INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Sistemas de Equações com Duas Incógnitas
Análise de Material Didático e Indicações

Elizabeth Ribeiro de Macedo Motta

Rio de Janeiro - RJ

Julho/2015

Elizabeth Ribeiro de Macedo Motta
Felipe Machado Teixeira Couto

Sistemas de Equações com Duas Incógnitas

Análise de Material Didático e Indicações

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), ministrado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito para a obtenção do Grau de Mestre.

Área de Atuação: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira

Rio de Janeiro
2015

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer à Deus, por me dar saúde, força, foco, determinação, e tudo mais que era necessário para não desistir e seguir meu objetivo até o final.

À minha família, principalmente à minha mãe, por me ajudar imensamente com a minha filha que nasceu na semana de início do curso.

Ao pai da minha filha, que me incentivou e me apoiou desde o início, me dando força sempre que alguma dificuldade aparecia.

Ao meu amigo Felipe, que esteve comigo desde antes de eu conseguir começar a assistir às aulas, até a conclusão desse trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro, pelo incentivo, correções, paciência, muita paciência.

Muito obrigada.

"A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo."

(Albert Einstein)

RESUMO

Baseados na leitura dos *Parâmetros Curriculares Nacionais* e das *Diretrizes Curriculares Nacionais*, analisaremos três livros didáticos distintos, destinados aos alunos do 8º ano. Nosso foco é o estudo de *Sistemas de Equações do 1º Grau com duas Incógnitas*. Baseado nesta análise, elaborarei uma proposta de aula.

Palavras-chave: sistemas de equações, livros didáticos, análise, proposta de aula.

ABSTRACT

Based on the reading of the National Curriculum Parameters and the National Curriculum Guidelines we analyze three different textbooks for 8th grade students. Our focus is the study of equations Systems of First Degree with two Unknowns. Based on this analysis elaborate a class proposal.

Keywords: equations systems, textbooks, analyse, class proposal.

Sumário

1 Introdução

Este capítulo foi elaborado em parceria com o aluno Felipe Machado Teixeira Couto.

É sabido que a Escola moderna passa por transformações que buscam responder aos anseios da sociedade. No Brasil, parte do ímpeto para essa mudança veio através dos documentos oficiais do Ministério da Educação e Cultura com seus Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e do Conselho Nacional de Educação com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs).

Por consequência de ambos, ações conjuntas entre todos os personagens da Educação se fazem presentes para que a prática no cotidiano escolar entre em consonância com a teoria e metas dos documentos. Todo esse esforço é refletido na mudança que se concretiza dentro da escola nas relações entre professor, o material didático usado, suas aulas e o aluno.

Este trabalho busca contribuir para a transformação que precisamos incorporar às aulas de Matemática no Ensino Fundamental. Dentro deste contexto, farei a análise dos livros didáticos: *Praticando Matemática de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos; Matemática – Ideias e Desafios de Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga; Projeto Teláris – Matemática de Luiz Roberto Dante.*

O aluno Felipe Machado Teixeira Couto fará a análise das apostilas produzidas pela Secretaria Municipal de Educação do rio de Janeiro (SME/RJ) para Matemática do 8º ano, nas edições de 2012, 2013 e 2014.

Todas as análises serão feitas com foco no tema *Sistemas de Equação do 1º grau com duas Incógnitas*.

Para tanto faremos uma breve revisão dos documentos oficiais PCN e DCN, buscando indicações que nos permita debater a qualidade nos materiais didáticos citados buscando erros e acertos, traçando a evolução de material didático ao longo das edições ano a ano.

Esta análise servirá para me auxiliar na indicação de uma nova proposta de aula e para elaboração de melhorias ao material da SME/RJ, feitas pelo aluno Felipe Machado Teixeira Couto, para que ele esteja ainda mais ligado as ideias explícitas tanto no PCN quanto no DCN.

Este trabalho é parte dos requisitos para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática pelo PROFMAT. É baseado no trabalho de conclusão de curso dos alunos Gabriella Marques Pereira da Costa e Alexandre de Azevedo Silva.

O aluno Felipe Machado Teixeira Couto teve coparticipação no presente trabalho. É, portanto, um trabalho formado de parte comum e individual. Os capítulos referentes à análise do PCN e DCN, são de parte comum. A parte individual é a análise de materiais didáticos e posterior indicação de melhorias para o material analisado.

2 Contribuições dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática no Ensino Fundamental

Este capítulo foi elaborado em parceria com o aluno Felipe Machado Teixeira Couto.

> **“**Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania.” (PCN, 1998, p. 05)

Utilizaremos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) como uma das referências para o desenvolvimento do presente trabalho. Espera-se que esse estudo crie base para que possamos analisar com mais clareza o material didático disponível e elaborar com maior qualidade as aulas a que este trabalho é proposto.

Dada a leitura do PCN, entende-se que a Matemática Escolar no Ensino Fundamental busca auxiliar na formação da construção de raciocínios do aluno, seja em si mesma, através da resolução de problemas e aplicações, no mundo do trabalho e para o desenvolvimento da cidadania. Além do claro papel da Matemática em conversar com as ciências através do desenvolvimento da linguagem, exibindo assim seu caráter interdisciplinar.

Uma forte crítica ao sistema tradicional de ensino está presente em todo documento. Ele deixa claro que tanto professor quanto aluno devem se resignificar para atender as novas perspectivas de Ensino em Matemática. Esperando de ambos, maior reflexão e conhecimento do processo em detrimento da finalidade de cada conteúdo.

Os conteúdos de Matemática para o Ensino Fundamental estão separados em Blocos e para este trabalho estaremos interessados no estudo de Sistema de Equações com duas Incógnitas que aparece no 4° ciclo de escolaridade no Bloco intitulado Números e Operações. Como exposto no PCN em Conceitos e Procedimentos nas páginas 88:

> “Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta.”

Ainda sobre o assunto Sistema de Equações temos na página 84 do PCN:

> “Assim, no trabalho com a Álgebra é fundamental a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação. Para apoiar a compreensão desses conceitos pode-se lançar mão da construção e interpretação de planilhas, utilizando recursos tecnológicos como a calculadora e o computador.”

Segue abaixo um esquema bastante específico sobre a divisão da Álgebra para o Ensino Fundamental retirada da página 116 do PCN – Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental:

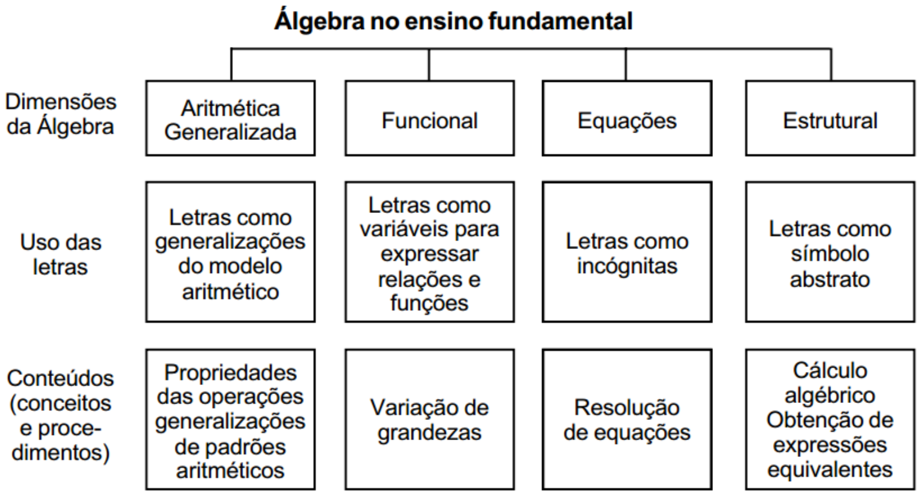


Figura 1- Álgebra no Ensino Fundamental – PCN, p. 116

Uma das primeiras preocupações está nas definições que encontramos para variável e incógnita, muito presentes durante o ensino de Sistemas de Equações. Segundo o documento, ainda muitos alunos terminam o Ensino Fundamental acreditando que uma letra substitui um valor desconhecido estático, mas não percebem situações em que a letra está no lugar de um valor que está variando. Do nosso ponto de vista, esperamos que o aluno compreenda que existem os dois papéis sem necessariamente usar esta terminologia, uma vez que até entre os autores não há um uso consistente destas duas palavras.

Outro ponto importante está na importância dos gráficos para o desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos, indicando a necessidade de trabalharmos Geometria e Álgebra conjuntamente. Esperamos analisar documentos que explorem retas e suas posições relativas comparando-as com as soluções dos Sistemas de Equações.

Uma preocupação com a sintaxe de Sistemas de Equações deve também ser observada. Os PCNs indicam cuidado especial para o uso de situações-problemas inúmeras em contextos que explorem várias representações algébricas e eventuais obtenções de expressões equivalentes. Inclui-se aí as técnicas para resolução de Sistemas de Equações.

Ainda em sintonia com as ideias do PCN, veremos qualidade nos Materiais Didáticos que possibilitem ao aluno transformar o mundo a sua volta com seus conhecimentos matemáticos, em questões que envolvam sua cidadania, o mundo das ciências, tecnologia e do trabalho. Temas que surgem através da transversalidade e interdisciplinaridade.

Outros itens tornam o material a ser pesquisado mais rico aos olhares do PCN. A ideia do trabalho em espiral em detrimento do tratamento linear também é tratada. Além da indicação para o uso de calculadoras, da informática e da História da Matemática como alternativas para o Ensino.

3 Contribuições das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática no Ensino Fundamental

Este capítulo foi elaborado em parceria com o aluno Felipe Machado Teixeira Couto.

> "Parecer n° CEB 004/98 - Artigo 2° Diretrizes Curriculares nacionais são o conjunto de definições doutrinárias sobre Princípios, Fundamentos e Procedimentos d Educação Básica, expressas pela Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação, que orientarão as Escolas Brasileiras dos Sistemas de ensino, na organização, articulação, desenvolvimento e avaliação de sus Propostas Pedagógicas."

Dada a natureza dos DCNs dentro do cenário da Educação, precisamos estabelecer correspondência entre o documento e o Ensino de Matemática. Especificamente para este projeto estamos interessados no Ensino de Sistemas de Equações.

Embora não haja neste documento citações específicas para este propósito, entendemos que, ao desenvolver conteúdo específico para o trabalho no Ensino Fundamental e Médio, uma aula de qualidade deva refletir em aspectos práticos os princípios expostos no DCN. Pretendemos, portanto, expor tais reflexos para o trabalho do professor.

Sobre o que esperamos por Qualidade extraímos dos DCNs:

> "O conceito de qualidade na escola, numa perspectiva ampla e basilar, remete a uma determinada ideia de qualidade de vida na sociedade e no planeta Terra. Inclui tanto a qualidade pedagógica quanto a qualidade política." DCN, 2013, p. 21

A Matemática se encontra dentro da Base Nacional Comum e espera-se que esta seja trabalhada junto da parte diversificada. Esta parte propõe enriquecer e complementar o Ensino considerando o estudo de características regionais e locais, da cultura e da economia, conforme descrito no artigo 15, p. 68, DCN.

Logo, ao ensinar Sistemas de Equações buscaremos textos que, transversalmente, trabalhem situações do cotidiano do educando. Também serão priorizados aqueles que contextualizem e conversem com outras disciplinas para esse fim.

Existem três princípios norteadores das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Primeiro, o princípio Ético da Autonomia, das responsabilidades da solidariedade e do Respeito ao Bem Comum. Em segundo, o Político, o principio dos Direitos e Deveres de Cidadania, do exercício da Criticidade e do respeito à Ordem democrática. Por último, o princípio Estético da Sensibilidade, da Criatividade e da diversidade de Manifestação Artística e Cultural.

Falando especificamente do Estudo de Sistemas de Equações com duas incógnitas, esperamos que através da análise de contextos específicos, considerando o Princípio de Ética, possamos desenvolver valores que embasem o aluno no debate referente ao respeito às diversidades, inclusive prestando solidariedade aos grupos enfraquecidos e vulneráveis social e economicamente.

Sobre o Princípio Político, em uma educação para a cidadania, esperamos encontrar atividades que ajudem a criança na sua formação crítica e participativa. Ou seja, envolvê-la em atividades que as faça opinar e escutar a opinião do próximo. Em particular, no Ensino de Sistemas de Equações com duas incógnitas, mais uma vez a análise de dados equacionados e seus gráficos cria fonte de argumentos para o debate.

Por fim, considerar o Princípio Estético ao ensinar Sistemas de Equações está relacionado à possibilidade gráfica que teremos para exibir informações, bem como na relação que existe das possibilidades de soluções e a posição entre as retas.

Embora não sejam diretas as assertivas do documento sobre os conteúdos de Matemática que devemos ensinar, são apontados dois parâmetros importantes na página 118:

> "Quanto ao planejamento curricular, há que se pensar na importância da seleção dos conteúdos e na sua forma de organização. No primeiro caso, é preciso considerar a relevância dos conteúdos selecionados para a vida dos alunos e para a continuidade de sua trajetória escolar, bem como a pertinência do que é abordado em face da diversidade dos estudantes, buscando a contextualização dos conteúdos e o seu tratamento flexível."

Isto sem dúvidas contempla o Ensino Sistemas de Equações com Duas Incógnitas enquanto relevante para trajetória escolar do aluno. Esse é o momento em que ele vai aprender a substituir incógnitas através de manipulações algébricas, um artifício que ainda será muito usado pelo aluno. Também é clara a facilidade que teremos em contextualizar os problemas dentro da diversidade de cotidianos na sala de aula.

4 Análise de Material Didático

Este capítulo foi elaborado individualmente.

Neste capítulo analisaremos três livros didáticos distintos, com o objetivo de verificar se o tema de sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas está sendo abordado de forma coerente e adequada. Lembramos que estamos lidando com o 8º ano do Ensino Fundamental.

Pode-se verificar, facilmente, a grande dificuldade dos alunos em transformar uma situação problema em uma sentença matemática, e uma dificuldade maior ainda em efetuar manipulações algébricas. Por essa razão, a forma de abordagem do assunto é de grande importância para se obter um resultado satisfatório dos alunos.

Os critérios para análise serão os conteúdos abordados dentro do capítulo do tema em questão, a forma de abordagem de cada conteúdo, a ordem em que eles aparecem, o conteúdo em si, se os exercícios estão de acordo com o conteúdo e a linguagem utilizada.

Vale lembrar que, nos capítulos 2 e 3 falamos sobre os PCNs e os DCNs com finalidade de nos auxiliar na análise dos livros e na elaboração do plano de aula. Embora tanto PCN quanto DCN sejam importantes, e o PCN não priorize tanto o conteúdo quanto eu, darei mais ênfase às diretrizes do PCN, que é mais específico quanto a conteúdos e ainda ressalta as habilidades e competências a serem desenvolvidas. Lembramos da nossa colocação, apresentada no Capítulo 2, de que não há consenso na terminologia de variável x incógnita. Por esta razão, me preocuparei apenas em verificar a coerência do autor com a sua opção de terminologia.

Os livros que serão analisados são:

- *Praticando Matemática de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos;*
- *Matemática – Ideias e Desafios de Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga;*
- *Projeto Teláris – Matemática de Luiz Roberto Dante.*

4.1 Análise do livro *"Praticando Matemática – Edição Renovada – 3ª edição"*

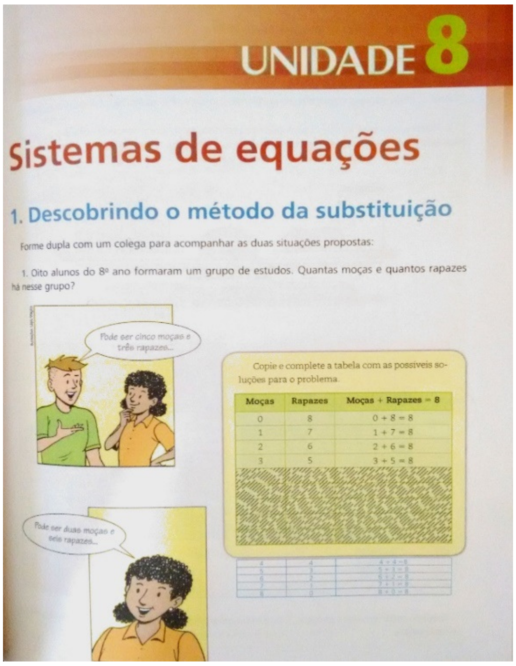
Figura 2 - Capa do livro "Praticando Matemática"

O livro apresenta quatorze unidades e cada um deles está dividido em seções. A unidade 8, nomeada de "Sistemas de Equações", está dividida três seções:

1- Descobrindo o método da substituição;
2- O método da adição;
3- Dízimas periódicas na forma de fração

Na primeira seção, é proposto que os alunos formem duplas para resolverem um problema dado.

O problema vai sendo resolvido utilizando tabelas, uma para cada uma das situações e fazendo a interseção das duas. Em seguida, é dado outro problema que é resolvido com uma balança, analisando todas as possibilidades de equilíbrio. Após esses dois exemplos, é proposto que se use equações para representar cada situação em cada um dos dois problemas dados anteriormente. Com as equações escritas, ele define sistemas de equações, resolve, explicando o que está sendo feito, no passo a passo, e por fim diz que esse é o chamado método da substituição.



UNIDADE 8

Sistemas de equações

1. Descobrindo o método da substituição

Forme dupla com um colega para acompanhar as duas situações propostas:

1. Oito alunos do 8º ano formaram um grupo de estudos. Quantas moças e quantos rapazes há nesse grupo?

Pode ser cinco moças e três rapazes...

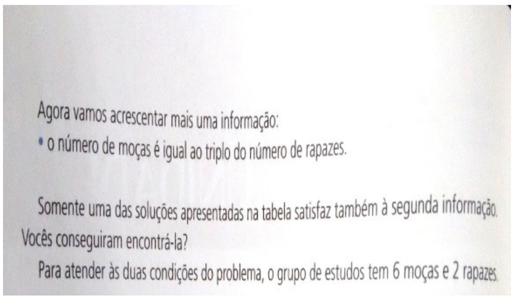
Pode ser duas moças e seis rapazes...

Copie e complete a tabela com as possíveis soluções para o problema.

Moças	Rapazes	Moças + Rapazes = 8
0	8	0 + 8 = 8
1	7	1 + 7 = 8
2	6	2 + 6 = 8
3	5	3 + 5 = 8

4	4	4 + 4 = 8
5	3	5 + 3 = 8
6	2	6 + 2 = 8
7	1	7 + 1 = 8
8	0	8 + 0 = 8

Figura 3 - p. 141 do livro "Praticando Matemática"



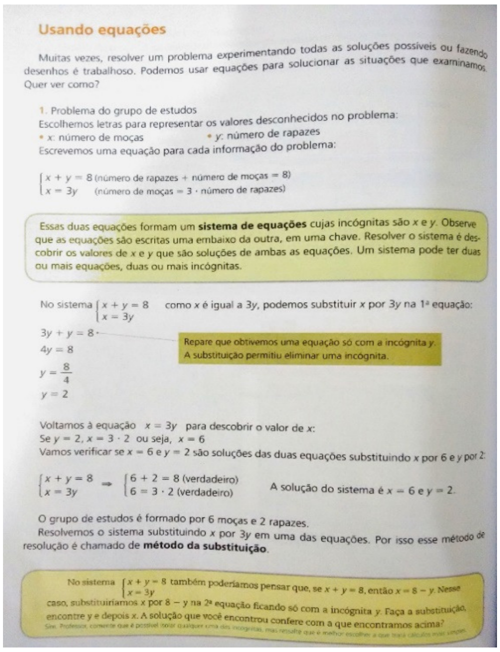
Agora vamos acrescentar mais uma informação:

- o número de moças é igual ao triplo do número de rapazes.

Somente uma das soluções apresentadas na tabela satisfaz também à segunda informação. Vocês conseguiram encontrá-la?

Para atender às duas condições do problema, o grupo de estudos tem 6 moças e 2 rapazes.

Figura 4 - p. 142 do livro "Praticando Matemática"



Usando equações

Muitas vezes, resolver um problema experimentando todas as soluções possíveis ou fazendo desenhos é trabalhoso. Podemos usar equações para solucionar as situações que examinamos. Quer ver como?

1. Problema do grupo de estudos

Escolhemos letras para representar os valores desconhecidos no problema:

- x: número de moças
- y: número de rapazes

Escrevemos uma equação para cada informação do problema:

$$\begin{cases} x + y = 8 & \text{(número de rapazes + número de moças = 8)} \\ x = 3y & \text{(número de moças} = 3 \cdot \text{número de rapazes)} \end{cases}$$

Essas duas equações formam um **sistema de equações** cujas incógnitas são x e y. Observe que as equações são escritas uma embaixo da outra, em uma chave. Resolver o sistema é descobrir os valores de x e y que são soluções de ambas as equações. Um sistema pode ter duas ou mais equações, duas ou mais incógnitas.

No sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 3y \end{cases}$ como x é igual a $3y$, podemos substituir x por $3y$ na 1ª equação:

$3y + y = 8$

Repare que obtivemos uma equação só com a incógnita y. A substituição permitiu eliminar uma incógnita.

$4y = 8$

$y = \frac{8}{4}$

$y = 2$

Voltamos à equação $x = 3y$ para descobrir o valor de x:

Se $y = 2$, $x = 3 \cdot 2$ ou seja, $x = 6$

Vamos verificar se $x = 6$ e $y = 2$ são soluções das duas equações substituindo x por 6 e y por 2:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 2 = 8 \text{ (verdadeiro)} \\ 6 = 3 \cdot 2 \text{ (verdadeiro)} \end{cases}$$

A solução do sistema é $x = 6$ e $y = 2$.

O grupo de estudos é formado por 6 moças e 2 rapazes.

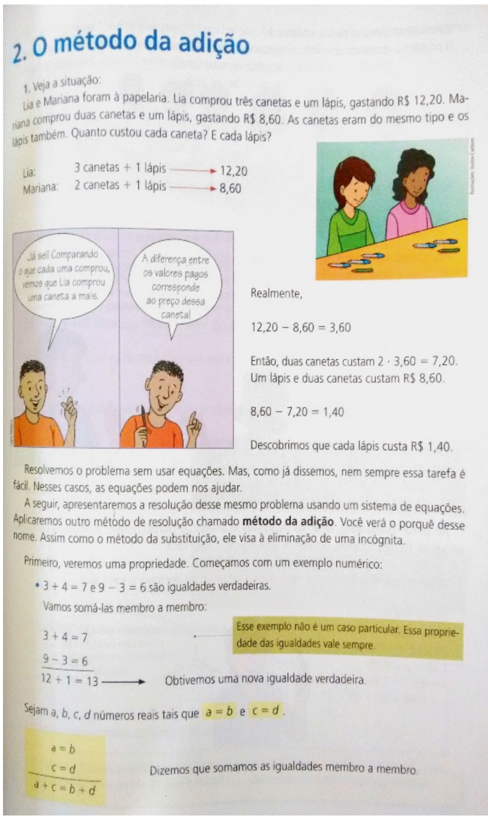
Resolvemos o sistema substituindo x por $3y$ em uma das equações. Por isso esse método de resolução é chamado de **método da substituição**.

No sistema $\begin{cases} x + y = 8 \\ x = 3y \end{cases}$ também poderíamos pensar que, se $x + y = 8$, então $x = 8 - y$. Nesse caso, substituiríamos x por $8 - y$ na 2ª equação ficando só com a incógnita y. Faça a substituição, encontre y e depois x. A solução que você encontrou confere com a que encontramos acima?

Sim. Professor, comente que é possível isolar qualquer uma das incógnitas, mas ressalte que é melhor escolher a que trará cálculos mais simples.

Figura 5 - p. 144 do livro "Praticando Matemática"

Na segunda seção, é colocada uma situação hipotética, onde o autor resolve o problema utilizando somente operações básicas, sem utilizar equações. Logo após ele diz que nem sempre é fácil assim e, a partir disso, apresenta o método da adição e desenvolve o método tratando a tal situação resolvida anteriormente. Ele então resolve mais alguns problemas utilizando o método da adição.



2. O método da adição

1. Veja a situação:

Lia e Mariana foram à papelaria. Lia comprou três canetas e um lápis, gastando R\$ 12,20. Mariana comprou duas canetas e um lápis, gastando R\$ 8,60. As canetas eram do mesmo tipo e os lápis também. Quanto custou cada caneta? E cada lápis?

Lia: 3 canetas + 1 lápis ⟶ 12,20
Mariana: 2 canetas + 1 lápis ⟶ 8,60

Realmente,

12,20 − 8,60 = 3,60

Então, duas canetas custam 2 · 3,60 = 7,20.
Um lápis e duas canetas custam R\$ 8,60.

8,60 − 7,20 = 1,40

Descobrimos que cada lápis custa R\$ 1,40.

Resolvemos o problema sem usar equações. Mas, como já dissemos, nem sempre essa tarefa é fácil. Nesses casos, as equações podem nos ajudar.

A seguir, apresentaremos a resolução desse mesmo problema usando um sistema de equações. Aplicaremos outro método de resolução chamado **método da adição**. Você verá o porquê desse nome. Assim como o método da substituição, ele visa à eliminação de uma incógnita.

Primeiro, veremos uma propriedade. Começamos com um exemplo numérico:

- 3 + 4 = 7 e 9 − 3 = 6 são igualdades verdadeiras.

Vamos somá-las membro a membro:

$$\begin{array}{l} 3 + 4 = 7 \\ \underline{9 - 3 = 6} \\ 12 + 1 = 13 \end{array}$$

⟶ Obtivemos uma nova igualdade verdadeira.

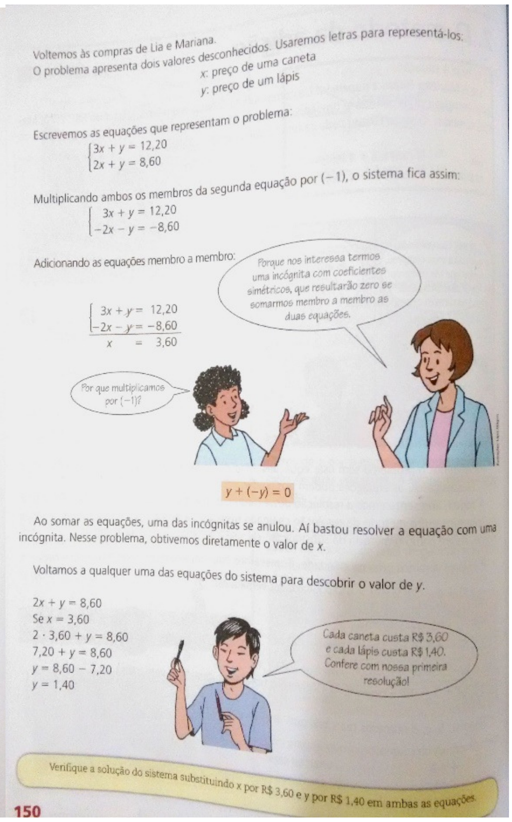
Esse exemplo não é um caso particular. Essa propriedade das igualdades vale sempre.

Sejam a, b, c, d números reais tais que $a = b$ e $c = d$.

$$\begin{array}{c} a = b \\ \underline{c = d} \\ a + c = b + d \end{array}$$

Dizemos que somamos as igualdades membro a membro.

Figura 6 - p. 149 do livro "Praticando Matemática"



Voltemos às compras de Lia e Mariana.

O problema apresenta dois valores desconhecidos. Usaremos letras para representá-los:

x: preço de uma caneta
y: preço de um lápis

Escrevemos as equações que representam o problema:

$$\begin{cases} 3x + y = 12,20 \\ 2x + y = 8,60 \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros da segunda equação por (−1), o sistema fica assim:

$$\begin{cases} 3x + y = 12,20 \\ -2x - y = -8,60 \end{cases}$$

Adicionando as equações membro a membro:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x + \cancel{y} = 12,20 \\ -2x - \cancel{y} = -8,60 \end{cases} \\ \hline \quad x = 3,60 \end{array}$$

$y + (-y) = 0$

Ao somar as equações, uma das incógnitas se anulou. Aí bastou resolver a equação com uma incógnita. Nesse problema, obtivemos diretamente o valor de x.

Voltamos a qualquer uma das equações do sistema para descobrir o valor de y.

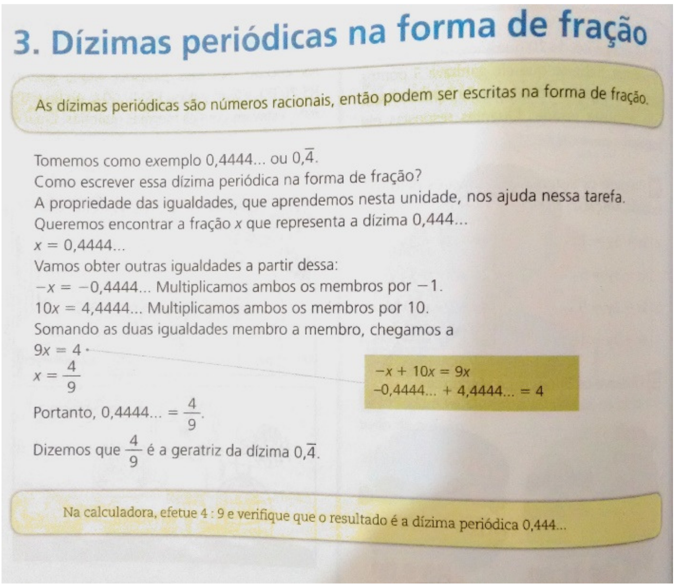
$2x + y = 8,60$
Se $x = 3,60$
$2 \cdot 3,60 + y = 8,60$
$7,20 + y = 8,60$
$y = 8,60 - 7,20$
$y = 1,40$

Verifique a solução do sistema substituindo x por R\$ 3,60 e y por R\$ 1,40 em ambas as equações.

150

Figura 7 - p. 150 do livro "Praticando Matemática"

Na terceira seção, ele fala sobre como achar a fração geratriz de dízimas periódicas.



3. Dízimas periódicas na forma de fração

As dízimas periódicas são números racionais, então podem ser escritas na forma de fração.

Tomemos como exemplo 0,4444... ou $0,\overline{4}$.
Como escrever essa dízima periódica na forma de fração?
A propriedade das igualdades, que aprendemos nesta unidade, nos ajuda nessa tarefa.
Queremos encontrar a fração x que representa a dízima 0,444...
$x = 0,4444...$
Vamos obter outras igualdades a partir dessa:
$-x = -0,4444...$ Multiplicamos ambos os membros por −1.
$10x = 4,4444...$ Multiplicamos ambos os membros por 10.
Somando as duas igualdades membro a membro, chegamos a
$9x = 4$
$x = \frac{4}{9}$

$-x + 10x = 9x$
$-0,4444... + 4,4444... = 4$

Portanto, $0,4444... = \frac{4}{9}$.

Dizemos que $\frac{4}{9}$ é a geratriz da dízima $0,\overline{4}$.

Na calculadora, efetue 4 : 9 e verifique que o resultado é a dízima periódica 0,444...

Figura 8 - p. 156 do livro "Praticando Matemática"

Ao fim de cada seção é proposta uma série de exercícios e desafios. Após os exercícios da última seção, há uma auto avaliação que é composta por questões de múltipla escolha, como se fosse um simulado.

Agora, analisamos a abordagem do tema pelo autor.

Na primeira parte, não se fala sobre equações com duas variáveis, apesar de ser de grande importância, como introdução, nesse tema. O autor também não define sistemas de equações: inicialmente, ele resolve problemas propostos com tabelas, em seguida transforma os problemas em equações para depois dizer que temos um sistema. Isto é feito de forma bem rasa, com uma definição vaga.

Essa forma de abordagem está de acordo com o PCN, porém acredito que a definição deveria estar mais consistente, e eu optaria por iniciar com a definição.

A segunda parte também apresenta muitos exemplos e uma ausência de definições. O passo a passo do método da adição é feito de forma satisfatória. No entanto, ele deixa a impressão de que aprender a resolver um sistema é útil, mas não é de grande importância.

O capítulo não mostra quando usar um ou outro método de resolução. Fica entendido que os exercícios são para se resolver de acordo com a seção em que está inserido.

A terceira parte foge do tema em questão. Está certo que utilizamos um sistema de equações para achar frações geratrizes, porém esse tema deveria aparecer como exemplo. É bastante construtivo fazer uma ponte e mostrar que o método para cálculo de fração geratriz trata-se de um sistema de equações, mas não é pertinente colocar como uma seção do capítulo, como se fizesse parte da matéria em questão.

Os tipos de sistemas (possível e determinado, possível e indeterminado, impossível) não são definidos pelo autor. O fato da solução de um sistema ser um par ordenado também não é colocado. E também não há nenhuma menção sobre a representação gráfica.

Com relação aos exercícios, há uma grande quantidade, começando simples e aumentando a dificuldade a cada exercício, até chegar nos chamados desafios. São bem elaborados. As questões propostas não se limitam à resolução pontual de sistemas, também há diversos problemas em que o aluno tem que montar o sistema por si próprio. Por fim, há uma auto avaliação, o que é interessante, pois o aluno pode ver se assimilou bem a matéria.

Em resumo, os exercícios são bons, dentro do que foi dado, a linguagem utilizada é adequada ao ano em questão e os exemplos dados estão relacionados com questões cotidianas, abrangendo a realidade de todos, no entanto, o conteúdo é colocado de forma bem rasa e defasada, com déficit de definições, faltando itens importantes, como os tipos de sistemas e a representação gráfica, além de partes importantes aparecerem como pensamentos, no decorrer das resoluções dos exemplos.

4.2 Análise do livro *"Matemática – Ideias e Desafios – 15ª edição reformulada"*

Figura 9 - Capa do livro "Matemática - Ideias e Desafios"

Este livro apresenta doze unidades, divididas em seções. O capítulo 10, nomeado de “Sistemas de Equações”, está dividido em duas seções:

1- Equação do 1º grau com duas variáveis;
2- Sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis.

Após as duas seções ainda há os títulos:

Leitura +;

Revisão cumulativa e testes.

Antes da primeira seção, o capítulo faz uma introdução utilizando um problema, com balanças, que representa uma equação do 1º grau com duas variáveis, que possui infinitas soluções, mas que se inserirmos mais informações chegamos a outra equação e que essas equações formam um sistema de equações.

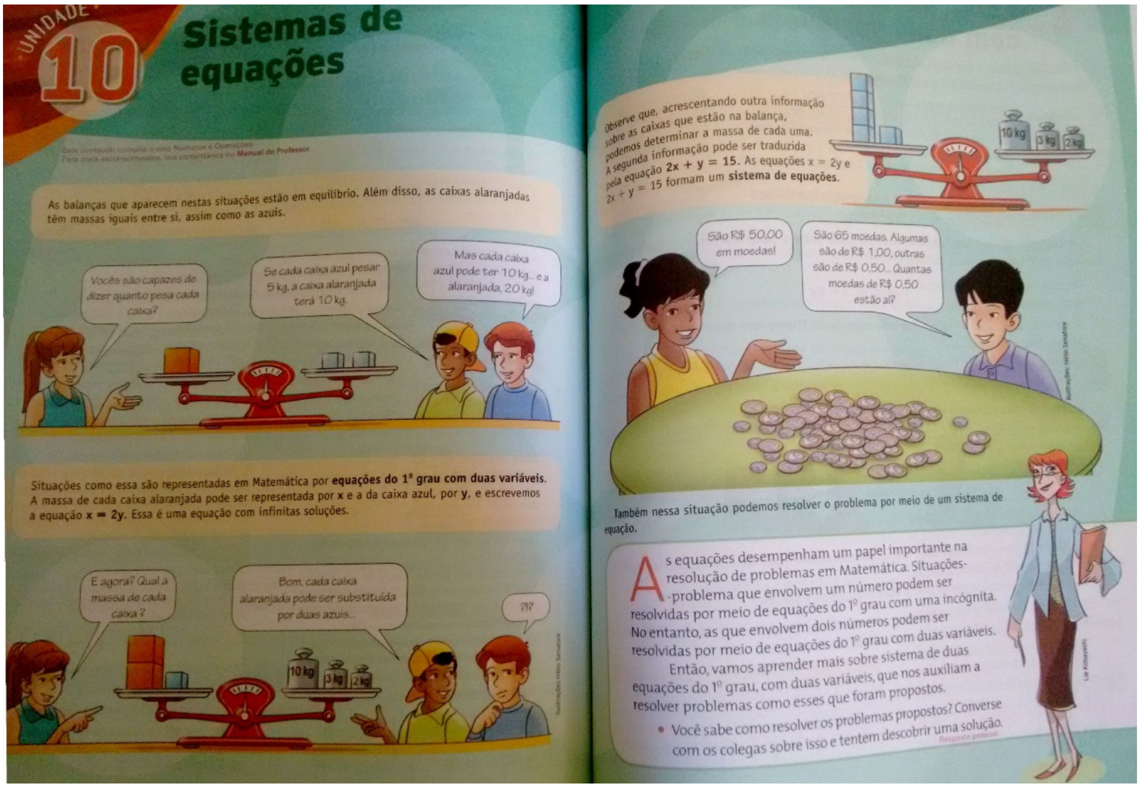
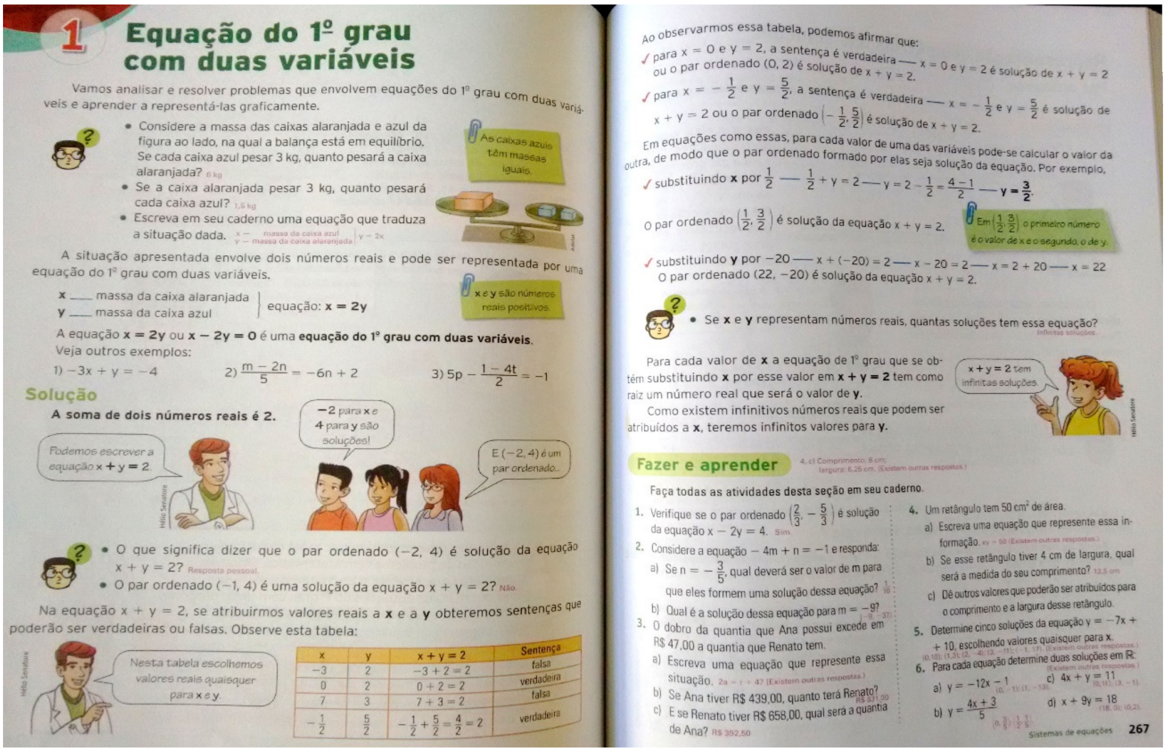


Figura 10 - p. 264 e 265 do livro "Matemática - Ideias e Desafios"

Na seção 1, o autor propõe um problema a ser resolvido utilizando equações do 1º grau com duas variáveis.

Ele transforma o problema em equação, diz tratar-se uma equação do 1º grau com duas variáveis e dá outros exemplos desse tipo de equações. Daí ele fala sobre a solução do problema. Diz que a solução é um par ordenado, faz a tabela de valores, para analisar possíveis soluções, analisa cada valor utilizado na tabela, para concluir que existem infinitas soluções para a equação.



1 Equação do 1º grau com duas variáveis

Vamos analisar e resolver problemas que envolvem equações do 1º grau com duas variáveis e aprender a representá-las graficamente.

- Considere a massa das caixas alaranjada e azul da figura ao lado, na qual a balança está em equilíbrio. Se cada caixa azul pesar 3 kg, quanto pesará a caixa alaranjada? 6 kg
- Se a caixa alaranjada pesar 3 kg, quanto pesará cada caixa azul? 1,5 kg
- Escreva em seu caderno uma equação que traduza a situação dada.

As caixas azuis têm massas iguais.

A situação apresentada envolve dois números reais e pode ser representada por uma equação do 1º grau com duas variáveis.

x ___ massa da caixa alaranjada
y ___ massa da caixa azul
equação: **x = 2y**

x e y são números reais positivos.

A equação **x = 2y** ou **x − 2y = 0** é uma **equação do 1º grau com duas variáveis**.
Veja outros exemplos:

1) $-3x + y = -4$ 2) $\frac{m-2n}{5} = -6n + 2$ 3) $5p - \frac{1-4t}{2} = -1$

Solução

A soma de dois números reais é 2.

- O que significa dizer que o par ordenado (−2, 4) é solução da equação x + y = 2? Resposta pessoal.
- O par ordenado (−1, 4) é uma solução da equação x + y = 2? Não.

Na equação x + y = 2, se atribuirmos valores reais a **x** e a **y** obteremos sentenças que poderão ser verdadeiras ou falsas. Observe esta tabela:

x	y	x + y = 2	Sentença
−3	2	$-3 + 2 = 2$	falsa
0	2	$0 + 2 = 2$	verdadeira
7	3	$7 + 3 = 2$	falsa
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$	verdadeira

Ao observarmos essa tabela, podemos afirmar que:

✓ para x = 0 e y = 2, a sentença é verdadeira — x = 0 e y = 2 é solução de x + y = 2 ou o par ordenado (0, 2) é solução de x + y = 2.

✓ para $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{5}{2}$, a sentença é verdadeira — $x = -\frac{1}{2}$ e $y = \frac{5}{2}$ é solução de x + y = 2 ou o par ordenado $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ é solução de x + y = 2.

Em equações como essas, para cada valor de uma das variáveis pode-se calcular o valor da outra, de modo que o par ordenado formado por elas seja solução da equação. Por exemplo,

✓ substituindo **x** por $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2} + y = 2$ — $y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2}$ — $y = \frac{3}{2}$.

O par ordenado $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ é solução da equação x + y = 2.

Em $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ o primeiro número é o valor de x e o segundo, o de y.

✓ substituindo **y** por −20 — x + (−20) = 2 — x − 20 = 2 — x = 2 + 20 — x = 22
O par ordenado (22, −20) é solução da equação x + y = 2.

- Se **x** e **y** representam números reais, quantas soluções tem essa equação? Infinitas soluções.

Para cada valor de **x** a equação de 1º grau que se obtém substituindo **x** por esse valor em **x + y = 2** tem como raiz um número real que será o valor de **y**.

Como existem infinitivos números reais que podem ser atribuídos a **x**, teremos infinitos valores para **y**.

Fazer e aprender

4. c) Comprimento: 8 cm; largura: 6,25 cm. (Existem outras respostas.)

Faça todas as atividades desta seção em seu caderno.

1. Verifique se o par ordenado $\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ é solução da equação x − 2y = 4. Sim.
2. Considere a equação − 4m + n = −1 e responda:
   a) Se $n = -\frac{3}{5}$, qual deverá ser o valor de m para que eles formem uma solução dessa equação? $\frac{1}{10}$
   b) Qual é a solução dessa equação para m = −9? (−9, −37)
3. O dobro da quantia que Ana possui excede em R$ 47,00 a quantia que Renato tem.
   a) Escreva uma equação que represente essa situação. 2a = r + 47 (Existem outras respostas.)
   b) Se Ana tiver R$ 439,00, quanto terá Renato? R$ 831,00
   c) E se Renato tiver R$ 658,00, qual será a quantia de Ana? R$ 352,50
4. Um retângulo tem 50 cm² de área.
   a) Escreva uma equação que represente essa informação. xy = 50 (Existem outras respostas.)
   b) Se esse retângulo tiver 4 cm de largura, qual será a medida do seu comprimento? 12,5 cm
   c) Dê outros valores que poderão ser atribuídos para o comprimento e a largura desse retângulo.
5. Determine cinco soluções da equação y = −7x + 10, escolhendo valores quaisquer para x. (Existem outras respostas.)
6. Para cada equação determine duas soluções em ℝ: (Existem outras respostas.)
   a) y = −12x − 1
   b) $y = \frac{4x+3}{5}$
   c) 4x + y = 11
   d) x + 9y = 18

Sistemas de equações 267

Figura 11 - p. 266 e 267 do livro "Matemática - Ideias e Desafios"

Em seguida, mostra a representação geométrica das soluções da equação. Ele fala sobre o que são pares ordenados, o que é um plano cartesiano, como representar pares ordenados no plano cartesiano e depois coloca alguns pares, que são solução do problema anterior, no plano. Daí ele chega ao fato de que as soluções de uma equação do 1º grau com duas variáveis estão sobre uma reta e que bastam duas soluções para desenhar a representação geométrica das soluções.

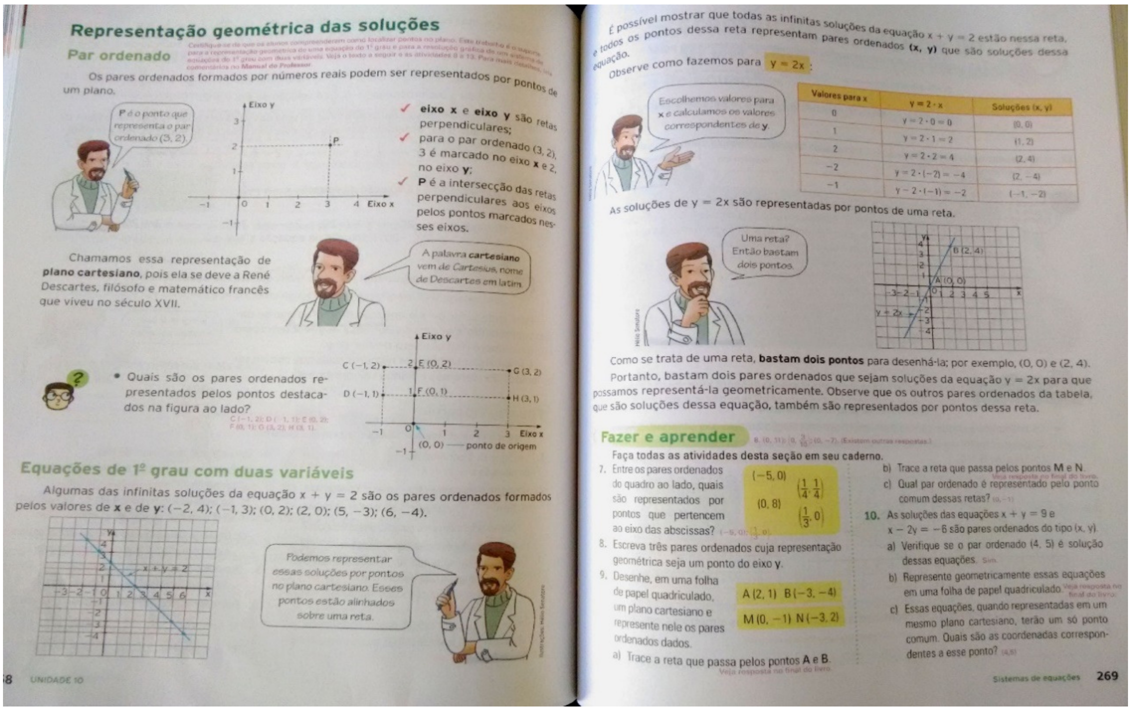


Figura 12 - p. 268 e 269 do livro "Matemática - Ideias e Desafios"

Na segunda seção, o autor retoma um dos problemas colocados na introdução do capítulo, usa as equações para representar as informações dadas e diz que essas equações formam um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis.

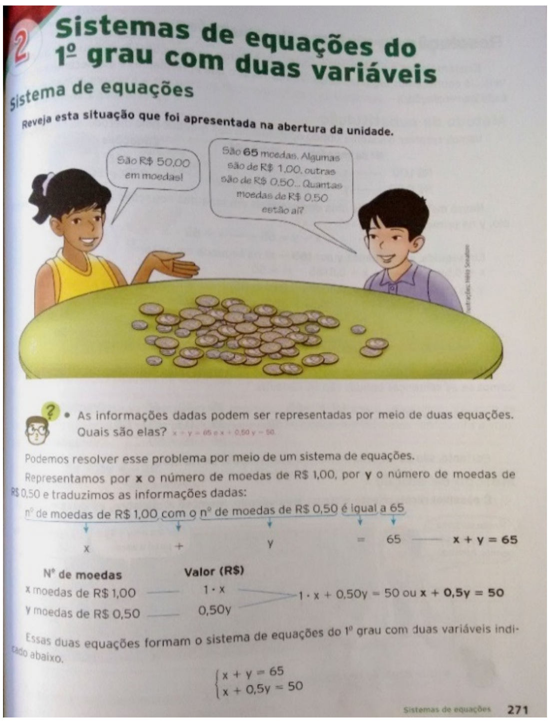
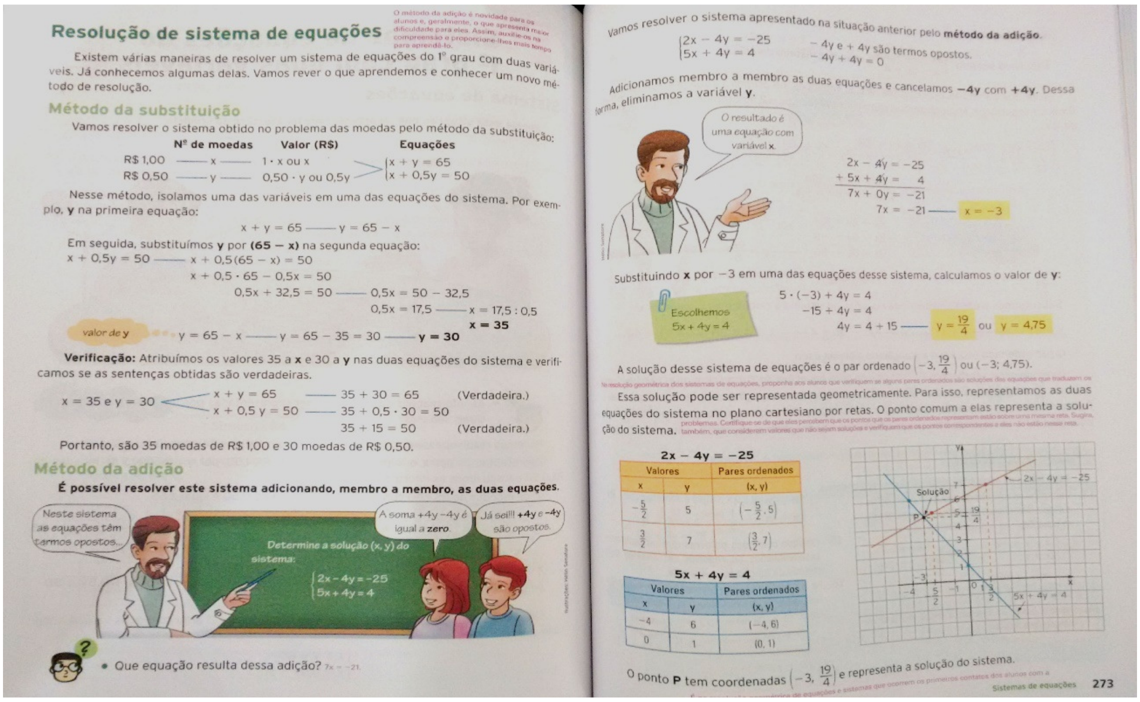


Figura 13 - p. 271 do livro "Matemática - Ideias e Desafios"

Em seguida é introduzido os métodos de resolução, da substituição e da adição. E, por fim, ele fala sobre a representação geométrica da solução.



Resolução de sistema de equações

O método da adição é novidade para os alunos e, geralmente, o que apresenta maior dificuldade para eles. Assim, auxilie-os na compreensão e proporcione-lhes mais tempo para aprendê-lo.

Existem várias maneiras de resolver um sistema de equações do 1º grau com duas variáveis. Já conhecemos algumas delas. Vamos rever o que aprendemos e conhecer um novo método de resolução.

Método da substituição

Vamos resolver o sistema obtido no problema das moedas pelo método da substituição:

	Nº de moedas	Valor (R$)
R$ 1,00	x	1 · x ou x
R$ 0,50	y	0,50 · y ou 0,5y

Equações: $\begin{cases} x + y = 65 \\ x + 0{,}5y = 50 \end{cases}$

Nesse método, isolamos uma das variáveis em uma das equações do sistema. Por exemplo, **y** na primeira equação:

$x + y = 65 \longrightarrow y = 65 - x$

Em seguida, substituímos **y** por **(65 − x)** na segunda equação:

$x + 0{,}5y = 50 \longrightarrow x + 0{,}5(65 - x) = 50$

$x + 0{,}5 \cdot 65 - 0{,}5x = 50$

$0{,}5x + 32{,}5 = 50 \longrightarrow 0{,}5x = 50 - 32{,}5$

$0{,}5x = 17{,}5 \longrightarrow x = 17{,}5 : 0{,}5$

$\mathbf{x = 35}$

valor de y: $y = 65 - x \longrightarrow y = 65 - 35 = 30 \longrightarrow \mathbf{y = 30}$

Verificação: Atribuímos os valores 35 a **x** e 30 a **y** nas duas equações do sistema e verificamos se as sentenças obtidas são verdadeiras.

$x = 35$ e $y = 30$:

$x + y = 65 \longrightarrow 35 + 30 = 65$ (Verdadeira.)

$x + 0{,}5y = 50 \longrightarrow 35 + 0{,}5 \cdot 30 = 50$

$35 + 15 = 50$ (Verdadeira.)

Portanto, são 35 moedas de R$ 1,00 e 30 moedas de R$ 0,50.

Método da adição

É possível resolver este sistema adicionando, membro a membro, as duas equações.

• Que equação resulta dessa adição? 7x = −21.

Vamos resolver o sistema apresentado na situação anterior pelo **método da adição**.

$\begin{cases} 2x - 4y = -25 \\ 5x + 4y = 4 \end{cases}$ $-4y$ e $+4y$ são termos opostos. $-4y + 4y = 0$

Adicionamos membro a membro as duas equações e cancelamos **−4y** com **+4y**. Dessa forma, eliminamos a variável **y**.

$$\begin{array}{r} 2x - \cancel{4y} = -25 \\ + \; 5x + \cancel{4y} = 4 \\ \hline 7x + 0y = -21 \end{array}$$

$7x = -21 \longrightarrow \boxed{x = -3}$

Substituindo **x** por −3 em uma das equações desse sistema, calculamos o valor de **y**:

Escolhemos $5x + 4y = 4$

$5 \cdot (-3) + 4y = 4$

$-15 + 4y = 4$

$4y = 4 + 15 \longrightarrow \boxed{y = \frac{19}{4}}$ ou $\boxed{y = 4{,}75}$

A solução desse sistema de equações é o par ordenado $\left(-3, \frac{19}{4}\right)$ ou $(-3; 4{,}75)$.

Essa solução pode ser representada geometricamente. Para isso, representamos as duas equações do sistema no plano cartesiano por retas. O ponto comum a elas representa a solução do sistema.

Na resolução geométrica dos sistemas de equações, proponha aos alunos que verifiquem se alguns pares ordenados são soluções das equações que traduzem os problemas. Certifique-se de que eles percebem que os pontos que os pares ordenados representam estão sobre uma mesma reta. Sugira, também, que considerem valores que não sejam soluções e verifiquem que os pontos correspondentes a eles não estão nessa reta.

2x − 4y = −25

Valores		Pares ordenados
x	y	(x, y)
$-\frac{5}{2}$	5	$\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$
$\frac{3}{2}$	7	$\left(\frac{3}{2}, 7\right)$

5x + 4y = 4

Valores		Pares ordenados
x	y	(x, y)
−4	6	(−4, 6)
0	1	(0, 1)

O ponto **P** tem coordenadas $\left(-3, \frac{19}{4}\right)$ e representa a solução do sistema.

Sistemas de equações 273

Figura 14 - p. 272 e 273 do livro "Matemática - Ideias e Desafios"

Ao final de cada título, de cada seção, tem uma série de exercícios propostos.

Agora, analisamos a abordagem feita pelo autor.

Novamente, há uma falta de definições iniciais sobre o assunto abordado, mas a introdução feita antes de iniciar a primeira seção minimiza esse problema.

Na primeira seção, como já foi feita a introdução prévia, o conteúdo de equação do 1º grau com duas variáveis e colocado de forma bem aceitável. O autor propõe um problema e vai resolvendo em conjunto com o aluno, através de perguntas ao longo do conteúdo.

Na representação geométrica das soluções, ele se prendeu muito em definir par ordenado e plano cartesiano. Isso não é um grande problema, mas não é o foco da matéria. Foi dada mais ênfase às definições de plano cartesiano e pares ordenados do que às equações do 1º grau com duas variáveis e aos sistemas de equações.

Na segunda seção, que fala dos sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, a partir do problema inicialmente dado, na introdução, ele introduz os métodos de resolução.

Ele parte do princípio que os alunos já conhecem o método da substituição, visto no 7º ano do Ensino Fundamental, porém coloca um passo a passo de visual um pouco confuso, mas que é bastante satisfatório.

Segundo o autor, o método da adição é novo para os alunos e é o que apresenta maior dificuldade para eles. Exatamente por isso, a definição deveria ser mais bem elaborada, ao invés de fazer como vem fazendo por todo o conteúdo, jogando perguntas para os alunos irem respondendo. Depois, faz um passo a passo aceitável, e conclui que a solução do sistema é um par ordenado. Por fim, fala sobre a representação geométrica, que basta traçar as retas referentes a cada equação e que o ponto em comum entre elas é a solução do sistema.

Ele não trabalha bem o fato de ter que se fazer, nem como fazer, manipulações algébricas, em alguns casos, para se usar o método da adição, ele apenas dá um exemplo em que essa manipulação tem que ser feita.

Ficaram faltando os tipos de sistemas (possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível) que não são abordados pelo autor.

A linguagem utilizada é adequada à idade dos alunos, a ordem do conteúdo apresentado é coerente e os exercícios estão de acordo com o conteúdo apresentado.

Apesar de defasagens vistas acima, o conteúdo está de acordo com os PCNs.

4.3 Análise do livro *"Projeto Teláris – Matemática – 1ª edição"*

Figura 15 - Capa do livro "Projeto Teláris - Matemática"

O livro apresenta quatro unidades, dividas em capítulos, com um total de nove capítulos, e cada capítulo está dividido em seções. O capítulo 5, nomeado de "Equações e Sistemas de Equações", está dividido em quatro seções:

1- Introdução;
2- Equações do 1º grau com uma incógnita;
3- Equações do 1º grau com duas incógnitas;
4- Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

Além de ter, após a quarta seção, os títulos:

Tratamento da informação;

Outros contextos;

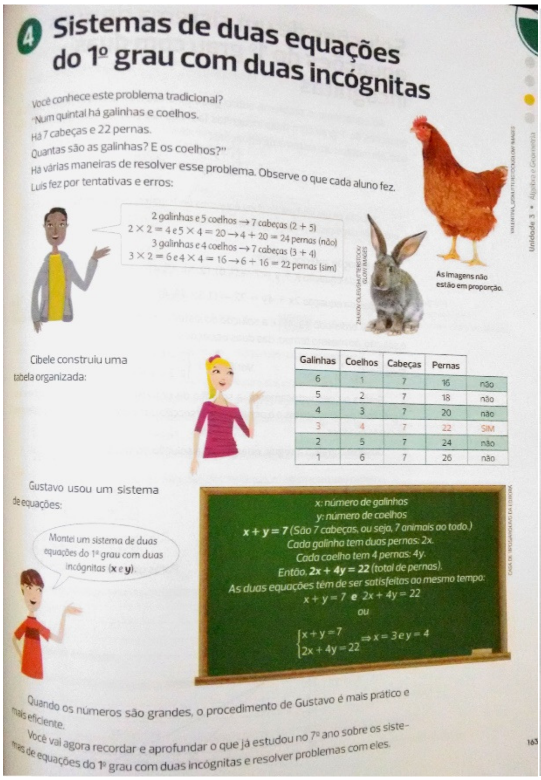
Revisão cumulativa.

Como considero de grande importância falar de equações do 1º grau com duas variáveis, antes de introduzir o conceito de sistemas, analisarei as seções 3 e 4.

Na seção 3, o autor dá exemplos de equações do 1º grau com duas variáveis, fala sobre a forma geral da equação do 1º grau com duas variáveis, ax + by = c, dá exemplos de identificação dos coeficientes a, b, c, observa que a equação é do 1º grau porque o expoente das variáveis é 1 e relembra que as soluções desse tipo de equação são pares ordenados.

Em seguida, mostra como determinar as soluções de uma equação do 1º grau com duas variáveis. Por fim, fala do gráfico das soluções.

Na seção 4, ele inicia com um exemplo e apresenta duas soluções, uma através de tabela e outra montando o sistema. Em seguida, fala de soluções de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, obtidas por métodos algébricos, gráfico e até mesmo por cálculo mental. Depois ele aborda métodos de resolução, método da substituição, método da adição. Por fim, fala da classificação dos sistemas quanto ao número de soluções.



4 Sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Você conhece este problema tradicional?
"Num quintal há galinhas e coelhos.
Há 7 cabeças e 22 pernas.
Quantas são as galinhas? E os coelhos?"
Há várias maneiras de resolver esse problema. Observe o que cada aluno fez.
Luís fez por tentativas e erros:

2 galinhas e 5 coelhos → 7 cabeças (2 + 5)
2 × 2 = 4 e 5 × 4 = 20 → 4 + 20 = 24 pernas (não)
3 galinhas e 4 coelhos → 7 cabeças (3 + 4)
3 × 2 = 6 e 4 × 4 = 16 → 6 + 16 = 22 pernas (sim)

As imagens não estão em proporção.

Cibele construiu uma tabela organizada:

Galinhas	Coelhos	Cabeças	Pernas	
6	1	7	16	não
5	2	7	18	não
4	3	7	20	não
3	4	7	22	SIM
2	5	7	24	não
1	6	7	26	não

Gustavo usou um sistema de equações:

Montei um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas (**x** e **y**).

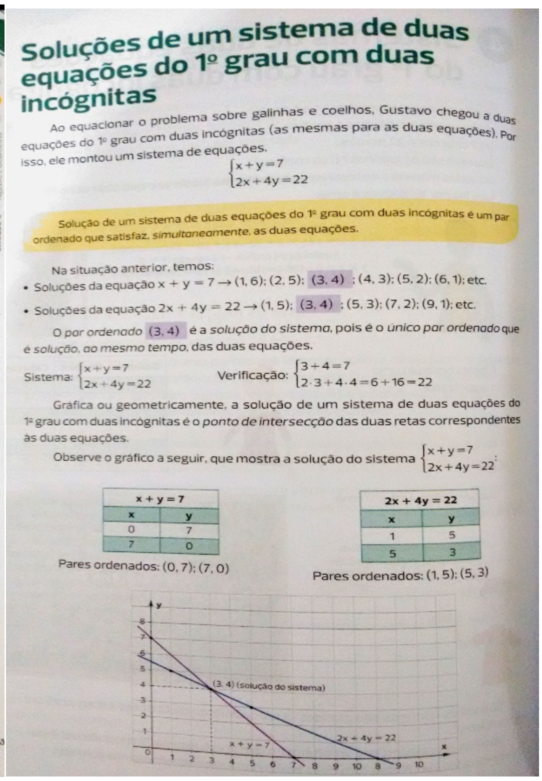
x: número de galinhas
y: número de coelhos
x + y = 7 (São 7 cabeças, ou seja, 7 animais ao todo.)
Cada galinha tem duas pernas: 2x.
Cada coelho tem 4 pernas: 4y.
Então, **2x + 4y = 22** (total de pernas).
As duas equações têm de ser satisfeitas ao mesmo tempo:
x + y = 7 **e** 2x + 4y = 22
ou

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 4$$

Quando os números são grandes, o procedimento de Gustavo é mais prático e mais eficiente.

Você vai agora recordar e aprofundar o que já estudou no 7º ano sobre os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas e resolver problemas com eles.

163



Soluções de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Ao equacionar o problema sobre galinhas e coelhos, Gustavo chegou a duas equações do 1º grau com duas incógnitas (as mesmas para as duas equações). Por isso, ele montou um sistema de equações.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$$

Solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas é um par ordenado que satisfaz, *simultaneamente*, as duas equações.

Na situação anterior, temos:

- Soluções da equação x + y = 7 → (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1); etc.
- Soluções da equação 2x + 4y = 22 → (1, 5); (3, 4); (5, 3); (7, 2); (9, 1); etc.

O par ordenado (3, 4) é a *solução do sistema*, pois é o *único par ordenado* que é *solução, ao mesmo tempo*, das duas equações.

Sistema: $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$ Verificação: $\begin{cases} 3 + 4 = 7 \\ 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 6 + 16 = 22 \end{cases}$

Gráfica ou geometricamente, a solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas é o *ponto de intersecção* das duas retas correspondentes às duas equações.

Observe o gráfico a seguir, que mostra a solução do sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$:

x + y = 7	
x	y
0	7
7	0

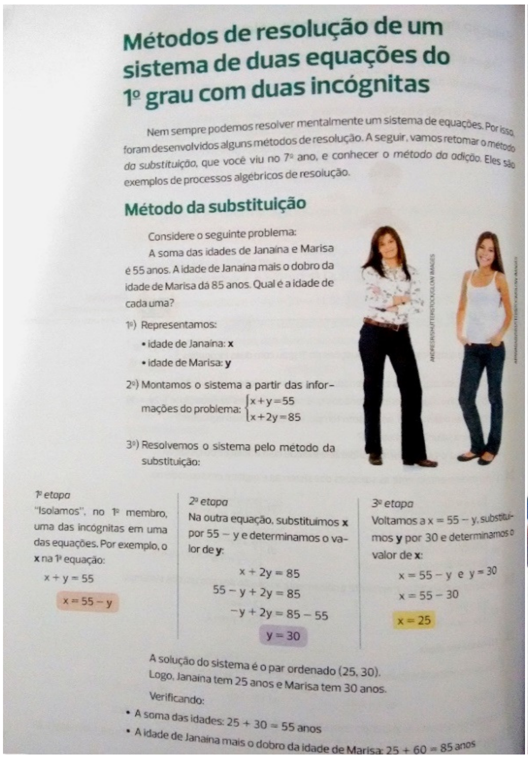
Pares ordenados: (0, 7); (7, 0)

2x + 4y = 22	
x	y
1	5
5	3

Pares ordenados: (1, 5); (5, 3)

Figura 16 - p. 163 do livro "Projeto Teláris - Matemática"

Figura 17 - p. 164 do livro "Projeto Teláris - Matemática"



Métodos de resolução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Nem sempre podemos resolver mentalmente um sistema de equações. Por isso, foram desenvolvidos alguns métodos de resolução. A seguir, vamos retomar o método *da substituição*, que você viu no 7º ano, e conhecer o *método da adição*. Eles são exemplos de processos algébricos de resolução.

Método da substituição

Considere o seguinte problema:

A soma das idades de Janaína e Marisa é 55 anos. A idade de Janaína mais o dobro da idade de Marisa dá 85 anos. Qual é a idade de cada uma?

1º) Representamos:

- idade de Janaína: **x**
- idade de Marisa: **y**

2º) Montamos o sistema a partir das informações do problema: $\begin{cases} x+y=55 \\ x+2y=85 \end{cases}$

3º) Resolvemos o sistema pelo método da substituição:

1ª etapa

"Isolamos", no 1º membro, uma das incógnitas em uma das equações. Por exemplo, o **x** na 1ª equação:

$x + y = 55$

$x = 55 - y$

2ª etapa

Na outra equação, substituímos **x** por 55 − y e determinamos o valor de **y**:

$x + 2y = 85$

$55 - y + 2y = 85$

$-y + 2y = 85 - 55$

$y = 30$

3ª etapa

Voltamos a x = 55 − y, substituímos **y** por 30 e determinamos o valor de **x**:

$x = 55 - y$ e $y = 30$

$x = 55 - 30$

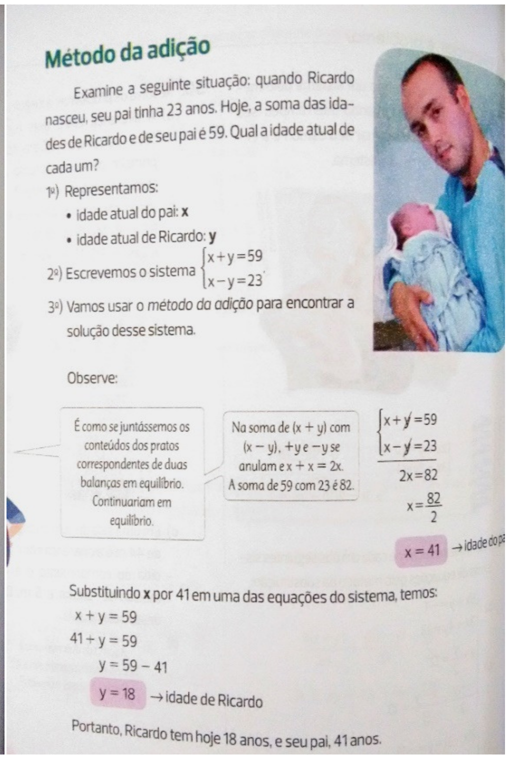
$x = 25$

A solução do sistema é o par ordenado (25, 30).

Logo, Janaína tem 25 anos e Marisa tem 30 anos.

Verificando:

- A soma das idades: $25 + 30 = 55$ anos
- A idade de Janaína mais o dobro da idade de Marisa: $25 + 60 = 85$ anos



Método da adição

Examine a seguinte situação: quando Ricardo nasceu, seu pai tinha 23 anos. Hoje, a soma das idades de Ricardo e de seu pai é 59. Qual a idade atual de cada um?

1º) Representamos:

- idade atual do pai: **x**
- idade atual de Ricardo: **y**

2º) Escrevemos o sistema $\begin{cases} x+y=59 \\ x-y=23 \end{cases}$

3º) Vamos usar o *método da adição* para encontrar a solução desse sistema.

Observe:

É como se juntássemos os conteúdos dos pratos correspondentes de duas balanças em equilíbrio. Continuariam em equilíbrio.

Na soma de (x + y) com (x − y), +y e −y se anulam e x + x = 2x. A soma de 59 com 23 é 82.

$\begin{cases} x+\cancel{y}=59 \\ x-\cancel{y}=23 \end{cases}$

$2x = 82$

$x = \frac{82}{2}$

$x = 41$ → idade do pai

Substituindo **x** por 41 em uma das equações do sistema, temos:

$x + y = 59$

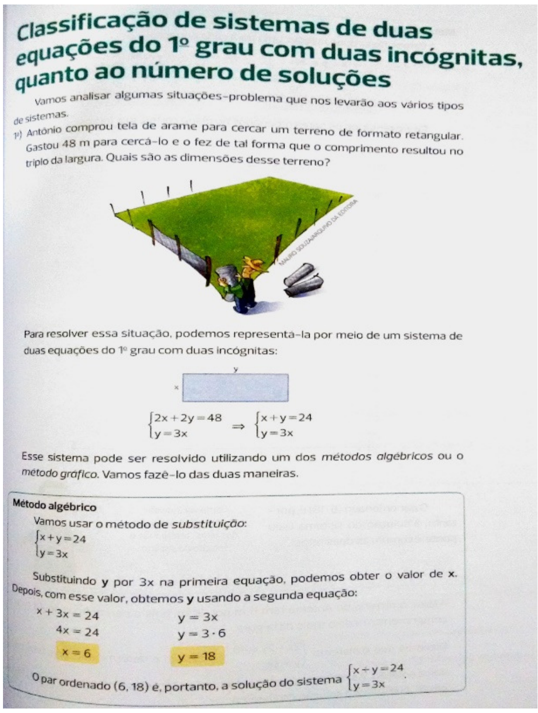
$41 + y = 59$

$y = 59 - 41$

$y = 18$ → idade de Ricardo

Portanto, Ricardo tem hoje 18 anos, e seu pai, 41 anos.

Figura 18 - p. 166 do livro "Projeto Teláris – Matemática" **Figura 19 - p. 170 do livro "Projeto Teláris - Matemática"**



Classificação de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, quanto ao número de soluções

Vamos analisar algumas situações-problema que nos levarão aos vários tipos de sistemas.

1º) Antônio comprou tela de arame para cercar um terreno de formato retangular. Gastou 48 m para cercá-lo e o fez de tal forma que o comprimento resultou no triplo da largura. Quais são as dimensões desse terreno?

Para resolver essa situação, podemos representá-la por meio de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2x+2y=48 \\ y=3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=24 \\ y=3x \end{cases}$$

Esse sistema pode ser resolvido utilizando um dos *métodos algébricos* ou o *método gráfico*. Vamos fazê-lo das duas maneiras.

Método algébrico

Vamos usar o método de *substituição*:

$\begin{cases} x+y=24 \\ y=3x \end{cases}$

Substituindo **y** por 3x na primeira equação, podemos obter o valor de **x**. Depois, com esse valor, obtemos **y** usando a segunda equação:

$x + 3x = 24$ | $y = 3x$

$4x = 24$ | $y = 3 \cdot 6$

$x = 6$ | $y = 18$

O par ordenado (6, 18) é, portanto, a solução do sistema $\begin{cases} x+y=24 \\ y=3x \end{cases}$.

Figura 20 - p. 173 do livro "Projeto Teláris - Matemática"

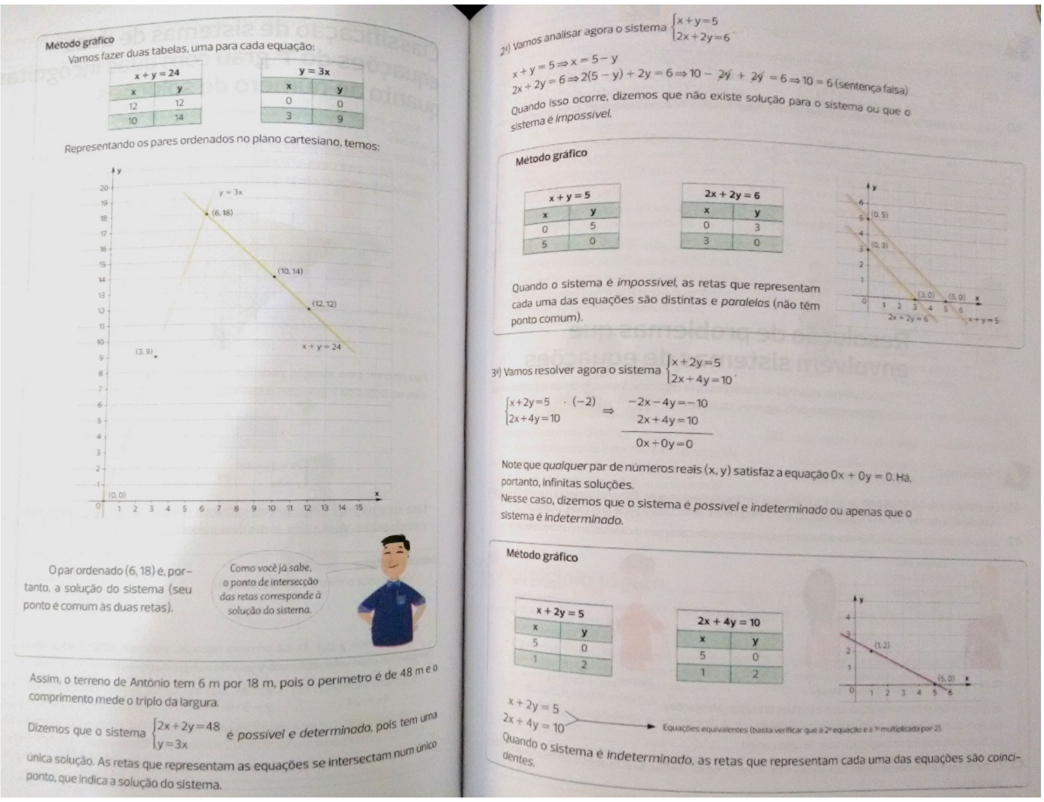


Figura 21 - p. 174 e 175 do livro "Projeto Teláris - Matemática"

Ao final de cada título, de cada seção, há uma série de exercícios propostos.

Agora, analisamos a abordagem feita pelo autor.

Na seção 3, ele não introduz uma definição formal de equações do 1º grau com duas variáveis, porém isso não é algo negativo, pois se trata de uma revisão do assunto dado no ano anterior.

Ele peca por se prender em dar muitos exemplos de identificação de coeficientes, o que não é relevante para a matéria que será introduzida a seguir. Mas é muito bem-sucedido ao falar sobre o fato das soluções serem pares ordenados, sobre como determinar as soluções de uma equação desse tipo e, em seguida, falar sobre o gráfico das soluções, que estão alinhadas, formando uma reta, e do fato de só precisarmos achar duas soluções para traçar a reta que contém todas soluções da equação.

Na seção 4, ele inicia com um exemplo para concluir que o uso de sistemas facilita a resolução de muitas situações problema, mas senti falta da definição de sistemas de equações. Ele não introduz essa definição partindo do princípio de que esse é só um aprofundamento da matéria aprendida no 7º ano.

Ele define bem o que é a solução de um sistema de equações, bem detalhado, com exemplos e em seguida já mostra a representação gráfica. Depois fala também de cálculo mental, mas não acho viável estimular cálculo mental de soluções de sistemas de equações.

Os métodos de resolução são muito bem desenvolvidos, com todo um passo-a-passo que considero muito eficaz. Só há uma falha: no método da adição o autor não fala do caso de termos que manipular uma das equações para tornar viável o uso desse método. Só é citado um exemplo onde o sistema já está pronto para aplicar a adição.

Não seção dos tipos de sistemas, ele parte de exemplos e resolve através do método algébrico e da representação gráfica, ou método gráfico, como ele chama, para ver o resultado obtido e concluir qual a classificação do sistema. Apesar do autor não definir, inicialmente, os tipos de sistemas de equações e partir de exemplos, o resultado é bastante satisfatório e eficiente.

O autor não apresenta erros, o assunto é tratado de forma bem coerente, em uma ordem de conteúdos muito boa, tudo bem separado, cada parte do tema sendo explicado em uma subseção própria. A linguagem utilizada é adequada ao ano à que se destina o livro. Os exercícios são em grande quantidade, sempre ao fim de cada subseção, começando com um nível mais baixo e elevando ao decorrer dos exercícios. Em sua maior parte, estão de acordo com o conteúdo apresentado. O livro é muito bom.

5 Uma Proposta de Aula

Este capítulo foi elaborado individualmente.

5.1 Relembrando Equações do 1º Grau com Duas Variáveis

Creio ser importante iniciar relembrando equações do 1º grau com duas variáveis, afinal um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é um conjunto dessas equações que precisam de uma solução comum. E como tenho notado que os alunos têm uma enorme dificuldade em lembrar-se de um conteúdo que foi visto no ano anterior, é de suma importância fazer uma revisão para facilitar a absorção do novo conteúdo.

Como é somente uma revisão, coloco os pontos importantes em tópicos, só para relembrar.

Eles precisam saber identificar uma equação do 1º grau com duas variáveis.

- São equações do tipo $ax + by = c$, com a e $b \neq 0$.

  Exemplo:

  $2x - 3y = 6$

Precisam saber também como são as soluções desse tipo de equação e como achá-las.

- As soluções desse tipo de equação são pares ordenados do tipo $(x_0\,, y_0)$, onde atribuímos um valor à uma das duas variáveis e calculamos o valor correspondente à outra.

Exemplo:

Fui à uma papelaria comprar um caderno e duas canetas. Gastei R$12,00. Quanto custou cada item?

Considerando:

x – valor do caderno

y – valor da caneta

Temos a equação x + 2y = 12.

Possibilidades de solução:

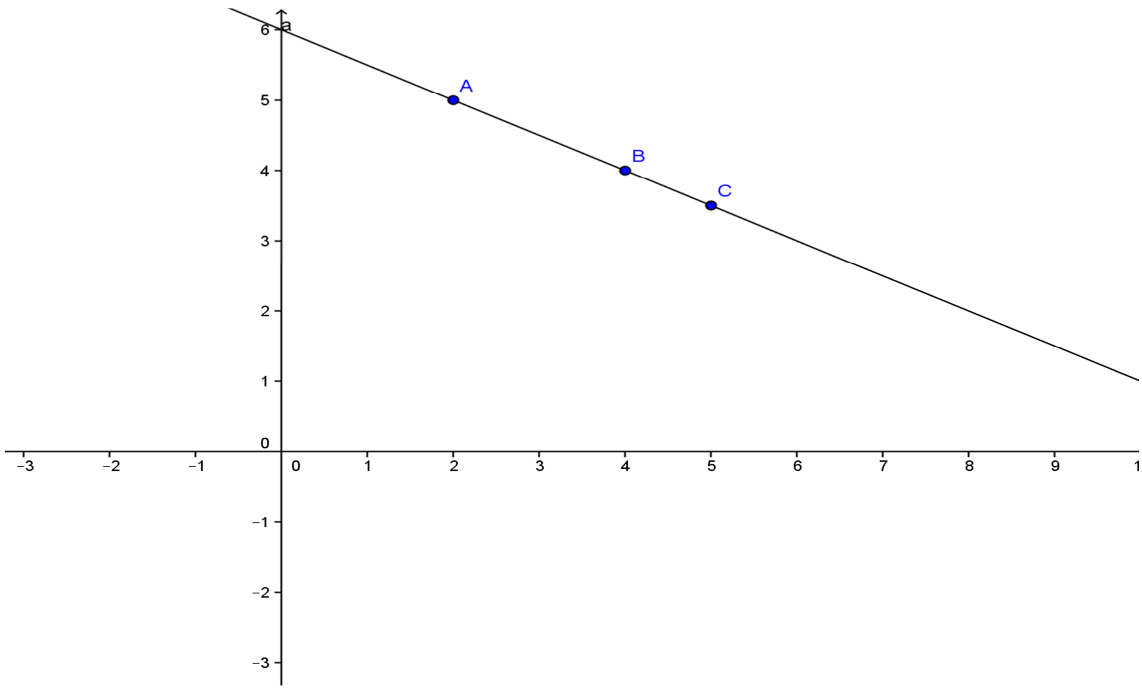
x	**x + 2y = 12**	**y**	**Par ordenado**
2	2 + 2y = 12	5	(2, 5)
4	4 + 2y = 12	4	(4, 4)
5	5 + 2y = 12	3,5	(5; 3,5)
...	...	...	...

E não podemos esquecer-nos da representação gráfica, na qual eles também apresentam muita dificuldade, e que é de fundamental importância, não só para visualizarem as soluções achadas algebricamente, mas para facilitar o entendimento do conteúdo que verão mais à frente, na seção 5.2.4.

- Representação Gráfica

A representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas variáveis é uma reta. Logo, basta pegar duas soluções da equação, colocá-la no plano cartesiano e traçar a reta.

Vamos fazer a representação gráfica do exemplo acima, utilizando as soluções já encontradas.



5.2 Sistemas de Equações do 1º Grau com duas Incógnitas

Acho importante começar dando a definição do conteúdo, mesmo que não muito formal. Não podemos esquecer que estamos lidando com crianças no 8º ano do Ensino Fundamental, porque eles precisam conhecer a estrutura do que estão procurando no problema. Isso facilita a acharem o sistema que resume o problema.

Usar um exemplo, com coisas do cotidiano dos alunos também é de grande importância, pois eles se familiarizam com a situação e isso, de certa forma, traz um pouco da atenção deles para a aula.

> “A variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos, ou seja, ao planejar suas atividades, o professor procurará articular múltiplos aspectos dos diferentes blocos, visando possibilitar a compreensão mais fundamental que o aluno possa atingir a respeito dos princípios/métodos básicos do corpo de conhecimentos matemáticos (proporcionalidade, equivalência, dedução, etc.); além disso, buscará estabelecer ligações entre a Matemática, as situações cotidianas dos alunos e as outras áreas do conhecimento.” (PCN, 1998, pag 57)

Quando temos duas equações do 1º grau com duas variáveis distintas, cada uma, temos um Sistema de Equações do 1º Grau com duas Incógnitas.

Exemplo:

Pedro comprou duas coxinhas e um refrigerante pelos quais pagou R$ 7,00. Seu irmão João comprou uma coxinha e um refrigerante a mais, pagando R$ 11,50. Qual é o preço do refrigerante e o da coxinha?

- Valor da coxinha: c
- Valor do refrigerante: r
- Lanche do Pedro: $2c + r = 7{,}00$
- Lanche do João: $3c + 2r = 11{,}50$

Precisamos encontrar o valor de c e de r que satisfaçam as duas equações ao mesmo tempo. Nesse caso, temos um sistema de equações.

$$\begin{cases} 2c + r = 7{,}00 \\ 3c + 2r = 11{,}50 \end{cases}$$

6.2.1 Soluções de um Sistema de Equações

As soluções de um sistema de equações são pares ordenados que satisfazem as duas equações ao mesmo tempo.

Para achar sua solução, podemos utilizar alguns métodos de resolução de sistemas.

5.2.2 Métodos de Resolução de Sistemas de Equações do 1º Grau com duas Incógnitas

Para ensinar os métodos de resolução de sistemas, utilizo sempre um passo a passo porque isso facilita muito o entendimento dos alunos. Notei, em minhas aulas, que se não for usado um passo a passo, eles não conseguem fazer, se perdem no problema. E antes de iniciar a resolução, sempre faço uma interpretação, pois eles têm muita dificuldade em transformar o que está escrito em sentença matemática.

5.2.2.1 Método da Substituição

1º - Escolhemos uma das equações do sistema e isolamos uma das incógnitas;

2º - Substituímos, na outra equação, a incógnita isolada pela expressão encontrada no passo anterior;

3º - Resolvemos a nova equação, que agora possui uma única incógnita;

4º - Substituímos o valor encontrado, na primeira equação, e achamos o valor da outra incógnita.

Exemplo:

Para assistir a um show em um baile, compareceram 4000 pessoas. Nesse show, o número de mulheres presentes foi 400 a mais que o dobro do número de homens presentes. Quantas mulheres havia no baile?

Interpretação:

- Número de mulheres: m
- Número de homens: h
- $m + h = 4000$
- $m = 2h + 400$

m – 2h = 400

$$\begin{cases} m + h = 4000 \\ m - 2h = 400 \end{cases}$$

Resolução:

1. m + h = 4000

   m = 4000 – h

2. m – 2h = 400

   4000 – h – 2h = 400

3. 4000 – h – 2h = 300

   - 3h = 400 – 4000

   - 3h = - 3600

   3h = 3600

   h = $\frac{3600}{3}$

   h = 1200

4. m + h = 4000

   m + 1200 = 4000

   m = 4000 – 1200

   m = 2800

Solução do sistema: (2800, 1200).

Resposta: Havia 2800 mulheres no baile.

5.2.2.2 *Método da Adição*

Geralmente, usamos esse método quando as equações possuem termos opostos. Quando não possuem, antes de iniciarmos o passo a passo, temos que efetuar manipulações algébricas para obtermos termos opostos entre as equações.

1º - Somamos as equações, termo a termo, para eliminarmos os termos opostos, e assim, uma das incógnitas.

2º - Resolvemos a equação obtida no passo anterior, achando o valor da incógnita que ficou.

3º - Substituímos o valor encontrado em uma das equações do sistema, para achar o valor da outra incógnita.

Exemplo:

Possuo R$ 2.300,00 em notas de R$ 50,00 e R$ 100,00, totalizando 30 notas. Quantas notas, de cada valor, eu possuo?

Interpretação:

Notas de R$ 50,00: x

Notas de R$ 100,00: y

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 50x + 100y = 2300 \end{cases}$$

Resolução:

Neste caso, antes do passo a passo, temos que multiplicar a 1ª equação por (-50), pois quero eliminar a incógnita x (a escolha da incógnita a ser eliminada é livre e deve ser feita de acordo com o que vai nos facilitar mais na resolução).

$$\begin{cases} -50x - 50y = -1500 \\ 50x + 100y = 2300 \end{cases}$$

1. (-50x + 50x) + (-50y + 100y) = -1500 + 2300

   50y = 800

2. $50y = 800$

$y = \frac{800}{50}$

$y = 16$

3. $x + y = 30$

$x + 16 = 30$

$x = 30 - 16$

$x = 14$

Solução do sistema: (14, 16)

Resposta: Possuo 14 notas de R$ 50,00 e 16 notas de R$ 100,00.

5.2.3 Tipos de Sistemas

Para os alunos assimilarem o que significa cada uma das classificações, não basta a teoria: eles não visualizam o que está sendo dito e precisam de exemplos para esclarecer cada situação. No entanto, não há uma necessidade real de usar exemplos bem elaborados, com todo um contexto: basta um sistema simples, só para mostrar o que acontece em cada situação.

Outra coisa importante é frisar para eles que qualquer método de resolução lhes dará a solução e a classificação do sistema e que eles podem escolher o que facilite a resolução ou o que preferirem. Senão eles ficam presos, sem saber que escolha fazer, achando que só uma é a correta.

Um sistema de equações pode ser classificado de acordo com suas soluções. Existem três classificações de sistemas:

- Possível e determinado – É quando ele possui uma única solução que satisfaz todas as equações.

- Possível e indeterminado – É quando ele possui infinitas soluções que satisfazem todas as equações.

- Impossível – É quando não existe solução comum a todas as equações.

Exemplo 1:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Utilizando o método da adição:

1º. x + x + y + (-y) = 8 + 4
   2x = 12

2º. 2x = 12
   x = $\frac{12}{2}$
   x = 6

3º. x + y = 8
   6 + y = 8
   y = 8 – 6
   y = 2

Solução do sistema: (6, 2).

Como encontramos uma única solução para o sistema, o classificamos com sistema possível e determinado.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Utilizando o método da substituição:

1º. x + 2y = 1

x = 1 – 2y

2º. 2x + 4y = 2

2.(1 – 2y) + 4y = 2

2 – 4y + 4y = 2

2 = 2

Chegamos a uma igualdade verdadeira, porém ela não nos dá uma única solução. Quando isso acontece, classificamos o sistema como sistema possível e indeterminado, neste caso, o sistema possui infinitas soluções.

Exemplo 3:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = 2 \end{cases}$$

Utilizando o método da adição:

1º. x + (-x) + y + (-y) = 3 + 2

0 = 5

Chegamos a uma igualdade falsa. Quando isso acontece, classificamos o sistema como sistema impossível.

Observação: Qualquer um dos métodos de resolução nos dará a solução do sistema, caso haja somente uma, e sua classificação. Sempre!

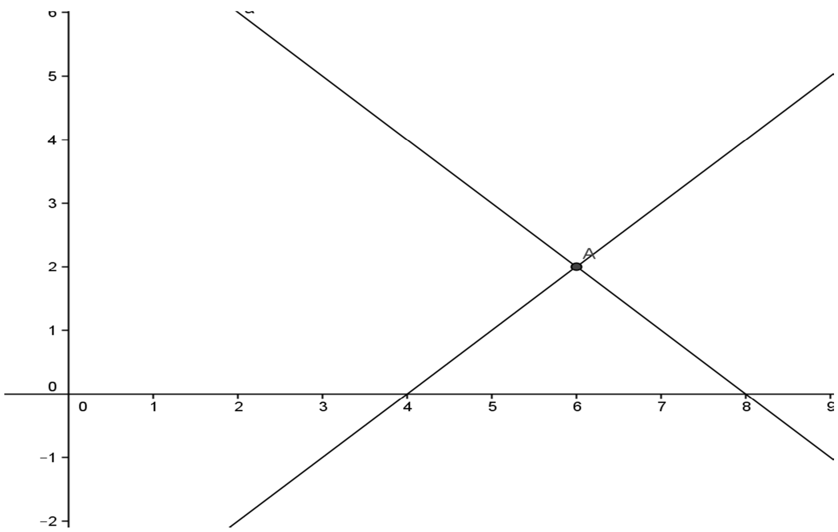
5.2.4 Representação Gráfica

Quando vou mostrar a representação gráfica, prefiro usar os mesmos exemplos dos usados anteriormente, para o aluno poder comparar a solução algébrica com os gráficos.

Sabemos que um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é formado por equações do 1º grau com duas variáveis e sabemos também que essas equações são representadas por retas, logo a solução do sistema, que satisfaz as duas equações é o ponto de interseção entre elas as retas.

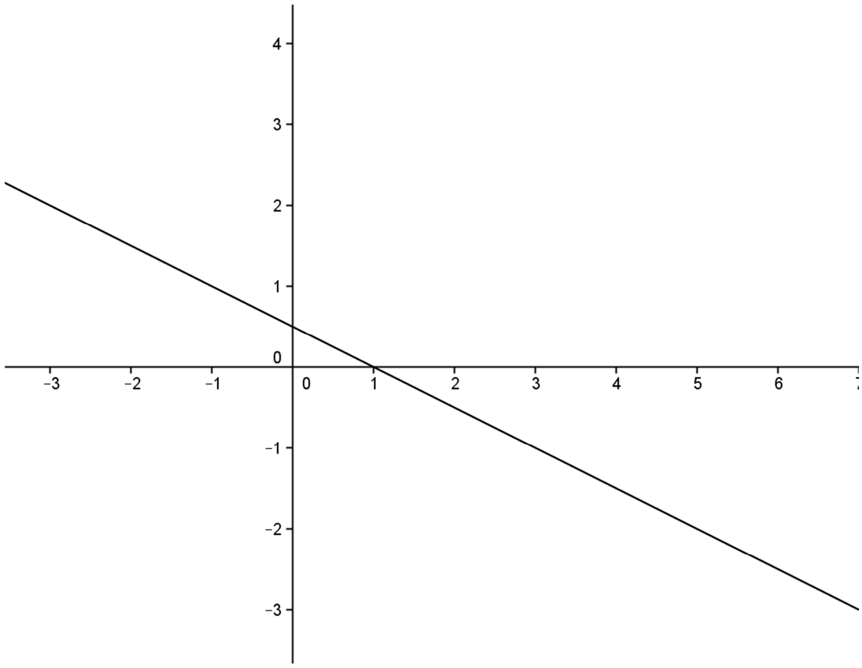
Se o sistema for do tipo possível e determinado, ele terá uma única solução, um único ponto em comum entra as retas, logo essas retas serão concorrentes.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$



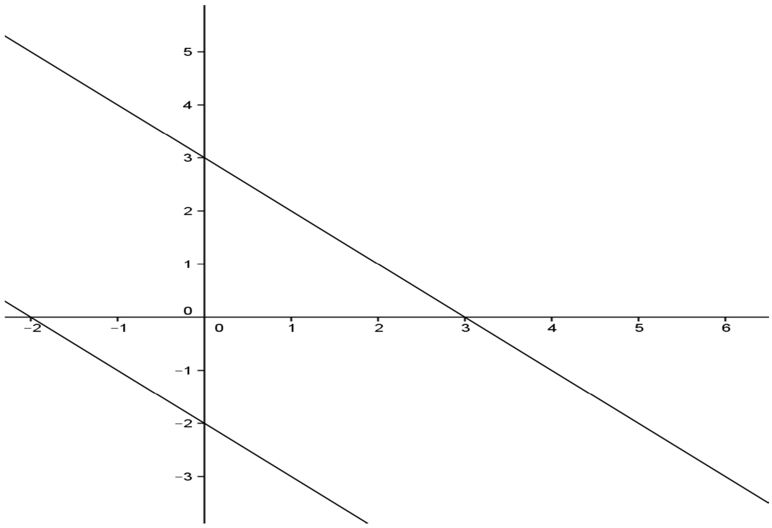
Caso o sistema seja possível e indeterminado, ou seja, com infinitas soluções, as retas terão infinitos pontos em comum, logo elas serão coincidentes.

Exemplo: $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$



Agora, se o sistema for impossível, não haverá solução, logo não terá pontos em comum, e as retas serão paralelas.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x - y = 2 \end{cases}$



6 Conclusão

Este capítulo foi elaborado individualmente.

Para realizar este trabalho, levei em consideração o que foi lido nos PCNs, nos DCNs, nos livros pesquisados e analisados e o que eu considero importante no ensino da Matemática a partir da minha experiência como docente.

O PCN fala em construção de raciocínio, em interdisciplinaridade, mas não abre mão da Matemática em si, do conteúdo, inclusive fala sobre a importância de diversos pontos dos conteúdos, com o fato de termos que trabalhar Álgebra e Geometria concomitantemente.

O DCN, apesar de também falar em construir raciocínio, interdisciplinaridade, não fala sobre a Matemática em si, não especifica conteúdo. Na verdade, ele preza o uso da Matemática para resolução de problemas, mas sem se prender a definições.

Sou mais inclinada ao PCN: o aluno tem que saber raciocinar, mas acho importante que conheça as definições, o aluno deve saber do que se trata o conteúdo, saber identificar o que está fazendo. E, de acordo com o que vejo em sala de aula, eles têm grandes dificuldades em saber o que é para fazer ou o que estão fazendo, têm dificuldades em raciocinar sem um ponto de partida, e as definições dão um ponto de partida, para identificarem como devem prosseguir nas questões.

A partir disso, cheguei à conclusão que, dentre os livros analisados, o livro "Projeto Teláris – Matemática", do Luiz Roberto Dante, foi o melhor. Ele coloca bem o conteúdo, tudo bem explicado e separado, com passo a passo, sem deixar na da de fora. Ele trabalha a parte algébrica e gráfica do conteúdo. Um livro muito bem, que eu recomendaria, com certeza.

O livro "Matemática – Ideias e Desafios", de Iracema e Dulce, é um livro mediano, com alguns problemas de clareza, que deixou de abordar um ponto do conteúdo, os tipos de sistemas, mas não possui equívocos maiores, está de acordo com o PCN, e também recomendaria.

O livro "Praticando Matemática", de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, foi o pior dos livros analisados. Ele quase não usa definições, não fala sobre os tipos de sistemas, não menciona a representação gráfica, porém tem um subcapítulo “Dízimas Periódicas”, que não é pertinente está ali. Eu não recomendaria esse livro.

De qualquer forma, vale lembrar que todos os livros têm seus altos e baixos, e todos são aprovados pelo MEC e utilizados nas escolas. Nas minhas aulas, utilizo os materiais didáticos como fonte de consulta para elaboração do meu próprio material. Portanto, cabe à nós analisá-los e adaptá-los, se necessário, ao que achamos válido e à nossa forma de ensino. Foi isso o que tentei fazer na proposta de aula apresentada acima.

7 Bibliografia

[1] BRASIL. **Educação Básica. Diretrizes Curriculares.** Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental.** Brasília. MEC/SEF, 1998.

[3] ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. Praticando Matemática: Edição Renovada - 8º ano. 3ª edição. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

[4] MORI, I.; ONAGA, D. S. Matemática – Ideias e Desafios: 8º ano. 15ª edição reformulada. São Paulo: Editora Saraiva, 2009.

[5] DANTE, L. R. Projeto Teláris - Matemática: 8º ano. 1ª edição. São Paulo: Editora Ática, 2013.