
2. Construa a reta b que passa pelos pontos de interseção E e F das circunferências c e d.
3. Marque o ponto G interseção da reta b com a reta e que passa por A e B.
4. Determine o ponto M médio do segmento $\overline{OG}$ e construa a circunferência de centro em M e raio $\overline{MG}$, obtendo os pontos T_1 e T_2 pontos de tangência das circunferências procuradas.
5. Na interseção i da mediatriz do segmento $\overline{AT_1}$ com a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ e h mediatriz do segmento $\overline{AT_2}$ com a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, encontramos respectivamente os centros O_2 e O_1 das circunferências que passam por A e B são tangentes à circunferência c de centro em O.

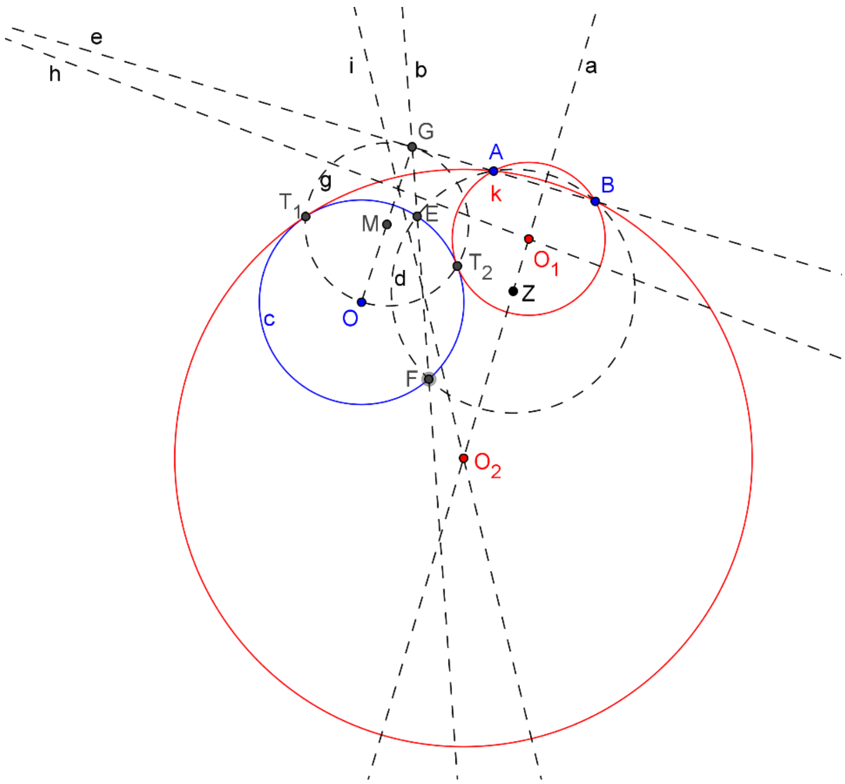


Figura 34: Apolônio PPC

- Demonstração utilizando o *Geogebra*

Problema 5: Construir uma circunferência que passe por dois pontos dados e tangente a uma circunferência dada (PPC).

Caso 1: Supondo os pontos A e B internos à circunferência c de raio r igual a $\overline{OT_1}$, e a circunferência de centro O_1 uma solução do problema temos:

distância(O_1, A) + distância(O_1,O) = r   e

distância(O_1, B) + distância(O_1,O) = r ,

Logo os centros das circunferências que passam por A e B e são tangentes a circunferência c são as intersecções da elipse de focos O e A com a elipse de focos O e B e ambas com eixo transverso r.

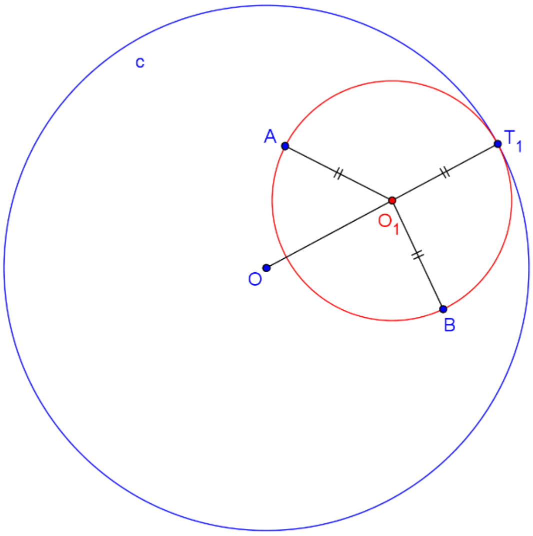


Figura 35.1: *Geogebra* Apolônio PPC – caso 1

Assim no *Geogebra* podemos usar a ferramenta Elipse para plotar as duas curvas e obter o centro das circunferências que são solução do problema.

Como na ferramenta Elipse é solicitado além dos focos um ponto da curva , marcamos o ponto V_1 médio de A e D (intersecção do prolongamento de OA com a circunferência c) e V_2 médio de B e C (intersecção do prolongamento de OA com a circunferência c) , sendo esses pontos vértices das elipses.

O passo a passo da construção é mostrado no Geogebra no protocolo de construção.

Os pontos A e B quando movimentados pelo interior da circunferência c farão com que as circunferências que são soluções, sejam mostradas dinamicamente, deverá ser observado quando o ponto A ou B se sobrepõe ao ponto O.

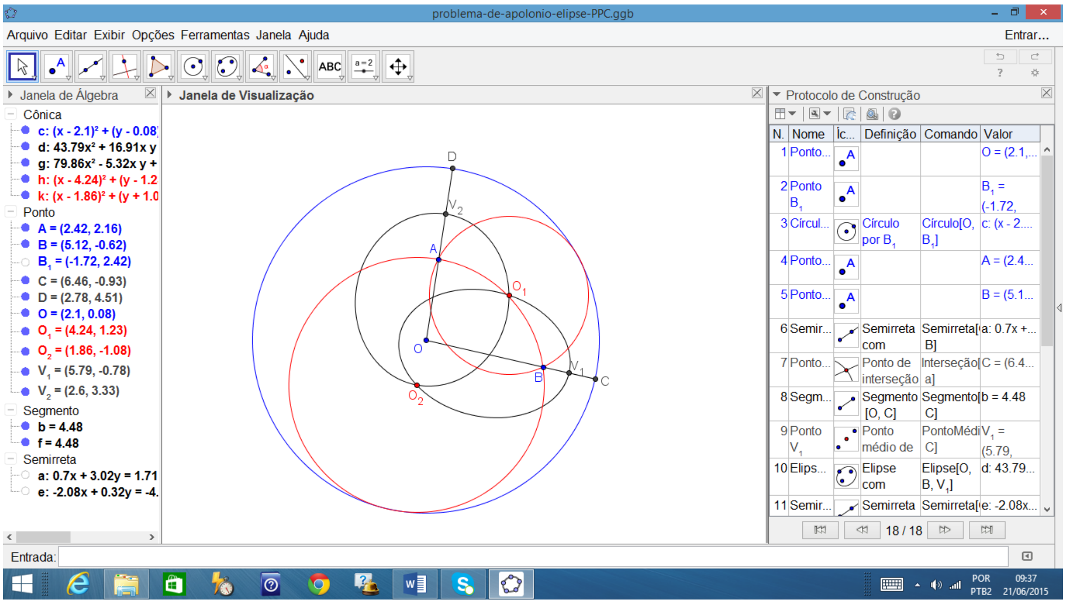


Figura 35.2: *Geogebra* Apolônio PPC – caso 1

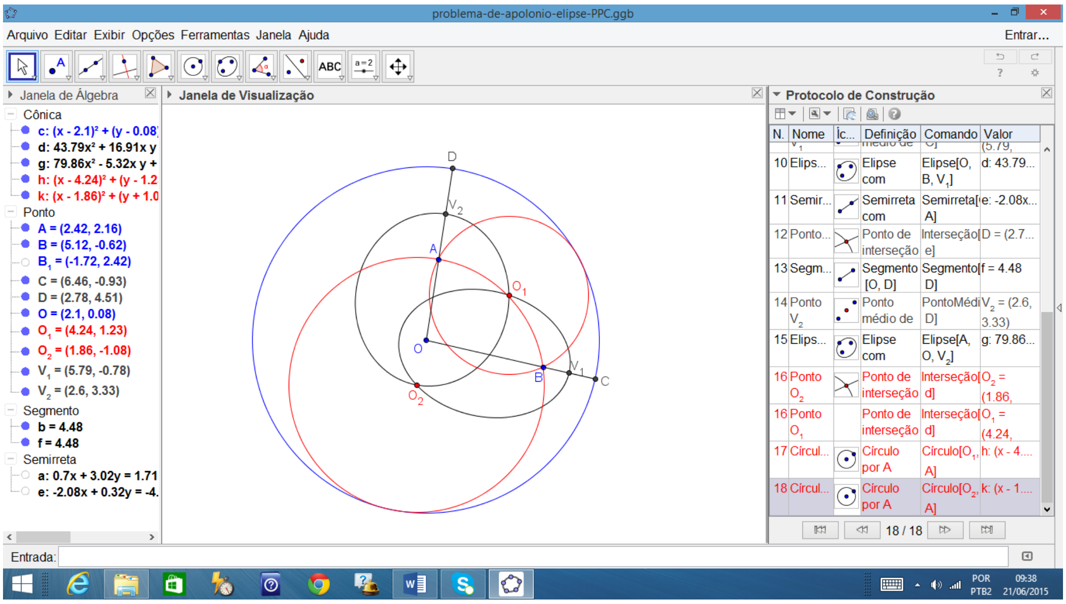


Figura 35.3: *Geogebra* – Apolônio PPC – caso 1

Caso 2: Supondo os pontos A e B externos à circunferência c de raio r igual a $\overline{OT_1}$, e a circunferência de centro O_1 uma solução do problema temos:

distância(O_1, O) - distância(O_1,A) = r e

distância(O_1, O) - distância(O_1,B) = r ,

Logo os centros das circunferências que passam por A e B e são tangentes a circunferência c são as intersecções da hipérbole de focos O e A e eixo transverso r com a hipérbole de focos O e B e eixo transverso r.

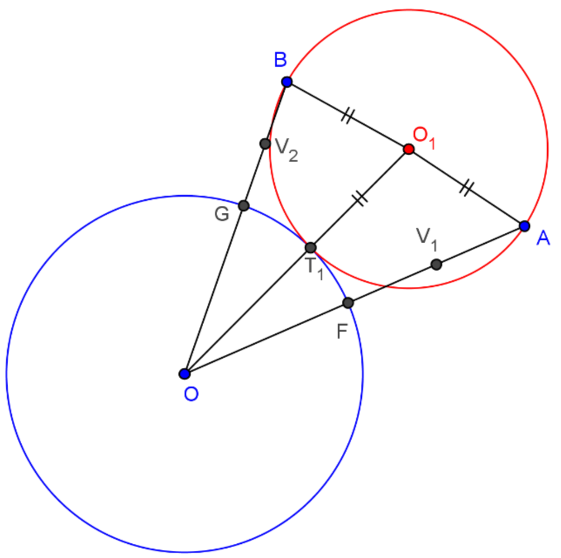


Figura 36.1: *Geogebra* Apolônio PPC – caso 2

Assim no *Geogebra* podemos usar a ferramenta Hipérbole para plotar os pontos das duas curvas, onde, os centros das circunferências que são solução do problema, deverão estar sobre os pontos de intersecção dos ramos das hipérboles, esses centros também estarão sobre a mediatriz do segmento AB.

Como na ferramenta Hipérbole é solicitado além dos focos um ponto da curva , marcamos o ponto V_1 médio de A e F (intersecção do prolongamento de OA com a circunferência c) e V_2 médio de B e G (intersecção do prolongamento de OA com a circunferência c) , sendo esses pontos, V_1 e V_2 vértices das hipérboles.

O passo a passo da construção é mostrado no *Geogebra* no protocolo de construção.

Os pontos A e B quando movimentados pelo exterior da circunferência c, farão com que as circunferências que são soluções do problema sejam mostradas dinamicamente.

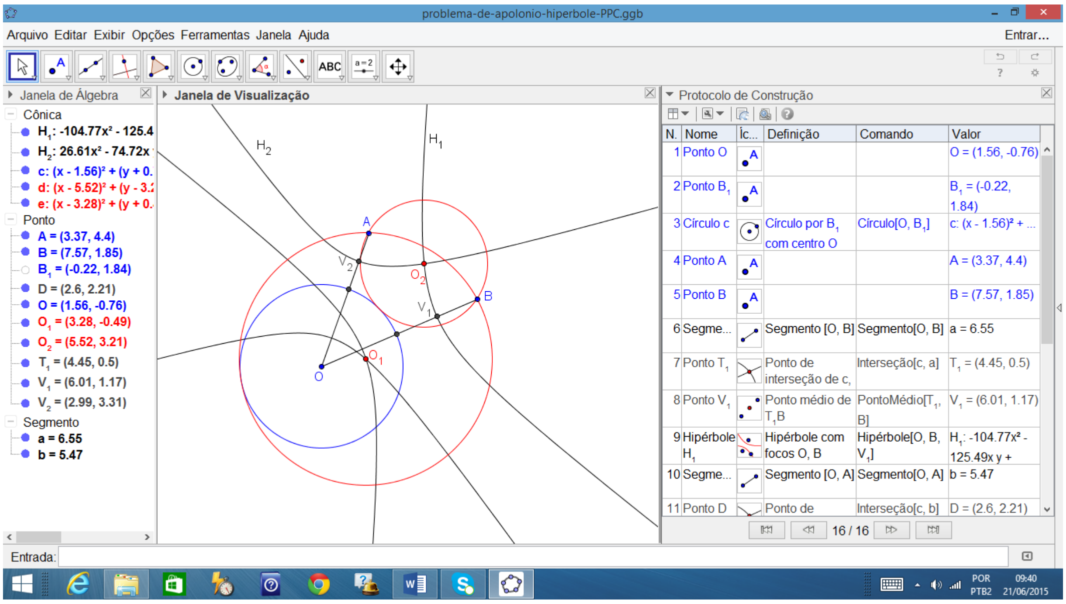


Figura 36.2: *Geogebra* Apolônio PPC – caso 2

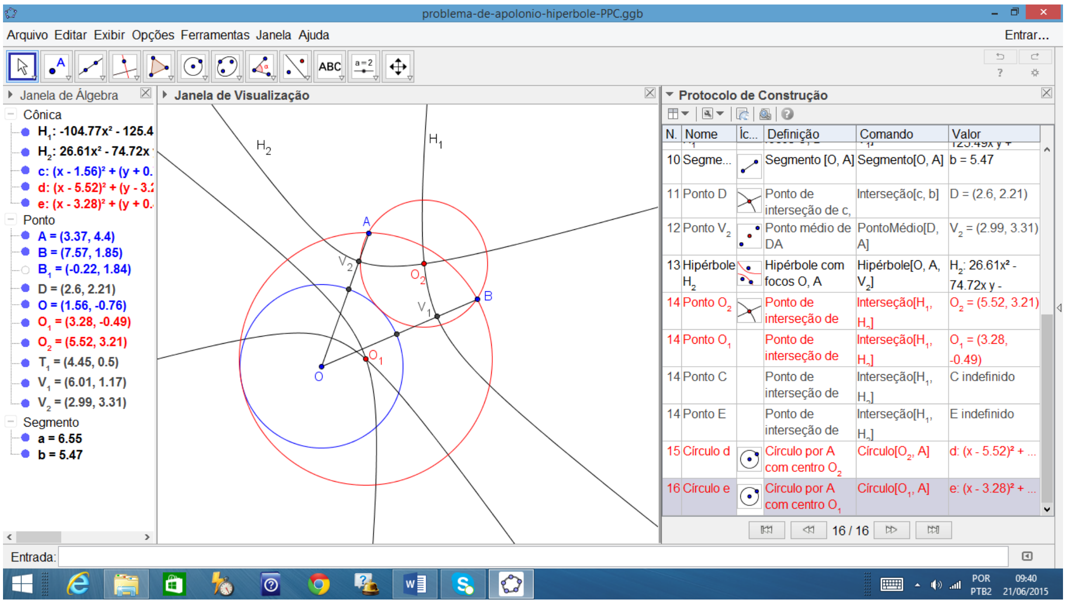


Figura 36.3: *Geogebra* Apolônio PPC – caso 2

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo possibilitou propor caminhos alternativos para o processo de ensino e aprendizagem da geometria, de modo a possibilitar ao aluno construir e conhecer diversas propostas na resolução de problemas de geometria analítica.

A utilização da ferramenta informatizada, o *software Geogebra* aliado as construções históricas relacionados aos conceitos de geometria possibilitam que o aluno reveja e relacione vários resultados e construções da geometria analítica ampliando dessa forma, o leque de situações apresentadas pelo professor a seus alunos.

O resgate da história da matemática em relação aos conhecimentos básicos da geometria é um recurso pedagógico que contribui para uma aprendizagem com mais significado. A medida que o aluno vivencia caminhos para resolução dos problemas que foram construídos em outras épocas.

As soluções de problemas geométricos com aplicação de conceitos da geometria clássica e da geometria analítica faz com que elas sejam consideradas irmãs gêmeas por Nery, por cativar os alunos na visualização da solução de um problema geométrico pelo uso delas.

O uso do *software Geogebra*, para representar e explicitar os passos para resolução de problemas de geometria analítica leva ao aluno, além, de constatar uma propriedade geométrica a de sentir necessidade de complementar a sua aprendizagem, com a demonstração da validade daquela propriedade. Isso acontece devido o software permitir a manipulação dos objetos construídos preservando as características inerentes definidas em sua construção, possibilitando assim, a percepção de padrões e invariâncias.

Este estudo sugere a realização de pesquisas voltadas para um maior aprofundamento das possibilidades do *software Geogebra* para o processo de ensino e aprendizagem de outros problemas que utilizem a geometria clássica e analítica e, que tenham conexão com história da matemática.

6 REFERÊNCIAS

[1] BONGIOVANNI, Vincenzo. **As cônicas como ferramentas para resolver problemas geométricos.** Artigo da Revista do Professor de Matemática nº 60, 2º quadrimestre de 2006. Sociedade Brasileira de Matemática com o apoio da USP – Universidade de São Paulo.

[2] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN 5ª a 8ª séries**. Volume 03 - Matemática. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br. Acesso em: 16 de 2008. 20:07:03

[3] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**, volume único: livro do professor. 1.ed. São Paulo: Ática.2005.

[4] GOMES, A.R.; COSTA, E.A. **A influência do uso de tecnologias no ensino de matemática.** Revista Brasileira de Tecnologia Educacional. nº172/173. Rio de Janeiro: ABNT, 2006.

[5] IEZZI, G. DOLCE, O. DEGENSZAJN, D. PÉRIGO, R. ALMEIDA, N. de. **Matemática Ciência e Aplicações,** 3ª série : ensino médio. 2 ed. São Paulo: Atual, 2004.

[6] LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino. 2. ed. Rio de Janeiro**: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. (Coleção do Professor de Matemática). ISBN 85-85818-15-8.

[7] LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[8] NERY, Chico. **A Geometria Analítica no ensino médio.** Artigo da Revista do Professor de Matemática nº 67, 3º quadrimestre de 2008. Sociedade Brasileira de Matemática com o apoio da USP – Universidade de São Paulo.

[9] VALENTE, J. A. **Análise dos diferentes tipos de software usados na educação.** Disponível em: http://www.nuted.ufrgs.br/edu337520092/links/semana _3/analise_soft.pdf. Acesso em: 05 mar.2015. 21:36:02

[10] http://www.geogebra.at/. Acesso em: 08 jul. 2014. 22:10:01

[11] http://www. profmat-sbm.org.br. Acesso em: 05 mar. 2015. 20:13:05

[12] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues.- ed. da Unicamp São Paulo – 2004.

[13] GARBI, G.Gilberto. **O Romance das Equações Algébricas.** 2 ed. Livraria da Física São Paulo – 2007.