

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA/UFV  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**VIVIANE GUERRA GUIMARÃES**

**ENSINANDO A GEOMETRIA EUCLIDIANA NO ENSINO  
FUNDAMENTAL POR MEIO DE RECURSOS  
MANIPULÁVEIS**

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2015**

**VIVIANE GUERRA GUIMARÃES**

**ENSINANDO A GEOMETRIA EUCLIDIANA NO ENSINO  
FUNDAMENTAL POR MEIO DE RECURSOS  
MANIPULÁVEIS**

Dissertação apresentada à  
Universidade Federal de Viçosa,  
como parte das exigências do  
Programa de Pós-Graduação do  
Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional, para  
obtenção do título de *Magister  
Scientiae*.

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2015**

VIVIANE GUERRA GUIMARÃES

**ENSINANDO A GEOMETRIA EUCLIDIANA NO ENSINO  
FUNDAMENTAL POR MEIO DE RECURSOS  
MANIPULÁVEIS**

Dissertação apresentada à  
Universidade Federal de Viçosa,  
como parte das exigências do  
Programa de Pós-Graduação do  
Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional, para  
obtenção do título de *Magister  
Scientiae*.

APROVADA: 7 de abril de 2015.

---

Mário José de Souza

---

Walter Huaraca Vargas

---

Mercio Botelho Faria  
(Orientador)

*A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.*

**(Jacques Bernoulli)**

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, que fez a promessa e a cumpriu, realizando sonhos muito maiores que os meus.

Ao corpo docente que nos deu a oportunidade de crescer em conhecimento e pela dedicação e carinho que assim o fez.

Ao meu marido Marlon, pelo incentivo e apoio incondicional.

Ao meu filho que compreendeu os momentos de ausência e foi o motivador em cada dia difícil.

Aos meus pais que foram exemplos em minha vida e me ensinaram a transpor as barreiras e lutar sempre.

## Sumário

<b>RESUMO .....</b>	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>vii</b>
<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 1.....</b>	<b>3</b>
<b>GEOMETRIA SEGUNDO O PCN E O CBC.....</b>	<b>3</b>
1.1 PCN.....	3
1.2 CBC.....	5
<b>CAPÍTULO 2.....</b>	<b>9</b>
<b>GEOMETRIA EUCLIDIANA .....</b>	<b>9</b>
2.1 Um Pouco da História.....	9
2.2 A Geometria e Os Elementos de Euclides.....	10
2.3 Elementos Primitivos .....	12
2.4 Ângulos.....	12
2.5 Posição entre retas.....	13
2.6 Congruência .....	13
2.7 Axiomas.....	13
2.7.1 Axiomas de Incidência.....	14
2.7.2 Axiomas de Ordem.....	14
2.7.3 Axiomas de Continuidade.....	14
2.7.4 Axiomas de Congruência .....	15
2.7.5 Axiomas do Paralelismo .....	16
2.8 Polígonos.....	16
2.8.1 Triângulos.....	17
2.8.2. Quadriláteros.....	18
2.9 Fórmula para Cálculo da Área .....	19
2.9.1 O Retângulo .....	20
2.9.2 O Quadrado.....	20
2.9.3 O Paralelogramo .....	20
2.9.4 O Triângulo.....	21
2.9.5 O Trapézio.....	21
2.9.6 O Losango.....	22

2.10 Semelhança de figuras planas .....	23
2.11 Teorema de Pitágoras .....	24
<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>25</b>
<b>MATERIAIS MANIPULÁVEIS COMO METODOLOGIA DE ENSINO .....</b>	<b>25</b>
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>29</b>
<b>O ORIGAMI E A GEOMETRIA PLANA .....</b>	<b>29</b>
4.1 Construção de retas .....	34
4.2 Bissetriz, Mediatriz e Mediana.....	35
4.3 Construção de Polígonos .....	37
4.3.1 Retângulo .....	37
4.3.2 Quadrado .....	38
4.3.3 Triângulo equilátero.....	39
4.3.4 Pentágono Regular.....	40
4.3.5 Hexágono Regular.....	41
4.3.6 Octógono regular.....	42
4.4 Propriedades e Pontos Notáveis de um Triângulo .....	43
4.4.1 Circuncentro .....	43
4.4.2 Baricentro .....	44
4.4.3 Incentro .....	45
4.4.4 Ortocentro .....	46
4.5 Questões relacionadas ao Origami.....	47
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>54</b>
<b>TANGRAM E A GEOMETRIA PLANA.....</b>	<b>54</b>
5.1 Áreas dos Polígonos Obtidos por um Quadrado .....	56
5.2 Perímetro dos Polígonos pela Divisão de Figuras .....	59
5.3 Ângulos Internos dos Polígonos do Tangram.....	64
5.4 Questões relacionadas ao Tangram.....	67
<b>CAPÍTULO 6.....</b>	<b>73</b>
<b>GEOPLANO E A GEOMETRIA PLANA .....</b>	<b>73</b>
6.1 Construindo as Fórmulas com ajuda do Geoplano.....	75
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>79</b>
<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>80</b>

## RESUMO

GUIMARÃES, Viviane Guerra, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2015. **Ensinando a Geometria Euclidiana no Ensino Fundamental por Meio de Recursos Manipuláveis**. Orientador: Mercio Botelho Faria.

Nesta dissertação elaboramos uma proposta de atividade educacional que envolve o ensino da Geometria Plana através de recursos manipuláveis. O trabalho consta de revisão bibliográfica, apresentando a proposta de ensino do PCN e CBC em relação à Geometria, um breve histórico do Origami, do Tangram e do Geoplano e as habilidades desenvolvidas por esses instrumentos, dando subsídios para elaboração de atividades em sala. Neste contexto, apresentamos atividades que podem ser utilizadas como estímulo ao envolvimento com a geometria. Concluímos citando alguns outros recursos didáticos que podem ser utilizados pelos professores e alunos.

## **ABSTRACT**

GUIMARÃES, Viviane Guerra, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, april of 2015. **Teaching Euclidean Geometry in Elementary Education by Means of Manipulable Resources.** . Adviser: Mercio Botelho Faria.

In this dissertation developed a proposal for educational activity that involves the teaching of plane geometry through manipulatives resources. The work consists of bibliographic review, presenting the proposal for teaching the PCN and CBC in relation to geometry, a brief history of Origami, Tangram and Geoplano and skills developed by these instruments, providing subsidies for preparation room activities. In this context, present activities that can be used as a stimulus to the involvement with the geometry. We conclude by quoting other teaching resources that can be used by teachers and students.

## INTRODUÇÃO

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) ao final do Ensino Fundamental os alunos devem ser capazes de questionar a realidade utilizando o raciocínio lógico, a criatividade, a intuição e a capacidade de análise crítica. E é a Matemática que possibilitará ao aluno a capacidade de “estruturação do pensamento e a agilização do raciocínio dedutivo”.

Porém é a Matemática que apresenta o maior número de insatisfação tanto da parte do aluno quanto professor devido ao baixo desempenho ao final de cada etapa. Na nossa opinião isso se deve ao ensino muito mecânico e que não apresenta significado. O desafio do professor é apresentar ao aluno um ensino com base nos recursos manipuláveis que o estimule a buscar resultados e assim tornando o aprendizado mais atrativo. Nesse momento a escolha dos recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Mas precisam gerar uma análise e reflexão sobre o conteúdo.

Sabe-se que a Geometria está presente em nosso meio e os alunos têm contato constante com essa área da matemática em seu cotidiano, mas faz-se necessário que esse conhecimento seja estruturado e conseqüentemente ampliado em sala de aula. Porém são poucos os professores que têm essa preocupação e o estudo da Geometria entra em decadência.

O ensino da Geometria deve estar completamente ligado a vários recursos didáticos, mas muitos professores têm utilizado apenas os livros didáticos contribuindo para um desinteresse maior dos alunos.

As aulas que consistem em “quadro e giz” não são satisfatórias para a construção do conhecimento e os alunos demonstram grande interesse quando o ensino parte de outras ferramentas. Nesse momento, os professores recuam devido à falta de infraestrutura das escolas e suporte tecnológico. Mas para o ensino ser aceitável podemos usar diversos recursos didático-metodológicos simples que são acessíveis a qualquer instituição independentemente de seu poder aquisitivo.

Partindo desse pressuposto, a ideia é que os professores e alunos trabalhem uma forma diferenciada no ensino da Geometria Euclidiana, apresentando seus conceitos e definições a partir de dobraduras em papel, conhecido como Origami, o quebra-cabeça Tangram e o Geoplano.

Para isso dividimos o trabalho em cinco capítulos distribuídos como segue:

No capítulo 1 apresentamos os currículos que norteiam o trabalho do professor no Brasil e no estado de Minas Gerais, além das habilidades requeridas no conteúdo matemático.

Em seguida, no segundo capítulo delimitamos, em um primeiro momento, a abordar a história da Geometria Euclidiana. Já em um segundo momento, apresentamos os principais conceitos da Geometria Plana.

O capítulo 3 é dedicado ao Origami. Nele apresentamos onde e quando essa atividade surgiu, também explicita as relações que possui com os conceitos da Geometria Plana e como construí-los através das dobraduras. Ao final destacamos exercícios retirados da página virtual da OBMEP que podem ser resolvidos através dos conceitos construídos com o Origami.

Já o capítulo 4 é reservado ao quebra-cabeça Tangram. Nele expomos sua história e a construção a partir de madeira ou papel baseado nos conceitos explicitados por Souza (1997) e GÊNNOVA (1998). A partir dele desenvolvemos o cálculo do perímetro dos polígonos formados por suas peças e também acrescentamos exercícios das Olimpíadas de Matemática e suas respectivas soluções, que podem ser trabalhadas após consolidada as habilidades.

Finalmente, no capítulo 5, apresentamos o Geoplano, no qual são demonstradas as fórmulas para cálculo de área do triângulo e dos quadriláteros.

## **CAPÍTULO 1**

### **Geometria Segundo o PCN e o CBC**

A Geometria ensinada na sala de aula parte de alguns currículos que dão uma direção ao trabalho pedagógico. Para o território nacional temos o PCN (Parâmetro Curricular Nacional) e em Minas Gerais o CBC (Currículo Básico Comum). A Revista Presença Pedagógica relata que “enquanto os PCN’s apontam o caminho a ser seguido pelas escolas, o CBC se propõe a ir mais além e detalha o trabalho que pode ser realizado pelo professor com seus alunos”.

Portanto, abordaremos de forma objetiva a descrição desses dois currículos citados. Iniciaremos pelo PCN destacando seus objetivos e sugestões, em seguida o CBC, muito utilizado nas escolas públicas de Minas Gerais, descrevendo sua função na educação.

#### **1.1 PCN**

Defendendo a “urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama”, o Parâmetro Curricular Nacional (PCN) nasceu a partir de uma análise dos resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) que tem como objetivo avaliar a Educação básica brasileira, onde os resultados se mostravam insatisfatórios e diferenciados nas regiões do país.

Para garantir que todos os brasileiros tenham os conhecimentos básicos em cada disciplina, o PCN gera um norte para que os professores possam direcionar todo o trabalho realizado em sala de aula e ao mesmo tempo refletir sobre os objetivos que devem ser alcançados.

Portanto, para buscar uma harmonia de aprendizado em diversas localidades, no caso da Matemática, o PCN está pautado em diversos princípios, sendo alguns deles:

- A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente;

- A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno;
- Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática.

Em relação ao professor, o PCN destaca como importante característica poder perceber facilmente as suas próprias ideias da Matemática. Elas serão as responsáveis por sua prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição de objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação.

O PCN também apresenta algumas propostas como caminho para a construção do conhecimento, dentre elas, a utilização de recursos como: história da matemática, as tecnologias e os recursos metodológicos. Dentro do último tópico, cita os jogos, pois eles provocam o aluno, gerando interesse e prazer.

Através da atividade lúdica o aluno desenvolve o autoconhecimento e o conhecimento dos outros. Não podemos deixar de citar, como consequência desse trabalho, o desenvolvimento cognitivo e a expansão do seu raciocínio lógico. Portanto sugere que as atividades tenham como ponto de partida a “análise das figuras pelas observações, manuseios e construções que permitam fazer conjecturas e identificar propriedades” (PCN, 1998).

Acredita-se que esse mecanismo contribui no alcance dos objetivos que possui o ensino da Geometria. Denominado dentro dos blocos do conhecimento como “Espaço e Forma” e “Grandezas e Medidas”, tem como finalidade: “desenvolver um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (PCN, 1998).

Os conteúdos conceituais e procedimentais sugeridos no PCN, relacionados à Geometria Euclidiana que estão descritos nos terceiros e quartos ciclos, são:

- Distinção e classificação de figuras bidimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.
- Composição e decomposição de figuras planas.

- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).
- Construção da noção de ângulos.
- Verificação da soma dos ângulos internos de um triângulo.
- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo.
- Compreensão da noção de medida de superfície e de equivalência de figuras planas por meio da composição e decomposição de figuras.
- Cálculo da área de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas.
- Construção de procedimentos para o cálculo de áreas e perímetros de superfícies planas.

O PCN também defende que o processo de ensino-aprendizagem envolve o lado afetivo, ou seja, a predisposição, o interesse e a motivação do sujeito desse processo. A sua importância equivale aos conceitos que serão construídos.

Portanto é fundamental que o professor identifique sempre o perfil da turma que está trabalhando para que tenha objetivos claros e sucesso em seu desenvolvimento.

Neste momento introduziremos o que diz o CBC a este respeito.

## **1.2 CBC**

O Conteúdo Básico Comum é utilizado no estado de Minas Gerais e tem como objetivo “tomá-los como base para a elaboração da avaliação anual do Programa de Avaliação da Educação Básica (PROEB) e para o Programa de Avaliação da Aprendizagem Escolar (PAAE) e para o estabelecimento de um plano de metas para cada escola” (CBC).

Baseado no currículo de cada etapa escolar já descritos no PCN, o CBC também será um apoio ao professor em sala de aula. É caracterizado como um

norte para o professor e nele estão descritos os conceitos “que não podem deixar de ser ensinados e que o aluno não pode deixar de aprender”, assim como “as habilidades e competência que ele não pode deixar de adquirir e desenvolver” (CBC).

Todas as informações e orientações necessárias para um suporte ao professor podem ser obtidas através da página virtual do Centro de Referência Virtual do Professor. Nele estão contidos a Proposta Curricular, Orientações Pedagógicas, Roteiros de Atividades e outras ferramentas auxiliares. Na página virtual também é possível obter o quadro abaixo que detalha alguns tópicos, habilidades e sugestão de carga horária em cada série para o ensino da Geometria.

<b>Eixo Temático III Tema 1: Relações Geométricas entre Figuras Planas</b> Espaço e Forma					
<b>TÓPICOS</b>	<b>HABILIDADES</b>	<b>Anos / C. Horária Anual</b>			
		<b>6º</b>	<b>7º</b>	<b>8º</b>	<b>9º</b>
13. Figuras planas	13.0. Conceitos		8		
	13.1. Reconhecer as principais propriedades dos triângulos isósceles e equiláteros, e dos principais quadriláteros: quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio, losango.	11	7	7	
	13.2. Identificar segmento, ponto médio de um segmento, triângulo e seus elementos, polígonos e seus elementos, circunferência, disco, raio, diâmetro, corda, retas tangentes e secantes.	7	5	6	
	13.3. Identificar ângulo como mudança de direção.	2			
	13.4. Identificar retas concorrentes, perpendiculares e paralelas.	2			
	13.5. Reconhecer e descrever objetos do mundo físico utilizando termos geométricos.	2			
	13.6. Reconhecer a altura de um triângulo relativa a um de seus lados.	2	2	2	
15. Congruência de triângulos	15.0. Conceitos				
	15.1. Reconhecer triângulos congruentes a			5	

	partir dos critérios de congruência.				
	15.2. Resolver problemas que envolvam critérios de congruência de triângulos.			6	
	15.3. Utilizar congruência de triângulos para descrever propriedades de quadriláteros: quadrados, retângulos, losangos e paralelogramos.			4	
16. Construções geométricas	16.0. Conceitos				
	16.1. Construir perpendiculares, paralelas e mediatriz de um segmento usando régua e compasso.	5	5	3	
	16.2. Construir um triângulo a partir de seus lados, com régua e compasso.		5	4	
17. Teorema de Tales e semelhança de triângulos	17.0. Conceitos				
	17.1. Resolver problemas que envolvam o teorema de Tales.				8
	17.2. Reconhecer triângulos semelhantes a partir dos critérios de semelhança.				10
	17.3. Resolver problemas que envolvam semelhança de triângulos.				8
V. Pontos notáveis de um triângulo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer as propriedades do ponto de encontro das medianas de um triângulo (baricentro).</li> <li>• Reconhecer as propriedades do ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo (circuncentro).</li> <li>• Reconhecer as propriedades do ponto de encontro das três alturas de um triângulo (ortocentro).</li> <li>• Reconhecer as propriedades do ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo (incentro).</li> <li>• Resolver problemas que envolvam segmentos que unem cada vértice de um triângulo a pontos do lado oposto (cevianas).</li> </ul>				

\* Para o último tópico não se estabelece uma sugestão de carga horária e fica a critério do professor.

*Tema 2: Expressões Algébricas*

TÓPICOS	HABILIDADES	Anos / C. Horária Anual			
		6º	7º	8º	9º
19. Medidas de	19.0. Conceitos				

comprimento e perímetros	19.1. Reconhecer a necessidade de medidas padrão.	6			
	19.2. Relacionar o metro com seus múltiplos e submúltiplos.	2		2	
	19.3. Escolher adequadamente múltiplos ou submúltiplos do metro para efetuar medidas.	1		2	
	19.4. Utilizar instrumentos para medir comprimentos.	1		2	
	19.5. Fazer estimativas de medidas lineares tais como comprimentos e alturas.	1		2	
	19.6. Resolver problemas que envolvam o perímetro de figuras planas.	5		7	4
20. Áreas e suas medidas	20.0. Conceitos	2			
	20.1. Relacionar o metro quadrado com seus múltiplos e submúltiplos.	3		2	
	20.2 . Escolher adequadamente múltiplos ou submúltiplos do metro quadrado para efetuar medidas.	1			
	20.3. Fazer estimativas de áreas.	2			2
	20.4. Resolver problemas que envolvam a área de figuras planas: triângulo, quadrado, retângulo, paralelogramo, trapézio, discos ou figuras compostas por algumas dessas.	8		7	6

Tabela 1.1: Fonte: <http://crv.educacao.mg.gov.br>.

Observando que a Geometria Euclidiana está mais concentrada no ciclo 3º ciclo e 4º ciclo do PCN que se referem às turmas do 6º a 9º ano do Ensino Fundamental, o presente estudo se aterá apenas a essas séries indicadas.

## CAPÍTULO 2

### Geometria Euclidiana

#### 2.1 Um Pouco da História

A Geometria (em grego antigo significa: geo – “terra”, metria – “medida”) consiste no estudo de forma, tamanho e posição relativa de figuras, além das propriedades do espaço. De acordo com historiadores, o primeiro passo para esse tipo de estudo foi dado pelos egípcios às margens do rio Nilo, onde as pessoas trabalhavam com o cultivo. Foi nesse período que deu início às comunidades fixas, abandonando a vida nômade, tendo como base a atividade agrícola.

Por volta de 3.500 a.C. a cobrança de impostos era baseada na altura da enchente no ano e na área de superfície das terras gerando a necessidade de conhecimentos da geometria. Leonard Mlodinow (2010) em “*A Janela de Euclides*” conta que “como muita coisa estava em jogo, os egípcios desenvolveram métodos bastante confiáveis, embora tortuosos, para calcular a área de um quadrado, de um retângulo e de um trapezóide”. Tal estudo foi desenvolvido e aprimorado, desencadeando nas construções das pirâmides.

Porém, no mesmo período, na Mesopotâmia, os babilônios apresentavam uma matemática mais complexa e elaborada. E através de alguns objetos foi constatado que já possuíam algum conhecimento do Teorema de Pitágoras.

Todo esse conhecimento começou a ser sistematizado por Tales de Mileto (624-547a.C.) e estabelecida como teoria dedutiva definindo a veracidade das proposições geométricas. Eves (2008) descreve Tales como o primeiro a quem se associam descobertas matemáticas e credita a ele alguns resultados da Geometria que obteve mediante raciocínios lógicos e não pela intuição:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.
5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.

Pitágoras, um de seus discípulos, dá continuidade aos estudos e nasce a escola pitagórica responsável pela descoberta do teorema relacionado aos triângulos retângulos, já conhecido pelos babilônios, mas que foi capaz de fazer sua primeira demonstração. Através de seus estudos em relação aos números inteiros e as frações estabeleceu um sistema que mudou o rumo da matemática.

Por volta do século III a.C. passamos a ter as primeiras influências de Euclides. Apesar de ter poucos registros a seu respeito, acredita-se ter nascido na Síria. Viveu em Alexandria, onde foi convidado a lecionar na escola chamada “Museu”.

Em pouco tempo vem a publicação de “Elementos” de Euclides. A obra, composta de treze volumes, consiste em princípios da geometria, que hoje dá-se o nome de geometria euclidiana, deduzidos a partir de um conjunto de axiomas. Os livros abordam a teoria dos triângulos, álgebra geométrica, teoria dos números, geometria dos sólidos entre outras.

Definiram-se então os três conceitos que são a base de toda a geometria: ponto, reta e plano. Essas noções primitivas são aceitas sem definição. Todos os outros conceitos são gerados a partir desses três primeiros, como os ângulos e as figuras geométricas.

## **2.2 A Geometria e Os Elementos de Euclides**

Além de dominar o ensino da geometria, nenhum outro livro, exceto a Bíblia, foi tão usado e estudado. Publicado até os dias atuais, *Os Elementos* estão divididos em treze livros abordando a geometria, a teoria dos números e a álgebra. Os conceitos da geometria plana elementar são abordados nos seis primeiros livros. Euclides foi capaz de deduzir 465 proposições a partir de apenas 5 postulados. BOYER (1996, p.73) descreve que dos manuscritos de *Os Elementos* encontramos as dez pressuposições seguintes:

Postulados. Seja postulado o seguinte:

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais.
5. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as retas, se

prolongadas infinitamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Noções comuns:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que a parte.

Em *Elementos* a organização que compõe os livros é:

- Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema de Pitágoras.
- Livro II: contém a álgebra geométrica, abordando igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
- Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
- Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
- Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.
- Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
- Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.
- Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares.

Com todos esses conceitos e muito estudo construiu-se grande parte da Geometria Euclidiana Plana que é utilizada até hoje e aplicada ao nosso cotidiano.

Para desenvolvimento deste capítulo e apresentação dos principais conceitos utilizamos como referência: MACHADO, P. F. Fundamentos da Geometria Plana e BARBOSA, J. L. M., Geometria Euclidiana Plana – SBM.

### 2.3 Elementos Primitivos

Os elementos primitivos são afirmações matemáticas que não definimos. Esses elementos exprimem a noção de algo sob o ponto de vista geométrico. Na geometria euclidiana são três os elementos: ponto, reta e plano.

O ponto é a unidade base de toda a geometria. Ele não possui dimensão, nem forma e refere-se, originalmente, a uma dada posição específica. Sua indicação é dada por letra maiúscula latina. Já a reta é formada por um conjunto de pontos que se sucedem uns aos outros em uma sequência infinita, ou seja, a reta não tem início nem fim. Para sua representação usam-se setas nas extremidades para indicar continuidade nos dois sentidos e indicados por letra minúscula latina. Temos também os elementos derivados de uma reta:

- Semirreta que é a parte de uma reta que possui um ponto de origem e é ilimitada em apenas um sentido;
- Segmento de reta que é a parte de uma reta que possui um ponto de origem e um de fim, que são as suas extremidades.

Finalmente chegamos ao plano, considerado como um conjunto infinito de retas não coincidentes, paralelas e postas lado a lado. Ele possui duas dimensões, dados por comprimento e a largura. Podemos dizer também que é infinito nos dois sentidos de todas as direções contidas nele e é denominado por letras gregas. Dada sua situação é comum trabalharmos mais com regiões planas que com planos propriamente ditos. Essas regiões são delimitadas e comumente chamadas de figuras planas.

### 2.4 Ângulos

Ao unirmos duas semirretas de mesma origem não colineares estamos estabelecendo um ângulo, conhecido também como giro. São três as unidades de medida de ângulos mais utilizadas: o grau, o radiano e o grado. Adotando como unidade de medida o grau trataremos de quatro tipos:

- Agudo  $\rightarrow 0^\circ < \hat{A} < 90^\circ$

- Reto  $\rightarrow \hat{A} = 90^\circ$
- Obtuso  $\rightarrow 90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$
- Raso  $\rightarrow \hat{A} = 180^\circ$

## 2.5 Posição entre retas

Pensando novamente em reta, teremos mais alguns conceitos quando tratarmos das relações que existem entre duas retas. Posições de duas ou mais retas. Elas serão consideradas paralelas quando não se tocam. Definimos como perpendiculares no caso em que duas ou mais retas fazem entre si um ângulo de  $90^\circ$ . Por fim são chamadas de oblíquas se duas ou mais retas fazem entre si um ângulo inferior a  $90^\circ$ .

## 2.6 Congruência

Dados dois segmentos  $AB$  e  $CD$  dizemos que eles são congruentes se seus comprimentos são iguais, isto é, se  $\overline{AB} = \overline{CD}$ . A relação de congruência será denotada pelo símbolo “ $\equiv$ ”, ou seja,  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ . A partir daí é possível estabelecer o lugar geométrico do ponto médio, definido como o ponto que divide um segmento de reta em dois outros congruentes. Todo segmento de reta possui um único ponto médio e está em seu interior.

No caso de ângulos dizemos que dois ângulos  $A\hat{B}C$  e  $E\hat{F}G$  são congruentes se suas medidas são iguais, isto é, se  $A\hat{B}C = E\hat{F}G$ . Dado um ângulo  $A\hat{B}C$  dizemos que uma semirreta  $\overrightarrow{BD}$  é uma bissetriz de  $A\hat{B}C$  se o ponto  $D$  pertence ao interior de  $A\hat{B}C$  e  $A\hat{B}D = D\hat{B}C$ . A reta  $\overleftrightarrow{BD}$  será chamada de reta bissetriz de  $A\hat{B}C$ . Com isso concluímos que cada ângulo possui uma única bissetriz.

## 2.7 Axiomas

O axioma consiste em uma sentença que não é demonstrada, mas considerada como uma verdade universal. Euclides descreveu em seu livro diversos axiomas, apresentando algumas lacunas. Essa situação fez com que

diversos matemáticos tentassem reorganizar a geometria euclidiana e extinguir os questionamentos existentes. O alemão David Hilbert reescreveu o sistema de axiomas de forma mais completa e organizada da geometria euclidiana, ganhando notoriedade. Portanto, nesse trabalho, citaremos tais axiomas que foram definidos em cinco grupos (HILBERT, 2003).

### 2.7.1 Axiomas de Incidência

*Axioma 1. Para cada dois pontos  $A$  e  $B$  há sempre uma reta que está associada aos dois pontos  $A$  e  $B$ .*

*Axioma 2. Para dois pontos  $A$  e  $B$  não há mais do que uma reta que está associada aos dois pontos  $A$  e  $B$ .*

*Axioma 3. Sobre uma reta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta.*

### 2.7.2 Axiomas de Ordem

*Axioma 4. Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos tais que  $C$  está entre  $A$  e  $B$  então estes três pontos são distintos, colineares e  $C$  está entre  $B$  e  $A$ .*

*Axioma 5. Dados dois pontos distintos,  $A$  e  $B$ , existem um ponto  $C$  entre  $A$  e  $B$  e um ponto  $D$  tal que  $B$  está entre  $A$  e  $D$ .*

*Axioma 6. Dados três pontos quaisquer de uma reta, não há mais do que um que está entre os outros dois.*

*Axioma 7. (Axioma de Pasch) Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três vértices de um triângulo e seja  $r$  uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se  $r$  corta o segmento  $AB$ , então ela também corta o segmento  $AC$  ou o segmento  $CB$ .*

### 2.7.3 Axiomas de Continuidade

*Axioma 8. (Axioma de Arquimedes) Se  $AB$  e  $CD$  são segmentos quaisquer, então existe um número natural  $n$  tal que  $n$  segmentos congruentes a  $CD$  construídos continuamente a partir de  $A$  sobre a semirreta  $AB$ , conterà o ponto  $B$ .*

Axioma 9. (Axioma da Continuidade Circular): Se uma circunferência  $C$  tem um ponto no interior e um ponto no exterior de outra circunferência  $D$ , então as duas circunferências se cortam em dois pontos.

Axioma 10. (Axioma da Continuidade Elementar): Se uma extremidade de um segmento de reta está no interior de uma circunferência e a outra extremidade no exterior, então o segmento corta a circunferência em um ponto.

#### 2.7.4 Axiomas de Congruência

Axioma 11. Se  $A$  e  $B$  são dois pontos de uma reta  $r$  e  $A'$  é um ponto de uma reta  $r'$ , pode-se sempre encontrar sobre uma semirreta de  $r'$  um ponto  $B'$  determinado por  $A'$  tal que o segmento  $AB$  seja congruente ou igual ao segmento  $A'B'$ .

Axioma 12. (transitividade) Se os segmentos  $A'B'$  e  $A''B''$  são congruentes com um mesmo segmento  $AB$ , também o segmento  $A'B'$  é congruente com o segmento  $A''B''$ .

Axioma 13. Sejam  $AB$  e  $BC$  dois segmentos da reta  $r$  sem pontos comuns, e por outro lado  $A'B'$  e  $B'C'$  dois segmentos sem pontos comuns sobre a mesma reta  $r$  ou sobre outra distinta  $r'$ : se  $AB \equiv A'B'$  e  $BC \equiv B'C'$  então  $AC \equiv A'C'$ .

Axioma 14. Sejam dados um ângulo  $\angle(h, k)$ , uma reta  $a'$  e um dos lados determinados por  $a'$ , e representemos por  $h'$  uma semirreta de  $a'$  que parte de  $O'$ : existe então uma e uma só semirreta  $k'$  tal que o ângulo seja congruente ou igual ao ângulo  $\angle(h', k')$ ; utilizando símbolos:  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$  e tal que por sua vez todos os pontos interiores do ângulo  $\angle(h', k')$  estão situados no lado dado em relação a  $a'$ . Todo ângulo é congruente consigo mesmo, isto é, verifica-se sempre  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ .

Axioma 15. Se em dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  se verificam as congruências  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$ ,  $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ , então tem-se sempre também que  $BC \equiv B'C'$

### 2.7.5 Axiomas do Paralelismo

Axioma 16. *Seja  $r$  uma reta qualquer e  $A$  um ponto exterior a  $r$ ; então, no plano determinado por  $r$  e  $A$  há, no máximo, uma reta que passa por  $A$  e não corta  $r$ .*

## 2.8 Polígonos

Quando conectamos segmentos de reta através de seus extremos sem que sejam colineares formamos figuras geométricas, denominadas polígonos. Além disso, se a partir de dois pontos quaisquer internos à figura, obtivermos um segmento de reta que esteja interno a mesma figura, o polígono será classificado como convexo.

Os elementos de um polígono são: lado, vértice e ângulo. Os lados são exatamente os segmentos de reta que compõem a figura. Os vértices serão os encontros das extremidades dos lados. Por fim, os ângulos serão formados pelos lados consecutivos.

Esses polígonos serão classificados de acordo com o número de lados que possuir, conforme Tabela 2.1.

Nome	Número lados
Triângulo	3
Quadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Decágono	10
Undecágono	11
Dodecágono	12
Pentadecágono	15
Icoságono	20

Tabela 2.1: Número de lados dos polígonos.

Quando os lados forem congruentes o polígono é denominado regular.

### 2.8.1 Triângulos

Descrevemos como triângulo o polígono formado por três lados. Eles podem ser classificados quanto a medida dos ângulos ou quanto aos lados. No primeiro caso denominamos acutângulo aquele que apresenta todos os três ângulos com a medida menor que  $90^\circ$ . Para aquele que possuir um ângulo de  $90^\circ$  define-se como retângulo e quando possuir um ângulo maior que  $90^\circ$  se enquadra como obtusângulo. Já no segundo caso, o triângulo que possui os três lados com a mesma medida será classificado por equilátero, consequentemente possui os três ângulos internos com a mesma medida. Quando a congruência existir apenas por dois lados denominam-se isósceles e o mesmo ocorrerá com dois de seus ângulos. Já aqueles que se difere em todos os lados classificam-se como escalenos e novamente apresenta a mesma característica em relação aos ângulos.

Quando comparamos dois triângulos eles podem ser congruentes, isso significa dizer que é possível, através de uma rotação ou reflexão, sobrepor um triângulo ao outro. Consequentemente podemos admitir que exista uma congruência dos lados e dos ângulos. Para isso temos que estabelecer os lados correspondentes (ou homólogos), ou seja, aqueles que se opõem a ângulos iguais. São quatro os casos de congruência que podemos estabelecer:

- *Caso LLL (lado, lado, lado): dois triângulos que têm todos os lados correspondentes congruentes.*
- *Caso LAL (lado, ângulo, lado): dois triângulos que tem dois lados correspondentes e o ângulo formado por eles forem congruentes.*
- *Caso ALA (ângulo, lado, ângulo): nessa condição os dois triângulos terão os dois ângulos correspondentes e o lado compreendido entre eles, todos congruentes.*
- *Caso LAA<sub>o</sub> (lado, ângulo, ângulo oposto): Se dois triângulos tem de forma ordenada a congruência de um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.*

Todo triângulo possui pontos que se denominam pontos notáveis. Pontos notáveis de triângulos são certos pontos determinados por elementos

do triângulo que possuem alguma propriedade especial. Os mais conhecidos são quatro: o baricentro, o circuncentro, o ortocentro e o incentro.

A mediana de um triângulo é o segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Portanto, qualquer triângulo apresenta três medianas. As medianas de um triângulo intersectam-se num único ponto chamado baricentro, que dista dois terços do vértice da mediana correspondente (Teorema de Ceva).

A mediatriz do lado de um triângulo é uma reta perpendicular ao lado no seu ponto Médio. Ao estabelecermos as mediatrizes dos três lados de um triângulo, elas intersectam-se num único ponto, chamado circuncentro. A característica desse ponto é que ele equidista dos três vértices do triângulo.

O ortocentro é o ponto de encontro das três alturas relativas de um triângulo.

Por fim temos o incentro que é estabelecido no ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo e ele é equidistante aos lados.

Todo triângulo possui também uma base média, caracterizado como o segmento de reta que une os pontos médios de dois de seus lados. Esse segmento possui a metade da medida do terceiro lado e será paralelo a ele.

### 2.8.2. Quadriláteros

Considerado como todos os polígonos que possuem quatro lados é possível reclassificá-los a partir das características dos lados e ângulos. Temos o retângulo, que é uma figura geométrica plana cujos lados opostos são paralelos, de mesma medida e com todos os ângulos medindo  $90^\circ$ . O quadrado é uma figura geométrica plana regular em que todos os seus lados e ângulos são congruentes, sendo, portanto um tipo de retângulo. Já o paralelogramo constitui em todo quadrilátero cujos lados opostos são congruentes e paralelos, sem medida definida para seus ângulos internos. Quando o quadrilátero possui apenas dois lados paralelos recebem o nome de trapézio. E por fim, temos o losango que é um quadrilátero que possui lados opostos paralelos e todos congruentes, além de duas diagonais que se interceptam exatamente no ponto médio de cada uma e são perpendiculares. Todo losango é também paralelogramo.

## 2.9 Fórmula para Cálculo da Área

Como visto na história da geometria, a mesma surgiu a partir da necessidade de definir o espaço ocupado por uma determinada região. Esse é o conceito de área, que é dado por um valor positivo. O cálculo de área tem sua aplicabilidade no dia a dia, como por exemplo, a construção de um muro, a quantidade de piso a ser utilizado em uma sala ou o tamanho de uma cortina no quarto. Mas todos esses cálculos são feitos a partir de regiões poligonais convexas. Na obra de Euclides a ideia de área está associada ao conceito de igualdade entre figuras (equivalência).

Mas para medir a superfície de uma região é necessário utilizar outra superfície como unidade de medida e verificar quantas vezes essa unidade cabe dentro da região a ser medida.

Na sua obra, Lima (1991, p. 21) descreve as seguintes propriedades:

Seja  $P$  um polígono no plano. A cada polígono  $P$  se pode associar um número real não negativo, chamado área de  $P$ , com as seguintes propriedades:

- 1) Polígonos congruentes têm áreas iguais.
- 2) Se  $P$  é um quadrado com lado unitário, então a área de  $P = 1$ .
- 3) Se  $P$  pode ser decomposto em  $n$  polígonos  $P_1, \dots, P_n$ , tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de  $P$  é a soma das áreas dos  $P_i$ .

Na maior parte das obras literárias se adota como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento, denominando região *quadrada unitária*, e tem por definição área igual a 1.

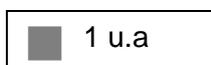


Figura 2.1

Cada polígono tem uma forma para calcular sua área, mas todos podem partir do mesmo princípio de encontrar quantas regiões quadradas unitárias comportam em determinada figura. O presente estudo abordará os seguintes tipos de superfície: retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, trapézio e losango.

### 2.9.1 O Retângulo

Para sabermos a área de um retângulo, determinamos quantos quadrados unitários são necessários para preencher o polígono.



Figura 2.2

Portanto, se denominarmos a medida da base por  $b$  e a medida da altura por  $h$ , basta multiplicarmos as duas dimensões e obtemos a área do retângulo.

$$A = b \cdot h$$

### 2.9.2 O Quadrado

Partindo da ideia da área do retângulo, para calcular a área de um quadrado basta que se multipliquem dois dos seus lados  $L$  entre si.

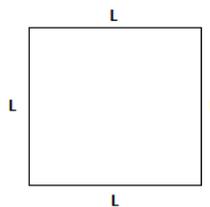


Figura 2.3

$$A = b \cdot h \text{ ou } A = l^2$$

### 2.9.3 O Paralelogramo

Para definir sua área é necessário dividir a figura em duas partes e construí-lo novamente invertendo as partes.

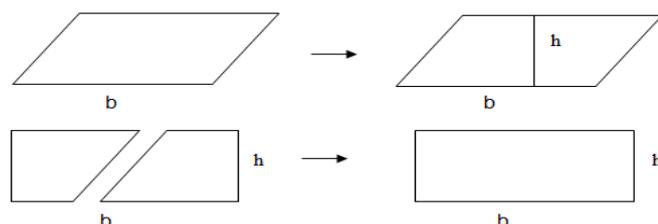


Figura 2.4

Portanto, verificamos que a área de um paralelogramo pode ser calculada da mesma forma que um retângulo, ou seja:

$$A = b \cdot h$$

#### 2.9.4 O Triângulo

Conhecendo a área de um paralelogramo fica mais simples determinar a área de uma região triangular. Isso porque todo triângulo é exatamente a metade da região limitada por um paralelogramo com mesma base e mesma altura.

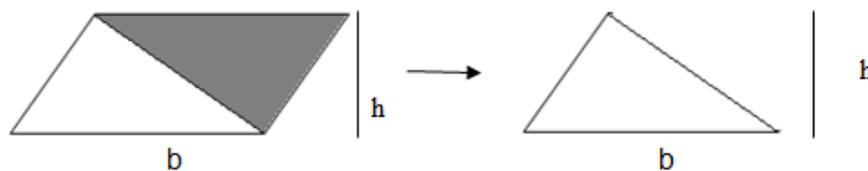


Figura 2.5

Como o paralelogramo pode ser decomposto em dois triângulos congruentes pelo caso L.L.L. (se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes), a medida da área triangular será a metade da área do paralelogramo.

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

#### 2.9.5 O Trapézio

Para determinar sua área, também é possível definir a partir de um retângulo e dois triângulos, completando a figura.

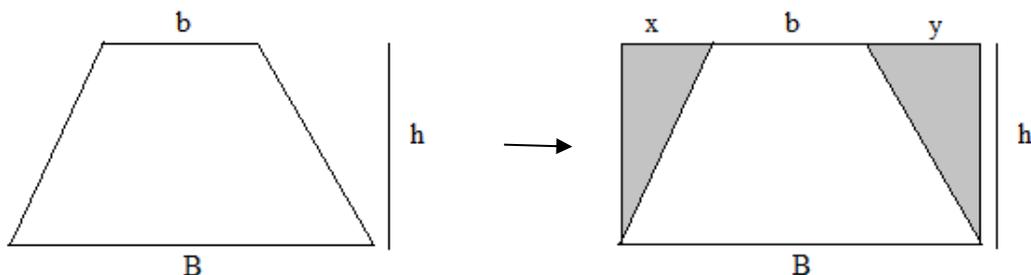


Figura 2.6

O trapézio tem bases  $B$  (base maior) e  $b$  (base menor). Para completar a figura e transformá-la em um retângulo é necessário prolongar a base menor de forma que fique do mesmo tamanho que a maior. Transformando em um retângulo de base  $B$  obtemos dois triângulos de base  $x$  e  $y$ , respectivamente, com mesma altura do trapézio. Portanto, a área procurada será a área do retângulo subtraído das áreas dos dois triângulos obtidos.

$$A = B \cdot h - \left( \frac{x \cdot h}{2} + \frac{y \cdot h}{2} \right) = B \cdot h - \frac{h}{2} (x + y)$$

$$A = \frac{2Bh - h(B - b)}{2} = \frac{2Bh - Bh + bh}{2}$$

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Concluimos que para definirmos a área de um trapézio multiplicamos a soma das bases pela altura e dividimos por dois.

### 2.9.6 O Losango

A determinação da sua área será obtida pela divisão em dois triângulos, um superior e outro inferior com bases na diagonal menor do losango. Denominamos na Figura 2.7 em destaque a diagonal da horizontal por  $d$  e a vertical por  $D$ .

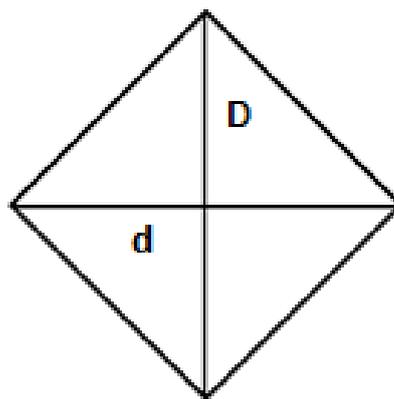


Figura 2.7

Temos dois triângulos iguais e calculamos a área:

$$A = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2}$$

$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$

## 2.10 Semelhança de figuras planas

Quando existir uma correspondência entre os vértices das figuras em estudo, de forma que os ângulos são congruentes e os lados correspondentes estabelecem uma mesma razão  $k$  entre eles, ou seja, são proporcionais, denominamos como figuras semelhantes. Já a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Como todo polígono pode ser dividido em triângulos iremos usá-lo como base na demonstração.

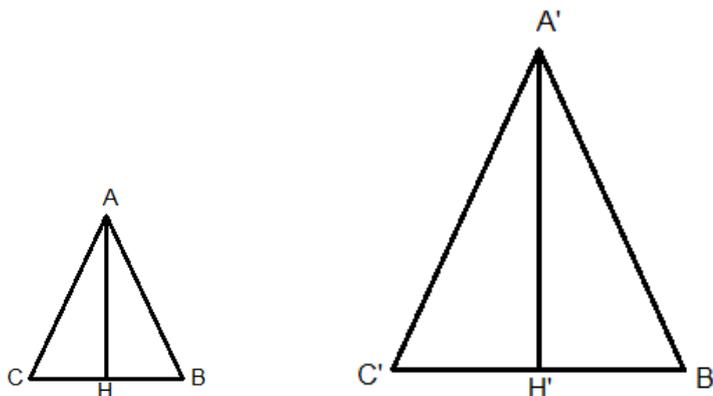


Figura 2.8

Assim temos:

$$k = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'}$$

Denominamos as respectivas áreas por  $S$  e  $S'$ . Portanto:

$$S = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$S' = \frac{B'C' \times A'H'}{2}$$

Procurando a razão entre as áreas concluímos que:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{BC \times AH}{2}}{\frac{B'C' \times A'H'}{2}} = \frac{BC \times AH}{B'C' \times A'H'} = k \times k = k^2.$$

## 2.11 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é uma equação matemática muito utilizada em qualquer triângulo retângulo. Ele define que se elevarmos a medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto) ao quadrado, seu resultado será igual à soma dos quadrados dos catetos (lados adjacentes ao ângulo reto).

LIMA (2006, p. 54) demonstra a fórmula decompondo um trapézio em três triângulos retângulos, conforme Figura 2.9. Estabelece a base maior por  $b$  a menor por  $c$  e a altura relativa por  $c + b$ . A partir daí calculasse a área total do polígono.

$$A = \frac{(c + b) \cdot (c + b)}{2} = \frac{c^2 + 2bc + b^2}{2}.$$

Em seguida calculamos novamente a área do trapézio, mas considerando-o como a soma da área dos três triângulos.

$$A = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a \cdot a}{2} = bc + \frac{a^2}{2}.$$

Igualando as duas equações, temos:

$$\begin{aligned}bc + \frac{a^2}{2} &= \frac{c^2 + 2bc + b^2}{2} \\a^2 + 2bc &= b^2 + c^2 + 2bc \\a^2 &= b^2 + c^2.\end{aligned}$$

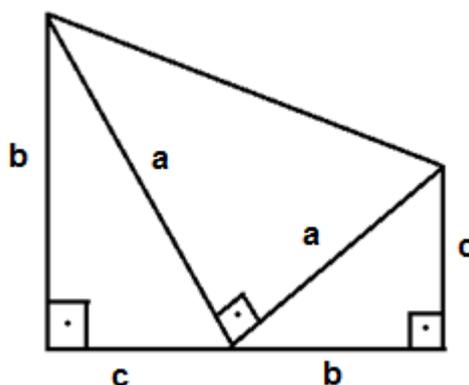


Figura 2.9

## **CAPÍTULO 3**

### **Materiais Manipuláveis como Metodologia de Ensino**

Muitos têm a visão da Matemática como um conhecimento pronto e acabado, com isso o papel dos professores em muitas escolas é de apenas informar esses conhecimentos. O aluno então é visto como um agente passivo em sala de aula e existem aqueles que têm o pensamento de que essa área do conhecimento é acessível a pessoas com um nível elevado de inteligência. Como consequência, o aprendizado fica prejudicado. Mas sabemos que o conhecimento está em constante construção e isso deve ocorrer no ambiente escolar com a interação de todos. De acordo com o pensamento de Carvalho (1994, p.15) “os indivíduos, no processo de interação social com o mundo, reelaboram, complementam, complexificam e sistematizam os seus conhecimentos”.

Concluimos que a sala de aula deve ser o ambiente que propicia a troca de saberes e o professor assumirá o papel de sistematizar a ideias geradas. Ele deve dinamizar suas aulas e com isso, deve refletir bastante de como planejar as aulas, pois o professor não será mais aquele que entrega as fórmulas prontas, mas o orientador e mediador entre as habilidades pré-existente dos alunos e o conhecimento consolidado.

Porém isso não será possível se não for bem aceito da parte do educador, pois ele tem grande importância nesse processo educativo. Seu papel tem sofrido mudanças com o tempo e faz-se necessário sua adaptação à nova realidade. D’Ambrósio (2012, pg. 73) afirma que:

O professor que insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimento está fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral. O novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e, naturalmente, de interagir com o aluno na produção e na crítica de novos conhecimentos, e isso é essencialmente o que justifica a pesquisa.

Nesse sentido, Alves (2001) fala sobre alguns aspectos que regem a formação do professor:

ter consciência do que faz ou pensa a respeito de sua prática pedagógica, ter visão crítica das atividades e procedimentos na sala de aula, ter uma postura de pesquisador, além de possuir um melhor conhecimento dos conteúdos e de seus alunos.

O professor precisa ser criativo e inovar em suas aulas, despertando o interesse contínuo do aluno. É nesse momento que abordamos a didática, que se refere a arte de ensinar ou o procedimento usado para transmitir experiências. Não existe um único método de ensino, esse deve ser sempre adaptado à turma a qual se pretende alcançar.

A didática não será uma receita que terá sucesso em todos os casos. Para isso é necessário um bom diagnóstico da turma a ser ensinada para que as ações tenham êxito. Num contexto onde existem o estímulo e o significado das ações executadas, tanto professor quanto aluno, reconhecerão quais são suas responsabilidades dentro da esfera escolar.

Uma das ferramentas que o professor tem para desenvolver o processo de estudo se refere ao uso de um material didático adequado, que será qualquer instrumento que propicia o ensino-aprendizagem. A utilização de materiais manipuláveis é um grande recurso nesse contexto. E quando falamos de matemática gera a possibilidade de transformar o conhecimento em algo palpável. Moraes (1959, p. 120), classifica os materiais manipuláveis, de acordo com suas características nos seguintes grupos:

- Material instrumental ou de trabalho: giz, quadro-negro, cadernos, régua, compasso, esquadros, transferidor, tábuas (de logaritmos, de números primos, de quadrados, de raízes quadradas etc.), goniômetro, curvímeter, régua de cálculo, planímetro, estôjo de desenho, máquina de calcular, etc.
- Material ilustrativo: desenhos, esquemas, quadros murais, coleções de figuras, modelos de desenhos e ilustrações de verdade, gravuras, discos, filmes, projeções (e os respectivos aparelhos), vitrolas, televisão, gráficos estatísticos, mapas de símbolos convencionais, ampliações, selos, bandeiras, etc.
- Material analítico ou de observação: corpos geométricos, modelos para observação e análise de algumas proposições geométricas para o ensino de projeções, para ensino de números irracionais, etc.
- Material experimental ou demonstrativo: aparelhos para demonstração intuitiva: do teorema de Tales, do de Pitágoras, da igualdade de triângulos, da equivalência de área, da geração de sólidos, da variação das linhas trigonométricas etc.
- Material informativo: livros, revistas, enciclopédias, dicionários, fontes de referência, fichários, etc.

Ao deparar com essa visão, parece que estamos diante de um paradoxo: como tornar a matemática mais “concreta” sem abdicar da capacidade de abstração que o seu aprendizado proporciona?

Possivelmente, quando as pessoas pedem que a matemática se torne mais “concreta”, elas podem não querer dizer, somente, que desejam ver esse conhecimento aplicado às necessidades práticas, mas também que almejam compreender seus conceitos em relação a algo que lhes dê sentido. E a matemática pode ser ensinada desse modo, mais “concreto”, desde que seus conceitos sejam tratados a partir de um contexto. Isso não significa necessariamente partir de um problema cotidiano, e sim saber com o que esses conceitos se relacionam, ou seja, como podem ser inseridos em uma rede de relações. Tratando-se de Geometria, esse recurso se torna quase que indispensável, pois estamos tratando de espaço e formas, e o concreto deve estar presente dentro deste contexto.

Pesquisas na área mostram que alunos que passaram por uma aprendizagem usando materiais manipuláveis obtiveram um resultado positivo diante de várias questões do conteúdo abordado. Dante cita em (2005, p.11):

É preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela.

Podemos então, despertar o interesse dos alunos com a utilização do lúdico em nossa metodologia de ensino, que geralmente é bem recebida da parte dos discentes. Esse método faz com que os alunos sejam provocados à investigação do conhecimento, ele passa a questionar a ação, aprende e aprimora as habilidades. Isso porque o lúdico está relacionado com atividades que despertam o prazer. E o conhecimento passa a ser mais acessível, visto de uma forma mais agradável.

A sala de aula pode ser entendida como um ambiente que proporciona ao professor a liberdade de ação, porém muitas são as desculpas para não agir e se deixam cair na rotina.

Lorenzato (2006) defende a criação de um laboratório de ensino de matemática (LEM) que “pode ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras” e completa afirmando que “o professor precisa de materiais de fácil acesso”. No entanto, nem todas as escolas estão propícias a essa prática, seja por falta de espaço ou a escassez de materiais manipuláveis. Então, quando falta no ambiente escolar material sofisticado,

devemos buscar recursos que são fáceis de encontrar em nosso cotidiano, como o papel, madeira e outros.

Lorenzato (2006, p.18) ressalta que por melhor que seja o manipulável não será garantia de um aprendizado significativo e seu papel é o de auxiliar o ensino. Por isso alguns cuidados devem ser tomados antes de introduzi-los em sua prática. Conforme Rêgo e Rêgo (2006, pg.56) os aspectos mais importantes são:

- Dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
- Incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
- Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades, por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
- Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
- Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo;
- Sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material.

Com tudo isso, vimos que os recursos materiais não são apenas uma opção, mas uma necessidade no cotidiano da sala de aula.

Nesse momento é que introduzimos as técnicas e materiais tais como Origami, o Tangram e o Geoplano como uma ferramenta de ensino da Geometria Euclidiana, utilizando apenas recursos que são acessíveis a qualquer escola, fazendo com que a Geometria deixe de ser abstrata e passe para o concreto. Com o Origami podemos construir os axiomas que é a base da Geometria Euclidiana. Com o Tangram exploramos os ângulos, áreas e perímetros de figuras planas. Já o Geoplano os alunos podem manipular as propriedades dos polígonos e demonstrar as fórmulas de áreas.

## CAPÍTULO 4

### O Origami e a Geometria Plana

Com a intenção de descrever um estudo da geometria partindo dos conceitos do Origami descrevemos o seguinte capítulo baseado na literatura de Aschenbach, Rêgo (2004), Rêgo (2006) e Imenes, Geometria das Dobraduras segundo seus moldes.

O papel surgiu na China por volta do ano 123 antes de Cristo e desde então várias utilidades foram aplicadas a ele, uma delas é o Origami. O Origami é considerado uma arte milenar que acredita-se ter surgido no Japão, está associada também a uma filosofia e uma tradição entre o povo, devido aos seus costumes. A técnica de dobraduras de papel, que vem da junção dos termos ORI (dobrar) e KAMI (papel) ORIGAMI (arte de dobrar papel), é conhecida hoje em todo o mundo.

Tal arte possui grande importância na cultura japonesa e é passada de geração a geração. Possuem representações diversas, como animais, flores e objetos. Muitos possuem um importante significado, como por exemplo, o tsuru. Originalmente tinha apenas a função decorativa, mais tarde passou a fazer parte dos templos junto às orações, representando a felicidade, boa sorte e saúde. Surgindo então a lenda que diz que a pessoa que fizer 1000 tsurus, usando a técnica do Origami, poderá ter um desejo realizado.

Temos como nomes de destaque na arte do Origami: Akira Yoshizawa e Kunihiko Kasahara. Akira foi considerado o pai do Origami, nomeou os movimentos básicos das dobras, também ensinava Geometria usando os Origamis e aplicou uma técnica que umedecia os papéis dando uma aparência mais real aos objetos criados. Kunihiko é escritor de vários livros sobre Origami e entre eles podemos citar *Amazing Origami* que demonstra alguns teoremas matemáticos e a criação de poliedros regulares. Outro grande nome ligado ao Origami é Friedrich Froebel, nascido na Alemanha e criador do jardim de infância. Mesmo sem conhecer a palavra Origami, ensinava a técnica às crianças identificando os princípios da Geometria Euclidiana.

A linguagem do Origami é universal e esses símbolos, na maioria das vezes, dispensam explicações nas etapas das dobraduras. São eles:

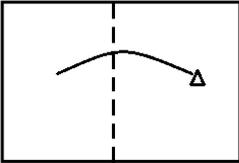
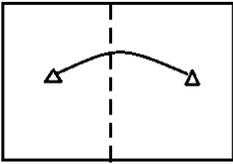
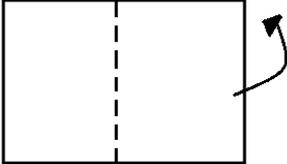
<p>Linha do vale (significa que dobramos o papel na nossa direção)</p>	
<p>Linha da montanha (significa dobrar o papel para trás)</p>	
<p>Dobrar para frente</p>	
<p>Dobrar e volta (vincar)</p>	
<p>Dobrar para trás</p>	
<p>Virar o modelo</p>	
<p>Girar o modelo</p>	

Tabela 3.1

O Origami é capaz de despertar a criatividade e facilitar o entendimento de conceitos matemáticos, na geometria auxilia na aprendizagem, saindo do abstrato e incluindo o concreto com a manipulação de simples pedaços de papel. Dentro da sala de aula, pode se tornar um método bastante atrativo, incentivando os alunos à participação das aulas. A partir da experimentação, é possível gerar uma investigação e levantamento de hipóteses, possibilitando ao educando construir o seu conhecimento. Com esse método é possível também desenvolver o raciocínio lógico e a visão espacial interagindo o manipulador da arte com a figura construída. A dobradura pode ser utilizada como recurso na

exploração das principais propriedades geométricas de figuras planas e espaciais.

O matemático Humioki Huzita, nascido no Japão, percebeu que muitos conceitos geométricos estão inseridos no Origami e assim foi o responsável pela construção de seis operações geométricas que posteriormente seria completado por Koshiro Hatori e chamado de Axiomas de Huzita-Hatori (CAVACAMI e FURUYA, 2009). Os axiomas definem o que é possível construir com uma única dobragem, incidindo combinações entre pontos e retas. Apresentamos a técnica utilizando o papel de seda para uma melhor visualização.

Axioma 1 – Dado dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , existe apenas uma dobragem que passa por ambos, Figura 4.1.

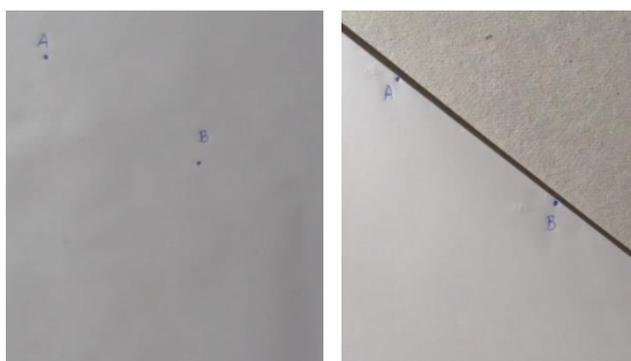


Figura 4.1

Axioma 2 – Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , existe apenas uma dobragem que os torna coincidentes, Figura 4.2.

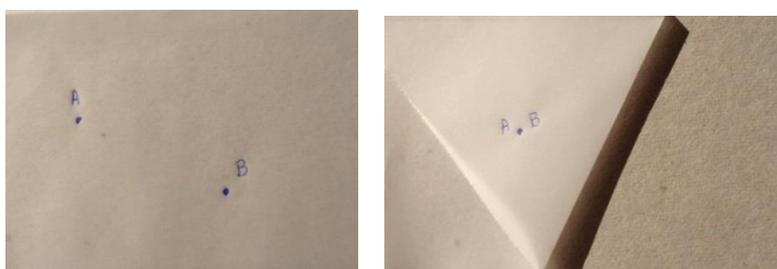


Figura 4.2

Axioma 3 – Dadas duas retas distintas,  $s$  e  $t$ , existe uma dobragem que as tornam coincidentes, Figura 4.3 e 4.4.

### Retas concorrentes

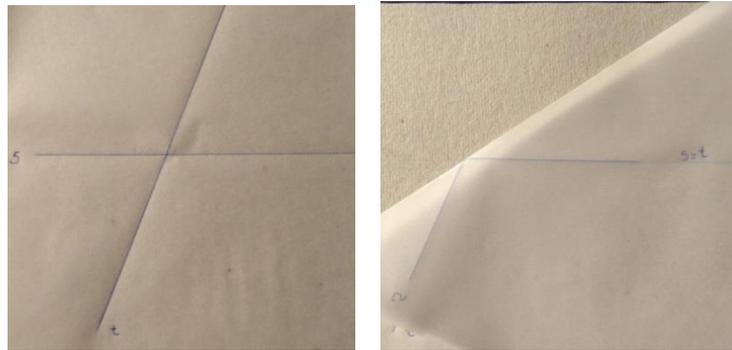


Figura 4.3

### Retas paralelas

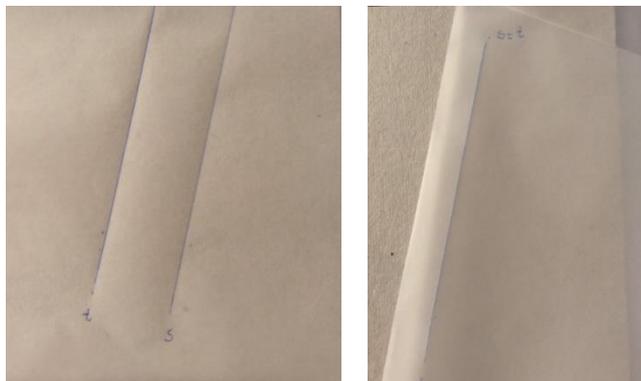


Figura 4.4

Axioma 4 – Dado um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , existe somente uma dobragem que é perpendicular a reta  $r$  e que passa pelo ponto  $P$ , Figura 4.5.

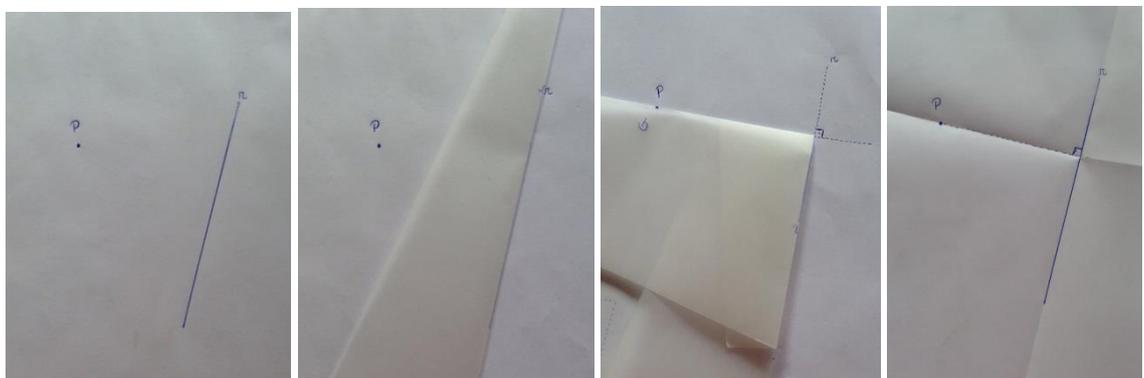


Figura 4.5

Axioma 5 – Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  e uma reta  $r$ , se a distância de  $A$  a  $B$  for igual ou superior à distância de  $B$  a  $r$ , há uma dobragem que faz incidir  $A$  e  $r$  e que passa por  $B$ , Figura 4.6.

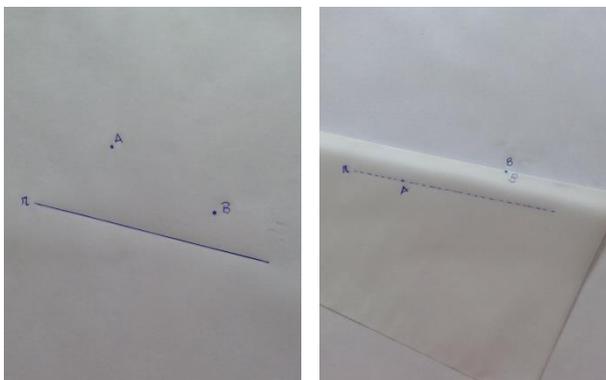


Figura 4.6

Axioma 6 – Dados dois pontos  $A$  e  $B$  e duas retas  $r$  e  $s$ , se as retas forem concorrentes ou, se forem paralelas e a distância entre elas não for superior à distância entre os pontos, há uma dobragem que faz incidir  $A$  em  $r$  e  $B$  em  $s$ , Figura 4.7.

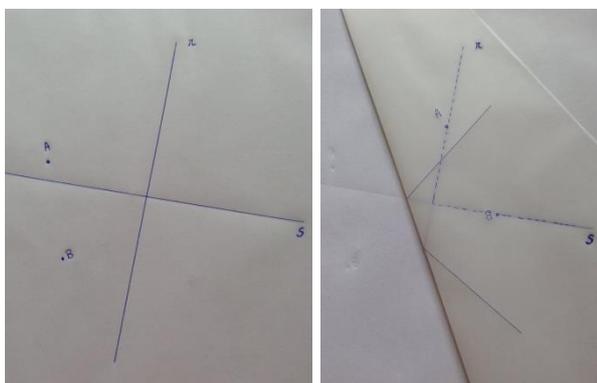


Figura 4.7

Axioma 7 – Dados um ponto  $A$  e duas retas  $r$  e  $s$ , se as retas não forem paralelas, há uma dobragem que faz incidir  $A$  em  $r$  e é perpendicular a  $s$ , Figura 4.8.

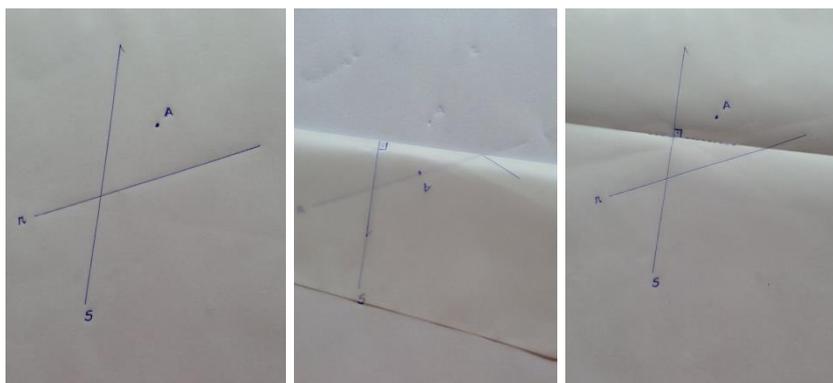


Figura 4.8

#### 4.1 Construção de retas

Com as dobraduras é possível aplicar algumas atividades em sala de aula usando apenas uma folha do tipo A4, ou um pedaço qualquer de papel. Como por exemplo, a construção de retas perpendiculares e paralelas.

Conforme a Figura 4.9, para construir retas perpendiculares iniciou-se o processo obtendo uma dobra qualquer, de baixo para cima. Em seguida da direita para a esquerda, faremos uma nova dobra coincidindo as partes da base da folha que foram divididas pela primeira dobra. Ao abrir novamente a folha, os vincos obtidos formam retas perpendiculares.

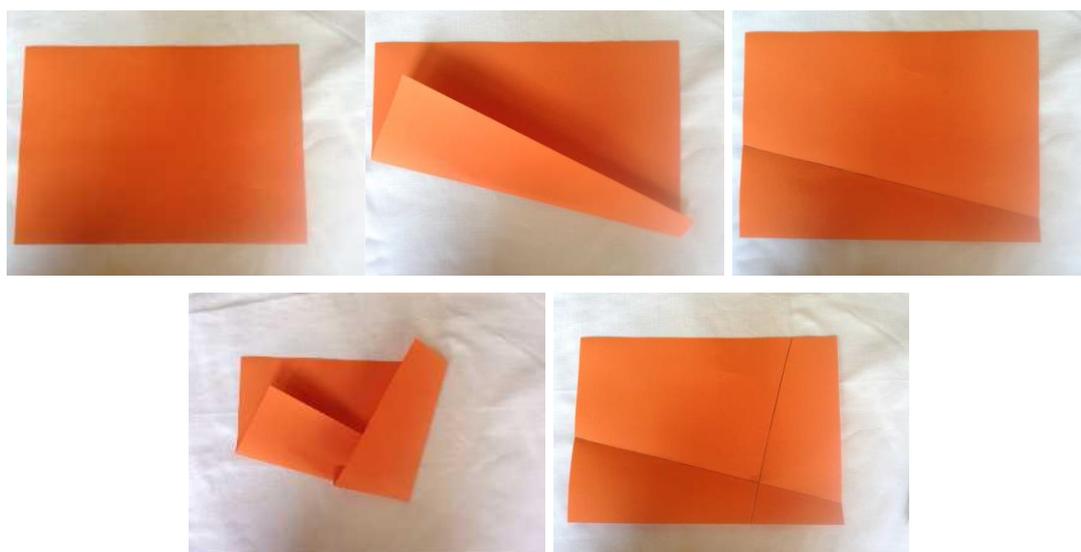


Figura 4.9

Já na obtenção de um par de retas paralelas, utilizamos os mesmos passos das retas perpendiculares, mas antes de abrimos o papel, ao final do segundo passo, faremos uma nova dobra da esquerda para a direita, coincidindo as partes da base. Ao abrimos, os vincos obtidos na vertical formaram as retas paralelas. Veja a Figura 4.10.

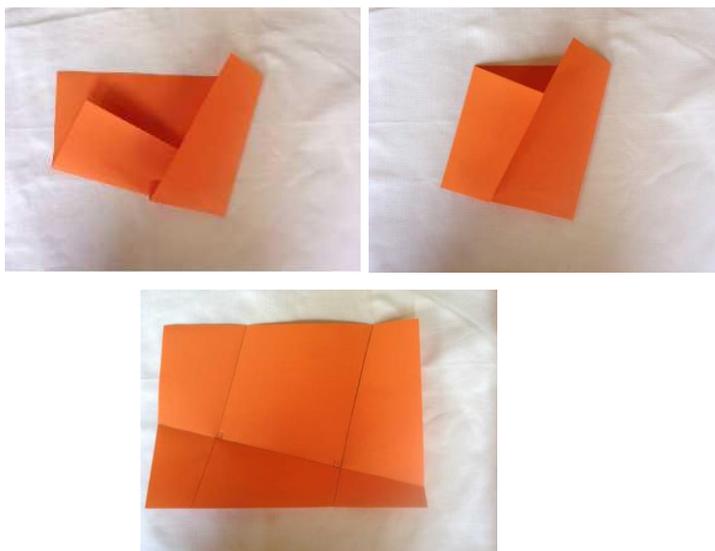


Figura 4.10

Nesse momento o professor poderá explorar a definição de retas paralelas e perpendiculares e outros conceitos.

## 4.2 Bissetriz, Mediatriz e Mediana

Outros conceitos muito importantes são os elementos relacionados às retas e ângulos, que podem ser estabelecidos pela técnica do Origami, são eles: a Bissetriz, a Mediatriz e a Mediana. Para isso cada aluno deverá construir um triângulo qualquer, mas aconselha-se que utilize um triângulo acutângulo devido às particularidades que acontecem em relação ao Ortocentro em outros tipos de triângulos.

Para estabelecer a bissetriz de um ângulo o aprendiz escolherá um dos vértices do triângulo a ser manipulado. Observando a Figura 4.11, essa atividade consiste em realizar uma dobra coincidindo dois lados adjacentes.

Fazendo o procedimento em cada um dos vértices é conhecida a bissetriz de cada um dos ângulos.



Figura 4.11

Quando construímos as mediatrizes dos lados realizamos uma dobra que estabelece uma perpendicular a cada um dos lados passando pelo ponto médio. Mas para que esteja no ponto médio do lado é necessário fazer uma dobra que coincida os vértices pertencentes a esse lado. Operando o procedimento em todos os lados conheceremos as três mediatrizes do triângulo. Veja Figura 4.12



Figura 4.12

Na Figura 4.13 apresentamos a construção das medianas. O primeiro passo para se definir a mediana de cada um dos lados é a realização de uma dobra que divida o lado trabalhado em duas partes iguais, só assim seremos capazes de conhecermos o ponto médio referente ao lado em questão. Em seguida a segunda dobra a realizar deve formar um segmento que tenha como extremidades o ponto médio e o vértice oposto. O vinco obtido pela segunda dobra denomina-se mediana.

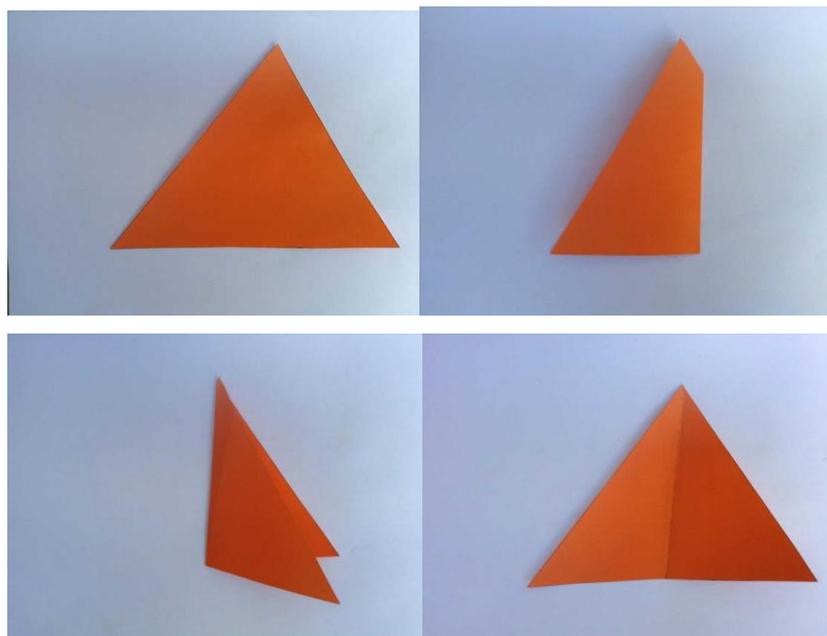


Figura 4.13

### 4.3 Construção de Polígonos

Outra aplicação interessante ao Origami é a construção de figuras planas. É possível construir quadriláteros e outros polígonos regulares. Assim o educando observa vários conceitos básicos e permite um entendimento das propriedades que cercam as figuras construídas.

#### 4.3.1 Retângulo

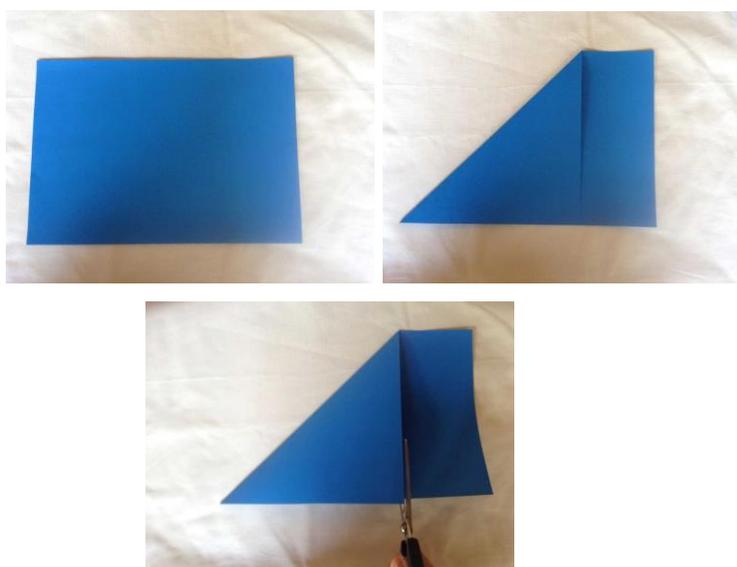
Ao construir um retângulo com as dobraduras, será possível ao aluno observar algumas particularidades que o cercam. Como por exemplo, que os lados opostos são paralelos e de mesma medida, além de compreender que os ângulos são retos, pois são construídos a partir de retas perpendiculares. Nessa atividade o aluno segue os mesmos passos da construção de retas paralelas, acrescentando uma dobra de cima para baixo, coincidindo as laterais do papel. Geralmente a folha de papel utilizada já é retangular, mas o mesmo pode ser feito com um papel de qualquer formato de papel. Veja Figura 4.14



Figura 4.14

#### 4.3.2 Quadrado

Para essa atividade o interessante é que se utilize o papel retangular, caso contrário, obtenha o retângulo através das instruções do item anterior. O professor solicita que o aluno dobre o papel na diagonal até unir uma das laterais à base do papel, pede-se que recorte a sobra que não foi coberta. Ao abrir o papel o aluno terá um quadrado. Através do vinco obtido na dobra é possível observar a diagonal do quadrado, que é também a bissetriz do ângulo reto. Veja Figura 4.15.



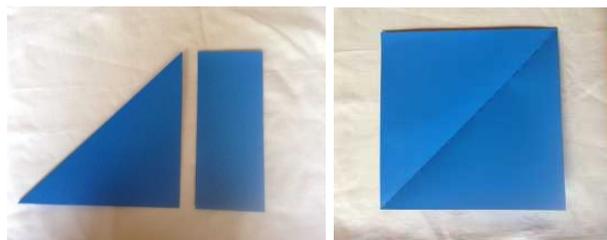


Figura 4.15

### 4.3.3 Triângulo equilátero

Para a construção de um triângulo que tenha seus lados com a mesma medida faz-se necessário um folha retangular que tenha altura maior que a base. Dobra-se e desdobra a folha de papel obtendo um vinco vertical que demarca o meio da folha. As pontas das bases serão dois dos vértices do triângulo. Obtemos o terceiro ao dobrar uma das pontas da base até que encontre o vinco na vertical. A observação leva a concluir que a primeira dobra se refere a mediatriz da base do triângulo e a segunda dobra é a bissetriz do ângulo formado pelos lados do triângulo, já que o segundo vinco forma dois triângulos congruentes. O aluno pode conferir as afirmações com o uso de régua e transferidor. Veja Figura 4.16

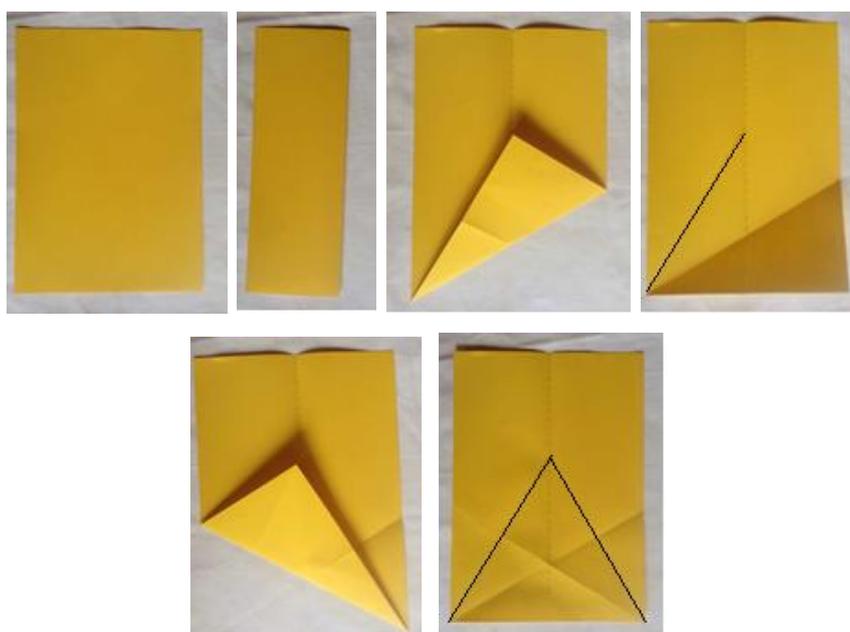
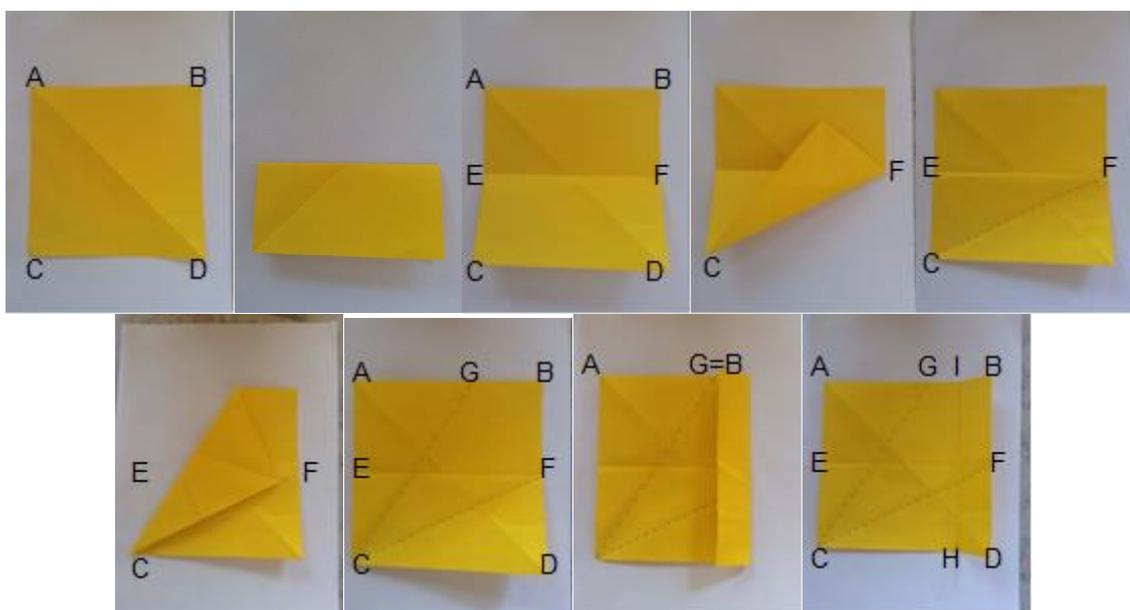


Figura 4.16

#### 4.3.4 Pentágono Regular

Ao construir esse polígono, por se tratar de muitos passos, é importante acompanhar a Figura 4.17 para um melhor entendimento. É solicitado ao aluno primeiramente que tenha em mãos uma folha quadrada de lados  $ABCD$ . Faça uma dobra ao meio, de cima para baixo, determinando os pontos  $E$  e  $F$ . Outra dobra deverá ser feita estabelecendo um segmento de reta que une os pontos  $C$  e  $F$ . Outro passo será determinar a bissetriz do ângulo  $E\hat{C}F$  obtendo um segundo segmento de reta e o ponto  $G$ . Dobrando novamente o papel, coincidam os pontos  $B$  e  $G$ . Com o vinco formado obtêm-se um ponto na base superior ( $I$ ) e um na base inferior ( $H$ ), o último será um dos vértices do pentágono. Outros dois pontos serão formados quando realizamos a mesma dobra no lado esquerdo obedecendo a distância de  $IB$ , denominados  $JK$ . Leve o ponto  $H$  até o lado  $AC$ , a intersecção será o ponto  $L$ . Dobrando o papel ao meio pela vertical estabeleça o ponto  $M$  na parte superior e com a mesma altura  $LC$  obtenha o ponto a  $ND$  no lado direito da folha. Temos agora o pentágono  $LMNHK$ .



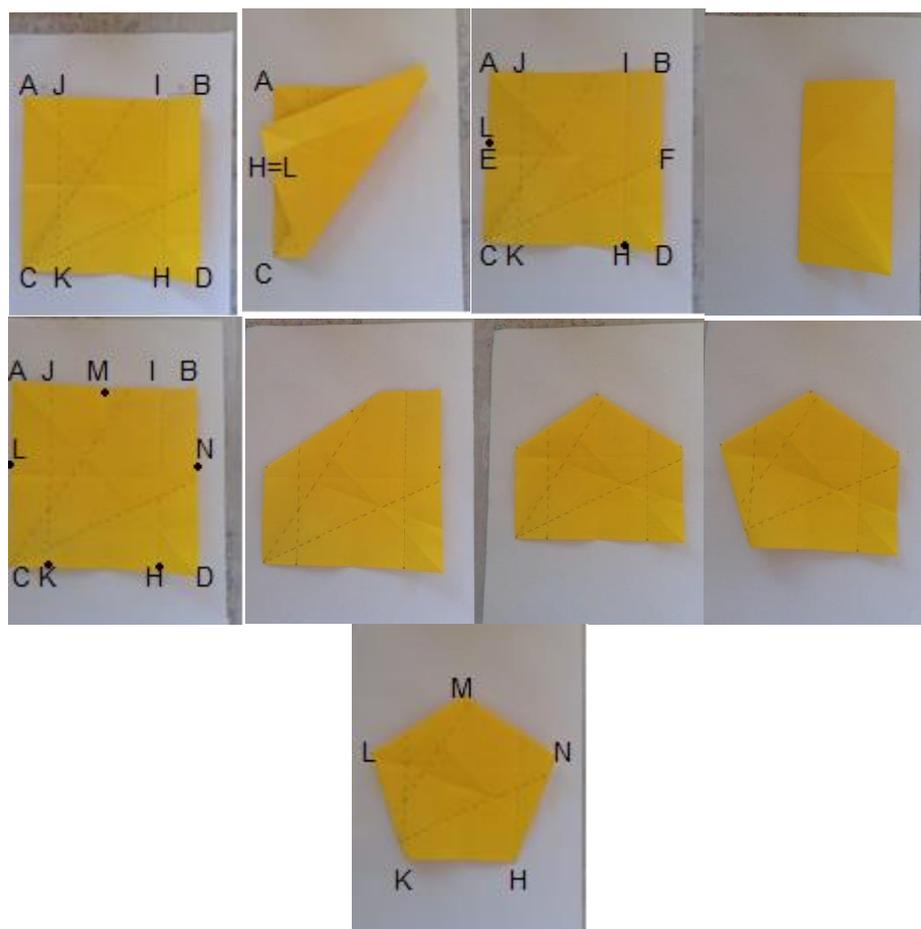


Figura 4.17

#### 4.3.5 Hexágono Regular

A construção da figura parte de uma sequência de outras construções, assim para formarmos um hexágono regular, será necessário ter em mãos um triângulo equilátero. O segundo passo será definir o ponto de encontro dos dois vincos obtidos ao construir tal triângulo. Em seguida faz-se a união, através de dobras, dos vértices do triângulo com o ponto marcado. As novas dobras formam os lados do polígono procurado. Veja Figura 4.18



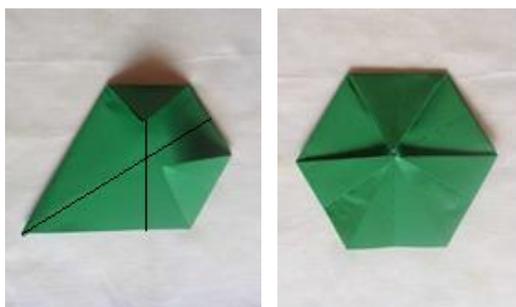


Figura 4.18

#### 4.3.6 Octógono regular

Trabalharemos aqui com um papel quadrado. Deve-se fazer uma primeira dobra coincidindo as laterais verticais e uma segunda coincidindo as laterais que estão na horizontal, obtendo um novo quadrado de tamanho menor. Nesse momento a próxima dobra deverá ser realizada na diagonal do quadrado apenas para obter o vinco. Continuando, o próximo passo será coincidir a lateral direita ao vinco obtido e a base inferior com o mesmo vinco. Recorte a sobra não coberta pela dobra. Ao desfazer todas as dobraduras, temos um octógono destacando as diagonais e apótemas. Veja Figura 4.19.



Figura 4.19

#### 4.4 Propriedades e Pontos Notáveis de um Triângulo

Os triângulos possuem uma propriedade particular relativa à soma de seus ângulos internos. Essa propriedade garante que em qualquer triângulo, a soma das medidas dos três ângulos internos é igual a  $180^\circ$  graus. É possível verificar essa afirmação usando as dobraduras.

Para experimentação basta que cada aluno tenha em mãos um triângulo qualquer, enumerando os seus ângulos. Faremos duas dobras, onde os vértices das bases se encontram com o vértice da altura, um de cada vez. Realizando uma dobra de cima para baixo, coincidimos o vértice da altura com a base, e em seguida, unindo os outros dois vértices ao primeiro, eles se encaixaram perfeitamente. Tendo a constatação da tese como apresentado na Figura 4.20.



Figura 4.20

##### 4.4.1 Circuncentro

Na construção do circuncentro de um triângulo, o ideal é que se utilize um triângulo acutângulo, para que o ponto esteja no interior da nossa figura. A primeira etapa consiste em encontrar uma reta perpendicular em cada um dos lados, então realizamos as dobras de forma que um vértice coincida com o outro e o vinco passe pelo ponto médio do lado trabalhado. A união desses vincos ao interior do triângulo consiste no circuncentro procurado. Peça apenas aos alunos que construa retas perpendiculares aos lados, assim será possível concluir que foram determinadas as três mediatrizes do triângulo em mãos, e ele mesmo concluirá que essa é a definição de circuncentro. Conforme se vê na Figura 4.21

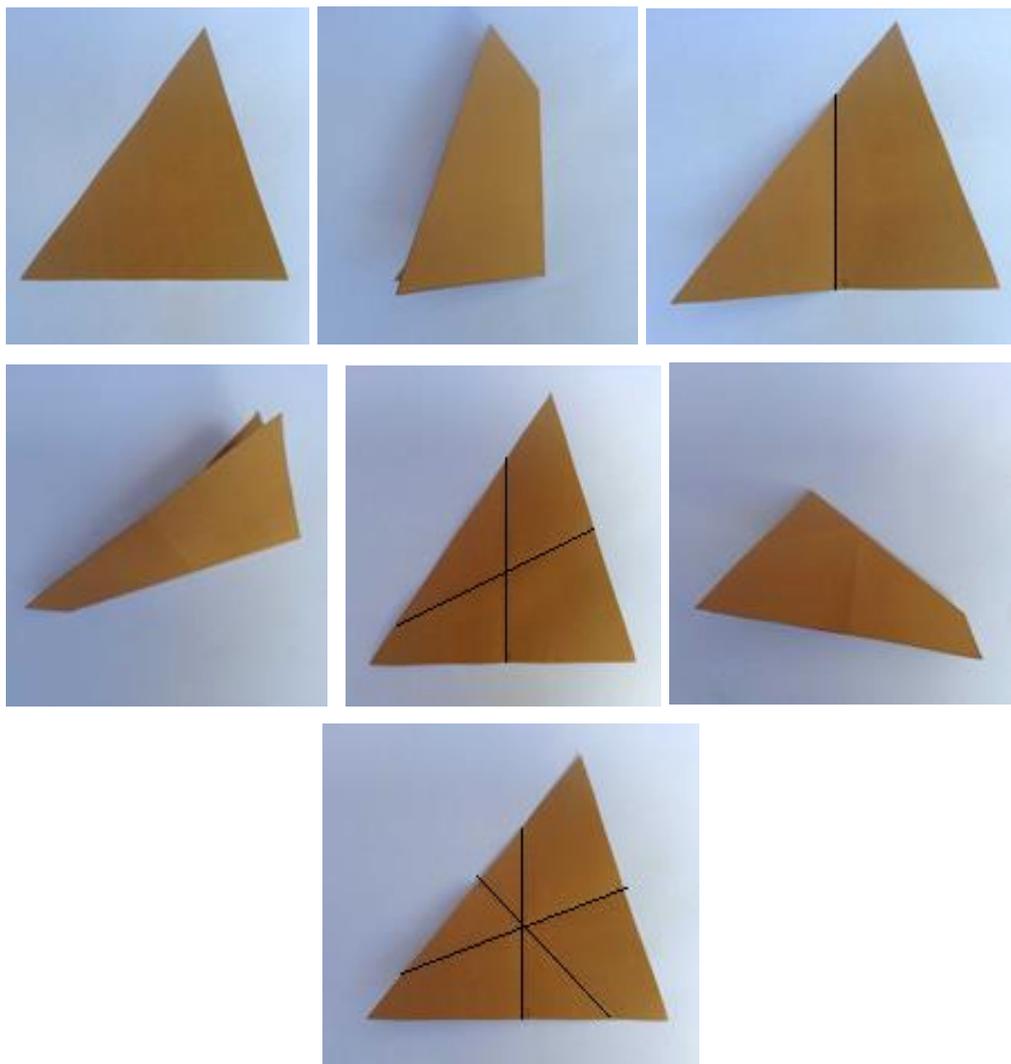


Figura 4.21

#### 4.4.2 Baricentro

Como o baricentro está no centro de qualquer triângulo não será necessário definir um tipo de triângulo para ser manipulado. O procedimento a ser realizado, conforme Figura 4.22, consiste em definir o ponto médio de cada um dos lados e em seguida realizar uma dobra que liga o ponto médio ao vértice oposto. Os vincos se encontram em um único ponto, denominado baricentro. Nessa construção o aluno deverá identificar que foram obtidas as medianas do triângulo. O mais interessante e curioso é que podemos propor uma brincadeira ao aluno e mostrar que é possível equilibrar o triângulo na ponta do dedo, se este estiver sob o baricentro.

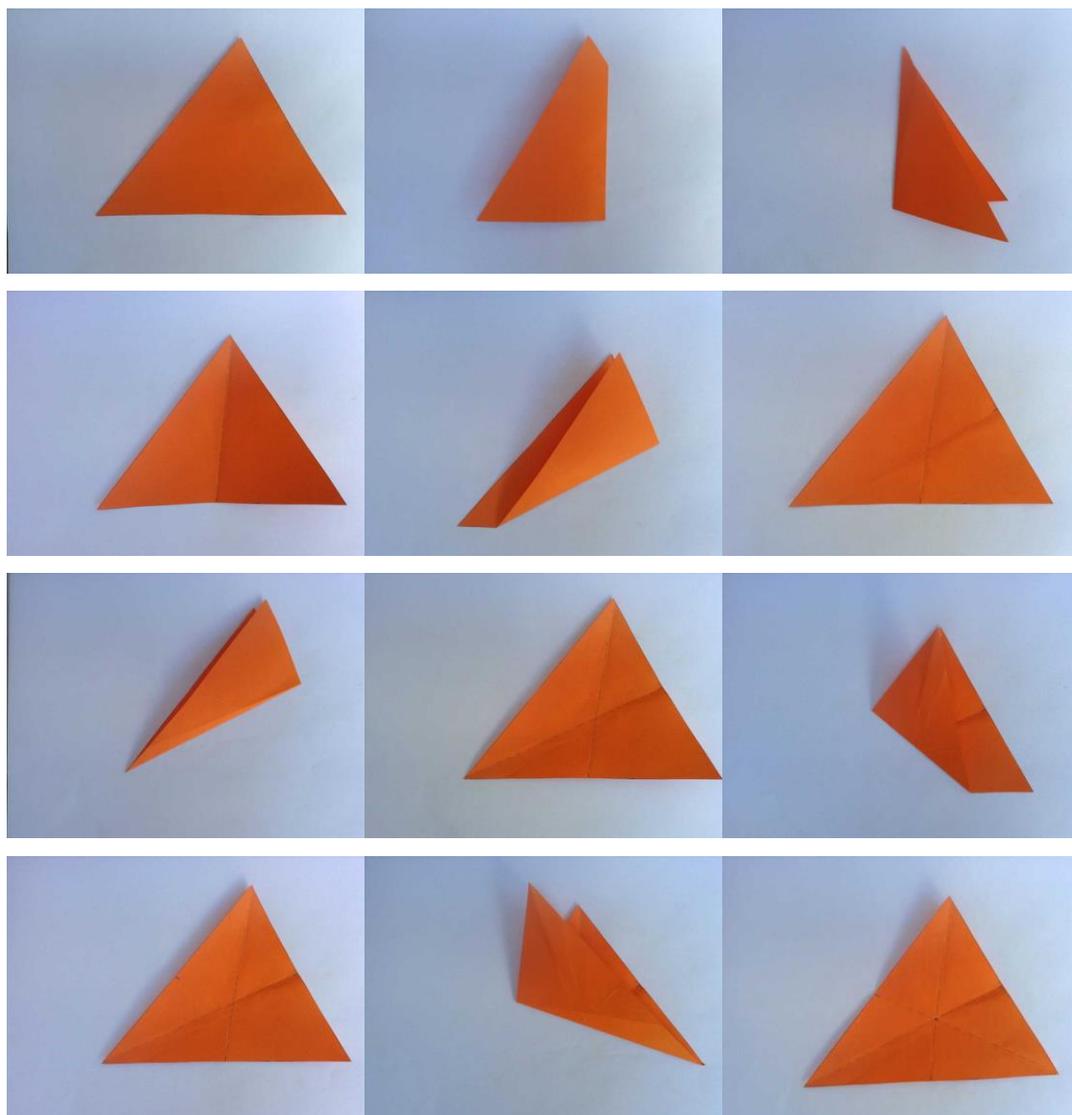


Figura 4.22

#### 4.4.3 Incentro

Assim como demonstra a Figura 4.23, construímos vincos obtidos a partir das dobras geradas pelo encontro dos lados. Assim observamos que foram definidas as bissetrizes dos ângulos do triângulo. Esse ponto de encontro é conhecido como incentro. Se o aluno construir uma circunferência no interior desse triângulo, ele poderá notar que os pontos em que os lados do triângulo tangenciam a circunferência formam um ângulo reto em relação ao raio da circunferência, basta pedi-lo que faça uma dobra nesse ponto e observar se conseguiu construir uma reta perpendicular ao lado.

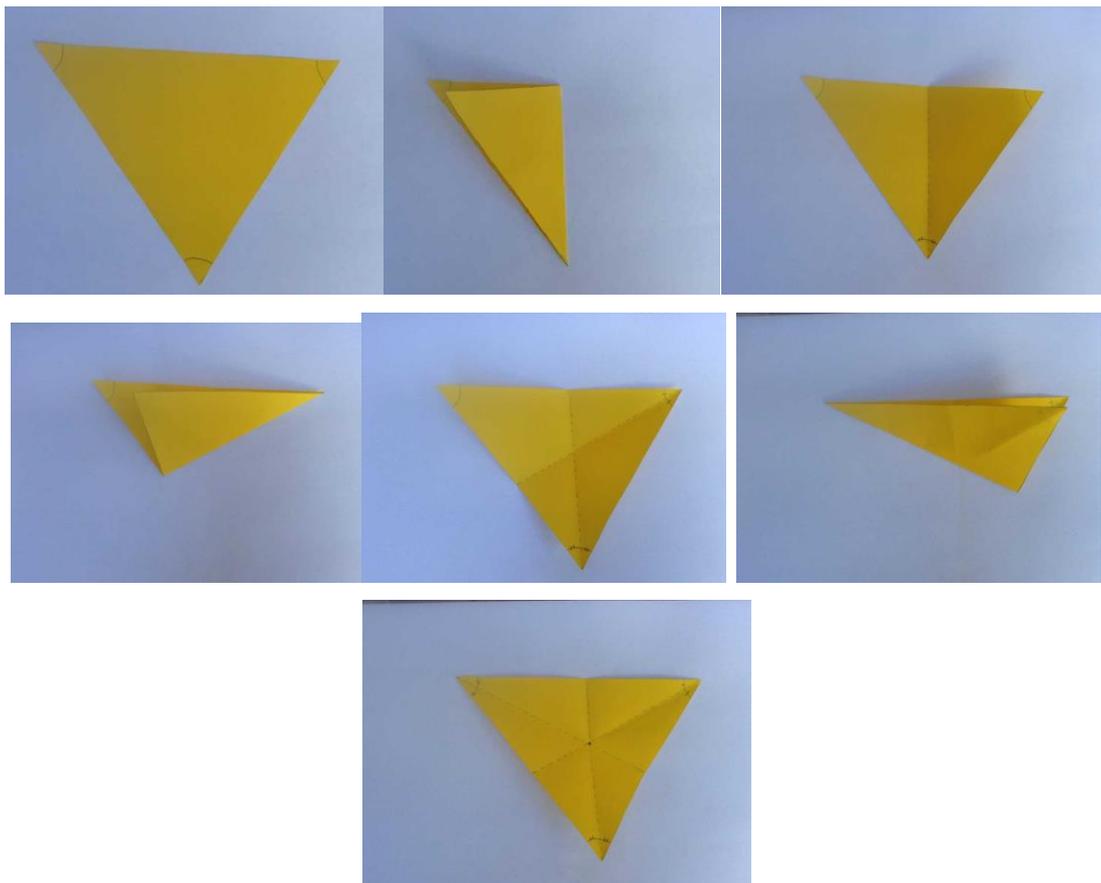


Figura 4.23

#### 4.4.4 Ortocentro

Conhecido pelo encontro das alturas, definiremos como um dos passos a construção da perpendicular em relação a um dos lados do triângulo trabalhado, mas que passe pelo vértice oposto ao lado. Utilizando esse processo em todos os lados, distinguiremos o Ortocentro no ponto de intersecção dos segmentos construídos. Veja Figura 4.24.



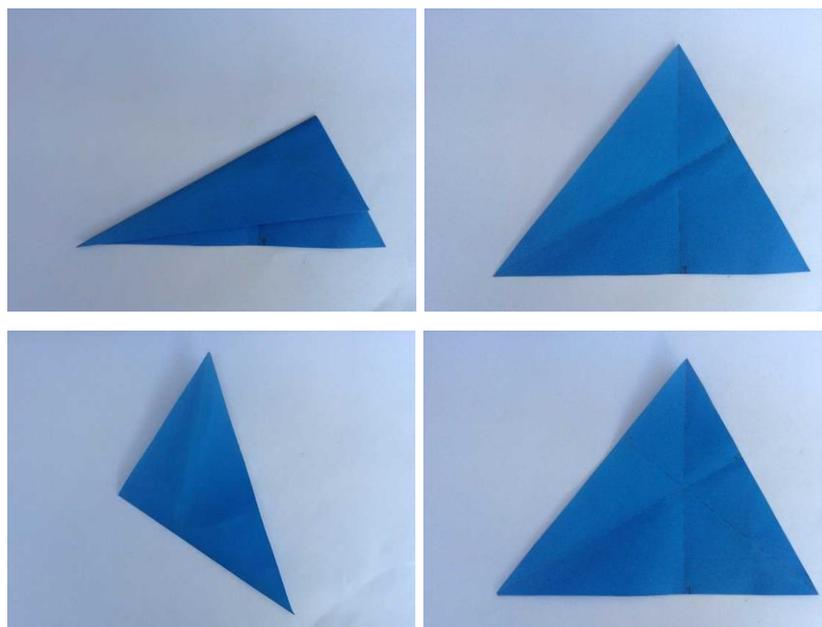


Figura 4.24

#### 4.5 Questões relacionadas ao Origami

Com a intenção de mostrar que os conceitos trabalhados através de dobraduras terão validade na resolução de problemas geométricos apresentamos algumas questões da OBMEP retiradas de seu banco de questões na página virtual. Junto com suas soluções também servem como sugestões de trabalhos em sala de aula.

**Atividade 1** - Júlio Daniel tem um quadrado de papel com vértices A, B, C e D. Ele primeiro dobra este quadrado de papel ABCD levando os vértices B e D até a diagonal, como mostra a Figura 4.25.

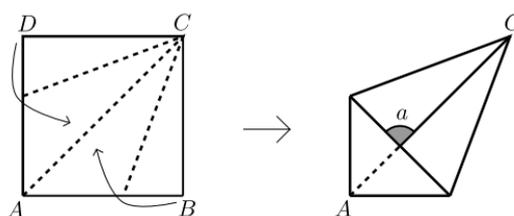


Figura 4.25

E em seguida, Júlio Daniel leva o vértice C até o vértice A, obtendo assim um pentágono, como é mostrado na Figura 4.26.

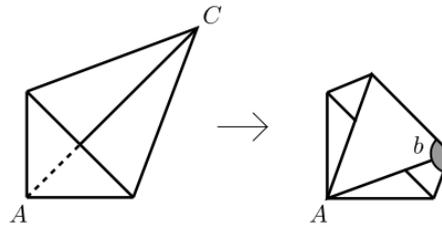


Figura 4.26

- Mostre que o ângulo  $a$  mede  $90^\circ$ .
- Determine a medida do ângulo  $b$ .

*Solução:*

- Abrindo o quadrado de papel dobrado, pode-se notar que o ângulo  $a$  é o mesmo ângulo do vértice  $A$  do quadrado  $ABCD$ . Logo, como todos os ângulos internos de um quadrado são iguais a  $90^\circ$ , concluímos que  $a = 90^\circ$ .
- Desdobrando o papel (apenas a última dobra), obtemos:

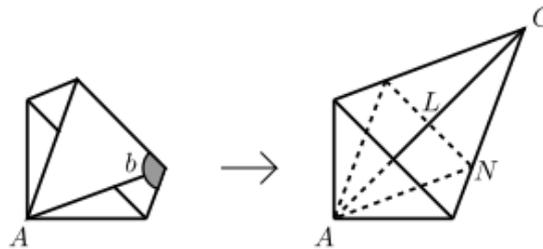


Figura 4.27

O ângulo  $ACN$  é metade da metade do ângulo original do vértice  $C$  do quadrado. Como o quadrado tem todos os seus ângulos iguais a  $90^\circ$ , concluímos que  $ACN = 90^\circ : 4 = 22,5^\circ$ . Por simetria, o ângulo  $CLN$  é igual a  $90^\circ$ . Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ , observando os ângulos do triângulo  $CLN$ , temos que  $90^\circ + 22,5^\circ + LNC = 180^\circ$ . Portanto,  $LNC = 67,5^\circ$ . Como  $LNC + b = 180^\circ$ , obtemos a partir daí que  $b = 112,5^\circ$ .

**Atividade 2** – a) Um quadrado de papel de lado 1 foi dobrado conforme mostra a Figura 4.28. Sabe-se que o comprimento do segmento que liga os pontos  $A$  e  $O$  é igual a  $1/3$ . Qual a área da parte da face superior do papel que continuou visível? (Ou seja, a parte em branco na figura abaixo à direita.)

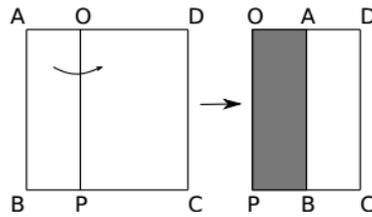


Figura 4.28

b) Um outro quadrado, este de lado 5, foi dobrado conforme a Figura 4.29, sendo o comprimento dos segmentos  $\overline{FG}$  e  $\overline{HI}$  iguais a 1. Após a dobradura, qual é a área da face superior do papel que continuou visível?

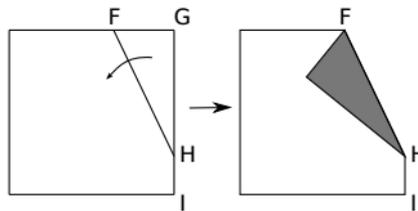


Figura 4.29

c) Um terceiro quadrado, de lado 1, foi dobrado duas vezes como mostra a figura abaixo. Qual o comprimento do segmento que liga os pontos  $M$  e  $N$ ?

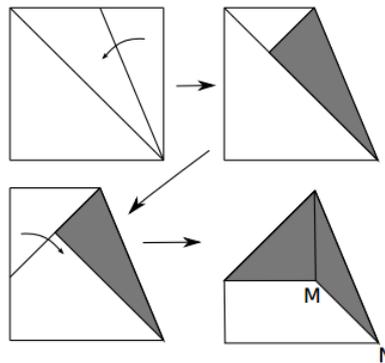


Figura 4.30

### Solução

a) Como podemos ver na Figura 4.31, a área da parte superior do papel é um retângulo de altura 1 e base  $1/3$  (este retângulo é o retângulo abaixo hachurado com linhas curvas). Logo, sua área é igual a  $1 \times 1/3 = 1/3$ .

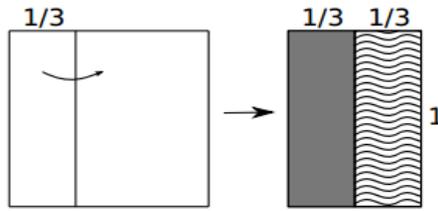


Figura 4.31

b) A área que ficou visível é igual a área do quadrado menos duas vezes a área do triângulo  $FGH$ . Para ver isso, observe a figura:

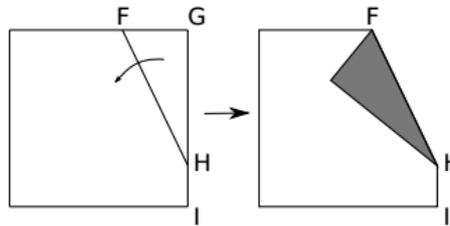


Figura 4.32

O triângulo pintado de cinza é o triângulo  $FGH$  virado para baixo. Logo, tem a mesma área do triângulo  $FGH$ . Como o quadrado tem lado 5, sua área é  $5 \times 5 = 25$ . Vamos calcular a área do triângulo  $FGH$ . Como  $\overline{HI}$  mede 1, e o lado do quadrado mede 5, concluímos que  $\overline{GH}$  mede 4. Além disso, o segmento  $\overline{FG}$  mede 1. Como a área de um triângulo é igual a base vezes altura sobre dois, obtemos:

Área do triângulo  $FGH = (4 \times 1) / 2 = 2$ . Logo, a área que ficou visível é igual a  $25 - 2 \times 2 = 21$ .

c) Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 é igual a  $\sqrt{2}$ . Observe a figura abaixo. Como o lado do quadrado foi dobrado de modo a cair na diagonal, concluímos que o comprimento do segmento tracejado no quadrado da direita é igual a  $\sqrt{2} - 1$ .

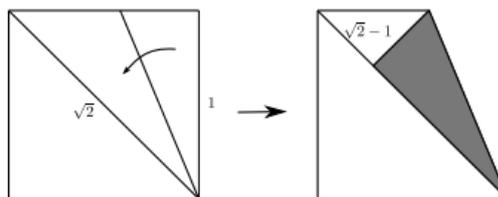


Figura 4.33

Na dobradura seguinte, este segmento tracejado foi dobrado de modo a cair na diagonal, conforme observamos em seguida:

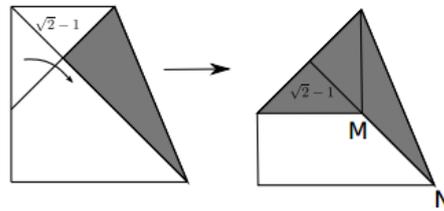


Figura 4.34

Como a diagonal mede  $\sqrt{2}$ , e subtraímos dela duas vezes este comprimento  $\sqrt{2} - 1$ , concluímos que o segmento  $MN$  mede  $\sqrt{2} - 2x(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$ .

**Atividade 3** – Priscila tem uma folha de papel, branca de um lado e cinza do outro. A folha é quadrada e tem 20 cm de lado. Ela dobrou essa folha duas vezes, como indicado na figura. Depois disso, qual foi a área da parte branca que ficou visível?

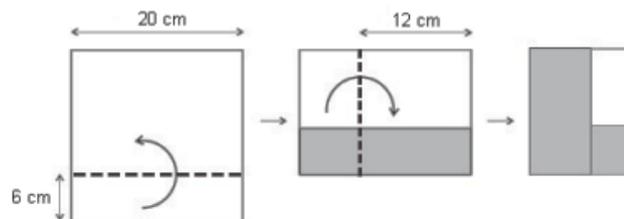
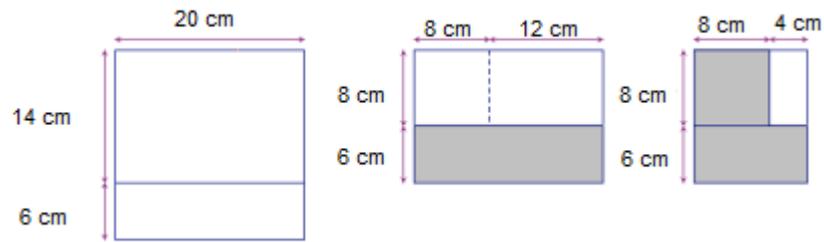


Figura 4.35

*Solução:*

A figura ilustra a sequência de dobraduras e as medidas dos segmentos determinados por elas. Após a 1ª dobra, a parte branca visível é um retângulo de 20 cm por 8 cm. Após dobrar a 2ª vez, a parte branca visível é um retângulo de 4 cm por 8 cm. A área desse retângulo é  $4 \times 8 = 32 \text{ cm}^2$ .



**Atividade 4** – Uma folha de papel quadrada de área  $16\text{ cm}^2$ , branca de um lado e cinza de outro, foi dobrada como indicado ao lado. O ponto  $O$  é o centro do quadrado e  $M$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ .

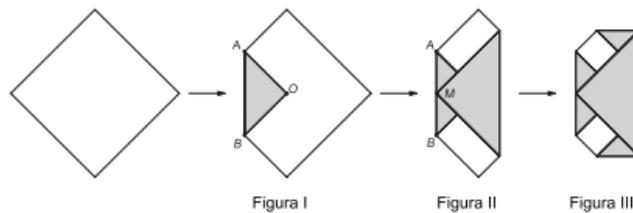


Figura 4.36

- Qual é a área da região branca na Figura I?
- Qual é a área da região branca na Figura II?
- Qual é a área da região branca na Figura III?

**Solução:**

O quadrado original tem área de  $16\text{ cm}^2$ ; vamos dividi-lo em 16 quadradinhos de área 1 para proceder à solução.

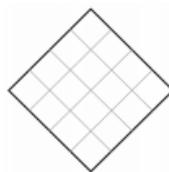


Figura 4.37

a) 1ª solução: A primeira dobra deixa como parte não pintada uma região equivalente a 12 quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada da figura I é  $12\text{ cm}^2$ .

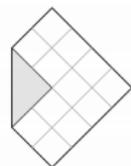


Figura 4.38

b) A segunda dobra deixa como partes não pintadas dois retângulos iguais, cada um deles composto por dois quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada na figura II é  $2 + 2 = 4\text{cm}^2$ .



Figura 4.39

c) As duas últimas dobras horizontais deixam em branco apenas dois quadradinhos unitários. Portanto, a área da região não pintada na figura III é igual a  $1 + 1 = 2\text{cm}^2$ .

## CAPÍTULO 5

### Tangram e a Geometria Plana

Pouco se sabe sobre o surgimento do Tangram, mas existem várias histórias que são contadas sobre sua criação. Uma das histórias que se contam é que um chinês de nome *Tan* deixou cair um pedaço de cerâmica que se partiu em sete partes e ao tentar juntá-lo formou figuras variadas. Dizem também que um imperador chinês quebrou um espelho acidentalmente e ao tentar remontá-lo viu a possibilidade de criar formas como a de pessoas, animais e objetos. Outros afirmam que seu aparecimento se deu na tribo *Tanka*, eram grandes comerciantes e quando visitados pelos mercadores ocidentais eram entretidos pelas medidas *Tanka* com este quebra-cabeça.

O certo é que ele é um jogo milenar chinês composto de sete peças, sendo elas: cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo, gerados a partir de um quadrado. O objetivo é formar figuras diversas utilizando suas peças. Também não exige muita habilidade, apenas criatividade e paciência para manipular as partes. A única regra é que todas as peças sejam utilizadas sem sobrepô-las.



Figura 5.1

Uma possibilidade para o uso do Tangram é na Geometria Plana. É possível trabalhar ângulos, congruência de figuras, áreas e perímetros.

Para construir um Tangram devemos ter em mãos um quadrado de qualquer tamanho, mas que possibilite sua manipulação. O primeiro passo é traçar uma das diagonais dividindo o quadrado em dois triângulos congruentes. Escolhendo um dos triângulos obtidos, determine o ponto médio dos lados externos e ligue-os, construindo uma reta paralela à diagonal do quadrado

inicial. Nessa reta devemos demarcar o ponto médio e construir, a partir dele, outro segmento que é perpendicular e intersecta a diagonal, o ponto médio e o vértice do outro triângulo serão as extremidades deste segmento. Foram construídos agora dois trapézios, neles determinamos os pontos médios da base maior de um deles. No primeiro trapézio é traçado a altura que passa pelo ponto médio e no segundo, um segmento que ligue vértice da base maior com ângulo de  $90^\circ$  ao vértice oposto da base menor. Assim são estabelecidas as peças do Tangram.

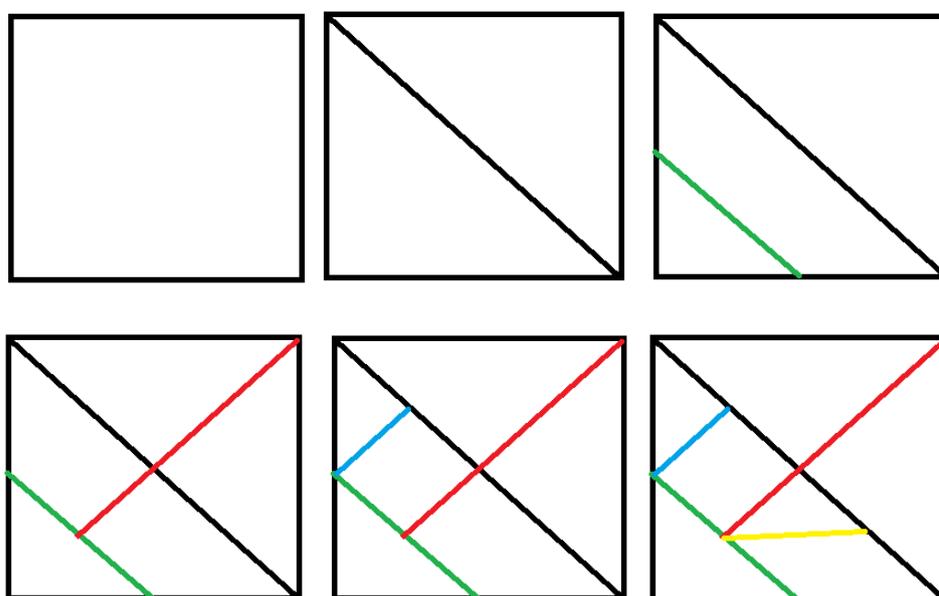


Figura 5.2

Borin (1996, p.9) diz que:

Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem.

Portanto, a ideia é que os alunos comecem as atividades construindo o seu próprio Tangram na sala, essa manipulação desenvolverá o interesse pelo seu estudo e o entendimento das medidas de cada um dos lados das peças.

## 5.1 Áreas dos Polígonos Obtidos por um Quadrado

O primeiro tópico a ser trabalhado com o Tangram nas mãos será o conceito de área, partindo do quadrado inicial. Não se faz necessário que o aluno conheça a medida dessa área, pois poderão ter figuras de tamanhos diferentes, então será estabelecido que o quadrado tenha 1 (uma) unidade de área.

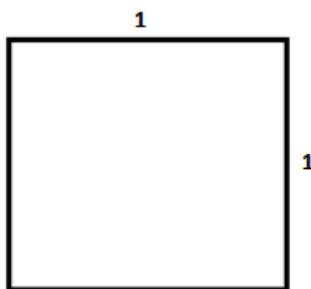


Figura 5.3

O resultado da área de cada peça será conhecido a partir de cada etapa na construção do jogo. No primeiro momento, conforme Figura 5.4, dividimos o quadrado ao meio por uma diagonal e pelo caso *LLL* o aluno chegará a conclusão que os dois triângulos tem a mesma área, logo o valor da área de cada triângulo é  $1/2$  u.a.

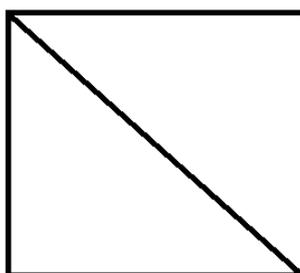


Figura 5.4

Em seguida (Figura 5.5), com a construção da paralela à diagonal do quadrado inicial, o aluno deverá ser capaz de identificar quais figuras ele obteve. O trapézio, por ter apenas dois lados paralelos, e o triângulo, pois tem apenas três lados. Começamos por identificar a área do triângulo, isso porque os novos lados foram construídos da figura em questão. Logo, a área será:

$$A = \frac{1/2 \times 1/2}{2} = \frac{1}{8}$$

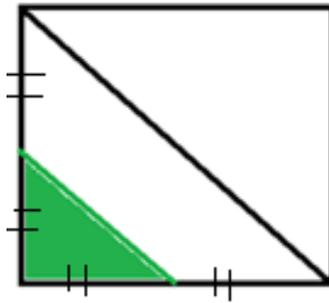


Figura 5.5

Se o triângulo maior é formado pela soma das áreas do triângulo menor e o trapézio, será possível definir a área do trapézio pela dica anterior:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + A_{Trap.}$$

$$A_{Trap.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$

$$A_{Trap.} = \frac{3}{8}$$

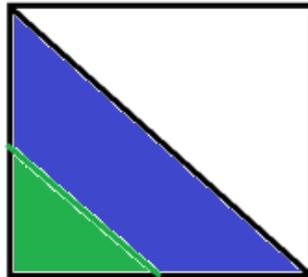


Figura 5.6

Agora, como podemos ver na Figura 5.7, foi construída uma perpendicular à diagonal do quadrado, que acaba dividindo o trapézio pela metade, por ser estabelecida através do ponto médio de sua base maior por um ângulo reto e conseqüentemente divide o outro triângulo em dois congruentes.

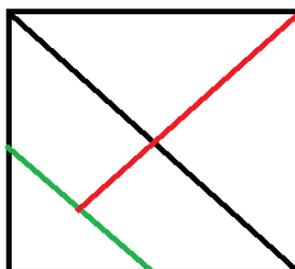


Figura 5.7

Se a área do triângulo era de  $1/2$ , teremos agora dois triângulos de área  $1/4$  cada. E o trapézio inicial que ocupava um espaço de  $3/8$ , foi subdividido em dois trapézios menores de área  $3/16$  cada. Mas se faz necessário justificar essa conclusão. Portanto, comece observando as características da Figura 5.6 e 5.7. Os triângulos menores foram formados a partir da perpendicular à base que a dividiu em dois segmentos congruentes, portanto, possuem a mesma altura do triângulo anterior, porém, metade da base.

$$A = \frac{b/2 \times h}{2} = \frac{bxh}{4} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

Já em relação ao trapézio, a altura dos objetos menores permaneceu a mesma, mas a base maior e a base menor foram divididas em dois segmentos congruentes.

$$A = \frac{(B/2 + b/2) \cdot h}{2} = \frac{1/2 \cdot (B + b) \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{16}$$

Na penúltima etapa (Figura 5.8) um dos trapézios foi novamente dividido e será necessário identificar primeiro as figuras formadas para que em seguida se estabeleça a nova área.

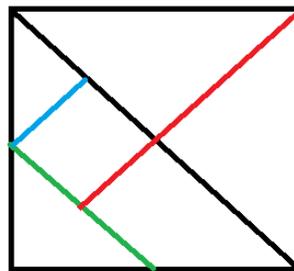


Figura 5.8

Pelo Teorema da Base Média de um triângulo, sabemos que se uma paralela à base tem suas extremidades nos pontos médios dos outros dois lados, esse segmento terá a metade da medida da base, e a altura do triângulo será dividida. No Tangram vimos que a base maior e a base menor foram divididas ao meio pelo segmento perpendicular a elas. No trapézio superior traçamos a altura do vértice da base menor em relação à base maior e pela nova divisão obtemos um quadrado e um quarto triângulo.

Este o quarto triângulo encontrado, pelas características apresentadas anteriormente, nos permite observar que em relação ao primeiro triângulo formado, possui 1/2 da altura e 1/4 da base do triângulo da Figura 5.4.

$$A = \frac{b/4 \times h/2}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{bxh}{2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

A próxima etapa divide o trapézio da parte inferior em dois triângulos.

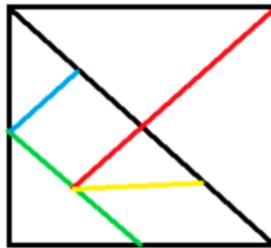


Figura 5.9

Para esse processo a sugestão é seguir os mesmos passos das demonstrações anteriores.

## 5.2 Perímetro dos Polígonos pela Divisão de Figuras

Perímetro de um polígono é estabelecido pela soma das medidas de seus lados. Para o Tangram é necessário conhecer o lado do quadrado inicial. Como a diagonal é o primeiro lado conhecido da divisão do quebra-cabeça trabalhamos o Teorema de Pitágoras, isso porque conhecido um dos ângulos observamos que se trata de um triângulo retângulo originado da primeira divisão. Considerando o lado do quadrado por  $x$ , obtemos a diagonal  $d$ :

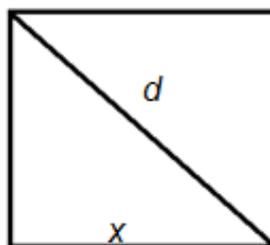


Figura 5.10

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$d^2 = x^2 + x^2$$

$$d = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

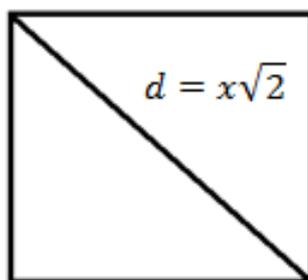


Figura 5.11

Como temos duas figuras congruentes, o perímetro será  $x + x + x\sqrt{2} = 2x + x\sqrt{2}$

Pela nova divisão teremos que definir o lado do novo triângulo conhecido quando construirmos a reta paralela a diagonal, que denominaremos por  $l$ .

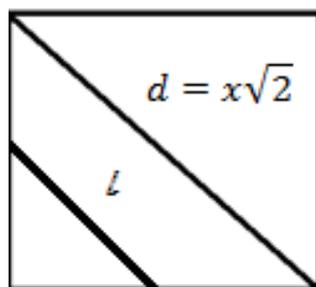


Figura 5.12

Sabe-se que o novo lado é a base média do triângulo, portanto possui a metade da medida da diagonal do quadrado, ou seja, metade da medida da hipotenusa do triângulo maior.

$$l = \frac{d}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

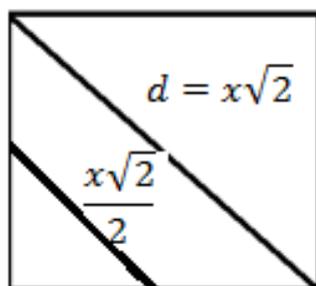


Figura 5.13

Agora temos três polígonos, dois triângulos e um trapézio. Seus respectivos perímetros são:

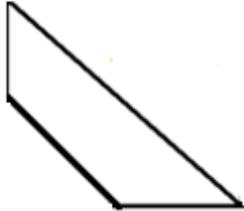
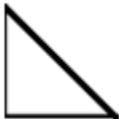
Polígonos formados	Perímetro
	$2p = 2x + x\sqrt{2}$
	$2p = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + x\sqrt{2}$ $2p = \frac{x\sqrt{2} + 2x + 2x\sqrt{2}}{2}$ $2p = \frac{3x\sqrt{2}}{2} + x$
	$2p = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ $2p = \frac{x\sqrt{2}}{2} + x$

Tabela 5.1

A diagonal que será traçada em seguida pode ser vista como incompleta, portanto, não podemos dizer que tem a mesma medida na primeira diagonal. Mas resta saber qual é essa diferença. Como forma um ângulo de  $90^\circ$  com a hipotenusa do triângulo menor, espera-se que o aluno entenda que a diferença refere-se exatamente à medida da altura desse triângulo menor que não é interceptado pela diagonal.

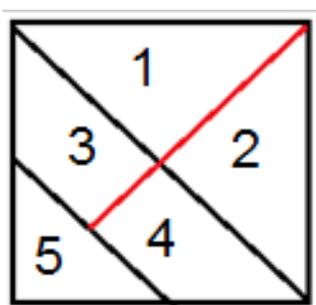


Figura 5.14

Quando trabalhado a área foi observado que a área do triângulo maior (1+2) é metade da área do quadrado e o menor (5) é 1/8 do mesmo quadrado, logo concluímos que a área do triângulo menor (denominado  $A_5$ ) equivale a 1/4 de área do maior (denominado  $A_{1,2}$ ). É possível gerar o seguinte cálculo para conhecermos a altura procurada:

$$A_5 = \frac{1}{4} A_{1,2}$$

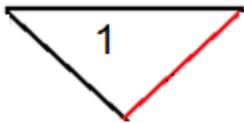
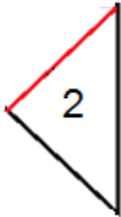
Já sabendo que a hipotenusa menor ( $b_5$ ) corresponde metade da hipotenusa maior ( $b_{1,2}$ ), continuamos:

$$\begin{aligned} \frac{b_5 \times h_5}{2} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{b_{1,2} \times h_{1,2}}{2} \\ \frac{b_{1,2} \times h_5}{4} &= \frac{b_{1,2} \times h_{1,2}}{8} \\ h_5 &= \frac{h_{1,2}}{2} \end{aligned}$$

Assim, identificamos que a altura do menor triângulo refere-se a metade da altura do triângulo maior. Conseqüentemente, sabendo que a altura maior corresponde a metade da diagonal do quadrado, temos:

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= \frac{d}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \\ h_5 &= \frac{x\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Logo, essa é a diferença que procurávamos. Esse segmento possui medida  $x\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{2}}{4} = \frac{3x\sqrt{2}}{4}$ .

	$2p = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{2} + x$ $2p = x\sqrt{2} + x$
	$2p = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{2} + x$ $2p = x\sqrt{2} + x$

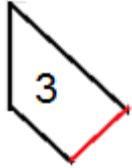
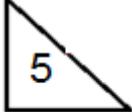
	$2p = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{x\sqrt{2}}{4}$ $2p = \frac{x}{2} + \frac{3x\sqrt{2}}{4}$
	$2p = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{x\sqrt{2}}{4}$ $2p = \frac{x}{2} + \frac{3x\sqrt{2}}{4}$
	$2p = \frac{x\sqrt{2}}{2} + x$

Tabela 5.2

Para a nova divisão, devemos instigar o aluno a encontrar as novas medidas a partir da observação dos valores anteriores.

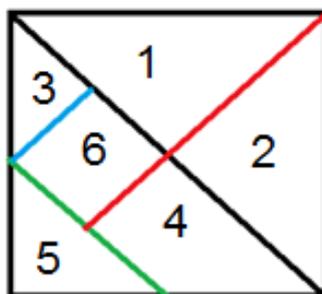


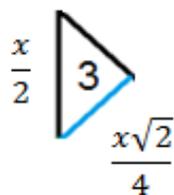
Figura 5.15

Nessa observação é importante entender que as peças 1, 2, 4 e 5 não sofreram alterações, ocorrendo mudanças apenas na peça 3 da figura 5.13 que agora representa a junção das peças 3 e 6 representadas na figura 5.14. Portanto, vamos nos ater apenas a identificar o perímetro dessas duas peças. Ao trabalharmos a área de cada peça, concluímos que a peça seis corresponde a um quadrado. Já que é conhecido um dos lados, medindo  $\frac{x\sqrt{2}}{4}$ , podemos encontrar seu perímetro ao multiplicar pelo número de lados, ou seja:

$$2p = 4 \cdot \frac{x\sqrt{2}}{4}$$

$$2p = x\sqrt{2}$$

Já no caso da atual peça 3, dois lados já foram identificados anteriormente:



Na parte superior da peça 3 e 6 tínhamos a metade de uma diagonal, que foi dividida ao meio quando realizamos essa separação. Então o terceiro lado da peça 3 corresponde a  $\frac{x\sqrt{2}}{4}$ .

Assim temos o perímetro a peça 3:

$$2p = \frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{x\sqrt{2}}{4} + \frac{x}{2} = \frac{x\sqrt{2} + x}{2}$$

Agora ocorre a última divisão e o reconhecimento do perímetro das novas peças formadas (4 e 7) devem ser encontradas utilizando os mesmos critérios já apresentados.

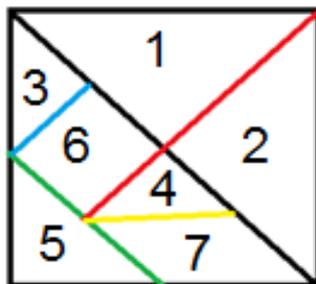


Figura 5.16

### 5.3 Ângulos Internos dos Polígonos do Tangram

O estudo dos ângulos internos compreende pelas divisões que ocorrem com o quadrado que dá origem ao Tangram. A primeira propriedade que deve ser explorada é a medida dos ângulos internos do quadrado. O aluno deve compreender que todo quadrado deve possuir quatro ângulos de  $90^\circ$ , isso porque a soma dos ângulos internos de todo quadrilátero possui  $360^\circ$ . Seguindo os passos da construção do quebra-cabeça faremos a diagonal e teremos então dois triângulos.

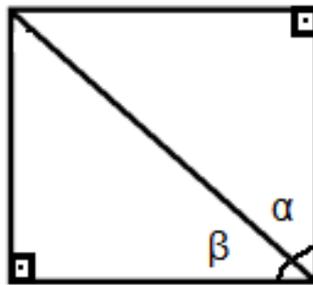


Figura 5.17

Após um corte pela diagonal podemos observar que os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  possuem a mesma medida, pois se sobrepõem através de uma reflexão em relação à diagonal e formam um ângulo de  $90^\circ$ . Portanto  $\alpha$  e  $\beta$  medem cada um  $45^\circ$ . Concluímos ainda que a diagonal passa a ser a bissetriz do ângulo de origem.

Para o segundo passo (Figura 5.18), o interessante é explorar a semelhança de triângulos, pois ela não altera a medida dos ângulos internos, com isso já temos conhecida a medida dos ângulos do triângulo menor. É possível também estudar o conceito de ângulos suplementares a partir da ideia de ângulo raso. Quando o aluno já entende que toda reta possui um ângulo de  $180^\circ$ , o aluno será capaz de compreender que os ângulos  $\beta$  e  $\theta$  juntos tem essa medida, assim gera a análise da medida de  $\theta$ , que corresponde a  $135^\circ$ .

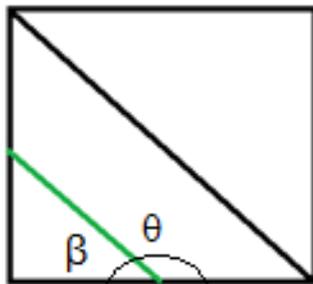


Figura 5.18

Na próxima etapa será necessária a compreensão das fases anteriores para dar o prosseguimento. Isso porque novamente será traçado a bissetriz, que sendo perpendicular a reta paralela a primeira diagonal, trará o entendimento para mais alguns ângulos. Veja Figura 5.19.

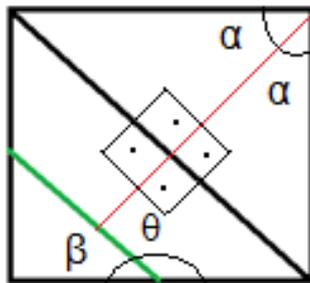


Figura 5.19

Agora, conforme figura 5.20, teremos a construção de um novo quadrado, que apresenta menos trabalho para o estudo, pois até aqui o aluno já sabe distinguir as medidas de seus ângulos.

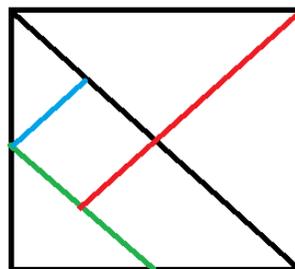


Figura 5.20

Para a conclusão do trabalho obtemos duas figuras construídas mediante a reta paralela à base inferior do quadrado formado, o triângulo e o paralelogramo. Como anteriormente foi percebido que uma paralela não altera a medida dos ângulos, o lado superior do paralelogramo fará esse papel na construção do triângulo acima. Determinamos agora um novo ângulo  $\alpha$ . Nesse triângulo ficam conhecidos, então, dois ângulos, um de  $90^\circ$  e outro de  $45^\circ$ . Para obter o valor do terceiro é necessário trabalhar a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo. Assim saberemos que o novo ângulo mede também  $45^\circ$ .

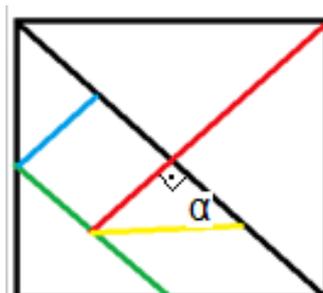


Figura 5.21

No paralelogramo, os ângulos da parte inferior já eram conhecidos e pelos conceitos de ângulo complementar e suplementar obtemos os valores dos ângulos da parte superior da figura 5.21.

#### 5.4 Questões relacionadas ao Tangram

As atividades apresentadas foram retiradas integralmente do banco de questões da OBMEP.

**Atividade 1** – Na figura  $ABCD$  é um quadrado cujo lado mede  $1\text{cm}$ ,  $E$  é o ponto médio da diagonal  $BD$  e  $F$  o ponto médio do segmento  $BE$ . Qual é a área do triângulo  $BCF$ ?

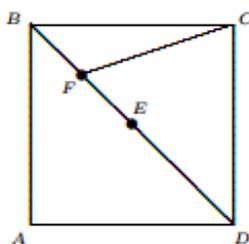


Figura 5.22

*Solução:*

As diagonais do quadrado  $ABCD$  dividem o quadrado em 4 triângulos iguais, logo a área do triângulo  $BCE$  é  $1:4 = 0,25\text{ cm}^2$ . Como o comprimento de  $BF$  é a metade de  $BE$  e a altura relativa aos lados  $BF$  e  $BD$  é  $CE$ , então a área do triângulo  $BCF$  é a metade da área do triângulo  $CBE$ , temos, portanto  $0,25:2 = 0,125\text{ cm}^2$ .

**Atividade 2** – O retângulo da figura está dividido em 8 quadrados. O menor quadrado tem lado  $1\text{ cm}$  e o maior  $14\text{ cm}$ .

- Determine o lado dos outros quadrados.
- Qual é o perímetro do retângulo?

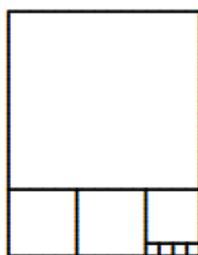


Figura 5.23

**Solução:**

- a) Se o menor quadrado tem  $1\text{ cm}$  de lado, então o lado do quadrado A mede  $1 \times 4 = 4\text{ cm}$  e do quadrado B mede  $4 + 1 = 5\text{ cm}$ . Como o lado maior do quadrado mede  $14\text{ cm}$ , então o quadrado C tem de lado  $14 - 4 - 5 = 5\text{ cm}$ .

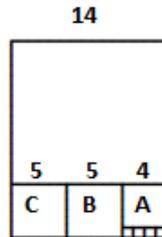


Figura 5.24

- b) Os lados do retângulo medem  $14\text{ cm}$  e  $14 + 5 = 19\text{ cm}$ , logo o perímetro é  $14 \times 2 + 19 \times 2 = 66\text{ cm}$ .

**Atividade 3** - Uma folha retangular de cartolina foi cortada ao longo de sua diagonal. Num dos pedaços obtidos, foram feitos 2 cortes paralelos aos 2 lados menores e pelos pontos médios desses lados. Ao final sobrou um retângulo de perímetro  $129\text{ cm}$ . O desenho abaixo indica a sequência de cortes. Qual era o perímetro da folha antes do corte?

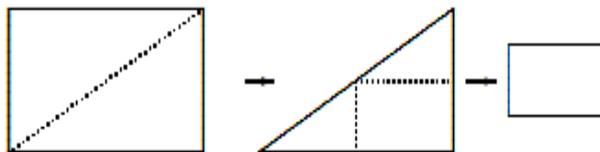


Figura 5.25

**Solução:**

Os lados do retângulo final obtido após os cortes são, cada um, a metade dos lados da cartolina original. Assim, o perímetro do retângulo original é o dobro do perímetro do retângulo final. Logo, o perímetro da cartolina antes do corte é  $2 \times 129 = 258\text{ cm}$ .

**Atividade 4** - Uma folha de papel é retangular, com base igual a  $20\text{ cm}$  e altura  $10\text{ cm}$ . Esta folha é dobrada nas linhas pontilhadas conforme a figura abaixo, e no final recortada por uma tesoura na linha indicada, a qual é paralela à base e está na metade da altura do triângulo.

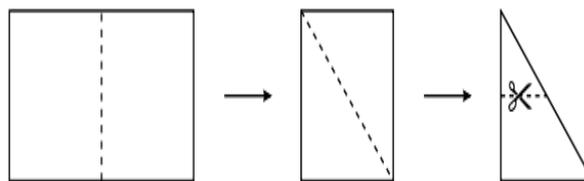


Figura 5.26

- a) Depois de cortar no local indicado, em quantas partes a folha ficou dividida?
- b) Qual a área da maior parte?

**Solução:**

- a) Vamos marcar a linha cortada pela tesoura em cinza, e fazer o processo inverso, que corresponde a abrir a folha depois de cortada:

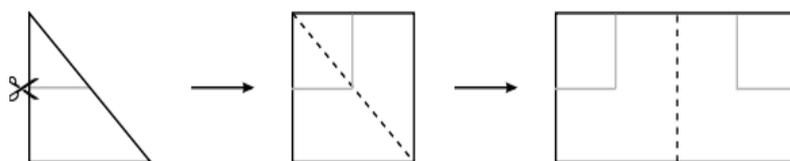


Figura 5.27

Logo, a folha foi dividida em três pedaços.

- b) Como se pode observar, os quadrados recortados nos cantos superior esquerdo e inferior direito tem lado igual a  $5\text{cm}$ . Como a área de um quadrado é o lado ao quadrado, a área de cada quadrado é igual a  $5 \times 5 = 25\text{cm}^2$ . A folha é um retângulo de base  $20\text{cm}$  e altura  $10\text{cm}$ . Logo, como a área de um retângulo é base vezes altura, a área da folha é de  $20 \times 10 = 200\text{cm}^2$ . Subtraindo a área total pela área dos dois quadrados nos cantos, concluímos que a área do pedaço maior da folha após o corte pela tesoura é  $200 - 2 \times 25 = 200 - 50 = 150\text{cm}^2$ .

**Atividade 5** - O quadrado  $ABCD$  é dividido em 6 triângulos isósceles como indica a figura a seguir:

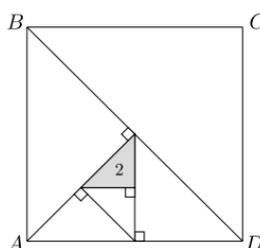


Figura 5.28

Se a área do triângulo pintado é 2, calcule a área do quadrado.

Solução: Pela informação do problema, o triângulo  $PQR$  da figura tem área 2.

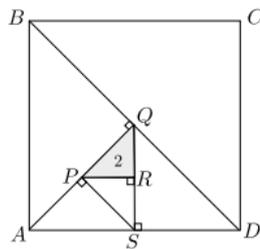


Figura 5.29

Mas, por ser um triângulo retângulo, a área do triângulo  $PQR$  pode ser calculada como  $\frac{PR \times QR}{2}$ . Já que  $PR = QR$ , concluímos que  $PR = QR = 2$ . Agora, sabemos que  $PRS$  é também um triângulo retângulo isósceles, portanto  $RS = PR = 2$ .

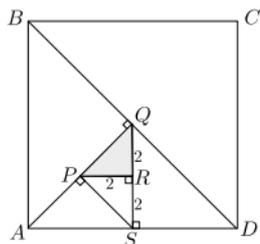


Figura 5.30

Como o triângulo retângulo  $QSD$  é isósceles podemos concluir que  $SD = QS = 2 + 2 = 4$ . Por outro lado, como os triângulos  $PQR$  e  $APS$  são triângulos retângulos isósceles, então  $\hat{PAS} = \hat{PQR} = 45^\circ$ .

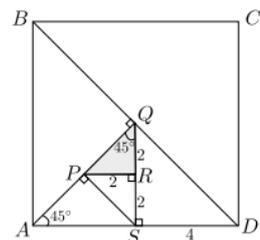


Figura 5.31

Isso implica que o triângulo  $AQS$  é isósceles e portanto  $AS = SQ = 4$ . Até aqui, temos que o lado do quadrado mede  $AD = AS + SD = 8$ . A área do quadrado é, portanto  $8^2 = 64$ .

**Atividade 6** - A Figura I mostra um quadrado de  $40\text{cm}^2$  cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as

sete peças do jogo Tangran. Com elas é possível formar a Figura II, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

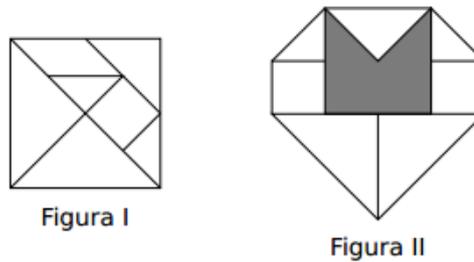


Figura 5.32

Solução: Abaixo vemos as figuras do enunciado da questão. A descrição das peças da Figura I implica que os pontos  $M$  e  $N$  são pontos médios dos lados  $AB$  e  $AC$ . A Figura III, onde  $P$  é o ponto médio de  $BC$ , mostra que a área do triângulo  $AMN$  é igual à quarta parte da área do triângulo  $ABC$ , que por sua vez tem área igual à metade da área do quadrado. Logo, área do triângulo  $(AMN) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 40 = 5\text{cm}^2$ . A Figura II mostra que o buraco consiste de três triângulos iguais ao triângulo  $AMN$ ; logo sua área é  $15\text{cm}^2$ .

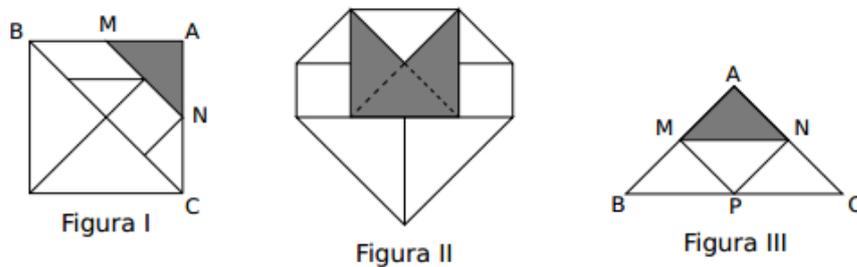


Figura 5.33

**Atividade 7** - A figura 7.2 é um retângulo cuja área sombreada foi feita utilizando peças de um tangram que formam um quadrado de  $10\text{cm}^2$  de área, mostrado na figura 5.31.



Figura 5.34

Qual é a área do retângulo?

*Solução:*

No Tangram temos: dois triângulos maiores de área  $1/4$  do quadrado, isto é,  $10/4 \text{ cm}^2$ ; um triângulo, um quadrado e um paralelogramo de área  $1/8$  do quadrado, isto é,  $10/8 \text{ cm}^2$  e dois triângulos de área  $1/16$  do quadrado, isto é,  $10/16 \text{ cm}^2$ . Na decomposição mostrada na figura 7.4, o retângulo formado possui, além das peças do Tangram, quatro quadrados de área  $10/8 \text{ cm}^2$  e seis triângulos de área  $10/16 \text{ cm}^2$ , numa área total de  $4 \times 10/8 + 6 \times 10/16 = 35/4 \text{ cm}^2$ . Finalmente, a área do retângulo é  $10 + 35/4 = 75/4 = 18,75 \text{ cm}^2$ .



Figura 5.35

## CAPÍTULO 6

### Geoplano e a Geometria Plana

A palavra Geoplano descreve a junção de "geo" que vem de geometria e "plano" que significa tábua ou superfície plana. Um dos primeiros a utilizá-lo foi o educador egípcio Dr. Caleb Gattegno (1911-1988) que por muito tempo dedicou-se a criação de materiais pedagógicos (ROCHA, 2007).

O Geoplano é um material simples de utilizar e confeccionar. Basta possuir uma tábua de madeira quadrada que será a base, alguns pregos de preferência sem a cabeça e elásticos ou barbantes coloridos que formarão as figuras quando presos aos pregos. A distância entre os pregos deve ser a mesma, medidas através de uma régua.

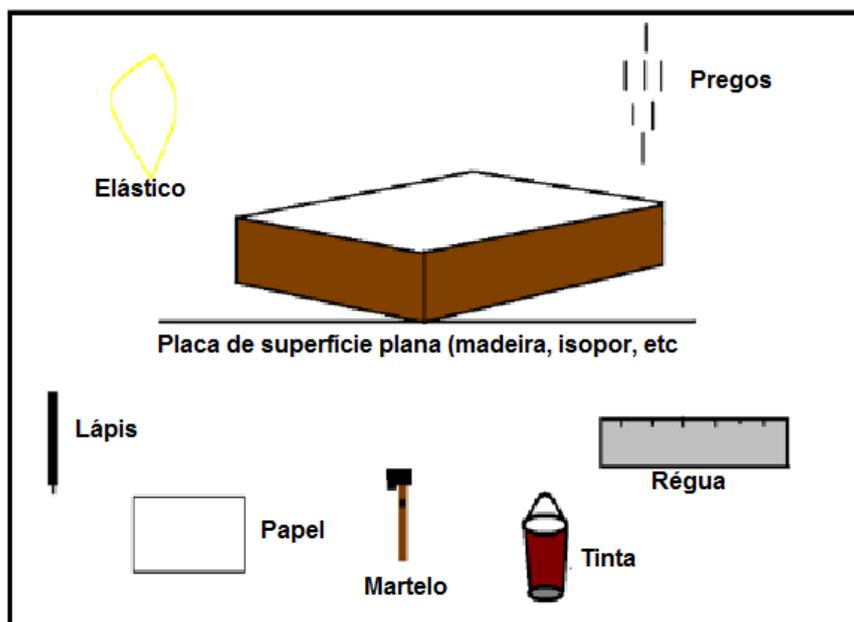


Figura 6.1 – Fonte: ROCHA (2007)

Através desse material é possível explorar ideias como: Teorema de Pitágoras, áreas, tipos de triângulo, reta, segmento de reta, ângulos, entre outros. Quebrando a barreira do ensino tradicional, é capaz de tornar o aprendizado mais consistente através de sua manipulação em relação a simples figuras desenhadas nos livros didáticos, Pavanello (2002) acrescenta que “nesses materiais, as figuras estão fixas no papel, sem qualquer mobilidade, de modo que não é possível girá-las, colocá-las em posições

diferentes ou umas sobre as outras para facilitar sua comparação”. Sua função em sala de aula é concretizar os conceitos já estudados, ou seja, um suporte concreto.

É por meio dele que o professor pode explorar alguns axiomas, como por exemplo, que por dois pontos é possível traçar uma única reta. A partir daí sugerir uma análise de quantas retas podemos traçar por três pontos quando são colineares e quando não são.

Outro estudo proveniente desse objeto é o conceito de ângulos. Portanto sugere-se que tenhamos dois elásticos para construir dois segmentos de retas. A princípio um elástico deverá estar sobreposto ao outro, partindo do ângulo nulo. Em sequência pede-se que desprenda a ponta de um dos elásticos e comece a fazer um giro e prendendo em outro prego. Se o aluno esticar o elástico e não conseguir manter o comprimento inicial possibilitará o entendimento que o ângulo independe da medida do segmento de reta.

Depois de observado o conceito de ângulo e sua medida torna possível o trabalho com polígonos. O aluno é capaz de manipular triângulos, caracterizá-los como congruentes ou não, classificá-los em relação aos ângulos e aos lados. Em seguida parte para o quadrado, o interessante nesse momento é começar partindo da ideia que os lados e os ângulos são congruentes, posteriormente define a diagonal e gera a conclusão de sua medida e os ângulos formados por ela. Se esticarmos dois dos elásticos opostos e paralelos construímos um retângulo e se inclinarmos os outros dois paralelos com o mesmo giro teremos um paralelogramo.

Nas aulas tradicionais as fórmulas são “decoradas” pelos alunos que não conhecem o fundamento dos cálculos desenvolvidos, fazendo de forma mecânica. Por isso que Serrazina e Matos (1988) declaram: “Muitas vezes o perímetro e a área são introduzidos através de fórmulas. Mais tarde é pedido aos alunos que determinem o “comprimento à volta”, ou o “espaço ocupado”, e muitos não são capazes de reconhecer aquelas ideias (...). Os alunos devem passar por muitas experiências concretas construídas por eles próprios, até chegarem à compreensão da utilização das fórmulas” (p.114). Essa experiência descrita pelo autor pode ser desenvolvida através do Geoplano, que possibilita a demonstração ou construção das fórmulas.

## 6.1 Construindo as Fórmulas com ajuda do Geoplano

Tendo por base as demonstrações de LIMA (1991) iniciamos o processo considerando que o menor quadrado formado por quatro pontos será a unidade de área (Figura 6.2). E a partir dele serão construídas as fórmulas das áreas dos principais polígonos. Torna-se interessante a transcrição de todo o desenvolvimento em um papel quadriculado a medida que os polígonos são manipulados.

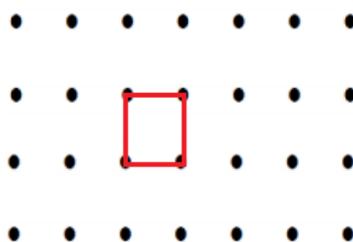


Figura 6.2

Para a construirmos a fórmula da área do retângulo podemos partir de dois métodos, obtendo vários quadrados ao mesmo tempo, ou já definindo o retângulo e solicitar a observação dos quadrados que ocupam o interior desse retângulo. Consideremos a primeira situação na Figura 6.3.

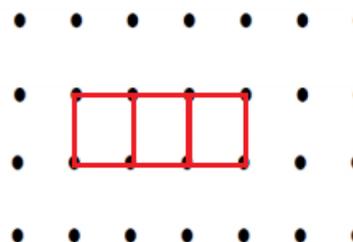


Figura 6.3

Já que o aluno identificou que cada quadrado possui 1 u.a. ele poderá concluir que o retângulo do exemplo terá 3 u.a. Assim será possível mostrar que mantemos a altura e apenas a base foi alterada. Portanto, temos três bases da medida anterior e mesma altura. Para concluir é importante fazer mais uma observação modificando agora a altura.

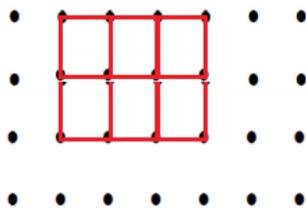


Figura 6.4

Peça ao aluno agora para identificar qual a nova área determinada (Figura 6.4), assim como no momento anterior ele irá contar o número de quadrados e descobre que a área é 6 u.a. Como a altura equivale duas unidades da anterior, o aluno já será capaz de raciocinar em relação à fórmula da área, encontrando  $A = b \times h$ .

Desenvolvida a fórmula para área de um retângulo o aluno poderá observar e concluir as áreas de paralelogramos e triângulos. Iniciando pelo paralelogramo constrói-se a figura e com a ajuda de outro elástico faremos as divisões necessárias.

Como nesse momento o aluno identifica o retângulo com os ângulos de  $90^\circ$ , com a ajuda do segundo elástico estabelece a altura do paralelogramo formando tal ângulo na base, conforme Figura 6.5.



Figura 6.5

Ele terá que trabalhar agora a rotação do triângulo obtido encaixando no outro lado da figura (veja Figura 6.6). Para não perder as características do triângulo é conveniente que o aluno recorte em um papel um triângulo de mesma medida para sobrepor ao outro lado.

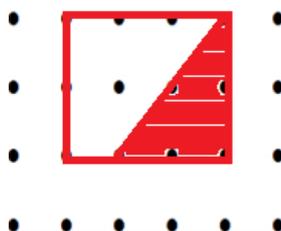


Figura 6.6

Agora ele se depara com outro retângulo de fórmula conhecida. Concluindo que calculamos a área do paralelogramo baseado na mesma fórmula do retângulo que já é conhecida:  $A = b \times h$ . O professor não poderá deixar de salientar a importância de que no paralelogramo o aluno deve ter bem claro qual segmento refere-se à altura, pois alguns confundem com a medida dos lados.

Para trabalhar a fórmula de área do triângulo vamos iniciar pelo reconhecimento de um paralelogramo (Figura 6.7). O primeiro passo será traçar uma das diagonais do polígono. Instigue o aluno a entender que agora obtemos dois triângulos iguais, isso ocorre pelo caso de congruência *LLL*.

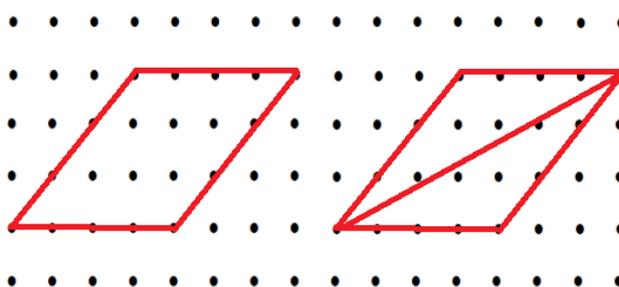


Figura 6.7

Tendo então dois triângulos iguais, sabemos que a área do quadrado corresponde à soma da área dos triângulos obtidos. Logo a área do triângulo terá a seguinte fórmula:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Por fim, vamos estabelecer a equação que transmite o valor da área de um losango. Para tal estudo utilizamos três elásticos. Dois deles devem ser colocados de forma que estabeleçam dois segmentos de retas perpendiculares que serão as diagonais do polígono. Com o terceiro elástico vamos contornar a figura estabelecendo os vértices do losango nas pontas dos outros dois elásticos. Veja Figura 6.8.

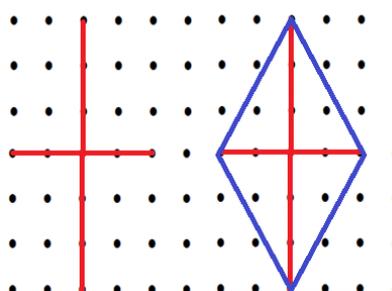


Figura 6.8

Peça ao discente que observe a congruência estabelecida quando as diagonais foram divididas pela intersecção dos segmentos. Pelo caso *LLL* também concluímos que o losango pode ser desmembrado em dois triângulos congruentes.

Denominamos a área de losango por  $A_l$ , do triângulo por  $A_t$ , a diagonal horizontal por  $d$  e a vertical por  $D$ .

A área do losango será encontrada ao somarmos as áreas dos dois triângulos.

$$A_l = A_t + A_t$$

Para estabelecer a área de cada triângulo temos que:

$$A_t = \frac{d \times \frac{D}{2}}{2} = \frac{d \times D}{4}$$

Logo:

$$A_l = \frac{d \times D}{4} + \frac{d \times D}{4} = \frac{d \times D}{2}.$$

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, expomos alguns recursos manipuláveis que podem se tornar um auxílio no ensino da Geometria Plana. A ideia foi oferecer, com esse tipo de atividade, uma abordagem diferente que desperte o interesse do aluno. Lembrando que esse método não nos dá garantia de sucesso em nosso trabalho e tendo sempre em mente que todas as ações devem ser pensadas e discutidas.

Constatou-se, a partir do que foi discutido, que esse processo incentiva a criatividade e o aprendizado dos alunos, além de instigar o trabalho em equipe. Podendo ser um diferencial na vida escolar dos alunos do Ensino Fundamental de qualquer escola por se tratar de materiais de baixo custo.

É importante ressaltar que outra proposta deste trabalho é numa próxima fase trabalhar outros tipos de recursos manipuláveis na Geometria Plana, como por exemplo, o Mosaico. Mas também desenvolver recursos que desenvolvam os conceitos da Geometria Espacial e para esse caso temos as atividades geradas com canudos e elásticos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES, Eva Maria Siqueira. **A ludicidade e o ensino da matemática: Uma prática possível**. Campinas, SP: Papyrus, 2001.
- ASCHENBACH, M. H. C. V. et al. **A Arte-magia das Dobraduras**. São Paulo: Scipione, 1992.
- BARBOSA, J. L. M., **Geometria Euclidiana Plana**. SBM
- BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo – SP: IME-USP, 1996.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996 - 2ª edição.
- CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. São Paulo: Cortez, 1994.
- CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Explorando Geometria com Origami**. Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos, 2009.
- CENTRO DE REFERÊNCIA VIRTUAL DO PROFESSOR – CRV. <http://crv.educacao.mg.gov.br>. Acesso em julho 2014.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da Teoria à Prática**. Campinas: Papyrus, 2012.
- DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12ª edição. São Paulo, 2005.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Editora UNICAMP. Campinas, SP, 2008. 843p.
- EUCLIDES, **Os Elementos**. Unesp. Tradução: Irineu Bicudo.
- GÊNOVA, A Carlos. **Brincando com tangram em origami**. 2ª Ed. São Paulo, Global, 1998.
- GGEP. **Sugestões de Atividades Educacionais usando o geoplano, entre muitas possíveis**. *Revista de Educação Matemática*. São Paulo: SBEM, a. 8 n.6-7, 2001/2002.
- HILBERT, David. **Fundamentos da Geometria**. OLIVEIRA, A. J. Franco de (Coord). Lisboa: ed. Gradiva, 2003. 338 p.
- IMENES, Luiz Márcio. **Geometria das Dobraduras** (coleção Vivendo a Matemática). São Paulo, Scipione, 1996.

KNIJNIK, Gelsa, Marcus Vinicius Basso e Renita Klüsener. **Aprendendo e ensinando matemática com o Geoplano**. Unijuí: Editora Unijuí, 1995.

LORENZATO, S. Por que não Ensinar Geometria? In: **Educação Matemática em Revista** – SBEM 4, 1995.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança**. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro, 1991.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACEDO, Lino de (1994). **Ensaio construtivistas**. São Paulo: casa do psicólogo Lorenzato (coleção formação de professores).

MACHADO, P. F. **Fundamentos da Geometria Plana**. Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2012.

Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental e Médio: Matemática**, Brasília:MEC/SEF,1998.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço**. São Paulo: Geração Editorial, 2010

MORAES, Ceres Marques de. **O material didático: sua importância no ensino da Matemática**. In: BEZERRA, Manoel Jairo; SOUZA, Júlio César de Melo; MORAES, Ceres Marques de. (Org.). Apostilas de Didática Especial de Matemática. São Paulo: MEC/CADES, 1959. p. 119-131.

NETO, Ernesto Rosa. **Didática da Matemática**. São Paulo: Ática, 1997.

OCHI, Fusako Hori; Paulo, Rosa M.; Yokoya, Joana H.; Ikegami, João Kasuwo. **O uso de quadriculados no ensino da Geometria**. IME-USP, São Paulo, 1992.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP. <http://www.obmep.org.br>. Acesso em agosto 2014.

PAVANELLO, R. M. Geometria: atuação dos professores e aprendizagem nas séries iniciais. **Anais: trabalhos completos. I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática**. Curitiba: UTP, 2002.

RÊGO, R.G.; RÊGO, R.M; GAUDENCIO Jr, Severino. **A Geometria do Origami: Atividades de Ensino Através de Dobraduras**. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2004.

RÊGO, Rômulo Marinho do; RÊGO, Rogéria Gaudência do. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sergio (Org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

**Revista Presença Pedagógica**. out./set. de 2005 v. 11, n. 24.

ROCHA, C. A.. PESSOA, G.; PEREIRA, J. A.A. e FILHO, J.M.S. **O uso do geoplano para o ensino de geometria: uma abordagem através de malhas quadriculadas**. Belo Horizonte: IX ENEM.

SABBATIELLO, E.E.. **El Geoplano: Um recurso didáctico para la enseñanza dinámica de la geometria plana elemental- Su aplicación e utilización en la escuela primária**. Ediciones G.<sup>a</sup>D.Y.P., Buenos Aires, 1967.

SADOVSSKY, Patrícia. **O Ensino da Matemática Hoje: Enfoques, sentidos e desafios**. São Paulo: Ática, 2010.

SERRAZINA L. & MATOS, J. M. **O Geoplano na Sala de Aula**. Lisboa: APM, 1988.

SOUZA, Eliane Reame de A. **A Matemática das Sete Peças do Tangram**. Eliane Reame de Souza, Maria Ignez S. Vieira Diniz, Rosa Monteiro Paulo e Fusako Hori Ochi. São Paulo: IME – USP, 1997.