

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

*O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO: UMA ABORDAGEM  
HISTÓRICA SOB A PERSPECTIVA ATUAL*

Erivaldo Ribeiro Santana

MANAUS

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Erivaldo Ribeiro Santana

*O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO: UMA ABORDAGEM  
HISTÓRICA SOB A PERSPECTIVA ATUAL*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira

MANAUS  
2015

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S232p Santana, Erivaldo Ribeiro  
O Problema da Quadratura do Círculo: : Uma Abordagem  
Histórica Sob a Perspectiva Atual / Erivaldo Ribeiro Santana. 2015  
85 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Disney Douglas de Lima Oliveira  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Quadratura do Círculo. 2. Quadraturas de Áreas Poligonais. 3.  
Números Construtíveis. 4. Números Algébricos. 5. Equivalência de  
Áreas. I. Oliveira, Disney Douglas de Lima II. Universidade Federal  
do Amazonas III. Título

ERIVALDO RIBEIRO SANTANA

O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO: UMA ABORDAGEM  
HISTÓRICA SOB A PERSPECTIVA ATUAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 30 de abril de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira  
Presidente

Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto  
Membro

Prof. Dr. João Xavier da Cruz Neto  
Membro

# AGRADECIMENTOS

A Deus, pela dádiva da vida, fé e força para superar os momentos difíceis de todas as caminhadas.

A minha mãe, pelo amor, dedicação, ensinamentos, incentivo, por fazer do meu sonho o seu também e por sempre acreditar em mim, não me deixando desistir de nada.

A minha tia, Francisca que mesmo de longe sempre incentivou e torceu pelas minhas conquistas.

A todos meus irmãos, em especial, à Elane, que mesmo com poucas condições me possibilitou as condições necessárias para seguir com os estudos até chegar a um dos focos principais: a universidade. Se não fosse por isso, talvez não tivesse chegado até aqui.

Aos meus filhos, Danilo e Erilane, que, mesmo sem saber, hoje são minha maior fonte de inspiração para meu crescimento profissional e pessoal. Que eu possa ter condições e sabedoria a fim de conduzi-los e proporcionar os melhores caminhos da vida, assim como minha mãe o fez, mesmo nas dificuldades, guiando-me de forma inquestionável.

A minha esposa, por ter estar sempre do meu lado e entender meus momentos de ausência.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira, por todas as orientações e o suporte ao longo da construção do trabalho, pela paciência, por compartilhar de suas experiências e pelo conhecimento que me trouxe mais esclarecimento e amadurecimento.

A todos os professores do curso PROFMAT, por seus ensinamentos e incentivos, aos amigos(as) do curso, pela amizade, conhecimento e carinho que partilhamos durante essa nossa caminhada e a CAPES pelo apoio financeiro

Ao amigo, professor Marcelo Barboza, pela amizade e colaboração de seus conhecimentos.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho tem o intuito de traçar o percurso das tentativas de solução da quadratura do círculo, bem como citar suas influências, contribuições para o desenvolvimento da matemática até os dias de hoje e incentivar o uso da geometria dinâmica. Nele apresentamos uma possível explicação de como surgiu a geometria, além de um breve estudo sobre o número  $\pi$ , seguido de uma apresentação do software GeoGebra, ferramenta que utilizamos para construção das figuras e das implementações do trabalho. Utilizaremos a equivalência de áreas baseada na obra dos elementos de Euclides para resolvermos um problema inicial: o de construir um quadrilátero equivalente a um pentágono dado e, para isso, será necessária a demonstração de algumas proposições. Utilizaremos o quadrado para relacionarmos a sua área com as das demais figuras poligonais pelo método da "quadratura". Com isso, executaremos as quadraturas do retângulo, triângulo, pentágono e do polígono convexo de  $n$  lados. Utilizaremos o Teorema de Pitágoras para somarmos áreas de quadrados, tecendo breves comentários acerca de seu uso. Posteriormente esse método também foi utilizado na tentativa de quadrar-se áreas de figuras curvilíneas, como o círculo, no que mais tarde originou o **problema da quadratura do círculo**. Para a exposição deste problema mostraremos a construção geométrica e a demonstração de dois métodos para obtermos a quadratura do círculo e seus respectivos resultados e comparações. Em seguida, definiremos o que são números construtíveis, algébricos e transcendentos, o que nos possibilitará chegar a uma classificação do número  $\pi$  e sua relação com o problema da quadratura do círculo, chegando à resposta do nosso problema. Ao definirmos a média geométrica, mostraremos como obter algumas quadraturas utilizando essa média nas atividades propostas. Em outras palavras, podemos dizer que este trabalho objetiva apresentar o problema da quadratura do círculo, a investigação de métodos desenvolvidos por matemáticos para resolução deste problema ao longo da história e finalmente uma constatação acerca da resposta que estes métodos nos apontam.

Palavras-chave: Quadratura do círculo, Quadraturas de áreas poligonais, Número  $\pi$ , Equivalências de áreas, Números construtíveis, Números algébricos, Números transcendentos.

# ABSTRACT

This work bears the purpose of setting up the course of the circle quadrature solution attempts, as well as to mention its influences, contributions for the mathematics development until now and to incentive the geometry dynamics use. In it we produce a possible explanation of how geometry has been created besides of a brief study on the  $\pi$  number followed of the production GeoGebra software, the too we have utilized to build up the figures and the work implementations. We will utilize the areas equivalence based on Euclides elements to solve an initial problem: that of constructing a quadrilateral equivalent to a given pentagon and, for such, it will be necessary the demonstration of some propositions. We will utilize the square to relate its areas with those of the polygonal figures through the "quadrature" method. With such we will execute the rectangle, triangle, pentagon quadrature, and that of the convex  $n$  sides polygon. We will utilize Pitagoras theorem to sum up the squares areas by bringing up brief comments about its use. Afterward this method will also be utilized in the attempt of squaring the curvelin figures such as the circle which has later on originated the problem of the circle quadrature. For explain such a problem we will utilize the geometric construction along with the demonstration of two methods for obtaining the circle quadrature and its respective results and comparisons. In the sequence, we will know what are constructive numbers, algebraic and transcendent, which will enable us to reach to a classification of the  $\pi$  number and its relation to the circle quadrature problem, reaching out the answer to our problem. While defining the geometrical average we will demonstrate how to obtain some quadrature utilized in such an average in the proposed activities. In other words, we can say that this work aims to produce the circle quadrature problem, the investigation of the methods developed by mathematicians for the solution of this problem in the course of history and, finally, an ascertainment on the answer these methods point us.

Keywords: Circle quadrature, Polygonal areas quadrature,  $\pi$  number, Areas equivalences, Constructive numbers, Algebraic numbers, Transcendent numbers.

# LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$\equiv$	Congruente.
$\cong$	Aproximado.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\subset$	Contém.
$\in$	Pertence.
$\notin$	Não pertence.
$//$	Paralelo.
$\perp$	Perpendicular.
$\exists$	Existe.
$\infty$	Infinito.
$\forall$	Para todo.
$S$	Área.
$S_R$	Área do Retângulo.
$S_T$	Área do Triângulo.
$S_C$	Área do Círculo.
$S_Q$	Área do Quadrado.
$S_O$	Área do Octógono.
$Pol$	Polígono.
$M_G$	Média Geométrica.
$M_P$	Média Proporcional.
$\overline{AB}$	Segmento AB.
$\widehat{ABC}$	Medida do ângulo ABC.
$\triangle ABC$	Triângulo ABC.
$[W : K]$	A dimensão de $W$ é o grau da extensão $K$ .
$K   L$	$K$ é uma extensão de $L$ .
■	Indica o fim de uma demonstração.

# Lista de Figuras

1.1	Quadratura do Círculo . . . . .	5
1.2	Círculo $\cong$ Octógono . . . . .	7
1.3	Áreas $S_C \cong S_Q$ . . . . .	8
1.4	Polígono inscrito e circunscrito em uma circunferência . . . . .	12
1.5	Triangulação do Círculo . . . . .	12
1.6	Construção do segmento $\sqrt{2}$ . . . . .	13
1.7	Dispositivo de Teodoro . . . . .	14
1.8	Janela Inicial do GeoGebra . . . . .	16
2.1	Polígono $V_1V_2V_3V_4V_5$ equivalente ao paralelogramo $M_1M_4N_1N_4$ . . . . .	20
2.2	Polígono equivalente ao Paralelogramo . . . . .	21
2.3	Paralelogramo $DBFE$ equivalente ao triângulo $ABC$ . . . . .	21
2.4	Paralelogramo $GMKB$ equivalente ao triângulo $ABC$ . . . . .	23
2.5	Quadratura do Retângulo . . . . .	25
2.6	Retangularização do Triângulo . . . . .	28
2.7	Quadratura do triângulo . . . . .	28
2.8	$\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ . . . . .	29
2.9	Pentágono equivalente ao quadrilátero que é equivalente ao triângulo . . . . .	30
2.10	Quadratura do triângulo . . . . .	30
2.11	Polígono de $n$ lados $V_1V_2V_3\dots V_n$ equivalente ao de $n - 1$ lados $V_1V'V_4V_5\dots V_n$ . . . . .	31
2.12	Quadratura do polígono convexo $n$ lados . . . . .	32
2.13	Polígono côncavo $V_1V_2V_3V_4V_5$ equivalente ao polígono convexo $V_1V_2V_3V_6$ . . . . .	33
2.14	Teorema de Pitágoras . . . . .	33
2.15	Somas das áreas dos quadrados . . . . .	34
3.1	Círculo de diâmetro $\overline{AB}$ . . . . .	37
3.2	Semicírculo de diâmetro $CD$ e o segmento $\overline{BE}$ . . . . .	38
3.3	Semicírculo de diâmetro $AE$ e o segmento $\overline{HI}$ . . . . .	38
3.4	Quadrado $HIMK$ obtido pelo Método de Ernest Hobson . . . . .	39
3.5	Triângulo retângulo $HOO'$ . . . . .	40
3.6	Triângulo retângulo $IOO''$ . . . . .	41
3.7	Triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência . . . . .	43

3.8	Método de Srinivasa Ramanujan 1 . . . . .	43
3.9	Método de Srinivasa Ramanujan 2 . . . . .	44
3.10	Método de Srinivasa Ramanujan 3 . . . . .	44
3.11	Quadrado $BDPR$ obtido pelo Método de Srinivasa Ramanujan . . . . .	45
3.12	Teorema de Tales . . . . .	46
3.13	Circulatura do quadrado . . . . .	50
3.14	Circulatura do quadrado - Quadrado $\cong$ Círculo . . . . .	50
4.1	Pontos construtíveis 1 . . . . .	54
4.2	Pontos construtíveis 2 . . . . .	55
4.3	Pontos construtíveis 3 . . . . .	55
4.4	Paralelogramo $ABCD$ . . . . .	56
4.5	Ponto $A$ construtível . . . . .	56
5.1	Segmento $x$ . . . . .	61
5.2	Triângulo retângulo . . . . .	62
5.3	Média geométrica $x$ . . . . .	63
5.4	Retângulo $ABCD$ . . . . .	64
5.5	Quadratura do retângulo . . . . .	64
5.6	Retângulo Equivalente ao Quadrado . . . . .	65
5.7	Triângulo $ABC$ . . . . .	66
5.8	Quadratura do triângulo . . . . .	66
5.9	Triângulo equivalente ao quadrado . . . . .	67
5.10	Trapézio $ABCD$ . . . . .	68
5.11	Quadratura do trapézio . . . . .	68
5.12	Trapézio equivalente ao quadrado . . . . .	69
5.13	Triângulo $ABC$ . . . . .	70
5.14	Triângulo equivalente ao quadrilátero . . . . .	70

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Histórico das Quadraturas</b>	<b>2</b>
1.1 Um pouco de História . . . . .	2
1.1.1 A solução da Quadratura do Círculo encontrada no Papiro de Rhind . . .	5
1.2 A vida do número $\pi$ . . . . .	9
1.2.1 Nomenclatura do número $\pi$ . . . . .	9
1.2.2 Cálculo do valor de $\pi$ . . . . .	10
1.2.3 Arquimedes . . . . .	10
1.2.4 Números Racionais e Irracionais . . . . .	13
1.3 GeoGebra . . . . .	15
1.3.1 Da Geometria tradicional à geometria dinâmica . . . . .	16
<b>2 Equivalência de Áreas</b>	<b>18</b>
2.1 Euclides e a Geometria . . . . .	18
2.2 Áreas Equivalentes por Euclides . . . . .	19
2.3 Quadraturas de Áreas Poligonais . . . . .	24
2.3.1 Quadratura do Retângulo . . . . .	25
2.3.2 Quadratura do Triângulo . . . . .	27
2.3.3 Quadratura do Pentágono . . . . .	29
2.3.4 Quadratura do Polígono convexo de $n$ lados . . . . .	31
2.4 Teorema de Pitágoras . . . . .	33
<b>3 Quadratura do Círculo</b>	<b>36</b>
3.1 Métodos de Quadratura do círculo . . . . .	37
3.1.1 Método de Ernest Hobson . . . . .	37
3.1.2 Método de Srinivasa Ramanujan . . . . .	42
3.1.3 Método de Erenest Hobson x Srinivasa Ramanujan da Quadratura do Círculo . . . . .	49
3.2 Circulatura do quadrado . . . . .	50

<b>4</b>	<b>Pontos e Números Construtíveis</b>	<b>53</b>
4.1	Pontos Construtíveis . . . . .	53
4.2	Números Algébricos e números Transcendentes . . . . .	57
4.2.1	Grau de um número algébrico . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Atividades</b>	<b>61</b>
5.1	Média geométrica . . . . .	61
5.2	Quadratura do Retângulo usando a média geométrica . . . . .	64
5.3	Quadratura do Triângulo usando a média geométrica . . . . .	66
5.4	Quadratura do Trapézio usando a média geométrica . . . . .	68
5.5	Do triângulo ao quadrilátero equivalente . . . . .	70
	<b>Considerações Finais</b>	<b>71</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>73</b>

# Introdução

A motivação para a escolha do tema está relacionada ao problema da quadratura do círculo, indagação que fez história nos anais da matemática por apresentar um grande desafio de resolução. Seu mistério despertou o interesse de muitos matemáticos ao longo dos séculos, percorrendo diversas tentativas de resposta e traçando uma verdadeira "odisseia" que impulsionou infinitas de estudos e descobertas relevantes para o campo da matemática. Pode-se dizer que, ainda que a problemática da quadratura do círculo não apresente uma solução imediata, é fato que a complexidade de sua pesquisa contribuiu significativamente para o desenvolvimento e evolução da ciência da matemática.

A facilidade que temos hoje de calcular áreas de figuras geométricas não era a mesma na antiguidade, uma vez que esses cálculos não se resumiam a atribuições de fórmulas para chegar-se ao valor de uma área. Antes, a área das figuras geométricas era mensurada por meio de equivalências, relacionando-as ao quadrado - visto ser considerado a figura mais simples - o que resultou num método denominado de "quadratura", que consiste em construir um quadrado de mesma área a uma figura dada. Posteriormente, esse método ampliou seu campo de atuação, abrangendo também algumas áreas curvilíneas como o círculo para que, da mesma forma, sua quadratura pudesse ser executada.

Por trás da simplicidade do enunciado de quadrar o círculo, ficaram marcados os exaustivos esforços de muitos estudiosos na busca de uma solução que contemplates a dificuldade apresentada em construir-se um quadrado, com instrumentos euclidianos, que fosse equivalente à área do círculo. Para isso, foram necessários milhares de anos até que as tentativas de resolução dos obstáculos encontrados levassem os matemáticos a se aprofundarem na natureza do  $\pi$ , revelando sua real importância para com o problema da quadratura do círculo. Tal constatação conduziu os estudiosos a um novo nível de pesquisa, visto que, para alcançar a possível quadratura de um círculo, primeiramente fazia-se necessário uma classificação exata da real natureza do  $\pi$ , de modo que fosse comprovada a construtibilidade do segmento  $\sqrt{\pi}$ . Em suma, pode-se afirmar que apenas será possível a quadratura do círculo caso o segmento  $\sqrt{\pi}$  seja construtível. Em outras palavras, esta é a verdadeira motivação por trás de inúmeros métodos investigados no decorrer da história, como também será a problemática que conduzirá as discussões apresentadas neste trabalho, no sentido de chegar a uma conclusão sobre a resolução da quadratura do círculo.

# Capítulo 1

## Histórico das Quadraturas

Neste capítulo inicial, mostraremos como e onde é provável ter-se originado a geometria, bem como as informações que tivemos conhecimento através de documentos matemáticos e a primeira tentativa da quadratura do círculo. Em seguida, faremos um breve comentário a respeito do número  $\pi$  e do software Geogebra, programa que utilizaremos para algumas implementações no transcorrer do trabalho.

### 1.1 Um pouco de História

A matemática se desenvolveu, e continua a desenvolver-se, a partir de problemas. Exibir tais problemas, por vezes ocultos no modo como seus resultados se formalizaram, tem sido o papel da história da matemática.

Segundo Boyer [1], Heródoto <sup>1</sup> (conhecido como "Pai da história") acredita que a geometria se originou no Egito. Teria ele chegado a essa conclusão devido à necessidade prática de realizar-se medições exatas nas terras que eram concedidas proporcionalmente a todos por meio de partilha, com a condição de ser pago um certo tributo segundo a porção recebida. Novas medições eram necessárias devido às inundações causadas pelo rio Nilo que aconteciam anualmente fazendo com que as demarcações de terras fossem apagadas. Se o rio carregasse parte da porção de alguém, o rei era procurado para determinar a redução no imposto. Para isso, ele enviava agrimensores ao local a fim de averiguar a dimensão da redução, recalculando o novo valor do imposto proporcional ao que restara.

Os problemas geométricos e aritméticos tiveram suas primeiras soluções de maneira prática e sem preocupações com a fundamentação teórica. As resoluções eram alcançadas através de tentativas, erros e sucessivas experimentações. Tal procedimento era realizado até que os problemas fossem superados um a um. O aprendizado se dava de maneira empírica, em um processo de observação dos padrões que se repetiam. Isso fazia com que os pioneiros acreditassem que estavam diante da verdade.

---

<sup>1</sup>Heródoto - Historiador grego nascido em Halicarnasso, na Ásia Menor (485-425 a.C.).

A determinação da área de uma figura geométrica é um dos desafios mais antigos estudados na matemática. Essa ideia de áreas surge com as necessidades do cotidiano, chegando até nós por meio de problemas relatados em alguns documentos de natureza matemática - os quais resistiram ao desgaste do tempo por mais de três milênios - trazendo consigo inúmeros cálculos de geometria, aritmética e álgebra, junto a suas respectivas resoluções. Dentre esses textos, destacamos o papiro de Moscou ou Golonishev <sup>2</sup> e o papiro de Rhind ou de (Ahmes) como as principais fontes de informações matemáticas.

Segundo, Garbi [6] O papiro de Rhind é um documento matemático de natureza egípcia datado por volta de 1650 a.C e escrito pelo escriba <sup>3</sup> de nome Ahmes, utilizando a escrita hierática <sup>4</sup>. O papiro ensina e detalha a solução de 85 problemas de aritmética e geometria copiados de um manuscrito ainda mais antigo. Recebeu esse nome em homenagem a Alexander Henry Rhind, um antiquário escocês que encontrou este papiro no final do século XIX por volta de 1850, em Luxor, às margens do Rio Nilo, no Egito. Em sua maior parte, o documento permanece até os dias de hoje exposto no Museu Britânico, em Londres, e uma pequena parte no Museu do Brooklyn.

O conteúdo do papiro demonstra a importância do estudo sobre áreas e o quanto os egípcios tinham familiaridade com problemas relacionados a determinação de áreas de figuras geométricas. Entretanto, é relevante frisarmos que essas medidas não eram atribuídas de modo numérico, mas por meio de comparações, na tentativa de construir-se um quadrado com área equivalente à figura dada.

Cálculos de áreas eram mais que uma necessidade das civilizações antigas e, de forma intuitiva, o quadrado era a figura mais simples para o cálculo de sua área. Esse seria o real motivo de relacionar outras figuras (como retângulo, triângulo, entre outros polígonos) com o quadrado. Daí vem a expressão ou termo "quadratura", que consiste em construir um quadrado equivalente à figura geométrica dada com régua não graduada e compasso, sendo que a escolha do termo está associada ao fato intuitivo do quadrado ser uma das figuras geométricas mais simples dentre todas as existentes. Após quadrar-se qualquer polígono, surgem regiões não poligonais (regiões curvas) e então as dificuldades de fazer sua quadratura.

Dos muitos problemas e dificuldades históricos da matemática, alguns ficaram muito famosos na Geometria grega pela sua beleza ou pela dificuldade de resolvê-los. Durante as tentativas de resolução, surgiu uma infinidade de estudos que promoveram diversos avanços na geometria, além de novas ideias para solucionar outros problemas, contribuindo significativamente, de um modo geral, para o desenvolvimento da matemática em seus mais diversos ramos.

Dentre os problemas da antiguidade, destacaremos os três considerados mais famosos na história da matemática devido tanto à sua complexidade de resolvê-los, quanto aos seus muitos mistérios que foram sendo desvendados ao longo das infinitas tentativas de resolução.

---

<sup>2</sup>Papiro de Moscou (1890 a.C aproximadamente)-Foi escrito por um escriba desconhecido e comprado no Egito em 1893.

<sup>3</sup>Escriba - Escriturário egípcio.

<sup>4</sup>Escrita Hierática - Uma forma simplificada da escrita hieroglífica.

- **Duplicação do Cubo** - Construir um cubo que tem o dobro do volume de outro cubo
- **Trissecção do ângulo** - Dividir um ângulo em três partes iguais
- **Quadratura do Círculo** - Construir um quadrado que tenha área igual a de um círculo

O problema da Quadratura do círculo talvez seja o mais célebre de toda a história da matemática, sendo considerado o mais difícil pelos gregos. Consiste-se no seguinte: Dado um círculo, deve-se construir um quadrado com a mesma área do círculo, utilizando apenas instrumentos Euclidianos (régua não graduada e um compasso) com um número de etapas finitas.

Essa era mais uma das quadraturas que fascinavam os geômetras gregos, atravessando vários séculos em busca de uma resolução. Apareceram muitas tentativas que mais tarde foram contrariadas por outras soluções, demonstrando os possíveis erros.

Atenas tinha um ambiente intelectual que atraiu muitos estudiosos do mundo grego. Dentre os que vieram da Jônia, destaca-se Anaxágoras de Clazomenae (499 - 427 a.C), um filósofo da natureza com ampla habilidade matemática que realizava diversas investigações relacionadas ao universo matemático.

Por expressar seu espírito filosófico, foi preso em Atenas ao afirmar que o sol não era uma divindade, mas se tratava de uma grande pedra incandescente; e a lua seria uma terra habitada que emprestava do sol sua luz. Enquanto esteve preso, Anaxágoras ocupou-se em tentar quadrar o círculo.

Embora não haja relatos conclusivos de quem de fato propôs este problema, existem registros bibliográficos de que Anaxágoras foi um dos primeiros a tentar resolvê-lo. Fato curioso é que tal problema viria a ser objeto de fascínio de muitos matemáticos por milhares de anos.

Os detalhes, a natureza do problema e as regras a serem utilizadas para sua resolução ainda não haviam sido mencionadas. Só depois de algum tempo fixou-se a regra de resolução: o problema deveria ser resolvido apenas com régua não graduada e compasso.

Inúmeras pesquisas foram feitas com o propósito de solucionar o problema, chegando a gerar uma discussão entres os matemáticos do século XVI se de fato existiria tal resolução, cogitando-se demonstrar a impossibilidade de resolver o problema.

Depois de muito empenho e esforço dos matemáticos na tentativa de resolver esse e outros problemas, o desenvolvimento da matemática foi impulsionado através de novas teorias que levaram a outras descobertas como secções cônicas, estudo das curvas, teoria dos grupos, etc.

A seguir, faremos a solução algébrica da quadratura do círculo com os recursos e fórmulas que conhecemos nos dias de hoje.

Supondo que a unidade de medida é tal que o raio do círculo é 1 e o quadrado de lado  $l$ , temos então que construir um quadrado de mesma área que a do círculo.

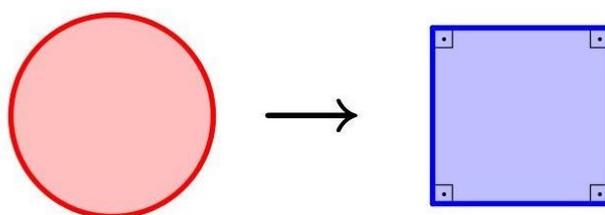


Figura 1.1: Quadratura do Círculo

Consideremos:

Área do círculo de raio  $r$  é dada por  $S_C = \pi r^2$  e a área do quadrado de lado  $l$  é dada por  $S_Q = l^2$ .

Igualando  $S_C$  e  $S_Q$ , teremos:

$$S_C = S_Q \quad \Rightarrow \quad \pi r^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad l = r\sqrt{\pi}$$

Como  $r = 1$ , então:

$$l = 1\sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{\pi}$$

Portanto, para que o círculo de raio unitário tenha a mesma área que o quadrado de lado  $l$  pelo cálculo algébrico, constatamos que  $l = \sqrt{\pi}$ .

Diante disso, a solução algébrica da quadratura do círculo é dada quando  $l = \sqrt{\pi}$ .

Para solucionar o problema de maneira completa, precisamos fazer a construção geométrica com o valor encontrado para o lado do quadrado, ou seja, precisaremos construir o segmento cujo comprimento seja  $l = \sqrt{\pi}$ . Porém, esse segmento só poderá ser construído se, e somente se, o número  $\sqrt{\pi}$  for construtível<sup>5</sup>, assunto que veremos mais adiante.

A fim de encontrar a solução geométrica, é preciso obedecer às regras estipuladas para a solução do problema. Em outras palavras, utilizar o compasso, régua não graduada e um número finito de etapas.

A seguir, mostraremos uma tentativa de solução da quadratura do círculo encontrada no Papiro de Rhind. Essa solução foi feita sem o conhecimento do problema.

### 1.1.1 A solução da Quadratura do Círculo encontrada no Papiro de Rhind

A solução encontrada no Papiro de Rhind foi feita de forma injustificada por Ahmes, onde o lado do quadrado deveria ter como medida  $8/9$  do diâmetro do círculo para que a área do quadrado fosse igual à do círculo:

---

<sup>5</sup>Número Construtível - Seja  $a$  um número real positivo e será construtível se conseguirmos construir um segmento cuja medida do comprimento é  $a$  utilizando apenas o compasso e uma régua não graduada em número finito de passos a partir de um segmento tomado como unidade.

Em um dos problemas do papiro de Rhind, mais precisamente o problema 50, Ahmes afirma que a área de um campo circular cujo diâmetro mede nove unidades é igual à área de um quadrado que mede 8 unidades de lado.

Faremos o cálculo e a comparação entre as áreas do círculo e do quadrado com as medidas dadas no papiro de Rhind e veremos sua consequência.

Para nossa conveniência, vamos empregar conceitos e fórmulas atuais, de modo que analisemos e comparemos os valores obtidos a partir de problemas da antiguidade com os valores calculados utilizando recursos atuais.

Consideremos:

Área do círculo  $S_C = \pi r^2$  e diâmetro  $D = 9u$ , sendo  $D = 2r$ ;

Área do quadrado  $S_Q = l^2$  de lado  $l = 8u$ ;

Igualando  $S_C$  e  $S_Q$ , teremos:

$$S_C = S_Q \Rightarrow \pi r^2 = l^2$$

Como  $l = 8u$  e  $D = 2r \Rightarrow r = \frac{D}{2} \Rightarrow r = \frac{9}{2}$ , então:

$$\pi r^2 = l^2 \Rightarrow \pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 \cong 8^2 \Rightarrow \pi \cong 3,1604938\dots$$

Ao observarmos o valor calculado utilizado pelos egípcios comparado com o valor real de  $\pi = 3,14159265\dots$ , podemos observar uma diferença de  $0,01890117\dots$  entre seus valores, o que equivale a uma excelente aproximação de  $99,39\%$  para aquela época.

Já o problema 48 mostra uma possível solução de como os egípcios chegaram ao cálculo da área do círculo.

Não sabemos como eles encontraram esse método. O procedimento a seguir é apenas uma possível explicação de forma generalizada do problema.

A partir de um círculo de diâmetro  $D$  inscrito num quadrado de lado  $l$ , esses lados foram divididos em três partes iguais com os segmentos conectados pelos terços médios, formando quatro triângulos isósceles, o que resulta num octógono não regular. Aparentemente, este octógono não difere muito de um círculo de diâmetro  $D$  inscrito num quadrado, ou seja, sua área é semelhante à de um círculo.

Consideremos:

- $S_C$  a área do círculo dada por  $S_C = \pi r^2$  e diâmetro  $D$ ;
- $S_Q$  a área do quadrado dada por  $S_Q = l^2$  de lado  $l = D$ ;
- $S_T$  a área do triângulo dada por  $S_T = \frac{b \times h}{2}$ , onde  $b$  é a base e  $h$  a altura;
- $S_O$  a área do octógono dada por  $S_O = S_Q - 4S_T$ .

**Construção Geométrica 1.1** (Da Quadratura do Círculo encontrada no Papiro de Rhind).

Tracemos um círculo de diâmetro  $D$  e circunscrevamos com um quadrado de  $l = D$  como mostra a Figura 1.2(a);

Triseccionemos cada lado em 3 partes iguais e conectemos os terços médios desses lados obtendo o octógono da Figura 1.2(b);

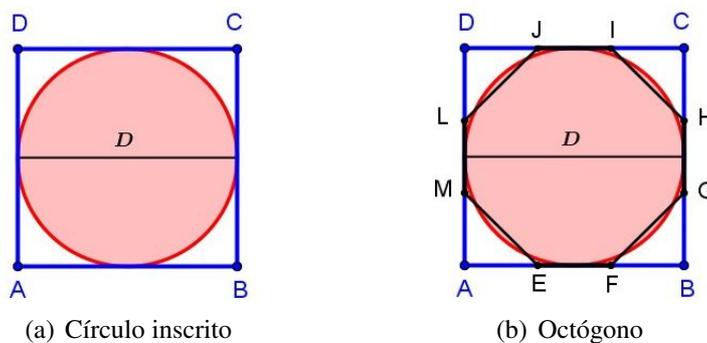


Figura 1.2: Círculo  $\cong$  Octógono

Por construção, temos quatro triângulos retângulos isósceles congruentes entre si ( $\triangle AEM \equiv \triangle BFG \equiv \triangle CHI \equiv \triangle DJL$ ) que são formados pelos terços médios dos lados do quadrado como mostra a Figura 1.2(b) sendo a soma de suas áreas igual a  $4S_T$  e tomando como referência o  $\triangle AEM$  temos que  $h = \overline{AM} = \overline{AE} = \frac{D}{3}$ , ou seja,  $b = h = \frac{D}{3}$ .

- Para o triângulo, teremos:

Como  $b = h = \frac{D}{3}$ , então:

$$S_T = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow S_T = \frac{\frac{D}{3} \times \frac{D}{3}}{2} \Rightarrow S_T = \frac{D^2}{18}$$

- Para o quadrado, teremos:

Como  $l = D$ , então:

$$S_Q = l^2 \Rightarrow S_Q = D^2$$

- Para o octógono, teremos:

Como  $S_T = \frac{D^2}{18}$  e  $S_Q = D^2$ , então:

$$S_O = S_Q - 4S_T \Rightarrow S_O = D^2 - 4 \times \frac{D^2}{18} \Rightarrow S_O = \frac{7}{9}D^2$$

Desse ponto em diante Ahmes fez algumas aproximações, vejamos:

Pelos cálculos anteriores, encontramos a área do octógono igual a  $\frac{7}{9}D^2$ . Daqui em diante, Ahmes fez uma modificação nesse valor, obtendo  $S_O = \frac{63}{81}D^2$  e em seguida o aproximou para  $S_O \cong \frac{64}{81}D^2$ , resultando assim em  $S_O \cong \left(\frac{8}{9}D\right)^2$ .

Logo, a área do octógono é  $S_O = \left(\frac{8}{9}D\right)^2$  e, como foi dito, é bem próxima da área do círculo  $S_C$ .

Portanto, as áreas são apenas aproximadas  $S_C \cong S_O$  e a área do círculo pode ser dada por  $S_C \cong \left(\frac{8}{9}D\right)^2$ .

Com o resultado obtido anteriormente da área do círculo calculado pelo possível método de Ahmes, faremos a igualdade deste com a área do quadrado  $S_Q$ .

$$S_C = S_Q \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{9}D\right)^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{8}{9}D$$

Da igualdade acima, temos que  $l = \frac{8}{9}D$ .

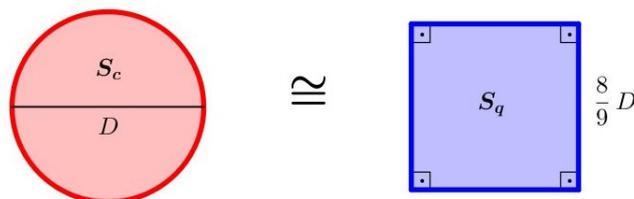


Figura 1.3: Áreas  $S_C \cong S_Q$

Com isso, mostramos como Ahmes chegou a sua conclusão de que o quadrado deveria ter  $l = \frac{8}{9}D$  e esse valor nos dá a primeira tentativa de solução da quadratura do círculo, ou seja, para que a área do círculo seja igual à de um quadrado.

Portanto, essa tentativa nos mostra apenas uma aproximação ( $S_C \cong S_Q$ ) entre às áreas do círculo de diâmetro  $D$  e do quadrado de lado  $\frac{8}{9}D$ .

# O número $\pi$

## 1.2 A vida do número $\pi$

Antecipadamente, mencionamos o número  $\pi$  nos cálculos algébricos e mostramos um valor encontrado pelos egípcios, calculado e aproximado de 3,16. Vale lembrar que, na época da quadratura do círculo, outras civilizações também tinham seus valores aproximados. O símbolo de  $\pi$  ainda não possuía a nomenclatura que conhecemos hoje e não se conhecia cálculo que nos desse um valor matematicamente preciso. Esse é o momento oportuno para se falar a respeito do número  $\pi$ .

### 1.2.1 Nomenclatura do número $\pi$

É um número representado pela 16ª letra do alfabeto grego. O  $\pi$  (*lê-se pi*), segundo Garbi [5], a letra grega foi escolhida por ser a primeira da palavra "**periférea**" ( $\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon'\rho\epsilon\iota\alpha$ ) como era chamada a circunferência pelos gregos. Os primeiros a utilizar a letra grega foram os matemáticos ingleses. Em 1647, o matemático Inglês William Oughtred foi quem a usou pela primeira vez quando se referiu ao comprimento da circunferência. Mas, em 1706, outro inglês (William Jones), no seu livro *Synopsis Palmariorum Matheseos*, foi o primeiro a utilizá-la com sua definição atual de razão constante. O símbolo do  $\pi$  só ficou popularizado depois de ser utilizado pelo grande matemático Leonahrd Euler <sup>6</sup> em 1736 e, com isso, veio a aceitação e reconhecimento da sua notação pela comunidade científica. O uso passou a ser mais sistematizado pelos matemáticos depois que ele usou o símbolo no seu livro *Introduction in Analysin Infinitorum*.

O número  $\pi$  aparece na matemática como sendo a razão do perímetro ou comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro. Do problema em encontrar o comprimento da circunferência, onde o diâmetro era conhecido, os geômetras da antiguidade observaram que essa razão era constante e que quanto maior o diâmetro, maior o comprimento. Em outras palavras, o diâmetro e o comprimento são proporcionais.

---

<sup>6</sup>Leonhard Euler (1707 - 1783) morreu na Basileia.

Com isso, traremos de uma definição para o número  $\pi$  dentre as milhares existentes até hoje:

**Definição 1.1** (Número  $\pi$ ). *É uma razão constante entre a medida do comprimento do perímetro de uma circunferência qualquer e a medida do comprimento do diâmetro desta circunferência.*

Considere o comprimento da circunferência indicado por  $C$  e seu diâmetro por  $D$ . O valor de  $\pi$  é a razão constante  $\frac{C}{D}$  em qualquer circunferência. Seja qual for o diâmetro ou o comprimento da circunferência, essa razão será sempre a mesma. Diante disso, chegamos à fórmula que conhecemos hoje, que é  $\pi = \frac{C}{D}$  e como consequência, temos  $C = \pi D$ , onde  $D = 2r$ . Portanto,  $C = 2\pi r$ .

### 1.2.2 Cálculo do valor de $\pi$

O número  $\pi$  é muito famoso na matemática. Trouxe consigo uma beleza fascinante na tentativa de desvendar seus mistérios, ou seja, conhecer sua natureza. Contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da matemática. Exemplo disso foi a tentativa de encontrar algum tipo de regularidade em sua expansão decimal, experiência que levou muitos matemáticos a explorarem a complexidade desse número. Eles procuravam cada vez mais dígitos em sua parte decimal a fim de verificar a existência de um padrão que permitisse sua classificação como número natural, irracional, racional, etc.

### 1.2.3 Arquimedes

Arquimedes, de Siracusa<sup>7</sup> é considerado um dos maiores matemáticos de toda a antiguidade, reconhecido como um dos mais notáveis do período pós euclidiano. Embora tenha nascido e morrido em Siracusa, estudou algum tempo em Alexandria com os discípulos de Euclides. Suas obras destacam-se pela originalidade, enquanto sua metodologia possui uma estrutura bastante distinta daquela que caracteriza o padrão euclidiano, uma vez que não apresenta tipologia axiomática na forma de como expõe seus resultados, nem possui indícios de influência do estilo presente nos (*Os Elementos de Euclides*) uma das obras mais conhecida e importante, escritas por Euclides que veremos mais adiante.

Suas construções privilegiavam o uso de métodos como a espiral de Arquimedes e a neusis (método de construção geométrica que foi usado na antiguidade por matemáticos gregos), usada para a solução do problema da trisseção do ângulo. No livro "*O Método dos Teoremas Mecânicos*", Arquimedes demonstra mais uma de suas preferências ao utilizar métodos que envolvam movimentos mecânicos para suas construções geométricas. Fato é que, tanto a extensão de sua obra quanto sua originalidade auxiliaram grandemente para o desenvolvimento das ciências exatas.

---

<sup>7</sup>Arquimedes, de Siracusa - Nasceu na cidade de Siracusa, na ilha da Sicília (286 a.C. - 212a.C.).

Das muitas contribuições de Arquimedes para o campo da física e da matemática, destacaremos a área da figura curvilínea, o círculo e o cálculo do valor de  $\pi$ .

Antes de Arquimedes desenvolver seus estudos acerca do  $\pi$ , nenhum matemático havia encontrado um forma rigorosa de calcular o valor dessa constante. Pode-se dizer que ele foi responsável pelo primeiro método sofisticado para determinar o valor de  $\pi$  com uma maior precisão nas suas casas decimais.

Os métodos usados por Arquimedes no estudo de áreas de figuras curvilíneas apontam uma influência de Eudoxo. Esse estudo girava em torno do problema da quadratura do círculo.

Segundo, Tatiana [15] o método de Eudoxo, do século. V a.E.C., consistia em circunscrever polígonos regulares com uma figura curvilínea, como a de um círculo, e ir dobrando o número de lados até que a diferença entre a área da figura e a do polígono circunscrito fosse menor que qualquer quantidade dada. Arquimedes postulou um aprimoramento desse método, comprimindo a figura entre duas outras nas quais as áreas mudam e tendem para a da figura inicial, uma de modo crescente e outra decrescente. Como exemplo, via-se que a área de um círculo era envolvida por polígonos inscritos e circunscritos, de forma que, ao aumentar-se o número de lados, suas áreas se aproximavam da área do círculo. Em outras palavras, a diferença entre as áreas dos dois polígonos precisa poder se tornar menor do que qualquer quantidade dada quando o número de lados aumenta. Por esse motivo, o método utilizado por Arquimedes para a medida da área de figuras curvilíneas era indireto, tornando-se conhecido no século XVII como "método da exaustão".

O que será apresentado a seguir é apenas um resumo da ideia utilizada no método de Arquimedes. Para maiores detalhes, consulte o livro *The Works of Archimedes T. L. Heath, Dover Editions*.

Segundo, Garbi no livro, *A Rainha das Ciências* [7], Arquimedes partiu de dois hexágonos regulares de perímetros conhecidos, sendo um inscrito e outro circunscrito a um círculo assim como os da Figura 1.4(a), dobrando o números de lados dos polígonos até obter os dois polígonos regulares de 96 lados o que levou a encontrar um intervalo matemático do valor de  $\pi$  usando fórmulas de recorrências <sup>8</sup>, para mais detalhes ver em [6].

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \quad \Rightarrow \quad 3,14084507\dots < \pi < 3,14285714\dots$$

---

<sup>8</sup>Recorrência - É um método matemático que nos possibilita definir ou obter sequências, algoritmos, etc. Partindo de situações particulares e obtendo uma generalização dessas situações, ou seja, através de uma regra é possível calcular qualquer termo em função dos termos antecessores imediatos

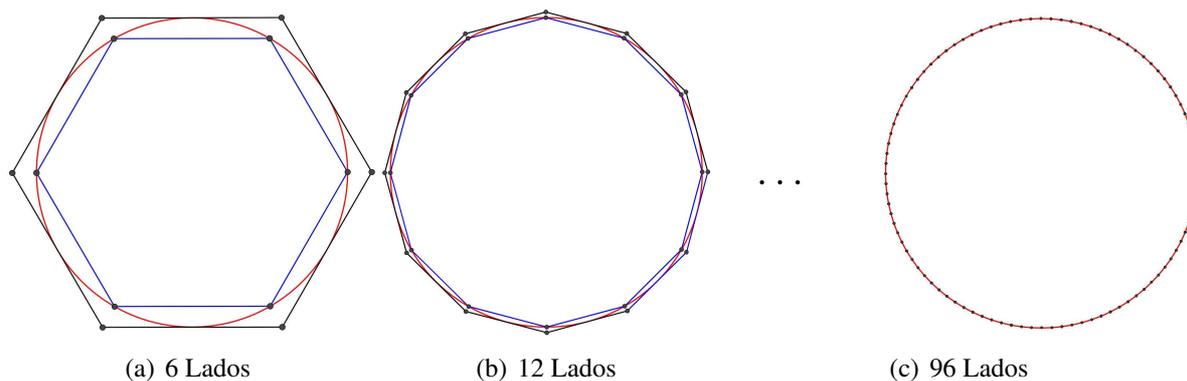


Figura 1.4: Polígono inscrito e circunscrito em uma circunferência

O resultado do cálculo de Arquimedes sobre o círculo foi uma aproximação do valor de  $\pi$  demonstrada na desigualdade  $3,14084507... < \pi < 3,14285714...$ , uma aproximação melhor que a utilizada pelos egípcios e por outras civilizações. Comparando o intervalo obtido para o valor de  $\pi$ , temos uma precisão de duas casas decimais.

Esse resultado foi dado na proposição três do tratado "*Sobre as medidas do círculo*", uma das obras de Arquimedes. Ele também constatou que a mesma relação pode ser usada para calcular a área de um círculo quando multiplicado pelo quadrado do raio.

Citaremos a forma utilizada por Arquimedes para "calcular" a área de um círculo na primeira proposição de um de seus livros mais antigos: "*Medida do Círculo*". Nota-se que o termo "calcular" foi destacado para indicar que tal proposição é apenas uma maneira de determinar a área do círculo, obtendo, assim, uma figura retilínea (triângulo) de mesma área. É interessante observar que esse foi um dos resultados mais populares em sua época.

**Proposição 1.1.** *A área de um círculo é igual à do triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo. Para detalhes dessa proposição, ver em [15].*

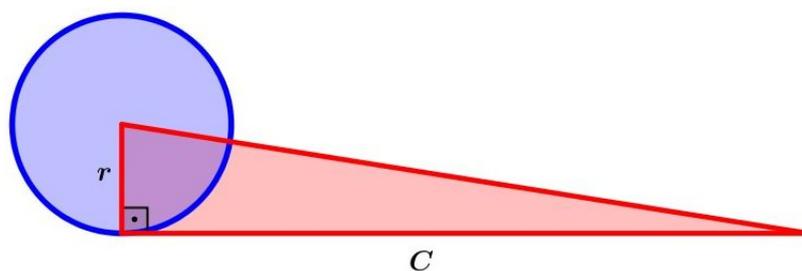


Figura 1.5: Triangulatura do Círculo

A Triangulatura do Círculo pode ser visualizado de forma dinâmica e interativa através do link: <http://tube.geogebra.org/student/m501627>. É possível também baixar o arquivo da respectiva Triangulatura em: <https://www.dropbox.com/s/eq8vv8hxdb6f44a/material-501627.ggb?dl=0>.

## 1.2.4 Números Racionais e Irracionais

O número que podemos expressar na forma de fração ( $p/q$ , onde  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z}^*$ ) é denominado de número racional e pode ser representado por um número decimal, podendo ser um decimal exato (com quantidade finita de algarismos) ou uma dízima periódica - com quantidade infinita de algarismo que se repetem periodicamente.

O conjunto dos números racionais é identificado por  $\mathbb{Q}$  e podemos representá-los por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Segundo, Oliveira [14] número irracional é todo aquele cuja representação decimal é infinita e não periódica, ou seja, é um número decimal não exato que possui quantidade infinita de algarismos e não periódicos.

**Observação 1.1.** A representação do número irracional não pode ser:

- Finita, pois seria um decimal exato;
- Periódica, senão seria uma dízima (simples ou composta).

Identificamos o conjunto dos números irracionais por  $\mathbb{I}$ , onde  $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , ou seja, ( $x \in \mathbb{R} / x \notin \mathbb{Q}$ ), sendo  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números Reais.

Utilizando frações contínuas, o matemático francês Johann Heinrich Lambert, em 1761, conseguiu provar em seu livro *Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes ciruclares et logarithmiques* que **o número  $\pi$  é irracional**. É possível que essa tenha sido a primeira vez em que a classificação do número  $\pi$  fora demonstrada. Mais tarde, com o desenvolvimento dos estudos do  $\pi$ , seguiram-se muitas outras demonstrações.

Sabemos que o número 2 é um número racional e que o número  $\sqrt{2}$  é irracional e é possível obter a construção do segmento cuja medida é  $\sqrt{2}$ , utilizando apenas os instrumentos euclidianos (régua não graduada e o compasso). Vejamos como podemos obter a construção geométrica deste segmento na Figura abaixo.

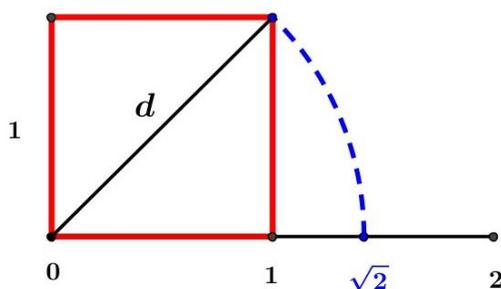


Figura 1.6: Construção do segmento  $\sqrt{2}$

Além do segmento  $\sqrt{2}$ , pelo dispositivo de Teodoro<sup>9</sup> mostrado na Figura abaixo, é possível obter a construção dos segmentos cujas medidas são os números irracionais:  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{17}$ , utilizando apenas os instrumentos euclidianos, para mais detalhes ver em [7].

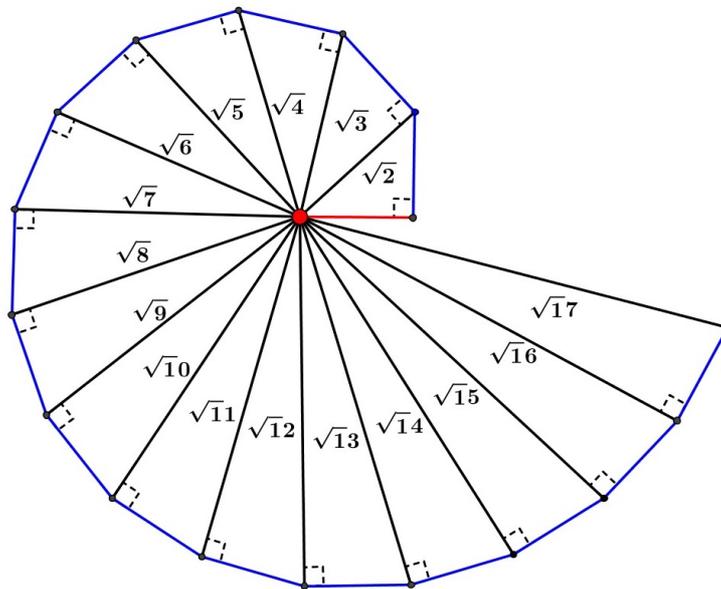


Figura 1.7: Dispositivo de Teodoro

Foi mostrada na solução algébrica da quadratura do círculo que  $l = \sqrt{\pi}$ . Agora, precisamos encontrar a solução geométrica que consiste na construção do segmento de medida  $\sqrt{\pi}$ . Observe que também se trata de um número irracional.

Caso seja verdadeiro que todos os números irracionais são construtíveis, basta construirmos o segmento de medida  $\sqrt{\pi}$  de forma análoga ao modo como foi construído o segmento  $\sqrt{2}$ , que é também um número irracional. Com isso, chegaremos à solução do problema que consiste em construir o segmento de medida  $\sqrt{\pi}$  e conseqüentemente o quadrado de  $l = \sqrt{\pi}$ . Entretanto, primeiramente é preciso termos a certeza de que todos os números irracionais são construtíveis. Voltaremos a tratar dessa verificação mais adiante no capítulo 4.

<sup>9</sup>Dispositivo de Teodoro - Dispositivo geométrico usado para construir raízes quadradas sucessivas dos números naturais e conseqüentemente segmentos de comprimento  $\sqrt{n}$ , sendo  $n \geq 2$ , também chamado de espiral de Teodoro que é formada por triângulos retângulos que possui um de seus catetos unitário e a hipotenusa de um cateto será um dos catetos do próximo triângulo e assim sucessivamente. Foi desenvolvido pelo célebre filósofo e geômetra Teodoro (465 a.C.-398 a.C) da colônia grega de Cirene.

# GeoGebra

Nesta seção, faremos uma breve apresentação do software GeoGebra quanto a sua importância no ensino da matemática, bem como em nosso trabalho, seu desenvolvedor, suas características e as áreas de aplicabilidade, em especial na geometria.

## 1.3 GeoGebra

O GeoGebra é um software livre e gratuito de matemática dinâmica que possui uma infinidade de recursos e funcionalidades, sendo utilizado de forma dinâmica e interativa com aplicabilidade no processo ensino-aprendizagem do ensino básico ao superior em diversos ramos da matemática, tais como: geometria plana e analítica, álgebra, cálculo, gráficos, tabelas, etc. Foi desenvolvido na Áustria em 2001 por Markus Hohenwarter como tese de seu doutorado e traduzido em mais de 50 idiomas. Atualmente, é usado em mais de 190 países.

Desde de seu lançamento, este software é submetido a constantes atualizações com o intuito de melhorar, acrescentar e aprimorar cada vez mais suas características e funcionalidades, sendo agora disponibilizado na versão 3D. Com isso, ele amplia ainda mais seus campos de atuação, permitindo assim o estudo da geometria espacial com mais detalhes.

Atualmente, o software GeoGebra é disponibilizado para Desktops, Tablets e em breve estará disponível também para Smartphones. Para download, tutorial e diversos materiais, acesse [www.geogebra.org/download](http://www.geogebra.org/download).

Estudar de forma dinâmica e interativa com GeoGebra é poder combinar conceitos de geometria, cálculo e álgebra com a vantagem didática de representar, criar, manipular objetos e realizar movimentos interativos sem alterar os vínculos estabelecidos inicialmente na construção, tudo isso em um único ambiente visual.

Como mostra a Figura 1.8, o GeoGebra possui um interface contendo barras de menus e de ícones na parte superior; o campo de "Entrada"<sup>10</sup> fica na parte inferior e possui ainda duas telas: uma algébrica e outra geométrica (janela de visualização).

---

<sup>10</sup>Campo de "Entrada- É o local onde os comando algébricos são digitados.

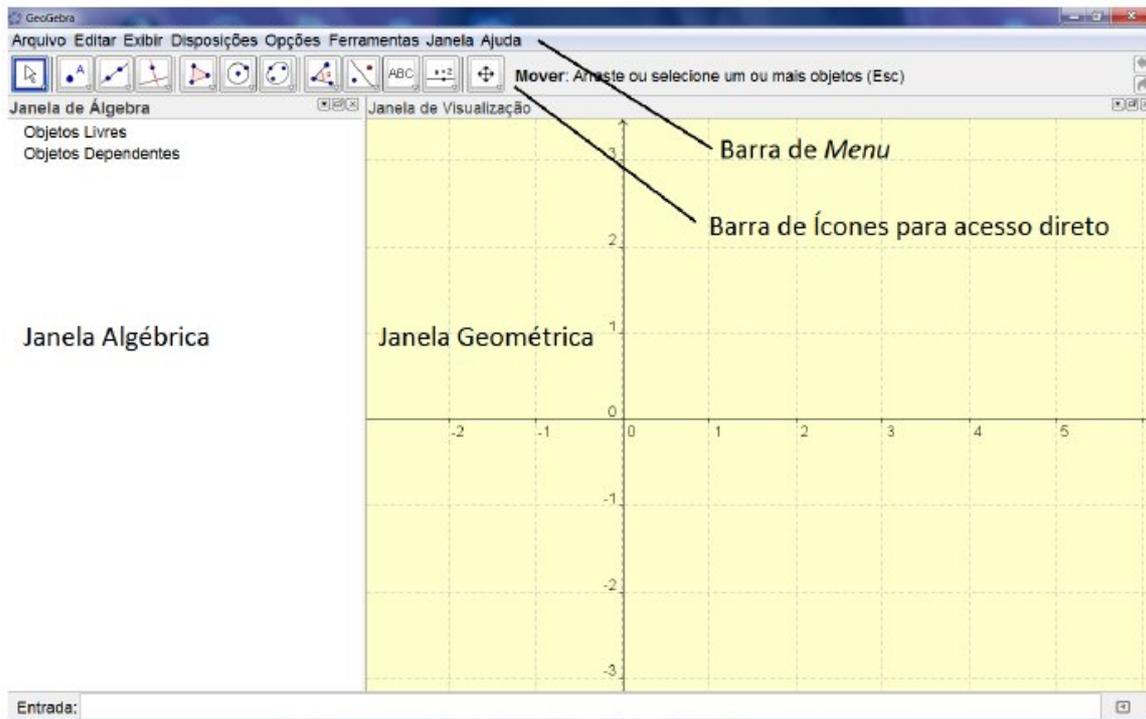


Figura 1.8: Janela Inicial do GeoGebra

O software GeoGebra, assim como os demais, é uma ferramenta computacional que possui uma infinidade de recursos, sendo que um deles funciona como régua e compasso eletrônico, possibilitando a criação de construções geométricas dinâmicas e interativas, onde podemos movimentar quaisquer elementos da construção sem que as propriedades sejam alteradas.

### 1.3.1 Da Geometria tradicional à geometria dinâmica

Os recursos da geometria tradicional utilizados em sala de aula (pincel, quadro branco, régua e compasso) produzem um aprendizado mecânico e fragmentado que compromete a interpretação de definições, propriedades e a relação do real x abstrato com objetos e conteúdos matemáticos presentes nos livros didáticos. O aluno fica limitado ao próprio entendimento, pois esse método de ensino não o permite interagir, investigar e manipular os assuntos contidos nos livros de geometrias, ou seja, o estudante fica alienado ao mundo abstrato. Esse método de ensinar matemática, em especial a geometria, perdurou por muitos anos.

Com o desenvolvimento tecnológico na área de educação, o processo de ensino-aprendizagem tem sofrido mudanças significativas. Aliando-se esses avanços à realidade do ensino da matemática, pode-se dizer que a informática tem sido uma ferramenta indispensável para o progresso cognitivo dos alunos.

Com a introdução das novas metodologias de ensino, juntamente com as novas abordagens modernas na educação, o ensino está se tornando cada vez mais interativo e dinâmico, fazendo

com que as aulas sejam cada vez mais fluidas e atraentes para os alunos, o que desencadeia uma aprendizagem mais efetiva e prática do conteúdo da matemática.

Com esse desenvolvimento, chega a geometria dinâmica que nos permite construir figuras e objetos geométricos em consonância com as suas definições, propriedades ou relações matemáticas estabelecidas, na qual podemos interagir e manipular de forma dinâmica, além de garantir a validade das definições, propriedades e relações matemáticas dos objetos em estudo.

A opção de utilizar o Geogebra está aliada a tudo que foi exposto anteriormente, tanto pela facilidade no manuseio quanto por ser um software gratuito de fácil acesso a todos, além de sua importância para a geometria. Utilizamos o GeoGebra para fazer todas as figuras contidas no trabalho, como também todas as implementações e construções geométricas com as mesmas utilidades e aplicabilidades dos instrumentos euclidianos. Ainda com GeoGebra fizemos a construção geométrica dos métodos usados para obter quadratura do círculo, que será mostrada mais adiante. Com isso, algumas construções geométricas poderão ser visualizadas de forma dinâmica e interativa a fim de facilitar seu entendimento, estando também disponíveis para download.

A geometria dinâmica surge como uma nova proposta de estudar e permitir que se explore a geometria tradicional com todos os seus conceitos, definições, propriedades, teoremas e relações matemáticas por meio da informática, chegando através de um software que possibilita a interatividade e o dinamismo no ensino da geometria.

# Capítulo 2

## Equivalência de Áreas

Neste capítulo, primeiramente trataremos sobre equivalência de áreas baseada nas proposições dos livros I e II da obra dos Elementos de Euclides, dando prosseguimento com equivalência na modalidade da quadratura de áreas poligonais até chegarmos à quadratura do círculo. Em seguida, abordaremos os métodos de Hobson e Ramanujan, discorrendo sobre suas construções geométricas.

### 2.1 Euclides e a Geometria

Euclides foi um marco para história da matemática, autor de diversas obras tais como: *Os dados*, *Divisão de figuras*, *Os fenômenos e Óptica* que possivelmente foram escritas na Universidade de Alexandria e por isso ficou conhecido como Euclides de Alexandria. Sobre sua vida, temos poucas informações e inverdades, nem ao menos onde e quando nasceu ou morreu. Quanto a sua formação matemática, não há nenhuma certeza se foi feita em Atenas, na Academia de Platão.

A geometria que estudamos hoje foi organizada em função da obra mais conhecida da história da matemática que em números de edições perde somente para a Bíblia. É considerada um dos mais influentes e importantes livros-textos matemáticos de todos os tempos, *Os Elementos*. Escrito por Euclides aproximadamente em 300 a.C, serviu de base para estruturar a geometria estudada nos livros de hoje, com algumas modificações dependendo do autor que a interpreta ou para sua reescritura conforme uma linguagem matemática mais moderna. Com isso, encontramos vários postulados de Euclides redigidos de maneiras diferentes dos originais, mas mantendo o mesmo princípio.

*Os Elementos de Euclides*, como ficou conhecida, é a sua obra mais importante. Ela está organizada em exatamente treze livros, sendo que do livro I até o VI, aborda a geometria plana elementar; do VII até o IX, a teoria dos números no campo da aritmética; o X dedica-se ao estudo dos incomensuráveis; e os três últimos XI, XII e XIII, à geometria espacial. A obra

tem ao todo aproximadamente 465 enunciados divididos em primeiros princípios (definições, postulados e noções comuns) e suas consequências (problemas e teoremas).

Muitos matemáticos questionaram a organização didática da ordem dos treze livros, assim como o encadeamento de suas proposições. Uma possível explicação para isso pode ser o provável cunho pedagógico atribuído à geometria daquela época, ensejando-se uma maneira simples e compreensível para que seus principais resultados pudessem ser transmitidos. Quanto ao objetivo da obra, também podemos destacar que se tratava de um material didático para o ensino da geometria a nível elementar. Essa organização ainda segue como objeto de estudos.

Diante da grandiosa contribuição de Euclides e suas obras para a matemática contemporânea, nos dias de hoje, a geometria ficou conhecida como a "geometria euclidiana".

Essa maneira organizada e lógica de ver a geometria euclidiana, devemos ao brilhante Euclides. Na sua obra *Os Elementos*, ele reuniu todos os conhecimentos de geometria até então conhecidos, organizando-os e sistematizando-os logicamente.

## 2.2 Áreas Equivalentes por Euclides

A área de uma figura é encontrada quando comparamos sua superfície - que é a porção ocupado no plano - com a de uma outra figura fixada como unidade. Dessa comparação, chegaremos a um número que deverá expressar quantas vezes a figura contém a unidade de área.

**Definição 2.1** (Área). *Fazer a medição de uma grandeza é o mesmo que fazer uma comparação com uma outra de mesma espécie adotada como unidade. Uma figura ocupa determinada porção no plano e, se fizermos essa medida, chegaremos ao valor de sua área.*

Para os gregos, o conceito de área relacionava-se com o de equivalência, pois o cálculo de áreas não se dava por atribuição de números a medidas, mas sim por meio de comparações entre figuras geométricas. Como exemplo, poderíamos supor o seguinte problema: dadas duas figuras geométricas quaisquer, qual possui área maior?

As proposições dos livros I e II dos *Elementos de Euclides* lidam com essas construções e transformações de figuras geométricas: construir figuras, seccioná-las, compará-las, subtraí-las ou somá-las umas às outras.

A seguir, iremos construir um quadrilátero de área equivalente à de um polígono dado de cinco lados (pentágono) baseado nessas proposições que poderão sofrer algumas alterações quando necessárias ou por conveniência para facilitar sua aplicação e seu entendimento. Quando utilizadas, serão enunciadas e algumas demonstradas.

**Definição 2.2.** *Dizemos que figuras planas são equivalentes quando possuem mesma área.*

Para que tenhamos polígonos equivalentes, estes devem possuir a mesma área com a forma geométrica diferente, podendo ter ou não o mesmo número de lados. Caso tenham a mesma

forma, mesmo número de lados e dimensões diferentes, dizemos que são figuras semelhantes, pois a semelhança está associada à forma e à dimensão.

Figuras Semelhantes é o mesmo que possuir a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Polígonos semelhantes possuem o mesmo número de lados e existem uma correspondência entre seus vértices, tal que os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Dado um paralelogramo, podemos encontrar um retângulo equivalente, conforme o teorema disposto a seguir. As demonstrações desses teoremas pode ser vista em [5].

**Teorema 2.1.** *Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo.*

**Teorema 2.2.** *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e metade da altura do triângulo.*

Como consequências desses teoremas, podemos encontrar um retângulo equivalente a cada um dos quadriláteros notáveis, além do triângulo.

Dado um polígono convexo de  $n$  lados com  $n > 3$ , podemos traçar suas diagonais para decompô-lo em  $(n - 2)$  triângulos.

Para que possamos construir o quadrilátero equivalente ao pentágono, utilizaremos o teorema 2.1 e partiremos da ideia de decompor o pentágono em 3 triângulos denominados de  $T_1, T_2$  e  $T_3$  como mostra a Figura 2.1(a) e construiremos os respectivos paralelogramos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  da Figura 2.1(c) tal que cada  $P_i$  seja equivalente a cada  $T_i$ , e ainda cada ângulo  $M_{i+1}M_iN_i$  onde  $(i = 1, 2, 3)$  deve ser igual ao ângulo dado mostrado na Figura 2.1(b).

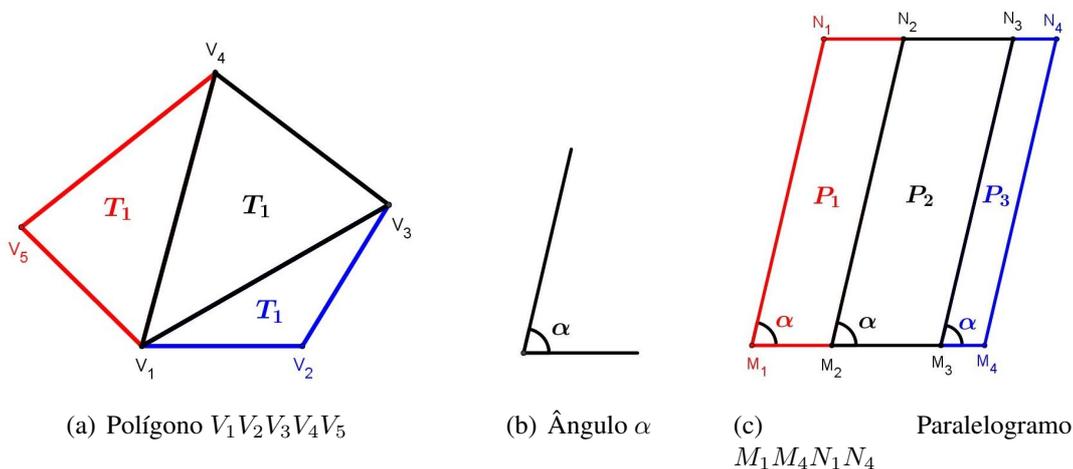


Figura 2.1: Polígono  $V_1V_2V_3V_4V_5$  equivalente ao paralelogramo  $M_1M_4N_1N_4$

**Proposição 2.1** (PROP. XLV do Livro I dos Elementos de Euclides). *Construir um paralelogramo igual a uma figura retilínea qualquer dada, e com um ângulo igual a outro ângulo dado como mostra a Figura 2.2. Segundo, Tatiana [15] a figura retilínea dada é um polígono.*

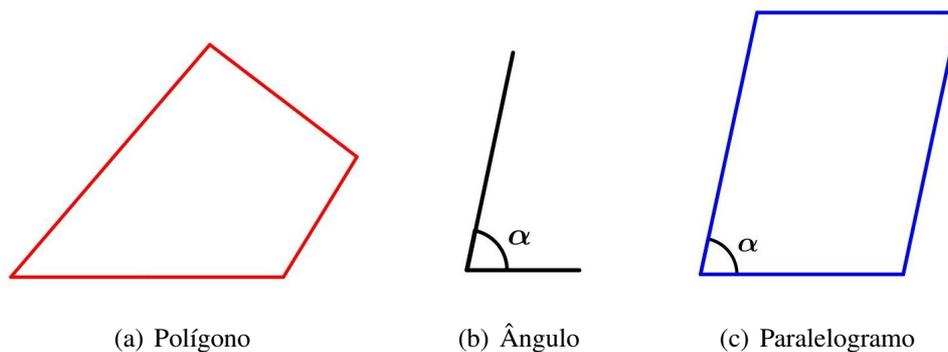


Figura 2.2: Polígono equivalente ao Paralelogramo

Pela decomposição do polígono, obtivemos três triângulos e devemos construir três paralelogramos equivalentes a eles de modo que  $T_1 \equiv P_1, T_2 \equiv P_2$  e  $T_3 \equiv P_3$ , antes disso, precisaremos da proposição que veremos a seguir.

**Proposição 2.2** (PROP. XLII do Livro I dos Elementos de Euclides). *Construir um paralelogramo que seja igual a um triângulo dado e que tenha um ângulo igual a outro ângulo dado.*

A proposição 2.2 nos permite construir o paralelogramo  $DBEF$  equivalente ao  $\triangle ABC$  e com um ângulo igual a  $\alpha$  como mostra a Figura 2.3.

**Construção Geométrica 2.1** (Da proposição 2.2).

Seja dado o triângulo  $ABC$  e o ângulo  $\alpha$  conforme a Figura 2.3(b);

Traçaremos a mediana  $\overline{CD}$  em relação a  $\overline{AB}$  e a reta  $r$  paralela à  $\overline{AB}$  passando por  $C$ , marcando o ponto  $E$  em  $r$  e traçaremos  $\overline{DE}$  de tal modo que se tenha o ângulo  $\alpha$  como pode ser visto na Figura 2.3(b);

Saindo de  $B$ , traçaremos  $\overline{BF}$  paralelo à  $\overline{ED}$  com  $F \in r$  e descreva o paralelogramo  $DBFE$  como mostra a Figura 2.3(c).

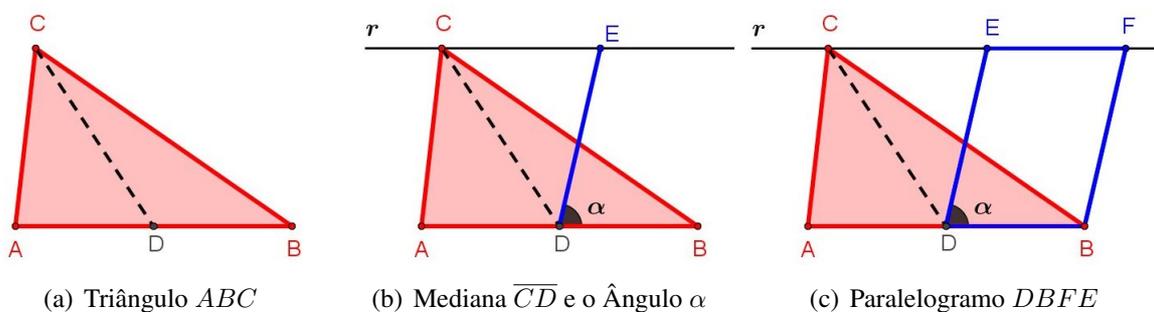


Figura 2.3: Paralelogramo  $DBFE$  equivalente ao triângulo  $ABC$

Pela proposição 2.2, fizemos a construção de um paralelogramo equivalente ao triângulo e como consequência de mesma altura.

Antes de construir  $T_1 \equiv P_1$ ,  $T_2 \equiv P_2$  e  $T_3 \equiv P_3$ , temos duas situações para analisar:

1. Se os triângulos tiverem alturas congruentes, então os paralelogramos terão alturas congruentes às dos triângulos e, quando colocados lado a lado, obteremos outro paralelogramo cuja área é igual à soma dos três paralelogramos, com altura congruente à do triângulo.
2. Se os triângulos tiverem alturas diferentes, então os paralelogramos terão alturas diferentes e, quando colocados lado a lado, não obteremos um paralelogramo.

Para que possamos prosseguir, precisamos saber construir um paralelogramo de lado determinado e equivalente a um triângulo dado, ou seja, obter um paralelogramo com a altura que desejarmos. Para isso, vejamos a próxima proposição.

**Proposição 2.3** (PROP. XLIV do Livro I dos Elementos de Euclides). *Sobre uma linha reta dada, construir um paralelogramo igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo retilíneo dado.*

Vimos que pela proposição 2.2 foi possível determinar o ângulo e, com a proposição 2.3, podemos determinar o lado. Com a utilização dessas proposições, pode-se construir um paralelogramo com ângulo e lado determinados.

**Construção Geométrica 2.2** (Da proposição 2.3).

Seja dado o triângulo  $ABC$  equivalente ao paralelogramo  $DBFE$  de base igual à metade da base do triângulo e ambos de mesma altura ver Figura 2.4(a);

Façamos todos os procedimentos de construção da proposição 2.2;

Abaixo de  $B$ , prolongaremos  $\overline{FB}$  até o ponto  $G$  com a medida desejada para o lado do paralelogramo e descreveremos o paralelogramo  $DBGH$  como mostra a Figura 2.4(a);

Traçaremos a diagonal  $\overline{HB}$  e a prologaremos até o ponto de interseção com o prolongamento de  $\overline{EF}$  marcando o ponto  $I$  como mostra a Figura 2.4(b);

Partindo de  $I$  e paralelo à  $\overline{FB}$  traçaremos  $\overline{IK}$  até a interseção com o prologamento  $\overline{DB}$  e descreveremos o paralelogramo  $BKIF$  ver Figura 2.4(b);

Prolongaremos  $\overline{HG}$  e  $\overline{IK}$  até o ponto de encontro  $M$  e, em seguida, descreveremos o paralelogramo  $GMKB$  ver Figura 2.4(b).

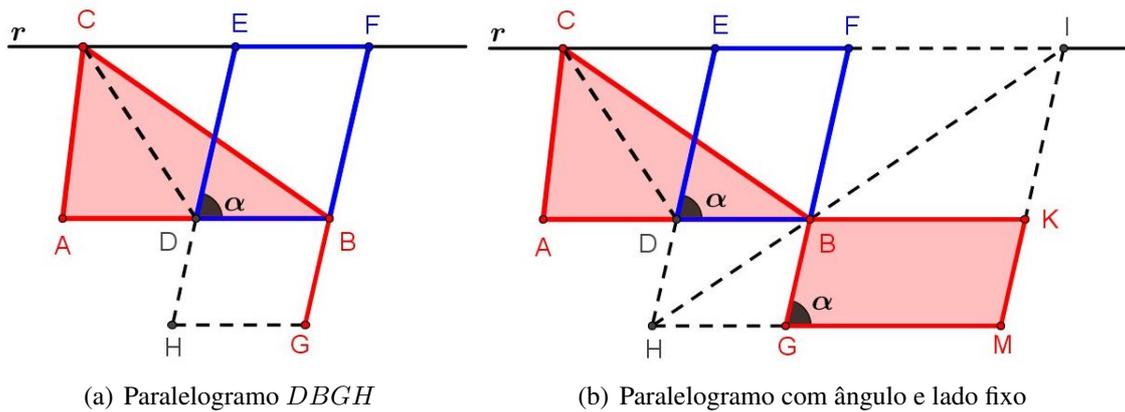


Figura 2.4: Paralelogramo  $GMKB$  equivalente ao triângulo  $ABC$

Logo, teremos os paralelogramos  $DBFE$  e  $GMKB$  equivalentes e, conseqüentemente, equivalente ao triângulo  $ABC$  com ângulo  $\alpha$  e lado  $\overline{BG}$  determinados como mostra a Figura 2.4.

No que diz respeito ao ângulo, podemos determinar o valor que quisermos, inclusive um dos mais utilizados e conhecidos que é o de  $90^\circ$ , tornando possível representar a área de qualquer paralelogramo com a de um retângulo, uma vez que o retângulo é um caso particular de paralelogramo com ângulos retos.

Usaremos a proposição 2.2 para construir  $T_1 \equiv P_1, T_2 \equiv P_2$  e  $T_3 \equiv P_3$  e a proposição 2.3 para obtermos os paralelogramos com a mesma medida de seus lados e, conseqüentemente, todos de mesma altura, para que possamos colocá-los lado a lado, resultando no paralelogramo desejado (as construções individuais de  $T_i \equiv P_i$  foram omitidas, mostrando-se apenas a construção final) na Figura 2.1(c).

Logo, o polígono dado (pentágono  $V_1V_2V_3V_4V_5$ ) dado é equivalente ao quadrilátero - paralelogramo  $M_1M_4N_1N_4$ .

### Em resumo:

Primeiramente, o pentágono foi decomposto em 3 triângulos  $T_1, T_2$  e  $T_3$  e cada um teve a construção dos paralelogramos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  equivalente, ou seja,  $T_1 \equiv P_1, T_2 \equiv P_2$  e  $T_3 \equiv P_3$  e para isso utilizamos proposição 2.3.

Na seqüência, fizemos a construção dos paralelogramos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  de lados fixos com as mesmas medidas, permitindo, assim, colocá-los lado a lado, formando o paralelogramo  $M_1M_4N_1N_4$  que representa a soma dos 3 paralelogramos. Desse modo, chegamos à solução do nosso problema.

## 2.3 Quadraturas de Áreas Poligonais

A medição de área foi uma das necessidades mais antigas das civilizações. O quadrado é considerado a figura mais simples e também aquela que possui a maneira mais fácil de ter sua área calculada. Esse talvez seja o motivo pelo qual os antigos geômetras tentaram relacionar as áreas de outras figuras ao quadrado, estudando-as e dando origem à expressão "quadratura" do retângulo, do triângulo, de um polígono qualquer e até mesmo do círculo no sentido de procurar um quadrado de mesma área à de cada uma dessas figuras.

Quadraturas são uma classe de problemas de equivalência que relacionam a construção de quadrados equivalentes a uma figura dada como: triângulo, retângulo, trapézio, círculo e quaisquer outros polígonos, utilizando apenas os instrumentos euclidianos (compasso e régua não graduada).

A utilização da quadratura para a proposição de outros cálculos geométricos, nos remetem a outros questionamentos, como: por que fazer essas construções, qual sua importância, como eram feitos os cálculos de áreas na geometria nos tempos antigos?

Para chegarmos a essas e outras respostas, é preciso que façamos uma comparação com os tempos de hoje, onde o ato de medir se trata de associar uma grandeza a um número por meio de fórmulas. Como exemplo, se quiséssemos somar e/ou comparar a área de dois polígonos quaisquer através do método moderno, teríamos que calcular suas áreas através de fórmulas, comparando-as e/ou somando-as a seguir, para que chegássemos até o resultado desejado. Já nos tempos anteriores, não havia associação entre grandezas e números. Portanto, se quiséssemos operar com grandezas, como comprimentos e áreas, isso não seria feito por meios de números e sim através de equivalências (quadraturas) e do teorema de Pitágoras. Este assunto será abordado posteriormente.

Mostraremos a seguir as quadraturas do retângulo, do triângulo, do pentágono, de um polígono qualquer e do círculo.

### 2.3.1 Quadratura do Retângulo

A quadratura do retângulo que será apresentada está baseada na PROP. XIV do livro II dos *Elementos de Euclides*, que consiste em: construir um quadrado igual a um retilíneo dado (retângulo).

Dado um retângulo qualquer, construiremos um quadrado equivalente.

#### Construção Geométrica 2.3 (Da Quadratura do Retângulo).

Descrevemos o retângulo  $ABCD$  como mostra a Figura 2.5(b);

Antes de darmos continuidade, teremos duas situações iniciais a serem analisadas:

1. Se os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  forem congruentes ( $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ ), temos o quadrado procurado;
2. Se forem diferentes, teremos um dos segmentos  $\overline{AB}$  ou  $\overline{BC}$  maior. Suponhamos  $\overline{AB}$  maior e prolongamos  $\overline{DC}$  até o ponto  $E$ , tal que  $\overline{CE} \equiv \overline{CB}$ . Em seguida, marcaremos o ponto médio  $O$  de  $\overline{DE}$ , descrevendo uma circunferência de raio  $\overline{OE}$  e, abaixo de  $B$ , prolongamos  $\overline{CB}$  até a interseção com a circunferência marcando o ponto  $F$ . Em seguida tracemos  $\overline{CF}$  como mostra a figura 2.5;

Descrevemos o quadrado  $FGHC$ .

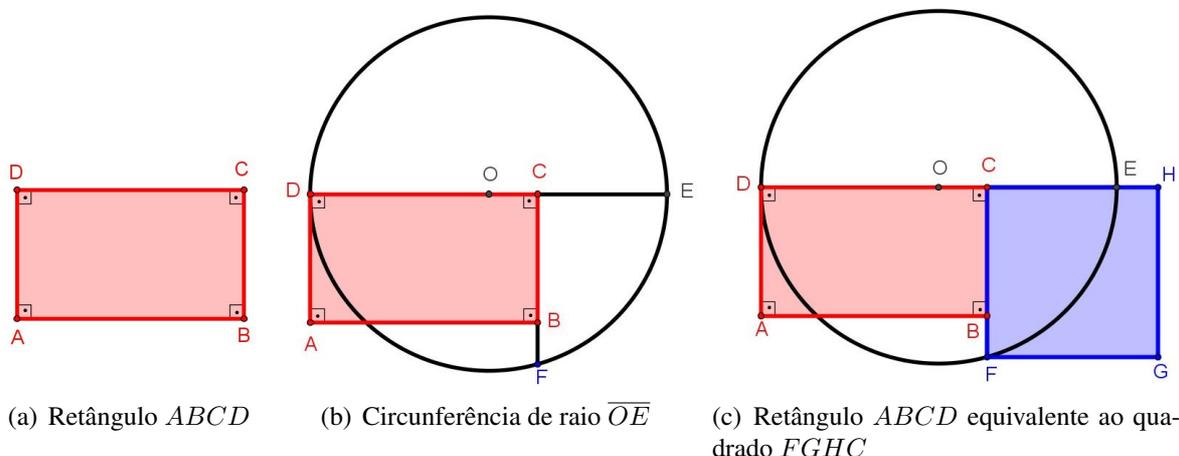


Figura 2.5: Quadratura do Retângulo

Portanto, temos o quadrado  $FGHC$  de lado  $\overline{CF}$  equivalente ao retângulo  $ABCD$ .

A Quadratura do Retângulo pode ser visualizada de forma dinâmica e interativa através do link: <http://tube.geogebra.org/student/m954261>. É possível também baixar o arquivo da respectiva quadratura em: <https://www.dropbox.com/s/oz455xypbynz9lk/material-954261.ggb?dl=0>

**Demonstração** (Da Quadratura do Retângulo).

Considere o retângulo  $ABCD$  de base  $\overline{AB}$  e altura  $\overline{BC}$ .

Área do retângulo é dado por  $S_R = base \times altura \Rightarrow S_R = \overline{AB} \times \overline{BC}$ .

Como  $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$  e  $\overline{CB} \equiv \overline{CE}$ , então:

$$S_R = \overline{AB} \times \overline{CB} \Rightarrow S_R = \overline{DC} \times \overline{CE}$$

Por construção, temos:

$$\overline{DC} = \overline{DO} + \overline{OC} \text{ e } \overline{CE} = \overline{OE} - \overline{OC}$$

Como  $\overline{OE} \equiv \overline{DO}$ , substituindo em  $\overline{CE} = \overline{OE} - \overline{OC}$ , teremos:

$$\overline{CE} = \overline{DO} - \overline{OC}$$

Substituindo  $\overline{DC} = \overline{DO} + \overline{OC}$  e  $\overline{CE} = \overline{OE} - \overline{OC}$  em  $S_R = \overline{DC} \times \overline{CE}$ , teremos:

$$S_R = (\overline{DO} + \overline{OC}) \times (\overline{DO} - \overline{OC}) \Rightarrow S_R = \overline{DO}^2 - \overline{OC}^2$$

Por construção, temos o triângulo  $OCF$  retângulo em  $C$ , no qual aplicaremos o Teorema de Pitágoras ( $a^2 = b^2 + c^2$ ), onde  $a$  é a hipotenusa e  $b$  e  $c$  os catetos desse triângulo, o que resulta em:

$$\overline{OF}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CF}^2$$

Como  $\overline{OF} \equiv \overline{DO}$ , então:

$$\overline{DO}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CF}^2 \Rightarrow \overline{CF}^2 = \overline{DO}^2 - \overline{OC}^2$$

Área do quadrado é dado por  $S_Q = l^2$  e  $l = \overline{CF}$  fazendo a substituição, teremos:

$$S_Q = \overline{CF}^2$$

Mas  $\overline{CF}^2 = \overline{DO}^2 - \overline{OC}^2$ , então:

$$S_Q = \overline{CF}^2 \Rightarrow S_Q = \overline{DO}^2 - \overline{OC}^2$$

Com isso, temos as áreas do retângulo  $S_R = \overline{DO}^2 - \overline{OC}^2$  e do quadrado  $S_Q = \overline{DO}^2 - \overline{OC}^2$  e pelos resultados obtidos, concluímos que  $S_R \equiv S_Q$ .

Portanto, o retângulo  $ABCD$  é equivalente ao quadrado  $CFGH$ .



### 2.3.2 Quadratura do Triângulo

Para fazer a quadratura, do triângulo primeiramente devemos transformá-lo em um retângulo equivalente. A seguir mostraremos algumas maneiras de fazer essa transformação que denominaremos de "retangularização do triângulo" que consiste em construir um retângulo equivalente a um triângulo. Daí em diante, basta executarmos os procedimentos da quadratura do retângulo vistos em 2.3 para assim chegarmos na quadratura do triângulo.

#### Retangularização do triângulo:

1. Na seção 2.2 de equivalência de áreas, a proposição 2.2 do livro dos Elementos de Euclides nos permitiu construir um paralelogramo equivalente a um triângulo com um ângulo  $\alpha$  dado, sendo que podemos atribuir qualquer valor para o ângulo. Para a nossa construção, usaremos o ângulo reto a fim de obter o retângulo que é o caso particular do paralelogramo.

Dado o triângulo  $ABC$  de base  $\overline{AB}$  e altura  $\overline{CH}$  como mostra a Figura 2.6(a) e área dada por  $S_T = \frac{\overline{AB} \times \overline{CH}}{2}$ ;

Pela proposição 2.2 obtemos o retângulo  $DBFE$  de base  $\overline{DB}$  e altura  $\overline{DE}$  como mostra a Figura 2.6(a) e área dada por  $S_R = \overline{DB} \times \overline{DE}$ ;

Como  $\overline{DB} = \frac{\overline{AB}}{2}$  por construção, então teremos:

$$S_R = \overline{DB} \times \overline{DE} \Rightarrow S_R = \frac{\overline{AB}}{2} \times \overline{DE} \Rightarrow S_R = \frac{\overline{AB} \times \overline{DE}}{2}$$

Dessa forma, concluímos que  $S_T \equiv S_R$ . Portanto, temos que o triângulo  $ABC$  é equivalente ao retângulo  $DBFE$ .

2. Para esta retangularização, utilizaremos a congruência de triângulos e o reagrupamento de polígonos num dado triângulo  $ABC$  de base  $\overline{AB}$ , altura  $\overline{CD}$  como mostra a Figura 2.6(b) e área dada por  $S_T = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2}$ .

Pela congruência de triângulos temos que  $\triangle CD'F \equiv \triangle FHB$  e  $\triangle CD'E \equiv \triangle EGA$ . Desta forma, podemos reagrupá-los obtendo o retângulo  $ABHG$  de base  $\overline{AB}$  e altura  $\overline{BH}$  como mostra a Figura 2.6(b) e área  $S_R = \overline{AB} \times \overline{BH}$ ;

Como  $\overline{BH} = \frac{\overline{CD}}{2}$  por construção, então teremos:

$$S_R = \overline{AB} \times \overline{BH} \Rightarrow S_R = \overline{AB} \times \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow S_R = \frac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2}$$

Desta forma, concluímos que  $S_T \equiv S_R$ . Portanto, temos que o triângulo  $ABC$  é equivalente ao retângulo  $ABHG$ .

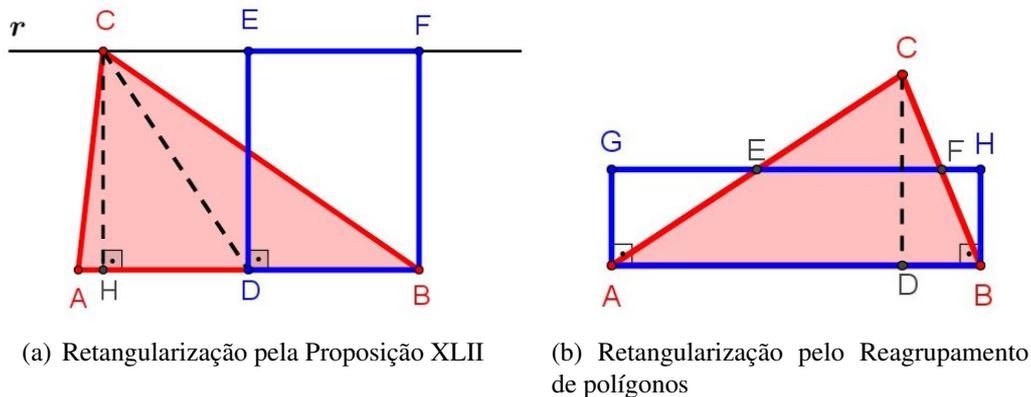


Figura 2.6: Retangularização do Triângulo

Dado um triângulo qualquer, construiremos um quadrado equivalente.

Para a construção da quadratura do triângulo, inicialmente temos que retangularizar o triângulo dado para obter um retângulo equivalente, e deste, um quadrado equivalente pela quadratura do retângulo 2.3.1.

#### Construção Geométrica 2.4 (Da Quadratura do Triângulo).

Para a nossa construção, utilizaremos o mesmo triângulo para obter o quadrado equivalente, podendo optar por uma das maneiras de retangularização do triângulo.

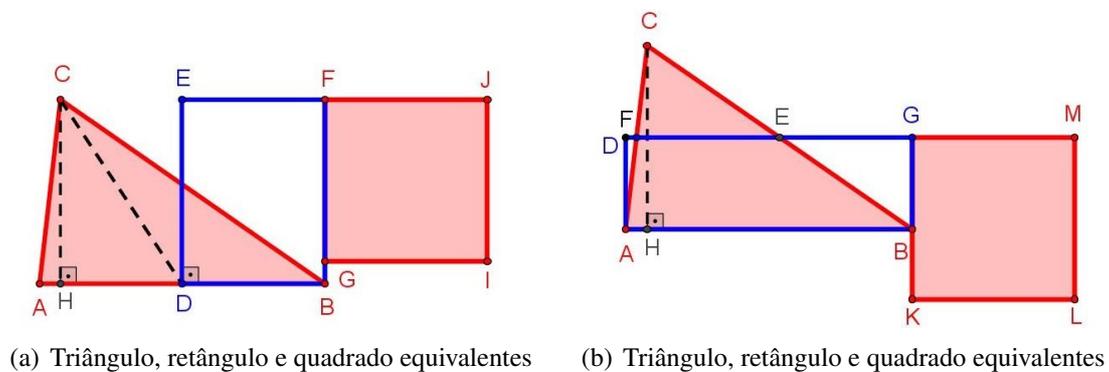


Figura 2.7: Quadratura do triângulo

Descrevamos o triângulo  $ABC$ , em seguida, o retangularizemos para obter o retângulo  $DBFE$  ou  $ABGD$  como mostra a Figura 2.6 e por fim executemos a quadratura desses retângulos para obter o quadrado  $GJJF$  ou  $KLMG$  equivalente ao triângulo  $ABC$  como mostra a Figura 2.10 e, conseqüentemente, equivalentes entre si.

A Quadratura do Triângulo pode ser visualizada de forma dinâmica e interativa através do link: <https://tube.geogebra.org/student/mAuFGRouO>. É possível também baixar o arquivo da respectiva quadratura em: <https://www.dropbox.com/s/xm9r9b4arztgpme/material-738957.ggb?dl=0>

### 2.3.3 Quadratura do Pentágono

Para mostrar essa quadratura, devemos construir um quadrilátero equivalente ao pentágono e, em seguida, um triângulo equivalente ao quadrilátero. Posteriormente, executar a quadratura deste triângulo para obter o quadrado equivalente ao pentágono.

Dado um pentágono qualquer, construiremos um quadrado equivalente. Antes dessa construção enunciaremos a propriedade abaixo a qual será utilizada como ferramenta para a construção geométrica. O leitor interessado em mais detalhes dessa propriedade, ver em [9].

**Propriedade 2.1.** *A área de um triângulo fica inalterada quando sua base permanece fixa e o terceiro vértice se desloca em uma reta paralela a sua base como mostra a Figura abaixo.*

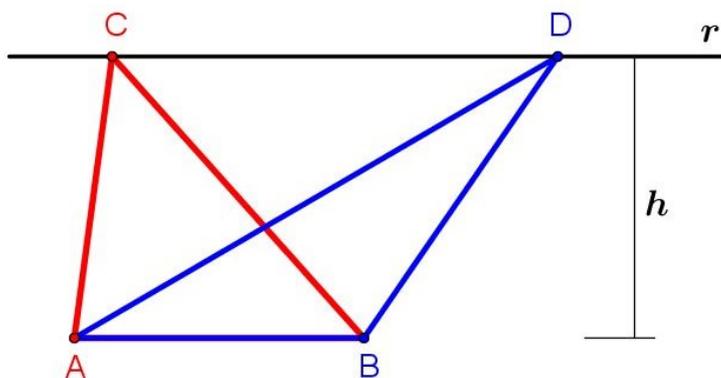


Figura 2.8:  $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$

A propriedade da Base Fixa do Triângulo pode ser visualizado de forma dinâmica e interativa através do link: <http://tube.geogebra.org/student/m500461>. É possível também baixar o arquivo do respectivo teorema em: <https://www.dropbox.com/s/790dicji1utu8bk/material-500461.ggb?dl=0>

### Construção Geométrica 2.5 (Da Quadratura do Pentágono).

Descrevamos o pentágono  $ABCDE$ ;

Primeiramente, tracemos uma reta paralela à diagonal  $\overline{EC}$ , passando por  $D$  e, em seguida, prolongamos  $\overline{AE}$  até a interseção com a reta, marcando o ponto  $F$  como mostra a Figura 2.9(a);

Pela propriedade 2.1 da base fixa do triângulo, temos que  $\triangle ECD \equiv \triangle ECF$  ver na Figura 2.9(a). Com isso temos o quadrilátero  $ABCF$  equivalente ao pentágono  $ABCDE$  como mostra a Figura 2.9(a);

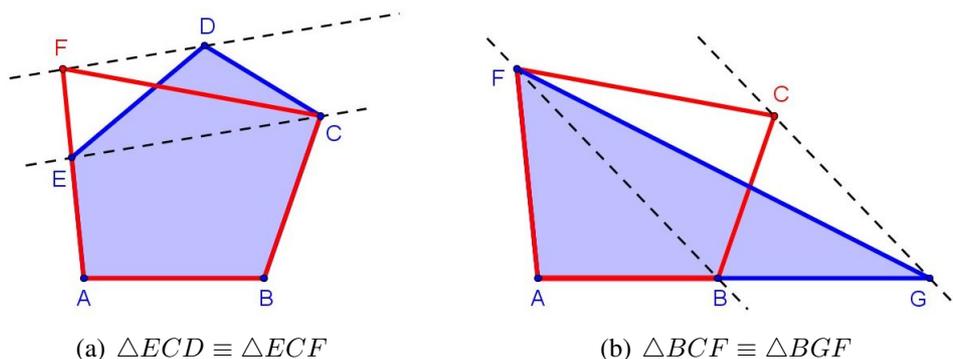


Figura 2.9: Pentágono equivalente ao quadrilátero que é equivalente ao triângulo

De forma análoga, encontraremos o  $\triangle AGF$  equivalente ao quadrilátero  $ABCF$  como mostra a Figura 2.9(b) e, em seguida, executaremos a quadratura do triângulo, e conseqüentemente teremos o  $\triangle AGF$  equivalente ao pentágono  $ABCDE$ ;

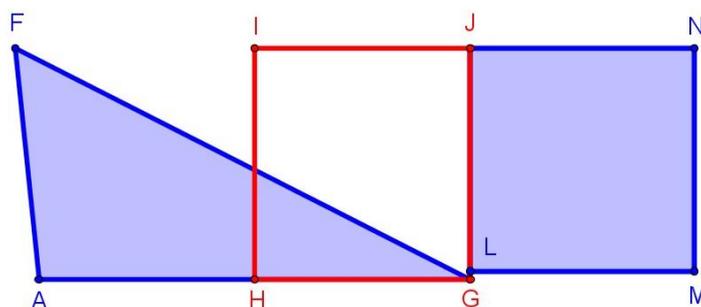


Figura 2.10: Quadratura do triângulo

Logo, após executarmos a quadratura do triângulo, obteremos o quadrado  $LMNJ$  equivalente ao pentágono  $ABCDE$ .

A Quadratura do Pentágono pode ser visualizada de forma dinâmica e interativa através do link: <http://tube.geogebra.org/student/m435357>. É possível também baixar o arquivo da respectiva quadratura em: <https://www.dropbox.com/s/zdf8lqnwkl65k5v/m435357-Triangulatura-do-Crculo.zip?dl=0>

### 2.3.4 Quadratura do Polígono convexo de $n$ lados

Inicialmente, determinamos a quadratura das regiões poligonais planas de 3, 4, e 5 lados. Dando continuidade, mostraremos a quadratura de um polígono convexo de  $n$  lados. Para que possamos generalizar a quadratura do polígono, é necessário demonstrar que é possível quadrar o polígono de  $n$  lados. Segundo, Dolce [3] podemos ter um polígono de  $n$  lados equivalente a um de  $n - 1$  lados, como mostra o teorema a seguir.

**Teorema 2.3.** *Dado um polígono convexo com  $n$  lados ( $n > 3$ ), existe um polígono convexo ( $n - 1$ ) lados que lhe é equivalente*

**Construção Geométrica 2.6** (Do Teorema 2.3).

Seja dado o polígono  $Pol(V_1, V_2, V_3, V_4, \dots, V_n)$  onde denominaremos polígono por  $Pol$ , tracemos por  $V_3$  uma reta paralela à diagonal  $\overline{V_2V_4}$ , marcando  $V'$  o ponto obtido do prolongamento do lado  $\overline{V_1V_2}$  até a interseção com a reta;

Em seguida, tracemos  $\overline{V_4V'}$  e, pela propriedade 2.1, temos que a área de um triângulo permanece a mesma quando mantemos sua base fixa e deslocamos o vértice oposto em uma reta paralela a sua base, garantindo, assim, a equivalência entre os  $\triangle V_2V_3V_4$  e  $\triangle V_2V_4V'$ . Com isso, obtemos o polígono de  $(n - 1)$  lados equivalente ao polígono de  $n$  lados;

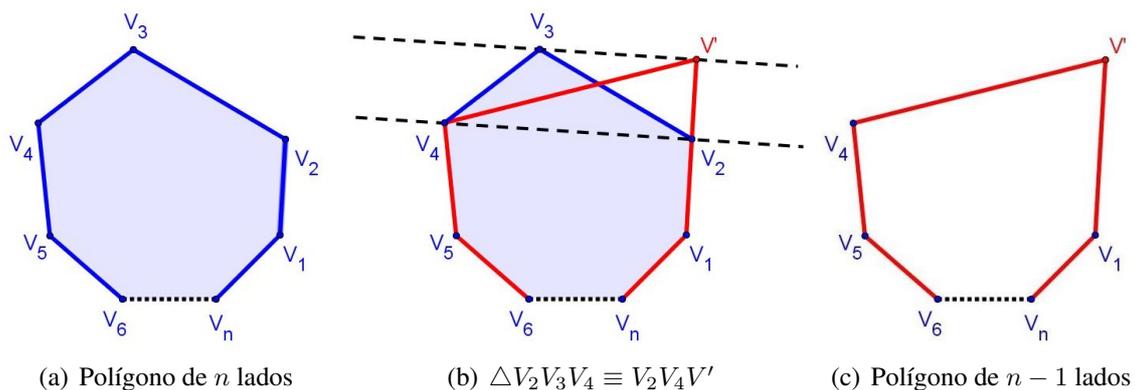


Figura 2.11: Polígono de  $n$  lados  $V_1V_2V_3\dots V_n$  equivalente ao de  $n - 1$  lados  $V_1V'V_4V_5\dots V_n$

**Demonstração** (Do teorema 2.3).

Por construção, temos:

$$Pol(V_1V_2V_3V_4, \dots, V_n) = \Delta V_2V_3V_4 + Pol'(V_1V_2V_4, \dots, V_n)$$

Pela propriedade 2.1, temos que:  $\Delta V_2V_3V_4 \equiv \Delta V_2V_4V'$ , então:

$$Pol(V_1V_2V_3V_4, \dots, V_n) = \Delta V_2V_4V' + Pol'(V_1V_2V_4, \dots, V_n)$$

$$Pol(V_1V_2V_3V_4, \dots, V_n) \equiv Pol''(V_1V'V_4V_5, \dots, V_n)$$

Portanto, o polígono convexo de  $n$  lados é equivalente ao polígono convexo de  $(n - 1)$  lados. ■

Para transformar um polígono convexo de  $n$  lados em um quadrado equivalente, ou seja, obter a quadratura desse polígono de  $n$  lados, continuaremos utilizando o **método de redução de lados de um polígono** que está ligado intrinsecamente com o teorema 2.3, garantindo a equivalência entre os polígonos de  $n$  e  $(n - 1)$  lados, o qual será utilizado quantas vezes for necessário até obtermos o polígono de 3 lados (que é o triângulo) e, em seguida, executar sua quadratura.

**Construção Geométrica 2.7** (Da Quadratura do Polígono Convexo de  $n$  lados).

Inicialmente, utilizaremos o teorema 2.3 para reduzir o polígono de  $n$  lados para  $n - 1$ . Em seguida, repetiremos o mesmo processo, obtendo os polígonos de  $n - 2$ ,  $n - 3$ , ..., 3 lados até chegarmos ao triângulo. Finalmente, executaremos os mesmos procedimentos usados nas quadraturas anteriores a fim de encontrarmos o quadrado.

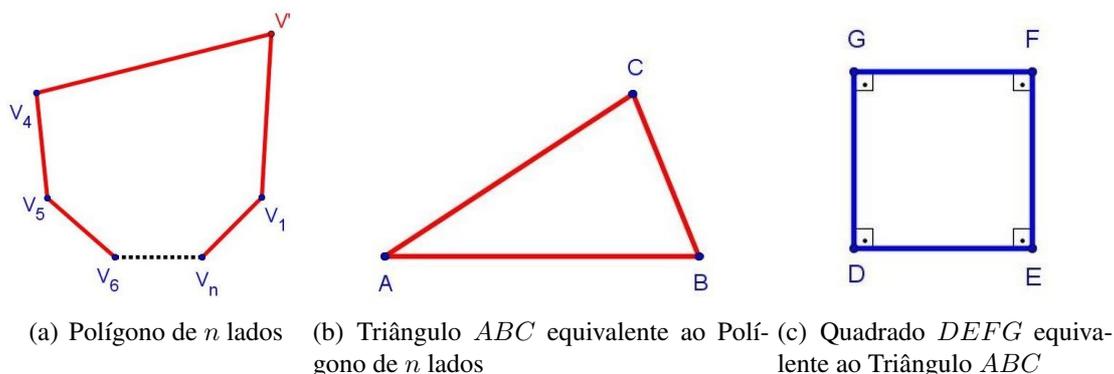


Figura 2.12: Quadratura do polígono convexo  $n$  lados

Mas, e se o polígono não for convexo?

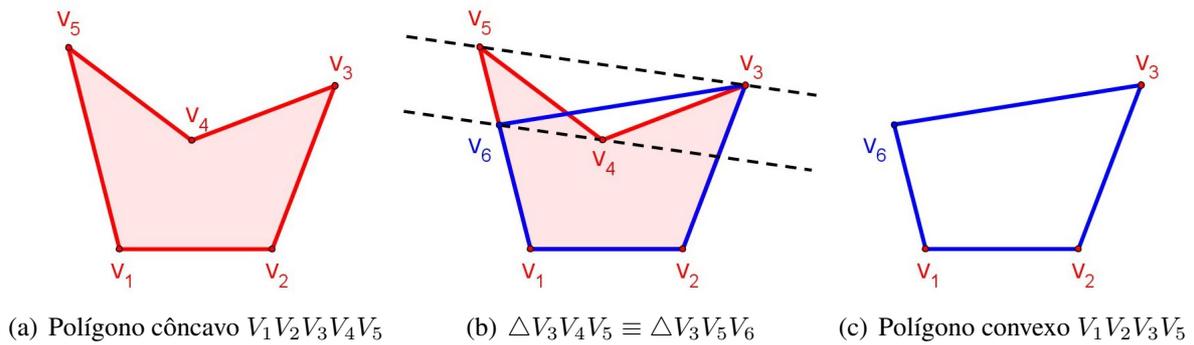


Figura 2.13: Polígono côncavo  $V_1V_2V_3V_4V_5$  equivalente ao polígono convexo  $V_1V_2V_3V_6$

Nada muda. O processo utilizado para a quadratura do polígono não convexo (côncavo) é o mesmo utilizado no processo do polígono convexo como mostra a Figura 2.13

## 2.4 Teorema de Pitágoras

Fizemos a comparação de figuras geométricas através da equivalência e, para isso, reduzimos cada figura dada a uma figura mais simples: "o quadrado- por meio da quadratura.

Agora, iremos falar de forma breve do célebre Teorema de Pitágoras <sup>1</sup> que nos permite somar áreas de quadrados como mostra o teorema a seguir. O leitor interessado em mais detalhes, ver em [5].

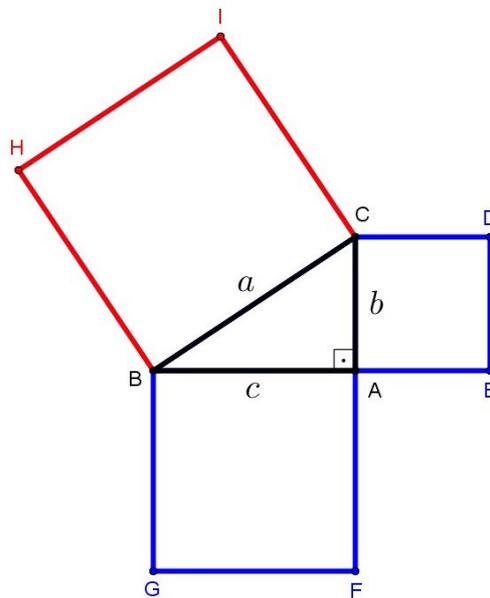


Figura 2.14: Teorema de Pitágoras

<sup>1</sup>Pitágoras - (c. 569 - c. 480 a.C) nasceu na ilha de Samos, perto de Mileto.

**Teorema 2.4.** *Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados construídos sobre seus catetos é equivalente ao quadrado construído sobre a hipotenusa como mostra a Figura 2.14*

Dados os quadrados  $ABCD$  e  $EFGH$  de lados respectivamente iguais a  $(b$  e  $c)$  como mostra a Figura 2.15(a), mostraremos que a soma de suas áreas resulta em um terceiro quadrado de lado  $a$ .

A resolução do problema será mostrada de duas maneiras:

### 1. Por construção geométrica

Temos dois quadrados que serão decompostos em polígonos, de modo que possamos reagrupá-los para resultar num terceiro quadrado cuja área seja igual à soma das áreas dos quadrados dados. Vejamos:

Inicialmente, devemos marcar o ponto  $I$  em  $\overline{EF}$ , de modo que  $\overline{FI} \equiv \overline{AB}$ . Em seguida, posicionaremos os quadrados de lado  $\overline{BC}$  adjacente ao de lado  $\overline{EH}$  como mostra a figura 2.15(a), traçando os segmentos  $\overline{GI}$  e o  $\overline{DI}$ , marcando o ponto  $J$  como sendo a intersecção de  $\overline{DI}$  com  $\overline{BC}$  ou  $\overline{EH}$ .

Com isso, obteremos os triângulos  $DCJ$ ,  $JEI$ ,  $IFG$  e os quadriláteros  $ABJD$  e  $IGHJ$ .

Com os polígono obtidos, devemos reagrupá-los para obter o quadrado que representa a soma das áreas dos dois quadrados dados.

Como consequência dessa construção, foi apresentada uma das milhares demonstrações existentes do Teorema de Pitágoras.

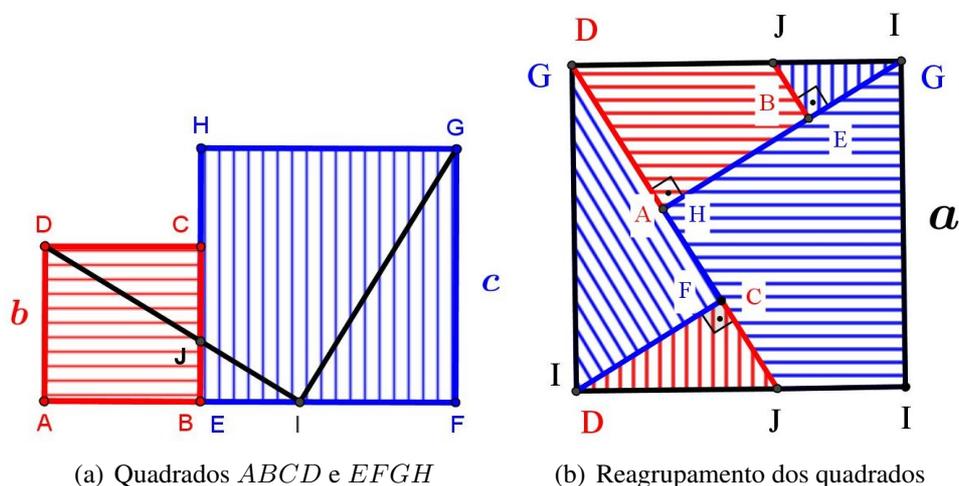


Figura 2.15: Somas das áreas dos quadrados

### 2. Pelo Teorema de Pitágoras

De forma algébrica, podemos obter a soma das áreas dos quadrados fazendo uso do teorema de Pitágoras. Vejamos:

Do quadrado  $ABCD$  de lado  $b$  e área dada por  $S_Q = b^2$  e o  $EFGH$  de lado  $c$  e área dada por  $S_Q = c^2$ .

Ao fazermos a soma das áreas desses quadrados (representada por  $S$ ), o valor resultará em  $S = b^2 + c^2$ . E, comparando o Teorema de Pitágoras  $a^2 = b^2 + c^2$  com o resultado obtido, chegamos à conclusão que  $S = a^2$ . Logo,  $S$  é igual a área de um quadrado de lado  $a$ .

Se  $b$  e  $c$  são as medidas dos catetos e  $a$  a medida da hipotenusa, o enunciado do Teorema de Pitágoras é equivalente a afirmar que: a hipotenusa elevada ao quadrado é igual à somas dos quadrados dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

O Teorema de Pitágoras pode ser visualizado de forma dinâmica e interativa através do link: <http://tube.geogebra.org/student/m501427>. É possível também baixar o arquivo do respectivo teorema em: <https://www.dropbox.com/s/rhj3f761gwjfyg6/material-501427.ggb?dl=0>

Após estudarmos sobre equivalência de áreas de figuras planas utilizando o método da quadratura. Chegamos ao nosso foco principal, a quadratura do círculo, que será mostrada por dois métodos que veremos na sequência.

## Capítulo 3

# Quadratura do Círculo

Até o presente momento, construímos as quadraturas do retângulo, do triângulo e de um polígono qualquer. Vimos também que a quadratura recebeu esse nome oriundo do quadrado, visto que este é considerado uma das figuras mais simples da geometria. Dando sequência a essa linha de pensamento das quadraturas, tentaram utilizar o mesmo processo com o círculo, ou seja, "quadrá-lo" o que resultou no famoso problema da **quadratura do círculo**.

Até agora, vimos que, para solucionar o problema, devemos construir um quadrado de área equivalente à de um círculo de raio unitário cuja medida do lado do quadrado seja  $l = \sqrt{\pi}$  (conforme mostrado no cálculo algébrico no capítulo 1). Isso quer dizer que a solução da quadratura do círculo está intrinsecamente ligada à construtibilidade do segmento  $l = \sqrt{\pi}$  com a utilização dos instrumentos euclidianos.

Mostraremos a seguir dois métodos usados para a construção geométrica da quadratura do círculo utilizando apenas os instrumentos euclidianos, juntamente à respectiva demonstração de seus resultados, desenvolvidos por matemáticos que se dedicaram à solução deste problema ao longo da história. Essas demonstrações darão embasamento para nosso trabalho na busca de uma possível solução para a quadratura do círculo.

Essas construções geométricas serão desenvolvidas com o uso de ferramentas da geometria dinâmica. Com isso, os instrumentos euclidianos (a régua não graduada e o compasso) necessários à construção, serão substituídos pelo compasso e régua eletrônicos, com a utilização do GeoGebra. Mantendo as mesmas propriedades, aplicabilidades e utilidades dos instrumentos euclidianos, claro que com o diferencial indiscutível. Desta forma, essas construções poderão ser visualizadas de forma dinâmica, além de permitir ao leitor uma interatividade com essa construção geométrica, afim de proporcionar um melhor entendimento e possibilitar a comparação e verificação dos resultados.

## 3.1 Métodos de Quadratura do círculo

### 3.1.1 Método de Ernest Hobson

Ernest Willian Hobson (1856 - 1933) frequentou a escola Derby, na Inglaterra, estudou no *Royal College of Science*, vindo a ganhar uma bolsa de estudos que lhe proporcionou a oportunidade de estudar física com Frederick Guthrie na *Frederick Guthri Royal School of Mines*. Mais tarde, foi para Cambridge estudar matemática no Christ's College, graduando-se em 1878. Hobson passou o resto de sua vida nesta mesma cidade, chegando a lecionar na Universidade de Cambridge. Ao longo de sua carreira, ficou conhecido mais por sua habilidade como um pensador do que por seus cálculos propriamente ditos.

Hobson fez diversas contribuições à matemática. Dentre elas, podemos citar a convergências de séries de funções ortogonais e as publicações de diversos trabalhos, como *A Treaatise on Trigonometry* (1981); *Theory os Functions os a Real Variable* (1907). Dentre suas publicações, destacamos a obra *Squaring the Circle* (1913), livro que possui um levantamento das principais abordagens ao problema histórico da quadratura do círculo.

Outro feito relevante de Hobson foi a construção geométrica de um segmento de reta referente ao lado do quadrado equivalente ao círculo, segmento este que será analisado a seguir para verificarmos se a medida de Hobson é igual a  $\sqrt{\pi}$  e se ela é capaz de solucionar o problema da quadratura círculo.

**Construção Geométrica 3.1** (Quadratura do Círculo pelo Método de Ernest Hobson).

Trace o círculo de raio unitário de centro  $O$ , diâmetro  $\overline{AB}$  e divida  $\overline{OA}$  em 5 partes iguais, marcando o ponto  $C$ , tal que  $\overline{OC} = \frac{3}{5}$  e  $\overline{OB}$  em 2 partes iguais marcando o ponto  $D$ , tal que  $\overline{OD} = \frac{1}{2}$  como mostra a Figura abaixo;

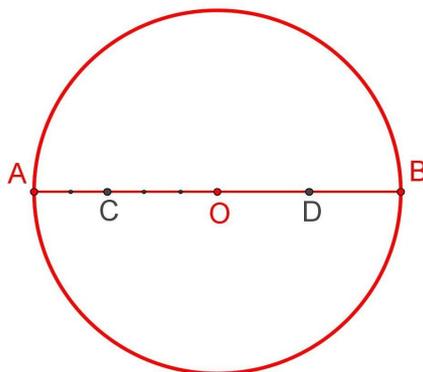


Figura 3.1: Círculo de diâmetro  $\overline{AB}$

Acima de  $\overline{AB}$ , trace o semicírculo de diâmetro  $\overline{CD}$ , marcando o centro  $O'$  e prolongue o diâmetro  $\overline{AB}$ , marcando o ponto  $E$ , tal que  $\overline{BE} \equiv \overline{OD}$  conforme a Figura abaixo;

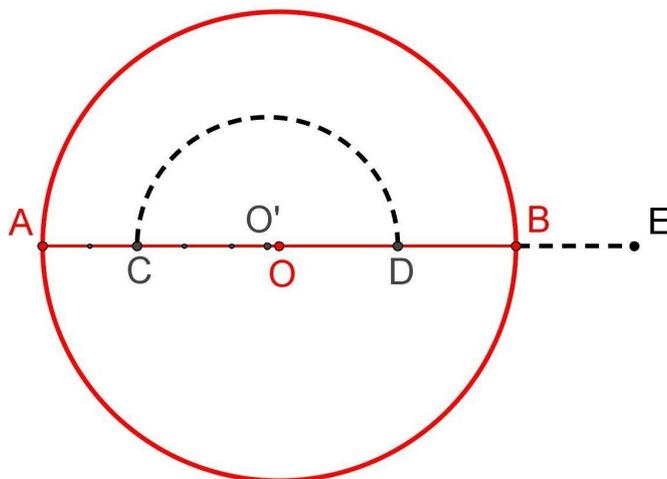


Figura 3.2: Semicírculo de diâmetro  $CD$  e o segmento  $\overline{BE}$

Trace o semicírculo de diâmetro  $\overline{AE}$  abaixo do diâmetro  $\overline{AB}$ , marcando o centro  $O''$ . Em seguida trace  $\overline{HI}$  perpendicular à  $\overline{AB}$ , passando pelo centro  $O$ , sendo os pontos  $H$  e  $I$  as interseções com os respectivos semicírculos de diâmetro  $\overline{CD}$  e  $\overline{AE}$  como mostra a Figura abaixo;

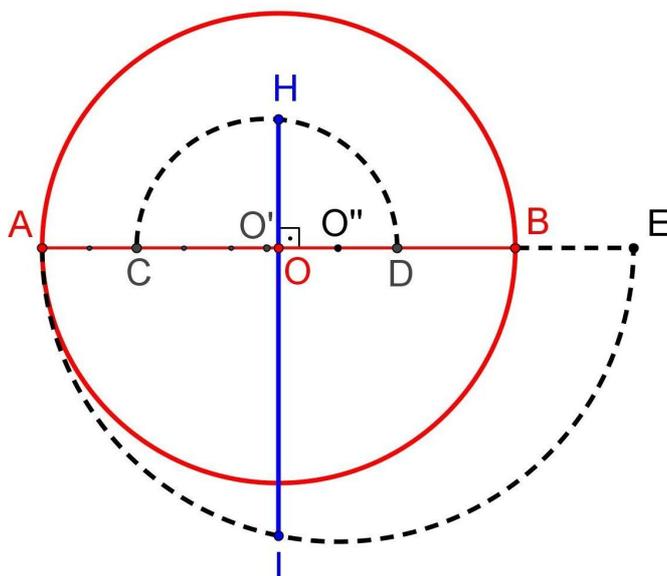


Figura 3.3: Semicírculo de diâmetro  $AE$  e o segmento  $\overline{HI}$

Descreva o quadrado  $HIMK$  de lado  $\overline{HI}$  como mostra a Figura 3.4.

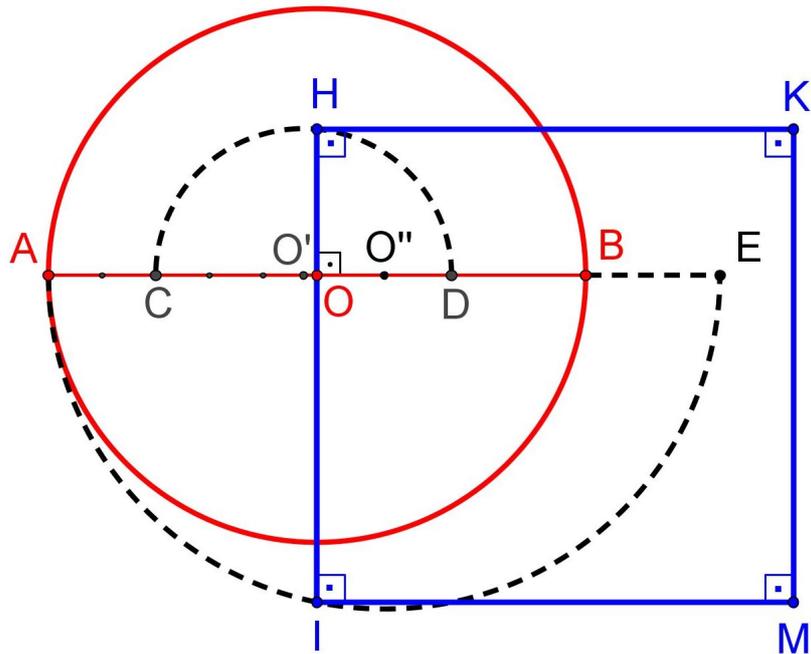


Figura 3.4: Quadrado  $HIMK$  obtido pelo Método de Ernest Hobson

A Quadratura do Círculo feita pelo Método de Hobson pode ser visualizada de forma dinâmica e interativa através do link: <http://tube.geogebra.org/student/m501473>.

É possível também fazer o download do arquivo da respectiva quadratura em: <https://www.dropbox.com/s/fjl6dq31ee7fg6r/material-501473.ggb?dl=0>.

**Demonstração** (Quadratura do Círculo pelo Método de Ernest Hobson).

Considere o círculo de diâmetro  $\overline{AB}$  de centro  $O$  e raio unitário.

- Do círculo de diâmetro  $\overline{AB}$  e raios  $\overline{OA} \equiv \overline{OB} = 1$ .

Por construção, temos:  $\overline{OC} = \frac{3}{5}$  e  $\overline{OD} = \frac{1}{2}$

- Do semicírculo de diâmetro  $\overline{CD}$  e raios  $\overline{O'C} \equiv \overline{O'D}$ .

Por construção, temos:  $\overline{CD} = \overline{OC} + \overline{OD} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{11}{10}$

Como  $\overline{O'C} \equiv \overline{O'D}$  e  $\overline{CD} = \overline{O'C} + \overline{O'D}$ , então:

$$\overline{O'C} \equiv \overline{O'D} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{O'C} \equiv \overline{O'D} = \frac{11}{2} \Rightarrow \overline{O'C} \equiv \overline{O'D} = \frac{11}{20}$$

Sendo  $\overline{HO'}$  e  $\overline{O'C}$  raios do semicírculo de diâmetro  $\overline{CD}$ .

$$\text{Logo, } \overline{HO'} \equiv \overline{O'C} \equiv \overline{O'D} \Rightarrow \overline{HO'} = \frac{11}{20}$$

$$\text{Por construção, temos: } \overline{OO'} = \overline{OC} - \overline{O'C} \Rightarrow \overline{OO'} = \frac{3}{5} - \frac{11}{20} \Rightarrow \overline{OO'} = \frac{1}{20}$$

Como  $\overline{OH}$  é perpendicular à  $\overline{OO'}$ , temos por construção o triângulo  $HOO''$  retângulo em  $O$  da Figura abaixo 3.5 no qual faremos uso do teorema de Pitágoras para encontrar  $\overline{OH}$ .

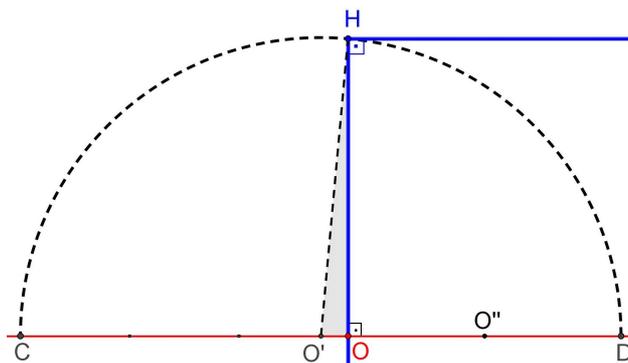


Figura 3.5: Triângulo retângulo  $HOO''$

$$(\overline{HO'})^2 = (\overline{OH})^2 + (\overline{OO'})^2 \Rightarrow \left(\frac{11}{20}\right)^2 = (\overline{OH})^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2 \Rightarrow \overline{OH} = \sqrt{\frac{3}{10}}$$

- Do semicírculo de diâmetro  $\overline{AE}$  e raios  $\overline{AO''} \equiv \overline{O''E}$

$$\text{Por construção, temos: } \overline{AE} = \overline{AO''} + \overline{O''E}, \quad \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} \quad \text{e} \quad \overline{BE} = \frac{1}{2}$$

Como  $\overline{AB}$  é diâmetro do círculo de raio unitário então  $\overline{AB} = 2$ , com isso teremos:

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} \Rightarrow \overline{AE} = 2 + \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{5}{2}$$

Se  $\overline{O''E}$  raio do semicírculo de diâmetro  $\overline{AE}$ , então:

$$\overline{O''E} = \frac{\overline{AE}}{2} \Rightarrow \overline{O''E} = \frac{5}{2} \Rightarrow \overline{O''E} = \frac{5}{4}$$

Por construção, temos:

$$- \overline{O''I} \text{ raio do semicírculo de diâmetro } \overline{AE}, \text{ então } \overline{O''E} \equiv \overline{O''I} = \frac{5}{4}$$

$$- \overline{OO''} = \overline{OE} - \overline{O''E} \Rightarrow \overline{OO''} = \frac{3}{2} - \frac{5}{4} \Rightarrow \overline{OO''} = \frac{1}{4}$$

Como  $\overline{OI}$  é perpendicular à  $\overline{OO''}$ , temos por construção o triângulo  $IOO''$  retângulo em  $I$  da Figura abaixo 3.6 no qual faremos uso do teorema de Pitágoras para encontrar  $\overline{OI}$ .

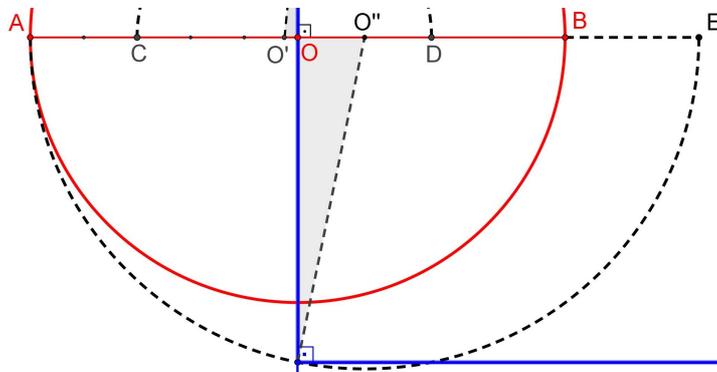


Figura 3.6: Triângulo retângulo  $IOO''$

$$(\overline{O''I})^2 = (\overline{OI})^2 + (\overline{OO''})^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 = (\overline{OI})^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow \overline{OI} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Com os valores obtidos de  $\overline{OH}$  e  $\overline{OI}$ , agora podemos encontrar o lado do quadrado que será dado por  $\overline{HI} = \overline{OH} + \overline{OI}$ .

$$\overline{HI} = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)} \Rightarrow \overline{HI} = 0,54772255\dots + 1,22474487\dots \Rightarrow$$

$$\overline{HI} = 1,77246742\dots$$

Portanto,  $\overline{HI}$  é a medida do lado quadrado  $HILK$ .



Fazendo comparações:

Seja o quadrado  $HILK$  de lado  $\overline{HI} = 1,77246742\dots$  e área dada por  $S_Q = l^2$ .

Como  $l = \overline{HI} \Rightarrow l = 1,77246742\dots$ , então:

$$S_Q = l^2 \Rightarrow S_Q = (1,77246742\dots)^2 \Rightarrow S_Q = 3,14164078\dots$$

Portanto, a área do quadrado  $HILK$  é igual a  $S_Q = 3,14164078\dots$

Seja o círculo de diâmetro  $\overline{AB}$ , raio unitário e área dada por  $S_C = \pi r^2$ .

Como  $r = 1$ , então  $S_C = \pi 1^2 \Rightarrow S_C = \pi \Rightarrow S_C = 3,14159265\dots$

Portanto, a área do círculo de raio unitário é igual a  $S_C = 3,14159265\dots$

Comparando as áreas  $S_C$  e  $S_Q$ , temos que  $S_C < S_Q$  e que os valores de suas áreas são iguais até a terceira casa decimal, dando uma diferença de  $4,813292 \times 10^{-5}$ , o que equivale a uma aproximação de 99,9984%.

### 3.1.2 Método de Srinivasa Ramanujan

O gênio hindu do século XX, Srinivasa Ramanujan, (1887 - 1920) nasceu na cidade de Erode no sul da Índia. Era possuidor de uma habilidade incrível em aritmética e álgebra. Mas, aos 16 anos, sua vida tomou um rumo decisivo depois que ele obteve um livro intitulado "*A Sinopse de resultados elementares em Matemática Pura e Aplicada*". O livro era simplesmente uma compilação de milhares de resultados matemáticos, entretanto, estabelecidos com pouca ou nenhuma indicação de prova.

Ramanujan teve seu aprendizado e estilo influenciado depois do conhecimento do livro de G.S. Carr "*Synopsis of Elementary Results on Pure Mathematics*", o qual continha diversos assuntos como álgebra, teoremas e fórmulas com pouca ou nenhuma indicação de demonstração.

Com o estudo das séries harmônicas, ele calculou a constante de Euler com 15 casas decimais e estudou também os números de Bernoulli. Essas foram apenas algumas de suas contribuições à matemática.

Ramanujan fez também contribuições para o problema da quadratura do círculo, publicando dois artigos diferentes que se referiam ao mesmo problema, sendo que um foi publicado em 1913 no *Journal of the Indian Mathematical Society* e o outro lançado um ano mais tarde no *Quarterly Journal of Mathematics XLV*, ambos mostrando seu método utilizado na construção geométrica para obter o segmento referente ao lado do quadrado equivalente ao círculo. A seguir, analisaremos a medida desse segmento para verificarmos se a construção geométrica de Ramanujan é capaz de resolver o problema da quadratura do círculo.

Para o nosso trabalho, mostraremos apenas um dos métodos feitos por Ramunajan. Quanto ao outro método, mais detalhes serão mencionados no momento oportuno.

Antes de iniciarmos nossa construção, enunciaremos o teorema do ângulo inscrito numa semicircunferência, pois será utilizado no decorrer dessa construção.

**Teorema 3.1** (Ângulo inscrito numa semicircunferência). *Todo ângulo reto pode ser inscrito em uma semicircunferência. Para a demonstração ver em [5].*

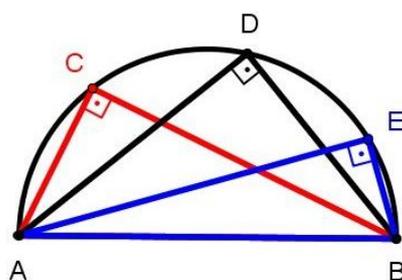


Figura 3.7: Triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência

Como consequência deste teorema 3.1, temos que todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência, onde o diâmetro coincide com a hipotenusa como mostra a Figura 3.7.

**Construção Geométrica 3.2** (Quadratura do Círculo pelo Método de Srinavasa Ramanujan).

Trace um círculo de raio unitário e centro  $O$ , diâmetro  $\overline{AB}$  e trisseccione  $\overline{OB}$  em partes iguais, marcando o ponto  $T$ , tal que  $\overline{OT} = \frac{2}{3}$  como mostra a Figura 3.8(a);

Acima de  $\overline{AB}$ , marque no círculo o ponto  $Q$  traçando  $\overline{TQ}$  perpendicular à  $\overline{AB}$  e o ponto  $S$  de modo que  $\overline{BS} \equiv \overline{TQ}$  conforme a Figura 3.8(b);

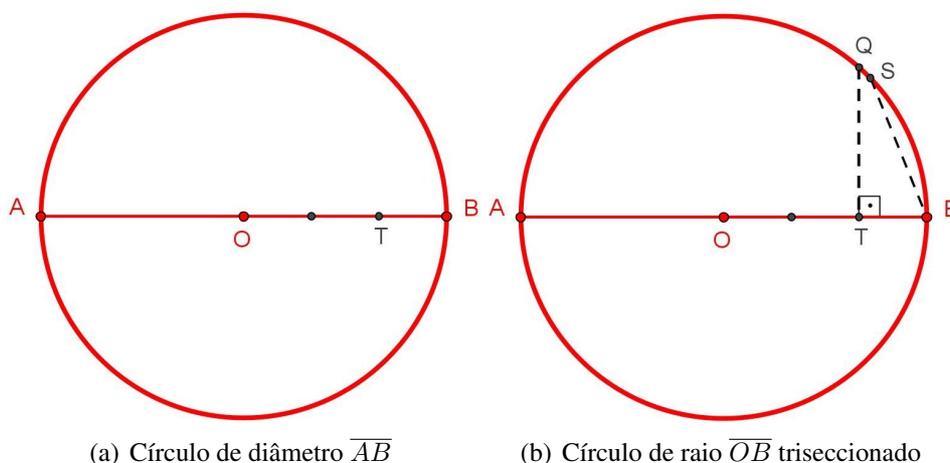


Figura 3.8: Método de Srinivasa Ramanujan 1

Em seguida, trace  $\overline{AS}$  obtendo o  $\triangle ABS$  retângulo em  $S$  e, paralelo à  $\overline{BS}$ , trace  $\overline{TN}$  e  $\overline{OM}$ , marcando os respectivos pontos  $N$  e  $M$  em  $\overline{AS}$  como mostra a Figura 3.9(a);

Abaixo de  $\overline{AB}$ , marque o ponto  $K$  no círculo, tal que  $A$  seja equidistante de  $K$  e  $M$  e, abaixo de  $\overline{AB}$ , trace  $\overline{AL} \equiv \overline{NM}$  tangente ao círculo conforme a Figura 3.9(b);

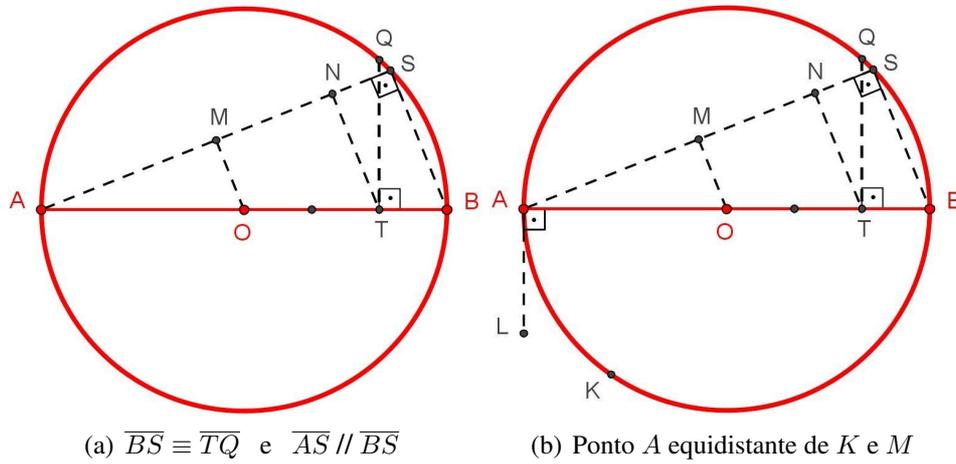


Figura 3.9: Método de Srinivasa Ramanujan 2

Marque o ponto médio  $H$  de  $\overline{OA}$  e trace  $\overline{BK}$ , marcando sobre este o ponto  $C$ , de tal modo que  $B$  seja equidistante aos pontos  $C$  e  $H$  conforme a Figura 3.10(a);

Trace  $\overline{BL}$  e  $\overline{LK}$ , marcando o ponto  $D$  em  $\overline{BL}$  e, paralelo à  $\overline{LK}$ , trace  $\overline{DC}$  como mostra a Figura 3.10(b);

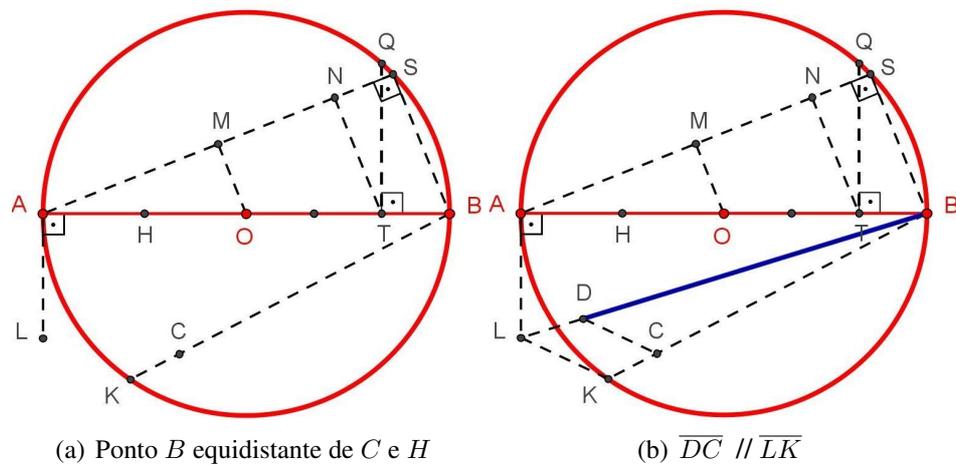


Figura 3.10: Método de Srinivasa Ramanujan 3

Descreva o quadrado  $BDPR$  de lado  $\overline{DB}$ , tendo os pontos  $D$  e  $B$  como vértices mostra a Figura abaixo.

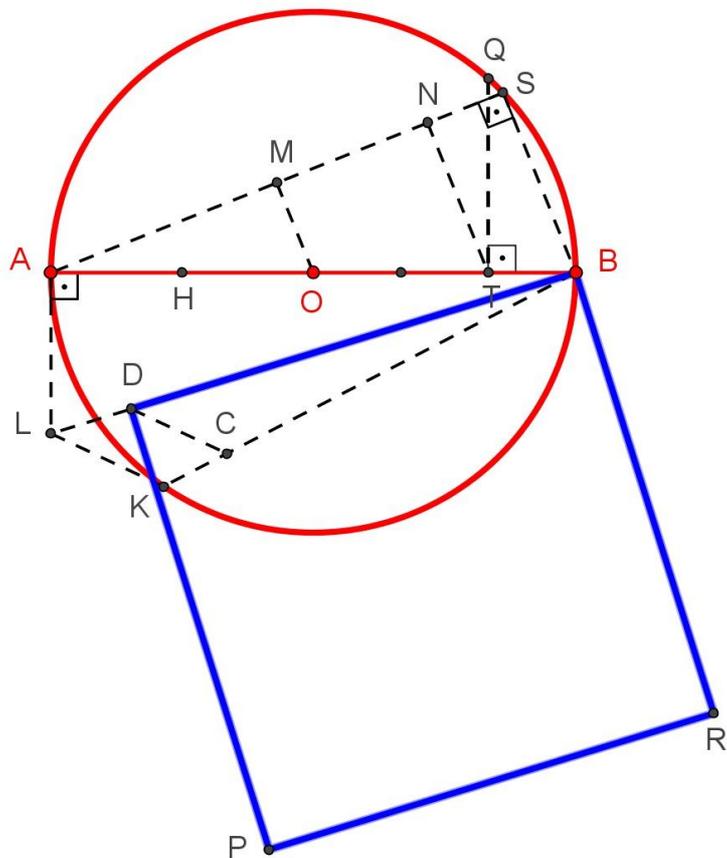


Figura 3.11: Quadrado  $BDPR$  obtido pelo Método de Srinivasa Ramanujan

A Quadratura do Círculo feita pelo Método de Ramanujan pode ser visualizada de forma dinâmica e interativa através do link: <http://tube.geogebra.org/student/m501551>.

É possível também fazer o download do arquivo da respectiva quadratura em: <https://www.dropbox.com/s/t3xswmeym0fchld/material-501551.ggb?dl=0>

Antes de darmos início à demonstração, enunciaremos o Teorema de Tales, como ferramenta indispensável que utilizaremos ao longo da demonstração. Na qual vamos considerar um círculo de diâmetro  $\overline{AB}$ , centro  $O$  e raio unitário.

**Teorema 3.2** (Teorema de Tales). *Se duas retas são transversais <sup>1</sup> de um feixe de retas paralelas <sup>2</sup>, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de um delas é igual à razão entre as medidas dos respectivos segmentos correspondentes da outra. Para o leitor interessado na demonstração ou em mais detalhes deste teorema, ver em [14].*

<sup>1</sup>Reta transversal ao feixe de retas paralelas - É uma reta do plano do feixe que intersecta todas as retas do feixe.

<sup>2</sup>Feixe de retas paralelas - É um conjunto de retas distintas de um plano e paralelas entre si.

A Figura abaixo, mostra um feixe de retas paralelas (t,u,v,z) intersectadas por duas retas transversais (r e s), podemos dizer que:

- São correspondentes os pontos:  $A$  e  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ ,  $C$  e  $C'$ ,  $D$  e  $D'$ ;
- São correspondentes os segmentos:  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{C'D'}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{A'C'}$  etc.

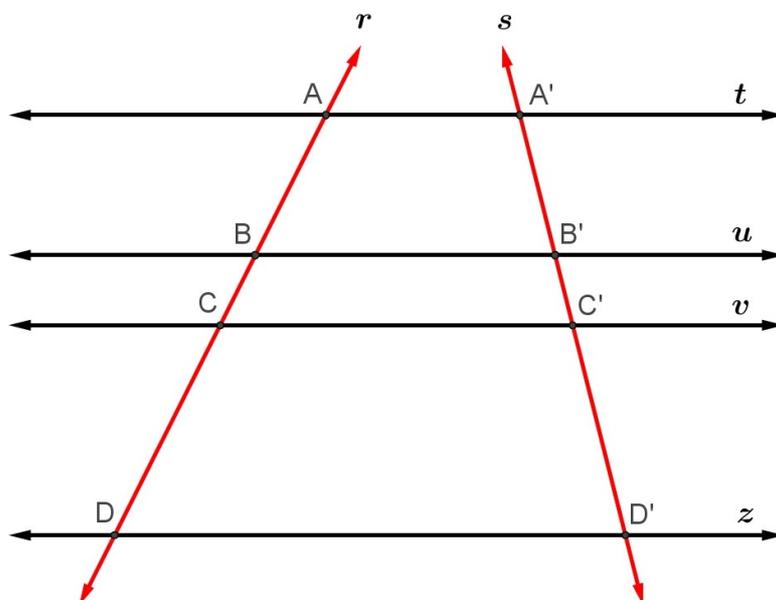


Figura 3.12: Teorema de Tales

Se duas retas transversais intersectam um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois de seus segmentos quaisquer de uma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \text{ ou } \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} \text{ ou } \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$$

Um feixe de retas paralelas determina, em duas retas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.

**Demonstração** (Quadratura do Círculo pelo Método de Srinivasa Ramanujan).

Do círculo de diâmetro  $\overline{AB}$ , temos os raios  $\overline{OA} \equiv \overline{OB} = 1$ .

Por construção, temos:

$$\overline{OH} = \frac{1}{2}, \quad \overline{OT} = \frac{2}{3}, \quad \overline{TB} = \frac{1}{3}, \quad \overline{AT} = \frac{5}{3} \text{ e o } \triangle ABQ.$$

Pelo teorema 3.1, temos que todo triângulo inscrito num semicírculo é retângulo. Em razão disso, temos o  $\triangle ABQ$  retângulo em  $Q$  de altura  $\overline{TQ}$  relativa à hipotenusa  $\overline{AB}$  e, pelas relações métricas do triângulo retângulo, temos:

$$(\overline{TQ})^2 = \overline{AT} \times \overline{TB} \Rightarrow (\overline{TQ})^2 = \frac{5}{3} \times \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{TQ} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como  $\overline{TQ} \equiv \overline{BS}$ , então  $\overline{BS} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

De forma análoga ao triângulo anterior, temos o  $\triangle ABS$  retângulo em  $S$ , no qual usaremos o teorema de Pitágoras para encontrar  $\overline{AS}$ .

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{BS})^2 + (\overline{AS})^2 \Rightarrow (2)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + (\overline{AS})^2 \Rightarrow \overline{AS} = \frac{\sqrt{31}}{3}$$

Pelo teorema de Tales 3.2, encontraremos  $\overline{MN}$  e  $\overline{AM}$ :

Como  $\overline{OM} \parallel \overline{TN} \parallel \overline{BS}$ , então:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{OT}} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{31}}{3}}{2} = \frac{\overline{MN}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\sqrt{31}}{9}$$

Como  $\overline{MN} \equiv \overline{AL}$ , então  $\overline{AL} = \frac{\sqrt{31}}{9}$

Ainda por Tales, segue que:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{31}}{3}}{2} = \frac{\overline{AM}}{1} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{\sqrt{31}}{6}$$

Como  $\overline{AM} \equiv \overline{AK}$ , então  $\overline{AK} = \frac{\sqrt{31}}{6}$

Sendo  $\overline{AL}$  tangente ao círculo, então  $\overline{AL} \perp \overline{AB}$  e por construção temos o  $\triangle ALB$  retângulo em  $A$  e o  $\triangle AKB$  retângulo em  $K$ , nos quais usaremos o teorema de Pitágoras para encontrar  $\overline{BL}$  e  $\overline{BK}$  respectivamente.

$$(\overline{BL})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AL})^2 \Rightarrow (\overline{BL})^2 = (2)^2 + \frac{\sqrt{31}}{9} \Rightarrow \overline{BL} = \frac{\sqrt{355}}{9}$$

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AK})^2 + (\overline{BK})^2 \Rightarrow (2)^2 = \frac{\sqrt{31}}{6} + (\overline{BK})^2 \Rightarrow \overline{BK} = \frac{\sqrt{113}}{6}$$

$$\text{Como } \overline{BH} = \frac{3}{2} \text{ e } \overline{BH} \equiv \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{3}{2}$$

Pelo teorema de Tales, vamos determinar  $\overline{BD}$ :

Como  $\overline{LK} \parallel \overline{DC}$ , então:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{BK}} \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{355}}{9}}{\frac{\sqrt{113}}{6}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{\sqrt{355}}{\sqrt{113}}$$

Portanto, temos o lado  $\overline{BD} = \frac{\sqrt{355}}{\sqrt{113}}$  do quadrado  $PRDB$ .

■

Fazendo comparações:

Sabemos que o círculo de raio unitário tem área  $S_C = \pi$ , ou seja, igual a  $\pi$ , então  $S_C = 3,14159265\dots$  e a área do quadrado dado por  $S_Q = l^2$ .

$$\text{Como } l = \overline{BD} \text{ e } \overline{BD} = \frac{\sqrt{355}}{\sqrt{113}} \text{ então } l = \frac{\sqrt{355}}{\sqrt{113}}$$

Encontrando a área do quadrado

$$S_Q = l^2 \Rightarrow S_Q = \frac{355}{113} \Rightarrow S_Q = 3,14159292\dots$$

Fazendo uma comparação entre as áreas  $S_C$  e  $S_Q$ , temos a mesma conclusão do método 3.1 de Ernest Hobson, ou seja, que  $S_C < S_Q$ . Quanto à aproximação em relação à área do círculo, o método de Srinivasa Ramanujan supera o anterior em mais três casas decimais. Com isso, temos que suas casas decimais são iguais até a sexta casa, dando uma diferença de  $2,6676 \times 10^{-7}$  entre suas áreas, o que equivale a, aproximadamente 99,9999915%.

### 3.1.3 Método de Erenest Hobson x Srinivasa Ramanujan da Quadratura do Círculo

O que foi mostrado pelos Método de Hobson e de Ramanujan foram apenas construções aproximadas da quadratura do círculo. Enquanto Hobson teve um aproximação de 99,9984%, Ramanujan teve a área do quadrado igual à do círculo até a sexta casa decimal, superando o de Robson em 3 casas decimais. Isso o levou a uma aproximação de 99,9999915%. Os dois métodos concluíram também que a área do quadrado encontrada é sempre maior que a do círculo dado.

Diante dos métodos analisados (**Ernest Hobson x Srinivasa Ramanujan**), vimos que as áreas  $S_C$  e  $S_Q$  não são equivalentes, embora possuam uma excelente aproximação. Em outras palavras, os resultados encontrados mostram que não é possível obtermos a quadratura do círculo de forma exata.

**Observação 3.1.** *Para título de informação, havíamos comentado que Ramanujan publicou dois artigos com o mesmo tema: a quadratura do círculo. Um deles foi mostrado anteriormente. Quanto ao outro, trata-se também de uma construção geométrica com uma aproximação ainda maior. Entretanto, observamos que essa construção não está de acordo com os critérios exigidos para a solução do problema, ou seja, utiliza outros recursos além dos instrumentos euclidianos para a obtenção da quadratura do círculo.*

## 3.2 Circulatura do quadrado

Nesta seção, o que veremos é o inverso do problema da quadratura do círculo. Faremos a construção de um círculo de mesma área de um quadrado dado, utilizando apenas os instrumentos euclidianos e denominaremos essa construção de "**circulatura do quadrado**".

**Construção Geométrica 3.3** (Da Circulatura do Quadrado).

Descreva o quadrado  $ABCD$  de lado  $l$  como mostra a Figura 3.13(a) e marque o ponto médio  $E$  de  $\overline{AB}$ . Em seguida trace  $\overline{EC}$  formando um triângulo retângulo em  $B$  marcando ponto médio  $O$  de  $\overline{EC}$  conforme a Figura 3.13(b);

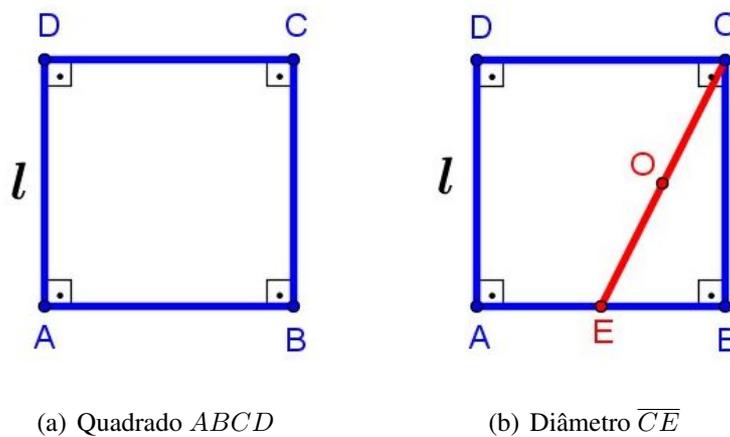


Figura 3.13: Circulatura do quadrado

Trace o círculo de diâmetro  $\overline{EC}$  e centro  $O$  como mostra a Figura abaixo.

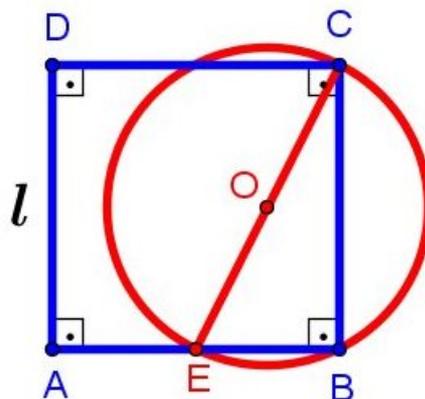


Figura 3.14: Circulatura do quadrado - Quadrado  $\cong$  Círculo

Desta forma, fizemos a circulatura do quadrado que consistiu na construção de um círculo de mesma área que a de um quadrado. Será que isso realmente aconteceu, ou foi apenas uma tentativa? Veremos mais adiante a demonstração desse resultado.

A Circulatura do quadrado pode ser visualizada de forma dinâmica e interativa através do link: <https://tube.geogebra.org/student/m527273>. É possível também fazer o download do arquivo da respectiva quadratura em: <https://www.dropbox.com/s/g222s8yp6o1twxv/material-527273.ggb?dl=0>

### **Demonstração** (Circulatura do Quadrado).

Para a nossa demonstração calcularemos o diâmetro do círculo em função do lado  $l$  do quadrado. Em seguida calcularemos as áreas do quadrado  $S_Q$  e do círculo  $S_C$  e as igualamos.

Por construção, temos o  $\triangle CBE$  retângulo em  $B$ , no qual usaremos o teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa  $\overline{EC}$ .

Como  $\overline{BC} = l$  e  $\overline{EB} = \frac{l}{2}$ , então:

$$\begin{aligned}(\overline{EC})^2 &= (\overline{EB})^2 + (\overline{BC})^2 \Rightarrow (\overline{EC})^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (l)^2 \Rightarrow \\ \overline{EC}^2 &= \frac{l^2}{4} + l^2 \Rightarrow \overline{EC} = \frac{l\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Desta forma a hipotenusa é  $\overline{EC} = \frac{l\sqrt{5}}{2}$

Como  $\overline{EC}$  é o diâmetro do círculo, temos que:  $\overline{EC} = D$  onde  $D = 2r$ , então:

$$\overline{EC} = D \Rightarrow \overline{EC} = 2r \Rightarrow r = \frac{\overline{EC}}{2}$$

Substituindo  $\overline{EC} = \frac{l\sqrt{5}}{2}$  em  $r = \frac{\overline{EC}}{2}$ , teremos:

$$r = \frac{\overline{EC}}{2} \Rightarrow r = \frac{\frac{l\sqrt{5}}{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{l\sqrt{5}}{4}$$

Calculando a área do círculo  $S_C$  em função de  $l$ .

$$S_C = \pi r^2 \Rightarrow S_C = \pi \left( \frac{l\sqrt{5}}{4} \right)^2 \Rightarrow S_C = \frac{5\pi l^2}{16}$$

Igualando  $S_C$  e  $S_Q$ , teremos:

$$S_C = S_Q \Rightarrow \frac{5\pi l^2}{16} = l^2 \Rightarrow \pi = \frac{16}{5} \Rightarrow \pi = 3,2$$

Portanto, o método da circunscrita do quadrado resulta em  $\pi = 3,2$ .



### **Fazendo comparações:**

Fazendo uma comparação entre as áreas  $S_C$  e  $S_Q$ , concluímos, mais uma vez que  $S_C < S_Q$ . Quanto a comparação deste valor encontrado com o valor real de  $\pi = 3,1415\dots$ , temos uma diferença de  $0,0584\dots$  o que equivale a uma aproximação de  $98,14\%$ .

Portanto, as áreas do círculo e do quadrado por esse método, também não são equivalentes e sim apenas aproximadas.

No capítulo que segue, será mostrado de forma breve outras maneiras de classificar-mos os números, para que possamos chegar a solução do problema da quadratura do círculo.

# Capítulo 4

## Pontos e Números Construtíveis

Na solução algébrica da quadratura do círculo já foi possível ser vista a ligação do problema com o número  $\pi$  que até o presente momento se classifica como número irracional, assim como  $\sqrt{\pi}$ . E quanto a sua construtibilidade ficou uma certa interrogação. Neste capítulo, seguiremos com um breve estudo sobre pontos e números construtíveis e estabeleceremos as regras matemáticas para determinarmos quando um número é dito construtível com régua e compasso. Além das definições de números algébricos e transcendentos, revelando a definitiva natureza do número  $\pi$  e como finaliza sua relação com a quadratura do círculo.

### 4.1 Pontos Construtíveis

Seja  $\partial$  um subconjunto do conjunto do  $\mathbb{R}^2$  que contém no mínimo dois pontos distintos. Conforme, Adilson G. [8] uma reta  $r$  de  $\mathbb{R}^2$  é uma reta no subconjunto  $\partial$  se dois pontos distintos de  $\partial$  estão contidos em  $r$ , e que uma circunferência  $c$  em  $\mathbb{R}^2$  é uma circunferência no subconjunto  $\partial$  se o centro da circunferência pertence a  $\partial$  e um ponto de  $\partial$  pertence a  $c$ .

A seguir citaremos as operações elementares do subconjunto  $\partial$ .

- i) Interseção de duas retas em  $\partial$ ;
- ii) Interseção de uma reta em  $\partial$  e uma circunferência em  $\partial$ ;
- iii) Interseção de duas circunferências em  $\partial$ .

Segundo Adilson G. [8] um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  é dito construtível a partir de  $\partial$  se podemos determinar esse ponto  $P$  utilizando uma das operações elementares em  $\partial$ . Para seguirmos nosso estudo, vamos denotar por  $\bar{\partial}$  o subconjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^2$  que são construtíveis a partir de  $\partial$ .

Exemplificação:

Se  $\partial_0 = \{0, U\}$  sendo  $0 = (0, 0)$  e  $U = (1, 0)$  então  $\bar{\partial}_0 = \{0, U, P_1, P_2, P_3, P_4\}$  conforme Figura abaixo, onde  $P_1 = (-1, 0)$ ,  $P_2 = (2, 0)$ ,  $P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  e  $P_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

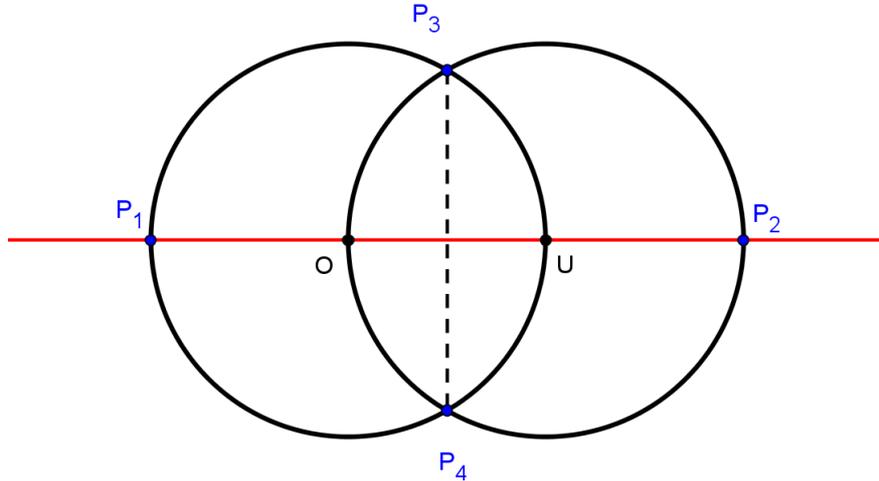


Figura 4.1: Pontos construtíveis 1

Seja  $\partial_0 = \{0, U\}$ ,  $\partial_1 = \bar{\partial}_0 \partial_2 = \bar{\partial}_1, \dots, \partial_{n+1} = \bar{\partial}_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Desta forma, temos:

$$\partial_0 \subset \partial_1 \subset \partial_2 \subset \dots \partial_n \subset \partial_{n+1} \subset \dots \subset \mathbb{R}^2.$$

Seja  $\partial_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \partial_n$ . De modo claro temos que  $\partial_\infty$  é um conjunto infinito embora cada  $\partial_n$  seja um subconjunto finito do  $\mathbb{R}^2$ . Assim, de forma imediata  $\bar{\partial}_\infty = \partial_\infty$  e  $(t, s) \in \partial_\infty, \forall t \in \mathbb{Z}, \forall s \in \mathbb{Z}$ .

Os pontos que são do plano e que pertencem a  $\partial_\infty$  são ditos de pontos construtíveis e as reta em  $\partial_\infty$ , isto é que contém dois pontos construtíveis distintos, são ditas de retas construtíveis. Portanto, um número  $a$  é chamado de construtível se  $(a, 0) \in \partial_\infty$ .

**Proposição 4.1. .**

*i) Se  $A$  e  $B$  são dois pontos distintos e construtíveis então o ponto médio  $M$  do segmento  $\overline{AB}$  é construtível e as retas perpendiculares ao segmento  $\overline{AB}$  que passa pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $M$  também são construtíveis;*

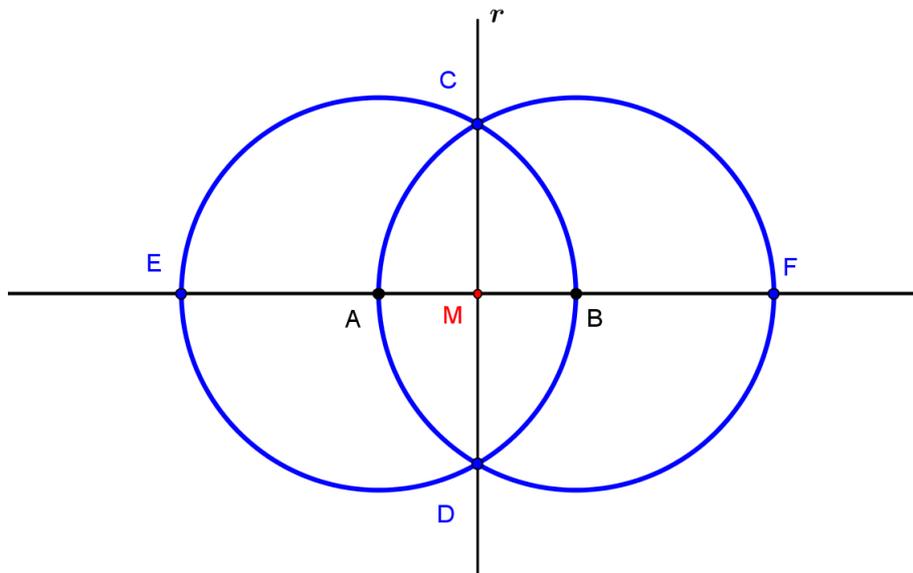


Figura 4.2: Pontos construtíveis 2

*ii) Seja o ponto  $A$  e a reta  $r$ , respectivamente, um ponto e uma reta construtíveis tais que  $A \in r$ ;*

*Se  $B$  e  $C$  são dois pontos construtíveis então existe um ponto  $X$  tal que esse ponto pertença a reta  $r$  e os segmentos  $\overline{AX}$  e  $\overline{BC}$  possuem o mesmo comprimento.*

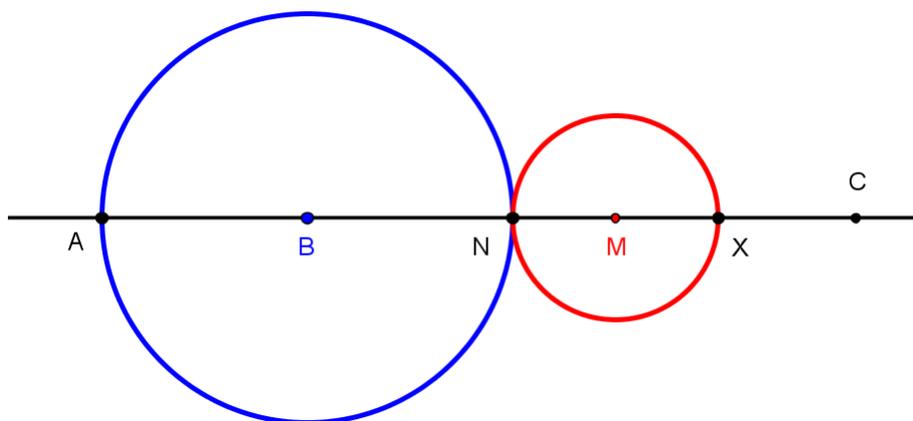


Figura 4.3: Pontos construtíveis 3

*O leitor interessado na demonstração dessa proposição pode verificar em [8].*

**Proposição 4.2. .**

*i) Sejam os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  contrutíveis, distintos e não colineares. Então existe um ponto  $D$  construtível tal que esses quatro pontos formam um paralelogramo. Em particular a reta que passa pelo ponto  $C$  e paralela ao segmento  $\overline{AB}$  é construtível;*

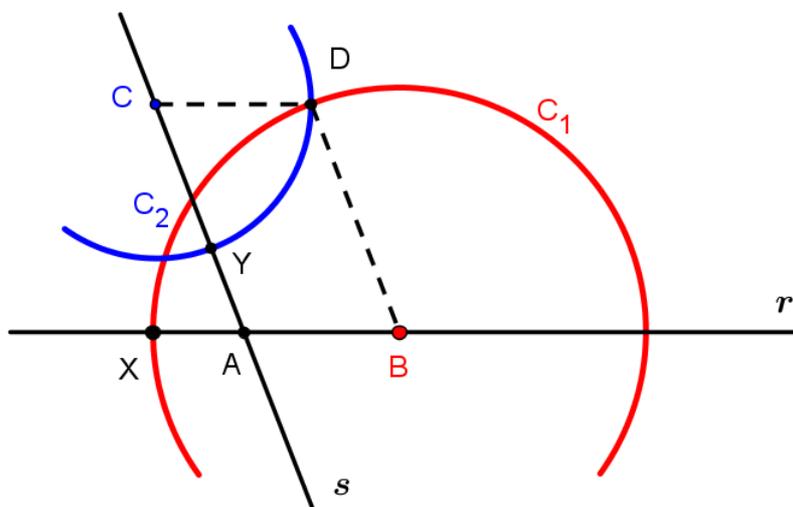


Figura 4.4: Paralelogramo  $ABCD$

*ii) Um ponto  $A$  sendo  $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  é construtível se e somente se as suas coordenadas  $(x, y) \in \mathbb{R}$  são números construtíveis.*

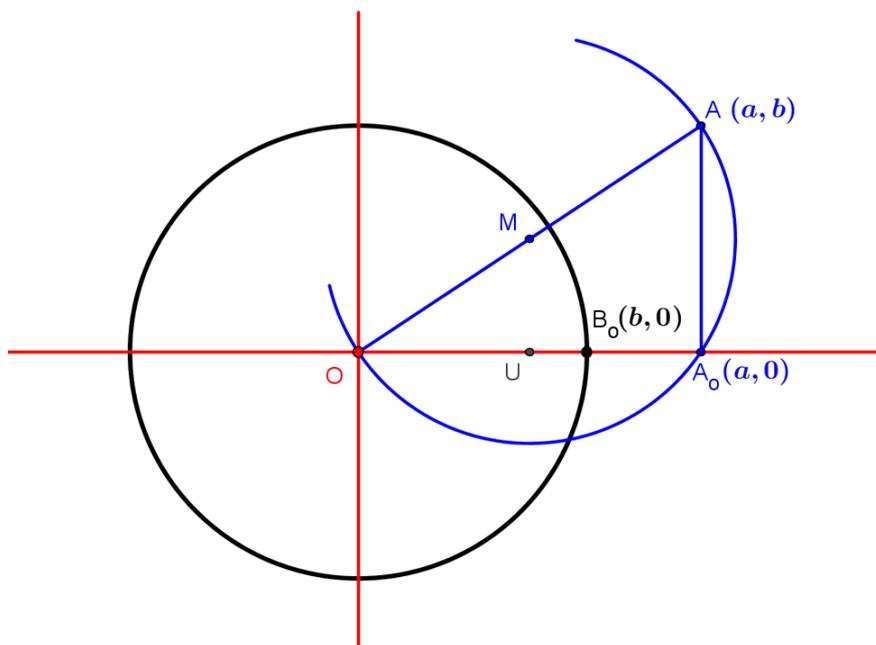


Figura 4.5: Ponto  $A$  construtível

Em suma, podemos perceber que pela proposição 4.2 os números construtíveis são exatamente as coordenadas dos pontos construtíveis. Para mais detalhes dessa proposição o leitor pode visualizar em [8].

Antes de enunciarmos o próximo teorema, assumiremos que  $\beta > \alpha > 0$  e seja  $A = (\alpha, 0)$  e  $B = (\beta, 0)$ . Para detalhes da demonstração ver em [8].

**Teorema 4.1.**  $T_{\mathbb{R}} = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ construtível}\}$  é um subcorpo de  $\mathbb{R}$  contendo  $\mathbb{Q}$ .

- i.  $\alpha, \beta \in T_{\mathbb{R}} \Rightarrow \beta - \alpha \in T_{\mathbb{R}}$
- ii.  $\alpha, \beta \in T_{\mathbb{R}} \Rightarrow \beta \cdot \alpha \in T_{\mathbb{R}}$
- iii.  $0 \neq \alpha \in T_{\mathbb{R}} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in T_{\mathbb{R}}$

## 4.2 Números Algébricos e números Transcendentes

Um número  $\alpha$  complexo é dito algébrico sobre  $\mathbb{Q}$  se existe um polinômio não nulo  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  com coeficientes inteiros ( $a_i \in \mathbb{Q}, \forall i \in 0, 1, \dots, n$ ) do qual  $\alpha$  é uma raiz ( $P(\alpha) = 0$ ).

Um número que não seja algébrico é dito **número transcendente**.

Portanto, qualquer número racional  $\alpha = \frac{p}{q}$ , ( $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $q \neq 0$ ) é algébrico porque satisfaz a equação polinomial de coeficientes inteiros  $qx - p = 0$  com  $\alpha$  raiz da equação.

**Exemplos de números algébricos:**

- 3 é um número algébrico, pois é raiz da equação  $x - 3 = 0$
- $\frac{-3}{7}$  é um número algébrico, pois é raiz da equação  $7x + 3 = 0$
- $i$  é um número algébrico, pois é raiz da equação  $x^2 + 1 = 0$

Como todo número racional é algébrico, então todo número transcendente (não algébrico) é um número irracional.

Entretanto, podemos afirmar que todo número algébrico é racional e todo número irracional é transcendente?

Mostramos na seção 1.2.3 que o segmento de medida  $\sqrt{2}$  é construtível com os instrumentos euclidianos, embora sendo um número irracional. Segundo, Wagner [12] os números construtíveis não são apenas os racionais, se  $a > 0$  for construtível, então  $\sqrt{a}$  também será construtível.

## 4.2.1 Grau de um número algébrico

Faremos uma abordagem sobre os números algébricos na qual utilizaremos algumas noções elementares de Álgebra Linear e Teoria dos corpos para que possamos definir o grau de um número algébrico.

Tendo os corpos  $L$  e  $K$  tais que  $L \subset K$  e as operações: adição e multiplicação em  $K$  se limitam às correspondentes operações em  $L$ , dizemos que  $L$  é um subcorpo de  $K$ , ou ainda, que  $K$  é uma extensão de  $L$  que denotaremos por  $K | L$ .

### Exemplos de extensões de corpos:

- $\mathbb{R} | \mathbb{Q}$
- $\mathbb{C} | \mathbb{Q}$
- $\mathbb{C} | \mathbb{R}$

Suponhamos que  $W$  é uma extensão de  $K$  e se considerarmos o corpo  $W$  como um espaço vetorial sobre  $K$ , então a dimensão de  $W$  é chamada de grau da extensão. Denotaremos por  $[W : K]$ .

Seja  $W$  um corpo que contém o corpo  $K$ , se a dimensão de  $W$  como espaço vetorial sobre  $K$ , for finita então  $W$  é dita uma extensão finita de  $K$ .

Uma extensão  $L | K$  é dita algébrica se  $\forall \alpha \in (L \setminus K)$ ,  $\alpha$  algébrico sobre  $K$ .

Seja  $\alpha \in L$  um número algébrico sobre  $K$  e  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  um polinômio, em  $K[x]$ , mônico ( $a_n = 1$ ) de menor grau tal que  $p(\alpha) = 0$ . Pela minimalidade do grau de  $p(x)$  segue que  $p(x)$  é o único polinômio mônico irredutível em  $K[x]$  tal que  $p(\alpha) = 0$ .

O polinômio minimal de  $\alpha$  é o polinômio mônico de menor grau tal que  $P(\alpha) = 0$ .

### Exemplo de polinômio minimal:

1. Dado o polinômio.

Para  $x = 1$ , teremos:

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad P(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 1 \quad \Rightarrow \quad P(1) = 0$$

2. Dado o polinômio  $\bar{P}(x) = x - 1$ .

Para  $x = 1$ , teremos:

$$\bar{P}(x) = x - 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{P}(1) = 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{P}(1) = 0:$$

Tanto para  $P(x)$  quanto para  $\bar{P}(x)$  tivemos  $x = 1$  e  $P(1) = 0$ . Logo o polinômio minimal é o de menor grau, ou seja, o polinômio  $\bar{P}(x) = x - 1$ .

**O grau de um número algébrico  $\alpha$  é o grau do polinômio minimal de  $\alpha$ .**

**Teorema 4.2.** *Se  $\alpha$  é construtível então  $\alpha$  é algébrico sobre  $\mathbb{Q}$  e além disso o grau de  $\alpha$  é uma potência de 2. Para a demonstração desse teorema o leitor interessado pode visualizar em [8].*

Como já havíamos mencionado a respeito de  $\sqrt{2}$  que é um número irracional e é possível obter a construção geométrica desse segmento com os instrumentos euclidianos, agora o veremos com mais detalhes.

Resolvendo a equação  $x^2 - 2 = 0$ , teremos:

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = +\sqrt{2} \end{cases}$$

Desta forma, temos  $\sqrt{2}$  como solução da equação  $x^2 - 2 = 0$ . Portanto,  $\sqrt{2}$  é número algébrico e por ser solução de polinômio de grau 2 é construtível conforme enuncia o teorema 4.2, por esse motivo foi possível a construção desse segmento com os instrumentos euclidianos.

Vejam se o problema da duplicação do cubo tem solução. Esse problema consiste em construir um cubo com o dobro do volume de um cubo dado. Para isso, devemos construir com os instrumentos euclidianos o segmento  $\sqrt[3]{2}$  que é solução da equação  $x^3 - 2 = 0$ . Tal número é algébrico, entretanto não é construtível, pois o seu polinômio minimal tem grau 3 e pelo teorema 4.2 para ser construtível tem que ser de grau 2. Portanto, não é possível a duplicação do cubo.

Da equação  $x^2 - 2 = 0$  resolvida acima, podemos observar que nem todos número algébrico é racional. Assim como, nem todo número irracional é transcendente.

A seguir mostraremos uma classificação para os números reais. Vejamos:

$$\text{REAIS} \left\{ \begin{array}{l} \text{RACIONAIS} \left\{ \begin{array}{l} \text{Todos são Algébricos} \end{array} \right. \\ \text{IRRACIONAIS} \left\{ \begin{array}{l} \text{ALGÉBRICOS} \\ \text{TRANSCENDENTES} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ou então,

$$\text{REAIS} \left\{ \begin{array}{l} \text{ALGÉBRICOS} \left\{ \begin{array}{l} \text{RACIONAIS} \\ \text{IRRACIONAIS} \end{array} \right. \\ \text{TRANSCENDENTES} \left\{ \begin{array}{l} \text{Todos são Irracionais} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Do questionamento feito na seção 1.2.4 (se todos os números irracionais são construtíveis), temos a seguinte resposta. Nem todos os números irracionais são construtíveis, pois existem os irracionais que também são números transcendentais, logo não são construtíveis.

Essa resposta ainda não é suficiente para chegarmos à solução do problema da quadratura do círculo, pois não temos certeza se  $\sqrt{\pi}$  é construtível.

Para continuarmos em busca dessa solução, precisamos ir além da irracionalidade do  $\pi$ . Foi exatamente essa concepção que instigou muitos matemáticos, pois queriam descobrir cada vez mais sobre a natureza desse número. Com essa inquietação não saciada, em 1873, o matemático francês Charles Hermite (1822 - 1901) marcou época ao conseguir provar a transcendência do número  $e$ <sup>1</sup>. Esse mesmo número também conhecido por "número de Euler" referência a Leonhard Euler que calculou o valor ( $e = 2,718281828459\dots$ ).

Já em 1882, o matemático alemão Ferdinand Von Lindemann (1852-1939) conseguiu demonstrar a transcendência do número  $\pi$  baseando-se no método usado por Charles Hermite para demonstrar a transcendência do número  $e$ . Como consequência, concluiu que não se tratava de um número algébrico. **Portanto, a natureza do número  $\pi$  é irracional e transcendente e o mesmo vale para  $\sqrt{\pi}$ .**

A solução do problema da quadratura do círculo depende inteiramente da construção do segmento  $\sqrt{\pi}$ . Primeiramente, concluímos que  $\pi$  era irracional. Em seguida, foi necessária a demonstração da transcendência do número  $e$  para que Ferdinand Von Lindemann demonstrasse a transcendência do número  $\pi$ . **Como  $\pi$  não é um número algébrico, logo, não é construtível. Ou seja, fica provada a impossibilidade de resolver o problema da quadratura do círculo que consiste em: construir um quadrado de lado igual a  $r\sqrt{\pi}$  equivalente ao círculo dado, de raio  $r$ .** Neste trabalho, adotamos para nossas construções o círculo de raio unitário. **Portanto, deveríamos ter construído um quadrado de lado  $\sqrt{\pi}$ , o que não foi possível de forma exata, e sim apenas aproximadas.**

**Observação 4.1.** Neste trabalho, não expusemos a demonstração da irracionalidade do  $\pi$ , nem da transcendência do  $\pi$ . O livro [4] *Números Irracionais e Transcendentes*, do autor brasileiro Djairo Guedes de Figueiredo, apresenta tanto a demonstração da transcendência do número  $e$  quanto do  $\pi$ , sendo este último baseado na obra de R. Moritz *Annals of Mathematics*, inspirada na prova de Hurwitz -que utilizou para provar a transcendência do  $e$ .

Finalizaremos nosso trabalho, com algumas atividades no último capítulo, com o propósito de continuar realizando quadraturas com a utilização de novos conhecimentos.

---

<sup>1</sup> $e$  - É um número irracional e transcendente chamado de número neperiano, em homenagem ao matemático escocês (1550 - 1617) Jonh Napier

# Capítulo 5

## Atividades

Neste capítulo, proporemos algumas atividades envolvendo quadraturas de áreas de figuras planas, utilizando a média geométrica, ferramenta que apresenta os mesmos resultados através de uma nova abordagem.

### 5.1 Média geométrica

1. Dado o semicírculo de diâmetro  $\overline{AB}$ , este perpendicular à  $\overline{AD}$  como mostra a Figura abaixo, utilizando a média geométrica, determine o segmento  $x$ .

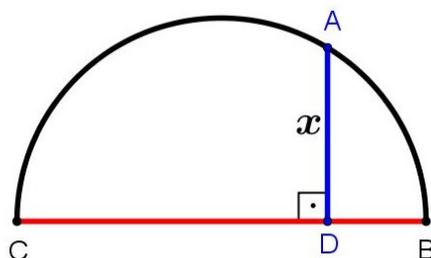


Figura 5.1: Segmento  $x$

**Objetivo da atividade 1.** *O objetivo desta atividade é relacionar a média geométrica às relações métricas do triângulo retângulo, além da consequência do teorema 3.1 onde temos que todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência na qual a hipotenusa coincide com o diâmetro.*

Sabemos que, da semelhança de triângulos, obtemos todas as relações métricas do triângulo retângulo.

Seja o  $\triangle ABC$  retângulo em  $A$  da Figura 5.2 de altura  $h$ , hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$  com suas respectivas projeções  $m$  e  $n$  sobre a hipotenusa, valem as seguintes relações:

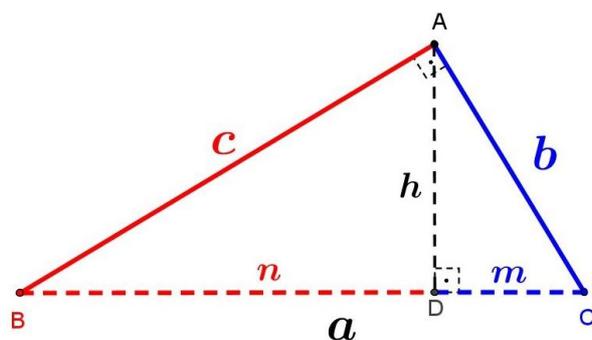


Figura 5.2: Triângulo retângulo

**Relações métricas no triângulo retângulo:**

i) O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção:

$$b^2 = a \times n \quad \text{e} \quad c^2 = a \times m$$

ii) O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

iii) O quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto da hipotenusa pelas projeções dos catetos:

$$h^2 = m \times n$$

iv) O produto da hipotenusa pela altura é igual ao produto das projeções dos catetos:

$$a \times h = m \times n$$

Algumas destas relações podem ser obtidas e/ou definidas pela média geométrica, vejamos:

Usamos a média proporcional quando temos dois segmentos, e esta coincide com a média geométrica.

Dados dois segmentos  $x$  e  $y$ , definimos a sua média proporcional (média geométrica) por:

$$M_P = \sqrt{x \times y}$$

A média geométrica vai além da proporcional, pois podemos obtê-la com as medidas dos dois segmentos ou com  $n$  números, com isso vamos defini-las de forma generalizada.

Dados os números reais e não negativos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , definimos a média geométrica como sendo a raiz  $n$ -ésima do produto dos  $n$  termos, como segue:

$$(M_G)^n = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \Rightarrow M_G = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n}$$

Desta forma, podemos concluir que:

- i) Cada cateto do triângulo retângulo é obtido pela média geométrica entre a medida da hipotenusa e a medida de sua projeção sobre ela:

$$b^2 = m \times a \Rightarrow b = \sqrt{m \times a}$$

e

$$c^2 = n \times a \Rightarrow c = \sqrt{n \times a}$$

- ii) A altura em relação a hipotenusa é obtida pela média geométrica entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa:

$$h^2 = m \times n \Rightarrow h = \sqrt{m \times n}$$

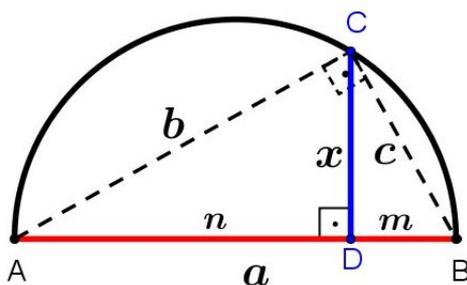


Figura 5.3: Média geométrica  $x$

**Solução da atividade 1.** Traçamos os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  para obter o triângulo  $ABC$  retângulo em  $C$ , visto que é inscrito numa semicircunferência. Em seguida, denominamos os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  de catetos  $b$  e  $c$ , respectivamente, e suas projeções  $n$  e  $m$ , bem como o diâmetro  $\overline{AB}$  de hipotenusa  $a$ .

Por construção, temos que o segmento  $x$  é a altura do triângulo retângulo em relação à hipotenusa.

Portanto,  $x$  é a média geométrica entre as projeções  $m$  e  $n$  dos catetos sobre a hipotenusa e pode ser obtida por:

$$x^2 = n \times m \Rightarrow x = \sqrt{n \times m}$$

## 5.2 Quadratura do Retângulo usando a média geométrica

2. Construa um quadrado de lado  $l$  equivalente ao retângulo  $ABCD$ , sendo  $b$  sua base e  $h$  a altura, utilizando a média geométrica. Em seguida, mostre que a área desse quadrado pode ser calculada pelo produto da base pela altura do retângulo.

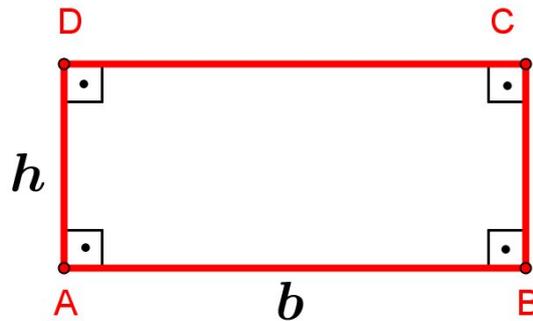


Figura 5.4: Retângulo  $ABCD$

**Objetivo da atividade 2.** *Nesta atividade, mostraremos como obter a quadratura do retângulo, utilizando a média geométrica.*

**Solução da atividade 2.** *Primeiramente, prolongamos a base  $\overline{AB}$  até o ponto  $E$ , tal que  $\overline{BE} \equiv \overline{BC} = h$ . Em seguida, marcamos o ponto médio  $O$  de  $\overline{AE}$  e descrevemos a semicircunferência de centro em  $O$ ;*

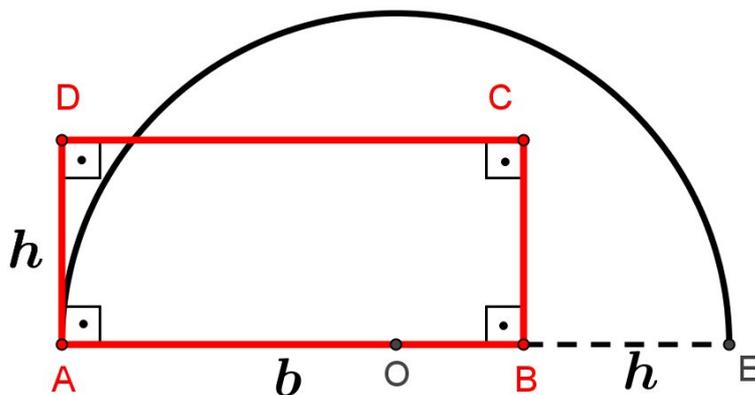


Figura 5.5: Quadratura do retângulo

*Prologamos  $\overline{BC}$  até a interseção com a semicircunferência, determinando assim o ponto  $F$ . Em seguida, descrevemos o triângulo  $AEF$  retângulo em  $F$  e o quadrado  $BJKF$  de lado  $\overline{BF}$ , conforme a Figura 5.5.*

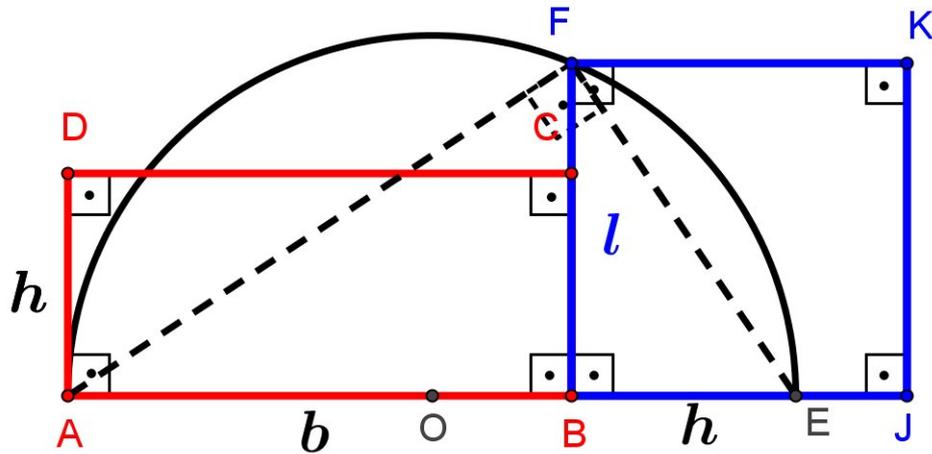


Figura 5.6: Retângulo Equivalente ao Quadrado

Da Figura acima, temos por construção: as projeções  $b$  e  $h$  dos catetos do  $\triangle AEF$  sobre a hipotenusa e a altura  $\overline{BF}$  relativa à hipotenusa, que denominaremos de  $l$ .

Pela atividade anterior, temos que  $l$  é a média geométrica das projeções  $b$  e  $h$ , então:

$$l^2 = b \times h \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{b \times h}$$

Como  $S_R = b \times h$  é a área do retângulo  $ABCD$  e  $S_Q = l^2$  a de um quadrado de lado  $l$ , comparando as áreas, teremos:

$$S_Q = S_R \quad \Rightarrow \quad l^2 = b \times h \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{b \times h} \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{b \times h}$$

Do exposto acima, descrevemos o quadrado de lado  $\overline{BF} = l$ , cuja área é dada por  $l^2$  sendo  $l$  a média geométrica entre  $b$  e  $h$  e assim concluímos que  $l^2 = b \times h$ , ou seja, a área do quadrado de lado  $l$  é congruente à do retângulo  $ABCD$ .

Portanto, para obtermos a quadratura do retângulo, devemos construir um quadrado de lado igual à média geométrica entre a base e a altura do retângulo:  $l = \sqrt{b \times h}$ .

### 5.3 Quadratura do Triângulo usando a média geométrica

3. Como mostra a Figura 5.7 temos o triângulo  $ABC$  de base  $b$  e altura  $h$ . Utilizando a média geométrica, construa um quadrado de lado  $l$  equivalente ao triângulo e mostre que  $l = \sqrt{b \times \frac{h}{2}}$ .

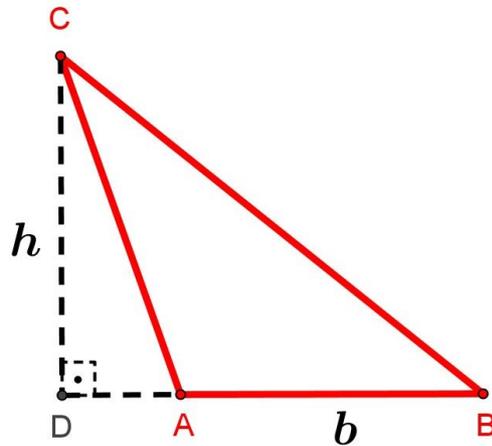


Figura 5.7: Triângulo  $ABC$

**Objetivo da atividade 3.** *Obter a quadratura do triângulo utilizando a média geométrica sem a necessidade de retangularizá-lo.*

**Solução da atividade 3.** *Inicialmente prolongamos a base  $\overline{AB}$  até o ponto  $E$ , de modo que  $\overline{BE} \equiv \frac{\overline{CD}}{2} = \frac{h}{2}$ . Em seguida, marcamos o ponto médio  $O$  de  $\overline{AE}$  e descrevemos a semicircunferência de centro em  $O$ .*

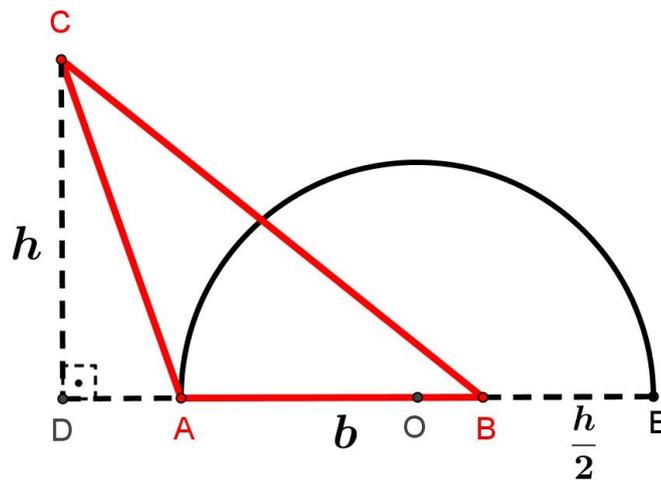


Figura 5.8: Quadratura do triângulo

**Observação 5.1.** *Poderíamos ter prolongado  $\overline{AB}$ , de modo que  $\overline{BE} \equiv \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{b}{2}$*

Partindo de  $B$  e perpendicular a  $\overline{AE}$ , traçamos o segmento  $\overline{BF}$  até a interseção com a semicircunferência onde marcamos o ponto  $F$ . Em seguida, descrevemos o  $\triangle AEF$  retângulo em  $F$  e o quadrado  $BGHF$  de lado  $\overline{BF}$ , como mostra a Figura 5.8.

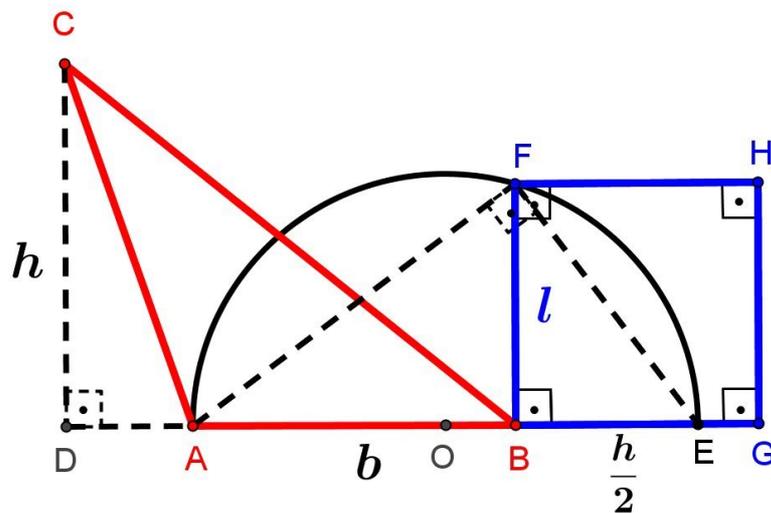


Figura 5.9: Triângulo equivalente ao quadrado

Da figura acima, temos por construção: as projeções  $b$  e  $\frac{h}{2}$  dos catetos do  $\triangle AEF$  sobre a hipotenusa e a altura  $\overline{BF}$  relativa à hipotenusa, a qual denominaremos de  $l$ .

Pela atividade 1, temos que  $l$  é a média geométrica das projeções  $b$  e  $\frac{h}{2}$ , então:

$$l^2 = b \times \frac{h}{2} \Rightarrow l = \sqrt{b \times \frac{h}{2}}$$

Como  $S_T = \frac{b \times h}{2}$  é a área do  $\triangle ABC$  e  $S_Q = l^2$  a de um quadrado de lado  $l$ , comparando as áreas, teremos:

$$S_Q = S_T \Rightarrow l^2 = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{bh}{2}} \Rightarrow l = \sqrt{b \times \frac{h}{2}}$$

Do exposto acima, descrevemos o quadrado de lado  $\overline{BF} = l$ , cuja área é dada por  $l^2$  sendo  $l$  a média geométrica entre  $b$  e  $\frac{h}{2}$ , concluímos que  $l^2 = \frac{b \times h}{2}$ , ou seja, a área do quadrado de lado  $l$  é congruente à do triângulo  $ABC$ .

Portanto, para obtermos a quadratura do triângulo, devemos construir um quadrado de lado igual à média geométrica entre a base e a metade da altura (ou entre a altura e a metade da base do triângulo):  $l = \sqrt{b \times \frac{h}{2}}$  ou  $l = \sqrt{h \times \frac{b}{2}}$ .

## 5.4 Quadratura do Trapézio usando a média geométrica

4. Dado o trapézio  $ABCD$  de base menor  $b$ , base maior  $B$  e altura  $h$  (como mostra a Figura 5.10). Construa um quadrado de lado  $l$  equivalente ao trapézio utilizando a média geométrica e mostre que  $l = \sqrt{\frac{(B+b)}{2} \times h}$ . Sugestão: construa o quadrado com um dos vértices comum ao da base média do trapézio.

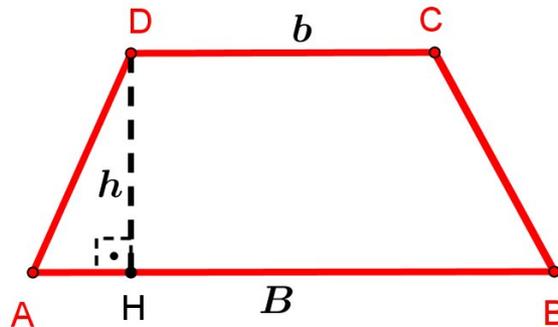


Figura 5.10: Trapézio  $ABCD$

**Objetivo da atividade 4.** *Mostrar como obter a quadratura do quadrilátero (trapézio) utilizando a média geométrica e o teorema da base média do trapézio.*

**Solução da atividade 4.** *Primeiramente, traçamos a base média  $\overline{EF}$  do trapézio, sendo  $E$  e  $F$  os pontos médios dos respectivos lados  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$  como mostra a Figura 5.11 e pelo teorema da base média do trapézio, temos que:  $\overline{EF} = \frac{b+B}{2}$*

*Em seguida, prolongamos a base média  $\overline{EF}$  até o ponto  $G$ , tal que  $\overline{EG} \equiv \overline{DH} = h$ , marcando o ponto médio  $O$  de  $\overline{FG}$  e descrevemos a semicircunferência de centro em  $O$ .*

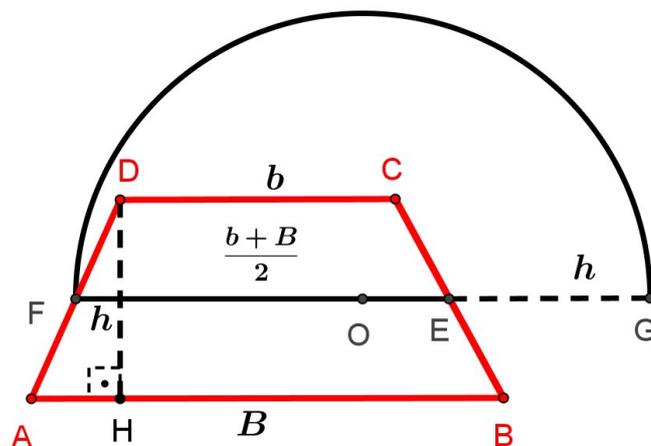


Figura 5.11: Quadratura do trapézio

Partindo de  $E$  e perpendicular à  $\overline{FG}$ , traçamos o segmento  $\overline{EI}$  até a interseção com a semicircunferência, determinando assim o ponto  $I$ . Em seguida, descrevemos o  $\triangle FGI$  retângulo em  $I$ .

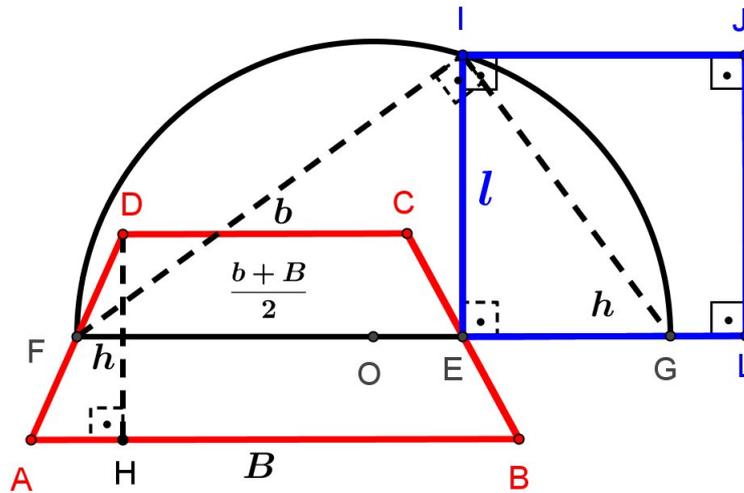


Figura 5.12: Trapézio equivalente ao quadrado

Da Figura acima, temos por construção: as projeções  $\frac{b+B}{2}$  e  $h$  dos catetos do  $\triangle FGI$  sobre a hipotenusa e a altura  $\overline{EI}$  relativa a hipotenusa, a qual denominaremos de  $l$ .

Pela atividade 1, temos que  $l$  é a média geométrica das projeções  $\frac{b+B}{2}$  e  $h$ , então:

$$l^2 = \frac{(b+B)}{2} \times h \Rightarrow l = \sqrt{\frac{(b+B)}{2} \times h}$$

Como  $S_{T_z} = \frac{(b+B)}{2} \times h$  é a área do trapézio  $ABCD$  e  $S_Q = l^2$  a de um quadrado de lado  $l$ , comparando as áreas, teremos:

$$S_Q = S_{T_z} \Rightarrow l^2 = \frac{(b+B)}{2} \times h \Rightarrow l = \sqrt{\frac{(b+B)}{2} \times h}$$

Do exposto acima, descrevemos o quadrado de lado  $\overline{EI} = l$ , cuja área é dada por  $l^2$  sendo  $l$  a média geométrica entre  $h$  e  $\frac{b+B}{2}$ , concluímos que  $l^2 = \frac{b+B}{2} \times h$ , ou seja, a área do quadrado de lado  $l$  é equivalente à do trapézio  $ABCD$ .

Portanto, para obtermos a quadratura do trapézio, devemos construir um quadrado de lado igual à média geométrica entre a média aritmética das bases do trapézio e de sua altura:  $l = \sqrt{\frac{b+B}{2} \times h}$ .

## 5.5 Do triângulo ao quadrilátero equivalente

5. Dado o triângulo  $ABC$ , construa um quadrilátero equivalente.

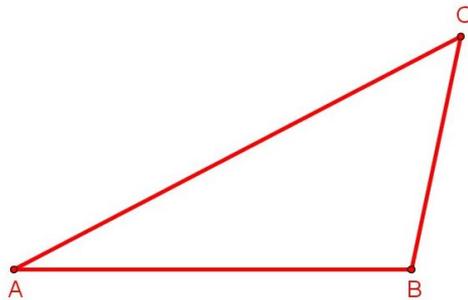


Figura 5.13: Triângulo  $ABC$

Vimos pelo teorema 2.3 que, dado um polígono de  $n$  lados, existe um polígono de  $n-1$  lados que lhe é equivalente, ou seja, podemos reduzir o número de lados do polígono e obter outro equivalente.

**Objetivo da atividade 5.** *Nesta atividade, mostraremos que podemos aumentar o número de lados de um polígono e obter outro equivalente, utilizando a semelhança de triângulos. Podemos descrever esse processo da seguinte maneira: dado um polígono de  $n$  lados, encontrar um polígono de  $n+1$  lados que lhe é equivalente com  $n > 3$ .*

**Solução da atividade 5.** *Primeiramente, marcamos o ponto  $D$  em qualquer posição em um dos lados do polígono (escolheremos o lado  $\overline{BC}$ ). Em seguida, traçamos o segmento  $\overline{AD}$ , passando por  $C$  uma reta  $r$  paralela à  $\overline{AD}$  como mostra a Figura 5.14(a).*

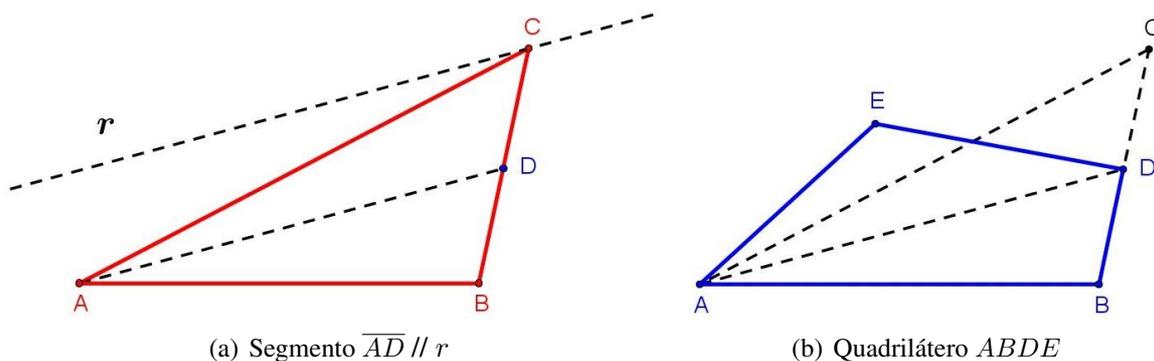


Figura 5.14: Triângulo equivalente ao quadrilátero

*Marcamos o ponto  $E$  em qualquer posição da reta  $r$  e descrevemos o  $\triangle ADE$  e, por construção, temos o  $\triangle ADC$  e o quadrilátero  $ABDE$  sendo que, pelo teorema 2.1, temos que os triângulos são equivalentes.*

*Portanto, descrevemos o quadrilátero  $ABDE$  equivalente ao triângulo  $ABC$ .*

# Considerações Finais

No decorrer deste trabalho do problema da quadratura do círculo, bem como um estudo das áreas de figuras poligonais por meio de reagrupamento de polígonos, percebemos que os estudos realizados juntamente com as implementações feitas com o GeoGebra podem contribuir de forma muito significativa para o ensino da geometria. Vimos que na antiguidade as civilizações resolviam os problemas geométricos com os mínimos recursos didáticos e sem a devida preocupação com a fundamentação teórica, ao contrário da praticidade que temos hoje à nossa disposição. A exemplo disso, podemos destacar o cálculo de áreas por meio de fórmulas, procedimento que imprimiu velocidade e dinamismo em detrimento dos antigos métodos históricos como a quadratura. Com a utilização de softwares matemáticos no processo de ensino da matemática, fica ainda mais perceptível a facilitação promovida pelo uso da tecnologia nos mecanismos didáticos e metodológicos da aprendizagem.

A Matemática vem em constante evolução aliada à informática e ao desenvolvimento tecnológico na área da educação com a utilização de novos recursos direcionados para o processo de ensino-aprendizagem, o qual vem sofrendo mudanças significativas e nos mostra que estamos diante de uma realidade criadora de melhores perspectivas para o ensino e entendimento da matemática.

Dentre esses recursos, damos o destaque ao software GeoGebra, programa que nos possibilitou mostrar a geometria de forma dinâmica e interativa, conforme é constatado em algumas construções geométricas disponibilizadas por meios de links ou download. Temos o intuito de incentivar a utilização desse software, pois o mesmo nos permite estudar e explorar a geometria tradicional com as suas definições, propriedades ou relações matemáticas, além de possibilitar interação e manipulação em um único ambiente visual de forma dinâmica. Em suma, podemos dizer que os novos recursos tecnológicos e a valorização da história da matemática caminham lado a lado para o progresso do conhecimento humano.

Em contra partida, há que se destacar também o viés do professor como detentor de um conhecimento transcendental e necessário à valorização da história da matemática. Para que o aluno possa conhecer o saber das gerações passadas, é imprescindível o resgate de todo o

procedimento histórico que acarretou na descoberta das fórmulas hoje utilizadas, desbravando assim os passos dados na direção deste desenvolvimento e exaltando a importância das raízes históricas para a maturação das ciências matemáticas como a conhecemos na atualidade. Em outras palavras, pode-se dizer que o melhor método para a continuidade da pesquisa e progresso do saber é justamente o ato de conduzir o aluno às relações existentes entre um problema histórico e o conhecimento atual, como também de que forma direta e/ou indireta isso contribuiu para o surgimento de novas teorias.

Como exemplo da aplicação dessas novas teorias, propomos algumas atividades que abordam as mesmas problemáticas apresentadas no decorrer do trabalho, mas que foram resolvidos com o auxílio de outras ferramentas em conjunto com aquelas anteriormente utilizadas durante o trabalho, no intuito de acrescentar novas estratégias aos professores e alunos do ensino médio, demonstrando novas maneiras possíveis para obter-se o mesmo resultado.

Em suma, esperamos que este trabalho (que está disponível para download, bem como suas implementações) tenha sua aplicabilidade em sala de aula para que possa enriquecer o conhecimento dos professores e alunos do ensino médio no estudo e entendimento da geometria de forma dinâmica e interativa, tecendo explicações e apontamentos acerca do processo de sua evolução, trazendo facilidades para o ensino da matemática, incentivando, também, o uso de práticas pedagógicas inovadoras capazes de contribuir e despertar o interesse pela aprendizagem da matemática.

Como planos de estudos futuros, tenho o intuito de fortalecer o ensino-aprendizagem da geometria do ensino médio e destacar, a informática como aliada indispensável. A proposta é incentivar e utilizar cada vez o ensino da geometria dinâmica, através do Geogebra na sala de aula. Além de promover o envolvimento e a compreensão do aluno proporcionando participação ativa na construção do conhecimento. Para isso, faremos um estudo mais detalhado das propriedades, teoremas, etc e a sua respectiva implementação. Desta forma, facilitaremos o estudo e entendimento da geometria.

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C.B. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide 2<sup>a</sup> ed. Editora Edgar Blücher, São Paulo, 1996.
- [2] COURANT, R. ; ROBBINS, H. *O que é Matemática?: Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*, Tradução: Adalberto da S. Brito Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.t
- [3] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar : Geometria plana*, v.9, 8.ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [4] FIGUEIREDO, D. de G. *Números Irracionais e Transcendentes* , Coleção de Iniciação Científica, SBM: Rio de Janeiro, 2002.
- [5] GARBI, G. G. *C.Q.D: Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria*, São Paulo: Editora Livraria da Física,2.ed. 2010.
- [6] GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*: São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- [7] GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- [8] GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.
- [9] LIMA, E.L. et al. *Temas e Problemas Elementares*. Coleção do Professor de Matemática. SBM: Rio de Janeiro, 2006.
- [10] LIMA, E.L. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1991.
- [11] LIMA, E. L. et al. *A matemática do Ensino Médio*, v.2, 6. ed. SBM: Rio de Janeiro, 2006.
- [12] MORGADO, A.C., WAGNER, E., JORGE, M. *Cintrações Geométricas*. Coleção do Professor de Matemática, SBM: Rio de Janeiro, 1993.

- [13] NETO, A. A. et al. *Geometria: noções de matemática v.5*, São Paulo: Editora Moderna, 1. ed 1982.
- [14] OLIVEIRA, M. R. de O. ; PINHEIRO, M. R. da R. *Coleção Elementos da matemática: geometria plana v.2*, São Paulo: Editora VestSeller, 3. ed 2010.
- [15] ROQUE, T. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2012.