FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO

GROSSO DO SUL

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

ROSANA PAROLISI LIMA FANELLI

ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

DOURADOS/MS - 2013

ROSANA PAROLISI LIMA FANELLI

ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT oferecido pela UEMS, sob a orientação do Professor Msc. Rildo Pinheiro do Nascimento como exigência para a conclusão do curso.

DOURADOS/MS - 2013

P268a Fanelli, Rosana Parolisi Lima

Alternativas para o ensino da geometria espacial/ Rosana Parolisi Lima Fanelli. Dourados,MS: UEMS, 2013.
37p. ; 30cm.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) – PROFMAT – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul,2013.
Orientador: Prof. MSc. Rildo Pinheiro do Nascimento.

1.Polígonos 2. Área de Polígonos 3. Volume de sólidos .
Título: Alternativas para o ensino da geometria espacial.

CDD 20.ed. 516.3

ROSANA PAROLISI LIMA FANELLI

ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Prof. Msc.: Rildo Pinheiro do Nascimento – Professor Orientador

---

Prof. Drª.: Maristela Missio – Professora Avaliadora

Prof. Dr.: Claudemir Aniz - Professor Avaliador

DOURADOS/MS - 2013

Dedico este trabalho a minha amada família, que esteve comigo em todos os momentos difíceis, tornando minha caminhada mais tranquila.

AGRADECIMENTOS

Fica difícil nominar, sob pena de cometer injustiças, portanto agradeço antecipadamente a todos àqueles que de alguma forma contribuíram para que a realização deste trabalho fosse possível, mas não poderia deixar de registrar os seguintes:

De forma especial quero agradecer toda equipe do PROFMAT: a Sociedade Brasileira de Matemática pela iniciativa desse projeto, a CAPES pelo apoio financeiro tão providencial, ao coordenador local, professor Vando Narciso por toda dedicação e paciência, aos meus professores que de forma personalizada deixaram suas marcas registradas no meu coração.

Ao professor Rildo, meu orientador, agradeço o empenho, a força e a grande ajuda na realização deste trabalho, do qual vou sempre lembrar com muito carinho.

Aos meus colegas de curso agradeço pelo convívio harmonioso que tivemos nesses dois anos e toda troca de conhecimentos que tanto me enriqueceram, conviver com cada um foi um privilégio para mim.

Não poderia deixar de agradecer aos alunos do 9º ano da “Escola Estadual Peri Martins”- Bataguassu/Ms - pelo empenho nesse projeto, a diretora Marli sempre me ajudando com os materiais necessários e a professora da sala de tecnologia Ana Paula por toda colaboração.

A minha família, que é meu porto seguro, quero agradecer a compreensão e o incentivo que me proporcionaram fazendo com que a minha jornada se tornasse mais tranquila.

Aos meus pais Celso e Isabel, aos quais atribuo toda responsabilidade pela formação do meu caráter e o gosto pelo estudo, pois nunca mediram esforços para que eu pudesse frequentar sempre as melhores escolas, sou eternamente grata.

A minha querida mãe que apesar de não habitar mais esse plano tenho certeza da sua presença ao meu lado e do seu orgulho por mais essa etapa vencida, agradeço de forma especial.

Aos meus filhos Thais, Murilo e Nádia, pelo carinho, força e incentivo que me dão e com os quais posso sempre contar nos momentos mais difíceis o meu muito obrigado.

Ao meu esposo Carlos, pelos elogios que somente vem de quem se ama, por me transmitir paz mesmo na correria do dia a dia, pelas trocas de ideias que muito me ajudaram e pela sorte de me proporcionar um amor tranquilo, agradeço do fundo do meu coração.

E finalmente agradeço a Deus cuja presença em minha vida é indiscutível. Agradeço a Ele por me proteger sempre, por me proporcionar estar aqui fazendo estes agradecimentos, pela família maravilhosa que me deu, pelo dom da vida, pela força para enfrentar todos os desafios e por tudo que conquistei até agora.

Agradecer a Ele é pouco, por isso procuro viver de forma a colocar o amor em tudo o que faço, que é minha maneira de estar agradecendo sempre.

RESUMO

O projeto Alternativas para o ensino de geometria espacial, desenvolvido com os alunos do 9º ano da Escola Estadual Peri Martins na cidade de Bataguassu-MS., teve como objetivo diversificar as práticas de ensino de geometria espacial, em especial nos conteúdos sobre volumes de prismas, pirâmides, cilindros, cones e poliedros. Através de aulas mais dinâmicas, onde os alunos tiveram a oportunidade de construir sólidos geométricos, usando materiais concretos, e ainda utilizar novas tecnologias tais como vídeos educacionais, softwares computacionais, o que possibilitou aos alunos assimilar os conceitos da geometria espacial de forma mais interessante e produtiva.

Palavras-chave: Geometria Espacial, Aulas Práticas de Geometria, Novas Tecnologias.

ABSTRACT

The project Alternatives for teaching spatial geometry, designed with students in 9th grade State School Martins Peri, in the city of Bataguassu-MS. aimed to diversify the teaching practices of spatial geometry, in particular the contents on volumes of prisms, pyramids, cylinders, cones and polyhedra. Through more dynamic classes, where they had the opportunity to build geometric solids, using concrete materials, and also use new technologies such as educational videos, computer software, which allowed students to assimilate the concepts of spatial geometry in a more interesting and productive.

Keywords: Space Geometry, Geometry Lessons Practices, new technologies.

SUMÁRIO

1. Introdução

O ensino da Geometria Espacial é sempre motivo de preocupação por grande parte dos professores, pois, entre outros fatores, a dificuldade de visualização dos sólidos geométricos fica consideravelmente prejudicada pela reprodução dessas figuras tridimensionais serem feitas no plano (lousa, papel), ou seja, quando passamos do objeto espacial à sua representação em um suporte bidimensional, neste caso existe necessariamente uma perda de informações. Segundo Paulo Cezar Pinto Carvalho em seu livro "Introdução à Geometria Espacial",

> *Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial passamos a enfrentar limitações de diversa ordem. Em geral, recorremos a projeções bidimensionais para representar objetos tridimensionais, mas essas projeções distorcem ângulos, modificam comprimento de segmentos e não permitem distinguir pontos que estejam sobre a mesma linha de projeção.*

Esse fato tem sido um agravante para o desinteresse dos alunos pelo estudo da Geometria Espacial. Assim, buscar alternativas que facilitem o ensino desse conteúdo, privilegiando atividades que desenvolvam a intuição espacial e habilidades de visualização para a formação do desenvolvimento geométrico, tornando-o mais atrativo e motivador é uma tarefa urgente.

Em resposta a este desafio propomos o projeto: Alternativas para o ensino de geometria espacial, o qual foi desenvolvido com os alunos do 9º ano da Escola Estadual Peri Martins na cidade de Bataguassu-MS., e que teve por objetivo promover um envolvimento maior dos alunos nas aulas de geometria espacial, a fim de que eles adquirissem um conhecimento geométrico espacial mais concreto, através de aulas diferenciadas durante as quais eles pudessem construir, manusear sólidos geométricos e perceber a relação entre a Geometria e o seu cotidiano . Além disso, terem como ferramenta auxiliar alguns softwares computacionais, que permitem realizar a planificação e construção de sólidos geométricos, favorecendo a visualização dos objetos tridimensionais.

O ensino da Geometria Espacial utilizando materiais manipulativos, abordada de forma mais concreta envolvendo situações do cotidiano, possibilita a visualização dos objetos geométricos, a formação de conceitos e a dedução de fórmulas. Já a utilização de softwares educacionais é um dos recursos fundamentais para despertar no estudante de geometria espacial o interesse pelo conteúdo, pois apesar de viverem em uma sociedade informatizada, eles tem poucas oportunidades de aulas diferenciadas onde os professores utilizam o computador como auxiliar no estudo da geometria Espacial. Segundo Papert (1991), a construção do conhecimento através do computador leva o aluno a construir o objeto de seu interesse o que torna a aprendizagem mais efetiva.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Na seção 2 serão apresentados os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento da seção seguinte. Em seguida, na seção 3, serão descritas diversas atividades e aplicações realizadas durante o desenvolvimento do referido Projeto.

2 – Preliminares

Para compreensão das atividades, é desejável que os alunos conheçam os polígonos, sua classificação e características principais, que saibam diferenciar figuras planas de sólidos geométricos e que conheçam as terminologias que serão usadas. Nesta seção será apresentado um breve estudo sobre polígonos, áreas de polígonos, volumes do paralelepípedo retângulo, prismas, pirâmide, cilindro, cone e poliedros, que serão os objetos utilizados nas atividades a serem descritas na próxima seção. O referido estudo está baseado nas seguintes referências: LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio** – volume 2 – SBM 2006 e NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**: Geometria Euclidiana Plana. v.2. Coleção Professor de Matemática, SBM.

2.1 Polígonos

Na Geometria, um polígono é uma figura plana limitada por uma linha poligonal fechada: por exemplo o hexagono é um polígono de seis lados. A palavra polígono advém do grego e quer dizer muitos (poly) e ângulos (gon).

Definição 2.1 Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, A_3 .... A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1 A_2 .... A_n$ é um polígono convexo e, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina, $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$.

Exemplo: O polígono da figura1 possui os seguintes elementos:

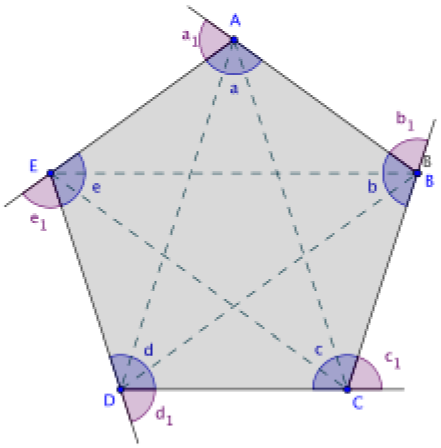


Figura 1.

Lados

Cada um dos segmentos de reta que une vértices consecutivos:

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$$

Vértices

Ponto de encontro dos segmentos:

$$A, B, C, D, E$$

Diagonais

Segmentos que unem dois vértices não consecutivos:

$$\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CE}$$

2.2 Áreas de Polígonos

Para que qualquer conceito de área para polígonos tenha sentido e seja útil, enunciaremos os seguintes postulados:

(P1) Polígonos congruentes têm áreas iguais.

(P2) Se um polígono convexo é subdividido em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

(P3) Se um polígono maior contém outro menor em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

(P4) A área de um quadrado de lado 1 cm é igual a 1 cm².

2.2.1 Área do Quadrado

Valendo os postulados acima, podemos subdividir um quadrado de lado $n \in N$ em n^2 quadrados de lados 1 cada. Denotemos a área do quadrado maior por A_n, devemos ter A_n igual à soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1. Assim,

$$A_n = n^2$$

Consideremos agora um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com m, n $\in \mathrm{N}$, e a área $A_{\frac{m}{n}}$. Arranje n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de lado $\frac{m}{n}$ por fila em n filas, formando desta forma um quadrado de lado $\frac{m}{n}.n = m$. Este quadrado maior terá área m^2; por outro lado, como ele está subdividido em n² quadrados de lado $\frac{m}{n}$ cada, sua área será igual à soma das áreas dos n^2 quadrados, ou seja,

$$m^2 = n^2.A_{\frac{m}{n}}$$

Portanto,

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$$

A discussão acima indica que a área de um quadrado de lado l deve ser igual a l^2. Então temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2. 1. Um quadrado de lado $l \in IR$ tem área l^2

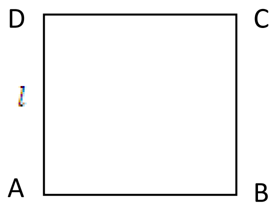


Figura 2

Para provar esta proposição usaremos o seguinte argumento: para $K \in \mathrm{N}$, tomamos números racionais x_k e y_k tais que,

$$x_k < l < y_k \quad \text{e} \quad y_k - x_k < \frac{1}{k}$$

Em seguida construímos quadrados de lados x_k e y_k, o primeiro contido no quadrado de lado l dado e o segundo o contendo. Como já sabemos calcular áreas de quadrados de lado racionais, o postulado (P3) acima assegura que a área A_l do quadrado de lado l deve satisfazer as desigualdades

$$x_k^2 < A_l < y_k^2$$

Mas como $x_k^2 < l^2 < y_k^2$, concluímos que ambos os números A_l e l^2 devem pertencer ao intervalo (x_k^2, y_k^2). Assim,

$$\left|A_l - l^2\right| < y_k^2 - x_k^2 = (y_k - x_k)(y_k + x_k)$$

$$< \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k)$$

$$< \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right)$$

A desigualdade acima é válida para todo $k \in N$. Assim, fazendo k crescer infinitamente, $\frac{1}{k} \to 0$ e $\left|A_l - l^2\right| \to 0$, ou seja,

$$A_l = l^2.$$

2.2.2 Área do Retângulo

Com um argumento semelhante ao que usamos acima é possível provar que um retângulo de lados $a,b \in IR$ tem área igual à ab (figura 3): começamos com um retângulo de lados $m,n \in N$ particionando-o em *mn* quadrados de lado 1 para mostrar que sua área é *mn.* Em seguida, tomamos um retângulo de lados $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$ com $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathrm{N}$ e com $n_1 n_2$ cópias do mesmo, concluímos que a área do retângulo dado originalmente é igual a

$$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}.$$

O argumento que usamos acima sugere que a área de um retângulo de lados $a,b \in IR$ devem ter área = ab.

Proposição 2.2.2 Um retângulo de lado $a,b \in IR$ tem área *ab.*

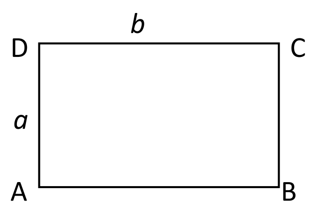


Figura 3

De fato, tomando um retângulo de lados $a,b > 0$ reais, e, $k \in N$, racionais x_k, y_k, u_k, v_k tais que $x_k < a < y_k, u_k < b < v_k$ e $y_k - x_k, v_k - u_k < \frac{1}{k}$. Sendo A a área do retângulo de lados a e b, um argumento análogo ao feito para o quadrado de lado $l \in IR$ nos permite provar que A e ab pertencem ambos ao intervalo $(u_k x_k, y_k v_k)$, e daí, todo $k \in \mathrm{N}$,

$$\begin{aligned} |A - ab| &< v_k y_k - u_k x_k = (v_k - u_k) y_k + u_k (y_k - x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k + u_k) \le \frac{1}{k}((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u_k)) \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right) \end{aligned}$$

De onde segue que, para todo $k \in \mathrm{N}$ temos,

$$A = ab$$

2.2.3 Área de um Paralelogramo

Agora vamos calcular a área de um paralelogramo como consequência da discussão acima. Para tanto, fixado um lado de um paralelogramo, ao qual chamaremos de base, temos que a distância entre ele e seu lado paralelo é a altura do paralelogramo.

Proposição 2.2.3. A área S de um paralelogramo $ABCD$ de base $AB = a$ e altura *h* dada por,

$$S = ah.$$

Demonstração. Sejam respectivamente *E* e *F* os pés das perpendiculares baixadas de *D* e *C* à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e suponha sem perda de generalidade, que $E \in AB$. É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes por $c.h$, de modo que $\overline{AE} = \overline{BF}$ e $A(ADE) = A(BCF)$. Então, temos

$$\begin{aligned} S &= A(ADE) + A(BEDC) \\ &= A(BCF) + A(BEDC) \\ &= A(EFCD) \end{aligned}$$

Por outro lado, $EFCD$ é um retângulo de altura *h* e base

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = \overline{AB} = a.$$

Portanto, $S = A(EFCD) = ah$.

2.2.4 Área de um Triângulo

Proposição 2.2.4. Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$ e alturas h_a, h_b, h_c respectivamente relativas aos lados *a, b, c*. Então a área S do triângulo é dada por:

$$S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$$

Em particular: $ah_a = bh_b = ch_c$.

Para provar esta proposição, basta observar que todo paralelogramo pode ser decomposto em dois triângulos congruentes, por uma de suas diagonais. De onde segue que a área S do triângulo é a metade da área de um paralelogramo. Portanto, segue da Proposição (3), que:

$$S=\frac{ah_i}{2}$$

Onde, $i=a, i=b$ ou $i=c$.

2.3 Volumes de Sólidos

Iniciaremos o estudo de volume dos sólidos considerando com a unidade de volume o cubo de aresta 1.

Para cada unidade de comprimento, temos uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for o centímetro (cm), então a unidade correspondente de volume será denominada centímetro cúbico (cm^3). Desta forma, o volume de um sólido S é o número que exprime quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Mas, como esse sólido pode ter uma forma bastante irregular, não fica claro o que significa o número de vezes que um sólido contém esse cubo. Assim, vamos buscar obter métodos que nos possibilitem obter fórmulas para o cálculo de volumes de alguns sólidos .

2.3.1 O paralelepípedo retângulo

Para obter o volume do paralelepípedo retângulo, precisamos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões, ou seja, se mantivermos constantes a largura e a altura, por exemplo, e multiplicarmos o comprimento por um número natural *n*, então o volume também ficará multiplicado por *n*. Em outras palavras, se representamos o volume desse paralelepípedo por V(x,y,z), onde ***x*** é o comprimento, *y* é a largura e ***z*** é a altura do mesmo temos:

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{nx}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{n}\mathbf{V}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

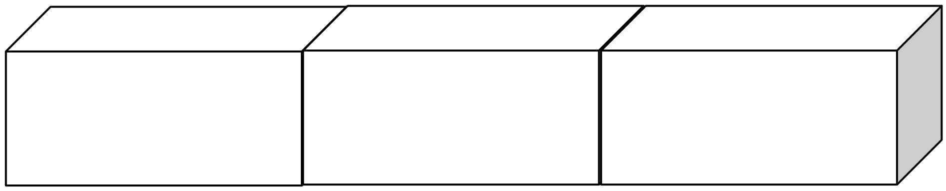


Figura 4

A figura 4 mostra 3 paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, colocados em faces iguais. Observamos que o volume total é três vezes maior que o volume de um deles.

Este fato, verificado para números naturais, também é verdadeiro para todo número real positivo e isto significa que, mantidas fixas duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Assim, sendo *x*, *y* e *z* as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= V(x.1,y,z) \\ &= x.V(1,y,z) \\ &= xV(1,y.1,z) \\ &= x.y.V(1,1,z) \\ &= xyV(1,1,z.1) \\ &= xyzV(1,1,1) \\ &= \mathrm{x.y.z.1} \end{aligned}$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é dado pelo produto de suas dimensões. Em particular, se a face de dimensões *x* e *y* está contida em um plano horizontal, chamaremos essa face de base e a dimensão *z* de altura.

Volume do paralelepípedo= (área da base) x (altura)

No caso particular do cubo, temos:

Volume = $x.x.x = x^3$

2.3.2 O Princípio de Cavalieri

Suponha que dois sólidos A e B estão apoiados em plano horizontal e que qualquer outro plano também horizontal corte ambos segundo seções de mesma área. Então o Princípio de Cavalieri afirma que o volume de A é igual ao volume de B.

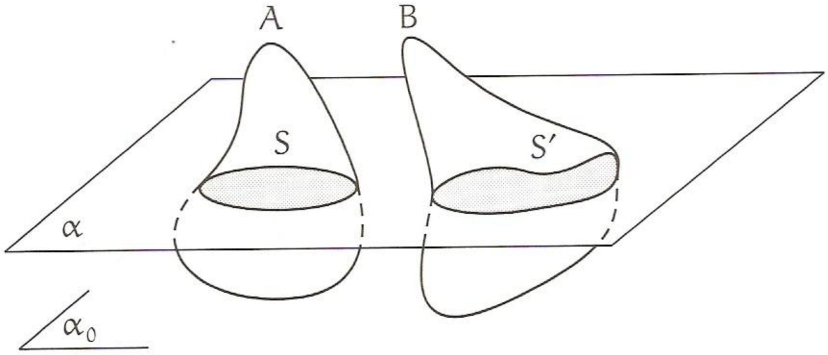


Figura 5

Supondo os dois sólidos fatiados no mesmo número de fatias muito finas, todas com mesma altura, duas fatias correspondentes com mesma área terão, aproximadamente, mesmo volume. Sendo o volume de cada sólido igual à soma dos volumes de suas fatias, podemos de maneira intuitiva concluir então que os dois sólidos têm volumes iguais.

2.3.3 Prismas

Definição : Considere dois planos, α e β , paralelos diferentes, podemos considerar um polígono ρ contendo **n** lados contido em α e uma reta **r** que interrompe os planos α e β nos pontos A e B respectivamente. Podemos chamar de prisma, a união dos diversos segmentos paralelos ao segmento da reta AB, contendo assim uma extremidade na região poligonal e uma extremidade em β.

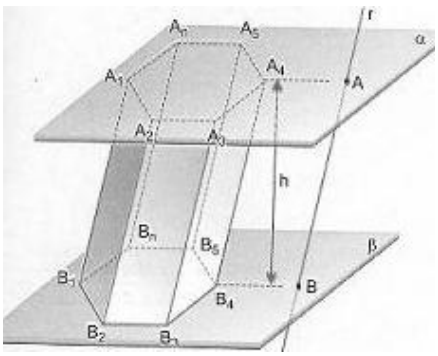


Figura 6

Consideremos um prisma e um paralelepípedo retângulo de mesma altura h e bases iguais a S_b contidas no plano α.

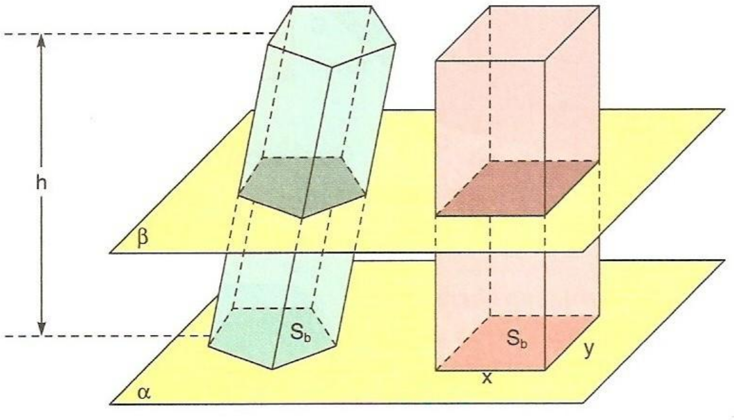


Figura 7

Como as seções transversais determinadas no prisma e no paralelepípedo pelo plano β, paralelo a α, têm áreas iguais, concluímos pelo Princípio de Cavalieri que o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo retângulo.

Mas o volume desse paralelepípedo é dado pelo produto de suas três dimensões. Logo:

$$V = xyh$$

Ou seja,

$$V = S_b h$$

Assim, podemos obter o volume do prisma:

$$V_{prisma} = S_b h$$

O volume de um prisma qualquer é igual ao produto da área da sua base pela medida da altura.

2.3.4 Pirâmide

Definição: Considere uma região poligonal por exemplo, *ABCD*, contida em um plano α e um ponto *V* exterior ao plano da região poligonal. Traçamos os segmentos *VA*, *VB*,*VC* e *VD*. Cada dois vértices consecutivos de *ABCD* determinam com *V* uma região triangular. Essas regiões triangulares, juntamente com a região poligonal *ABCD*, determinam um poliedro chamado pirâmide de base *ABCD* e vértice *V*.

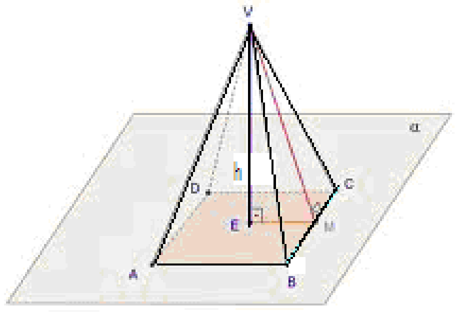


Figura 8

Para obter o volume da pirâmide, precisamos de resultados adicionais. Em particular, o que realmente importa é ter a certeza que se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume de uma pirâmide não se altera. Para isso, vamos examinar o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

A figura a seguir mostra uma pirâmide de vértice V, base ABC (triangular apenas para simplificar o desenho) e altura H. Um plano paralelo a ABC, distando h do vértice V, produziu nessa pirâmide uma seção DEF.

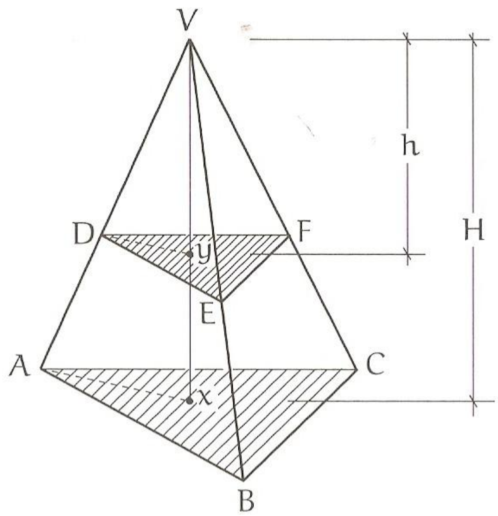


Figura 9

Vamos agora citar dois fatos importantes com respeito à situação acima:

(i) A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.

(ii) A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Teorema (2.3.1): Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.

A figura a seguir mostra duas pirâmides de mesma base ABC, vértices V_1 e V_2 e com mesma altura H. Um plano paralelo ao plano ABC e distando h dos vértices das pirâmides, produziu seções S_1 e S_2 nas duas pirâmides.

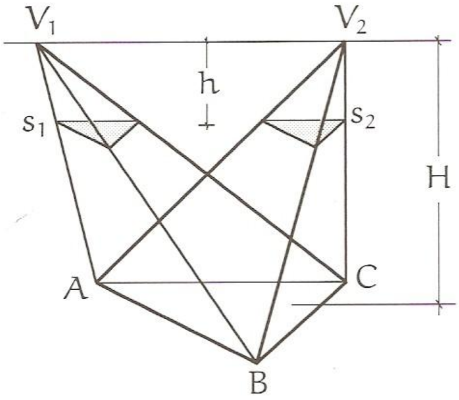


Figura 10

Seja A a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2, respectivamente. Pelos argumentos que citamos, temos que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

de onde se conclui que $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume, como queríamos demonstrar.

O fato que podemos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base sem alterar o seu volume é a chave para a demonstração do volume da pirâmide de base triangular.

Teorema (2.3.2): O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Consideremos um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e $A'B'C'$, como na figura abaixo.

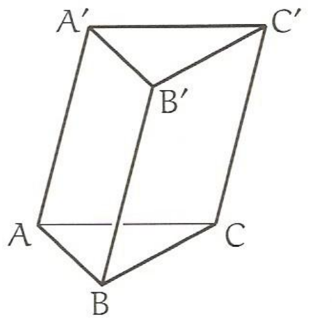


Figura 11

Sejam A a área de ABC e h a altura do prisma. Sabemos que o seu volume é Ah. Dividindo esse prisma em três tetraedros $A - A'B'C'$, $B' - ACC'$ e $B' - ABC$, como nas figuras abaixo.

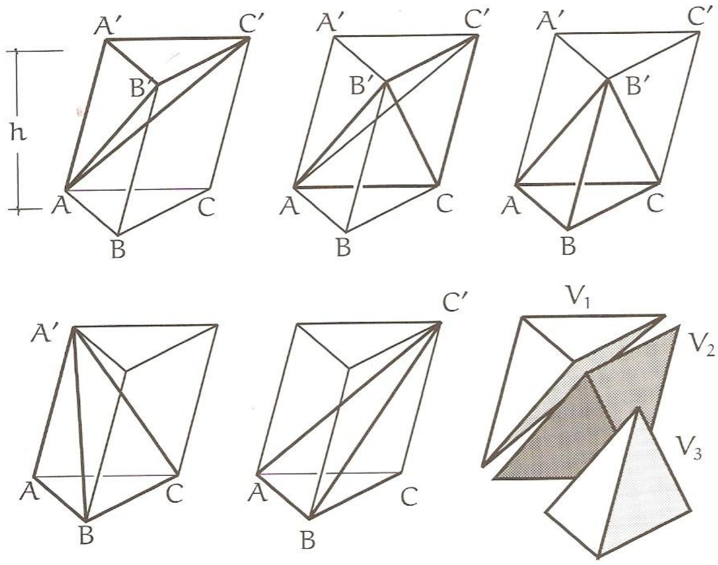


Figura 12

Sejam V_1, V_2 e V_3 os respectivos volumes dos três tetraedros apresentados e seja V o volume do prisma. Segue do teorema anterior, sabemos que o volume de uma pirâmide não se modifica quando, fixada a base, movemos o vértice em um plano paralelo a essa base. Assim,

$$V_1 = V(A - A'B'C') \overset{(1)}{=} V(A' - ABC)$$
$$V_2 = V(B' - ACC') \overset{(2)}{=} V(B - ACC') = V(C' - ABC)$$
$$V_3 = V(B' - ABC)$$

(1) Bases congruentes e mesma altura.

(2) O vértice se move paralelo à base, ou seja, segue do teorema anterior o volume não muda.

Portanto o volume do prisma é igual à soma dos volumes de três tetraedros:

$A'-ABC, B'-ABC$ e $C'-ABC$

com a mesma base do prisma e com alturas iguais a do prisma. Logo, o volume de cada um deles é igual a um terço do volume do prisma.

Teorema (2.3.3): O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Note que toda pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita ao dividir a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

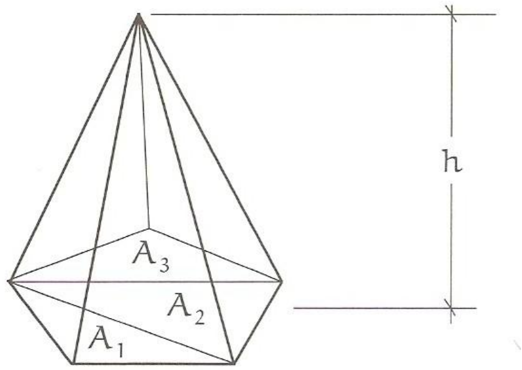


Figura 13

Suponha que a altura da pirâmide seja h e que sua base, de área A, tenha sido dividida em n triângulos cujas áreas são:

$A_1, A_2, \ldots, A_n$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, segue que seu volume é dado por:

$$V = \frac{1}{3}A_1 h + \frac{1}{3}A_2 h + ... + \frac{1}{3}A_n h$$

$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_n)h$$

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

Portanto,

Volume da pirâmide = $\frac{1}{3}$(área da base) x (altura)

2.3.5 Cilindro

Consideremos um cilindro de revolução de altura h e raio da base r, e um prisma reto com a mesma altura h e cuja área da base é igual à área da base do cilindro. Como $B_1 = B$ e $B_2 = B$, temos que $B_1 = B_2$, ou seja, as secções determinadas no cilindro e no prisma pelo plano paralelo ao plano , possuem a mesma área.

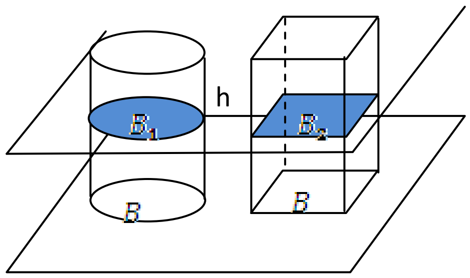


Figura 14

Logo, segue do Princípio de Cavalieri, que o cilindro e o prisma têm o mesmo volume. Assim o volume do cilindro de revolução é dado pela fórmula:

$$V = A_b.h$$

Onde,

$V =$ Volume do cilindro

$A_b =$ Área da base (círculo)

$h =$ Altura do cilindro

$r =$ Raio do círculo

2.3.6 Cones

Para obtermos o volume do cone o processo é semelhante ao usado para obter o volume do cilindro.

Se um cone tem altura H e base de área A contida em um plano horizontal, consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A contida nesse mesmo plano. Se outro plano horizontal secciona ambos segundo figuras de áreas A_1 e A_2 então:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

Logo, $A_1 = A_2$ e segue do Princípio de Cavalieri que os dois sólidos têm o mesmo volume.

Portanto,

$$\text{Volume do cone} = \frac{1}{3}\text{(área da base) x (altura).}$$

2.3.7 Poliedros

Uma ideia inicial para definir poliedros é a seguinte:

“Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono”.

Cada um desses polígonos é chamado de face do poliedro, cada lado comum a duas faces é chamado uma aresta do poliedro e cada vérice de uma face é também chamado vértice do poliedro.

As figuras a seguir representam figuras poliedricas

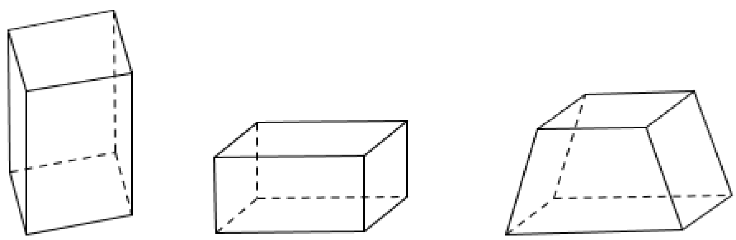


Figura 15

Definição (2.3.1): Um poliedro é convexo se qualquer reta o corta em no máximo, dois pontos.

Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro. Um poliedro é convexo se o seu interior é convexo.

Observação: A reunião das faces de um poliedro convexo é denominada superfície poliédrica fechada.

Poliedros convexos são aqueles cujos ângulos formados por planos adjacentes têm medidas menores do que 180 graus.

O resultado mais importante desta subseção é o Teorema de Euler que enunciaremos logo a seguir.

Teorema de Euler: Em todo poliedro com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

A demonstração deste Teorema, dada pelo professor Zoroastro Azambuja Filho, pode ser encontrada em: LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio** – volume 2 – SBM 2006.

3. Atividades e aplicações

As atividades descritas a seguir foram realizadas por alunos do 9º ano da Escola Estadual Peri Martins na cidade de Bataguassu-MS, durante a realização do Projeto: Alternativas para o Ensino de Geometria Espacial, e teve como objetivos despertar o interesse dos mesmos pelos sólidos geométricos, relacionando-os com seu cotidiano através de aulas práticas com uso de material concreto e utilização de softwares computacionais visando tornar as aulas mais atrativas e envolventes.

Antes de iniciar as atividades alunos assistiram ao vídeo: "**Construindo o pensamento geométrico**" para ampliarem seus conhecimentos a respeito de figuras tridimensionais percebendo que diversificados conceitos geométricos apresentam-se no dia-a-dia das pessoas e constituem os fundamentos de diversas profissões. Em seguida, propusemos aos alunos as seguintes atividades:

3.1 Exercícios sobre polígonos e poliedros

Iniciamos as nossas atividades propondo aos alunos para calcularem as áreas da sala de aula, da quadra de futebol, da tampa da carteira e foram assim consolidando o aprendizado sobre área de polígonos. Em seguida aplicamos a seguinte avaliação para verificação do aprendizado:

(i) - Escreva o nome das faces pintadas de cada um dos poliedros:

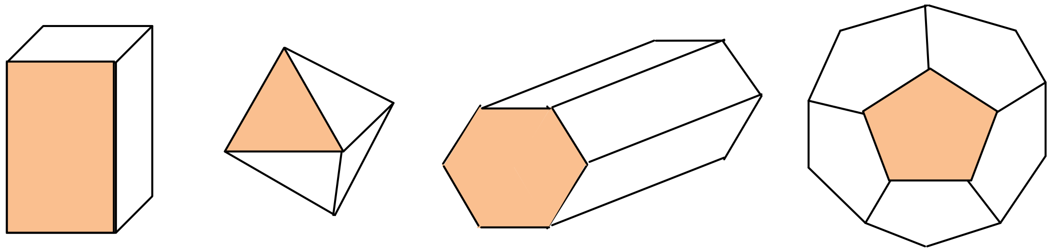
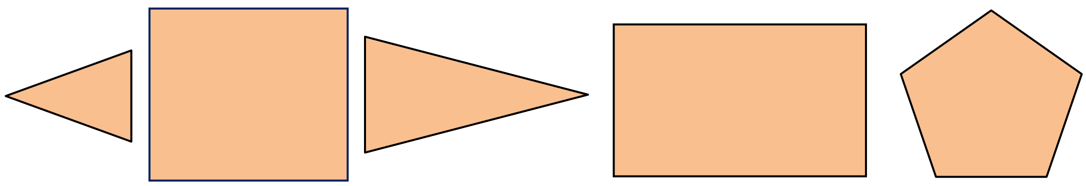


Figura 17

(ii) - Observe os polígonos e diga quais e quantos destes polígonos são necessários para formar as estruturas dos poliedros 1, 2 e 3:



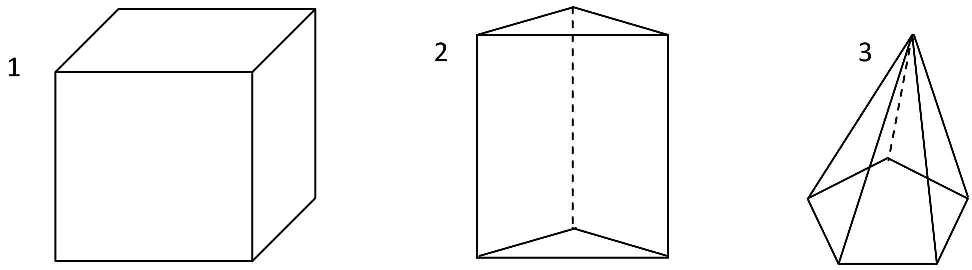


Figura 18

(iii)- O desenho abaixo representa um sólido.

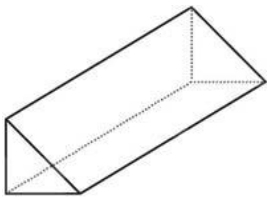


Figura 19

Uma possível planificação desse sólido é:

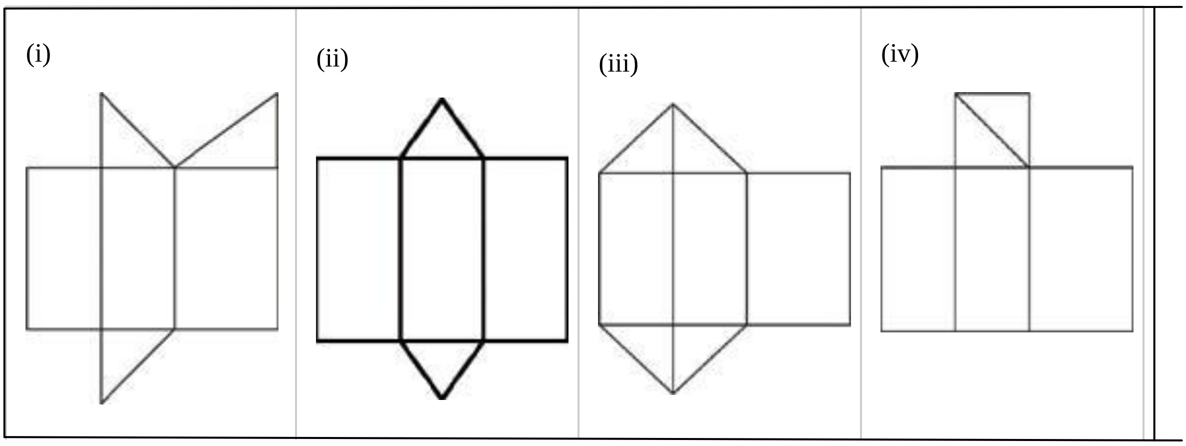


Figura 20

3.2 Atividades em malha quadriculada, planificação e construção de sólidos geométricos

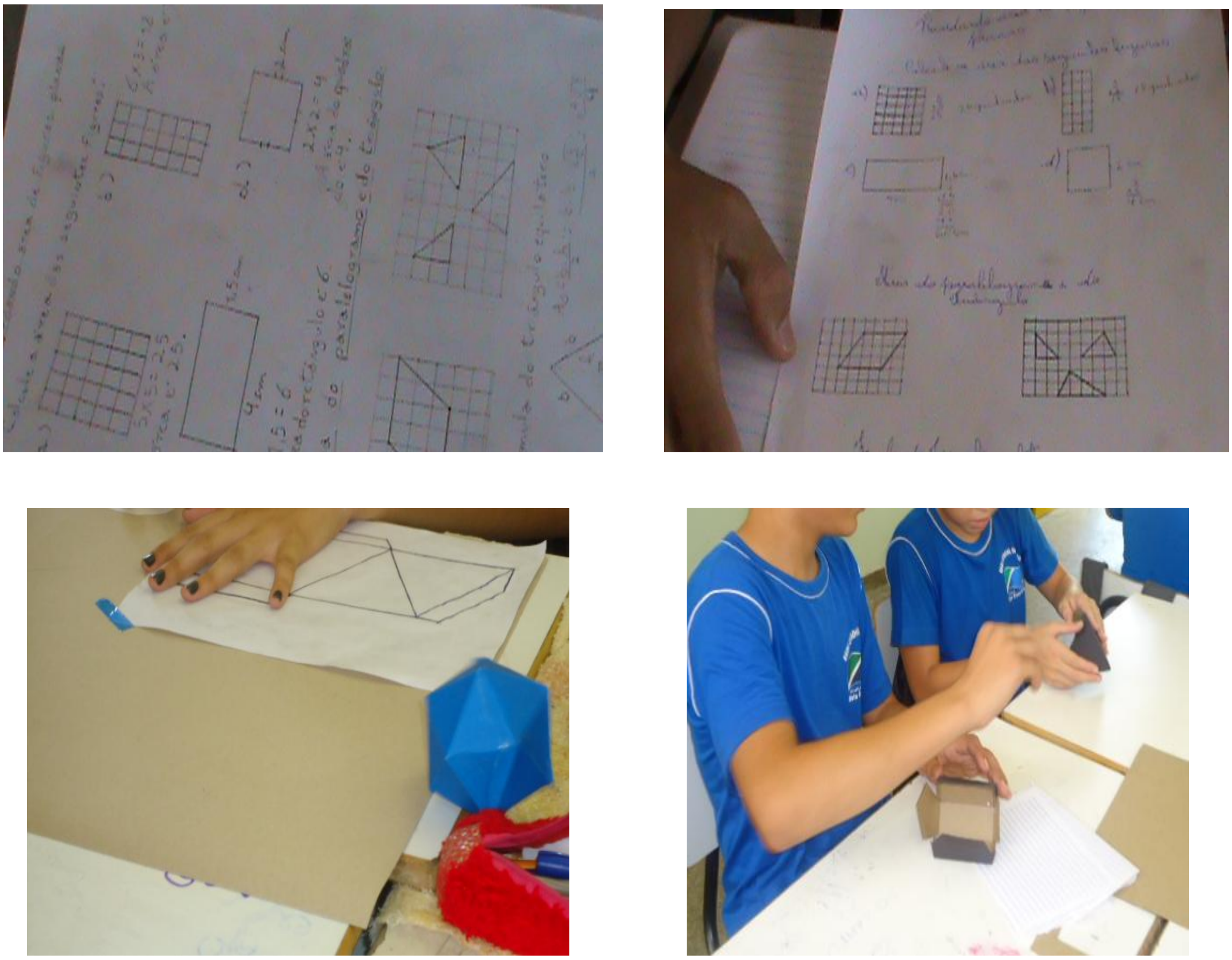


Figura 21

3.3. Entendendo e praticando o cálculo de volumes

Figura 22

3.4 Atividades avaliativas sobre a aplicação do Princípio de Cavalieri

(i) Vamos aplicar o Princípio de Cavalieri para verificar se os dois sólidos abaixo têm o mesmo volume. Na figura aparece a base de cada um.

*base :triângulos eqüiláteros de lado 1

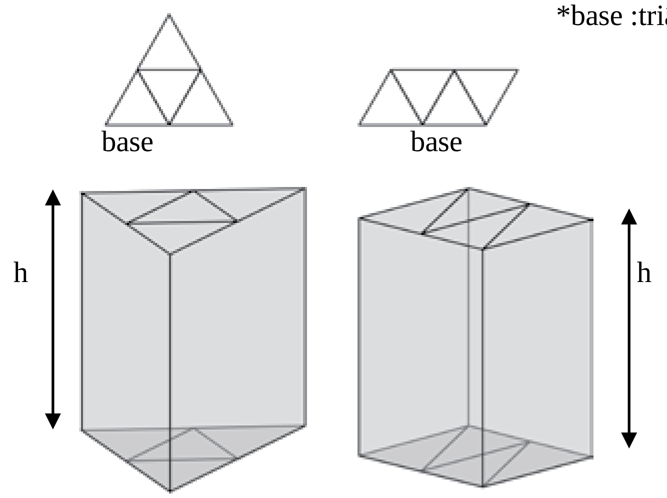


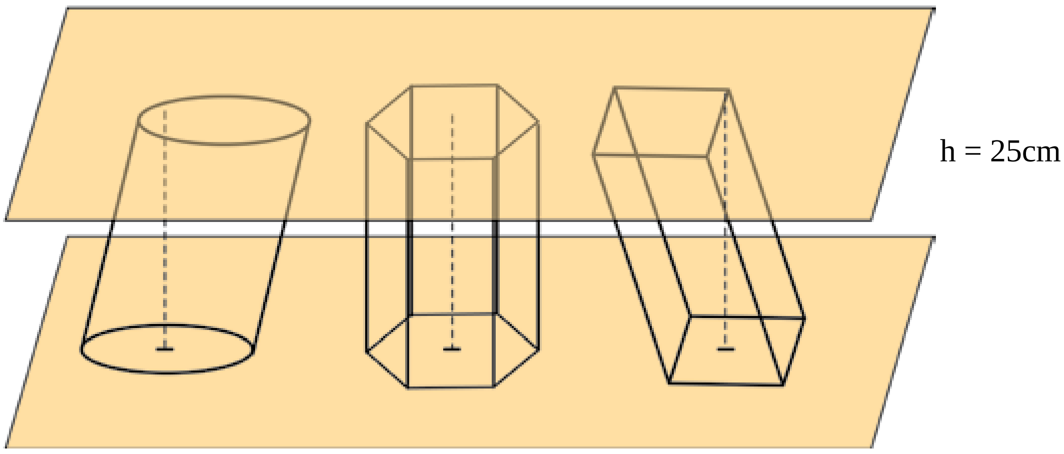
Figura 23

Lembre-se: para poder concluir que os volumes são iguais, você precisa antes verificar se estão valendo as duas condições que o Princípio de Cavalieri exige:

1º. Os dois sólidos têm mesma altura?

2º. Cortando ambos, numa altura qualquer, as figuras obtidas têm áreas iguais?

(ii) - Observe a figura abaixo.



A = 15cm² A = 15cm² A = 15cm²

Figura 24

a) A altura de todos os sólidos vale _______ cm.

b) A área da base de todos vale _______ cm².

c) Cortando todos numa mesma altura, as figuras obtidas têm área igual a _______ cm².

d) Você pode concluir que todos os volumes são ________________

e) Esta conclusão está baseada no ____________________________

3.5 Explorando recursos tecnológicos - atividades em softwares computacionais

A tecnologia pode se transformar em um recurso essencial para a melhoria do ensino e da aprendizagem de conteúdos matemáticos já que proporciona uma maior autonomia do aluno na construção do conhecimento, ou seja, a utilização da informática no ensino de matemática é empregada com o intuito de criar situações de aprendizagem fazendo com que os alunos desenvolvam seus próprios conhecimentos e desperte um interesse maior pelo conteúdo abordado. Nesse sentido os softwares computacionais servem de motivação e desafios ao aluno pois a aula se torna mais investigativa.

A escolha de um programa adequado (software) é um dos fatores que determina a qualidade do aprendizado de conceitos de poliedros mais facilmente, onde os alunos passam a identificar quais e quantos são os sólidos de Platão e seus respectivos nomes, suas características, além de conhecê-los nas formas 3D (tridimensional) e 2D (bidimensional), ou seja, como figura espacial e como figura planificada.

Um aplicativo utilizado pelos alunos foi o GeoGebra que é um programa de matemática dinâmica onde as aplicações de geometria favorecem a compreensão dos conceitos e de relações geométricas, tendo o aluno a possibilidade de observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas estimulando assim novas descobertas. Foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, em 2001, e destina-se para ensino de Geometria, Álgebra e Cálculo nas escolas de ensino básico. Sua interface simples se mostra de fácil entendimento a partir de um menu e uma lista desdobrável de 09 botões que oferecem várias possibilidades de construção. O software oferece a opção de inserir o plano cartesiano e a malha quadriculada na área de trabalho, o que ajudou a fazer a relação com os estudos feitos na sala de aula.

Gravina (1996) afirma que o aplicativo Geogebra pode ser trabalhado de duas maneiras: Na primeira os alunos constroem as figuras tendo como objetivo o domínio dos procedimentos para se obter a construção. Na segunda, o professor entrega as figuras prontas aos alunos para que estes possam reproduzi-las.

O software *Poly* também foi utilizado nas aulas realizadas na sala de tecnologia e está disponível no site http://www.peda.com/poly/. Com o uso do software o conceito de poliedro foi bastante explorado. Também os conceitos de planificação de um poliedro, de faces, arestas e vértices ficaram muito claros. Foi possível observar, por exemplo, que com a planificação de um poliedro, obtida rapidamente com o software, ficou mais fácil determinar o número de suas arestas e faces.

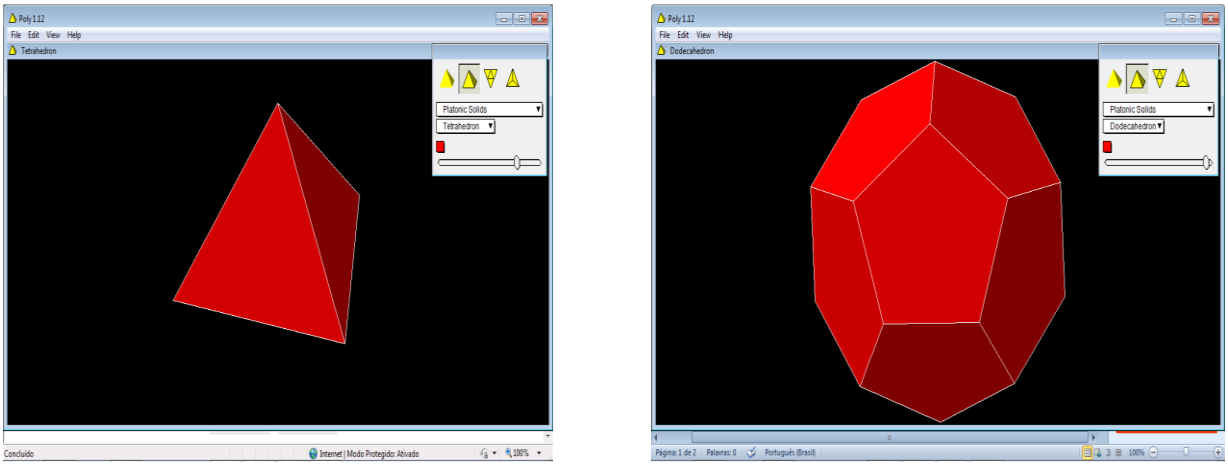


Figura 25: poliedros feitos no Poly

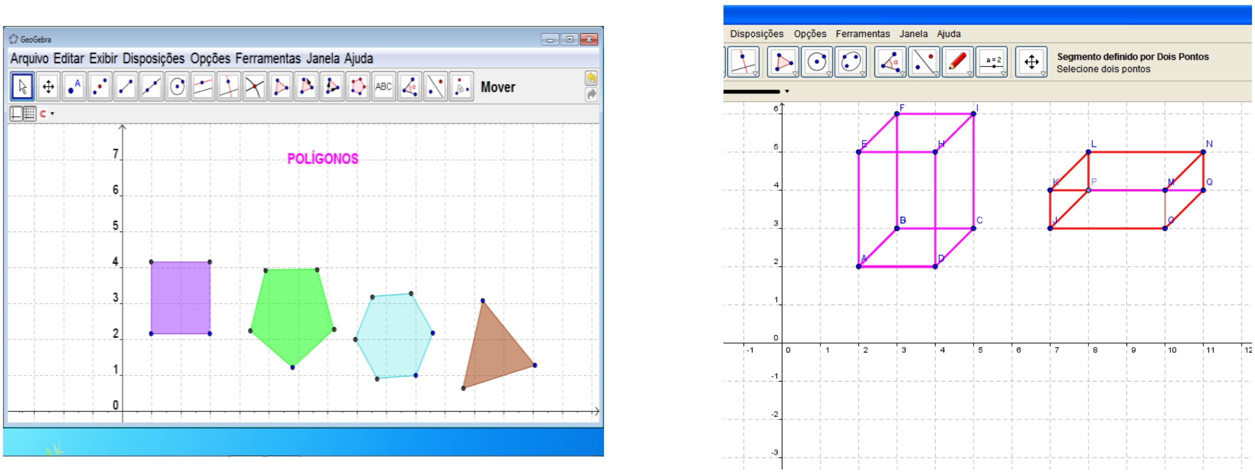


Figura 26: Figuras construídas no GeoGebra

3.6. Aliando geometria com arte

Segundo Fainguelernt e Nunes (2004, p. 39), “capacidade de perceber uma forma ou um objeto é fundamental para promover a aprendizagem de conceitos geométricos”. Matemática e Arte fazem parte do dia a dia de todos nós. Desde a Pré-história manifestações culturais foram comuns nas duas formas de expressão. “A matemática e a arte nunca estiveram em campos antagônicos, pois desde sempre caminharam juntas, aliando razão e sensibilidade” (FAINGUELERNT e NUNES).

A melhor forma de visualizar e compreender os poliedros é construí-los, observá-los, compará-los e modificá-los. Quando observamos um poliedro enxergamos como porção de espaço limitada por polígonos, construí-los utilizando sua planificação feita no papel ou cartolina, podemos formar assim diversas embalagens. Fazendo da sala de aula um ambiente propício para realizar descobertas, aliando criatividade, sensibilidade e motivação, os alunos confeccionaram caixas de diversas formas poliédricas onde ao final serviram para presentear crianças carentes, sendo assim possível aliar Matemática, Arte e Solidariedade. Os resultados foram surpreendentes e as aulas mais dinâmicas e motivadoras.

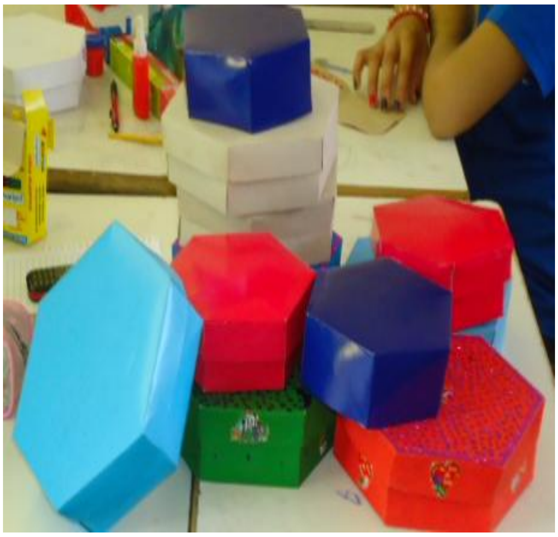


Figura 27: Embalagens para presentes.

Figura 28: Árvore de natal e embalagens para presentes.

3.7 Consolidando o que foi aprendido

Diversas atividades foram propostas aos alunos, entre elas a identificação de problemas onde os mesmos utilizariam os conceitos aprendidos sobre áreas e volumes. Livros da coleção das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas foram espalhados pela sala de aula e os alunos selecionaram exercícios que envolviam os conteúdos. Em clima de disputa puderam resolver exercícios que encontraram nos livros e desafiaram-se uns aos outros demonstrando grande envolvimento e interesse. O cálculo da capacidade de um aquário também foi da curiosidade dos alunos que fizeram a transformação do resultado para litros, descobrindo como aplicar os conhecimentos adquiridos em situações do seu cotidiano.

Novamente o computador foi utilizado como aliado nestas atividades, para pesquisar exercícios e resolvê-los como forma avaliativa do aprendizado.

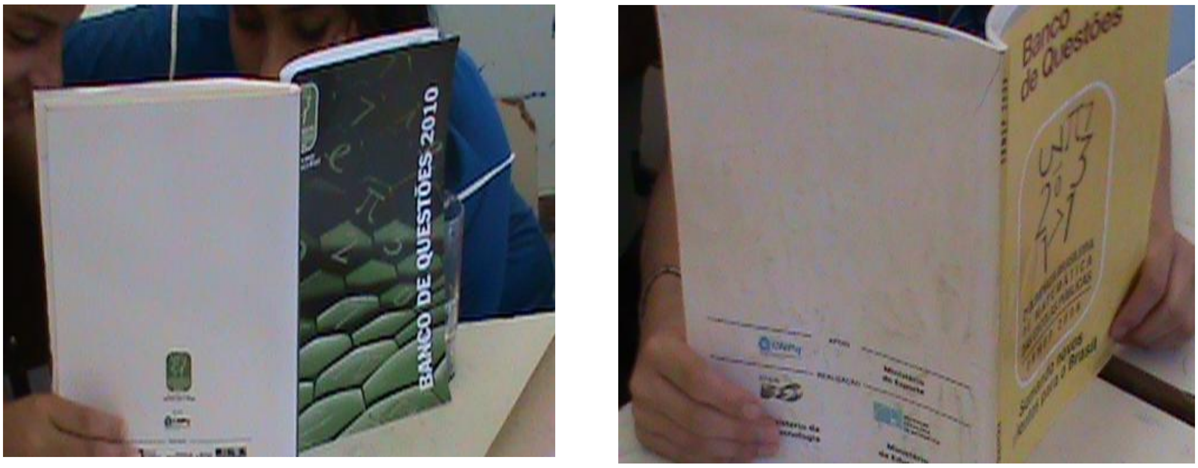


Figura 29 : Identificando exercícios sobre áreas e volumes.

Figura 30: Selecionando exercícios sobre áreas e volumes.

4. Considerações finais

O projeto, Alternativas para o Ensino de Geometria Espacial, foi desenvolvido na Escola Estadual Peri Martins com 30 alunos do 9º ano durante três semanas de aulas, envolvendo os conteúdos sobre geometria plana e espacial.

Durante o desenvolvimento do projeto os alunos construíram prismas, pirâmides, cones, cilindros e poliedros, podendo assim ter um contato direto com esses sólidos geométricos e destacarem seus elementos.

O desenvolvimento de diferentes estratégias de ensino com o auxílio da tecnologia, numa proposta pedagógica que tenha como centro o aluno, foi uma preocupação sempre presente. Sem dúvida o projeto proporcionou aos alunos a possibilidade de descobrir e construir um conhecimento geométrico espacial expressivo.

No desenvolvimento das atividades com softwares computacionais os alunos tiveram a oportunidade de visualizar e construir sólidos geométricos, construir figuras planas, calcular áreas e volumes confrontando com as resoluções feitas em sala de aula. O uso de recursos computacionais auxiliou os alunos a serem mais autônomos, pois possibilitou construir e visualizar os sólidos geométricos com mais facilidade, oportunizando a descoberta das propriedades e a exploração de suas relações de maneira dinâmica e divertida de aprender, levando o aluno a enxergar o computador como um aliado no aprendizado.

Motivados a serem pesquisadores e construtores de conhecimentos os alunos adquiriram maior confiança e puderam demonstrar isso nas avaliações aplicadas. Apenas como registro de resultados faço a seguinte observação: dos 30 alunos envolvidos 19 obtiveram médias acima de 6,0; 06 obtiveram médias 6,0 e apenas 05 tiraram notas abaixo da média, ou seja, apenas 16,6 % ficaram com notas abaixo da média, o que é um resultado positivo.

Podemos concluir que, ensinar geometria utilizando material concreto e recursos tecnológicos é uma alternativa interessante para minimizar a dificuldade de abstração, proporcionando um maior aproveitamento por parte dos alunos, pois à medida que o estudante tem a possibilidade de visualizar melhor os objetos a serem estudados na geometria espacial, então os conceitos e propriedades relativas a esses objetos são assimilados de forma mais natural, e finalmente o processo de aprendizagem da geometria espacial torna-se mais investigativo, dinâmico e produtivo.

5. Bibliografia e Referências

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1998.

CARVALHO, P.C.P. **Introdução à Geometria Espacial** – Rio de Janeiro: SBM, 2005

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. **Fazendo Arte com a Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

JESUS,A.G. **A Motivação para aprender Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental: um estudo do potencial dos materiais manipulativos e da construção de objetos na aprendizagem de área de polígonos e volume de prismas**. Monografia (Mestrado Profissional em Educação Matemática), Departamento de matemática, Ouro Preto, 2011

LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio** – v.2 – SBM 2006.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**: Geometria Euclidiana Plana. v.2. Coleção Professor de Matemática, SBM.

SIMONI, T. **Geometria Dinâmica Associada à Confecção Artesanal de Embalagens: Possibilidades para a abordagem de conceitos e relações sobre sólidos geométricos**. Monografia (Especialização em Ensino de Física e Matemática), Departamento de Ciências Exatas e da Terra, URI, Erechim, 2009.