FABRÍCIO ALMEIDA DE CASTRO

A RELAÇÃO DA PROPORCIONALIDADE COM OUTROS TEMAS MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015

FABRÍCIO ALMEIDA DE CASTRO

A RELAÇÃO DA PROPORCIONALIDADE COM OUTROS TEMAS MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 28 de janeiro de 2015.

Mário José de Souza

Alexandre Miranda Alves

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência.

Irene de Albuquerque

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, o autor da vida, que é quem me capacita para alcançar meus objetivos e me surpreende sempre com muito mais do que eu poderia esperar.

Agradeço aos meus pais amados, por estarem sempre muito presentes em minha vida, me incentivando no caminho que escolhi percorrer e me dando apoio e suporte em todas as coisas.

Agradeço a Naiara, pelo carinho, pela paciência e companheirismo de sempre.

Agradeço aos meus filhos Lucas e Mariana, sentido da minha vida.

Agradeço ao professor/orientador Mercio pelas orientações.

Agradeço a todos os professores do Profmat da UFV pelos ensinamentos.

Ao meu amigo Sandro Eugênio Pereira Gazinelli pelo apoio, ajuda e orientação nos momentos difíceis.

Aos amigos da turma do Profmat 2012 da UFV pelo companheirismo e convivência nos momentos bons e ruins durante esses três anos.

Muito obrigado a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para o desenvolvimento desta tese.

Conteúdo

Resumo

CASTRO, Fabrício Almeida de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, janeiro de 2015. **A Relação da Proporcionalidade com Outros Temas Matemáticos**. Orientador: Mercio Botelho Faria.

O objetivo desse trabalho foi propor uma sequência didática que aproximasse os conteúdos matemáticos dos conteúdos de outras disciplinas, mostrando para o aluno que o domínio de um conceito matemático é inter e intradisciplinar. Esta proposta desmistifica a impressão de muitos alunos de que a todo o momento se está aprendendo novos conteúdos, não correlacionáveis com os já ensinados. Além de apresentar sua aplicação no cotidiano, dando significância ao aprendizado. O conteúdo matemático escolhido foi a proporcionalidade e as disciplinas envolvidas foram a geografia, ciências, física, química, além da própria matemática. O trabalho foi distribuído da seguinte forma: primeiro foi feito um estudo do conceito de proporcionalidade e suas aplicações na matemática, depois, um estudo histórico do desenvolvimento desse conceito bem como a abordagem dada, por autores contemporâneos, ao tema. Em seguida, foi feita uma consulta aos documentos oficiais PCN's e Matriz de referência do Enem a respeito do que se preconiza sobre o ensino da proporcionalidade nas disciplinas citadas. Também foi feita uma revisão nos livros didáticos atuais para avaliar como o conteúdo é abordado. Finalizando com a apresentação da proposta multidisciplinar, através de uma cartilha de aplicação desta. Sendo assim, esta pesquisa pretende contribuir para o ensino da matemática e outras disciplinas a partir de uma visão transdisciplinar.

Abstract

CASTRO, Fabrício Almeida de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, january, 2015. **The relationship of proportionality with other mathematical topics**. Adiviser: Mercio Botelho Faria.

The main objective of this thesis is to propose a didactic sequence that approximate the mathematics contents to contents from another disciplines, showing to the student that the domination of a mathematical concept is interdisciplinary. This proposal demystifies the first impression of many students that all the time, they are learning new contents not correlated with contents already teached. In addition, presenting the application in daily life, giving it importance. The chosen mathematical content was the proportionality and the disciplines involved were geography, sciences, physics, chemistry, and mathematics. The job was distributed as the following: first a study about the concept of proportionality and its applications in mathematics was conducted, after, a historic study about de development of this concept as the given approach, by contemporary authors, to the theme. Then, a search was conducted to the officials documents PCN's and Enem's reference matrix about what is professed in proportionality in the listed disciplines above. Also, a review in the current textbooks has been made to evaluate how the content is addressed. Ending with the presentation of the multidisciplinary proposal, through an application of this booklet. Thus, this research aims to contribute to the teaching of mathematics and other disciplines from a transdisciplinary vision.

Introdução

A minha experiência destes vinte anos no exercício da docência trouxe a seguinte impressão, uma das causas do baixo rendimento dos alunos em matemática e, em outras disciplinas que necessitam de conhecimentos matemáticos, é a deficiência na aprendizagem de conceitos estudados em séries anteriores.

O conceito de Proporcionalidade é pré-requisito para o estudo de vários conteúdos. Este conceito é apresentado muitas vezes de forma mecânica, sem contextualização e sem sua referência em outros conteúdos matemáticos e em outras disciplinas. O aluno aprende o algoritmo, mas não compreende o conceito.

Observa-se com frequência que a maioria das escolas e professores seguem a sequência de conteúdos apresentada nos livros didáticos, sem se questionarem do porquê de assuntos que têm o mesmo conceito serem tratados de forma independente.

A proposta dessa dissertação é que a partir de um eixo temático – Proporcionalidade, mostrar-se-a que a interdisciplinaridade e a contextualização facilitam a assimilação dos conteúdos, uma vez que mostra suas correlações, dando significado aos conceitos. Ela propõe um trabalho conjunto dos professores de matemática e outras disciplinas, com o objetivo de facilitar o entendimento de conteúdos que dependam do conceito de proporcionalidade.

A dissertação foi elaborada em nove capítulos assim distribuídos:

No Capítulo 1 apresentamos o objetivo, a motivação e a justificativa para a escolha do tema.

No Capítulo 2 é feito um estudo da Proporcionalidade e dos conceitos e conteúdos matemáticos que dela decorrem.

No Capítulo 3 é apresentado um histórico do conceito de Proporcionalidade, apresentando os principais matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento.

No Capítulo 4 analisamos as publicações de ilustres matemáticos contemporâneos e trabalhos acadêmicos que tratam do estudo e ensino da Proporcionalidade.

No Capítulo 5 destacamos o que os documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e, a matriz de referência de habilidades e competências do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, preconizam acerca do ensino da Proporcionalidade.

No Capítulo 6 são feitas justificativas para o uso da interdisciplinaridade e contextualização na sequência didática proposta.

No Capítulo 7 é feita uma análise de como os livros didáticos abordam o conceito de proporcionalidade e sua relação com outros conteúdos nas disciplinas de matemática, geografia, ciências, física e química.

No Capítulo 8 é apresentada uma sequência didática em forma de cartilha, que propõe a interligação dos conteúdos que derivam do conceito de Proporcionalidade nas disciplinas de matemática, geografia, ciências, física e química. Essa cartilha pode ser usada na sua totalidade ou fazendo adaptações, de acordo com o ano e segmento onde vai ser aplicada.

No Capítulo 9 é apresentada a conclusão do trabalho.

Capítulo 1

Objetivos, motivação e justificativa do trabalho

O objetivo deste trabalho é propor uma sequência didática que possibilite, a partir de um eixo central - o conceito de proporcionalidade, desenvolver os conteúdos relacionados ao tema, não priorizando a memorização de regras matemáticas. Apesar de simples, o conceito de proporcionalidade é abrangente e útil na compreensão de vários temas matemáticos e de outras disciplinas.

O uso de uma sequência didática que privilegia os conceitos matemáticos, buscando suas aplicações nas situações do dia a dia e sua relação com outros conteúdos, pode beneficiar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e de outras disciplinas.

Um dos motivos pelos quais os alunos do ensino fundamental e médio apresentam dificuldades em matemática e em outras disciplinas vem do fato que nos livros didáticos, muitas vezes, os assuntos são apresentados como se fossem sempre novidade, sem correlação com os conteúdos já ensinados. Se os conteúdos fossem apresentados dentro de um eixo temático onde, a partir de um conceito, conseguissem aplicá-lo em várias áreas do conhecimento, o aluno provavelmente sentir-se-ia mais seguro no estudo, não pensando que a cada capítulo teria que aprender um conteúdo novo.

O conteúdo proporcionalidade é apresentado nos livros didáticos de forma mecânica, abusando-se do uso da regra de três, e muitas vezes sem o entendimento do conceito e a sua relação com situações do cotidiano. O grande problema desta abordagem é que, em muitos casos, os alunos memorizam a regra sem entender o porquê da mesma. O que leva a dificuldade de compreensão ao trabalhar com a regra de três composta e, mesmo com a regra de três simples, quando essa envolve grandezas inversamente proporcionais. Quando o aluno compreende o conceito de proporcionalidade ele consegue identificar entre duas grandezas a existência da proporcionalidade, se ela é direta ou inversamente proporcional e, aplicar esse conceito na resolução de problemas matemáticos e de outras disciplinas.

Ávila [3, RPM nº 9 p.1] diz que

> "os problemas de proporcionalidade podem ser resolvidos no contexto algébrico, sem o uso de regra de três, de forma a simplificar e unificar o ensino de matemática na educação básica."

A proposta é que a sequência didática se inicie no ensino fundamental e vá até o ensino médio, aproximando e/ou retomando o conceito de proporcionalidade aprendido nas séries anteriores, de forma a facilitar o aprendizado do conteúdo ensinado na disciplina matemática, e sempre que possível, usar a interdisciplinaridade para dialogar com as disciplinas de geografia, ciências, física e química com o objetivo de melhorar o entendimento do conteúdo ensinado e, assim, o desempenho acadêmico dos alunos.

É comum professores de outras disciplinas relatar que o motivo do fracasso dos alunos em suas disciplinas vem do fato desses terem uma defasagem de conteúdos matemáticos. Sendo assim, a intenção é aproximar essas disciplinas ao trabalhar os conceitos matemáticos que serão usados nas disciplinas não matemáticas, previamente ou concomitantemente.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN [10] tem como um dos princípios norteadores

> "A atividade matemática escolar não é olhar para as coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significado; aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais áreas, entre ela e os Temas Transversais, entre ela e o cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos."

Durante 20 anos de docência nos ensinos fundamental e médio, observei que conteúdos correlacionáveis foram trabalhados na mesma serie, mas em disciplinas diferentes, sem ser citada sua interdisciplinaridade. Como exemplo, temos: o conteúdo de escala (geografia) x o conceito de razão e proporcionalidade (matemática), o conteúdo de cinemática (ciências/física) x o conteúdo de função (matemática) e o conteúdo de cálculo estequiométrico (química) x o conteúdo de proporção (matemática). Muitas vezes, o programa das instituições trazem os conteúdos correlacionáveis na mesma série, e os professores não conseguem apresentar uma sequência que facilite a interação das disciplinas, com o objetivo de melhorar o trabalho desenvolvido. Na instituição que trabalhei, até julho de 2014, o colégio São Francisco Xavier, localizado na cidade de Ipatinga, ocorreu uma reunião ao final de 2013 que teve como objetivo propor que houvesse maior interdisciplinaridade entre a física no 9ª ano e o conteúdo matemático função. Nessa instituição a disciplina ciências é subdividida em química, física e biologia, sendo lecionadas por professores especialistas em cada área. Observou-se que isso era possível apenas com a inversão na ordem dos conteúdos, e uma maior aproximação dos professores responsáveis pela disciplina/série.

Pelo fato do conceito de proporcionalidade aparecer em vários conteúdos matemáticos e de outras áreas do conhecimento, resolveu-se escolher o ensino fundamental 2 (6º ao 9º ano) e o ensino médio, e os conteúdos das disciplinas geografia, ciências, química e física que utilizam o conceito de proporcionalidade nessas mesmas séries, como o universo de trabalho deste estudo. Conteúdos que serão abordados:

1. Matemática: Razão, Proporção, Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais, Regra de Três Simples e Composta, Porcentagem e Juros, Função Afim e Função Linear, Semelhança de Triângulos e Suas Aplicações e Sólidos Semelhantes.

2. Geografia: Cartografia (Escala) e Densidade Demográfica.

3. Física: Cinemática, Leis de Newton, Princípio da Conservação da Energia, Gravitação Universal, Hidrostática, Máquinas Simples, Lei Geral dos Gases e Termodinâmica.

4. Química: Lei das Proporções Constantes (Lei de Proust), Lei Geral dos Gases e Cálculo Estequiométrico.

Capítulo 2

Histórico

O conceito de proporcionalidade acompanha o desenvolvimento das civilizações desde sempre. Existem relatos de vestígios de aplicações da proporcionalidade desde a antiguidade. Devido ao conceito simples e a facilidade da sua aplicação nas várias situações cotidianas, a proporcionalidade se desenvolveu. O conceito de proporcionalidade tem aplicações em várias áreas do conhecimento como na Física, Geografia, Química, entre outros.

Tales de Mileto[1]

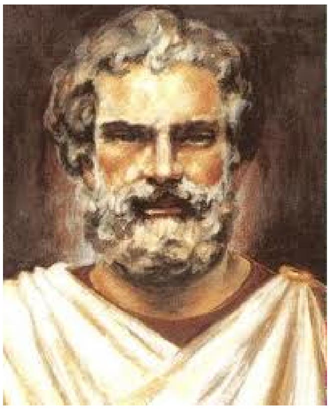


Figura 2.1: Tales de Mileto

Acredita-se que o estudo da proporcionalidade tenha se iniciado na Grécia antiga com Tales de Mileto (c. 625 a.C – c. 558 a.C.). Tales nasceu em Mileto, antiga colônia grega, atual Turquia, e é considerado o primeiro filósofo e o primeiro dos sete sábios. Fundou a mais antiga escola filosófica que se conhece - a Escola Jônica. Pode-se dizer que Tales deu a matemática uma característica que se conserva até hoje, o conceito de "demonstração ou prova". Ele enunciou: "Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas transversais, segmentos proporcionais". Hoje, esta definição se expressa por uma

[1] http://www.estudopratico.com.br/biografia-do-filosofo-tales-de-mileto/

função linear. Caso particular de função afim, a proporcionalidade associa duas variáveis, direta ou inversamente.

Pitágoras de Samos[2]

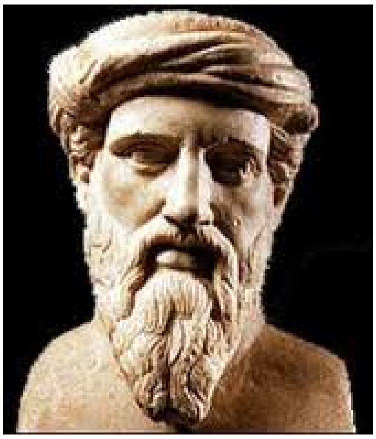


Figura 2.2: Pitágoras de Samos

Pitágoras é envolto em misticismo por seus seguidores, que pouco se sabe sobre ele com algum grau de certeza. Ao que parece Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha Egéia de Samos. É possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era cinquenta anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Depois parece que residiu por algum tempo no Egito, onde frequentou os templos (escolas da época) e ouviu os sacerdotes de Mênfis, com quem Pitágoras aprendeu as regras de cálculo. Ao retornar a Samos encontrou o poder nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob o domínio persa; decidiu então emigrar para o ponto marítimo de Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália. Lá ele fundou a famosa escola Pitagórica que, além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias. Os Pitagóricos eram uma ordem religiosa e uma escola filosófica. Eles acreditavam que o universo era governado pelos números inteiros. Tudo podia ser expresso por uma medida inteira ou por uma razão entre dois números inteiros. Com a descoberta dos incomensuráveis, medidas que não podem ser expressas por números inteiros ou razões entre dois números inteiros, a escola Pitagórica entrou em crise. Com isso, todas as demonstrações que se baseavam na teoria Pitagórica, como as comparações de grandezas geométricas, tornaram-se sem efeito.

Na época dos Pitagóricos, a geometria era baseada na teoria das proporções, uma teoria numérica aplicada apenas aos comensuráveis, isto é, aos racionais. A ideia de que existem quantidades que não se podem exprimir por número surge na matemática grega no contexto de alguns problemas geométricos que podem parecer elementares, como é o caso da diagonal de um quadrado ou do perímetro de uma circunferência. Aliás, os Gregos não usavam a palavra número para designar essas quantidades. “Número” na Grécia era

[2] https://elespiritudelchemin.wordpress.com/2010/12/01/pitagoras-de-samos-582-507-a-c-prefiero-el-baston-de-la-experiencia-que-el-carro-rapido-de-la-fortuna-el-filosofo-viaja-a-pie/

inteiro ou racional. Os números irracionais, ou incomensuráveis eram grandezas e não números. Alguns diálogos de Platão revelam a perturbação gerada com a descoberta da existência de comprimentos (ou áreas e volumes), chamados incomensuráveis, que não se podiam exprimir através de números inteiros ou racionais. Souza [57]

Eudoxo de Cnido[3]

Figura 2.3: Eudoxo de Cnido

Eudoxo (408−355 a.C.), discípulo de Platão, filósofo grego nascido em Cnido, península de Resadiye, na Jônia, o mais célebre matemático, astrônomo e importante autor grego da Academia de Platão, citado enfaticamente nas obras de Euclides, Arquimedes e Aristóteles. Eudoxo foi o descobridor da brilhante Teoria das Proporções (360 a.C.) entre grandezas de mesma espécie, descrita no Livro V de Os Elementos de Euclides (325 a.C. - 265 a.C.), resolvendo a questão das proporções envolvendo incomensuráveis, em um raciocínio tão brilhante que, em essência, foi o mesmo utilizado dois milênios mais tarde por Dedekind e Weiertrass na elaboração da teoria dos números reais.

Durante mais de dois mil anos, a definição de Eudoxo foi à única base para lidar com os números irracionais, até Dedekind se debruçar sobre o assunto, no séc. XIX. Souza [57]

Segundo Bongiovanni [9]

> "Com esta definição, Dedekind criou os números reais, eliminou os 'buracos' de $\mathbb{Q}$ e estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais".

Definição 2.1. *(Eudoxo) Sejam a e b grandezas geométricas do mesmo tipo (ambos comprimentos ou áreas ou volumes). Sejam c e d um segundo par de grandezas geométricas, ambas do mesmo tipo (mas não necessariamente do mesmo tipo que o par anterior). Eudoxo diz que as razões $a : b$ e $c : d$ são proporcionais, ou seja $a : b = c : d$, se, dados dois inteiros positivos m e n segue-se que:*

[3]http://timerime.com/es/evento/910766/EUDOXO+DE20+CNIDOS

1. $na > mb$ e $nc > md$.

2. $na = mb$ e $nc = md$.

3. $na < mb$ e $nc < md$.

Devemos notar que a definição de Eudoxo separa o conjunto dos números racionais em dois conjuntos disjuntos: o conjunto M onde (1) e (2) são verdades e o conjunto N onde (3) é verdade. Essa separação dos números racionais, onde qualquer elemento do conjunto M é menor que qualquer elemento do conjunto N, nos garante a existência de um ponto P onde a cisão foi feita, este ponto é chamado "corte de Dedekind". Edwards [22]

Richard Dedekind[4]

Figura 2.4: Richard Dedekind

Dedekind nasceu em Brunsvique ($1831-1916$), fez os estudos até à universidade, onde, passados dois anos, se transferiu para a Universidade de Gottingen, na qual concluiu os estudos. Foi aluno de Carl Gauss ($1777 - 1855$), e o último doutorando deste grande matemático. Em 1858 mudou-se para o Instituto Politécnico em Zurique, para assumir o cargo de professor de cálculo, e aí começou a redigir Continuidade e Números Irracionais, um dos trabalhos mais importantes sobre os fundamentos de análise.

Inspirado na teoria das Proporções de Eudoxo, R. Dedekind concebeu a noção de corte como uma maneira de identificar cada elemento de $\mathbb{Q}$ e também cada "furo" de $\mathbb{Q}$ com um elemento bem determinado de um novo conjunto, que então é $\mathbb{R}$.

Dedekind, no século XIX, baseando-se no princípio da completude ou da continuidade define um número real como um "corte" dos números racionais.

[4]http://ecalculo.if.usp.br/historia/dedekind.htm

Capítulo 3

Autores contemporâneos que escreveram sobre proporcionalidade

Vários autores contemporâneos pesquisaram, estudaram e emitiram sua opinião a respeito do ensino do conteúdo proporcionalidade na escola básica.

Geraldo Ávila[1]

Figura 3.1: Geraldo Ávila

Segundo Ávila [2] proporcionalidade pode ser definida considerando os seguintes aspectos:

Definição 3.1.

1. *Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais – mais especificamente, diretamente proporcionais – se estiverem relacionadas: $y = k \cdot x$ ou $\frac{y}{x} = k$, onde k é uma constante positiva chamada constante de proporcionalidade.*

[1] http://www.acadciencias.org.br/

2. *Diz-se que as variáveis x e y são inversamente proporcionais se $y = \frac{k}{x}$ ou $x \cdot y = k$, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade). Destaca a aplicação do conceito de proporcionalidade direta e inversa a lei de Boyle e Mariotte (química)$P \cdot V = k \cdot T$,*
   onde:
   $P \rightarrow$ *pressão;*
   $V \rightarrow$ *volume;*
   $T \rightarrow$ *temperatura e*
   $k \rightarrow$ *a constante de proporcionalidade.*

3. *Se várias variáveis, digamos, x, y, z, w, r e s estão relacionadas por uma equação do tipo $z = k \cdot \frac{(x \cdot y \cdot z)}{r \cdot s}$, onde k é uma constante, então dizemos que z é diretamente proporcional a x, a y e a w; e inversamente proporcional a r e a s.*

Utilizando estes conceitos pode-se exemplificar a definição proposta por Ávila [2] considerando o seguinte problema matemático: Uma pessoa datilografando 60 toques por minuto e trabalhando 6 horas por dia, realiza certo trabalho em 10 dias. Quantos dias levará outra pessoa para fazer o mesmo trabalho se ela datilografa 50 toques por minuto e trabalha 4 horas por dia?

Seja k o número de toques necessários para realizar o trabalho. Uma pessoa que faz T toques por minuto fará $60 \cdot T$ toques por hora e, trabalhando H horas por dia, durante D dias, fará $60 \cdot T \cdot H \cdot D$ toques ao todo. Portanto, $60 \cdot T \cdot H \cdot D = k$. De acordo com a definição 3, esta equação informa que qualquer uma das grandezas H, T e D é inversamente proporcional às outras duas. Substituindo as duas sequências de valores dados no problema, obtemos:

$60 \cdot 60 \cdot 6 \cdot 10 = k$ e $60 \cdot 50 \cdot 4 \cdot x = k$
Daí, segue que:
$60 \cdot 60 \cdot 6 \cdot 10 = 60 \cdot 50 \cdot 4 \cdot x$,
$x = 18$ dias

Ávila [3] afirma que a regra de três não possui justificativa lógica e apresenta casos onde a regra de três se mostra inadequada. Critica a mecanização do uso da regra de três, dizendo que em livros americanos modernos a regra de três não é mais utilizada. Ávila [3] propõe que o nome regra de três deveria ser abolido. Ele também critica professores e livros didáticos que tratam a propriedade fundamental das proporções como exclusiva de razões e proporções, quando ela deveria ser propriedade das igualdades, podendo ser aplicadas nas frações e em equações.

Elon Lages Lima[2]

Figura 3.2: Elon Lages Lima

Lima [32] produziu as seguintes considerações sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais:

Grandezas diretamente proporcionais

As seguintes afirmações a respeito de $y = f(x)$ são equivalentes:

1. y é diretamente proporcional a x;
2. para todo número real $c > 0$, tem-se $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$;
3. existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que $f(x) = k \cdot x$ para todo x.

Sejam $x', x'', x''', ...$, valores assumidos por x e $y', y'', y''', ...$, os valores correspondentes de y. Então, a fim de que y seja diretamente proporcional a x é necessário e suficiente que

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = ...,$$

sendo o valor comum desses quociente igual à constante de proporcionalidade k. Com efeito, afirmar que

$$y' = k \cdot x'; y'' = k \cdot x''; y''' = k \cdot x'''; ...$$

equivale a dizer

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = k.$$

[2]http://colgiodoburaconegro.blogspot.com.br/2011/01/o-matematico-didatico-elon-lages-lima.html

Grandezas inversamente proporcionais

As seguintes afirmações a respeito de $y = f(x)$ são equivalentes:

1. y é inversamente proporcional a x;
2. para todo número real c, tem-se $f(c \cdot x) = \dfrac{x}{c}$;
3. existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que $f(x) = \dfrac{k}{x}$ para todo x.

Sejam $x\text{'}, x\text{''}, x\text{'''}, ...$, valores assumidos por x e $y\text{'}, y\text{''}, y\text{'''}, ...$, os valores correspondentes de y. Então, a fim de que y seja inversamente proporcional a x é necessário e suficiente que

$$x\text{'} \cdot y\text{'} = x\text{''} \cdot y\text{''} = x\text{'''} \cdot y\text{'''} = ...,$$

sendo o valor comum desses produtos igual à constante de proporcionalidade k. Com efeito, afirmar que

$$y\text{'} = \frac{k}{x\text{'}}; y\text{''} = \frac{k}{x\text{''}}; y\text{'''} = \frac{k}{x\text{'''}}; ...$$

equivale a dizer

$$x\text{'} \cdot y\text{'} = x\text{''} \cdot y\text{''} = x\text{'''} \cdot y\text{'''} = k.$$

Outros autores e seus estudos sobre proporcionalidade

Ruiz [48] e Perotti [43] propõem sequências didáticas para o ensino de proporcionalidade. Ruiz [48] em sua pesquisa propõe, com êxito, uma metodologia de ensino do conceito de proporcionalidade a partir de situações problemas, onde os alunos construiriam algoritmos e leis gerais para as proporções. Perotti [43] apresenta em seu trabalho uma sequência didática para o estudo da reta, a partir do conceito de proporcionalidade, utilizando situações problemas e o conceito de coeficiente angular, calculado como taxa de variação. Ele relata que os alunos tiveram alto índice de participação e entusiasmo durante a aplicação da sequência. Perotti [43] conclui que houve uma predileção dos alunos pelo método apresentado em relação ao método tradicional de aulas expositivas.

Pontes [45] compara o raciocínio utilizado por um trabalhador de diversas áreas com o raciocínio matemático trabalhado em sala de aula a respeito de Medidas e Proporcionalidade, e conclui que o raciocínio utilizado no mundo do trabalho quase sempre é diferente daquele utilizado em sala de aula. Dessa forma, ela propõe um trabalho baseado em resolução de problemas onde o aluno é um sujeito ativo que desenvolve o seu próprio conhecimento.

Spinillo [54] define que

> "o pensamento proporcional refere-se basicamente à habilidade de estabelecer relações".

Nunes [38] destaca a origem simples do conceito de proporcionalidade como a relação entre duas variáveis.

Costa [18] analisou como é apresentado e desenvolvido o conteúdo proporcionalidade nos livros didáticos. Ele analisou três livros didáticos de décadas diferentes e, os comparou com o que preconizava os documentos governamentais de sua época. Observou que os livros, referência no ensino do 7º ano do ensino fundamental de sua época, não estavam totalmente de acordo com os documentos oficiais. Assim era então necessário que o professor fizesse as adequações, sendo ele um dos responsáveis pelo sucesso acadêmico.

Martins [37] realizou estudos com alunos de duas turmas no 7º ano do ensino fundamental, Floriani [24] e Gonçalves [27] em pesquisa com um grupo de alunos do ensino fundamental e médio, respectivamente, concluíram que os alunos da educação básica muitas vezes apresentam dificuldades na resolução de problemas que envolvam proporcionalidade, por não compreenderem o conceito, que é trabalhado muitas vezes de forma repetitiva, com exercícios que usam a mesma lógica de resolução, abusando-se do uso da regra de três.

Silva [52] constata o abandono da regra de três nos livros didáticos recomendados pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático.

Capítulo 4

Proporcionalidade

Neste capítulo faremos um estudo da proporcionalidade apresentando as suas definições e fazendo as respectivas demonstrações.

As definições e demonstrações apresentadas neste capítulo são encontradas no livro Fundamentos de Matemática Elementar Volumes 9 [20], 10 [21] e 11 [30]

4.1 Razão

Definição 4.1. *Dados dois números a e b, com $b \neq 0$, chamamos de razão de a para b o quociente $\frac{a}{b}$ ou $a : b$.*

O número a é chamado de antecedente e b chamado consequente. Quando a e b representarem medidas, elas devem ser representadas na mesma unidade.

4.1.1 Aplicações do conceito de razão

Escala

Ao compararmos mapas com os lugares a serem representados por eles, representamos as distâncias em escala menor que a real. O conceito é dado pela seguinte razão:

$$Escala = \frac{d}{D}$$

onde:
d = medida no mapa
D = medida real
(ambos na mesma unidade de medida).

Velocidade Média
É a razão entre a distância percorrida e o tempo total de percurso. A velocidade média será sempre acompanhada de uma unidade, que depende das unidades escolhidas para calcular distância e tempo.

$$Velocidade = \frac{d}{t}$$

onde:
$d =$ distância percorrida
$t =$ tempo total de percurso

Densidade
É a razão entre a sua massa e o seu volume. A densidade também será sempre acompanhada de uma unidade, que depende das unidades escolhidas para medir a massa e o volume.

$$Densidade = \frac{m}{v}$$

onde:
$m =$ massa
$v =$ volume

Densidade Demográfica
É a razão entre a quantidade de habitantes e a área de uma região. A densidade demográfica também será sempre acompanhada de uma unidade, que depende das unidades escolhidas para medir a área.

$$Densidade\ Demografica = \frac{Hab}{A}$$

onde:
$Hab =$ número de habitantes
$A =$ área da região

Porcentagem
É a razão onde o consequente (denominador) é igual a 100. A porcentagem é acompanhada do símbolo (%).

$$x\% = \frac{x}{100}$$

4.2 Proporção

Definição 4.2. *Proporção é uma igualdade entre duas razões* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *ou* $a : b :: c : d$, *com* a, b, c, *e* d *números reais,* $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$.

Os números b e c são chamados meios e a e d extremos.

4.2.1 Propriedade das Proporções

Propriedade Fundamental das Proporções
Em uma proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ e } b \neq 0 \text{ e } d \neq 0, \text{ então } a \cdot d = b \cdot c$$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(multiplicando ambos os lados da igualdade por $b \cdot d$)

$$\frac{a \cdot b \cdot d}{b} = \frac{c \cdot b \cdot d}{d}.$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Outras Propriedades das Proporções

P1

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Demonstração:

$$a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow a \cdot d + b \cdot d = b \cdot c + b \cdot d \Rightarrow d \cdot (a+b) = b \cdot (c+d) \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

P2

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$$

Demonstração:

$\frac{a}{b} = k \Rightarrow a = k \cdot b$ e $\frac{c}{d} = k \Rightarrow c = k \cdot d$. Vamos substituir na expressão $\frac{a+c}{b+d}$, assim:
$$\frac{k \cdot b + k \cdot d}{b+d} = \frac{k \cdot (b+d)}{b+d} = k, \text{ ou seja, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

P3

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ e } \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = k \cdot k = k^2 \text{ e } \frac{a^2}{b^2} = (\frac{a}{b})^2 = k^2 \text{ e } \frac{c^2}{d^2} = (\frac{c}{d})^2 = k^2.$$

4.2.2 Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais ou simplesmente proporcionais quando a cada valor da grandeza x associamos de forma unívoca um valor para a grandeza y.

$$y \sim x \text{ (} y \text{ é proporcional a } x\text{)}$$
$$\Rightarrow y = a \cdot x$$

Se duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, então satisfazem as seguintes condições:

1) Se o valor da grandeza x aumenta o valor da grandeza y também aumenta;

Se $x_1 < x_2$ então $y_1 < y_2$, com x_1, x_2 valores associados a grandeza x e y_1, y_2 os respectivos valores associados a grandeza y.

2) Se x duplica, triplica, quadriplica, ... então y duplica, triplica, quadriplica, ..., respectivamente.

Se um certo valor de x corresponde a um y, então $n \cdot x$ corresponde a $n \cdot y$, com $n \in \mathbb{N}$.

Uma proporcionalidade numérica é uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:

i) f é uma função crescente, isto é, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$, para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^+$;

ii) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(nx) = n \cdot f(x)$.

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- *(1) $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.*
- *(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = a \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*
- *(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$.*

Essa demonstração é encontrada no livro A Matemática do Ensino Médio - volume 1 [34].

Demonstração: Provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1). A fim demonstrar (1) $\Rightarrow$ (2), provemos inicialmente que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, a hipótese (1) acarreta que $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, como $n \cdot r = m$, tem-se:

$$n \cdot f(r \cdot x) = f(n \cdot r \cdot x) = f(m \cdot x) = m \cdot f(x),$$

logo

$$f(r \cdot x) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x).$$

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = a \cdot r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostremos agora que se tem $f(x) = a \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Suponha, por absurdo, que exista algum número real x (necessariamente irracional) tal que $f(x) \neq a \cdot x$. Para fixar ideias, admitamos $f(x) < a \cdot x$. (O caso $f(x) > a \cdot x$ seria tratado de modo análogo.) Temos

$$\frac{f(x)}{a} < x$$

Tomemos um número racional r tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x$$

Então $f(x) < a \cdot r < a \cdot x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a \cdot x$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo, como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Esta contradição completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2). As implicações (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1) são óbvias.

Em algumas situações, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade precisa ser aplicado a grandezas (como área ou massa, por exemplo) cujas medidas são expressas apenas por números positivos. Então temos uma função crescente $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, onde $\mathbb{R}^+ = x \in \mathbb{R};\ x > 0$ é o conjunto dos números positivos. Neste caso, as afirmações do Teorema leem-se assim:

- (1^+) $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.
- (2^+) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = a \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
- (3^+) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x e $y \in \mathbb{R}$.

Neste novo contexto, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade continua válido, isto é, as afirmações (1^+), (2^+) e (3^+) são ainda equivalentes. Isto se mostra introduzindo a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $F(0) = 0, F(x) = f(x)$ e $F(-x) = -f(x)$ para todo $x > 0$. Cada uma das afirmações (1^+), (2^+) e (3^+) para f equivale a uma das afirmações (1), (2) e (3) para F.

Deve-se observar que a função f do teorema acima sendo crescente, tem-se $a = f(1) > 0$. No caso de se supor f decrescente vale um resultado análogo, com $a < 0$

O gráfico que representa duas grandezas diretamente proporcionais é uma reta.

Juros Simples

O juros simples e o tempo formam uma proporcionalidade numérica pois satisfazem as condições 1) e 2), então o juros simples é uma função linear do tempo.

$j = c \cdot i \cdot t \Rightarrow j(t) = c \cdot i \cdot t \Rightarrow j(t) = a \cdot t$, com $a = c \cdot i$.
onde:
j = juros;
t = tempo;
c = capital;

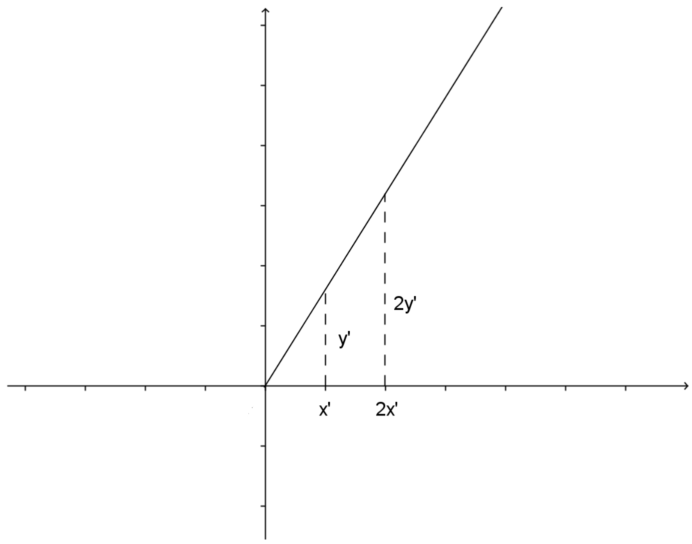


Figura 4.1: Grandezas Diretamente Proporcionais - Geogebra

i = índice ou taxa.
Com o índice e o tempo na mesma unidade.

4.2.3 Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais quando a cada valor da grandeza x associamos de forma unívoca um valor para a grandeza y.

$$y \sim \frac{1}{x} \text{ (} y \text{ é inversamente proporcional a } x\text{)}$$

Obs.: uma grandeza é inversamente proporcional a outra quando é proporcional ao seu inverso.

$$\Rightarrow y = \frac{a}{x}$$

Se duas grandezas x e y são inversamente proporcionais, então satisfazem as seguintes condições:

i) Se o valor da grandeza x aumenta o valor da grandeza y diminui;

Se $x_1 < x_2$, então $y_1 > y_2$, com x_1, x_2 valores associados a grandeza x e y_1, y_2 respectivos valores associados a grandeza y.

ii) Se x duplica, triplica, quadriplica, ... então y fica reduzida a metade, fica reduzida a terça parte, fica reduzida a quarta parte, ..., respectivamente.

Se um certo valor de x corresponde a um y, então nx corresponde a $\frac{1}{n} \cdot y$, com $n \in \mathbb{N}$.

O gráfico que representa duas grandezas inversamente proporcionais é uma hipérbole equilátera.

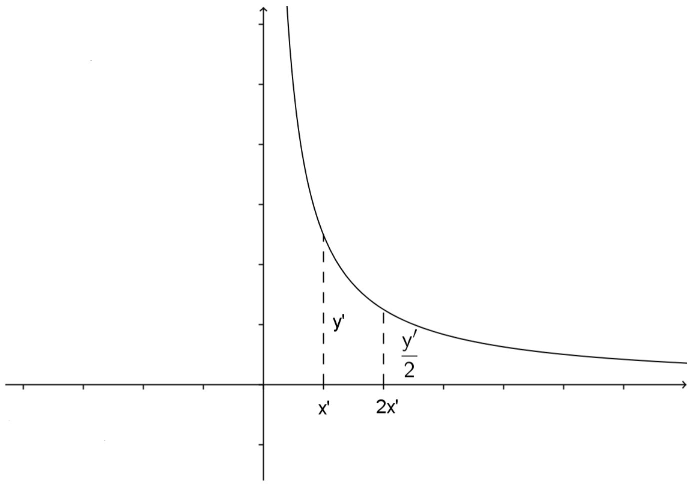


Figura 4.2: Grandezas Inversamente Proporcionais - Geogebra

4.3 Geometria Plana

4.3.1 Teorema de Tales

Definições

Feixe de retas paralelas

Definição 4.3. *É um conjunto de retas coplanares que são paralelas entre si.*

Reta transversal a um feixe de retas paralelas

Definição 4.4. *É uma reta do plano que concorre com todas as retas do feixe de retas paralelas.*

Pontos correspondentes de duas retas transversais

Definição 4.5. *São pontos de duas retas transversais que pertencem a uma das retas paralelas.*

Segmentos correspondentes de duas transversais

Definição 4.6. *São segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.*

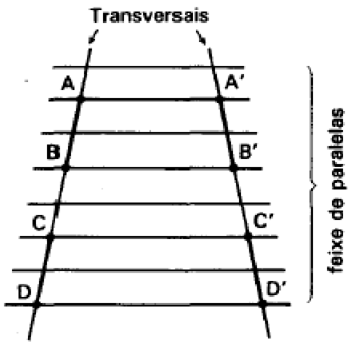


Figura 4.3: Tales-1, [29].

A e A', B e B', C e C', D e D' são pontos correspondentes. AB, $A'B'$, CD e $C'D'$ são segmentos correspondentes.

Propriedade

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é dividido em p partes congruentes entre si, e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:
1º) também é dividido em p partes
2º) e essas partes também são congruentes entre si.

Demonstração

1º) AB e $A'B'$ são segmentos correspondentes e AB é dividido em p partes por retas do feixe.

Se $A'B'$ ficasse dividido em menos partes (ou mais partes), pelo menos duas retas do feixe encontrar-se-iam em pontos de AB (ou de $A'B'$), o que é absurdo pois as retas do feixe são paralelas.

2º) AB é dividido em partes congruentes a x.

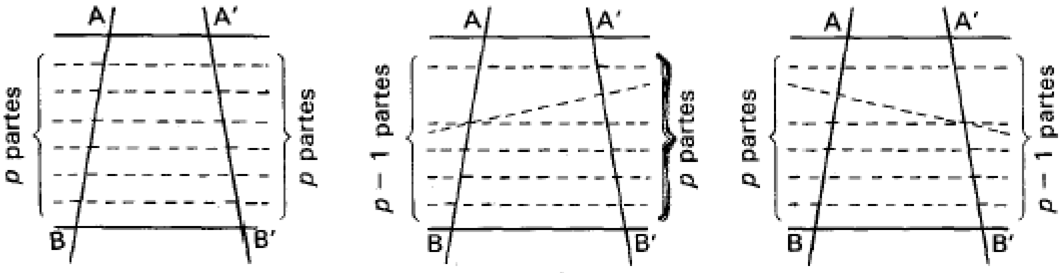


Figura 4.4: Tales-2, [29].

Pelos pontos de divisão de $A'B'$, conduzindo paralelas a AB, obtemos um triângulo para cada divisão. Todos os triângulos são congruentes pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo), basta notar os paralelogramos e os ângulos de lados respectivamente paralelos que são obtidos.

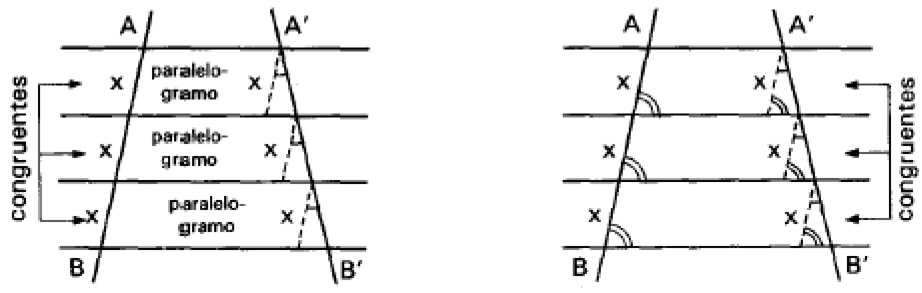


Figura 4.5: Tales-3, [29].

Com isso, $A'B'$ é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

Teorema 4.2 (Teorema de Tales). *Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

AB e CD são dois segmentos de uma transversal, e $A'B'$ e $C'D'$ são os respectivos correspondentes da outra. (Hipótese) $\Rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$ (Tese)

Demonstração

1º caso: AB e CD são comensuráveis.

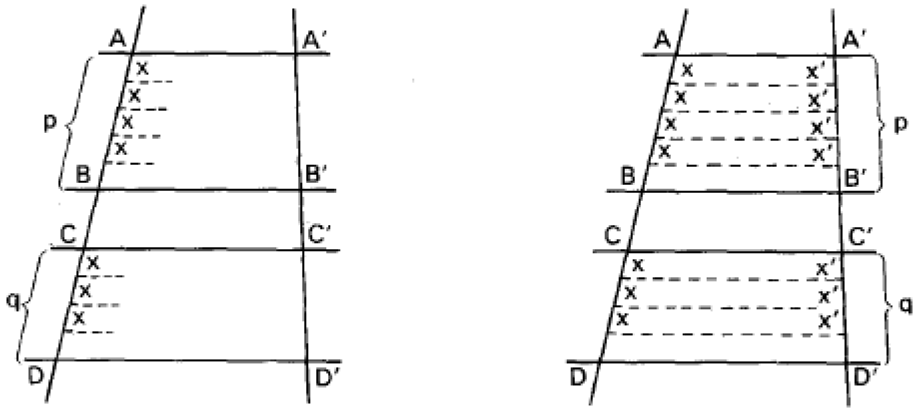


Figura 4.6: Tales-4, [29].

Existe um segmento x que é submúltiplo de AB e de CD, tal que: $AB = p \cdot x$ e $CD = q \cdot x$

Dividindo as equações, temos: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{p}{q}$ (1)

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de AB e CD (ver figura) e aplicando a propriedade anterior, vem: $A'B' = p \cdot x'$ e $C'D' = q \cdot x'$

Dividindo as equações, temos: $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{p}{q}$ (2)

Comparando (1) e (2), temos: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.

2º caso: AB e CD são incomensuráveis.

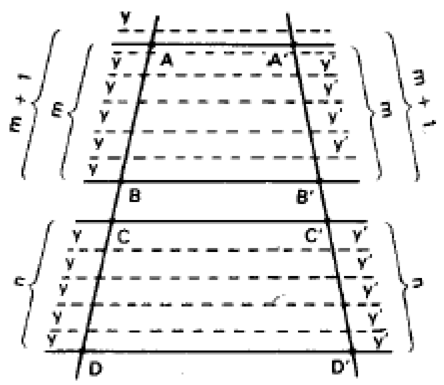


Figura 4.7: Tales-5, [29].

Não existe segmento submúltiplo comum de AB e CD.

Tomamos um segmento y submúltiplo de CD (y cabe um certo número inteiro n de vezes em CD), isto é: $CD = n \cdot y$

Por serem AB e CD incomensuráveis, marcando sucessivamente y em AB, para um certo número inteiro m de vezes acontece que: $m \cdot y < AB < (m+1) \cdot y$

Considerando as relações acima, vem: $m \cdot y < AB < (m+1) \cdot y$ e $n \cdot y = CD$

Dividindo os termos da inequação $m \cdot y < AB < (m+1) \cdot y$ por CD, temos: $\frac{m}{n} < \frac{AB}{CD} < \frac{m+1}{n}$ (3)

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de AB e CD e aplicando a propriedade anterior, vem: $C'D' = n \cdot y'$ e $m \cdot y' < A'B' < (m+1) \cdot y'$

Operando com as relações acima, temos: $m \cdot y' < A'B' < (m+1) \cdot y'$ e $n \cdot y' = C'D' = n \cdot y'$

Dividindo as equações, temos: $\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{C'D'} < \frac{m+1}{n}$ (4)

Ora, y é um submúltiplo de CD que se pode variar; dividindo y, aumentamos n e nestas condições $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é $\frac{AB}{CD}$ pela expressão (3), e é $\frac{A'B'}{C'D'}$ pela expressão (4). Como esse número é único, então: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$

Nota
Vale também a igualdade: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$, que permite concluir: a razão entre segmentos correspondentes é constante.

4.3.2 Teorema das bissetrizes

Teorema 4.3 (Teorema da bissetriz interna). *Sendo ABC o triângulo de lados a, b e c, AD uma bissetriz interna (conforme a figura), $DB = x$ e $DC = y$, teremos:* $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$

O lado $BC = a$ é dividido em dois segmentos aditivos, pois $DB + DC = BC$, ou seja, $x + y = a$. E com esta nomenclatura temos, então:

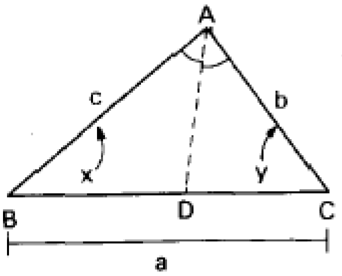


Figura 4.8: Bissetrizes-1, [29].

AD bissetriz interna do triângulo ABC (Hipótese) $\Rightarrow \dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$ (Tese)

Demonstração

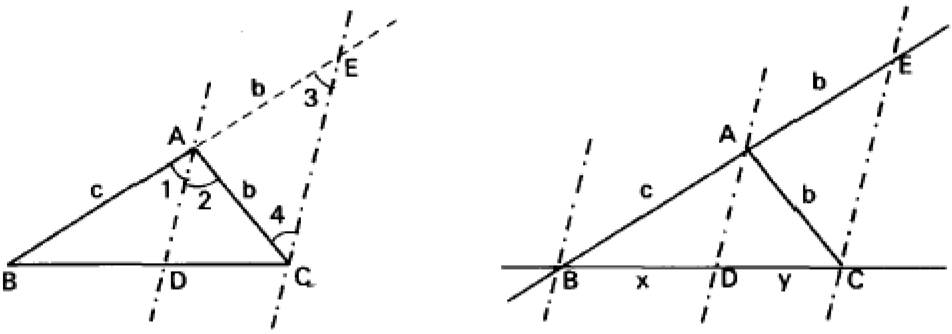


Figura 4.9: Bissetrizes-2, [29].

Conduzimos por C uma paralela à bissetriz AD, determinando um ponto E na reta $\vec{AB}$ ($\vec{CE}//\vec{AD}$).

Fazendo $B\hat{A}D = \hat{1}, D\hat{A}C = \hat{2}, A\hat{E}C = \hat{3}$ e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\vec{CE}//\vec{AD} \Rightarrow \hat{1} \equiv \hat{3}$ (correspondentes).

$\vec{CE}//\vec{AD} \Rightarrow \hat{2} \equiv \hat{4}$ (alternos internos).

Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

$\hat{3} \equiv \hat{4} \Rightarrow$ O triângulo ACE é isósceles de base $CE \Rightarrow AE \equiv AC \Rightarrow AE = b$.

Considerando $\vec{BC}$ e $\vec{BE}$ retas como transversais de um feixe de retas paralelas ($\vec{AD}//\vec{CE}$) e aplicando o teorema de Tales, vem: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}$, ou seja, $\dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$.

Teorema 4.4 (Teorema da bissetriz externa). *Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos (subtrativos) proporcionais aos lados adjacentes.*

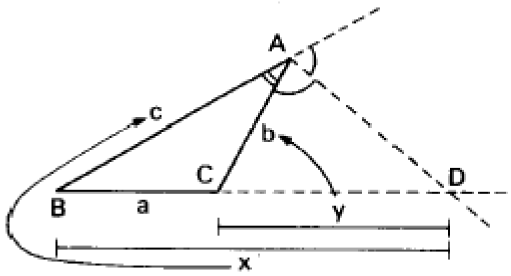


Figura 4.10: Bissetrizes-3, [29].

Sendo ABC o triângulo de lados a, b, c, AD a bissetriz externa com D na reta $\vec{BC}$ (conforme figura), $DB = x$ e $DC = y$, teremos: $\dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$

O lado $BC = a$ é dividido externamente em segmentos subtrativos, pois $DB–DC = BC$, ou seja, $x - y = a$.

AD bissetriz externa do triângulo ABC (Hipótese) $\Rightarrow \dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$ (Tese)

Demonstração

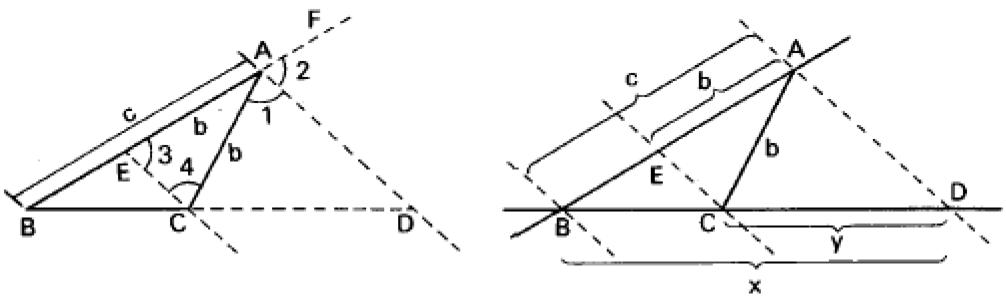


Figura 4.11: Bissetrizes-4, [29].

Conduzimos por C uma paralela à bissetriz AD, determinando um ponto E na reta $\vec{AB}(\vec{CE}//\vec{AD})$.

Fazendo $C\hat{A}D = \hat{1}, D\hat{A}F = \hat{2}, A\hat{E}C = \hat{3}$ e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\vec{CE}//\vec{AD} \Rightarrow \hat{2} \equiv \hat{3}$ (correspondentes).

$\vec{CE}//\vec{AD} \Rightarrow \hat{1} \equiv \hat{4}$ (alternos internos).

Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

$\hat{3} \equiv \hat{4} \Rightarrow$ O triângulo ACE é isósceles de base $CE \Rightarrow AE \equiv AC \Rightarrow AE = b$.

Considerando $\vec{BC}$ e $\vec{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas $(\vec{CE}//\vec{AD})$ e aplicando o teorema de Tales, vem: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}$, ou seja, $\dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$

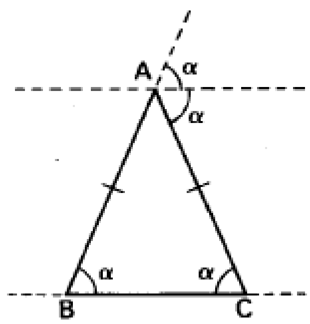


Figura 4.12: Bissetrizes-5, [29].

Nota

Se o triângulo ABC é isósceles de base BC, então a bissetriz do ângulo externo em A é paralela à base BC e reciprocamente.

4.3.3 Semelhança de Triângulos

Definição 4.7. *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

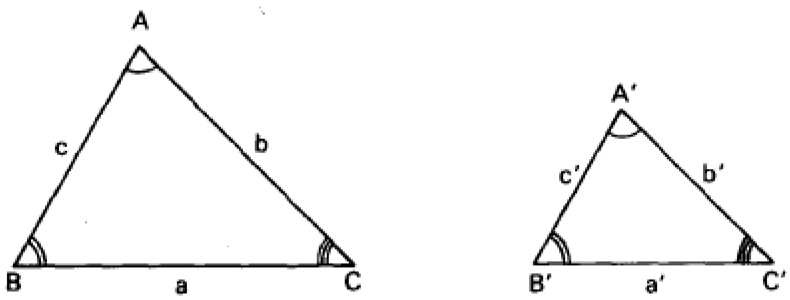


Figura 4.13: Semelhança-1, [29].

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow (\hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}' \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'})$$

$\sim$: semelhante

Dois lados homólogos (homo = mesmo, logos = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.
Sendo k a razão entre os lados homólogos, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, k é chamado razão de semelhança dos triângulos. Se $k = 1$, os triângulos são congruentes.

Propriedades

Da definição de triângulos semelhantes decorrem as propriedades:
a) **Reflexiva:** $\triangle ABC \sim \triangle ABC$
b) **Simétrica:** $\triangle ABC \sim \triangle RST \Leftrightarrow \triangle RST \sim \triangle ABC$
c) **Transitiva:** $\triangle ABC \sim \triangle RST$ e $\triangle RST \sim \triangle XYZ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle XYZ$

Teorema 4.5 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

$DE//BC$ (Hipótese) $\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (Tese)

Demonstração

Para provarmos a semelhança entre $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$, precisamos provar que ele têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais:

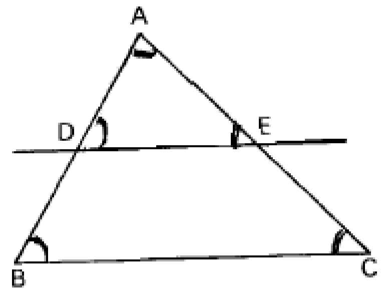


Figura 4.14: Semelhança-2, [29].

1º) Ângulos congruentes $DE//BC \Rightarrow (\hat{D} \equiv \hat{B}$ e $\hat{E} \equiv \hat{C})$ (ângulos correspondentes) então, temos $\hat{D} \equiv \hat{B}, \hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ comum (1)

2º) Lados proporcionais

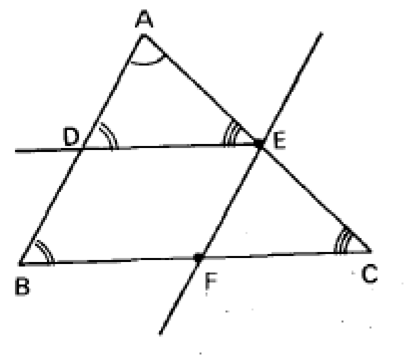


Figura 4.15: Semelhança-3, [29].

Pelo teorema de Tales, temos: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$

Por E construímos EF paralela a AB, com F em BC.

Paralelogramo $BDEF \Rightarrow DE \equiv BF$

Teorema de Tales $\Rightarrow \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$

Então, $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

Logo, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ (2)

3º) Conclusão (1) e (2) $\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$.

Outra Demonstração

Essa demonstração é encontrada no livro Conexões com a Matemática [31].

Supondo conhecida a fórmula da área do triângulo, temos:

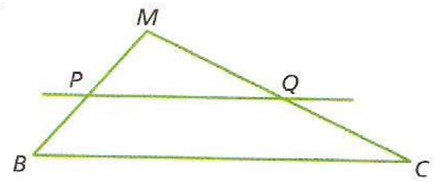


Figura 4.16: Teorema da Proporcionalidade-1, [31].

Na figura:

BMC é triângulo, $P \in \overline{BM}, Q \in \overline{MC}$ e $\overline{PQ}//\overline{BC}$

Vamos mostrar que: $\dfrac{MP}{PB} = \dfrac{MQ}{QC}$

Os triângulos QMP e QPB têm a mesma altura de medida h relativas aos lados $\overline{MP}$ e $\overline{PB}$, respectivamente. Então, a razão entre suas áreas é:

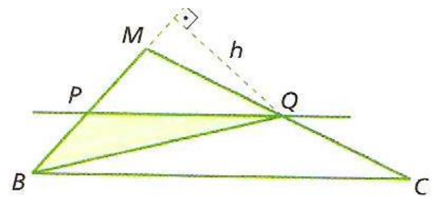


Figura 4.17: Teorema da Proporcionalidade-2, [31].

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot MP \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot PB \cdot h} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{MP}{PB} \text{ (I)}$$

Os triângulos QMP e QPC têm mesma altura de medida h' relativas aos lados $\overline{MQ}$ e $\overline{QC}$, respectivamente. Então, a razão entre suas áreas é:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot MQ \cdot h'}{\frac{1}{2} \cdot QC \cdot h'} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{MQ}{QC} \text{ (II)}$$

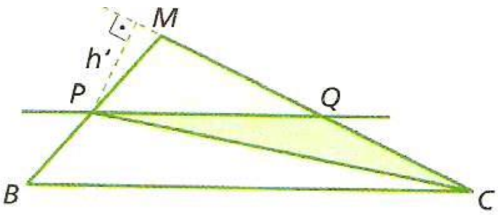


Figura 4.18: Teorema da Proporcionalidade-3, [31].

Os triângulos QPB e QPC têm base $\overline{PQ}$ e altura de medida h" em relação ao lado comum $\overline{PQ}$. Logo, têm a mesma área.

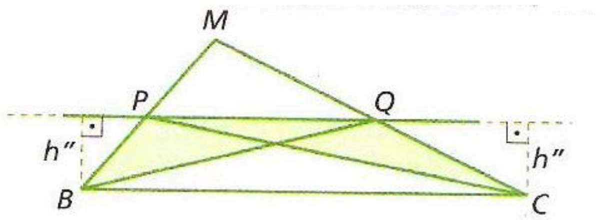


Figura 4.19: Teorema da Proporcionalidade-4, [31].

De (I) e (II), vem que:

(I) $\dfrac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \dfrac{MP}{PB} \Rightarrow A_{QMP} = \dfrac{MP}{PB} \cdot A_{QPB}$

(II) $\dfrac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \dfrac{MQ}{QC} \Rightarrow A_{QMP} = \dfrac{MQ}{QC} \cdot A_{QPC}$

Então, $\dfrac{MP}{PB} \cdot A_{QPB} = \dfrac{MQ}{QC} \cdot A_{QPC}$

Como $A_{QPB} = A_{QPC}$, podemos concluir que: $\dfrac{MP}{PB} = \dfrac{MQ}{QC}$

Critério de Semelhança

1º Critério

"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."

$\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ e $\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}'$ (Hipótese) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (Tese)

Demonstração

Vamos supor que os triângulos não são congruentes e que $AB > A'B'$.

Seja D um ponto de AB tal que $AD = A'B'$ e o triângulo ADE com $\hat{D} = \hat{B}$ e E no lado AC.

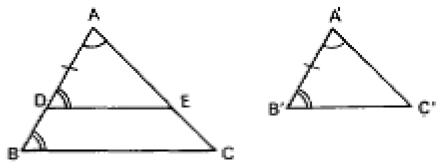


Figura 4.20: Semelhança-4, [29].

Como: $\hat{A} = \hat{A}', AD = A'B'$(Por ALA) $\Rightarrow \triangle ADE = \triangle A'B'C'$ e;

$\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{B}' = \hat{D} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} \Rightarrow DE//BC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$

Então, $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

2º Critério

"Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes."

A demonstração é análoga à do 1º critério, usando o caso de congruência LAL (em lugar de ALA) e o teorema fundamental.

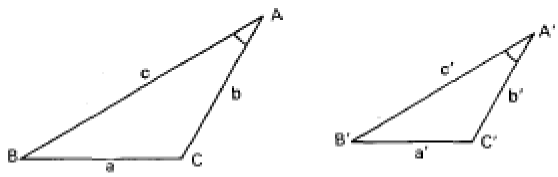


Figura 4.21: Semelhança-5, [29].

$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = k$ e $\hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow (\frac{a}{a'} = k, \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}')$.

3º Critério

“Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.”

A demonstração deste caso é análoga à do 1º caso, usando o caso de congruência LLL (em lugar do ALA) e o teorema fundamental.

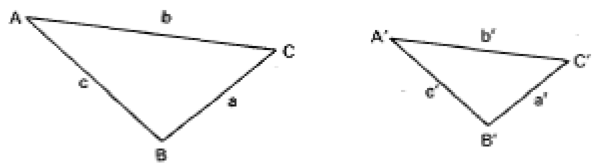


Figura 4.22: Semelhança-6, [29].

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow (\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}').$$

Observações

Com base nos casos de semelhança, podemos ter os resultados seguintes. Se a razão de semelhança de dois triângulos é **k**, então:
a razão entre os lados homólogos é **k**;
a razão entre os perímetros é **k**;
a razão entre as alturas homólogas é **k**;
a razão entre as bissetrizes internas homólogas é **k**;
a razão entre as medianas homólogas é **k**;
a razão entre os raios dos círculos inscritos é **k**;
a razão entre os raios dos círculos circunscritos é **k**;
. . . .
. . . .
. . . .
a razão entre dois elementos lineares homólogos é **k**;
e os ângulos homólogos são congruentes.

4.3.4 Potência de um ponto em relação a uma circunferência

1º caso: P é interior a circunferência
2º caso: P é exterior a circunferência
Nas figuras acima dizemos que RS é uma corda e que RP e PS são suas partes; PX é um “segmento secante” e PY é sua parte exterior.

Demonstração para os dois casos

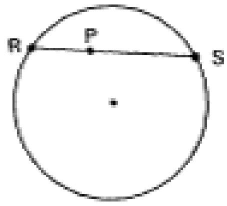


Figura 4.23: Potência-1, [29].

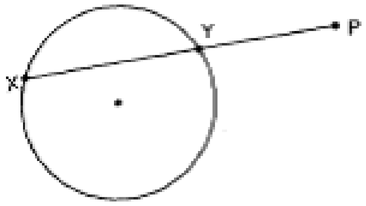


Figura 4.24: Potência-2, [29].

Se por P passam duas retas concorrentes que interceptam a circunferência em A, B, C e D, respectivamente, temos:

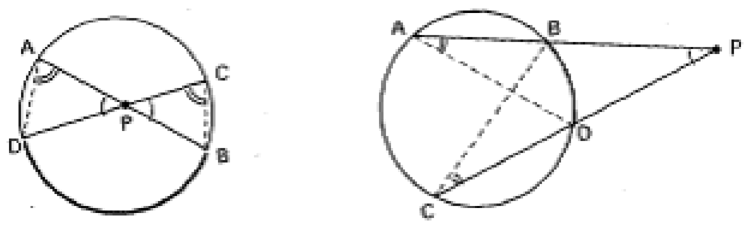


Figura 4.25: Potência-3, [29].

$\hat{P}$ comum (ou o.p.v) e $\hat{A} = \hat{C} = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow \triangle PAD \sim \triangle PCB \Rightarrow \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PD}{PB} \Rightarrow$ $(PA) \cdot (PB) = (PC) \cdot (PD)$

Enunciados

No 1º caso:
"Se duas cordas de uma mesma circunferência se interceptam, então o produto da medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes da outra."

No 2º caso:
"Se por um ponto (P) exterior a uma circunferência conduzimos dois 'segmentos secantes' (PA e PC), então o produto da medida do primeiro (PA) pela de sua parte exterior (PB) é igual ao produto da medida do segundo (PC) pela de sua parte exterior (PD)."

Generalização do 1º caso
Consideremos as cordas $AB, CD, EF, GH, ..., MN$ que se interceptam em P.
Com o resultado anterior e tomando AB para comparação, temos:

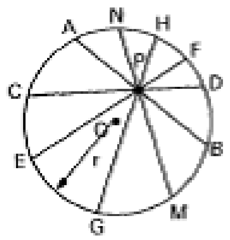


Figura 4.26: Potência-4, [29].

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$
$PA \cdot PB = PE \cdot PF$
$PA \cdot PB = PG \cdot PH$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$PA \cdot PB = PM \cdot PN$

Então, fixados o pontos P e a circunferência, $PA \cdot PB$ é constante, qualquer que seja a corda AB passando por P. Este produto $PA \cdot PB$ é chamado potência do ponto P em relação à circunferência. Logo, $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = PG \cdot PH. = ... = PM \cdot PN =$ potência de P em relação à circunferência.

Generalização do 2º caso
Consideremos o segmento secante PA, sua parte exterior PB e um segmento PT tangente a circunferência.

Analisando os triângulo PAT e PTB, vem:

$\hat{P}$ comum e $\hat{A} = \hat{T} = \dfrac{T\hat{B}}{2} \Rightarrow \triangle PAT \sim \triangle PTB \Rightarrow \dfrac{PA}{PT} = \dfrac{PT}{PB} \Rightarrow (PA) \cdot (PB) = (PT)^2$

Com o resultado acima, e procedendo de modo análogo ao feito no 1º caso, temos:
$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = PG \cdot PH = ... = PM \cdot PN =$ potência de P em relação à circunferência.

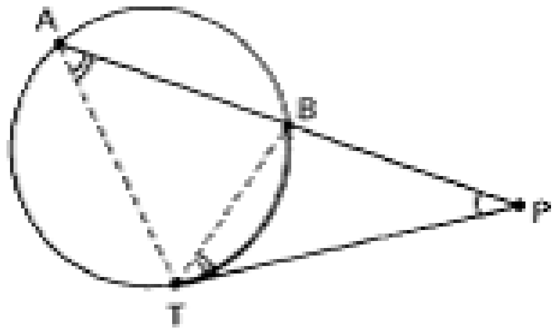


Figura 4.27: Potência-5, [29].

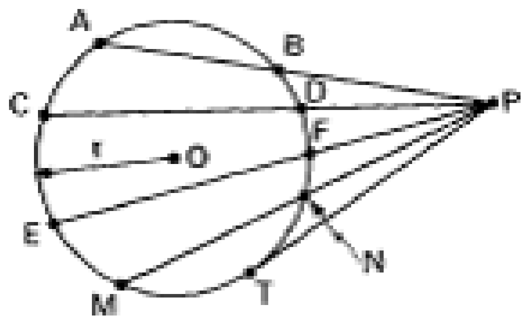


Figura 4.28: Potência-6, [29].

4.3.5 Relações Métricas

Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzindo AD perpendicular a BC, com D em BC, temos os elementos seguintes:

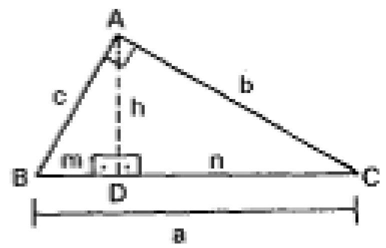


Figura 4.29: Triângulo Retângulo-1, [29].

$BC = a$: hipotenusa,
$AC = b$: cateto,
$AB = c$: cateto,
$BD = m$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa,
$CD = n$: projeção do cateto b sobre a hipotenusa,
$AD = h$: altura relativa à hipotenusa.

Para simplificar, dizemos que a é a hipotenusa, podendo ser entendido que a é a medida da hipotenusa.

Semelhanças

Na figura, AD é a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Os triângulos DBA e DAC são retângulos e semelhantes ao triângulo ABC.

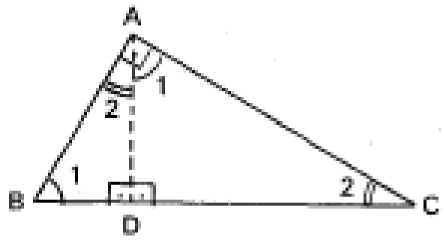


Figura 4.30: Triângulo Retângulo-2, [29].

Os triângulos são semelhantes pelo 1º critério de semelhança

$\hat{B} = \hat{1}$ (complementos de $\hat{C}$) e $\hat{C} = \hat{2}$ (complementos de $\hat{B}$)

temos:

$\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (i)

$\triangle ABC \sim \triangle DAC$ (ii)

$\triangle DBA \sim \triangle DAC$ (iii)
Aplicando a semelhança nos triângulos abaixo, temos:

$\triangle ABC \sim \triangle DBA$ (i)

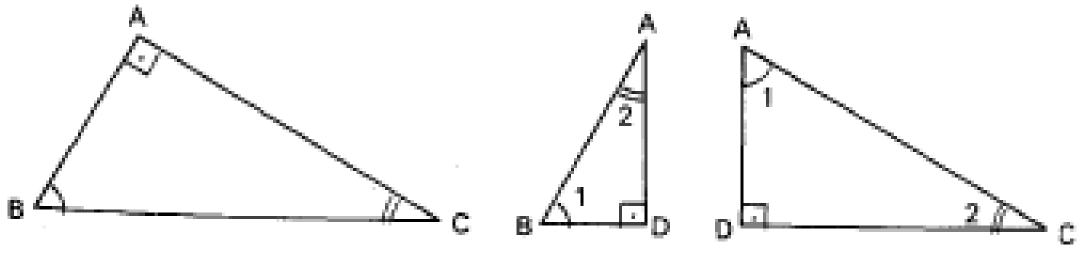


Figura 4.31: Triângulo Retângulo-3, [29].

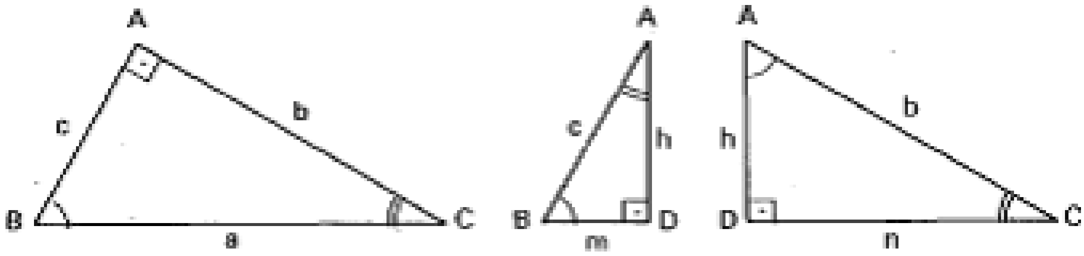


Figura 4.32: Triângulo Retângulo-4, [29].

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$ (4)
$\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$ (2)
$\dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{m} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot m$ (6)

$\triangle ABC \sim \triangle DAC$ (ii)

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n$ (1)
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$ (4)
$\dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{h} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n$ (5)

$\triangle DBA \sim \triangle DAC$ (iii)

$\dfrac{c}{b} = \dfrac{h}{n} \Rightarrow b \cdot h = c \cdot n$ (5)
$\dfrac{c}{b} = \dfrac{m}{h} \Rightarrow c \cdot h = b \cdot m$ (6)

$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$ (3)

Resumindo as relações encontradas, excluindo as repetidas, temos:

Cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

(1) $b^2 = a \cdot n$
(2) $c^2 = a \cdot m$

A altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa

(3) $h^2 = m \cdot n$

O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

(4) $b \cdot c = a \cdot h$

O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.

(5) $b \cdot h = c \cdot n$
(6) $c \cdot h = b \cdot m$

Teorema 4.6 (**Teorema de Pitágoras**). *Em um triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*

$b^2 + c^2 = a^2$

Demonstração
Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

(1) $b^2 = a \cdot n$ e (2) $c^2 = a \cdot m$
Então, $b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$
$b^2 + c^2 = a \cdot (n + m)$, mas $n + m = a$
$b^2 + c^2 = a \cdot a$
$b^2 + c^2 = a^2$

4.3.6 Razão entre áreas de triângulos semelhantes

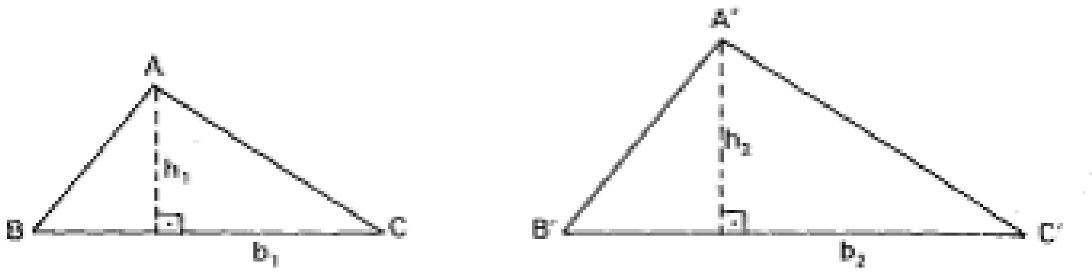


Figura 4.33: Áreas semelhantes-1, [29].

Área do triângulo $ABC = S_1$
Área do triângulo $A'B'C' = S_2$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2} = k \text{ (razão de semelhança)}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{b_2 \cdot h_2}{2}} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k \cdot k = k^2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Então, a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

4.3.7 Razão entre áreas de dois polígonos semelhantes

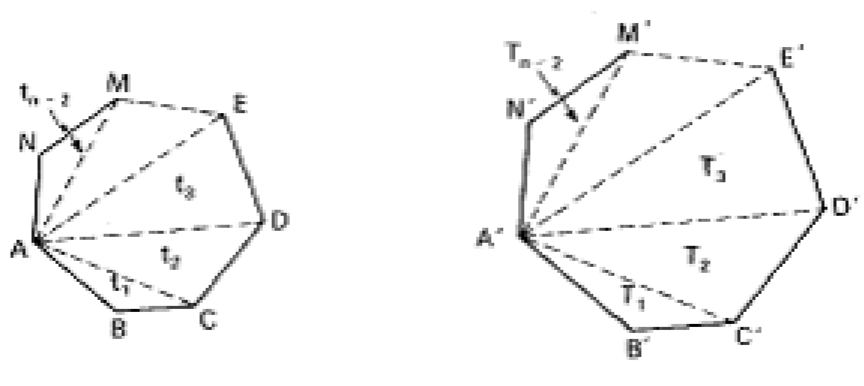


Figura 4.34: Áreas semelhantes-2, [29].

Área de $ABCDE...MN = S_1$
Área de $A'B'C'D'...M'N' = S_2$

$ABCDE...MN \sim A'B'C'D'...M'N' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ e $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ e ... e $\triangle AMN \sim \triangle A'M'N' \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = ... = \dfrac{MN}{M'N'} = k$ (razão de semelhança)

Fazendo:

Área $\triangle ABC = t_1, Área \triangle\ ACD = t_2, ..., Área \triangle\ AMN = t_{n-2}$

Área $\triangle A'B'C' = T_1, Área \triangle\ A'C'D' = T_2, ..., Área \triangle\ A'M'N' = T_{n-2}$

Como $\dfrac{t_i}{T_i} = k^2 \Rightarrow t_i = k^2 \cdot T_i$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$–2

Então:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + ... + T_{n-2}} = \frac{k^2 \cdot T_1 + k^2 \cdot T_2 + ... + k^2 \cdot T_{n-2}}{T_1 + T_2 + ... + T_{n-2}}$$
$$\frac{S_1}{S_2} = k^2$$

A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Obs.: a propriedade acima é extensiva a quaisquer superfícies semelhantes e, por isso, vale: A razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

4.4 Sólidos Geométricos

4.4.1 Seção de uma pirâmide por um plano paralelo à base

Seccionando uma pirâmide por um plano paralelo à base, separamos essa pirâmide em dois sólidos:
i) o sólido que contém o vértice que é uma nova pirâmide e;
ii) o sólido que contém a base da pirâmide dada que é um tronco de pirâmide de bases paralelas.

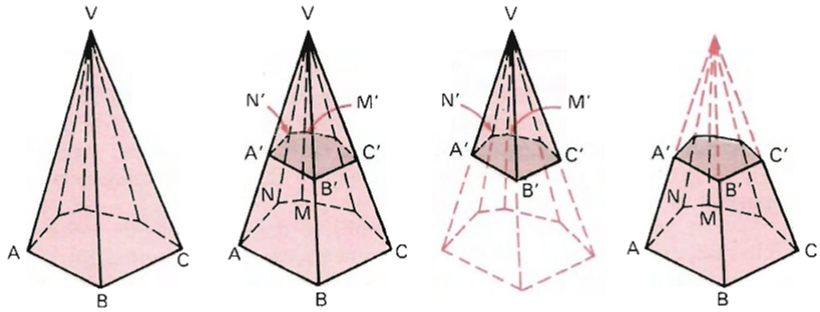


Figura 4.35: Seções nas pirâmides-1, [29].

A nova pirâmide e a pirâmide primitiva têm a mesma natureza, os ângulos ordenadamente congruentes e os elementos lineares homólogos (arestas da base, arestas laterais, alturas, ...) são proporcionais. Dizemos que elas são semelhantes.

A razão de semelhança é a razão entre dois elementos lineares homólogos. Representaremos por k.
Assim:

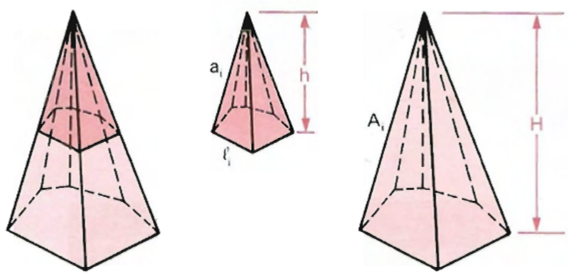


Figura 4.36: Seções nas pirâmides-2, [29].

$\dfrac{a_i}{A_i} = \dfrac{l_i}{L_i} = \dfrac{h}{H} = k$ (razão de semelhança)

Propriedades

Considerando duas pirâmides semelhantes, temos:

1º) A razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança.

De fato, as bases são polígonos semelhantes e a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhanças. $\dfrac{b}{B} = k^2$

$\dfrac{h}{H} = k, \dfrac{b}{B} = k^2, \dfrac{b}{B} = (\dfrac{h}{H})^2$

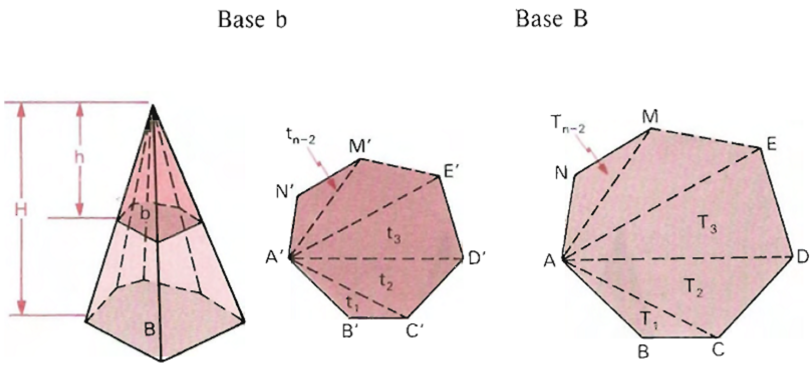


Figura 4.37: Seções nas pirâmides-3, [29].

A propriedade acima foi demonstrada para áreas de figuras semelhantes.

2º) A razão entre áreas laterais é igual ao quadrado da razão de semelhança.

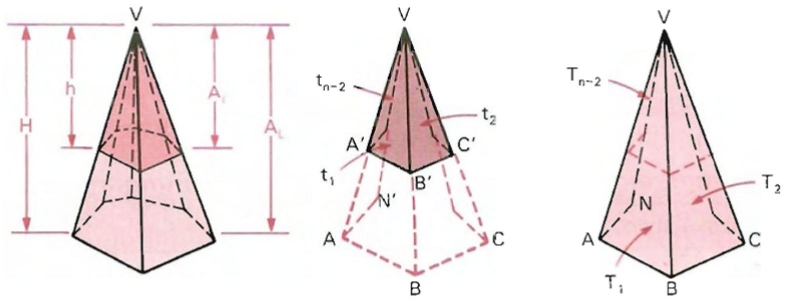


Figura 4.38: Seções nas pirâmides-4, [29].

$$\frac{h}{H} = k, \frac{A_l}{A_L} = k^2, \frac{A_l}{A_L} = (\frac{h}{H})^2$$

Sendo
Área lateral de $V(ABC...MN) = A_L$
Área lateral de $V(A'B'C'...M'N') = A_l$

temos:
Pirâmide $V(ABC...MN)$ $V(A'B'C'...M'N') \Rightarrow (\triangle VAB \sim \triangle V'A'B', \triangle VBC \sim \triangle V'B'C', ..., \triangle VMN \sim$ $\triangle V'M'N', \triangle VNA \sim \triangle V'N'A') \Rightarrow \dfrac{VA'}{VA} = \dfrac{VB'}{VB} = ... = \dfrac{VN'}{VN} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = ... =$ $\dfrac{N'A'}{NA} = \dfrac{h}{H} = k$ (razão de semelhança)

Considerando

$$\begin{array}{cc}
\text{Área do } \triangle VA'B' = t_1 & \text{Área do } \triangle VAB = T_1 \\
\text{Área do } \triangle VB'C' = t_2 & \text{Área do } \triangle VBC = T_2 \\
\ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots \\
\text{Área do } \triangle VN'A' = t_{n-2} & \text{Área do } \triangle VNA = T_{n-2}
\end{array}$$

temos: $\dfrac{t_1}{T_1} = \dfrac{t_2}{T_2} = \ldots = \dfrac{t_{n-2}}{T_{n-2}} = k^2.$

Fazendo a razão entre as áreas laterais, vem:

$$\frac{A_l}{A_L} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-2}}$$

$$\frac{A_l}{A_L} = \frac{k^2 \cdot T_1 + k^2 \cdot T_2 + \ldots + k^2 \cdot T_{n-2}}{T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-2}} = k^2$$

$$\frac{A_l}{A_L} = k^2.$$

3º) A razão entre as áreas totais é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Temos: $\dfrac{b}{B} = k^2 \Rightarrow b = k^2 \cdot B$ e $\dfrac{A_l}{A_L} = k^2 \Rightarrow A_l = k^2 \cdot A_L.$

Fazendo a razão entre as áreas totais, vem:

$$\frac{A_l}{A_L} = \frac{A_l + b}{A_L + B} \Rightarrow \frac{A_l}{A_L} = \frac{k^2.(A_L + B)}{k^2 \cdot (A_L + B)} \Rightarrow \frac{A_t}{A_T} = k^2$$

$$\frac{A_t}{A_T} = k^2$$

4º) A razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Temos: $\dfrac{h}{H} = k$ e $\dfrac{b}{B} = k^2$

Fazendo a razão entre os volumes, temos:

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{b \cdot h}{3}}{\frac{B \cdot H}{3}} \Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{b}{B} \cdot \frac{h}{H} \Rightarrow \frac{v}{V} = k^2 \cdot k = k^3$$

$$\frac{v}{V} = k^3$$

Devemos notar ainda que:

$$\frac{v}{V} = k^3 \Rightarrow \frac{v}{V} = k^2 \cdot k \Rightarrow \frac{v}{V} = \frac{b\sqrt{b}}{B\sqrt{B}}$$

Observações:
1ª) As propriedades acima são facilmente adaptadas para cones semelhantes.
2ª) Elas podem ser generalizadas para duas superfícies ou dois sólidos semelhantes quaisquer:
(i) A razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.
(ii) A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Capítulo 5

O que preconiza os documentos oficiais brasileiros no ensino do conceito de Proporcionalidade

Os educadores citados anteriormente, em suas pesquisas sobre o ensino da proporcionalidade, concluem que a forma tradicional de ensino dificulta a real aquisição do conhecimento. Qual será a orientação sobre este ensino, segundo os documentos oficiais brasileiros de referência, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [10] e a Matriz de Referência das Habilidades e Competênicas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) [11].

5.1 Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN

Os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN [10] concordam com a proposta de sequência didática para o ensino do conceito de proporcionalidade quando:

Preconiza como um dos objetivos do ensino da matemática, no terceiro ciclo, que os alunos devem "Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade."

Apresenta no bloco Conceitos e Procedimentos que os alunos devem ser capazes de "Resolverem situações-problema que envolvam a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais" e "Compreender a noção de variável pela interdependência da variação de grandezas."

Propõem que os alunos devem ao final da escola básica: identificar a proporcionalidade como uma relação de razão constante, identificar as situações que são regidas pela lei da proporcionalidade e as que não são, determinar a constante de proporcionalidade que relaciona as razões envolvidas, construir as equações de problemas de proporcionalidade e determinar sua solução, construir a relação de proporcionalidade (função linear) que rege as situações de proporcionalidade, utilizando a constante de proporcionalidade, identificar, desenvolver, associar e aplicar nas diversas formas (conteúdos) que o conceito de proporcionalidade se apresenta e construir as regras de três simples e compostas a partir do conceito de proporcionalidade.

Apresenta no bloco Espaço e Forma: "Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área)."

5.2 Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio ENEM [11] através das Habilidades e Competências de cada área do conhecimento preconiza que o aluno ao final do ensino médio deve ser capaz de:

Área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

Área de conhecimento: Ciências da Natureza e suas tecnologias

Competência de área 5 – Entender métodos e procedimentos próprios das ciências naturais e aplicá-los em diferentes contextos.

H17 – Relacionar informações apresentadas em diferentes formas de linguagem e representação usadas nas ciências físicas, químicas ou biológicas, como texto discursivo, gráficos, tabelas, relações matemáticas ou linguagem simbólica.
H18 – Relacionar propriedades físicas, químicas ou biológicas de produtos, sistemas ou procedimentos tecnológicos às finalidades a que se destinam.
H19 – Avaliar métodos, processos ou procedimentos das ciências naturais que contribuam para diagnosticar ou solucionar problemas de ordem social, econômica ou ambiental.

Área de conhecimento: Ciências Humanas e suas tecnologias

Competência de área 2 - Compreender as transformações dos espaços geográficos como produto das relações socioeconômicas e culturais de poder.

H6 - Interpretar diferentes representações gráficas e cartográficas dos espaços geográficos.

Para Santaló [50, p.11]

> "A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade."

Capítulo 6

Justificativas para o uso da interdisciplinaridade e da contextualização na proposta de sequência didática e seus objetivos

Considerando as referências documentais oficiais de ensino e as conclusões dos educadores citados anteriormente, faz-se necessário à implementação de uma abordagem contextualizada e interdisciplinar de ensino da Proporcionalidade, com à sua melhor compreensão e correlação.

Ávila [3, p.6] considera natural o uso da interdisciplinaridade e da contextualização quando diz

> "É tão próprio e conveniente que o professor de Matemática mostre aplicações da Matemática às outras ciências, como é próprio e muitas vezes necessário que professores das outras ciências recordem ou expliquem tópicos de Matemática em suas aulas."

As orientações curriculares para o ensino médio do Ministério da Educação (PCN+) [12, p.70-8] no capítulo Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias orienta que

> "Ao incentivar a interdisciplinaridade, não temos a intenção de:
>
> descaracterizar as disciplinas, confundindo-as todas em práticas comuns ou indistintas; o que interessa é promover uma ação concentrada do seu conjunto e também de cada uma delas a serviço do desenvolvimento de competências gerais que dependem do conhecimento disciplinar."

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anisio Teixeira (INEP) [13, p.8] defende que

> "O Enem tem, ainda, papel fundamental na implementação da reforma do ensino médio, ao apresentar, nos itens da prova, os conceitos de situação-problema, interdisciplinaridade e contextualização, que são, ainda, mal compreendidos e pouco habituais na comunidade escolar. A prova do Enem, ao entrar na escola, possibilita a discussão entre professores e alunos dessa nova concepção de ensino preconizada pela LDB, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e pela reforma do ensino médio, norteadores da concepção do exame."

A Secretaria de Educação de Pernambuco [42, p.42-48] na Base Curricular para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: Matemática, aponta para as dificuldades da prática da interdisciplinaridade quando diz que

> "São muitos os obstáculos a entravar a prática da interdisciplinaridade na escola e seria ilusório julgá-los de fácil superação. Na verdade, tal prática requer transformações amplas, que atingem todo o sistema educacional: os currículos, as modalidades de avaliação, a organização do tempo e dos espaços na escola (laboratórios de informática, ciências, linguagens, bibliotecas), o livro didático, entre outros. Atingem, em especial, as formações inicial e continuada dos educadores, que exercem inegável papel na moldagem das concepções desses educadores." "Interdisciplinaridade não implica, por outro lado, uma diminuição da importância das áreas específicas do conhecimento. Ao contrário, uma perspectiva interdisciplinar adequada nutre-se do aprofundamento nas várias áreas do saber, desde que esses saberes sejam articulados da forma mais diversificada e consistente possível."

Abaixo estão trechos do Parecer nº 15/98 da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação [14, p.37-47] defendendo a Interdisciplinaridade e a Contextualização.

> Interdisciplinaridade
>
> "A interdisciplinaridade deve ir além da mera justaposição de disciplinas e ao mesmo tempo evitar a diluição das mesmas em generalidades. De fato, será principalmente na possibilidade de relacionar as disciplinas em atividades ou projetos de estudo, pesquisa e ação que a interdisciplinaridade poderá ser uma prática pedagógica e didática adequada aos objetivos do ensino médio. O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, de ampliação, de iluminação de aspectos não distinguidos."

Contextualização

"Contextualizar o conteúdo que se quer aprendido significa em primeiro lugar assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto. Na escola fundamental ou média, o conhecimento é quase sempre reproduzido das situações originais nas quais acontece sua produção. Por esta razão quase sempre o conhecimento escolar se vale de uma transposição didática na qual a linguagem joga papel decisivo. O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização evoca por isto área, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas. As dimensões da vida ou os contextos valorizados explicitamente pela LDB são o trabalho e a cidadania. As competências estão indicadas quando a lei prevê um ensino que facilite a ponte entre a teoria e a prática. É isso também que propõe Piaget, quando analisa o papel da atividade na aprendizagem: compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção, e será preciso curvar-se ante tais necessidades se o que se pretende, para o futuro, é moldar indivíduos capazes de produzir ou de criar, e não apenas de repetir.

É possível generalizar a contextualização como recurso para tornar a aprendizagem significativa ao associá-la com experiências da vida cotidiana ou conhecimentos adquiridos espontaneamente."

Tomaz e David [58, p.16] sugere como alcançar a interdisciplinaridade quando diz

"A interdisciplinaridade poderia ser alcançada quando os conhecimentos de várias disciplinas são utilizados para resolver um problema ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista."

Capítulo 7

Análise de livros didáticos

Foram analisados livros didáticos usados em algumas escolas brasileiras: do ensino médio, as coleções de matemática, física, química e geografia e, do ensino fundamental (6º ao 9º ano), de matemática, geografia e ciências. O objetivo foi verificar a forma com que estes abordam os conteúdos que utilizam o conceito de proporcionalidade no seu desenvolvimento.

7.1 Ensino Fundamental

7.1.1 Matemática

Das coleções de livros de matemática do ensino fundamental, foram analisadas duas: Matemática Bianchini de Edwaldo Bianchini, da editora Moderna – 7ª edição – 2011 e Vontade de saber matemática de Joamir Roberto de Souza e Patricia Rosana Moreno Pataro, da editora FTD – 1ª edição - 2009.

Nos livros analisados foram identificados os conteúdos em que o conceito de proporcionalidade foi abordado, apresentando o seguinte resultado:

1. Matemática Comercial: Razões, proporções, grandezas proporcionais e porcentagem;
2. Função Polinomial do 1º grau;
3. Proporcionalidade na Geometria Plana.

Matemática Comercial

Os autores pesquisados trabalham a matemática comercial no livro do 7º ano do ensino fundamental, sendo que Souza [56] traz separado da matemática comercial a regra de três simples e composta, no livro do 8º ano, e juros simples, no livro do 9º ano.

Bianchini [6] define a razão entre dois números como o quociente entre os mesmos, diferencia razão entre grandezas de mesma natureza (Escala) e de naturezas diferentes (Densidade demográfica, Velocidade média, Gramatura de um papel e Consumo médio). Define proporção como a igualdade entre duas razões e, apresenta as propriedades das proporções, dando ênfase na propriedade fundamental das proporções. Aplica o conceito de proporção em alguns exemplos. Apresenta as grandezas diretamente proporcionais a partir de um exemplo e, depois generaliza o conceito de grandezas diretamente proporcionais, usando a mesma estratégia para as grandezas inversamente proporcionais. A regra de três simples é apresentada como resultado das definições de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, utilizando de exemplos para ilustrar. Na regra de três composta faz referência a regra de três simples e as definições de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, apresentando através de exemplos. A porcentagem se apresenta como a fração equivalente de denominador igual a 100. Os conceitos são apresentados através de exemplos, mas em nenhum momento é apresentado o porquê e as vantagens das escolhas feitas. Só se percebe os porquês e as vantagens após a leitura dos exemplos resolvidos, que são apresentados após as definições.

Souza [56] utiliza o conceito de grandezas diretamente e inversamente proporcionais para apresentar a regra de três simples e composta. Define juros simples sem relacioná-lo ao conceito de proporcionalidade e não relaciona o montante do juros simples a uma função linear.

Função polinomial do 1º grau

Os autores pesquisados trabalham a função polinomial do 1º grau no livro do 9º ano do ensino fundamental.

Bianchini [6] define função polinomial do 1º grau sendo toda função do tipo $y = ax+b$, com $a \neq 0$. Não faz referência a função linear, a taxa de variação e, portanto, não relaciona a proporcionalidade existente entre as grandezas x e y que se apresentam na função.

Souza [56] relaciona a função linear ao conceito de proporcionalidade e define a constante de proporcionalidade como o a da função $y = ax + b$.

Proporcionalidade na Geometria Plana

Os autores pesquisados trabalham a proporcionalidade na Geometria Plana no livro do 9º ano do ensino fundamental.

Bianchini [6] define a razão entre dois segmentos. Quando quatro segmentos apresentam, dois a dois, razões iguais, esses segmentos são chamados proporcionais. Dessa forma, define o teorema de Tales a partir do que já foi apresentado. Traz como consequência aplicação em triângulos semelhantes e conclui o teorema das bissetrizes internas. Usa a representação de uma foto original e a compara com a mesma foto reduzida e ampliada para conceituar figuras semelhantes. Com isso, ele mostra e define polígonos semelhantes destacando a razão de semelhança. Afirma que em figuras semelhantes a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança entre as figuras, sem nenhuma explicação. Assume a semelhança de triângulos demonstrando o teorema fundamental da semelhança. Demonstra os casos de semelhança de triângulos. Demonstra as relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência como resultado da semelhança de triângulos. Define seno, cosseno e tangente como a razão entre os lados de um triângulo retângulo.

Souza [56] define a razão entre dois segmentos e, quando a razão entre dois segmentos é igual à razão entre outros dois segmentos, afirma que eles são proporcionais. Enuncia o teorema de Tales mostrando os dois casos quando os segmentos são congruentes e quando eles são proporcionais. Aplica o teorema de Tales em triângulos. Não faz referência ao teorema das bissetrizes. Apresenta figuras semelhantes comparando figuras ampliadas e reduzidas. Define polígonos semelhantes destacando a razão de semelhança. Apresenta a Homotetia como recurso para ampliar ou reduzir uma figura. Assume a semelhança de triângulos e os casos de semelhança, sem demonstração, e não define a área de figuras semelhantes. As relações métricas no triângulo retângulo são demonstradas utilizando a semelhança de triângulos e com isso demonstra o teorema de Pitágoras. Não cita as relações métricas na circunferência. Define seno, cosseno e tangente como a razão entre os lados de um triângulo retângulo. Mostra que os valores de seno, cosseno e tangente não dependem das medidas dos lados do triângulo retângulo e sim dos seus ângulos, utilizando a semelhança de triângulos.

7.1.2 Geografia

Das coleções de livros de geografia do ensino fundamental foram analisadas quatro: Projeto Apoema geografia de Cláudia Magalhães ... [et al], Editora do Brasil – 1ª edição – 2013, Geografia sociedade e cotidiano de José Francisco Bigotto, Márcio Abondanza Vitiello e Maria Adailza Martins de Albuquerque, Editora Escala Educacional – 3ª edição – 2009, Expedições geográficas de Melhem Adas e Sérgio Adas, Editora Moderna – 1ª edição – 2011 e Geografia: homem e-simbolo espaço de Elian Alabi Lucci e Anselmo Lazaro Branco, Editora Saraiva – 22ª edição – 2010.

Nos livros de Geografia analisados verificou-se a utilização de conceitos relacionados à proporcionalidade nos seguintes conteúdos:

1. Escala;
2. Densidade demográfica.

Escala

O conteúdo escala é trabalhado nos livros do 6º ano do ensino fundamental.

Magalhães [36] e Lucci [35] apresentam a importância da escala na construção de mapas. Define escala dando ênfase à sua interpretação e à comparação entre elas. Não realiza cálculos envolvendo escalas.

Adas [1] e Bigotto [7] mostram a importância da representação de objetos em escala, em especial a construção de mapas. Define escala e faz comparações entre diferentes escalas utilizadas para representar a mesma região. Faz apenas cálculo simples que envolvam escalas.

Densidade demográfica

O conteúdo densidade demográfica é trabalhado nos livros do 7º ano do ensino fundamental.

Adas [1], Magalhães [36] e Bigotto [7] definem densidade demográfica, comparando e interpretando os seus resultados. Apresentam o cálculo da densidade demográfica em várias regiões do globo terrestre.

7.1.3 Ciências

Dentre as coleções de livros de ciências do ensino fundamental foram analisadas três: Companhia das ciências de João Usberco et al, Editora Saraiva – 1ª edição – 2011, Ciências, 9º ano: física e química de Carlos Barros e Wilson Roberto Paulino, Editora Ática – 61º edição – 2013 e Projeto Apoema ciências de Ana Paula Bemfeito e Carlos Eduardo Pinto, Editora do Brasil – 2013.

Considerando os livros de Ciências analisados, verificou-se a utilização de conceitos relacionados à proporcionalidade nos seguintes conteúdos:

1. Química: Lei das proporções definidas (Lei de Proust);
2. Física: Princípio da Conservação da Energia, Trabalho, Leis de Newton, Gravitação Universal, Máquinas Simples, Ótica, e Eletricidade.

Química

Usberco [60] enuncia a lei das proporções definidas: toda substância apresenta uma proporção em massa constante na sua composição, mas não relaciona o conceito de proporção àquilo que o aluno aprendeu na disciplina matemática.

Bemfeito [5] não cita a lei das proporções definidas.

Barros [4] enuncia a lei das proporções definidas ou lei das proporções constantes (lei de Proust) como, a proporção entre as massas dos reagentes que participam de uma reação química é constante e independe da quantidade dos reagentes colocada para reagir.

Física

Usberco [60] define energia cinética, energia potencial gravitacional e trabalho de uma força fazendo referência da relação existente entre as grandezas, sem citar de forma explicita a proporcionalidade. Enuncia a 1ª lei de Newton e faz referência à força peso e a inércia, mas não relaciona a proporcionalidade entre peso e massa. Define a 2ª lei de Newton como o principio da proporcionalidade e faz referência às relações de proporcionalidade entre as grandezas. Quando trata do assunto Gravitação volta a definir a força peso, relacionando a mesma com a massa e conclui que se trata de grandezas diretamente proporcionais. O autor, quando trata do assunto Ótica, estima o valor da medida da altura de uma haste a partir da medida da altura de uma árvore e de sua sombra, e da medida da sombra da haste usando o "Teorema de Tales", mas sem mencionar o mesmo.

Bemfeito [5] define a força peso sem relacionar a proporcionalidade entre as grandezas. Mas quando define a 1ª lei de Newton como a lei da inércia, afirma que a massa é proporcional a inércia de um corpo. Na gravitação, enuncia a lei da gravitação universal e relaciona a força da gravidade como a força diretamente proporcional às massas dos corpos envolvidos e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros de gravidade. No capítulo, Máquinas Simples, Trabalho e Energia, a autora "pede ajuda à Matemática" para concluir a equação das alavancas, mas o que se vê é que o autora simplesmente apresenta a equação. Ainda, no mesmo capítulo, define trabalho, energia cinética e potência sem relacionar a proporcionalidade existente entre suas grandezas, mas quando define a energia potencial gravitacional faz referência à proporção existente entre suas grandezas. No capítulo Eletricidade e Magnetismo os autores definem força elétrica como diretamente proporcional às cargas dos corpos que interagem e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, e a potência elétrica como diretamente proporcional à tensão e à corrente.

Barros [4] relaciona as equações da velocidade de um corpo e da aceleração com o gráfico de uma função, mas sem fazer referência a mesma, no caso da velocidade a define como o coeficiente angular da função linear, quando o móvel partiu do repouso, também sem citar o coeficiente angular. Enuncia a 2ª lei de Newton sem fazer referência a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas. No capítulo, A gravitação Universal, o autor define a lei da gravitação universal como: todos os corpos se atraem mutuamente na razão direta de suas massas e na razão inversa do quadrado de suas distâncias. Cita a dependência (proporcionalidade) entre a força peso e a massa de um corpo. Nos capítulos

Máquinas Simples e Trabalho e Energia Mecânica o autor define trabalho, energia, energia potencial gravitacional, energia cinética e potência sem relacionar a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas.

7.2 Ensino Médio

7.2.1 Matemática

Das coleções de livros de matemática do ensino médio foram analisadas oito: Matemática: ciência e aplicações de Gelson Iezzi e outros da editora Atual - 5ª edição – 2010, Matemática: contexto e aplicações de Luiz Roberto Dante da editora Ática – 5ª edição – 2011, Matemática uma nova abordagem de José Ruy Giovanni da editora FTD – 3ª edição – 2013, Matemática de Manoel Rodrigues Paiva da editora Moderna – 2ª edição – 2010, Matemática de Felipe Fugita e outros da editora SM (coleção ser protagonista) – 2009, Matemática: uma ciência para a vida de Antônio Carlos Rosso Jr e outros da editora HARBRA – 2011, Matemática: ensino médio de Kátia Cristina Stocco Smole e outros da editora Saraiva – 7ª edição – 2010 e Novo olhar Matemática de Joamir Roberto de Souza da editora FTD – 1ª edição – 2011. A escolha pelas coleções baseou-se na referência de cada uma das editoras, com exceção da editora FTD, onde foram escolhidas duas coleções. As coleções foram escolhidas sempre na versão dividida em três volumes, um para cada série do ensino médio, porque entendemos que as coleções em volume único podem não trazer alguns conceitos e exercícios, com textos mais pobres e supressão de alguns capítulos, devido à necessidade de que todo o conteúdo seja apresentado em um único volume. Nos livros analisados foi realizado um estudo para identificar em quais conteúdos aparecia o conceito de proporcionalidade, sendo observado nos seguintes temas:

1. Função Afim: no trato da função linear, da relação de proporcionalidade entre a variação das grandezas de uma função afim e o cálculo do coeficiente angular (inclinação da reta);

2. Progressão Aritmética: quando relacionamos uma progressão aritmética a uma função afim, e consequentemente, ao conceito de proporcionalidade;

3. Matemática Comercial: quando falamos de razão, proporção, divisão proporcional, grandezas diretamente e inversamente proporcionais, porcentagem, relação de proporcionalidade ente o tempo e o juros simples e o cálculo do montante no juros simples;

4. Geometria Plana: quando se aborda o teorema de Tales, teorema das bissetrizes, a semelhança de triângulos, semelhança de polígonos, cálculo de áreas de figuras

planas semelhantes, teorema de Pitágoras, relações métricas no triângulo retângulo e na circunferência e nas razões trigonométricas no triângulo retângulo;

5. Sólidos geométricos: quando se fala em sólidos semelhantes e no cálculo do tronco de pirâmide e tronco de cone.

6. Geometria Analítica: no cálculo da inclinação da reta, da mesma forma que já tinha sido feito na função afim. Lembrando que o assunto função afim é trabalhado no 1º ano, enquanto o assunto geometria analítica é trabalhado no 3º ano do ensino médio.

Função Afim

Todos os autores pesquisados trabalham a função afim no livro do 1º ano do ensino médio.

Iezzi [29] define função afim, a taxa de variação e função linear e mostra, usando semelhança de triângulos, que os pontos de uma função linear são pontos de uma única reta. Faz uma breve revisão de razão, proporção e grandezas diretamente proporcionais e relaciona o conceito de grandezas proporcionais a função linear.

Dante [19] define função afim, relaciona a taxa de variação, que é a velocidade com que a função cresce ou decresce, define função crescente ou decrescente, relaciona a função afim com a geometria analítica, relacionando a taxa de variação com o coeficiente angular e relaciona a ideia de que acréscimos iguais de x produzem acréscimos iguais em y, sem relacionar os fatos descritos com o conceito de proporcionalidade. No final do capítulo, apresenta uma seção onde relaciona a proporcionalidade à função linear, dando exemplos que relacionam os juros obtidos em função do tempo, diferenciando juro simples e juros compostos; o perímetro e a área do quadrado em função do lado, entre outros. Resolve exercícios de função linear usando regra de três simples e, define grandezas inversamente proporcionais como grandezas proporcionais ao inverso da taxa de variação.

Giovanni [26] define a função afim e o coeficiente angular sendo este a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas e, apresenta a função linear como $f(x) = ax$, afirmando que $f(x)$ e x são grandezas diretamente proporcionais e a é a constante de semelhança.

Paiva [40] define grandeza, grandezas diretamente e inversamente proporcionais e relaciona com os valores do gráfico de uma função linear, ainda sem definir função linear. Afirma que uma função, onde as variações de x e y são diretamente proporcionais, tem como gráfico uma reta e, generaliza o fato de que toda função afim tem como gráfico uma reta. Define função linear ($y = ax$) e afirma que os valores das variáveis x e y são sempre diretamente proporcionais e, que na função afim $y = ax + b$ as variações dos valores de x e y também são diretamente proporcionais, sendo a razão $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ a taxa de variação (coeficiente angular) da função afim. Usa esse resultado para definir retas paralelas e diferenciar função crescente de função decrescente.

Fugita [25] relaciona o conceito de função à proporcionalidade, diferenciando que o perímetro de um quadrado e o seu lado são proporcionais, enquanto que a área de um quadrado e o seu lado não são. Apresenta a proporção indireta e define a constante de proporcionalidade. Relaciona o conceito de proporcionalidade com a da função linear ($f(x) = ax$) e define a constante de proporcionalidade, taxa de variação da função afim ($a = \dfrac{f(x)}{x}$). Afirma que a função afim é a única função para os quais acréscimos iguais a x correspondem a acréscimos iguais a $f(x)$.

Rosso [47] define função de 1º grau como a relação entre duas grandezas em que a taxa de variação é constante. Demonstra o cálculo da taxa de variação e relaciona com o coeficiente angular. Define a função linear $y = ax$ e diz que as grandezas são diretamente proporcionais, quando $a > 0$. Compara equação da reta à função afim. No final do capítulo, o livro traz um texto sobre a história da matemática destacando os trabalhos do matemático francês Nicole Oresme (1323-1382) sobre as leis da natureza, onde ele usa o conceito de proporção entre duas grandezas para relacionar a velocidade de um corpo em queda livre e o tempo, apesar de Oresme não usar os conceitos de variáveis, variáveis dependentes e independentes, ele já usava, sem saber, o conceito de função afim.

Smole [53] mostra que o gráfico de uma função de 1º grau é uma reta utilizando semelhança de triângulos. Define função de 1º grau, não cita a função linear e, só faz referência a taxa de variação, quando prova que o gráfico da função de 1º grau é uma reta.

Souza [55] relaciona a função linear com a ideia de proporcionalidade utilizando exemplos. Não faz referência a proporcionalidade no estudo da função afim.

Progressão aritmética (P.A.)

Todos os livros dos autores avaliados trabalham a progressão aritmética no livro do 1º ano do ensino médio.

Iezzi [29] define sequência numérica como uma função de domínio no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}^* = 1, 2, 3, ...$, caso discreto. Relaciona a progressão aritmética à função afim, comparando os gráficos das mesmas. O autor faz a mesma relação para a progressão geométrica (P.G.) e a função exponencial.

Dante [19] caracteriza uma progressão aritmética, a partir da sua interpretação geométrica, como uma função afim com domínio definido no conjunto dos números naturais, onde a taxa de variação é dada pela razão da progressão.

Giovanni [26] define uma sequência numérica como uma função com o domínio definido no conjunto dos números naturais, $D = 1, 2, 3, 4, ..., n$ no caso da sequência finita e $D = \mathbb{N}^*$.

Paiva [40] define uma sequência como uma função com domínio no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}^*$. Relaciona o gráfico formado pelos termos de uma P.A. com uma função afim. Faz o mesmo para a P.G. em relação à função exponencial.

Fugita [25] relaciona a progressão aritmética à função afim em termos de sua representação geométrica. Dada uma P.A. de termos a_n, existe uma única função afim

$f(n) = a.n + b$, com $n \in \mathbb{N}^*$ de modo que $a_n = f(n)$. Da mesma forma, relaciona a progressão geométrica à função exponencial em termos de sua representação geométrica.

Rosso [47] define progressão aritmética sem relacioná-la com a função de 1º grau e com o conceito de proporcionalidade.

Smole [53] foge do tradicional quando apresenta os conteúdos de sequências numéricas, progressão aritmética e progressão geométrica, logo após os capítulos de função afim e função quadrática. Relaciona a sequência numérica a uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos, mas não cita a função afim e o conceito de proporcionalidade.

Souza [55] usa um exemplo para relacionar a progressão aritmética a uma função afim com domínio no conjunto dos números naturais e, relaciona o coeficiente angular a inclinação da reta, mas não cita o conceito de proporcionalidade. Faz o mesmo com a progressão geométrica e a função exponencial.

Matemática Comercial e Financeira

Iezzi [29] define juros simples e juros composto relacionando os montantes encontrados com as funções afim e exponencial, respectivamente.

Dante [19] revisa os conteúdos de razão, destacando algumas razões especiais, tais como a porcentagem, a escala e a densidade demográfica e, de proporção, destacando as grandezas diretamente e inversamente proporcionais, divisão proporcional, regra de três simples e composta. Define o fator de atualização como uma razão e, juros simples e compostos, relacionando o conceito de juros simples a uma função linear e, o de juros compostos a uma função exponencial.

Giovanni [26] define juros simples e juros compostos, não fazendo relação com função afim e com a função exponencial, respectivamente, e nem com os seus respectivos gráficos.

Paiva [40] introduz o capítulo de matemática financeira entre os capítulos de função modular e função exponencial, mas não relaciona o conceito de juros simples e juros compostos ao conceito de função.

Fugita [25] faz uma revisão da matemática comercial definindo proporção, números diretamente e inversamente proporcionais. Não relaciona o conceito de juros simples e juros compostos ao conceito de função.

Rosso [47] revisa os conceitos de razão, proporção e números proporcionais. Define taxa percentual e fator de correção como razões. Relaciona os juros simples a uma função linear, e o montante, com a função polinomial de 1º grau e também a uma progressão aritmética de razão igual ao juro. Compara os gráficos das funções juro e montante, e chega à conclusão que as retas formam o mesmo ângulo com o eixo das abscissas, portanto, possuem a mesma taxa de variação (coeficiente angular).

Smole [53] define juros simples e juros compostos. Relaciona apenas ao final do capítulo na seção "Para saber mais", os juros simples aos conceitos de função afim e progressão aritmética, e os juros compostos a função exponencial e a progressão geométrica.

Souza [55] define juros e montante nos casos dos juros serem simples ou compostos. Relaciona a expressão dos juros simples à função linear, a do montante dos juros simples à função afim e o montante dos juros compostos à função exponencial.

Os autores Smole [53] e Souza [55] inseriram o conteúdo matemática comercial nos livros do 3ª ano e 2º ano do ensino médio, respectivamente. Enquanto os demais autores trabalharam o capítulo no livro do 1º ano do ensino médio.

Geometria Plana e Trigonometria

Iezzi [29] apresenta, no livro do 1º ano, a razão de semelhança entre figuras, comparando regiões em dois mapas com escalas diferentes, duas figuras planas e dois sólidos. Define a semelhança de triângulos e mostra o teorema de Tales, apresentando os casos de semelhança de triângulos, destacando o teorema fundamental da semelhança. Ele demonstra as propriedades da base média de um triângulo, as relações métricas no triângulo retângulo, o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas no triângulo retângulo, como resultados de semelhança de triângulos. No livro do 2º ano, como consequência da semelhança de triângulos, demonstra a razão de semelhança entre as áreas como o quadrado da razão de semelhança entre os lados e, estende este resultado a todo par de figuras planas semelhantes.

Dante [19], no livro do 1º ano, define o teorema de Tales fazendo menção ao conceito de proporcionalidade e as propriedades das proporções e, a partir do teorema de Tales, demonstra o teorema da bissetriz interna, não citando o teorema da bissetriz externa. Define a semelhança de triângulos citando a constante de proporcionalidade e, não relaciona a semelhança de triângulo ao teorema de Tales. Em seguida mostra as relações métricas no triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras e, as relações métricas na circunferência. Define a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes como k^2, onde k é a constante de proporcionalidade. Mostra a razão para o quadrado e, admite ser válida para as outras figuras planas. Termina dizendo que no 2º volume o aluno irá encontrar a semelhança entre figuras sólidas, onde a razão entre os seus volumes será dada por k^3, onde k é a constante de proporcionalidade. Define as razões trigonométricas em um triângulo retângulo a partir da altura, do afastamento e do percurso de uma rampa. A tangente é a razão entre a altura e o afastamento, o seno a razão entre a altura e o percurso e o cosseno como a razão entre o afastamento pelo percurso. Usa a semelhança de triângulos para mostrar que os valores de seno, cosseno e tangente são únicos, independentes do tamanho dos lados do triângulo. No livro do 2º ano demonstra a lei dos senos, concluindo que em qualquer triângulo ABC as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Giovanni [26] relembra o conceito de razão e proporção antes de definir o teorema de Tales. Mostra, como consequência do teorema de Tales, a semelhança de triângulos no caso de um segmento paralelo a um dos lados de um triângulo. O conceito de semelhança é apresentado primeiro de forma geral, usando a ideia de escala, depois a semelhança em polígonos, mostrando a razão de semelhança e, por último a semelhança em triângulos é mostrada como um caso particular da semelhança entre polígonos. As relações métricas num triângulo retângulo são admitidas sem demonstração, apenas citando que elas são resultados da semelhança de triângulos. As razões trigonométricas são demonstradas usando semelhança de triângulos.

Paiva [40] define o teorema de Tales e a semelhança de triângulos sem relacioná-los, mostrando a razão de semelhança através da ideia de proporcionalidade. Demonstra as relações métricas em um triângulo retângulo usando a semelhança de triângulos. No livro do 1º ano assume as razões trigonométricas no triângulo retângulo sem demonstrá-las, já no livro do 2º ano, demonstra utilizando semelhança de triângulos. Demonstra a razão de semelhança entre as áreas de dois triângulos como a constante de semelhança ao quadrado e, generaliza esse fato para todas as figuras planas. Define a lei dos senos, e através dela, a área do triângulo em função do seno.

Fugita [25] define semelhança de triângulos sem fazer referência às grandezas proporcionais. O teorema de Tales aparece na seção "Para recordar". A seção "Saiba Mais" apresenta uma aplicação da semelhança de triângulos no entendimento do eclipse total do sol e, faz referência a Homotetia, usando o conceito de semelhança de triângulos. As relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo são apresentadas como resultado da semelhança de triângulos no livro do 1º ano, enquanto que no livro do 2º ano é feito uma revisão, onde se assume todos os resultados encontrados no livro do 1º ano. Na seção "Saiba mais" ele demonstra que a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, e assume esse resultado para todos os polígonos.

Rosso [47] apresenta no livro do 1º ano a semelhança de triângulos antes do teorema de Tales. Define triângulos semelhantes como triângulos que têm ângulos internos respectivamente congruentes entre si, e as medidas dos lados respectivamente proporcionais, chama a razão entre os lados correspondentes como constante de proporcionalidade ou razão de semelhança (k), e afirma que a razão entre as áreas é k^2, sem demonstração. Apresenta o teorema de Tales como resultado da semelhança de triângulos e demonstra as relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, e o teorema de Pitágoras como resultado de semelhança de triângulos. Mostra que os valores do seno, cosseno e tangente de um ângulo não depende das medidas dos lados do triângulo. No livro do 2º ano revisa razões trigonométricas da mesma forma que foi abordado no 1º ano. Define a lei dos Senos como a razão entre a medida de qualquer um dos lados, e o seno do ângulo oposto a esse lado é igual ao dobro da medida do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo, e apresenta a demonstração.

Smole [53], no livro do 1º ano, define o teorema de Tales relacionando ao conceito de grandezas diretamente proporcionais, e a partir dela, apresenta como consequência a semelhança de triângulos. Define as relações trigonométricas como resultado do teorema de Tales, mostrando que os valores do seno, cosseno e tangente independem das medidas dos lados do triângulo. A seção "Conexão" traz um texto que relaciona Matemática à Tecnologia: "A matemática da câmera fotográfica", que conta a evolução das máquinas fotográficas e as relações matemáticas que envolvem o tamanho da imagem obtida pela câmera. No livro do 2º ano faz uma revisão de semelhança de triângulos, relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo, e demonstra a partir do conceito de semelhança entre os lados de dois triângulos, a razão de semelhança entre as áreas dos mesmos.

Souza [55] define, no livro do 1º ano, o teorema de Tales, contando a história da medição da altura da pirâmide do Egito. Define as razões trigonométricas a partir da semelhança de ângulos usando um caso particular, e mostrando o caso geral. No livro do 2º ano relaciona a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes como sendo o quadrado da razão de semelhança entre os triângulos. Com isso, ele conclui que essa relação vale para qualquer polígono.

Os autores pesquisados trabalham os assuntos: geometria plana e trigonometria nos livros do 1º e 2º ano do ensino médio.

Sólidos Geométricos

Iezzi [29] demonstra que duas pirâmides de mesmas bases e mesmas alturas têm volumes iguais usando o principio de Cavaliere e a razão de semelhança entre sólidos, apesar de só apresentar a semelhança de sólidos nos capítulos seguintes. Conclui a fórmula do volume da pirâmide dividindo um prisma em três pirâmides de mesma base e altura. Define sólidos semelhantes fazendo a comparação entre dois cubos, dois cilindros e dois paralelepípedos semelhantes, mostrando que a razão entre segmentos correspondentes (homólogos) é constante, e generaliza essa propriedade para qualquer par de sólidos semelhantes. Define duas pirâmides semelhantes a partir da interseção de um plano paralelo à base da pirâmide, que assim forma dois sólidos: uma pirâmide pequena semelhante à pirâmide original e um tronco de cone. Relaciona às medidas de comprimento correspondente entre as duas pirâmides semelhantes, e chama a sua razão de constante de semelhança. Prova que a razão entre as áreas correspondentes dessas duas pirâmides é a constante de semelhança ao quadrado, e a razão entre seus volumes é a constante ao cubo. Dessa forma, chega à fórmula da área total e do volume do tronco de pirâmide, sendo a demonstração apresentada no apêndice. Usa o mesmo procedimento na pirâmide para demonstrar a fórmula do volume do cone, as relações entre dois cones semelhantes e as fórmulas do tronco de cone. Demonstra as fórmulas de área usando o conceito de semelhança de triângulos.

Dante [19] usa o conceito de figuras geométricas semelhantes para provar que a razão entre os volumes de dois cubos é k^3, onde k é a razão entre suas grandezas lineares. Com isso, ele extrapola o conceito para um sólido qualquer. Fazendo uso do conceito de semelhança de figuras geométricas e o principio de Cavalieri, prova que pirâmides de mesma base e altura possuem volumes iguais. Usa os mesmos argumentos para a pirâmide, no caso do cone.

Giovanni [26] define tronco de pirâmide destacando as duas pirâmides, original e a que não faz parte do tronco, afirmando que as arestas dessas pirâmides são proporcionais. Dessa forma, conclui que a razão de semelhança é a razão entre as medidas de dois segmentos correspondentes, e a relaciona com a razão de semelhança entre áreas e volumes. Mostra o volume do tronco de pirâmide usando as relações encontradas na semelhança. No cone usa a semelhança de triângulos para calcular a área lateral do tronco do cone, e usa procedimento análogo ao que usou na pirâmide para mostrar o volume.

Paiva [40] usa semelhança de polígonos e o principio de Cavalieri para demonstrar o volume de uma pirâmide, e mostra que três pirâmides de mesma base e altura formam um prisma. Definem pirâmides semelhantes a partir de um plano paralelo a base de uma pirâmide, mostrando que a razão correspondente entre os comprimentos é constante, e que a razão entre as áreas e os volumes correspondentes é igual à razão de semelhança ao quadrado e ao cubo, respectivamente. Dessa forma, define e calcula o volume do tronco da pirâmide como o volume da pirâmide maior menos o volume da pirâmide menor, sem apresentar a fórmula do volume do tronco. Utiliza semelhança de triângulos para demonstrar que a razão entre as áreas de dois cones semelhantes é dada pelo quadrado da razão entre os raios da base. Com isso, e usando o principio de Cavalieri, mostra que o volume do cone é igual ao volume da pirâmide, demonstrando a fórmula do volume do cone. Define o tronco de cone e usa o conceito de semelhança de sólidos para mostrar que a razão entre os volumes é o cubo da razão semelhança.

Fujita [25] usa a razão de semelhança entre as áreas, o principio de Cavalieri e o fato de que se pode dividir um prisma em três pirâmides de mesma área da base e altura do prisma para demonstrar a fórmula do volume de uma pirâmide (a demonstração feita é confusa). Assume a fórmula da área e volume do cone sem demonstração. Demonstra a fórmula do volume do cone usando a semelhança de triângulos, o principio de Cavalieri e comparando com a pirâmide. Omite os seguintes assuntos: tronco de cone, tronco de pirâmide e a semelhança de sólidos.

Rosso [47] demonstra que uma secção de uma pirâmide paralela à base determina um polígono semelhante ao polígono da base. Afirma, então, que as pirâmides formadas são semelhantes. No cálculo do tronco da pirâmide, não deixa claro as relações de semelhança entre as pirâmides. Repete, de forma mais clara, o procedimento no caso do cone.

Smole [53] demonstra, utilizando a semelhança de triângulos e o principio de Cavalieri, a fórmula do volume de uma pirâmide. Define tronco de pirâmide e pirâmides semelhantes sem nenhuma demonstração, e afirma que a razão entre os elementos lineares é k, a razão entre as áreas correspondentes é k^2 e entre seus volumes k^3. Analogicamente faz o mesmo para o cone. No cone, demonstra a área da superfície lateral e a área total do tronco usando o conceito de semelhança.

Souza [55] usa a razão de semelhança entre as áreas, o principio de Cavalieri e o fato de que se pode dividir um prisma em três pirâmides de mesma área da base e altura do prisma para demonstrar, de forma confusa, a fórmula de volume de uma pirâmide. Assume, sem demonstrar, a fórmula da área e volume do tronco de pirâmide. Faz uma analogia com o que foi feito para a pirâmide, para assumir a fórmula do volume do cone. Calcula o volume do tronco do cone como sendo a diferença entre os volumes de dois cones semelhantes, sem apresentar a demonstração.

Geometria Analítica

Todos os livros dos autores analisados trabalham a progressão aritmética no livro do 2º ano do ensino médio.

Iezzi [29] mostra a condição de alinhamento de três pontos como resultado da semelhança de triângulos. Define o coeficiente angular de uma reta, e demonstra que ele é dado pela tangente do ângulo formado pela reta com o eixo das abscissas, utilizando razões trigonométricas no triângulo retângulo. Mostra que a tangente é dada pela razão entre a variação do y pela variação do x. Relaciona a equação da reta com a função afim $f(x) = ax + b$, com a $\mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$. Mostra o paralelismo e o perpendicularismo entre retas utilizando o coeficiente angular.

Dante [19] usa o teorema de Tales para demonstrar as coordenadas do ponto médio de um segmento e a condição de alinhamento de três pontos. Relaciona o conceito da função do 1º grau com a equação da reta. Apresenta um texto complementar que relaciona as leis de Kepler, com os conceitos de elipse e as proporções.

Giovanni [26] define a condição de alinhamento de três pontos utilizando a semelhança de triângulos. Mostra o coeficiente angular como a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas. Não faz referência da relação entre a equação da reta e a função afim. Mostra a posição relativa entre retas de duas formas: discutindo as soluções do sistema formado pelas equações e através do coeficiente angular.

Paiva [40] define coeficiente angular como a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas, e mostra que pode ser calculado pela razão entre a variação do x ($\triangle x$) e a variação do y ($\triangle y$). Não relaciona a equação da reta com a função afim. Interpreta o coeficiente angular como taxa de variação. Mostra que três pontos A, B e C estão alinhados quando os coeficientes angulares das retas AB e BC são iguais. Usa o coeficiente angular para diferenciar retas paralelas de retas concorrentes.

Fugita [25] utiliza o teorema de Tales para demonstrar a condição de alinhamento de três pontos. Define o coeficiente angular de uma reta como a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas. Mostra a posição relativa entre retas através do coeficiente angular da reta. Não relaciona a equação da reta com a função afim.

Rosso [47] demonstra a condição de alinhamento de três pontos e as coordenadas do ponto médio de um segmento através de semelhança de triângulos (proporcionalidade).

Smole [53] usa semelhança de triângulos para demonstrar o critério de condição de alinhamento de três pontos. O autor demonstra a posição relativa entre retas usando as soluções de um sistema linear, e não cita o coeficiente angular (inclinação da reta). Demonstra o coeficiente angular usando razão trigonométrica no triângulo retângulo, e então, ele novamente define a posição relativa entre retas, agora usando o conceito de coeficiente angular.

Souza [55] mostra a condição de alinhamento de três pontos como resultado do teorema de Tales. Calcula o coeficiente angular de uma reta como a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas. Relaciona a equação da reta com a função afim, mas não diz nada sobre a ideia de proporcionalidade. Mostra a posição relativa entre retas usando o coeficiente angular.

7.2.2 Geografia

Das coleções de livros de geografia do ensino médio foram analisadas três: Geografia de Nelson Bacic Olic, Angela Corrêa da Silva e Ruy Lozano – Volume único, Editora Moderna – 1ª edição – 2012, Geografia Geral e do Brasil de Marcos de Amorim Coelho e Lygia Terra – Volume único, Editora Moderna – 1ª edição – 2003, Geografia coleção ser Protagonista coordenadores: Fernando dos Santos Sampaio e Ivone Silveira Sucena – Volume único, Editora SM – 1ª edição – 2010.

Observou-se a utlização de conceitos de proporcionalidade em:

1. Escala;

2. Densidade demográfica.

Escala e Densidade Demográfica

Olic [39] define escala como a proporção em que um mapa foi traçado em relação ao objeto real (o mundo ou parte dele), ou seja, quantas vezes o tamanho verdadeiro teve de ser reduzido para poder ser representado no papel. O autor assume a densidade demográfica como um conhecimento já conhecido.

Coelho [17] define escala como a relação entre a distância ou o comprimento no mapa e a distância real correspondente na Terra e, escala numérica como a fração ou proporção que estabelece a relação entre a distância gráfica, ou seja, a distância ou o comprimento no mapa, e a distância correspondente no terreno. A densidade demográfica ou população relativa é apresentada como a média de habitantes por quilômetro quadrado, ou seja, a concentração de habitantes em uma área.

Sampaio [49] define escala como o grau de detalhamento do mapa, quanto menor a escala implica em um maior detalhamento. A densidade demográfica indica a quantidade de pessoas que habitam determinada área e, é obtida dividindo-se o número de habitantes pela extensão territorial de uma região.

Nos três livros analisados percebe-se uma maior preocupação com a aplicação e o significado da escala e da densidade demográfica em detrimento ao cálculo das mesmas. Nos assuntos que se seguem, a ênfase é dada sempre na interpretação e análise, e não, no cálculo da escala e da densidade demográfica.

7.2.3 Física

Das coleções de livros de física do ensino médio foram analisadas três: Os Fundamentos da Física de Francisco Ramalho Junior, Nicolau Gilberto Ferraro e Paulo Antônio de Toledo Soares – Volumes 1 e 2, Editora Moderna – 10ª edição – 2009, Física de Djalma Nunes "Paraná" – Volumes 1 e 2, Editora Ática – 3ª edição – 1994 e Física de Gualter José Biscuola e André Cury Maiali – Volume único, Editora Saraiva – 1ª edição – 1996.

Os conceitos de proporcionalidade foram verificados:

1. No 1º ano: Cinemática, Leis de Newton, Princípios de conservação de energia, Gravitação Universal e Hidrostática;

2. No 2º ano: Lei geral dos gases, Termodinâmica e Ondulatória.

Ramalho [46] relaciona, no livro do 1º ano, o gráfico de posição em função do tempo, no movimento uniforme, e da velocidade em função do tempo, no movimento uniformemente variado, com o gráfico de uma função afim e com o gráfico de um função linear, respectivamente. Define a 2ª Lei de Newton relacionando a força e aceleração como grandezas diretamente proporcionais. Relaciona como grandezas diretamente proporcionais a força de atrito e a força normal, a força elástica e a deformação da mola (Lei de Hooke), o quadrado do período e o cubo do raio médio (Terceira Lei de Kepler) e a pressão e a área de contato. Define força gravitacional como diretamente proporcional as massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. No livro do 2º ano , Ramalho [46] ao apresentar as expressões matemáticas que descrevem os fenômenos físicos destaca nessas relações quais são as grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

No livro do 1º ano, Paraná [41] destina o primeiro capítulo do livro à matemática, fazendo uma revisão de gráficos, funções e escala, conteúdos que fazem parte do currículo básico do ensino fundamental da disciplina matemática. Na unidade que trata da cinemática escalar o autor relaciona os gráficos de deslocamento em função do tempo e, velocidade em função do tempo, do movimento uniforme, e dos gráficos de velocidade em função do tempo e, aceleração em função do tempo, para o movimento uniformemente variado. O autor interpreta esses gráficos em função dos conceitos físicos envolvidos e das equações das funções de 1º grau que os representa. Define a 2ª Lei de Newton e chega a conclusão que a resultante das forças e a aceleração são grandezas diretamente proporcionais. No capítulo, Princípios da Conservação da Energia e da Quantidade de Movimento, o autor define as energias cinética, potencial gravitacional e elástica sem relacionar a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, exceto quando relaciona a energia elástica com a deformação que a mola sofre. Nos capítulos, Gravitação Universal e Hidrostática, o autor não faz nenhuma referência a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas. No livro do 2º ano, no capítulo Propriedade Térmica dos Gases, apresenta as transformações analisando a proporcionalidade entre pressão e temperatura, volume e pressão, e temperatura e volume. No capítulo que trata da Termodinâmica, relaciona a quantidade de calor trocada com as fontes térmicas e às respectivas temperaturas absolutas das fontes como grandezas diretamente proporcionais. No Capítulo Ondulatória, o autor afirma a partir da Lei de Hooke que existe uma proporcionalidade direta entre a intensidade da força que atua num corpo e a deformação que ela provoca. Também relaciona a proporcionalidade entre o comprimento de onda e a frequência.

Biscuola [8] na unidade Cinemática Escalar relaciona a equação do movimento a uma função afim interpretando o seu gráfico fisicamente. Na unidade que trata da Dinâmica o autor define a 2ª Lei de Newton como a proporcionalidade entre a resultante das forças que atuam em um corpo e a aceleração. Pela Lei de Hooke apresenta a proporcionalidade entre a força elástica e a deformação provocada em uma mola. Na unidade Gravitação, a força gravitacional é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância, afirma que o quociente entre o cubo do semieixo maior da elipse pelo quadrado do período de translação ou ano é constante para todos os planetas do Sistema Solar (3ª Lei de Kepler). Na unidade Mecânica, o autor define energia, energia cinética, energia potencial gravitacional, energia elástica, trabalho e potência sem relacionar as relações de proporcionalidade entre suas grandezas. Não relaciona a proporcionalidade existente entre a pressão e a área. Na unidade Termologia relaciona a equação geral dos gases analisando a proporcionalidade existente entre a pressão e o volume, a pressão e a temperatura e o volume e a temperatura.

7.2.4 Química

Das coleções de livros de química do ensino médio foram analisadas duas: Química na abordagem do cotidiano de Francisco Miragaia Peruzzo (Tito) e Eduardo Leite do Canto – Volume único, Editora Moderna – 4ª edição – 2006 e Química: química geral de João Usberco e Edgard Salvador – Volume 1, Editora Saraiva – 14ª edição reform. – 2009.

Os conceitos de proporcionalidade foram observados em:

1. Lei das Proporções Constantes (Lei de Proust);
2. Cálculo Estequiométrico;
3. Lei Geral dos gases.

Peruzzo (Tito) [44] enuncia a lei das proporções constantes (Lei de Proust) que diz que a proporção dos elementos que compõem uma substância composta é constante. No cálculo estequiométrico o autor apresenta a regra de três simples como ferramenta para a resolução dos exercícios, sem apresentar justificativa para a escolha. No capítulo seguinte, o livro traz considerações matemáticas sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais que são usadas no estudo do comportamento físico dos gases na relação de proporcionalidade entre pressão e volume, temperatura e volume e pressão e volume.

Usberco [59] enuncia a lei das proporções definidas (Lei de Proust) que diz que toda substância apresenta uma proporção em massa constante na sua composição. Apresenta a regra de três simples como a principal ferramenta do Cálculo Estequiométrico. No capítulo que trata da Lei Geral dos Gases o autor relaciona a proporcionalidade direta ou indireta das relações entre pressão e temperatura, pressão e volume e volume e temperatura.

7.3 Análise dos levantamentos realizados

Nos livros analisados de matemática, geografia e ciências do ensino fundamental e matemática, geografia, química e física do ensino médio pode-se concluir que os autores, em nenhum momento, fazem referência da relação existente entre os conteúdos apresentados em uma disciplina com as demais.

O que faz com que conteúdos como densidade demográfica e grandezas diretamente e inversamente proporcionais sejam vistos em duas disciplinas, com duas abordagens diferentes, como se fosse um novo conteúdo. Tal fato acontece em diversos momentos nos livros analisados.

Não existe uma interlocução entre as disciplinas no que diz respeito ao que se ensina e quando se ensina, fazendo com que o aluno seja apresentado à razão no 6º ano do ensino fundamental, na disciplina geografia, e só aprenda seu conceito e suas propriedades, no 7º ano do ensino fundamental, por exemplo.

Capítulo 8

Proposta de uma sequência didática para o ensino da proporcionalidade na educação básica

Apresento uma proposta de sequência didática para o ensino da proporcionalidade usando a interdisciplinaridade como eixo central. Para montar a estrutura da sequência didática usei à estrutura proposta por Antoni Zabala no livro "A Prática Educativa: como ensinar" [61]. Essa proposta didática apresenta a seguinte estrutura:

1. Apresentação, por parte do professor, de uma situação problemática.
O professor expõe aos alunos uma situação conflitante que pode ser solucionada por meios matemáticos.

2. Busca de soluções.
O professor pede aos alunos que exponham diferentes formas de resolver o problema ou a situação.

3. Exposição do conceito e o algoritmo.
O professor aproveita as propostas dos alunos para elaborar o novo conceito e ensinar o modelo de algoritmo.

4. Generalização.
O professor demonstra, sempre que possível, a função do modelo conceitual e o algoritmo em todas aquelas situações que cumprem determinadas condições.

5. Correlação com outras disciplinas
O professor de matemática, com o auxilio dos professores de outras disciplinas, aplica o conceito matemático nessas disciplinas, dando assim aplicação ao conceito. Os professores das outras disciplinas aproveitam o momento para apresentar os seus conteúdos. (Este item não se encontra na proposta de Zabala [61] e foi incluindo pelo autor desse trabalho).

6. **Aplicação.**
Os alunos, individualmente, aplicam o modelo a diversas situações.

7. **Exercitação.**
Os alunos realizam exercícios do uso do algoritmo.

8. **Prova ou exame.**
Em classe, todos os alunos respondem às perguntas e fazem os exercícios do exame durante uma hora.

9. **Avaliação.**
O professor comunica aos alunos os resultados obtidos.

A sequência começa sempre com uma problematização sobre o conteúdo que será introduzido. A partir dos comentários e soluções propostas pelos alunos, com a ajuda do(a) professor(a), chegar-se-á às soluções dos problemas e, num segundo momento, propor-se-á generalização do conceito(s) usado. Depois, serão apresentadas as definições e suas consequências, que serão demonstradas sempre que se achar que trará benefícios pedagógicos para o aprendizado. Dessa forma, aplicamos os conceitos em outras disciplinas, trabalhando simultaneamente com os conteúdos matemáticos. Neste momento, sempre que possível, os (as) professores (as) da(s) outra(s) disciplina(s) devem estar presentes ou trabalhando esses conceitos em suas disciplinas. No próximo passo, sugere-se uma lista de exercícios para os alunos, com o objetivo de fixar os conceitos. Os exercícios serão selecionados a partir dos livros didáticos citados na bibliografia e dos principais vestibulares do país. O último passo é a avaliação, com o posterior comunicado dos resultados aos alunos. Esta sequência didática não foi aplicada em uma classe regular de ensino. Assume-se o compromisso de continuar o desenvolvimento da proposta didática e aplicá-la em uma sala de aula regular, apresentando os resultados em um próximo trabalho. A proposta tem como eixo central a disciplina Matemática, sendo que as outras disciplinas irão aparecer no decorrer da proposta sempre que for pertinente trabalhar os conceitos interdisciplinares. A sequência didática proposta será no formato de espiral, isto é, utilizando dos conceitos anteriores para a definição e apresentação de novos conceitos. A proposta didática pode ser desenvolvida na totalidade ou em partes em todos os anos do Ensino Fundamental e Médio, sendo necessário fazer as adaptações para cada ano de ensino relacionando os conteúdos de acordo com o que se preconiza nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [10] e o Currículo Básico Comum do estado de Minas Gerais (CBC-MG) [16].

Durante toda a sequência didática serão feitas observações e considerações a respeito do que se espera do entendimento do aluno, das intervenções que o professor deve fazer e dos resultados esperados.

8.1 Razão

Problematização:

1) Qual é mais vantajoso, uma pessoa adquirir um pacote de biscoitos de 200 g a um preço de R$ $2,00$ ou um outro pacote, do mesmo biscoito, de 500 g, ao preço de R$ $4,00$?

A partir das respostas dos alunos o professor deve orientá-los a concluir que ao dividirmos o preço do pacote de biscoitos pela quantidade, poderemos comparar qual dos dois é mais vantajoso para o consumidor. Provavelmente alguns alunos chegarão à mesma conclusão.

2) Qual dos veículos é o mais "rápido", o que percorre 100 km em 2 horas ou o que percorre 500 km em 5 horas?

A partir das respostas dos alunos o professor deve orientá-los a concluir que ao dividir as grandezas distância e tempo, pode-se comparar qual dos dois veículos é o mais "rápido", neste momento o professor deve introduzir o conceito de velocidade. Provavelmente alguns alunos chegarão à mesma conclusão.

3) Qual cidade é mais povoada, a cidade de Ipatinga-MG, que possui cerca de 250.000 habitantes distribuídos em uma área de $156,25\ km^2$ ou a cidade de Juiz de Fora-MG, que possui cerca de 525.000 habitantes distribuídos em uma área de $1500\ km^2$?

A partir das respostas dos alunos o professor deve orientá-los a concluir que a divisão do número de habitantes pela área possibilitará a comparação de qual cidade é mais populosa, neste momento o professor deve concluir o conceito de densidade demográfica. Provavelmente alguns alunos chegarão à mesma conclusão.

Após a aula da disciplina Matemática ou mesmo durante ela os professores de Ciências e Geografia devem trabalhar os conceitos de velocidade, densidade demográfica e escala, e apresentar em suas aulas a Matemática como ferramenta para o aprendizado na sua disciplina. Visto isso, o professor deduz com os alunos a necessidade de dividir duas grandezas para que se possam fazer comparações entre características de alguns objetos. Neste momento o professor introduz o conceito de razão e destaca algumas razões especiais que serão, de preferência, objeto de estudo em outras disciplinas (Ciências e Geografia) no mesmo ano e ciclo de estudo.

8.1.1 Razão

Definição 8.1. *A razão entre dois números racionais a e b é o quociente $a : b$ ou $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$. A razão inversa de $a : b$ é $b : a$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.*

O número a é chamado de antecedente e b chamado consequente. Quando a e b representarem medidas, elas devem ser representadas na mesma unidade.

Exercícios

1) Em um concurso, participaram 2.400 candidatos para 120 vagas. A razão entre o número de vagas e o número de candidatos foi
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{20}$
c) $\frac{1}{200}$
d) $\frac{1}{2.000}$

2) (ULBRA-RS) Água e tinta estão misturadas na razão de 9 para 5. Sabendo-se que há 81 litros de água na mistura, o volume total em litros é de
a) 45
b) 81
c) 85
d) 181
e) 126

3) (UFBA) 60 das 520 galinhas de um aviário NÃO foram vacinadas, morreram 92 galinhas vacinadas. Para as galinhas vacinadas, a razão entre o número de mortas e vivas é
a) $1 : 4$
b) $1 : 5$
c) $4 : 1$
d) $4 : 5$

4) (ENEM) Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição? A decisão parece simples, porém deve-se

levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

a) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II $\frac{2}{3}$ dos chutes.

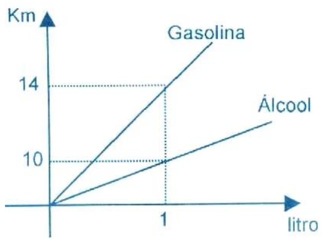
b) O jogador I, porque acertou $\frac{4}{3}$ dos chutes, enquanto o jogador II $\frac{2}{3}$ dos chutes.

c) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II $\frac{3}{2}$ dos chutes.

d) O jogador I, porque acertou $\frac{12}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II $\frac{2}{3}$ dos chutes.

e) O jogador I, porque acertou $\frac{9}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II $\frac{2}{5}$ dos chutes.

5) (UERJ) Analise o gráfico e a tabela:



Combustível	Preço por litro (em reais)
Gasolina	1,50
Álcool	0,75

Figura 8.1: UERJ

De acordo com esses dados, a razão entre o custo do consumo, por km, dos carros a álcool e a gasolina é igual a

a) $\frac{4}{7}$

b) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{7}{8}$

d) $\frac{7}{10}$

6) (UFMG) A diferença entre os quadrados de dois números naturais é 144, e a razão entre eles é $\frac{3}{5}$. A soma desses números naturais é

a) 16
b) 24
c) 30
d) 34

8.1.2 Razões especiais

Velocidade Média(V)

A velocidade é a razão entre a distância percorrida(d) e o intervalo de tempo(t). A velocidade média será sempre acompanhada de uma unidade, que depende das unidades escolhidas para calcular distância e tempo.

$$\mathrm{V} = \frac{d}{t}$$

Disciplina: Física

A velocidade média é a relação da variação da posição no espaço em relação ao tempo, isto é, a distância percorrida em um determinado intervalo de tempo. A velocidade é uma grandeza vetorial, então possui direção, sentido e módulo. O módulo da velocidade é a medida da rapidez de um corpo. Ramalho [46].

Exercícios

1) A distância entre São Paulo e Rio de Janeiro é de aproximadamente 400 km. Qual é a velocidade média de um ônibus que faz esse percurso em 6 horas e 30 minutos?

2) (ENEM) As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador, e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente
a) 16 horas.
b) 20 horas.
c) 25 horas.
d) 32 horas.
e) 36 horas.

3) (UFRN) Um móvel passa pela posição $S_1 = 20$ m no tempo $t_1 = 5$ s e pela posição $S_2 = 60$ m no tempo $t_2 = 10$ s. Quais são, respectivamente, os valores do deslocamento e da velocidade média do móvel entre os instantes t_1 e t_2?
a) 40 m e 8 m/s.
b) 60 m e 10 m/s.
c) 60 m e 8 m/s.
d) 40 m e 8 m/s.
e) 50 m e 8 m/s.

4) (UNESP) Há 500 anos Cristóvão Colombo partiu das Ilhas Canárias e chegou às Ilhas Bahamas após navegar cerca de 3000 milhas marítimas (5556 km) durante 33 dias. Considerando que um dia tem 86400 segundos, a velocidade média da travessia oceânica foi, aproximadamente
a) $2 \cdot 10^{-2}$ m/s
b) $2 \cdot 10^{-1}$ m/s
c) $2 \cdot 10^{0}$ m/s
d) $2 \cdot 10^{1}$ m/s

5) (UFBA) Um ônibus faz o trajeto entre duas cidades em duas etapas. Na primeira, percorre uma distância de 150 km em 90 min. Na segunda, percorre 220 km em 150 min. A velocidade média do ônibus durante toda a viagem é de
a) $1,6$ km/h.
b) $64,0$ km/h.
c) $92,5$ km/h.
d) $94,0$ km/h.
e) $185,0$ km/h.

6) (UEL-PR) Um trem de 200 m de comprimento, com velocidade escalar constante de 60 km/h, gasta 36 s para atravessar completamente uma ponte. A extensão da ponte, em metros, é de
a) 200.
b) 400.
c) 500.
d) 600.
e) 800.

Escala(E)

A escala é a razão ente a distância no mapa(d) e a distância real(D).

$$\mathrm{E} = \frac{d}{D}$$

Disciplina: Geografia

O mapa é uma das mais antigas formas gráficas de comunicação, precedendo a própria escrita. Os mapas primitivos eram gravados em pedra ou argila. Depois passaram a ser desenhados em tecidos, couro, pergaminho ou papiro. Com a invenção da imprensa, começaram a ser feitos em originais de pedra ou metal e em seguida impressos em papel. Hoje, são produzidos em computador e podem ser analisados diretamente na tela.

O espaço geográfico é muito complexo sendo necessário priorizar algumas informações em detrimento de outras quando confeccionamos um mapa. Seria impossível representar todos os elementos – físicos, econômicos, humanos e políticos – num único mapa. Seu objetivo fundamental é o de permitir o registro e a localização dos elementos cartografados e facilitar a orientação no espaço geográfico. Portanto, qualquer mapa será sempre uma simplificação da realidade para atender ao interesse do usuário. Para representar sobre uma folha de papel uma área extensa, como um continente, é necessário fazer uma grande redução. Para representar uma área pequena, é suficiente uma redução menor. A escala de um mapa é a relação de redução utilizada para representar as distâncias da superfície.

Uma escala numérica (conceito matemático) é expressa através de dois números. O primeiro, chamado numerador, é sempre o número 1 (indicando a unidade). O segundo, chamado denominador, varia de mapa para mapa, indicando o número de vezes que a região foi reduzida no mapa. Quanto maior o denominador, menor é a escala do mapa.

1 : 100 (reduz 100 vezes)

1 : 100.000 (reduz 100 mil vezes)

Os mapas em grande escala, até 1 : 20.000, são chamados plantas. As plantas são usadas por engenheiros e arquitetos, no projeto de casas ou edifícios, por guias de viagens para mostrar roteiros turísticos, por prefeituras interessadas em representar bairros ou áreas especiais das cidades.

Os mapas em pequena escala servem a outras finalidades, como representar cidades inteiras, grandes regiões, países ou continentes. Quando menor é a escala, mais reduzimos os objetos.

Além da escala numérica citada, também temos a escala gráfica, representada por uma linha reta dividida em partes, imitando uma régua. A escala gráfica indica, diretamente, as distâncias verdadeiras na superfície. Este tipo de escala é, apenas, um outro modo de fornecer a mesma informação que aparece na escala numérica. Mas ele é bastante útil, pois dispensa cálculos demorados.

Exercícios

1) (UFRGS) Se a escala de um mapa é 5 por 2.500.000 e dois pontos no mapa estão à distância de 25 cm, ao longo de uma rodovia, a distância real em km é

a) 100.

b) 125.

c) 150.

d) 200.

e) 250.

2) (ENEM)

> No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".

Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente $2,1$ cm. Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?
a) 1 : 20
b) 1 : 100
c) 1 : 200
d) 1 : 1.000
e) 1 : 2.000

3)(UFES)

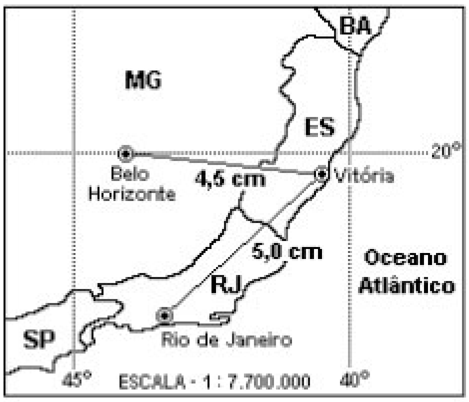


Figura 8.2: UFES

Interpretando a ilustração anterior, concluímos que a distância, em linha reta, entre Vitória e Belo Horizonte e entre Vitória e Rio de Janeiro é respectivamente, de
a) $300,7$ km e $401,6$ km.
b) $346,5$ km e $385,0$ km.
c) $346,5$ km e $400,0$ km.
d) $450,0$ km e $500,0$ km.
e) $600,0$ km e $650,0$ km.

4) (ENEM) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 200 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de
a) 1 : 250.
b) 1 : 2.500.
c) 1 : 25.000.
d) 1 : 250.000.
e) 1 : 25.000.000.

5) (ENEM) As Olimpíadas de 2016 serão realizadas na cidade do Rio de Janeiro. Uma das modalidades que trazem esperanças de medalhas para o Brasil é a natação. Aliás, a piscina olímpica merece uma atenção especial devido as suas dimensões. Piscinas olímpicas têm 50 metros de comprimento por 25 metros de largura. Se a piscina olímpica fosse representada em uma escala de 1 : 100, ela ficaria com as medidas de
a) $0,5$ centímetro de comprimento e $0,25$ centímetro de largura.
b) 5 centímetros de comprimento e $2,5$ centímetros de largura.
c) 50 centímetros de comprimento e 25 centímetros de largura.
d) 500 centímetros de comprimento e 250 centímetros de largura.
e) 200 centímetros de comprimento e 400 centímetros de largura.

6) (ENEM) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250. Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?
a) $4,8$ e $11,2$
b) $7,0$ e $3,0$
c) $11,2$ e $4,8$
d) $28,0$ e $12,0$
e) $30,0$ e $70,0$

7) (ENEM) A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1 : 150.

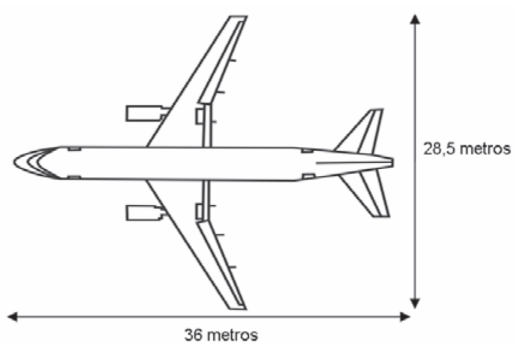


Figura 8.3: ENEM

Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?
a) $2,9$ cm por $3,4$ cm.
b) $3,9$ cm por $4,4$ cm.
c) 20 cm por 25 cm.
d) 21 cm por 26 cm.
e) 192 cm por 242 cm.

8) (ENEM) A escala é um importante recurso para as representações de objetos e espaços semelhantes aos reais. Ler um desenho em escala significa reconhecer as dimensões reais do objeto desenhado a partir das dimensões do desenho. Assim, o mesmo comprimento de um segmento apresentado em escalas diferentes representa diferentes comprimentos em objetos reais. Um segmento de $2,5$ centímetros representado em escalas de $1:50$; $1:100$ e $1:10.000$ corresponderá a comprimentos reais de, respectivamente:
a) $1,25$ m, $2,5$ m e 250 m.
b) 125 m, 250 m e 25.000 m.
c) $12,5$ m, 25 m e 2.500 m.
d) $12,5$ cm, 250 cm e 2.500 cm.
e) 125 cm, 2.500 cm e 250.000 cm.

9) (ENEM) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes. Conforme indicações na figura a seguir.

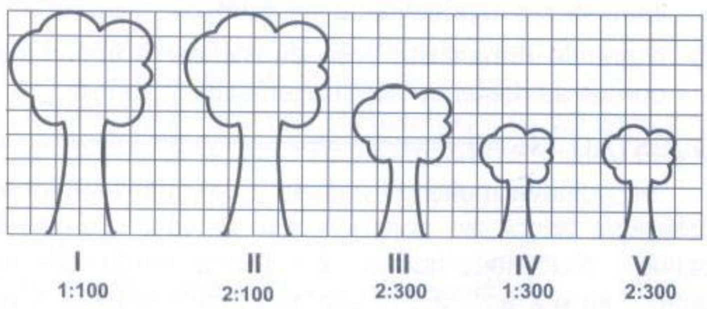


Figura 8.4: ENEM

Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?
a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

10) (FATEC-SP) O uso das representações cartográficas está diretamente ligado ànecessidade do usuário. Essa necessidade faz com que seja necessário um maior ou menor detalhamento, definido pela escala dos mapas.
Considere os seguintes usuários:
A - um turista em uma grande cidade;
B - um comerciante viajando pelo estado de São Paulo;
C - um analista das áreas de plantação de soja no Brasil.
Os mapas com as escalas mais adequadas que poderão ser utilizadas são:

	A	B	C
a)	1 : 1.000	1 : 5.000.000	1 : 10.000
b)	1 : 5.000.000	1 : 500.000	1 : 2.500.000
c)	1 : 1.000.000	1 : 100.000	1 : 250.000
d)	1 : 10.000	1 : 1.000.000	1 : 5.000.000
e)	1 : 1.000.000	1 : 500.000	1 : 2.500.000

Densidade demográfica(D)

A densidade demográfica é a razão entre a quantidade de habitantes(hab) e a área(A) que eles ocupam.

$$\mathrm{D} = \frac{hab}{A}$$

Disciplina: Geografia

Segundo o IBGE [28] a densidade demográfica é uma medida da distribuição espacial da população e permite o estudo da concentração ou dispersão dessa população no espaço geográfico considerado. Ela é importante para o planejamento urbano e para as políticas de ocupação do território, informando sobre a pressão populacional e as necessidades de infraestrutura da área.

A revista eletrônica Brasil Escola [15] cita que entender a configuração de uma população é necessário em virtude de diversos aspectos, por isso ao realizar estudos sobre esse tema é preciso considerar os conceitos demográficos que são informações temáticas que servem para observar as carências em determinados seguimentos sociais. Desse modo, a população pode ser: população absoluta, que corresponde ao número total de habitantes de um determinado lugar (município, estado, país, continente ou no mundo); e população relativa, que corresponde à densidade demográfica, que é resultado do total de habitantes dividido pela área territorial.

É importante destacar a diferença entre densidade demográfica e distribuição de população, um país (região) pode ser populososa, ter uma grande população, e não ter uma grande densidade demográfica, pelo fato de possuir uma área muito grande.

Exercícios

1) Caatinga (palavra que na língua tupi-guarani significa mata branca) é um sistema ambiental exclusivamente brasileiro encontrado no nordeste brasileiro e em uma pequena parte dos estados de Minas Gerais e do Maranhão.

A vegetação característica da caatinga é formada por pequenas árvores, comumente espinhosas, que perdem as folhas na longa estação de seca, época em que os troncos das árvores adquirem um tom acinzentado. A caatinga abriga a mais povoada região semiárida do planeta. São 28 milhões de pessoas distribuídas em uma superfície de 844 mil km^2 do território brasileiro. Qual a densidade demográfica dessa região?

2) A superfície do estado da Bahia é $564.692,7$ km^2. Segundo o IBGE, em 2005, a densidade demográfica desse estado era, aproximadamente, $24,5$ $hab./km^2$. Determine a população aproximada que o estado da Bahia tinha nesse ano.

3) (ENEM)

> Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km^2 de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.
>
> Disponível em: http://www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010.

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km^2, é de
a) 250.
b) 25.
c) $2,5$.
d) $0,25$.
e) $0,025$.

Densidade(d)

A densidade de um corpo é a razão entre a massa(m) do corpo e o volume(V) ocupado por ele.

$$\text{d} = \frac{m}{V}$$

Disciplinas: Física e Química

Física

No seu livro de Física, Paraná [41] diz que o conceito de densidade já era conhecido de Arquimedes. Existe uma lenda segundo a qual o rei de Siracusa, cidade onde vivia o sábio grego, encomendou a um ourives uma coroa de ouro puro. Feita a coroa, Hierão (o rei) desconfiou que ela não era de ouro puro. Chamou então Arquimedes, que tinha fama de saber tudo, para resolver o problema.

Arquimedes fez o seguinte: primeiro determinou a massa da coroa. Depois, introduziu-a num recipiente cheio de água, medindo o volume de líquido que transbordou. Esse volume correspondia ao volume da coroa. A relação entre a massa da coroa e seu volume determinou sua densidade. Caso ela fosse totalmente de ouro, um bloco de ouro puro de mesma massa da coroa deveria deslocar o mesmo volume de água qua a coroa deslocou. E Arquimedes repetiu a operação com o bloco de ouro, para medir seu volume. Finalmente, descobriu que o ourives havia enganado o rei, substituindo uma parte do ouro por prata.

Essa experiência mostra que a distribuição da massa de um corpo na unidade de volume constitui uma importante grandeza física, denominada densidade. Quando se trata de substâncias puras, essa distribuição é denominada massa específica ou densidade absoluta.

Química

Segundo Feltre [23], no cotidiano é comum dizermos, por exemplo, que o chumbo "pesa"mais do que a madeira. No entanto, 1 kg de chumbo afunda, enquanto 1 kg de madeira flutua na água. É fácil perceber, porém, que tal comparação só se torna justa e racional quando feita entre volumes iguais.

Figura 8.5: [23]

Surge dessa comparação o conceito de densidade dos materiais, entendida como a massa dos "pedaços"iguais (volumes iguais) dos vários materiais. Matematicamente, essa ideia corresponde a seguinte definição:

$$Densidade = \frac{massa}{volume}, \text{ a uma dada temperarura.}$$

Um caso particular importante é o da medição das densidades dos líquidos, que é feita diretamente pelos densímetros. Esse instrumento é um tubo de vidro, como mostrado a seguir, cuja parte inferior é mais larga e "pesada"do que a superior, que consiste em uma haste graduada em densidades. Colocado num líquido o densímetro afunda mais ou menos, e a graduação da haste, que coincide com o nível líquido, dá diretamente a densidade do líquido.

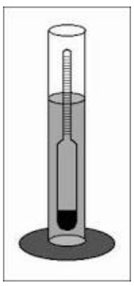


Figura 8.6: [23]

Os densímetros são usados, por exemplo, em postos de gasolina para medir a densidade do álcool vendido; em cooperativa de leite, para comprovar a qualidade do leite negociado, e assim por diante.

Figura 8.7: [23]

É importante ainda observar que a densidade varia com a temperatura, pois o volume de um corpo muda de acordo com a temperatura, embora a massa permaneça a mesma. Por isso, é importante que, em informações científicas, se expresse, por exemplo, que a densidade do chumbo é de $11,34\ g/cm^3$, a 20^oC.

Variação da densidade da água em função da temperatura

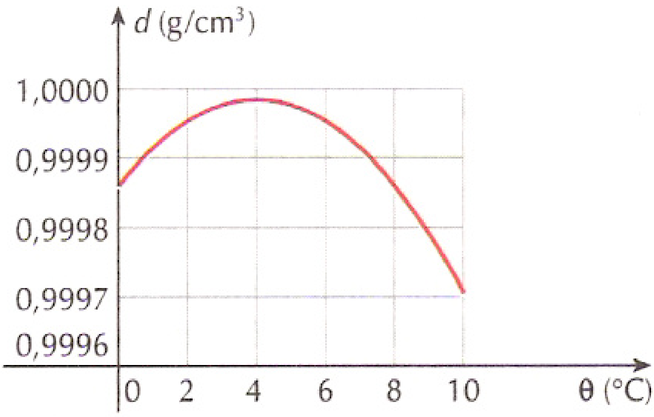


Figura 8.8: [23]

Concentração(C)

Concentração é a quantidade, em gramas, de soluto existente em 1 litro de solução.

$$\text{C} = \frac{m}{V}$$

onde m = Massa do soluto (em gramas) e V = Volume do solvente (em litros)

Não confunda densidade com concentração, a densidade é a razão entre a massa da solução pelo volume da solução.

Diluição das Soluções

Diluir uma solução significa adicionar a ela uma porção do próprio solvente puro.

Situação I

Um recipiente contendo um soluto de massa (m) diluído em uma solução de volume (v_1) tem concentração dada por: $C_1 = \dfrac{m}{v_1} \longrightarrow m = C_1.v_1$

Situação II

Dilua a solução da situação I com um volume (v') de solvente. Percebemos que na solução final o volume ($v_2 = v_1 + v$') do solvente aumenta e a concentração (C_2) da solução diminui. Como a massa do soluto não se alterou temos a concentração dada por: $C_2 = \dfrac{m}{v_2} \longrightarrow m = C_2.v_2$.

Dado que a massa do soluto permanece constante, temos:
$C_1.v_1 = C_2.v_2$

O volume e a concentração de uma solução são grandezas inversamente proporcionais.

Exercícios

1) (UFMA) Um bloco de madeira, cujo volume é de 500 cm^3, tem massa igual a $0,3$ kg. A densidade dessa madeira em g/cm^3 é de
a) $6,6$
b) $1,6$
c) $0,6$
d) 6

2) (FMU-SP) Um vidro contém 200 cm^3 de mercúrio de densidade $13,6$ g/cm^3. A massa de mercúrio contido no vidro é
a) $0,8$ kg

b) $0,68\ kg$
c) $2,72\ kg$
d) $27,2\ kg$
e) $6,8\ kg$

3) Um béquer contendo 400 cm^3 de um líquido com densidade de $1,85\ g/cm^3$ pesou 884 g. Qual a massa do béquer vazio?

4) A densidade do diamante é igual a $3,5\ g/cm^3$. A unidade internacional para a pesagem de diamantes é o quilate, que corresponde a 200 mg. Qual o volume de um diamante de $1,5$ quilates?

5) Quando se deixa cair uma peça de metal com massa igual a $112,32\ g$ em um cilindro graduado (proveta) que contém $23,45\ mL$ de água, o nível sobe para $29,27\ mL$. Qual a densidade do metal, em g/cm^3?

6) (MACKENZIE-SP) A massa dos quatro principais sais que se encontram dissolvidos em 1 litro de água do mar é igual a 30 g. Num aquário marinho, contendo $2 \cdot 10^6\ cm^3$ dessa água, a quantidade de sais nela dissolvidos é
a) $6,0 \cdot 10$ Kg
b) $6,0 \cdot 10^4$ Kg
c) $1,8 \cdot 10^2$ Kg
d) $2,4 \cdot 10^8$ Kg
e) $8,0 \cdot 10^6$ Kg

7) (UFU-MG) Em condições ambientes, a densidade do mercúrio é de aproximadamente $13\ g/cm^3$. A massa desse metal, da qual um garimpeiro de Poconé (MT) necessita para encher completamente um frasco de meio litro de capacidade, é de
a) 2.600 g
b) 3.200 g
c) 4.800 g
d) 6.500 g
e) 7.400 g

8) (UFPI) Em uma cena de um filme, um indivíduo corre carregando uma maleta tipo 007 (volume de 20 dm^3) cheia de barras de um certo metal. Considerando que um adulto de massa média (70 kg) pode deslocar, com certa velocidade, no máximo o equivalente a sua própria massa, indique qual o metal contido na maleta, observando os dados da tabela.(Dado: $1\ dm^3 = 1\ L = 1.000\ cm^3$)
a) Alumínio
b) Zinco
c) Prata
d) Chumbo
e) Ouro

9) (FUVEST-SP) Considere duas latas do mesmo refrigerante, uma na versão "diet"e outra na versão comum. Ambas contêm o mesmo volume de líquido (300 mL) e têm a mesma massa quando vazias. A composição do refrigerante é a mesma em ambas, exceto por uma diferença: a versão comum contém certa quantidade de açúcar, enquanto a versão "diet"não contém açúcar (apenas massa desprezível de um adoçante artificial). Pesando-se duas lata fechadas do refrigerante, foram obtidos os seguintes resultados:

Amostra	Massa (g)
Lata com refrigerante comum	$331,2$ g
Lata com refrigerante "diet"	$316,2$ g

Por esses dados, pode-se concluir que a concentração, em g/L, de açúcar no refrigerante comum é de, aproximadamente
a) $0,020$
b) $0,050$
c) $1,1$
d) 20
e) 50

10) (VUNESP) Na preparação de 500 mL de uma solução aquosa de H_2SO_4 de concentração 3 mol/L, a partir de uma solução de concentração 15 mol/L do ácido, deve-se diluir o seguinte volume da solução concentrada
a) 10 mL
b) 100 mL
c) 150 mL
d) 300 mL
e) 450 mL

11) (UFPE) Para identificar três líquidos – de densidades $0,8; 1,0$ e $1,2$ – o analista dispõe de uma pequena bola de densidade $1,0$. Conforme as posições das bolas apresentadas no desenho a seguir, podemos afirmar que:

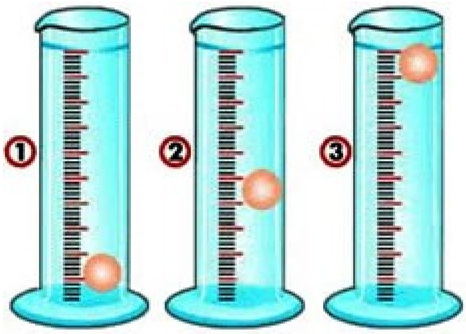


Figura 8.9: UFPE

a) os líquidos contidos nas provetas $1, 2$ e 3 apresentam densidades $0,8; 1,0$ e $1,2$.

b) os líquidos contidos nas provetas $1, 2$ e 3 apresentam densidades $1, 2; 0, 8$ e $1, 0$.
c) os líquidos contidos nas provetas $1, 2$ e 3 apresentam densidades $1, 0; 0, 8$ e $1, 2$.
d) os líquidos contidos nas provetas $1, 2$ e 3 apresentam densidades $1, 2; 1, 0$ e $0, 8$.
e) os líquidos contidos nas provetas $1, 2$ e 3 apresentam densidades $1, 0; 1, 2$ e $0, 8$.

12) Um sólido flutuará num líquido que for mais denso que ele. O volume de uma amostra de calcita, pesando $35, 6$ g, é $12, 9$ cm^3. Em qual dos seguintes líquidos haverá flutuação da calcita:
- tetracloreto de carbono (d = $1, 60$ g/cm^3);
- brometo de metileno (d = $2, 50$ g/cm^3);
- tetrabromo-etano (d = $2, 96$ g/cm^3);
- iodeto de metileno (d = $3, 33$ g/cm^3).
Justifique sua resposta através de cálculos.

13)(FUVEST-SP) Em uma indústria, um operário misturou, inadvertidamente, polietileno (PE), policloreto de vinila (PVC) e poliestireno (PS), limpos e moídos. Para recuperar cada um destes polímeros, utilizou o seguinte método de separação: jogou a mistura em um tanque contendo água (densidade = $1, 00$ g/cm^3), separando, então, a fração que flutuou (fração A) daquela que foi ao fundo (fração B). Depois, recolheu a fração B, secou-a e jogou-a em outro tanque contendo solução salina (densidade = $1, 10$ g/cm^3), separando o material que flutuou (fração C) daquele que afundou (fração D).

(Dados: densidade na temperatura de trabalho em g/cm^3: polietileno = $0, 91$ a $0, 98$; poliestireno = $1, 04$ a $1, 06$; policloreto de vinila = $1, 5$ a $1, 42$)

As frações A, C e D eram, respectivamente:
a) PE, PS e PVC
b) PS, PE e PVC
c) PVC, PS e PE
d) PS, PVC e PE
e) PE, PVC e PS

Porcentagem (%) - uma razão especial

A percentagem ou porcentagem (do latim per centum, significando "por cento", "a cada centena") é uma medida de razão com denominador igual a 100 (cem).

Exemplos: a razão entre 5 e 20 será $\dfrac{1}{4}$ logo, em termos de percentagem será $\dfrac{25}{100}$ ou seja 25%. Inversamente: a percentagem 4% equivale a $\dfrac{4}{100}$ ou ainda $\dfrac{1}{25}$. Para além de outros usos aparece sempre no cálculo de juros e de interesses bancários.

Podemos escrever a porcentagem da seguinte forma:
$5\% = \dfrac{5}{100} = 0,05$

$12\% = \dfrac{12}{100} = 0,12$

$134\% = \dfrac{134}{100} = 1,34$

$0,3\% = \dfrac{0,3}{100} = \dfrac{3}{1000} = 0,0003$

Exemplos:

1) (FCMMG) Para represar o rio Yangtze, na China, far-se-á uma barragem, a barragem das Três Gargantas. A represa gerará 18.000 megawatts de energia, 50% a mais do que a energia produzida por Itaipu. A quantidade de energia, em megawatts, gerada por Itaipu é
a) 12.000
b) 11.000
c) 10.000
d) 9.000

Solução: Sendo E a energia produzida por Itaipu e considerando esse valor representado por 100%. Como a represa do rio Yangtze, na China produz 50% a mais de energia do que a produzida por Itaipu. Então, 150% de E = 18.000 megawatts $\Rightarrow 1,5 \cdot E =$ 18.000 $\Rightarrow E =$ 12.000 megawatts.

2) (FJP-MG) Certa importância em dinheiro foi dividida, em partes iguais, entre duas pessoas. Após algum tempo, a primeira aumentou o valor inicial de sua parte em 18% e a segunda diminuiu o da sua em 17%. A partir de então, a diferença entre os dois valores ficou sendo de R\$ $595,00$. Nessas condições, a segunda pessoa passou a possuir
a) R\$ $1.141,00$
b) R\$ $1.214,00$
c) R\$ $1.241,00$
d) R\$ $1.411,00$
e) R\$ $1.421,00$

Solução: Seja p a quantia recebida pelas duas pessoas, como a primeira aumentou o seu valor em 18%, então ele ficou com 118% de p $= 1,18p$ e, o segundo diminui em 17% o seu valor, ficando com 83% de $p = 0,83p$. Então, a diferença $1,18p – 0,83p =$ R\$ $595,00$ $\Rightarrow 0,35p = 595 \Rightarrow p =$ R\$ $1.700,00$ (a quantia inicial de cada uma das pessoas). Como a segunda passou a possuir $0,83p = 0,83.$R\$ $1.700,00 =$ R\$ $1.411,00$.

3) (UFV) Consultando um mapa rodoviário, um motorista decide por um itinerário 17% mais longo do que aquele que faz habitualmente. Como o tráfego de veículos nesse novo trajeto é menor, sua velocidade média aumentará em 30%. Diante dessas condições, o tempo de viagem diminuirá em
a) 5%
b) 10%
c) 15%
d) 20%
e) 25%

Solução: Como a velocidade (v) é a razão entre a distância percorrida (d) e o tempo (t)$\Rightarrow$ $v = \dfrac{d}{t} \Rightarrow t = \dfrac{d}{v}$. Sabendo que a distância ficou 17% maior, então a nova distância é 117% de $d \Rightarrow d' = 1,17d$. A velocidade aumentou em 30%, então a nova velocidade é 130% de $v \Rightarrow v' = 1,3v$. Portanto, o novo tempo de viagem é dado por $t' = \dfrac{d'}{v'} \Rightarrow t' = \dfrac{1,17d}{1,3v} = 0,9t$. Assim, o tempo de viagem diminuirá 10%.

4) (UFV) Uma TV que custa R\$ 600,00 é vendida em duas parcelas de R\$ 300,00, sendo a primeira parcela paga no ato da compra. Se o cliente pagar à vista, terá um desconto de 10% sobre o preço da TV. A taxa de juros cobrada pela loja no pagamento a prazo é de
a) 10%
b) 15%
c) 20%
d) 25%
e) 30%

Solução: O valor de um produto é sempre o preço a vista, se a televisão quando comprada a vista é dado um desconto de 10% então o valor real da televisão é 90% de R\$ 600,00 = R\$ 540,00. O cliente que comprou a prazo está, então, pagando juros correspondente na 2ª parcela, uma vez que a 1ª parcela foi paga a vista. Então, como o comprador comprou um produto de R\$ 540,00 e deu R\$ 300,00 à vista como entrada, o comprador ficou devendo a loja R\$ 240,00, só que a loja cobra dele depois de um mês R\$ 300,00. Portanto, $x\%$ de $240 = 300 \Rightarrow x = \dfrac{240}{300} \Rightarrow x = 1,25 = 125\%$. Logo, a loja está cobrando uma taxa de 25% ao mês na compra da televisão.

Exercícios

1) (FUVEST-Adaptada) A tabela informa a extensão territorial e a população de cada uma das regiões do Brasil, segundo o IBGE.

Região	Extensão territorial (km^2)	População (habitantes)
Centro Oeste	1.615.000	14.050.000
Nordeste	1.560.000	53.040.000
Norte	3.825.000	80.360.000
Sudeste	925.000	80.475.000
Sul	600.000	27.000.000

Sabendo que a extensão territorial do Brasil é de, aproximadamente, $8,5$ milhões de km^2, é correto afirmar que a

a) densidade demográfica da região sudeste é de, aproximadamente, 87 habitantes por km^2.

b) região norte corresponde a cerca de 30% do território nacional.

c) região sul é a que tem a maior densidade demográfica.

d) região centro-oeste corresponde a cerca de 40% do território nacional.

e) densidade demográfica da região nordeste é de, aproximadamente, 20 habitantes por km^2.

2) (UFJF – adaptação) As promoções do tipo “leve 5 e pague 4” são comuns no comércio. No caso, a promoção corresponde a que desconto percentual?

3) (EFOA) Uma boutique está fazendo a seguinte promoção: descontos de 20% para quem compra até três peças de roupa e de 30% para um número superior de peças. Se um cliente que compra três peças paga, com desconto, R$ $224,00$, para que ele continue pagando este mesmo valor, comprando quatro peças, o preço da quarta peça deve ser de

a)R$ $60,00$

b)R$ $30,00$

c)R$ $50,00$

d)R$ $40,00$

e)R$ $20,00$

4) (UFV) Mona verificou que o preço de um televisor era R$ $840,00$. Após uma semana, retornou à mesma loja e constatou que o preço da mesma televisão fora reajustado em mais 15%. O desconto que Mona deve receber para que o valor da televisão retorne ao preço anterior é, aproximadamente, de

a) 13%

b) $13,5$%

c) 14%

d) $14,5$%

e) 15%

5) (UFV) Uma empresa tem duas filiais, A e B. Em A, paga a cada vendedor um salário mensal de R\$ $1.200,00$, mais 8% de comissão sobre o montante das vendas por ele realizadas. Em B, o salário é de R\$ $1.500,00$, mais 6% de comissão. Sabendo-se que dois vendedores dessa empresa, um de cada filial, efetuaram o mesmo montante em vendas e receberam a mesma quantia ao final do mês, é CORRETO afirmar que a soma das vendas por eles realizadas foi de
a) R\$ $32.000,00$
b) R\$ $26.000,00$
c) R\$ $30.000,00$
d) R\$ $28.000,00$
e) R\$ $34.000,00$

6) (UFMG) Um consumidor adquiriu determinado produto em um plano de pagamento de 12 parcelas mensais de R\$ $462,00$, a uma taxa de juros de 5% ao mês. Ele pagou as 10 primeiras prestações no dia exato do vencimento de cada uma delas. Na data do vencimento da 11ª prestação, o consumidor decidiu quitar a última também, para liquidar sua dívida. Ele exigiu, então, que a última prestação fosse recalculada, para a retirada dos juros correspondentes ao mês antecipado, no que foi atendido. Depois de recalculado, o valor da última prestação passou a ser de
a) R\$ $440,00$
b) R\$ $444,00$
c) R\$ $438,90$
d) R\$ $441,10$

7) (UFMG) Um fabricante de papel higiênico reduziu o comprimento dos rolos de 40 m para 30 m. No entanto o preço dos rolos de papel higiênico, para o consumidor manteve-se constante. Nesse caso, é CORRETO afirmar que, para o consumidor o preço do metro de papel higiênico teve um aumento
a) inferior a 25%
b) superior ou igual a 30%
c) igual a 25%
d) superior a 25% e inferior a 30%

8) (UFV) Para reduzir o gasto com energia elétrica, uma indústria implantou alguns procedimentos, que surtiram efeito nos meses de fevereiro, março e abril. Em fevereiro o consumo foi de 90% em relação ao registrado no mês de janeiro; em março o consumo foi de 92% em relação ao de fevereiro e, no mês de abril, houve uma redução de 10% no consumo em relação a março. Então, a redução de consumo no final de abril, em relação a janeiro, em porcentagem, foi
a) $25,84$
b) $23,48$
c) $24,84$
d) $25,48$
e) $24,48$

9) (FJP-MG) O preço à vista, de certo artigo é R\$ $400,00$. Ao adquirir esse artigo, Paulo deu R\$ $250,00$ de entrada e pagou R\$ $210,00$ após 30 dias, quitando a dívida. Nessas condições, Paulo pagou de juros
a) 15%
b) 20%
c) 30%
d) 40%

10) (UNICAMP) Uma casa está à venda por R\$ $1.200.000,00$ em três pagamentos: 400 mil de entrada, 400 mil um mês depois e 400 mil dois meses depois. Para pagamento à vista o vendedor dá um desconto de 20%. Supondo que a inflação tenha se estabilizado em 20% ao mês, e que mantendo o dinheiro no banco o comprador ganha essa correção mensal, verifique qual dos dois planos é mais vantajoso – à vista ou a prazo – explique por quê.

8.2 Proporção

Problematização:

Três amigos João, Antônio e Francisco interessados em ganhar um prêmio de 225 milhões de reais da "Mega Sena da virada" fazem um "bolão", onde João entrou com R\$$15,00$, Antônio com R\$$25,00$ e Francisco com R\$$35,00$ reais. Se eles ganham sozinhos o prêmio da "Mega Sena da virada", qual deve ser a divisão mais justa do prêmio, levando em consideração quanto cada um pagou no "bolão".

Obs.: A partir do problema acima o professor discutirá com os alunos a melhor forma de fazer a divisão. Eles perceberão que a divisão justa não é dividir o prêmio em partes iguais e deveriam levar em consideração o investimento que cada um dos amigos fez no "bolão". Dessa forma, o professor deve discutir as sugestões dadas pelos alunos para a divisão corrigindo os possíveis erros de interpretação e, ao final, chegar à divisão justa.

Neste momento o professor deve definir o conceito de proporção mostrando suas propriedades. Deve também usar o exemplo acima, para exemplificar a divisão em partes diretamente proporcionais.

Definição 8.2. *Proporção é uma igualdade entre duas razões: $a : b = c : d$ ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com a, b, c, e d números reais, $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Na proporção $a : b = c : d$, b e c são chamados meios e a e d são chamados extremos.*

Propriedade Fundamental das proporções

Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$a : b = c : d \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } a \cdot d = b \cdot c, \text{ com } b \neq 0 \text{ e } d \neq 0.$$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(multiplicando ambos os lados da igualdade por $b \cdot d$)

$$\frac{a \cdot b \cdot d}{b} = \frac{c \cdot b \cdot d}{d}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Outras propriedades das proporções

P1

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Demonstração:

$$a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow a \cdot d + b \cdot d = b \cdot c + b \cdot d \Rightarrow d \cdot (a+b) = b \cdot (c+d) \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

P2

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Demonstração:

$\frac{a}{b} = k \Rightarrow a = k \cdot b$ e $\frac{c}{d} = k \Rightarrow c = k \cdot d$. Vamos substituir na expressão $\frac{a+c}{b+d}$, assim:

$$\frac{k \cdot b + k \cdot d}{b+d} = \frac{k \cdot (b+d)}{b+d} = k, \text{ ou seja, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

P3

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ e } \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = k \cdot k = k^2 \text{ e } \frac{a^2}{b^2} = (\frac{a}{b})^2 = k^2 \text{ e } \frac{c^2}{d^2} = (\frac{c}{d})^2 = k^2$$

Química

Definição de Feltre [23]

Lei de Proust ou Lei das Proporções Constantes (ou Fixas ou Definidas)

Uma determinada substância composta é formada por substâncias mais simples, unidas sempre na mesma proporção em massa.

1. 3 g de carbono (C) se unem a 8 g de oxigênio (O_2), produzindo 11 g de gás carbônico (CO_2)
2. 6 g de carbono (C) se unem a 16 g de oxigênio (O_2), produzindo 22 g de gás carbônico (CO_2)

Exercícios

1) (UESPI) Qualquer que seja a procedência ou processo de preparação do NaCl, podemos afirmar que sua composição é sempre $39,32\%$ de sódio e $60,68\%$ de cloro, com base na lei de
a) Lavoisier
b) Dalton
c) Proust
d) Richter
e) Avogadro

2) (VUNESP) Foram analisadas três amostras (I, II e III) de óxidos de enxofre, procedentes de fontes distintas, obtendo-se os seguintes resultados:

Amostra	Massa de enxofre (g)	Massa de oxigênio (g)	Massa da amostra (g)
I	$0,32$	$0,32$	$0,64$
II	$0,08$	$0,08$	$0,16$
III	$0,32$	$0,48$	$0,80$

Estes resultados mostram que:
a) as amostras I, II e III são do mesmo óxido.
b) apenas as amostras I e II são do mesmo óxido.
c) apenas as amostras II e III são do mesmo óxido.
d) apenas as amostras I e III são do mesmo óxido.
e) as amostras I, II e III são de óxidos diferentes.

8.3 Grandezas proporcionais

Problematização:
Analisaremos as seguintes situações:

i) O que acontece com o valor da Densidade Demográfica quando aumentamos a quantidade de habitantes da região, sem alterarmos a área. O que acontece com a Densidade Demográfica quando dobramos a quantidade de habitantes? E quando triplicamos?

Obs.: Os alunos também irão propor soluções para o problema analisado. Com a ajuda do professor, os alunos devem concluir que quando aumentamos a quantidade de habitantes o valor da densidade demográfica aumenta, quando dobramos a quantidade de habitantes a densidade dobra e que quando triplicamos a quantidade de habitantes a densidade triplica. No final, vamos concluir que as grandezas densidade demográfica e número de habitantes são grandezas que se relacionam de forma direta, ou seja, são diretamente proporcionais.

ii) O que acontece com o valor da Densidade Demográfica quando aumentamos a área, sem alterarmos a quantidade de habitantes. O que acontece com a Densidade Demográfica quando dobramos a área? E quando triplicamos?

Obs.: Os alunos, também, irão propor soluções para o problema analisado. Com a ajuda do professor, os alunos devem concluir que quando aumentamos a área o valor da densidade demográfica diminui, quando dobramos a área a densidade fica reduzida a metade e que quando triplicamos a área a densidade fica dividida por três. No final, vamos concluir que as grandezas densidade demográfica e área são grandezas que se relacionam de forma inversa, ou seja, são inversamente proporcionais.

8.3.1 Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas "x" e "y" são diretamente proporcionais ou simplesmente proporcionais quando a cada valor da grandeza "x" associamos, de forma unívoca, um valor para a grandeza "y".

$$y \sim x \text{ (y é proporcional a x)}$$
$$\Rightarrow y = a \cdot x$$

Se duas grandezas "x" e "y" são diretamente proporcionais, então satisfazem as seguintes condições:

1) Se o valor da grandeza "x"aumenta o valor da grandeza "y"também aumenta;

Se $x_1 < x_2$ então $y_1 < y_2$, com x_1, x_2 valores associados a grandeza "x"e y_1, y_2 os respectivos valores associados a grandeza "y".

2) Se "x"duplica, triplica, quadriplica, ... então "y"duplica, triplica, quadriplica, ..., respectivamente.

Se um certo valor de "x"corresponde a um "y", então nx corresponde a ny, com $n \in \mathbb{N}$.

Disciplina: Física

No livro de física da coleção Ser protagonista [51] a terceira lei de Kepler é definida como exposto abaixo.

Terceira lei de Kepler: a lei dos períodos

O quadrado do período de traslação de um planeta em torno do Sol é proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita.

Kepler obteve uma relação entre o período (intervalo de tempo no qual o planeta completa uma volta em torno do Sol) e a medida do semieixo maior da sua trajetória elípita em torno dos Sol. Ele constatou que o quadrado do período e o cubo da medida do semieixo maior eram proporcionais. Tal relação pode ser expressa da seguinte maneira

$$T^2 = k \cdot a^3 \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = k,$$

em que T é o período de traslação, a é o semieixo maior da órbita e k é uma constante de proporcionalidade cujo valor depende da massa do corpo central.

Exemplos:

1) Um móvel com velocidade constante percorre distâncias iguais em intervalos de tempos iguais (movimento uniforme). Na tabela seguinte são dadas as velocidades e as distâncias percorridas por alguns automóveis em 3h. Verifique se as grandezas velocidade e distância são diretamente proporcionais.

Velocidade	Distância
40 km/h	120 km
60 km/h	180 km
80 km/h	240 km

Solução: Seja V a velocidade e D a distância, as grandezas são (G.D.P.) diretamente proporcionais, quando existe $k > 0$ tal que $\frac{D}{V} = k$, para todos os valores da distância e de sua correspondente velocidade. Como $\frac{D}{V} = \frac{120}{40} = \frac{180}{60} = \frac{240}{80} = 3 = k$, então as grandezas são diretamente proporcionais.

2) (UFU-MG) Paulo, Ana e Luís formaram uma sociedade e investiram, respectivamente, R\$ $2.500,00$, R\$ $3.500,00$ e R\$ $4.000,00$ em um fundo de investimentos. Após um ano, a aplicação estava com um saldo de R\$ $12.500,00$ reais. Se os três investidores resgatarem somente o rendimento e dividirem-no em partes diretamente proporcionais aos valores investidos, a diferença entre os valores recebidos por Ana e por Paulo será igual a
a) R\$ $125,00$
b) R\$ $1.000,00$
c) R\$ $250,00$
d) R\$ $500,00$
e) R\$ $750,00$

Solução:
O valor investido pelos três amigos, em reais, foi
R\$ $2.500,00$ + R\$ $3.500,00$ + R\$ $4.000,00$ = R\$ $10.000,00$.

Portanto, o rendimento que eles resgataram foi de
R\$ $12.500,00$ – R\$ $10.000,00$ = R\$ $2.500,00$.

Como o rendimento foi dividido em partes diretamente proporcionais aos capitais empregados e considerando que Paulo, Ana e Luís receberam x, y e z, respectivamente.

Temos: $x + y + z =$ R\$ $2.500,00$ e $\frac{x}{2.500,00} = \frac{y}{3.500,00} = \frac{z}{4.000,00} = k$.

Aplicando a propriedade das proporções, $\frac{x+y+z}{2.500,00 + 3.500,00 + 4.000,00} = k$, então $\frac{2.500,00}{10.000,00} = k$ logo $k = \frac{1}{4}$.

Então, Paulo recebeu R\$ $625,00$ e Ana recebeu R\$ $875,00$. Portanto, a diferença entre os valores recebidos por Ana e Paulo é R\$ $875,00$ – R\$ $625,00$ = R\$ $250,00$.

3) (ENEM) Uma mãe recorreu a bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de
a) 12 kg.
b) 16 kg.
c) 24 kg.

d) 36 kg.
e) 75 kg.

Solução: As grandezas dosagem do remédio (d) e a massa corporal (m) são grandezas diretamente proporcionais. Como a grandeza tempo não sofreu alteração existe $k > 0$, tal que: $\frac{d}{m} = k$, então $\frac{5}{2} = k$ e $\frac{30}{m} = k$. Portanto, $\frac{5}{2} = \frac{30}{m} \Rightarrow m = 12$ kg.

4) (UNICAMP) Para repor o teor de sódio no corpo humano, o indivíduo deve ingerir aproximadamente 500 mg de sódio por dia. Considere que determinado refrigerante de 350 ml contém 35 mg de sódio. Ingerindo-se 1.500 ml desse refrigerante em um dia, qual é a porcentagem de sódio consumida em relação às necessidades diárias?
a) 45%.
b) 60%.
c) 15%.
d) 30%.

Solução: A quantidade de sódio consumida (q) e o volume de refrigerante ingerido (v) são grandezas diretamente proporcionais, então existe $k > 0$, tal que $\frac{v}{q} = k$ então, $\frac{350}{35} = k$ e $\frac{1500}{q} = k$. Portanto, $\frac{350}{35} = \frac{1500}{q} \Rightarrow q = 150$mg. Sendo p a porcentagem de sódio consumida em relação às necessidades diárias (500 mg que representa 100%). Como a porcentagem e o valor correspondente são grandezas diretamente proporcionais, então $\frac{500}{100} = \frac{150}{p} \Rightarrow p = 30\%$.

Exercícios

1) (ENEM)

> O hábito de comer um prato de folhas todo dia faz proezas para o corpo. Uma das formas de variar o sabor das saladas é experimentar diferentes molhos. Um molho de iogurte com mostarda contém 2 colheres de sopa de iogurte desnatado, 1 colher de sopa de mostarda, 4 colheres de sopa de água, 2 colheres de sopa de azeite.
>
> DESGUALDO. P. Os Segredos da Supersalada. Revista Saúde. Jan. 2010.

Considerando que uma colher de sopa equivale a aproximadamente 15 mL, qual é o número máximo de doses desse molho que se faz utilizando $1,5$ L de azeite e mantendo a proporcionalidade das quantidades dos demais ingredientes?
a) 5
b) 20
c) 50
d) 200

e) 500

2) (ENEM)

> Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?
a) 24 litros
b) 36 litros
c) 40 litros
d) 42 litros
e) 50 litros

3) (ENEM)

> FONTES ALTERNATIVAS
>
> Há um novo impulso para produzir combustível a partir de gordura animal. Em abril, a High Plains Bioenergy inaugurou uma biorrefinaria próxima a uma fábrica de processamento de carne suína em Guymon, Oklahoma. A refinaria converte a gordura do porco, juntamente com o óleo vegetal, em biodiesel. A expectativa da fábrica é transformar 14 milhões de quilogramas de banha em 112 milhões de litros de biodiesel.

Revista Scientific American. Brasil, ago. 2009 (adaptado).

Considere que haja uma proporção direta entre a massa de banha transformada e o volume de biodiesel produzido. Para produzir 48 milhões de litros de biodiesel, a massa de banha necessária, em quilogramas, será de, aproximadamente,
a) 6 milhões.
b) 33 milhões.
c) 78 milhões.
d) 146 milhões.
e) 384 milhões.

4) (ENEM) Você pode adaptar as atividades do seu dia a dia de uma forma que possa queimar mais calorias do que as gastas normalmente, conforme a relação seguinte:

> Enquanto você fala ao telefone, faça agachamentos: 100 calorias gastas em 20 minutos.

Meia hora de supermercado: 100 calorias.

Cuidar do jardim por 30 minutos: 200 calorias.

Passear com o cachorro: 200 calorias em 30 minutos.

Tirar o pó dos móveis: 150 calorias em 30 minutos.

Lavar roupas por 30 minutos: 200 calorias.

Disponível em: http://cyberdiet.terra.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Uma pessoa deseja executar essas atividades, porém, ajustando o tempo para que, em cada uma, gaste igualmente 200 calorias. A partir dos ajustes, quanto tempo a mais será necessário para realizar todas as atividades?
a) 50 minutos.
b) 60 minutos.
c) 80 minutos.
d) 120 minutos.
e) 170 minutos.

5) (ENEM)

Observe as dicas para calcular a quantidade certa de alimentos e bebidas para as festas de fim de ano:

Para o prato principal, estime 250 gramas de carne para cada pessoa.

Um copo americano cheio de arroz rende o suficiente para quatro pessoas.

Para a farofa, calcule quatro colheres de sopa por convidado.

Uma garrafa de vinho serve seis pessoas.

Uma garrafa de cerveja serve duas.

Uma garrafa de espumante serve três convidados.

Quem organiza festas faz esses cálculos em cima do total de convidados, independente do gosto de cada um. Quantidade certa de alimentos e bebidas evita o desperdício da ceia.

Jornal Hoje. 17 dez 2010 (adaptado).

Um anfitrião decidiu seguir essas dicas ao se preparar para receber 30 convidados para a ceia de Natal. Para seguir essas orientações à risca, o anfitrião deverá dispor de
a) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.
b) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.

c) 75 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.
d) $7,5$ kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.
e) $7,5$ kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

6) (PUC-MG) O perímetro de um triangulo é 60 cm. As medidas dos lados são diretamente proporcionais aos números $3, 4$ e 5, então o menor lado do triângulo é
a) 12
b) 13
c) 15
d) 18
e) 22

7) (ENEM) Um comerciante contratou um novo funcionário para cuidar das vendas. Combinou pagar a essa pessoa R\$ $120,00$ por semana, desde que as vendas se mantivessem em torno dos R\$ $600,00$ semanais e, como um estímulo, também propôs que na semana na qual ele vendesse R\$ $1.200,00$, ele receberia R\$ $200,00$, em vez de R\$ $120,00$. Ao término da primeira semana, esse novo funcionário conseguiu aumentar as vendas para R\$ $990,00$ e foi pedir ao seu patrão um aumento proporcional ao que conseguiu aumentar nas vendas. O patrão concordou e, após fazer algumas contas, pagou ao funcionário a quantia de
a) R\$ $160,00$.
b) R\$$165,00$.
c) R\$ $172,00$.
d) R\$ $180,00$.
e) R\$ $198,00$.

8) (ENEM) José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente. Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?
a) $600, 550, 350$
b) $300, 300, 150$
c) $300, 250, 200$
d) $200, 200, 100$
e) $100, 100, 50$

Disciplina: Física

No livro de física da coleção Ser protagonista [51], temos as seguintes definições:

1) 2^a Lei de Newton

Força

Definição 8.3. *Força é o resultado da interação entre corpos. Ela pode produzir equilíbrio, variação da velocidade vetorial e deformação das dimensões de um corpo.*

As interações entre os corpos podem ser de campo ou de contato.

Interações de campo: são interações que ocorrem sem a necessidade de contato entre os corpos. Ex: força da gravidade.

Interações de contato: são interações que ocorrem durante o contato entre dois corpos. Ex: um menino ao chutar uma bola.

O instrumento utilizado para medir a intensidade de uma força é o dinamômetro e a unidade no Sistema Internacional (SI) é o newton (N).

2^a Lei de Newton - Princípio Fundamental da Dinâmica

Definição 8.4. *A força resultante que atua sobre um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração por ele adquirida*

A 2^a Lei de Newton é descrita pela seguinte equação:

$$F = m \cdot a$$

onde: F = força; m = massa e a = aceleração.

Obs.: A força Peso é uma força de interação de campo onde a aceleração é a gravidade. Então,

$$P = m \cdot g,$$

onde: P = peso; m = massa e g = aceleração da gravidade.

2) Lei de Hooke

Definição 8.5. *As deformações elásticas de uma mola são proporcionais à intensidade da força elástica.*

A Lei de Hooke é descrita pela equação:

$$F_{elástica} = k \cdot x,$$

onde:

$F_{elástica}$ = força elástica;

k = constante de proporcionalidade ou constante elástica que depende da resistência da mola;

x = deformação elástica sofrida pela mola.

Obs.: As deformações de uma mola são chamadas elásticas quando não ultrapassam o limite de elasticidade da mola. Uma deformação elástica desaparece, volta a ter a forma original, quando a força deixar de atuar.

Quando a deformação sofrida por uma mola ultrapassa o limite de elasticidade a deformação é chamada plástica. Nesse caso, quando a força deixa de atuar a mola fica com uma deformação residual.

Exercícios

1) (UEL-PR) Sob a ação exclusiva de duas forças, F_1 e F_2, de mesma direção, um corpo de $6,0kg$ de massa adquire aceleração de módulo igual a $4,0m/s^2$. Se o módulo de F_1, vale $20N$, o módulo de F_2, em newtons, só pode valer
a) 0
b) $4,0$
c) 40
d) 44
e) $4,0$ ou 44

2) (ENCE-ADAPTADA) Neil Armstrong foi o primeiro terráqueo a pisar o solo de nosso satélite. Considere que o equipamento - traje espacial, capacete, tubos de oxigênio, etc. - tenha uma massa de $60kg$.
Sabe-se que a aceleração da gravidade lunar é aproximadamente 6 vezes menor que a aceleração da gravidade terrestre. Assim, o esforço feito pelo astronauta, na Lua, para sustentar esse equipamento de $60kg$ foi equivalente ao que faria, aqui na Terra, para sustentar um equipamento de
a) $0,36kg$
b) $0,60kg$
c) $10kg$
d) $50kg$
e) $60kg$

Observações:

Uma proporcionalidade numérica é uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:

i) f é uma função crescente, isto é, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$, para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^+$;

ii) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(nx) = n \cdot f(x)$.

Se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma proporcionalidade, então, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ tem-se $f(x) = a \cdot x$ e $a = f(1)$.

$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot a = a \cdot x$, essa função afim é chamada função linear.

O gráfico que representa duas Grandezas Diretamente Proporcionais é uma reta.

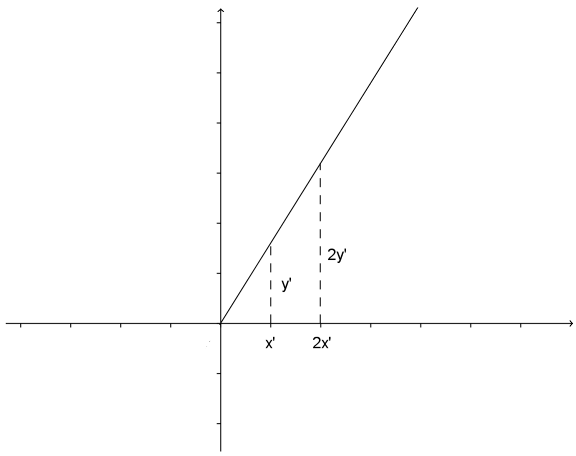


Figura 8.10: Grandezas Diretamente Proporcionais - GEOGEBRA

Juros Simples

O juros simples e o tempo formam uma proporcionalidade numérica pois satisfazem as condições 1) e 2), então o juros simples é uma função linear do tempo.

$j = c \cdot i \cdot t \Rightarrow j(t) = c \cdot i \cdot t \Rightarrow j(t) = a \cdot t$, com $a = c \cdot i$.
onde:
j = juros;
t = tempo;
c = capital;
i = índice ou taxa.
Com o índice e o tempo na mesma unidade.

Função Afim e Função Linear

Problematização

Um vendedor de uma concessionária de veículos de luxo ganha como salário comissão $1,2\%$ sobre a soma do valor de suas vendas. Determine:

a) Qual o salário desse vendedor no mês que suas vendas totalizaram R\$ $100.000,00$? E quando totalizaram R\$ $200.000,00$? E quando R\$ $500.000,00$?

Solução:

$1,2\%$ de R\$ $100.000,00$ = R\$ $1.200,00$ no mês que as vendas totalizaram R\$ $100.000,00$.

$1,2\%$ de R\$ $200.000,00$ = R\$ $2.400,00$ no mês que as vendas totalizaram R\$ $200.000,00$.

$1,2\%$ de R\$ $500.000,00$ = R\$ $6.000,00$ no mês que as vendas totalizaram R\$ $500.000,00$.

b) Quanto o vendedor recebe de salário no mês em que ele não vendeu nenhum carro?

Solução:

$1,2\%$ de R\$ $0,00$ = R\$ $0,00$ no mês em que ele não vendeu nenhum carro.

c) Construa o gráfico que relaciona o salário do vendedor em função do total de suas vendas em um mês.

Total de vendas	Salário
R\$ $0,00$	R\$ $0,00$
R\$ $100.000,00$	R\$ $1.200,00$
R\$ $200.000,00$	R\$ $2.400,00$
R\$ $500.000,00$	R\$ $6.000,00$

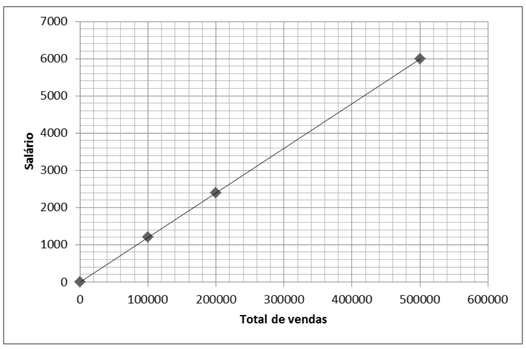


Figura 8.11:

d) Qual a expressão matemática que relaciona o salário (S) do vendedor ao total de suas vendas (v).

Solução:

$S(v) = 1,2\%$ de $v \Rightarrow S(v) = 0,012 \cdot v$.
Obs.: Neste momento o professor deve intervir e mostrar que a relação descrita no exemplo é uma função, que as grandezas salário e total de vendas são grandezas diretamente proporcionais, por isso seguem a relação que $\dfrac{S}{v} = k \Rightarrow S = k \cdot v$, e que toda função do tipo $y = a \cdot x$, com $a \in R$, é uma função linear. A taxa de variação da função a é a constante de proporcionalidade das grandezas diretamente proporcionais e o seu valor é dado pela razão $\dfrac{S}{v} = k = a = \dfrac{y}{x}$. O professor deve aproveitar esse momento para definir a função linear com suas propriedades.

e) O que aconteceria com as letras a, b, c e d se o vendedor além de receber a comissão de $1,2\%$ ao mês tivesse um salário fixo de R\$ $1.000,00$.

letra a)
R\$ $1.000,00 + 1,2\%$ de R\$ $100.000,00 =$ R\$ $2.200,00$ no mês que as vendas totalizaram R\$ $100.000,00$.

R\$ $1.000,00 + 1,2\%$ de R\$ $200.000,00 =$ R\$ $3.400,00$ no mês que as vendas totalizaram R\$ $200.000,00$.

R\$ $1.000,00 + 1,2\%$ de R\$ $500.000,00 =$ R\$ $7.000,00$ no mês que as vendas totalizaram R\$ $500.000,00$.

letra b)
R\$ $1.000,00 + 1,2\%$ de R\$ $0,00 =$ R\$ $1.000,00$ no mês em que ele não vendeu nenhum carro.

letra c)

Total de vendas	Salário
R\$ 0,00	R\$ 1.000,00
R\$ 100.000,00	R\$ 2.200,00
R\$ 200.000,00	R\$ 3.400,00
R\$ 500.000,00	R\$ 7.000,00

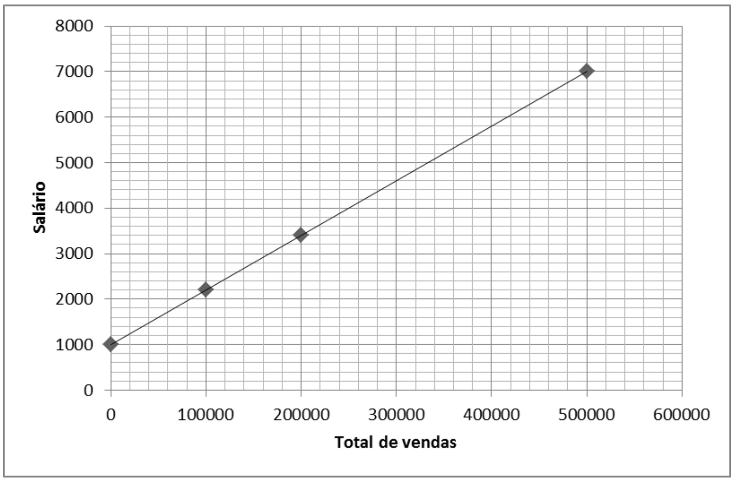


Figura 8.12:

letra d)
$S(v) = R\$1.000,00 + 1,2\%$ de $v \Rightarrow S(v) = 1000 + 0,012 \cdot v$.

Obs.: Neste momento o professor deve intervir e mostrar que houve uma translação no gráfico da função linear, o que fez a função ficar do tipo $y = a \cdot x + b$, que é chamada função afim.

Disciplina: Física

A coleção Ser Protagonista [51] de física nos apresenta:

Movimento Retilíneo Uniforme

O movimento uniforme (MU) é definido como movimento em que o módulo da velocidade se mantém constante. Se o movimento uniforme for em linha reta e sempre no mesmo sentido, então será chamado de movimento retilíneo uniforme (MRU). No movimento uniforme, as distâncias percorridas são iguais para intervalos de tempos iguais. No MRU, o módulo do vetor velocidade (v) é representado por:

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0},$$

sendo s_0 a posição inicial do corpo em relação a um referencial, t_0 a medida do instante inicial, s a posição do móvel em um instante de tempo t posterior

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0} \Rightarrow s = s_0 + v \cdot (t - t_0) \Rightarrow s = s_0 + v \cdot \triangle t,$$

sendo $\triangle t$ a variação do tempo no intervalo dado.

Neste caso a função posição em relação ao tempo é uma função afim onde a velocidade (v) é a taxa de variação.

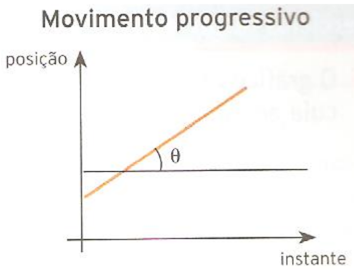


Figura 8.13: [51]

Taxa de variação positiva $\Rightarrow v > 0$

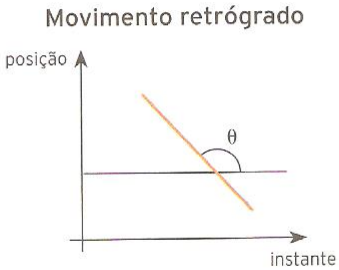


Figura 8.14: [51]

Taxa de variação negativa $\Rightarrow v < 0$

Movimento Uniformemente Variado

Movimento uniformemente variado (MUV) é aquele no qual a variação do módulo da velocidade é a mesma para intervalos de tempos iguais. No MUV, o módulo da aceleração a é dado por:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0},$$

sendo v_0 a velocidade inicial do corpo em relação a um referencial, t_0 a medida do instante inicial, v a velocidade do móvel em um instante de tempo t posterior

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v = v_0 + a \cdot (t - t_0) \Rightarrow v = v_0 + a \cdot \triangle t,$$

sendo $\triangle t$ a variação do tempo no intervalo dado.

Neste caso a função velocidade em relação ao tempo é uma função afim onde a aceleração (a) é a taxa de variação.

i) Taxa de variação positiva $\Rightarrow a > 0$

ii) Taxa de variação negativa $\Rightarrow a < 0$

Exercícios

1) (ENEM) Uma torneira gotejando diariamente é responsável por grandes desperdícios de água. Observe o gráfico que indica o desperdício de uma torneira:

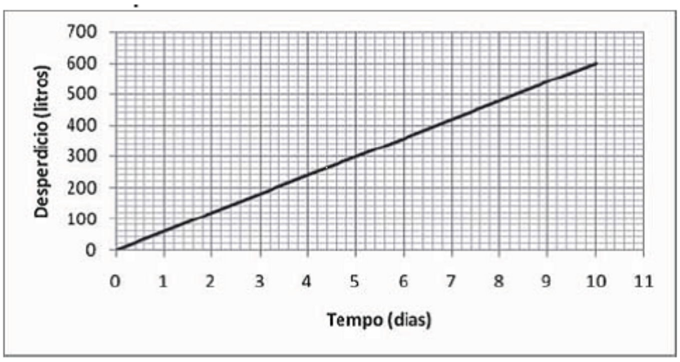


Figura 8.15: ENEM

Se y representa o desperdício de água, em litros, e x representa o tempo, em dias, a relação entre x e y é
a) $y = 2 \cdot x$
b) $y = \frac{1}{2} \cdot x$
c) $y = 60 \cdot x$
d) $y = 60 \cdot x + 1$
e) $y = 80 \cdot x + 50$

2) (ENEM)

> As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que se considera a origem como o ano de 2007.

LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. **Galileu**. no 225, 2010.

De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?
a) $4,0$
b) $6,5$

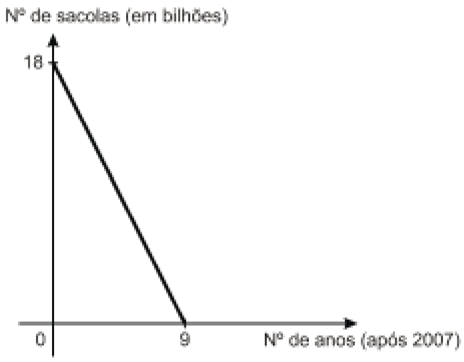


Figura 8.16: ENEM

c) $7,0$
d) $8,0$
e) $10,0$

3) Considerendo certo referencial, um avião em pleno voo tem o seu movimento descrito pela equação horária $s = 100 + 700 \cdot t$, sendo a posição medida em km, e o tempo, em horas. Determine o que se pede em cada item a seguir.

a) A posição inicial do avião em relação à origem.

b) a velocidade com que o avião trafega.

c) A posição do avião depois de 2 horas de voo.

d) Quanto tempo o avião demora para chegar a uma cidade 2200 km do aeroporto do qual partiu, considerado como a origem do sistema.

4) Escreva a equação do movimento de um esquiador que desliza sobre o gelo. Considere que a contagem do tempo iniciou no momento em que ele estava na posição 10 m, a partir de uma bandeira tomada como a origem, e que ele se move com velocidade constante de módulo igual a 4 m/s.

5) O gráfico abaixo representa a posição de uma partícula em função do tempo. Com base nesse gráfico, responda às questões a seguir.

a) Pode-se dizer que o movimento representado no gráfico é uniforme?

b) Pode-se dizer que o movimento é retilíneo? Jusifique.

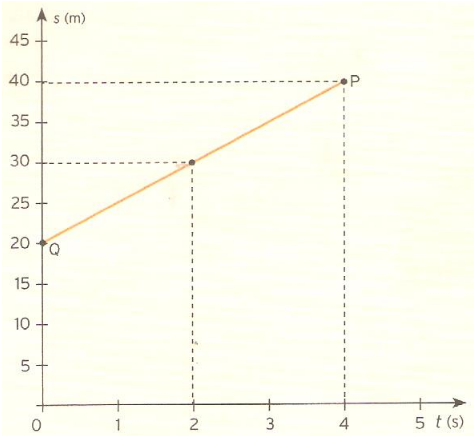


Figura 8.17:

c) Qual é a posição inicial da partícula?

d) Qual é o valor da velocidade?

6) Um motorista está em uma avenida dirigindo seu carro a 20 m/s. Ao observar um pedestre atravessando a pista na faixa de segurança, o motorista pisa no freio e para o carro em 10 s. Considerando que durante a frenagem o carro realizou um movimento uniformemente variado, determine:

a) a aceleração escalar média;

b) a equação da velocidade em função do tempo;

c) a velocidade do carro no instante $t = 4s$.

7) *Dragster* é um veículo de corrida dotado de um motor projetado para provas de arrancadas em retas. a corrida de *dragsters* é conhecida pelas grandes aceleraçõs alcançadas: a aceleração de 0 a 100 km/h ocorre em menos de 1 segundo; ao cruzar a linha de chegada, a velocidade passa dos 530 km/h. Considerando um *dragster* que, partindo do repouso,

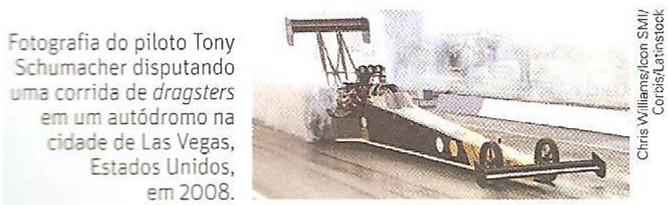


Figura 8.18:

atinge a velocidade de 540 km/h em 5 segundos, faça o que se pede.

a) Calcule a aceleração do *dragster*.

b) Admita que, durante uma corrida, um *dragster* desenvolva aceleração constante de módulo igual ao da aceleração obtida no item anterior e calcule, em km/h, a velocidade atingida $3s$ após a largada.

8) O gráfico ao lado mostra a velocidade de um objeto em função do tempo.

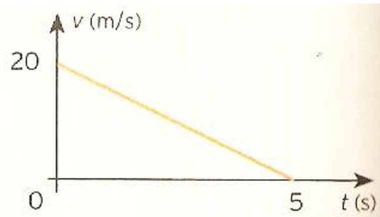


Figura 8.19:

Analise o gráfico e determine:

a) o valor da aceleração escalar do objeto;

b) a equação horária da velocidade;

c) o valor da velocidade no instante $t = 2s$.

8.3.2 Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas "x" e "y" são inversamente proporcionais quando a cada valor da grandeza "x" associamos, de forma unívoca, um valor para a grandeza "y".

$$y \sim \frac{1}{x} \text{ (y é inversamente proporcional a x)}$$

Obs.: uma grandeza é inversamente proporcional a outra quando é proporcional ao seu inverso.

$$\Rightarrow y = \frac{a}{x}$$

Se duas grandezas "x" e "y" são inversamente proporcionais, então satisfazem as seguintes condições:

i) Se o valor da grandeza "x" aumenta o valor da grandeza "y" diminui;

Se $x_1 < x_2$ então $y_1 > y_2$, com $x_1, x_2 \in$ "x" e $y_1, y_2 \in$ "y".

ii) Se "x" duplica, triplica, quadriplica, ... então "y" fica reduzida a metade, fica reduzida a terça parte, fica reduzida a quarta parte, ..., respectivamente.

Se um certo valor de "x" corresponde a um "y", então nx corresponde a $\frac{1}{n}y$, com $n \in \mathbb{N}$.

O gráfico que representa duas Grandezas Inversamente Proporcionais é uma hipérbole equilátera.

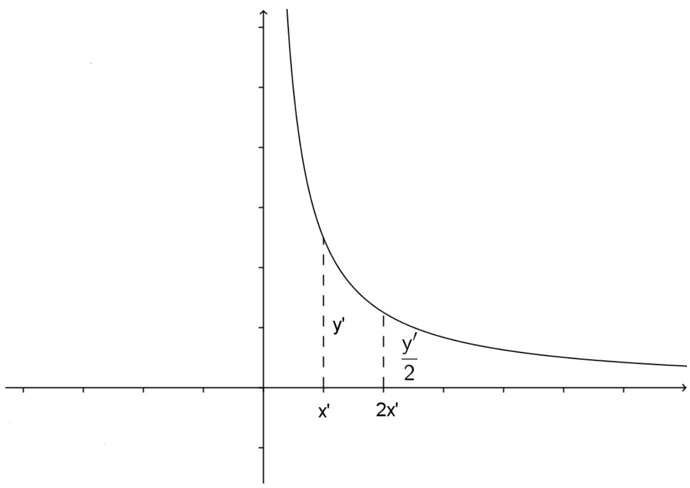


Figura 8.20: Grandezas Inversamente Proporcionais - GEOGEBRA

Exemplos:

1) Duas polias de 15 cm e 30 cm de diâmetro giram acopladas por uma correia. Enquanto a menor faz 300 voltas por minuto, a maior faz 150 voltas. Essas grandezas são inversamente proporcionais?

Diâmetro	Número de voltas
15	1050
30	525

Solução: Seja **D** o diâmetro e **n** o número de voltas, as grandezas são (G.I.P) inversamente proporcionais quando existe $k > 0$, tal que $D \cdot n = k$, para todos os valores do diâmetro e do seu correspondente número de voltas. Como $15 \cdot 1050 = 30 \cdot 525 = 15750 = k$, então as grandezas são inversamente proporcionais.

2) (ENEM) A resistência elétrica e as dimensões do condutor

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificam que existe proporcionalidade entre:

1. resistência (R) e comprimento (l), dada a mesma secção transversal (A);
2. resistência (R) e área da secção transversal (A), o mesmo comprimento (l) e;
3. comprimento (l) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.

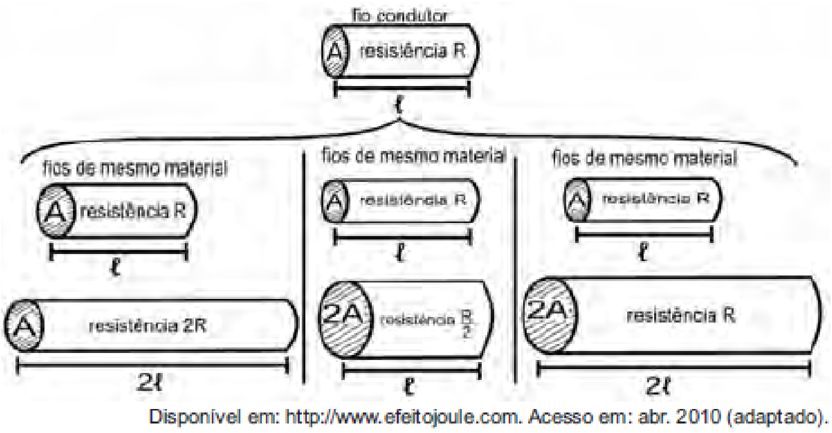


Figura 8.21: ENEM

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (l), entre resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (l) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,
a) direta, direta e direta.
b) direta, direta e inversa.
c) direta, inversa e direta.
d) inversa, direta e direta.
e) inversa, direta e inversa.

Solução: Ao observar a situação proposta percebe-se que:
1ª figura – A resistência do resistor foi dobrada quando dobramos o seu comprimento, mantendo a área da secção transversal constante. Logo, as grandezas são diretamente proporcionais.
2ª figura – A resistência ficou dividida por dois quando dobramos a seção transversal,

mantendo o mesmo comprimento. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais.
3ª figura – A área da seção transversal dobrou quando dobramos o comprimento do resistor, mantendo a mesma resistência. Logo, as grandezas são diretamente proporcionais.
Então, a resposta é direta, inversa e direta.

3) (UFV) As prefeituras das cidades A, B e C construíram uma ponte sobre o rio próximo a estas cidades. A ponte dista 10 km de A, 12 km de B e 18 km de C. O custo da construção, R\$ $8.600.000,00$, foi dividido em partes inversamente proporcionais às distâncias das cidades à ponte. Com a construção, a prefeitura da cidade A teve um gasto de:
a) R\$ $3.200.000,00$
b) R\$ $3.600.000,00$
c) R\$ $3.000.000,00$
d) R\$ $3.800.000,00$
e) R\$ $3.400.000,00$

Solução:
Seja a, b e c os valores pagos pelas prefeituras A, B e C, respectivamente. Então, $a+b+c =$ R\$ $8.600.000,00$ (custo da construção das pontes)

$a \cdot 10 = b \cdot 12 = c \cdot 18 = k$ (partes inversamente proporcionais às distâncias das cidades)

Então, $a = \dfrac{k}{10}$; $b = \dfrac{k}{12}$ e $c = \dfrac{k}{18}$ e como $a + b + c =$ R\$ $8.600.000$,
temos: $\dfrac{k}{10} + \dfrac{k}{12} + \dfrac{k}{18} = 8.600.000 \Rightarrow \dfrac{18k + 15k + 10k}{180} = 8.600.000 \Rightarrow \dfrac{33k}{180} = 8.600.000 \Rightarrow$
$k = 36.000.000$.

Portanto, a prefeitura da cidade A teve um gasto de $a = \dfrac{k}{10} = \dfrac{36.000.000}{10} =$ R\$ $3.600.000$.

4) (UFMG) Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais para o almoço durante 25 dias. Se essa empresa tivesse mais 500 empregados, a quantidade de marmitas já adquiridas seria suficiente para um número de dias igual a:
a) 10
b) 12
c) 15
d) 18

Solução: As grandezas número de empregados (n) e a quantidade de dias (d) são grandezas inversamente proporcionais. Logo, existe um $k > 0$, tal que: $n \cdot d = k$, então $750 \cdot 25 = k$ e $1250 \cdot d = k$, já que a empresa contratou 500 empregados.
Portanto,$750 \cdot 25 = 1250 \cdot n \Rightarrow n = 15$.

5) (ENEM)

A resistência mecânica S de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional a sua largura (b) e ao quadrado de sua altura (d) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento (x), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade k é chamada de resistência da viga.

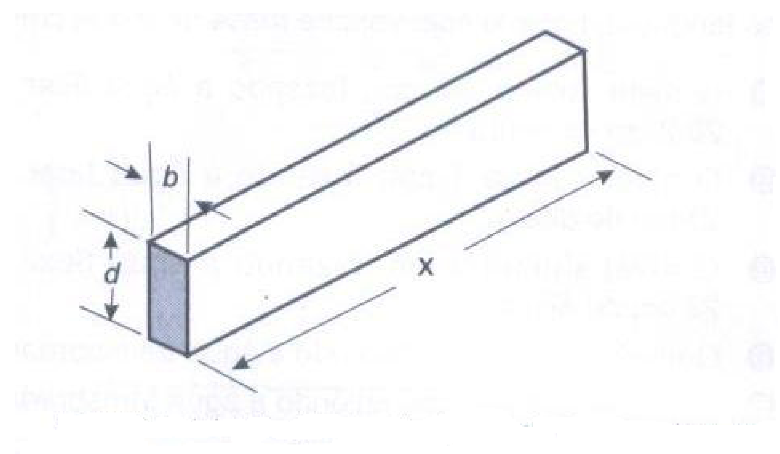


Figura 8.22: ENEM

BUSHAW, D. et al. **Aplicações da matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

A expressão que traduz a resistência S dessa viga de madeira é

a) $S = k\dfrac{b \cdot d^2}{x^2}$

b) $S = k\dfrac{b \cdot d}{x^2}$

c) $S = k\dfrac{b \cdot d^2}{x}$

d) $S = k\dfrac{b^2 \cdot d}{x}$

e) $S = k\dfrac{b \cdot d}{2x}$

Solução: Como a resistência mecânica S de uma viga de madeira é diretamente proporcional a sua largura (b) e ao quadrado de sua altura (d), e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga (x^2),
temos que: $S \sim b, S \sim d^2$ e $S \sim \dfrac{1}{x^2}$, então existe k ($k > 0$) tal que $S = k\dfrac{b \cdot d^2}{x^2}$.

6) (UFMG-ADAPTADA) Se 10 máquinas funcionando 6 horas por dia, durante 60 dias, produzem 90.000 peças, em quantos dias 12 dessas mesmas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzirão 192.000 peças?

Solução: Observamos que a grandeza número de dias (d) é diretamente proporcional ao número de peças produzidas (p) e inversamente proporcional ao número de máquinas (m) e ao número de horas de funcionamento por dia (h), então existe $k > 0$, tal que: $d = k \cdot \dfrac{p}{m \cdot h} \Rightarrow k = \dfrac{m \cdot h \cdot d}{p}$

$k = \dfrac{10 \cdot 6 \cdot 60}{90000}$ e $k = \dfrac{12 \cdot 8 \cdot d}{192000} \Rightarrow \dfrac{10 \cdot 6 \cdot 60}{90000} = \dfrac{12 \cdot 8 \cdot d}{192000} \Rightarrow d = 80$ dias.

7) (UFMG) No ano passado, uma equipe de 13 professores, com um ritmo de trabalho suposto constante, corrigiu 3.000 provas em 6 dias. Este ano, o número, de provas aumentou para 5.500 e a equipe foi ampliada para 15 professores. Para se obter uma estimativa do número n de dias necessários para totalizar a correção, o ritmo de trabalho da equipe deste ano será o mesmo da equipe do ano passado. O número n satisfaz a condição:
a) $n \leq 8$
b) $8 < n \leq 10$
c) $10 < n \leq 12$
d) $n > 12$

Solução: Observamos que a grandeza número de dias (d) é diretamente proporcional ao número de provas (p) e inversamente proporcional ao número de professores (n), então existe $k > 0$, tal que: $d = k \cdot \dfrac{p}{n} \Rightarrow k = \dfrac{n \cdot d}{p}$

$k = \dfrac{13 \cdot 6}{3000}$ e $k = \dfrac{15 \cdot d}{5500} \Rightarrow \dfrac{13 \cdot 6}{3000} = \dfrac{15 \cdot d}{5500} \Rightarrow n = 9,5333...$ dias.

Obs1.: O professor Elon Lages Lima [33] no seu artigo “Que são grandezas proporcionais?” publicada na revista do Professor de Matemática nº 9, destaca a importância de se identificar, em um exercício, se as grandezas envolvidas são proporcionais e se forem se são de forma direta ou inversa. Uma vez que a proporcionalidade for estabelecida, a solução do exercício é questão de tempo. Ele critica o excesso de mecanização nos algoritmos (regra de três e outros) usados na resolução dos exercícios quando estes envolvem grandezas proporcionais. O professor Elon ressalta que é preciso saber as propriedades das grandezas envolvidas para identificarmos duas grandezas como proporcionais e diz que essa proporcionalidade só é válida dentro de certos limites de variação.

Obs2.: Não foi feita no texto referência ao ensino do processo prático da regra de três simples e composta. Essa atitude foi tomada de maneira proposital, uma vez que tal dispositivo leva aos alunos, muitas vezes, a resolver os exercícios de forma mecânica sem perceberem às relações entre as grandezas envolvidas. Essa postura é defendida por Ávila nos artigos "Razões, proporções e regra de três" e "Ainda sobre regra de três", publicados na Revista do Professor de Matemática números 8 e 9 [2] e [3, p.8], sendo que nessa última ele traz um breve histórico do surgimento da regra de três e na maneira como esse assunto é abordado nos livros de Matemática americanos como descrito abaixo:

> "Ao que tudo indica, a regra de três surgiu na Índia e entrou na Europa através dos árabes. Ela foi muito usada no comércio por vários séculos, porém como simples regra, formulada verbalmente e aplicada de maneira mecânica sem qualquer explicação racional. Eis como o matemático indiano Brahmagupta formulava essa regra no século VII da nossa era: na regra de três os nomes dos termos são Argumento (A), Fruto (F) e Requisição (R). O primeiro termo e o último devem ser semelhantes. Obtém-se o valor procurado multiplicando a Requisição pelo Fruto e dividindo o resultado pelo Argumento."
>
> Nesta formulação, "termos semelhantes" significa "grandezas da mesma espécie", que deviam ser medidas com a mesma unidade. Como a regra era aplicada mecanicamente, era importante dizer que o primeiro termo e o último (isto é, A e R) eram semelhantes, para saber quais dos três termos deviam figurar como "meios" na proporção $\frac{A}{F} = \frac{R}{X}$ (donde $X = \frac{R \cdot F}{A}$).
>
> Mas, como dissemos acima, a regra era puramente verbal, nunca expressa por equações ou fórmulas, como estas últimas. Aliás, foi só em fins do século XIV que se reconheceu a ligação da regra de três com as proporções. E saiba o leitor que até o início do século passado a regra de três figurava nos programas de admissão das Universidades de Harvard e Princeton!...
>
> Dissemos, no início deste artigo, que os livros de Matemática usados nos Estados Unidos já não mais incorrem no mesmo arcaísmo de abordagem ainda presente nos livros brasileiros. Aguçados em nossa curiosidade, fomos consultar livros americanos de Aritmética escritos no século passado e lá encontramos a terminologia arcaica – antecedente, consequente, terceira e quarta proporcionais, regra de três – com tratamento igualmente antiquado. Em contraste, os livros americanos modernos não usam nem mesmo a expressão "regra de três" (em inglês "rule of three"). A propósito, recentemente um professor de matemática americano publicou na revista "American Mathematical Monthly" os seguintes versos:
>
> What has become of the rule of three,
> Simple or double, once popular pair?
> Students today no longer see
> Alligation, or tret and tare
>
> O que aconteceu com a regra de três,
> Simples ou composta, outrora um par tão popular?

Os estudantes de hoje não mais reconhecem"

Com estes versos deixamos aqui nossa sugestão de que o nome "regra de três" seja abolido também entre nós.

Exercícios

1) (ENEM) A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional a largura (b) e ao quadrado da altura (d), conforme a figura. A constante de proporcionalidade k varia de acordo com o material utilizado na sua construção. Considerando-se

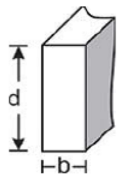


Figura 8.23: ENEM

S como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é
a) $S = k \cdot b \cdot d$

b) $S = b \cdot d^2$

c) $S = k \cdot b \cdot d^2$

d) $S = \dfrac{k \cdot b}{d^2}$

e) $S = \dfrac{k \cdot d^2}{b}$

2) Uma viagem foi feita em 12 dias percorrendo-se 150 km por dia. Quantos dias seriam necessários para fazer a mesma viagem percorrendo-se 200 km por dia?

3) Um automóvel com velocidade média de 60 km/h gasta 5 horas para percorrer a distância entre duas cidades. Qual será o tempo gasto para percorrer a mesma distância com velocidade média de 100 km/h?

4) (UFV) A empresa Telemercado deseja distribuir entre seus funcionários Jair, Antônio e Paulo, a título de gratificação, uma quantia de R\$ $1.240,00$ em partes inversamente proporcionais ao número de reclamações recebidas, que cada um obteve, durante o mês. Jair recebeu 2 reclamações, Antônio 3 reclamações e Paulo 5 reclamações. É CORRETO afirmar que:
a) Paulo recebeu a metade da quantia recebida pelo Antônio.
b) Jair e Paulo receberam R\$ $600,00$ e R\$ $240,00$, respectivamente.

c) Paulo recebeu a metade da quantia recebida pelo Jair.
d) Jair e Antônio receberam R$ $600,00$ e R$ $440,00$, respectivamente.

5) (UFV) Em uma competição foram premiados apenas os cinco primeiros competidores e não houve empates. Sabendo-se que foram distribuídos R$ $137.000,00$ em prêmios cujos valores eram inversamente proporcionais à ordem de chegada dos competidores, então a soma dos prêmios do primeiro e quinto colocados foi:
a) R$ 80.000
b) R$ 75.000
c) R$ 72.000
d) R$ 90.000
e) R$ 77.000

6) (UNI-BH) Em uma empresa, 8 funcionários produzem 2000 peças, trabalhando 8 horas por dia, durante 5 dias. O número de funcionários para que essa empresa produza 6000 peças em 15 dias, trabalhando 4 horas por dia, é
a) 2
b) 3
c) 4
d) 8
e)16

7) (ENEM) Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R$ $10,00$ por trabalhador por dia de trabalho, e R$ $1.000,00$ pelo aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R$ $25.000,00$.

Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria
a) manter sua proposta.
b) oferecer 4 máquinas a mais.
c) oferecer 6 trabalhadores a mais.
d) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.
e) reduzir em R$ $400,00$ o valor do aluguel diário de uma máquina.

8) (ENEM) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

a) 920 kg.
b) 800 kg.
c) 720 kg.
d) 600 kg.
e) 570 kg.

9) (UFV-PASES) Para pintar os prédios de um condomínio será usada uma mistura de tinta branca com tinta azul, na razão 2 : 5, nessa ordem. Calcule:
a) a quantidade necessária de tinta branca, sabendo que foram comprados 560 litros de tinta azul para fazer a mistura.

b) o número de dias necessários para que 10 pintores façam o serviço, sabendo que 6 pintores gastam 15 dias para fazer o mesmo serviço.

Química

Segundo Feltre [23]

As Leis Físicas dos Gases

São leis experimentais que mostram como variam o volume, a pressão e a temperatura mantendo sempre um destes constante. O estado de um gás são as condições de volume (V), pressão (P) e temperatura (T) em que esse gás se encontra.

Lei de Boyle-Mariotte

Sob temperatura constante (transformação isotérmica), o volume ocupado por determinada massa gasosa é inversamente proporcional a sua pressão.
$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$ ou $P \cdot V =$ constante

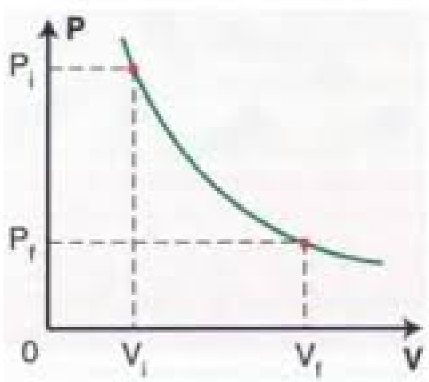


Figura 8.24: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAVp8AF/estudo-fisico-dos-gases

Lei de Gay-Lussac

Sob pressão constante (transformação isobárica), o volume ocupado por determinada massa gasosa é diretamente proporcional a sua temperatura absoluta.
$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ ou $\frac{V}{T}$ = constante

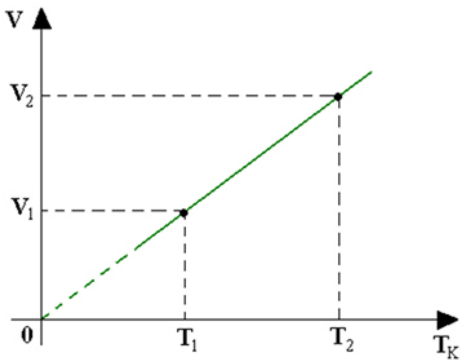


Figura 8.25: http://pt.wikipedia.org/wiki/$TransformaC3A7C3A3o_isobC3A1rica$

Lei de Charles

Sob volume constante (transformação isovolumétrica), a pressão exercida por uma determinada massa gasosa é diretamente proporcional a sua temperatura absoluta.
$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ ou $\frac{P}{T}$ = constante

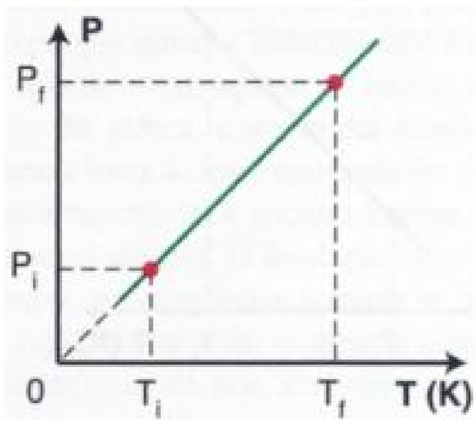


Figura 8.26: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAVp8AF/estudo-fisico-dos-gases?part=2

Equação Geral dos Gases

Reunindo as três fórmulas vistas nas três leis físicas dos gases, chegamos a fórmula matemática: $\dfrac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \dfrac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$ ou $\dfrac{P \cdot V}{T}$ = constante que é chamada equação geral dos gases. Note que ela só é válida para uma massa constante de um mesmo gás.

Condições Normais de Pressão e Temperatura (CNTP)

Por definição, chamamos condições normais de pressão e temperatura (CNTP) a:
Pressão = 1 atm = 760 mmHg
Temperatura = 0 ^oC = 273 K

Gás Perfeito e Gás Real

Gás perfeito, ou gás ideal, seria o gás que obedeceria, rigorosamente, as às leis físicas dos gases. Os gases comuns, que chamaremos de gases reais, sempre se afastam do comportamento de um gás perfeito, principalmente a pressões muito altas e/ou temperaturas muito baixas. Nesses casos, o volume dos gases se reduz bastante, e as partículas se avizinham, passando umas a interferir no movimento das outras. Desse modo, podemos concluir que um gás real se assemelha mais ao gás perfeito a medida que a pressão diminui e a temperatura aumenta; em outras palavras, o comportamento de um gás será tanto mais perfeito quanto mais rarefeito ele estiver.

Exercícios

1) (CESGRANRIO-RJ) Você brincou de encher, com ar, um balão de gás, na beira da praia, até um volume de 1 L e o fechou. Em seguida, subiu uma encosta próxima carregando o balão, até uma altitude de 900 m, onde a pressão atmosférica é 10% menor do que a pressão ao nível do mar. Considerando que a temperatura na praia e na encosta seja a mesma, o volume de ar no balão, em L, após a subida, será de
a) $0,8$ L
b) $0,9$ L
c) $1,0$ L
d) $1,1$ L
e) $1,2$ L

2) (FMPA-MG) Ao sair de viagem, o motorista calibrou os pneus de seu veículo colocando no seu interior 2 atm de pressão, num dia quente (27 ^oC). Ao chegar ao destino, mediu novamente a pressão dos pneus e encontrou $2,2$ atm. Considerando-se desprezível a variação do volume, a temperatura do pneu, ao final da viagem, era

a) $660\ ^oC$
b) $57\ ^oC$
c) $330\ ^oC$
d) $272\ ^oC$
e) $26,7\ ^oC$

3) (FMPA-MG) Um gás ocupa um volume de 200 mL a uma pressão de 380 mmHg a uma temperatura de $27\ ^oC$. Seu volume nas condições normais de temperatura e pressão será
a) $91,9$ mL
b) $200,0$ mL
c) $910,0$ mL
d) $20,0$ mL
e) $2,0$ mL

4) (EEM-SP) Uma determinada massa gasosa, confinada em um recipiente de volume igual a $6,0$ L, está submetida a uma pressão de $2,5$ atm e sob temperatura de $27\ ^oC$. Quando a pressão é elevada em $0,5$ atm, nota-se uma contração no volume de $1,0$ L.
a) Qual a temperatura em que o gás se encontra?
b) Que tipo de transformação ocorreu?

8.4 Geometria Plana

8.4.1 Teorema de Tales

Problematização:
Ler o texto abaixo com os alunos

> "Tales de Mileto, um dos sete sábios da Grécia, era filósofo, geômetra, astrônomo, físico, político e comerciante. É considerado pelos historiadores o iniciante da geometria demonstrativa e da geometria Grega.
>
> Por volta de 580 a.C, Tales fez uma viagem ao Egito e diante da mais alta pirâmide - Queops, fora desafiado pelo faraó a calcular sua altura. Através de um método simples, por ele mesmo criado, os segmentos proporcionais, Tales calculou a altura de Queops. Ele fincou uma estaca perpendicular ao solo e mensurou sua sombra. Após medir também a sombra da pirâmide ele calculou a altura da pirâmide, pois há proporcionalidade entre a sombra da estaca e da pirâmide, assim como entre a altura de ambas."

Autor desconhecido.

Obs.: Ao fim da leitura discutir o texto com os alunos provocando-os sobre o método usado por Tales para medir a altura da pirâmide. Pedir que os alunos, separados ou em dupla, calculem a altura do seu colega usando as medidas de sua própria altura e das medidas de suas sombras, com o auxilio de uma fita métrica e uma calculadora. Solicitar que os alunos comparem os valores encontrados com o valor real medido com a fita métrica. Nesse momento os alunos devem estar fora da sala de aula. Fazer o mesmo com outros objetos. Comparar os resultados com o conceito de grandezas diretamente proporcionais, já estudado. A partir das observações definir com os alunos o Teorema de Tales e concluir.

A sequência natural que leva a definir com os alunos o Teorema de Tales e suas consequências corresponde a sequência apresentada na seção 4.3, salvo algumas demonstrações que fica a critério do professor a sua inclusão ou não.

Exercícios:

1) As ruas Amor, Bondade e Caridade são paralelas e as avenidas Paz e Felicidade são transversais a essas ruas.

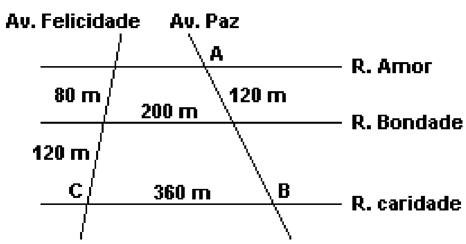


Figura 8.27:

Arthur mora na esquina da Rua Amor com a Avenida Paz, indicada na figura pelo ponto A.

a) Para ir à videolocadora situada na esquina da Rua Caridade com a Avenida Paz, indicada pelo ponto B, quantos metros, no mínimo, Arthur percorre?

b) Arthur faz uma caminhada de 200 metros em 3 minutos. Para ir à sua escola, situada na esquina da Rua Caridade com a Avenida Felicidade, indicada pelo ponto C, ele anda pela Avenida Paz e vira na Rua Caridade. Quanto tempo Arthur demora para chegar à escola?

2) Leia o texto a seguir.

"Tales, o grande matemático do século VI a.C., foi também um próspero comerciante. Certa vez, visitou o Egito em viagem de negócios. Nessa ocasião, ele assombrou o faraó e toda a corte egípcia, medindo a altura da pirâmide de Quéops, cuja base é um quadrado de 230 metros de lado. Para calcular a altura da pirâmide, Tales fincou verticalmente no solo uma estaca que ficou com altura de 1 metro acima do solo. As medidas dos comprimentos da sombra da pirâmide e da sombra da estaca são, respectivamente, 255 metros e $2,5$ metros."

Adaptado de: JAKUBOVIC, J., CENTURION, M. LELLIS, M.C. Matemática na Medida Certa. Volume. São Paulo: Scipione)

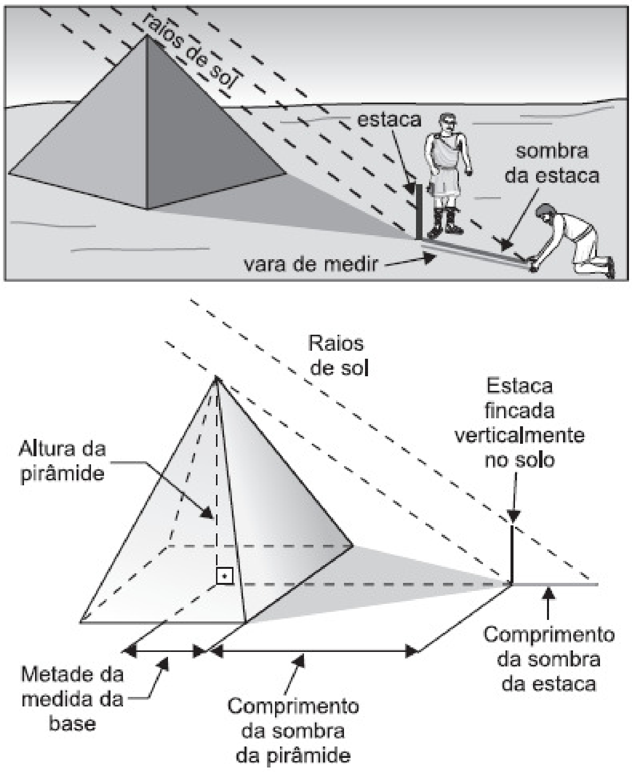


Figura 8.28:

Com base nas informações do texto, é válido afirmar que a altura da pirâmide, em metros, é

a) $14,80$
b) $92,50$
c) 148
d) 925

e) 1480

3) Na figura, as retas paralelas a, b e c são interceptadas por duas transversais r e s. Considerando-se as medidas dos segmentos nessa figura, o valor de $(x + y)$ é igual a

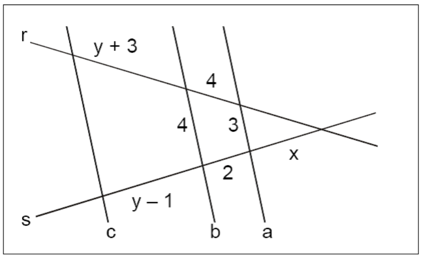


Figura 8.29:

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

4) (UFMG) Em determinada hora do dia, o sol projeta a sombra de um poste de iluminação sobre o piso plano de uma quadra de vôlei. Neste instante, a sombra mede 16 m. Simultaneamente, um poste de $2,7$ m, que sustenta a rede, tem sua sombra projetada sobre a mesma quadra. Neste momento, essa sombra mede $4,8$ m. Determine a altura do poste de iluminação.

5) No triângulo da figura a seguir, DE//BC nessas condições determine:

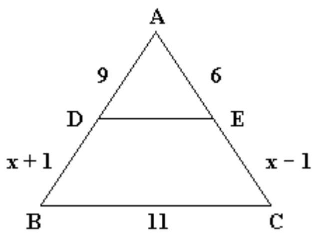


Figura 8.30:

a) a medida x

b) o perímetro do triângulo ABC

6) Na figura a seguir, BA//CD. Então, determine os valores de x e y.

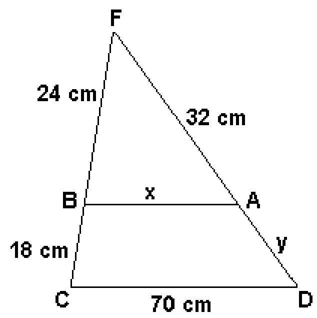


Figura 8.31:

7) (PUC-MG) O preço de uma pizza é proporcional a sua área. Uma pizza grande custa R$ $18,00$ e tem diâmetro medindo 42 cm. O preço de uma mini-pizza, cujo diâmetro é 14 cm, é
a) R$ $1,50$
b) R$ $2,00$
c) R$ $2,50$
d) R$ $3,00$
e) R$ $3,50$

8) Um trabalhador gasta 5 horas para limpar um terreno circular de 7 metros de raio. Quanto tempo gastaria se o terreno tivesse 14 metros de raio?

9) (ENEM) João tem uma loja onde fabrica e vende moedas de chocolate com diâmetro de 4 cm e preço de R$ $1,50$ a unidade. Pedro vai a essa loja e, após comer várias moedas de chocolate, sugere ao João que ele faça moedas com 8 cm de diâmetro e mesma espessura e cobre R$ $3,00$ a unidade. Considerando que o preço da moeda depende apenas da quantidade de chocolate, João
a) aceita a proposta de Pedro, pois, se dobra o diâmetro, o preço também deve dobrar.
b) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ $12,00$.
c) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ $7,50$.
d) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ $6,00$.
e) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ $4,50$.

8.5 Sólidos Geométricos

A sequência natural que leva a definir com os alunos os Sólidos Geométricos corresponde a sequência apresentada na seção 4.4, salvo algumas demonstrações que fica a critério do professor a sua inclusão ou não.

Capítulo 9

Conclusão

Por meio do estudo do conceito de proporcionalidade ensinado na disciplina de matemática, do histórico deste e dos autores contemporâneos pesquisados conclui-se que esse conceito é muitas vezes ensinado de forma mecânica, privilegiando o algoritmo e não o entendimento do mesmo, o que dificulta sua aplicação em outros conteúdos matemáticos e em outras disciplinas. Além disso, a forma como o conceito proporcionalidade é apresentado, muitas vezes, dissocia-se da realidade, isto é, o aluno não compreende o "porque" de se estudar um conteúdo que ele acredita que não irá utilizar na sua vida prática. Observou-se também que muitos livros didáticos representam essa mesma realidade e estão dissociados do que é recomendado pelos documentos oficiais Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN'S) e a matriz de referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O objetivo do trabalho foi alcançado considerando que foi apresentada uma proposta de sequência didática que privilegia os conceitos em detrimento da simples memorização. Demonstra a importância do conceito de proporcionalidade para a compreensão e o aprendizado de vários conteúdos na Matemática e em outras disciplinas como Geografia, Ciências, Física e Química, destacando a importância de se retomar esse conceito sempre que for necessário, à medida que se ensina novos conteúdos. A proposta também destaca a importância do trabalho interdisciplinar mostrando que as disciplinas podem e devem trabalhar juntas sempre que possível, facilitando o entendimento dos conteúdos. Como exemplo, podem-se aplicar exercícios de outras disciplinas que cobrem o mesmo conceito em atividades durante as aulas de Matemática. A proposta também busca dar significado aos conteúdos matemáticos, uma vez que os mesmos são aplicados em outras áreas do conhecimento e em problemas da vida cotidiana.

A proposta apresentada não tem o objetivo de varrer todas as situações onde o conteúdo proporcionalidade poderia ser aplicado, dentre as disciplinas do ensino fundamental e médio, e sim dar uma amostra do que se pode fazer a partir desse conceito. Da mesma forma que a proposta focou no conceito de proporcionalidade existem outros conceitos matemáticos que poderiam ser usados em trabalhos com essas, e outras disciplinas, seguindo a mesma ideia de aplicação do conceito, com a contextualização, para facilitar o aprendizado. Entendo que a proposta apresentada é mais uma ferramenta que o professor tem para contribuir com o processo ensino aprendizagem e não a única ferramenta, uma vez que pessoas diferentes reagem de forma diferente às mesmas experiências.

Dessa forma, acho que a proposta contribui como facilitador do aprendizado dos conteúdos das disciplinas envolvidas. Infelizmente não pude aplicar a proposta em uma turma regular para colher os dados da aprendizagem e fazer um paralelo com turmas que não tiveram o mesmo trabalho. A proposta, por ser ampla, deve ser aplicada de forma pontual, respeitando a série/ano e fazendo recortes da sequência, uma vez que ela varreu conteúdos de todos os anos dos ensinos fundamental e médio.

Sendo assim, este trabalho deseja incentivar seus leitores a avançar em novas pesquisas que estejam inseridas em seus contextos particulares.

Bibliografia

[1] M. Adas, S. Adas, **Expedições geográficas, 6º, 7º ano**. Editora Moderna, 2011.

[2] G. Ávila, **Razões, proporções e regra de três**. Revista do Professor de Matemática, nº8, p.1 − 8, 1986.

[3] G. Ávila, **Ainda sobre regra de três**. Revista do Professor de Matemática, nº9, p.1 − 10, 1986.

[4] C. Barros, W. R. Paulino, **Ciências, 9º ano: física e química**. Editora Ática, 2013.

[5] A. P. Bemfeito, C. E. Pinto, **Projeto Apoema ciências, 9º ano**. Editora Brasil, 2013.

[6] E. Bianchini, **Matemática, 8º e 9º ano**. Editora Moderna, 2011.

[7] J. F. Bigotto, M. A. Vitiello, M. A. M. Albuquerque, **Geografia sociedade e cotidiano, 6º e 7º ano**. Editora Escala Educacional, 2009.

[8] G. J. Biscuola, A. C. Maiali, **Física, volume único**. Editora Saraiva, 1996.

[9] V. Bongiovanni, **As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método de exaustão**. UNIÓN-Revista ibero-americana de Educación Matemática, Número 2. Disponível em: $http://www.fisem.org/web/union/revistas/2/Union_0 02_0 08.pdf$. Acessado em 01/04/2014.

[10] MEC/SEF Brasil, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Ministério da Educação-Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

[11] BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira., **Matriz de Referência para o Enem** 2009. MEC-Brasil, 2009. Disponível: $< http://portal.mec.gov.br/index.php?option = com_content\&view = article\&id = 13318\&Itemid = 310 >$ Acesso em: 05 jan. 2014.

[12] BRASIL. Ministério da Educação., **PCN+ ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC** . MEC-Brasil, 2002. Disponível: $< http :$

$//portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf$ >. Acesso em: 22 jan. 2014.

[13] BRASIL. Ministério da Educação/INEP., **ENEM (Exame Nacional Do Ensino Médio): fundamentação teórico metodológica**. MEC/INEP-Brasil, 2005.

[14] Conselho Nacional de Educação., **Conselho Nacional de Educação – Câmara de Educação Básica**. Brasil-Ministério da Educação e do Desporto, 1998.

[15] Eduardo de Freitas., **Geografia: Demografia - Conceitos Demográficos**. Revista Brasil Escola, 2008. Disponível em: $http://www.brasilescola.com/geografia/conceitos - demograficos.htm$. Acessado em 01/09/2014.

[16] Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais., **Conteúdo Básico Comum-MG**. SEE-MG, 2006. Disponível em: $http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv$. Acessado em 05/05/2014.

[17] M. A. Coelho, L. Terra, **Geografia geral e do Brasil, volume único**. Editora Moderna, 2003.

[18] C. R. Costa, **Panorama de um estudo sobre razões e proporções em três livros didáticos**. Tese de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, PUC-SP, 2005.

[19] L. R. Dante, **Matemática: contexto e aplicações, 1ª e 2ª séries**. Editora Ática, 2011.

[20] O. Dolce, J. N. Pompeo, **Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Plana. vol: 9**. Editora Atual, 1995.

[21] O. Dolce, J. N. Pompeo, **Fundamentos de Matemática Elementar. Geometria Espacial. vol: 10**. Editora Atual, 1999.

[22] C. H. Edwards Jr, **The Historical Development of the Calculus**. Springer-Verlag, 1979.

[23] R. Feltre, **Química v.** 1 **e** 2. Editora Moderna, 2004.

[24] E. F. Floriani, **Resolução de Problemas de Proporcionalidade: Um Estudo com Alunos do Ensino Fundamental e Médio**. Tese de Mestrado Acadêmico em Educação, Centro de Ciências Humanas e da Comunicação, Univali, 2004.

[25] F. Fugita, M. A. M. Fernandes, M. S. Policastro, W. S. Tamashiro, **Matemática, 1ª e 2ª séries: ensino médio - Coleção Ser Protagonista**. Editora SM, 2009.

[26] J. R. Giovanni, J. R. Giovanni Jr, J. R. Bonjorno, P. R. C. Souza, **Matemática uma nova abordagem: 1ª e 2ª séries ensino médio - Série clássicos do ensino médio**. Editora FTD, 2013.

[27] M. J. S. V. Gonçalves, **Raciocínio proporcional estratégias mobilizadas por alunos a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade**. Tese de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Centro de Ciências Exatas, UFMS, 2010.

[28] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística., **Séries Históricas e Estatísticas**. IBGE, 2010. Disponível em: *http://seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?vcodigo=POP*117. Acessado em 01/09/2014.

[29] G. Iezzi, O. Dolce, D. Degenszajn, R. Périgo, N. Almeida, **Matemática: Ciência e aplicações,** 1 **e** 2**: Ensino Médio**. Editora Atual, 2010.

[30] G. Iezzi, O. Dolce, D. Degenszajn, R. Périgo, N. Almeida, **Fundamentos de Matemática Elementar. Matemática Comercial, Matemática Finaceira e Estatística Descritiva. vol: 11**. Editora Atual, 1999.

[31] F. M. Leonardo, **Conexões com a Matemática: Ensino Médio**. Editora Moderna, 2013.

[32] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado, **Temas e Problemas Elementares. Coleção do Professor de Matemática**. Editora SBM, 2005.

[33] E. L. Lima, **Que são grandezas proporcionais?**. Revista do Pofessor de Matemática, nº9, p.21 − 29, 1986.

[34] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, A. C. Morgado, **A Matemática do Ensino Médio - volume 1. Coleção do Professor de Matemática**. Editora SBM, 2012.

[35] E. A. Lucci, A. L. Branco, **Geografia: homem e espaço,** 6º **ano**. Editora Saraiva, 2010.

[36] C. Magalhães, L. Sourient, M. Gonçalves, R. Rudek, **Projeto Apoema - Geografia,** 6º **e** 7º **ano**. Editora do Brasil, 2013.

[37] A. de M. Martins, **Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental**. Tese de Mestrado em Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, PUC-SP,2008.

[38] T. Nunes, **Revista Nova Escola**. Editora Abril, 2003.

[39] N. B. Olic, A. C. Silva, R. Lozano, **Vereda digital geografia**. Editora Moderna, 2012.

[40] M. R. Paiva, **Matemática**. Editora Atual, 2010.

[41] D. N. Paraná, **Física, volumes** 1 **e** 2. Editora Ática, 1996.

[42] Pernambuco. Secretaria de Educação., **Base Curricular Comum para as Redes Públicas de ensino de Pernambuco: matemática**.Secretaria de Educação-Recife/PE, 2008.

[43] A. R. Perotti, **O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais: Uma proposta alternativa de ensino**. Tese de Mestrado em Educação Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, PUC-SP, 1999.

[44] F. M. Peruzzo, L. E. Canto, **Química na abordagem do cotidiano**. Editora Moderna, 2006.

[45] M. G. O. Pontes, **Medidas e proporcionalidade no cotidiano escolar e extraescolar**. Tese de Doutorado em Educação, Faculdade de Educação, UNICAMP-SP, 1996.

[46] F. Ramalho Jr, N. G. Ferraro, P. A. T. Soares, **Os Fundamentos da Física, V.**1 **Mecânica e V.**2 **Termologia, óptica e ondas**. Editora Moderna, 2009.

[47] A. C. Rosso Jr, P. Furtado, **Matemática: uma ciência para a vida,** 1ª **e** 2ª **séries**. Editora Harbra, 2011.

[48] A. R. Ruiz, **Ensino do Conceito de proporcionalidade**. Tese de Mestrado em Educação, Faculdade de Educação, USP, 1985.

[49] F. S. Sampaio, I. S. Sucena, **Geografia: ensino médio, volume único - Coleção Ser Protagonista**. Editora SM, 2010.

[50] L. A. Santaló, **Matemática para não matemáticos p.**11 **(Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas)**. Editora Artes Médicas, 1996.

[51] A. Stefanovits, **Física: ensino médio,** 1^o **ano - Coleção Ser Protagonista**. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por Edições SM; editor responsável Angelo Stefanovits. Editora SM, 2013.

[52] D. P. da Silva, **Regra de Três: prática escolar de modelagem matemática**. Tese de Mestrado em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica, UFPA, 2011.

[53] K. C. S. Smole, M. I. S. Diniz, **Matemática: ensino médio, volumes** 1 **e** 2. Editora Saraiva, 2010.

[54] A. G. Spinillo, **Proporções nas Séries Iniciais do Primeiro Grau**. Editora UFPE, 1997.

[55] J. R. Souza, **Novo olhar matemática, volumes** 1 **e** 2. Editora FTD, 2011.

[56] J. R. Souza, P. R. M. Pataro, **Vontade de saber matemática,** 7**º,** 8**º e** 9**º ano**. Editora FTD, 2009.

[57] L. I. L. de Souza, **Números Reais: História e Didática**. Tese de Mestrado em Matemática para Professores, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa-Portugal, 2013.

[58] V. S. Tomaz, M. M. S. David, **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula p.**16 **(Tendências em educação matemática)**. Editora Autêntica, 2008.

[59] J. Usberco, E. Salvador, **Química, volume** 1**: Química Geral**. Editora Saraiva, 2009.

[60] J. Usberco, E. Salvador, J. M. Martins, H. M. Velloso, L. C. Ferrer, E. Schechtmann, **Companhia das Ciências,** 9**º ano**. Editora Saraiva, 2011.

[61] A. Zabala, **A prática educativa: como ensinar**. Editora Artes Médicas Sul Ltda, 1998.