Alexandre Adriano Bernardi

"GeoPlexo: Um Material Manipulável para o Ensino dos Números Complexos"

Pato Branco-PR, Brasil

Maio de 2015

Alexandre Adriano Bernardi

"GeoPlexo: Um Material Manipulável para o Ensino dos Números Complexos"

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Departamento Acadêmico de Matemática – DAMAT

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Coorientador: Prof. Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo

Pato Branco-PR, Brasil

Maio de 2015

Alexandre Adriano Bernardi
"GeoPlexo: Um Material Manipulável para o Ensino dos Números Complexos"/ Alexandre Adriano Bernardi. – Pato Branco-PR, Brasil, Maio de 2015

Orientador: Prof. Dr. Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Coorientador: Prof. Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo

Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Departamento Acadêmico de Matemática – DAMAT
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Maio de 2015.

1. Ensino. 2. Geometria. 3. Números Complexos. 4. Material Manipulável. I. Prof. Dr. Fredy Maglorio Sobrado Suárez. II. Prof. Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. IV. Departamento Acadêmico de Matemática. V. GeoPlexo: Material Manipulável para o Ensino dos Números Complexos

CDU xx:xxx:xxx.x

Alexandre Adriano Bernardi

"GeoPlexo: Um Material Manipulável para o Ensino dos Números Complexos"

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Pato Branco-PR, Brasil, 29 de maio de 2015:

Prof. Dr. Fredy Maglorio Sobrado Suárez
Presidente - Orientador (UTFPR)

Prof. Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo
Membro - Coorientadora (UTFPR)

Prof. Dr. Pedro Pablo Durand Lazo
Membro (UNIOESTE)

Prof. Msc. Marlova Estela Caldatto
Membro (UTFPR)

Prof. Dr. Michael Gonzales Gargate
Suplente (UTFPR)

Dedico este trabalho à alguém especial. Aquele que me ensinou a ser homem. Me ensinou o valor da honestidade e da humildade. Dedico cada linha deste trabalho àquele de quem lembro todos os dias numa mistura de alegria e saudade. Uma saudade que cresce a cada dia e dias que parecem não ter fim. Dedico este trabalho àquele a quem certa vez escrevi: Pai, meu amigo, meu verdadeiro irmão, pai vem comigo, me dá sua mão... Meu Pai, Leusir Luiz Bernardi, In Memoriam.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida, pela fé, pelo zelo para comigo, pelo aconchego de seu Santo Espírito, pela sua infinita misericórdia e pela certeza da vida eterna.

Agradeço a toda minha família, esposa e quatro filhos: Pedro Augusto, Paulo Ricardo, Raissa e José Eduardo. Pelo amor incondicional, mesmo estando ausente em muitos momentos.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT - UTFPR de Pato Branco e principalmente a meus orientadores Professores Fredy Maglorio Sobrado Suárez e Janecler Aparecida Amorin Colombo. Pela inspiração e orientação. Pela paciência e tolerância. Por compartilharem seus conhecimentos. Mas principalmente pela distinção do trato e pelo comprometimento neste trabalho. Outrora meus professores, orientadores, hoje, também meus amigos.

Obrigado a todos os colegas da turma 2013 do PROFMAT - UTFPR Pato Branco que de uma forma ou de outra fizeram parte de muitos momentos da minha vida. A jornada não tem sido fácil, mas a turma é de vitoriosos. Abraço a todos.

Também quero lembrar de todos os meus amigos e parceiros que contribuíram de forma direta ou indireta com este trabalho, ao Neodir da Master-Móveis e ao Ivan da Retibra, sempre dispostos em ajudar.

Aos diretores e coordenadores das escolas pelo auxílio quanto aos horários e pela imensurável compreensão.

Em especial quero deixar meu agradecimento a meu irmão Professor Ricardo Bernardi, que apesar de ser o caçula da família, é grande em conhecimento e sempre esteve a meu lado nesta batalha.

Com toda certeza não conseguirei fazer justiça a todos.

Obrigado ao Ministério da Educação por essa iniciativa, pelo programa PROFMAT que veio valorizar especialmente ao professor de matemática que realmente atua em sala de aula. Faço menção especial à Capes e agradeço pela valorização através da bolsa de estudos que possibilitou minha permanência no programa.

Aqui faço meu agradecimento especial a minha esposa Bárbara que foi o pivô para meu equilíbrio nesta empreitada. Mulher de fibra e incansável. Mãe dedicada e carinhosa. Mulher de verdade. Daquelas que dão orgulho e honram sua casa e ao marido. Obrigado querida.

"Mas esforçai-vos, e não desfaleçam as vossas mãos; porque a vossa obra tem uma recompensa." .

(II Cr 15:7)

Resumo

O presente trabalho tem como principal objetivo desenvolver um material manipulável para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem dos Números Complexos. Primeiramente procura situar o atual ensino dos Números Complexos tendo como norte, o viés da pesquisa produzida em dissertações de mestrado e publicadas no portal da Capes e na biblioteca Virtual do PROFMAT no período de 2004 a 2014. Apresenta, em seguida, aspectos históricos sobre o tema, uma fundamentação matemática e uma discussão sobre a utilização de materiais manipuláveis como recursos didáticos para o ensino da matemática. É proposto um material manipulável denominado GeoPlexo e uma sequência de atividades dos conteúdos de potenciação e radicação de Números Complexos explicando sua utilização. Constatou-se a relevância do material manipulável como recurso didático para o ensino dos Números Complexos, principalmente no que tange à visualização geométrica deste objeto matemático.

Palavras-chaves: Ensino. Ensino Médio. Números Complexos. Material Manipulável.

Abstract

This study aims to develop a manipulative material to assist the teaching and learning of Complex Numbers. Primarily, It tries to define the status of the current teaching of Complex Numbers, having as guide the bias of the research produced in dissertations and published on the website of Capes and the Virtual Library of Profmat from 2004 to 2014. It presents historical aspects of the theme, a mathematical foundation and a discussion of the use of manipulative materials as teaching resources for the teaching of mathematics. It introduces the manipulative material called GeoPlexo and a sequence of activities of potentiation and settling of complex numbers, explaining its use. It concludes with the importance of manipulative materials as a teaching resource for the teaching of Complex Numbers, especially regarding the geometric visualization of this mathematical object.

Key-words: Teaching. Geometry. Complex Numbers. Manipulative Materials.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
DCE	Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (Matemática)
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio

Sumário

1 Introdução

Foi-se o tempo em que bastava qualquer diploma, contanto que tivesse um pequeno número de horas relacionadas com, ou a simples citação da palavra matemática em seu interior, e o profissional já estava apto a ser um professor de matemática.

Não estamos nos referindo aos professores que antigamente, apesar de não terem formação específica, até hoje são lembrados pela sua qualidade e dedicação, verdadeiras exceções à regra. O fato é que com o surgimento das teorias de educação, um novo rumo foi dado ao ensino da matemática, agregando um novo suporte àquilo que antes era apenas conhecimento técnico específico que associado a muita vontade em ensinar, era considerado suficiente. Suporte este, que norteado por parâmetros didáticos pedagógicos tentam compor o novo professor de matemática, justamente o que se espera de um curso de Licenciatura em Matemática.

Evidentemente seria injusto atribuir à graduação a incumbência de resolver toda essa problemática. A complexidade deste contexto nos leva a travar uma batalha constante que requer a participação de toda a comunidade acadêmica, em todos os âmbitos e níveis.

Dando um enorme salto na sequência temporal, quando falamos no ensino da matemática no Ensino Médio e a forma de como vamos efetivamente atender às necessidades do nosso estudante, nos deparamos com inúmeras questões realmente relevantes a este impasse mas que, no momento, não serão abordadas. No entanto podemos citar pelo menos uma delas, a própria metamorfose constante do objeto em questão, o aluno. Redes sociais, aparelhos eletrônicos, novas liberdades - um verdadeiro buffet de possibilidades que é oferecido ao nosso jovem aluno - competem com a atenção à aula de matemática e com a dedicação de seu estudo. É utópico crer que, em turmas convencionais de ensino médio, geralmente teremos homogeneidade. Como educadores, precisamos estar preparados para todas as situações.

Quando o assunto é restrito ao ensino dos Números Complexos, onde o tratamento tradicional, norteado pelo método de aulas expositivas sem interação alguma entre as partes envolvidas, fez o aluno desenvolver uma verdadeira aversão a este conteúdo, fazendo-nos perceber a necessidade de reavaliar todo o processo envolvido e de alguma forma reacender a motivação para este ensino.

Questões envolvendo o ensino e a aprendizagem dos Números Complexos no Ensino Médio das escolas brasileiras, sejam particulares ou públicas, têm sido tema de muitas discussões por profissionais envolvidos no assunto. Esse fato, inclusive é de fácil comprovação quando observamos que no próprio programa PROFMAT, nos últimos três anos foram mais de três dezenas de trabalhos focando este tema.

Os Números Complexos, além de se configurarem como um conjunto de ferramentas fundamentais dentro da própria matemática, como no estudo das variáveis complexas, álgebra linear complexa ou na sua aplicação em geometria, como mostra Neves (2014a), também são de extrema necessidade em diversas áreas do conhecimento, como nas engenharias, sendo muito utilizado em eletromagnetismo, controle e circuitos elétricos, como aborda Costa (2007).

Quando observamos os Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN, 1998), já no capítulo de apresentação temos a frase: "De certa forma, também organizam o aprendizado de suas disciplinas, ao manifestarem a busca de interdisciplinaridade e contextualização e ao detalharem, entre os objetivos educacionais amplos desse nível de ensino, uma série de competências humanas relacionadas a conhecimentos matemáticos e científico-tecnológicos" e mais adiante, no capítulo das competências e habilidades também comenta: "Articular o conhecimento científico e tecnológico numa perspectiva interdisciplinar" verificamos o respaldo legal para o ensino contextualizado, interdisciplinar e de conteúdos que tenham aplicação tecnológica.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná são muito claras quanto ao ensino dos Números Complexos. Além de estar incluído no desmembramento dos conteúdos estruturantes números e álgebra, recebe grande ênfase:

> "No ensino médio, há necessidade de aprofundar o estudo dos números, de modo a ampliar o conhecimento e domínio deste conteúdo para que o aluno: compreenda os Números Complexos e suas operações, [...]". (PARANá, 2008)

Conforme discorremos, o ensino de conteúdos que tenham uma relação estreita com o uso em tecnologias, tal como os Números Complexos, são comentados pela própria legislação vigente.

Se não bastasse o pré-requisito necessário para grande parte dos cursos de engenharia, o vasto rol de conteúdos dentro da própria matemática que podem ser trabalhados ao se ensinar Números Complexos, como geometria, trigonometria e progressões, já seria o suficiente para credenciar sua importância.

Em julho de 2010, no X Encontro Nacional de Educação Matemática realizado em Salvador – BA (SOUSA; OLIVEIRA, 1993) foram exibidos, em formato de Pôster, um relatório de uma pesquisa executada por pesquisadores da Universidade do Estado do Pará enfatizando a extrema dificuldade dos alunos em assimilar o conteúdo dos Números Complexos frente ao método utilizado. Em suas considerações finais ressaltam: "A pesquisa apontou que, de maneira geral, os alunos estão em uma situação preocupante, não demonstrando um bom resultado na resolução das questões propostas, sendo estas consideradas usualmente tidas no ensino dos complexos".

O fato é que, independentemente dos motivos, o professor de matemática da educação básica tem encontrado muitas dificuldades no ensino dos Números Complexos. Porém, é visível a sensibilidade por parte dos estudiosos do assunto em promover discussões, estudos, estratégias e metodologias que venham a contribuir com a melhoria do processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo, e que de uma maneira mais ampla, possa mostrar resultados efetivos em suas aplicações.

Duas décadas de trabalho, ministrando aulas em turmas do ensino médio de escolas públicas estaduais e particulares me inquietaram sobre as dificuldades supracitadas, que juntamente com a necessidade de mostrar aos alunos a importância do conhecimento dos Números Complexos, me inspiraram a realizar esta pesquisa.

Minha experiência no ensino dos Números Complexos fez-me vivenciar situações que me levaram a constatar que realmente algo pode e deve ser feito para desmitificar este tema. A vontade de fazer parte de uma possível mudança de mentalidade e ser membro ativo deste processo me alimenta para esta jornada.

Nesta perspectiva, a presente pesquisa teve como objetivo desenvolver um material manipulável para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos Números Complexos, principalmente no que tange à visualização geométrica, às operações de potenciação e radiciação.

Os objetivos específicos deste estudo foram:

1. realizar um estudo bibliográfico com aprofundamento matemático dos Números Complexos;
2. investigar sobre a utilização de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem da matemática;
3. realizar um levantamento bibliográfico sobre as pesquisas focadas no ensino dos Números Complexos no período de 2004 a 2014;
4. construir um material manipulável e uma sequência de atividades para seu uso no ensino e aprendizagem dos Números Complexos.

Para isso optou-se por desenvolver uma pesquisa qualitativa de cunho teórico, uma vez que nos baseamos em estudos bibliográficos para elaborar um modelo de material manipulável para o ensino dos Números Complexos.

Este material manipulável, que denominamos GeoPlexo, tem o objetivo de fazer a ponte entre as abordagens algébricas e geométricas veiculadas pelo tema. A ideia do material é tornar o aluno participante ativo na dinâmica de seu uso. A estrutura física do GeoPlexo, composta de partes fixas e móveis pretende ajudar o aluno a entender o sentido prático dos resultados encontrados e esta associação deverá facilitar a compreensão da parte analítica e operacional, como por exemplo a compreensão dos resultados obtidos a partir do cálculo das raízes n-ésimas pelo uso da segunda fórmula de Moivre.

Deste modo, esta pesquisa está organizada em 4 capítulos. A presente introdução; o capítulo 2, que trata das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem dos Números Complexos buscando situar o ensino deste conteúdo pelo resultado destas pesquisas; o capítulo 3, que traz a fundamentação teórica envolvida no tema referente aos aspectos matemáticos dos Números Complexos e o estudo dos materiais manipuláveis no ensino da matemática; o capítulo 4, que faz uma descrição detalhada do GeoPlexo e traz uma sequência de atividades para seu uso, e por fim, as considerações finais.

?? mostra ...

2 Os Números Complexos e o seu ensino: um olhar pelo viés da pesquisa

Para identificar como tem se apresentado o ensino dos Números Complexos na atualidade, optamos por olhar através da pesquisa sobre o assunto, sendo assim, escolhemos o período de 2004 a 2014 para analisar as pesquisas que tratam sobre os Números Complexos.

O recorte utilizado foi investigar as dissertações de mestrado publicadas no portal da Capes e na Biblioteca virtual do portal PROFMAT .As palavras chaves utilizadas na janela de busca do site dos Periódicos da Capes foram: Números Complexos, Ensino dos Números Complexos, Materiais Manipuláveis para o Ensino dos Números Complexos e Materiais Manipuláveis para o Ensino da Matemática.

Após o estudo destas pesquisas, organizamos os trabalhos em categorias de investigação, para no final do capítulo situarmos o ensino dos Números Complexos pelo viés da sua pesquisa. As categorias foram elencadas a partir da análise do título, resumo, palavras-chave e organizadas conforme o seu objetivo principal.

Atualmente, muitas publicações acadêmicas têm levantado inúmeras questões sobre o estudo dos Números Complexos, incluindo o próprio Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que em muito vem enriquecendo as fontes de informações e os parâmetros de análises do tema tão questionado. Gomes (2013b) cita na introdução de sua dissertação: "Apesar de contemplados nas DCEs do estado do Paraná, nem sempre nas salas de aula esses conteúdos são abordados com a devida importância"e mais adiante ressalta: "...no caso dos Complexos o tratamento se dá com quase nenhuma importância".

De fato, como participante do processo e descontente com esse cenário, mesmo sabendo das diversas dificuldades que assolam todo o professor de matemática, seja pela heterogeneidade das turmas, seja pela falta de interesse dos alunos, seja pelo desconhecimento da importância do tema e principalmente pela insegurança em ensiná-lo, não posso contribuir com o aumento do rol de justificativas, mas sim tentar encontrar alguma saída viável, estudando, sugerindo soluções, propostas e alternativas, para quem sabe chegar num denominador comum com tudo o que já está sendo feito e desmitificar, de uma vez por todas, o ensino dos Números Complexos.

De um modo geral, as pesquisas indicam que o tratamento dado aos Números Complexos, quando existe, é essencialmente algébrico e não apresenta relação com os outros conteúdos ((OLIVEIRA, 2013), (CAON, 2013b), (CUNHA, 2013), (PAES, 2013), (CHAGAS, 2013).

Apesar da grande complexidade do tema, percebe-se que as discussões convergem para duas principais situações: ou os Números Complexos não recebem sua devida importância ou são apresentados de forma essencialmente algébrica.

O fato é que, apesar da inclusão de propostas pedagógicas diversificadas no processo de ensino sempre ter sido alvo de críticas , como afirma Spada (2009), muitas tentativas vêm sendo feitas para melhorar o aprendizado dos Números Complexos.

A tabela 1 apresenta as dissertações estudadas, a universidade e o programa de origem, o ano da publicação e a categoria na qual classificamos, com base no enfoque dado ao tratamento dos Números Complexos.

Tabela 1: Categorização dos Trabalhos Analisados

Categorias	**Título**	**Ano**	**Universidade e Programa**
Uso de Tecnologias	Números Complexos e Funções de Variável Complexa no Ensino Médio - Uma Proposta Didática com Uso de Objeto de Aprendizagem	2012	Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática
	Números Complexos e Polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra	2013	Universidade Estadual de Maringá - PROFMAT
	Números Complexos e GeoGebra	2013	Universidade Estadual Paulista - PROFMAT
Aplicações	Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana	2013	Universidade Federal da Paraíba - PROFMAT
	Números Complexos e Algumas Aplicações	2013	UFF - Instituto de Matemática e Estatística - PROFMAT
	Números Complexos: Inter-Relação entre Conteúdos e Aplicações	2013	Universidade Estadual de Ponta Grossa - PROFMAT
	Números Complexos e Cônicas	2013	Universidade Federal do Amazonas - PROFMAT
	Uma metodologia baseada na história para a obtenção do conceito sobre Números Complexos	2014	Universidade Federal do Tocantins - PROFMAT
	Números Complexos: Um estudo de aplicações a trigonometria e as equações algébricas	2014	Universidade Federal do Ceará - PROFMAT
	Uma Aplicação dos Números Complexos no Ensino Médio da Educação Profissional Técnica	2014	Universidade Federal do Piauí - PROFMAT

	Números Complexos e Geometria	2014	Universidade Estadual da Paraíba - PROFMAT
	Números Complexos: Um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3º ano do Ensino Médio	2014	Universidade Federal de Juiz de Fora - PROFMAT
Modelagem	Números Complexos: Uma Proposta Didática Baseada na Modelagem Matemática e em Contextos Históricos	2013	Universidade Estadual de Londrina - PROFMAT
	Modelagem Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem dos Números Complexos: Uma Proposta Didática	2013	Universidade Estadual de Londrina - PROFMAT
Representações Semióticas	Números Complexos: Uma Proposta Geométrica	2013	Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
	Números Complexos: Alguns Aspectos Algébricos e Geométricos	2013	Universidade Federal do Maranhão - Departamento de Matemática
	Números Complexos: Uma proposta de ensino	2013	Universidade Federal Fluminense - PROFMAT
	Explorando um Tratamento Matricial para uma Introdução aos Números Complexos	2013	Universidade Federal de Viçosa - PROFMAT
	Representação Geométrica dos Números Complexos: Aplicações e Possibilidades Didáticas	2013	Universidade Federal do ABC - PROFMAT
Resolução de Problemas	Números Complexos Para o Ensino Médio: Uma Abordagem Com História, Conceitos Básicos e Aplicações	2013	Universidade Federal de Campina Grande - PROFMAT
	Aplicações dos Números Complexos em Geometria	2014	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - PROFMAT
	Números Complexos Aplicados à Geometria	2014	Universidade Federal de Juiz de Fora-PROFMAT
Análise de Livros Didáticos	Nem Complexo, nem imaginário. Ressignificando o ensino dos Números Complexos no ensino médio	2013	Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - PPROFMAT
Estudo com Professores	A Relevância do Ensino dos Números Complexos no Ensino Médio na Opinião dos Professores de Matemática	2013	Universidade Estadual do Norte Fluminense - Centro de Ciência e Tecnologia

Aplicações com Aprofundamento Matemático	Números Complexos: Ensino e Aplicações	2013	Universidade Federal do Mato Grosso do Sul - PROFMAT
	Números Complexos: Uma Abordagem Para o Ensino Médio	2013	Universidade Federal do Amazonas - PROFMAT
	Dos Números Complexos aos Quatérnions: Desenvolvimento Algébrico, Interpretação Geométrica e Aplicações	2013	Universidade Federal Tecnológica do Paraná - PROFMAT
	Transformação de Mobius no Plano Complexo	2013	Universidade Estadual Paulista-PROFMAT
	Números Complexos e Transformação de Mobius	2013	Universidade Federal de Goiás-PROFMAT
	Números Complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra	2014	Universidade Federal de Goiás-PROFMAT
	Aplicabilidade dos Números Complexos nos circuitos elétricos em corrente alternada	2014	Universidade Federal da Paraíba - PROFMAT

Fonte: Acervo próprio

2.1 Uso de Tecnologias

Entendemos por Uso de Tecnologias a integração de recursos que visem transformar o tratamento essencialmente teórico de uma aula de matemática num ambiente estimulador de outras formas de aprender. Podemos citar não apenas o uso das novas tecnologias, como o computador através de softwares e ambientes virtuais interativos, mas também o uso do próprio vídeo, vídeo-game, calculadora e o próprio celular.

Gomes (2013b), em seu trabalho, utiliza o GeoGebra para a resolução de uma sequência de atividades sobre Números Complexos. O enfoque dado pelo autor é utilizar a janela de visualização do software de forma que sempre seja habilitada a função que mostra os eixos coordenados e a malha quadriculada da tela, justamente para a visualização do aluno. Dentro deste contexto, o autor define as formas de um número complexo e realizando operações utilizando vários recursos do GeoGebra, tais como *Pontos Sobre à Malha* , *Fixar à Malha*, *Vetor definido por dois pontos*, *janela de álgebra*, *Reflexão em relação a uma reta*, dentre outros. Com certeza, seu trabalho poderá servir de modelo para a utilização pelos professores quando forem ministrar Números Complexos e quiserem utilizar este software.

A importância da vizualização geométrica também se faz presente no trabalho de Bastos (2013), que também utiliza o software Geogebra na resolução de uma lista de atividades. Apesar da semelhança com o trabalho de Gomes (2013b), que além de fundamentar o conjunto dos Números Complexos, suas formas e operações, traz o diferencial de contemplar exercícios de vários vestibulares como Fuvest, Vunesp, ITA e Ufscar. Muitos pontos são positivos em seu trabalho, porém, o mais marcante é o zelo pelos detalhes no passo-a-passo na utilização do Geogebra.

Monzon (2012), em seu trabalho, destaca o uso de um vídeo com o nome *"Dimensions: une promenade mathematique"*, que consiste de 9 capítulos com o intuito de explicar a quarta dimensão e também o uso de outra ferramenta que é o objeto de aprendizagem denominado *"Números Complexos"*, representado pela sigla NC, que consiste num recurso multimídia interativo que possuem animações gráficas geradas com o uso do software Geogebra. Este objeto é disponibilizado no site (SUL, 2013) , no link Biblioteca Virtual.

2.2 Aplicações

Compreendemos que nesta categoria se enquadram os trabalhos que utilizam os Números Complexos como uma ferramenta usada não só para o tratamento de situações em outras áreas do conhecimento, como na engenharia, física, química, dentre outras, mas também dentro da própria matemática.

O trabalho de Nobre (2013), define de maneira rigorosa os Números Complexos, apresentando algumas propriedades e aplicações em trigonometria e eletricidade, além do trato formal de todas as formas e operações. Seu trabalho também teve um momento dedicado a aplicação de questionários envolvendo professores e alunos sobre a problemática do tema, registrando algumas informações sobre o assunto, como por exemplo, verificou que 25% dos alunos que participaram da pesquisa afirmaram não saber o que são Números Complexos, lembrando que os alunos eram do 3º ano do Ensino Médio.

Caon (2013a), inicia seu trabalho com um histórico e fundamentação dos Números Complexos. Em seguida analisa 10 livros didáticos disponibilizados pelo Plano Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM) levando em consideração o contexto histórico, as formas de apresentação, as relações com outros conteúdos matemáticos e as aplicações em outras áreas do conhecimento. Realiza uma conexão entre os Números Complexos e a Geometria, mas principalmente entre outras áreas do conhecimento, como é o caso da física e engenharia elétrica.

A utilização dos Números Complexos como ferramenta para solucionar atividades envolvendo a geometria plana, em muitos casos, tem se mostrado muito eficaz e esse fato é comprovado pelo trabalho de Feitosa (2013). O autor utiliza os Números Complexos na demonstração de teoremas clássicos da Geometria, tais como o Teorema de Napolião, a Lei dos Senos e dos Cossenos, bem como alguns exemplos de aplicações na geometria analítica.

Araújo (2014b), em seu trabalho, utiliza os Números Complexos para a classificação e cálculos de elementos das cônicas, tais como a direção da diretriz, coordenadas do focos e vértice. O autor considera que uma das vantagens da utilização dos Números Complexos para trabalhar com cônicas é justamente quando os eixos não são paralelos aos eixos cartesianos.

Mesmo construindo o conceito dos Números Complexos a partir do ponto de vista histórico, valorizando todo a trajetória da evolução destes números, (LOPES, 2014) acaba em utilizar os Números Complexos para a resolução de problemas concretos, que incluem a rotação de vetores, construção de polígonos e o clássico problema do tesouro.

Araujo (2014) aplica a parte algébrica dos Números Complexos na resolução de equações algébricas quadráticas e cúbicas e também a abordagem geométrica para aplicação na trigonometria.

O trabalho de Lira (2014) apresenta uma aplicação dos Números Complexos na Educação Profissional Técnica de Nível Médio, mais precisamente em cursos Técnicos de Eletrônica, Eletromecânica e Eletrotécnica. O Autor utilizou a estrutura do Corpo dos Complexos como ferramenta para a análise de circuitos de corrente alternada, onde aplica um método para a resolução de circuitos lineares.

Apesar da semelhança com o trabalho de Feitosa (2013) na utilização dos Números Complexos como ferramenta na resolução de exercícios de geometria plana, o trabalho de Oliveira (2014) também utiliza os Números Complexos para a resolução de exercícios algébricos e tem como principal característica uma preocupação com o tratamento algébrico paralelo às resoluções dos problemas.

Simão (2014) realiza um estudo com uma turma de 53 alunos da Escola Preparatória de Cadetes do Ar (EPCAR), realizando uma rotina pedagógica de Ensino dos Números Complexos com o intuito de conhecer as motivações e desmotivações, como a própria autora comenta, do processo. Ela inicia aplicando um questionário a fim de compreender a forma como os alunos dão sentido aos Números Complexos, seguido de aulas teóricas sobre o assunto valorizando os aspectos históricos, apresentação voluntária dos alunos sobre a aplicabilidade dos Números Complexos e após a exposição de cada conteúdo, houve uma prática contextualizada com a física. Finalmente houve a aplicação de um segundo questionário. A autora utiliza as informações que foram registradas em diário de campo e as respostas dos questionários, agrupando por similaridades e também elenca a fala dos alunos.

2.3 Modelagem Matemática

Classificamos em Modelagem Matemática os trabalhos que utilizaram os Números Complexos como forma de descrever situações do mundo real, bem como aquelas que geraram uma sequência de atividades para o próprio ensino deste conteúdo.

Cunha (2013), realiza uma intervenção pedagógica numa escola onde sugere um roteiro de atividades que podem ser trabalhadas na 3ª série do ensino médio com o conteúdo dos Números Complexos. Partindo de algumas situações-problema e utilizando dos Números Complexos e o software Geogebra, produz uma sequência didática como sugestão aos professores de Matemática.

O problema clássico da *Ilha do Tesouro* é uma das situações-problema escolhido por Paes (2013), para realizar seu trabalho de modelagem. Ela resolve o mesmo problema várias vezes de forma geométrica para a partir de então, mostrar a importância dos Números Complexos em situações em que ocorre a ausência de algumas informações.

2.4 Representações Semióticas

Entendemos que os trabalhos que se enquadram nesta categoria são aqueles que utilizam e priorizam o trabalho com mais de uma representação do objeto matemático Números Complexos, seja algébrico, geométrico, matricial ou trigonométrico.

No que tange ao ensino dos Números Complexos propriamente dito, Caldeira (2013) constata que na maioria das vezes os professores optam por uma abordagem mais algébrica em detrimento do uso da geometria e realiza uma sequência didática que prioriza o uso da visualização geométrica, apesar de trabalhar de forma mais tradicional e utilizar alguns recursos tecnológicos, como o software GeoGebra, não prioriza sua utilização pelos alunos mas apenas como fonte visual de resultados.

O trabalho de Júnior (2013) apresenta um proposta que consiste em utilizar o Número Complexos como pares ordenados de números reais, definindo as operações de adição e multiplicação.

Pinheiro (2013), realiza um trabalho dando ênfase às representações geométricas dos Números Complexos, que juntamente com uma fundamentação detalhada do tema tem como objetivo fornecer um material que possa ser utilizado pelos professores de matemática. A ideia é incentivar o uso da representação geométrica sempre que possível, para possibilitar uma nova visão de aprendizado dos Números Complexos.

O tratamento matricial é muito utilizado por Gomes (2013a) em seu trabalho a fim de associá-las a pontos do plano R^2. Desta forma, consegue fazer a ligação com a visualização geométrica. Também trabalha as operações de multiplicação dos Números

Complexos e sua relação com as rotações no plano.

Dias (2013), inicialmente, levanta uma discussão sobre as representações geométricas que são utilizadas para o ensino de alguns conteúdos. Apresenta algumas possibilidades de aplicações e readequação de acordo som a situação. Defende a representação geométrica em detrimento da algébrica. Introduz o estudo dos Sistemas de Coordenadas, Vetores e Números Complexos e apresenta alguns métodos para operação de vetores utilizando geometria e trigonometria.

2.5 Resolução de Problemas

Compreendemos que nesta categoria estão os trabalhos que utilizam a resolução de problemas para propor uma forma de ensinar os Números Complexos.

O objetivo de criar um material que tivesse aplicação direta em sala de aula, foi o que levou Almeida (2013) a apresentar uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas sobre o tema Números Complexos. Sua sequência contempla problemas que envolvem história dos Números Complexos, os conceitos básicos e problemas de aplicação do referido conteúdo.

Santos (2014), utiliza a resolução de problemas para mostrar aplicações básicas dos Números Complexos na geometria euclidiana plana. Ilustra a possibilidade de trabalhar com a forma geométrica e vetorial, sempre buscando estabelecer comparações entre o algébrico e o geométrico.

O trabalho de Neves (2014b) utiliza a representação vetorial de um número complexo no plano R^2 dando ênfase a importância da operação de multiplicação e seu efeito na rotação de um vetor.

2.6 Análise de Livros Didáticos

Esta categoria trata de um trabalho que focou a sua investigação na análise de livro didático utilizados por professores.

Rocha (2013) realizou uma análise de livros didáticos do Ensino Médio utilizados em algumas escolas públicas do Estado da Bahia e constatou limitações quanto a abordagem de alguns aspectos sobre o ensino dos Números Complexos, como por exemplo a superficialidade nos históricos, conceitos e aplicações. Na avaliação do autor, uma grande parte dos livros didáticos precisam sofrer alterações que visem melhorar o ensino dos Números Complexos e também defende a ideia da permanência deste conteúdo no currículo e nos livros didáticos, enfatizando sua importância na aplicação em conteúdos dentro e fora da matemática propriamente dita.

2.7 Estudo com Professores

Compreendemos que esta categoria enquadra os trabalhos que realizaram pesquisas qualitativas ou quantitativas envolvendo professores de matemática que trabalham com Números Complexos.

Com o objetivo principal de descobrir a opinião dos Professores de Matemática sobre os ensino dos Números Complexos, sua relevância no Ensino Básico e os fatores que influenciaram nas opiniões, Chagas (2013) realizou uma pesquisa quantitativa com professores de Matemática que atuam no Ensino Médio.

Naquele ano, constatou que 48% dos professores consideraram relevante o ensino dos Números Complexos e 20% consideraram indispensável. Em contrapartida, também descobriu que 29% consideraram esse estudo pouco relevante e ainda 3% consideraram irrelevante.

Em seu trabalho, o autor também analisou o grau de formação dos Professores pesquisados e relatou algumas respostas, como por exemplo a de um professor que em seu depoimento disse que não ensinava Números Complexos por não ser conteúdo programático do ENEM.

2.8 Aplicações com Aprofundamento Matemático

Nesta categoria, elencamos os trabalhos que utilizam o conteúdo dos Números Complexos como aplicação em outras áreas do conhecimento geralmente trabalhados em nível superior ou geralmente não abordados no ensino médio.

Apesar de sua dissertação tratar da aplicação dos Números Complexos e trazer uma fundamentação acadêmica sobre o assunto, incluindo o trato dos Polinômios sobre o Corpo C, Oliveira (2013) acaba trabalhando com conteúdos mais avançados que geralmente não são contemplados no ensino médio, como por exemplo a Álgebra de Clifford, iniciando com a fundamentação vetorial e chegando até o Isomorfismo de $A(R^3)$ com quatérnions.

Araújo (2014a), em seu trabalho onde aplica os Números Complexos em problemas envolvendo a teoria dos circuitos elétricos em corrente alternada, realiza uma fundamentação aprofundada dos conteúdos necessários para o tema. Mesmo fazendo uma fundamentação tradicional dos Números Complexos e aplicando inúmeros problemas de circuitos elétricos, também trata dos limites e derivadas de funções reais de uma variável real e funções complexas de uma variável complexa.

Santos (2013) realiza uma linha do tempo fazendo uma associação entre a representação algébrica e geométrica dos Números Complexos. Como na maioria dos trabalhos, define todas operações em C e as diferentes formas de representação dos Números Complexos, incluindo definição e operação com Quatérnions. Finalmente utiliza os Números Complexos como ferramenta na resolução de outros problemas em diversos ramos da matemática e em outras áreas, tais como aerodinâmica, análise de circuitos elétricos, biomecânica, computação gráfica e jogos digitais, dentre outras.

O foco do trabalho de Filho (2013) são as transformações no plano utilizando os Números Complexos. O autor inicia definindo Complexos como pontos do plano, suas representações, propriedades operatórias, associação com algumas matrizes e significados geométricos. Apresenta algumas transformações especiais, tais como a Transformação de Mobius e as Transformações de Schirnhausen.

Muito similar ao trabalho de Filho (2013), Pereira (2013) também utiliza os Números Complexos para trabalhar a transformação de Mobius e utiliza a unidade imaginária i como operação de rotação.

Rocha (2014) realiza um trabalho voltado ao estudo do Teorema Fundamental da Álgebra. Além de uma abordagem histórica sobre as equações algébricas e do próprio Teorema Fundamental da Álgebra, o autor realiza uma formalização dos Números Complexos, principalmente evidenciando sua relação com o Teorema. Busca demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra de forma mais acessível, porém axiomática.

O trabalho de Fonseca (2013) apresenta o conjunto dos números perplexos fazendo uma analogia com os Números Complexos. O autor define as operações de adição e multiplicação no conjunto dos números perplexos e realiza um estudo do Corpo dos Números Complexos. Também define e trabalha com estruturas algébricas, como Grupos e Anéis.

2.9 Considerações Sobre o Capítulo

As investigações mostraram que a maioria das dissertações que trataram do tema Números Complexos foram voltadas para a Aplicação deste conteúdo, seja em subáreas da própria Matemática ou em outras áreas do conhecimento, como na engenharia elétrica.

Muitos dos trabalhos que também trataram da aplicação dos Números Complexos focaram no aprofundamento matemático, trabalhando com conteúdos que normalmente não são contemplados no ensino médio, como a transformação de Mobius, os Quatérnions, dentre outros.

Vários trabalhos evidenciaram a preocupação em relacionar as representações algébrica e geométrica de um Número Complexo, outros abordaram o uso de recursos tecnológicos tal como o uso do software Geogebra e o restante ficou dividido entre a resolução de problemas, modelagem matemática, análise de livros didáticos e estudo com professores.

Entretanto, independente do foco dado aos trabalhos, o que mais chamou nossa atenção, é que a grande maioria dos autores expressou que o ensino dos Números Complexos enfrenta um momento muito conturbado e que não está associada apenas à dificuldade natural do processo ensino e aprendizagem do assunto, mas também ao descaso no tratamento deste conteúdo.

Sempre lembrando que tal descaso contradiz a legislação vigente, os PCNs e as DCEs, que deixam claro sobre a importância do ensino dos Números Complexos, não apenas como aplicação em muitas áreas do conhecimento, mas também como ferramenta dentro da própria matemática, como citados e utilizados em vários trabalhos analisados neste capítulo.

Não obstante, o ponto animador e praticamente unânime entre os autores, é a vontade de contribuir para o enriquecimento dos estudos em busca da melhoria de todos os aspectos relacionados ao tema. Deste modo, podemos dizer que o Ensino dos Complexos, baseados nestes estudos, passa por um período de intensas mudanças e ao mesmo tempo que se constatam grandes dificuldades de aprendizado por parte dos alunos, se observa uma busca de alternativas para superá-las.

3 Fundamentação Teórica

3.1 Aspectos Matemáticos

3.1.1 Breve Histórico

Havia uma raiz de número negativo no meio do caminho, no meio do caminho havia uma raiz de número negativo. Certamente uma situação que sempre traz um certo receio e desconforto aos alunos do ensino médio ao se depararem com equações do tipo $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 5 = 0$ ou na aplicação da fórmula de Báskara, sempre que $\Delta = b^2 - 4ac$ é negativo.

Na verdade, o tratamento desta questão já vem de longa data. Resolver equações realmente fascinava estudiosos do passado e eventualmente enfrentavam o mesmo problema quando do cálculo de raízes de números negativos, geralmente associados a situações envolvendo a geometria. Apesar de algumas referências de trabalho com estes números, como é o caso de Heron de Alexandria que registra em sua obra $\sqrt{81 - 144}$ proveniente do cálculo do volume de uma pirâmide e, após praticamente dois séculos, Diofanto de Alexandria, que ao resolver uma equação do segundo grau se deparou com $\sqrt{1849 - 2016}$, geralmente eram descartados pelos matemáticos da época que não os consideravam como números "verdadeiros", (DANTE, 2010).

Num salto histórico, podemos lembrar que em 1545, Girolamo Cardano publicou seu livro "Ars Magna"(A Grande Arte) que apresenta vários problemas envolvendo soluções de equações do segundo e terceiro grau, geralmente associados à geometria. A obra apresenta alguns casos que culminavam em raízes de números negativos que, assim como muitos de seus antecessores, eram desconsideradas, (DANTE, 2010).

O fato de grande parte dos matemáticos tratarem tais números como "inúteis"ou "absurdos" não era satisfatório e, obviamente, inquietou a muitos estudiosos que sentiram a necessidade de estudar tais ideias. Então, foi um discípulo de Cardano, Rafael Bombelli que deu continuidade a este estudo, justamente por acreditar na existência dos números imaginários. Bombelli, apesar de não se sentir muito à vontade com as raízes quadradas de números negativos, operava livremente aplicando-lhes regras usuais da Álgebra, inclusive admitindo a existência de expressões da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, com $a \in R$ e $b \in R_+$.

Entretanto, foi apenas em 1777, que o matemático suíço Leonard Euler utilizou, pela primeira vez em um de seus trabalhos, o símbolo i para $\sqrt{-1}$, denominada mais tarde de unidade imaginária. Euler também mostrou a existência das raízes conjugadas, ou seja, que se $a + b\sqrt{-1}$ é raiz de uma equação, então $a - b\sqrt{-1}$ também será, (MILIES, 1993).

A representação geométrica dos números complexos viria a ser trabalhada pelo também suíço Jean Robert Argand e pelo norueguês Caspar Wessel, que infelizmente não tiveram o merecido reconhecimento por terem pouca representatividade na época (CAON, 2013a).

Foi então que em 1832, o alemão Carl Friedrich Gauss apresentou um importante artigo sobre a representação geométrica dos números complexos, que abriu caminho para a extensão da teoria dos números do corpo real para o corpo complexo. Foi a partir do trabalho de Gauss que o nome números complexos começou a ser usado, (MILIES, 1993).

No ano seguinte, Sir William Rowan Hamilton apresentou à Academia Irlandesa a introdução de um modelo formal para os números complexos propondo a expressão matemática onde um número complexo z pode ser escrito na forma $a + bi$ onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária(MILIES, 2000).

A representação $z = a + bi$, onde a é a parte real e b é a parte imaginária de z, representados respectivamente por $R_e(z) = a$ e $I_m(z) = b$ influencia à origem de uma extensão dos números reais, isso porque, quando b = 0 o número complexo reduz-se apenas à parte real, sugerindo consequentemente que os reais estão contidos nos complexos.

Jean Robert Argand ao trabalhar os números complexos atribuindo-lhes grandeza e direção, passou a tratá-los como vetores, conquistando maior respeito e aceitação no meio científico (MILIES, 1993).

Por sua vez, Leonard Euler viria a propor a forma trigonométrica ou polar, onde o complexo $z = a + bi$ pode equivalentemente ser representado por $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$, onde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo do segmento orientado e θ é o ângulo também chamado de argumento principal, medido em radianos, que o segmento forma com o eixo x(HEFEZ; VILLELA, 2012).

A representação trigonométrica foi utilizada pelo matemático Abraham de Moivre para trabalhar a potenciação de expoentes inteiros $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ para complexos não nulos. Essa representação é conhecida atualmente por primeira fórmula de Moivre, cuja expressão é descrita por $z^n = |z|^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$,(HEFEZ; VILLELA, 2012), que será demonstrada na secção 4 deste capítulo.

Futuramente, o próprio Moivre iria trabalhar com expoentes racionais, dando origem a expressão para encontrar as raízes n-ésimas de um número complexo, hoje também conhecida por segunda fórmula de Moivre.

3.1.2 O Número i

Admitindo a existência de um número complexo i, que $i^0 = 1$ e que $i^2 = -1$, é possível operar potências de i como se estivéssemos tratando de um número real propriamente dito, ou seja podemos resolver situações do tipo i^n, $n \in N$.

Alguns exemplos:

$i^3 = i^2.i = (-1)i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i^4.i = (i^2)^2.i = (-1)^2.i = i$

$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$

$i^7 = i^6.i = (i^2)^3.i = (-1)^3.i = -i$

$i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$

$i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$

$i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1$

$i^{20} = (i^2)^1 0 = (-1)^1 0 = 1$

3.1.2.1 Teorema

Dados $k \in N$ e $i = \sqrt{-1}$, tem-se $i^{4k} = 1$ e além disso, $i^{4k+p} = i^{4k}.i^p = 1.i^p = i^p$ com $p = 1, 2, 3$.

O que na prática significa que para todo i^n vale a igualdade $i^n = i^p$, onde p é o resto na divisão de n por 4.

Demonstração:

Na divisão de n por 4 temos: $n = 4k + p$, onde $n, k, p \in N$ com $p = 1, 2, 3$. Portanto, devemos provar que $i^n = i^p$.

Aplicando indução matemática sobre n, teremos:

I) Para $n = 4$:

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 = i^0$

Note que é conveniente escolher algum $n \geq 4$ justamente por estarmos efetuando divisões inteiras por 4 .

II) Admitindo que $i^n = i^p$ para algum $n > 4$, devemos provar que $i^{n+1} = i^{p+1}$.

Partindo de i^{n+1} temos:

$i^{n+1} = i^{4k+p+1} = i^{4k}.i^{p+1} = (i^4)^k.i^{p+1} = 1^k.i^{p+1} = 1.i^{p+1} = i^{p+1}$, que prova o resultado.

Exemplos:

1. $i^{235} = i^3 = i^2.i = -i$, note que ao dividir 235 por 4, o resto é 3, ou seja: $253 = 4.58{+}3$.

2. $i^{6421} = i$, note que ao dividir 6421 por 4, o resto é 1,ou seja: $6421 = 4.1605 + 1$.

3. $i^{735} = i^3 = i^2.i = -i$, note que ao dividir 735 por 4, o resto é 3, ou seja: $735 = 4.183{+}3$.

4. $i^{104} = i^0 = 1$, note que ao dividir 104 por 4, o resto é 0, ou seja: $104 = 4.26 + 0$.

5. $i^{20637} = i^1 = i$, note que ao dividir 20637 por 4, o resto é 1, ou seja: $20637 = 4.5159{+}1$.

6. $i^{1000} = i^0 = 1$, note que ao dividir 1000 por 4, o resto é 0, ou seja: $1000 = 4.250 + 0$.

7. $i^{602} = i^2 = -1$, note que ao dividir 602 por 4, o resto é 2, ou seja: $602 = 4.150 + 2$.

8. $i^{41} = i^3 = i^1 = i$, note que ao dividir 41 por 4, o resto é 1, ou seja: $41 = 4.10 + 1$.

9. $i^{42} = i^2 = -1$, note que ao dividir 42 por 4, o resto é 2, ou seja: $42 = 4.10 + 2$.

10. $i^{43} = i^3 = i^2.i = -i$, note que ao dividir 43 por 4, o resto é 3, ou seja: $43 = 4.10 + 3$.

11. $i^{44} = i^0 = 1$, note que ao dividir 44 por 4, o resto é 0, ou seja: $44 = 4.11 + 0$.

12. $i^{45} = i^1 = i$, note que ao dividir 45 por 4, o resto é 1, ou seja: $45 = 4.11 + 1$.

13. $i^{46} = i^2 = -1$, note que ao dividir 46 por 4, o resto é 2, ou seja: $46 = 4.11 + 2$.

3.1.3 O Conjunto dos Números Complexos como um Corpo

Segundo (CARMO et al., 2005), os números complexos constituem um conjunto, que denotaremos por $C = \{a + bi/a, b \in R\}$, onde estão definidas operações de adição e multiplicação.

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $a, b, c, d \in R$,teremos:

Adição:

1) $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

O processo será análogo para a subtração, bastando trocar z_2 pelo seu oposto $-z_2$:

2)$z_1 + (-z_2) = z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Multiplicação:

3) $z_1.z_2 = (a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

No entanto, elas tem como consequência o fato extremamente importante de que podemos identificar o conjunto dos números complexos com o plano $R^2 = \{(a, b)/a, b \in R\}$, por meio do isomorfismo $R - linear\ \varphi : R^2 \longrightarrow C$ definido por $\varphi(a, b) = a + bi$, (NETO, 1993).

Além destas operações, se verificam as seguintes propriedades:

1. Comutatividade, isto é, se $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ são números complexos, então

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{e} \quad z_1.z_2 = z_2.z_1\ .$$

2. Associatividade, isto é, se $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ e$z_3 = a_3 + b_3 i$ são números complexos, então

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{e} \quad (z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$$

3. Distributividade da multiplicação em relação à adição, ou seja, se $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ e$z_3 = a_3 + b_3 i$ são números complexos, então

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

4. Existem e são únicos os números 0 e 1 satisfazendo às condições:

$$z + 0 = z \quad \text{e} \quad \text{z.1 = z, para todo } z \text{ complexo.}$$

5. A todo complexo z corresponde a um único número complexo $-z$, e se $z \neq 0$, um único número complexo $\frac{1}{z}$ tais que

$$z + (-z) = 0 \quad \text{e} \quad z(\frac{1}{z}) = 1.$$

Além disso, todo número complexo pode ser escrito de maneira única na forma $a + bi$, onde a e b são reais (a é denotado parte real e b denotado parte imaginária do complexo $a + b.i$).

Estas propriedades (Axiomas do Corpo) juntamente com as operações de soma e multiplicação mostram que $(C, +, .)$ é um Corpo. A partir daí, tomando $i^0 = 1$ e $i^2 = -1$, podemos operar com Números Complexos similarmente ao corpo dos números reais.

Frequentemente usa-se a letra z para indicar um número complexo, cuja forma supra citada $z = a + bi$, pode ser pensada como o ponto (a, b) do plano, onde a e b são suas coordenadas ou ainda como um vetor de origem na origem do sistema de coordenadas e com extremidade em (a, b), como indica a Figura 1:

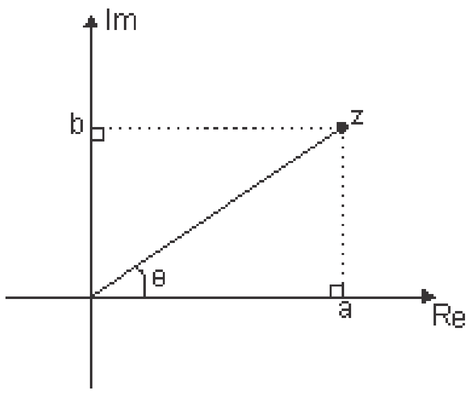

Figura 1: representação geométrica de z = a + bi

Fonte: Acervo particular

3.1.3.1 O conjugado de um complexo

Define-se como conjugado do complexo $z = a + bi$ ao número complexo $\bar{z} = a - bi$, onde podemos concluir que; $R_e(z) = R_e(\bar{z})$ e $I_m(z) = -I_m(\bar{z})$ geometricamente o conjugado de z é o simétrico de z em relação ao eixo Ox, como na Figura 2.

De fato, o conjugado de um número complexo é uma função $f : C \longrightarrow C$ tal que $z \longmapsto f(z) = \bar{z}$, verificando as seguintes propriedades(OLIVEIRA, 2009):

a) $\forall\ z, w \in C$ temos:

I) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

II) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$

III) $\overline{\overline{z}} = z$

IV) $\overline{z} = z \Longleftrightarrow z \in R$

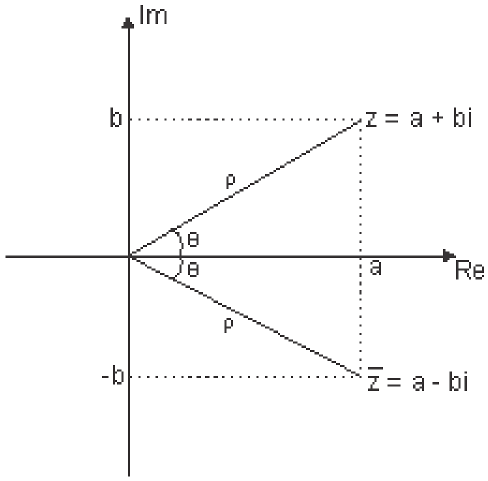

Figura 2: Conjugado de z

Fonte: Acervo particular

Demonstrações:

Definindo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c, d \in R$ temos:

$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ sendo $\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i$

Por outro lado, $\overline{z} + \overline{w} = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$, provando o resultado do item I.

$z.w = (ac - bd) + (bc + ad)i$ sendo $\overline{z.w} = (ac - bd) - (bc + ad)i$

Por outro lado, $\overline{z} = a - bi$, $\overline{w} = c - di$ e, portanto,

$\overline{z}.\overline{w} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (bc + ad)i = \overline{z.w}$, que prova o resultado do item II.

Sendo $\overline{z} = a - bi$ podemos escrever:

$\overline{z} = a - bi = a + (-bi)$ e portanto, $\overline{\overline{z}} = a - (-bi) = a + bi$, provando o item III.

Item IV:

$(\Longrightarrow)$:

Se $z = a + bi$, então $\overline{z} = a - bi$, logo:

$\overline{z} = z \Longrightarrow$

$a + bi = a - bi \Longrightarrow$

$a = a$ (sempre verdade!) e $b = -b$ e este só acontece quando $b = 0 \Longrightarrow$

$z = a + 0.i \Longrightarrow$

$z = a$, e como $a \in R$ então $z \in R$, provando a proposição.

$(\Longleftarrow)$:

Por outro lado, se $z \in R$, então $b = 0$, ou seja $z = a + bi = a + 0.i = a$ e $\overline{z} = a - bi = a - 0.i = a$, e portando $\overline{z} = z$, provando a implicação e o item IV.

3.1.3.2 O módulo de um complexo

Na representação geométrica de um número complexo no plano de Argand-Gauss, como visto na Figura 1, define-se módulo de um complexo z como a distância de seu afixo à origem. Como as linhas de projeção são ortogonais aos eixos real e imaginário, temos a formação de um triângulo retângulo, onde o módulo de z é a hipotenusa e o valor absoluto das partes real e imaginária são os catetos, como mostra a Figura 3.

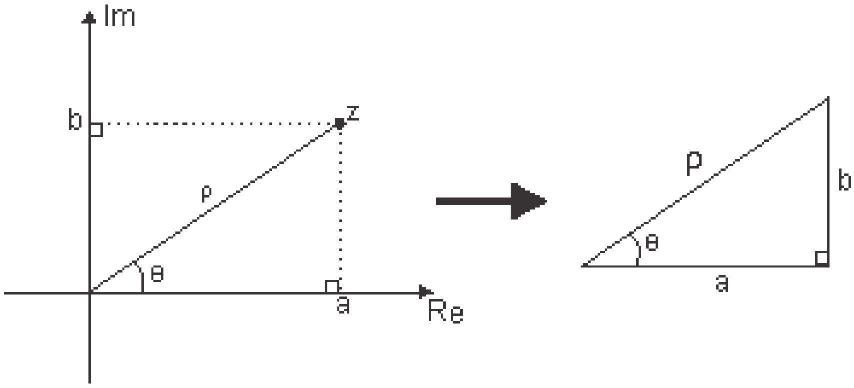

Figura 3: Representação Geométrica

Fonte: Acervo particular

Denotando o módulo de z por ρ ou $|z|$ e aplicando teorema de Pitágoras teremos:

$\rho^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow \rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{R_e(z)^2 + I_m(z)^2}$.

É interessante frisar que o módulo é uma função de C em R^+ e pode ser representado por $f : C \longrightarrow R^+$, devido à identificação $C \equiv R^2$, como espaços vetoriais em R (OLIVEIRA, 2009).

Propriedades: Para todo $\in C$, tem-se:

I) $|z| = |\overline{z}|$

II) $z.\overline{z} = |z|^2$

III) Se $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

IV) $|R_e(z)| \leq |z|$, $|I_m(z)| \leq |z|$ e $|z| \leq |R_e(z)| + |I_m(z)|$

V) Para todo z e w em $\in C$, verifica-se:

$|z + w| \leq |z| + |w|$, muito conhecida por desigualdade triangular.

Demonstração da propriedade II:

$z.\overline{(z)} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

Demonstração da propriedade V (desigualdade triangular)(ÁVILA, 2008):

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\
&= z.\overline{z} + z.\overline{w} + w.\overline{z} + w.\overline{w} \\
&= |z|^2 + |w|^2 + z.\overline{w} + \overline{z.\overline{w}} \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2.R_e(z.\overline{w}) \\
&\leq |z|^2 + 2.|z.\overline{w}| + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2.|z|.|w| + |w|^2 \\
&\leq (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

ou seja, $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$ e que extraindo a raiz resultará em:

$|z + w| \leq |z| + |w|$, que prova o resultado.

A partir da definição de z, de seu conjugado $\bar{z}$ e de seu módulo, podemos definir a divisão entre complexos, uma vez que dividir equivale à multiplicar pelo inverso, ou seja, convém que possamos conceber a existência do número $\frac{1}{z}$, $z \neq 0$.

De fato $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$.

Isso fornece a sustentação para que possamos definir o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ como sendo o produto $z_1.(\frac{1}{z_2})$.

Entretanto, apesar do respaldo desta definição, quando na resolução de problemas envolvendo divisão entre dois números complexos, pode-se resolver facilmente multiplicando ambos os membros pelo conjugado do denominador.

Por exemplo, se $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 3 + i$, teremos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{3+i} = \frac{(2+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6+3+9i-2i}{9+1} = \frac{9+7i}{10} = \frac{9}{10} - \frac{7}{10}i$$

Outros exemplos:

Sendo $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 - i$, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$$

Se $z_1 = 2i$ e $z_2 = 2 - i$, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{2-i} = \frac{(2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4i+2i^2}{4+1} = \frac{4i-2}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

Se $z_1 = 4 + 2i$ e $z_2 = 2i$, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+2i}{2i} = \frac{(4+2i)(i)}{(2i)(i)} = \frac{4i+2i^2}{2i^2} = \frac{4i-2}{-2} = 1 - 2i$$

Se $z_1 = 5 + i$ e $z_2 = 1 - i$, então:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+i}{1-i} = \frac{(5+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{5+5i+i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i$$

3.1.4 A Forma Trigonométrica(Forma Polar)

Como já citado anteriormente, um número complexo $z = a + bi$ pode ser visto como um ponto do plano cartesiano, cujas coordenadas são (a, b). Também podemos associar este mesmo complexo a um vetor cuja origem é a origem do sistema de coordenadas e cuja extremidade é o próprio ponto (a, b) e que possui uma abertura $0^0 \leq \theta < 360^0$ em relação ao eixo Ox, geralmente medida em radianos, denominada de argumento do complexo. A partir do momento em que estas informações geram a representação geométrica de um triângulo retângulo onde as coordenadas a e b representam os catetos e $|z| = \rho$ a hipotenusa, como visto anteriormente na Figura 3, em relação ao ângulo θ, podemos escrever:

$a = \rho cos\theta$ e $b = \rho sen\theta$

Substituindo em $z = a + bi$ teremos:

$z = \rho cos\theta + \rho sen\theta i$

$z = \rho(cos\theta + sen\theta i)$ ou ainda:

$z = |z|(cos\theta + isen\theta)$, onde $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ representa o Módulo do vetor $\overrightarrow{OP}$.

O trato trigonométrico, através de uma análise geométrica, permite facilitar a operação de multiplicação entre números complexos.

Por exemplo, sejam $z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$ temos:

$z_1.z_2 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1).\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$

$z_1.z_2 = \rho_1\rho_2[cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2 + i(sen\theta_1 cos\theta_2 + sen\theta_2 cos\theta_1)]$

$z_1.z_2 = \rho_1\rho_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$

Analogamente, a divisão pode ser definida por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)]$$

Demonstração:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)} = \frac{\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)(cos\theta_2 - isen\theta_2)}{\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)(cos\theta_2 - isen\theta_2)} =$$

$$= \frac{cos\theta_1 cos\theta_2 - isen\theta_2 cos\theta_1 + isen\theta_1 cos\theta_2 - isen\theta_1 sen\theta_2}{cos^2\theta_2 - i^2 sen^2\theta_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + sen(\theta_1 - \theta_2)],\ \text{provando assim o resultado.}$$

Quando houver a necessidade de resolver, por exemplo, z_1^2 podemos voltar à definição de multiplicação de dois complexos, uma vez que $z_1^2 = z_1.z_1$, e então teremos:

$$z_1^2 = z_1.z_1 = \rho_1\rho_1[cos(\theta_1 + \theta_1) + isen(\theta_1 + \theta_1)] = \rho_1^2[cos(2\theta_1) + isen(2\theta_1)]$$

Da mesma forma teremos:

$$z_1^3 = \rho_1^3[cos(3\theta_1) + isen(3\theta_1)]$$

$$z_1^4 = \rho_1^4[cos(4\theta_1) + isen(4\theta_1)]$$

e que generalizando nos leva à:

$z_1^n = \rho_1^n[cos(n\theta_1) + isen(n\theta_1)]$ e ainda:

$z^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$, com n natural, e que conFigura a relação atualmente conhecida por **primeira fórmula de Moivre**.

Quando tomamos um valor para n do tipo $\frac{1}{n}$ será equivalente a trabalharmos com raízes.

Sejam dois números complexos, z_1 e z_2.

Temos que $\sqrt[n]{z_1} = z_2 \Longrightarrow z_2^n = z_1$

Definindo $z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$ e

utilizando a 1ª fórmula de Moivre temos que $z_2^n = \rho_2^n[cos(n\theta_2) + isen(n\theta_2)]$

e como $z_2^n = z_1$ podemos escrever:

$\rho_2^n[cos(n\theta_2) + isen(n\theta_2)] = \rho_1[cos(\theta_1) + isen(\theta_1)]$

$\Longrightarrow \rho_2^n = \rho_1$ e $cos(n\theta_2) + isen(n\theta_2) = (cos\theta_1 + isen\theta_1)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} cos(n\theta_2 = cos\theta_1 \\ isen(\theta_1 = isen\theta_1 \end{cases} \Longrightarrow n\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \Longrightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 + 2k\pi}{n},$$

com $k = 0, 1, 2, 3, ..., (n-1)$, pois para $k \geq n$ os resultados começam a se repetir.

O que nos leva a escrever as raízes do número complexo z_1 como :

$(z_2)_k = \sqrt[n]{\rho_1}\left[cos(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n})\right]$, conhecida por segunda fórmula de Moivre.

Obs: No ensino médio é muito comum o uso de W ao invés de z_2, fazendo com que a fórmula fique escrita da seguinte maneira:

$W_k = \sqrt[n]{\rho_1}[cos(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n})]$, com $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

3.1.4.1 Uma propriedade importante

Na segunda fórmula de Moivre, $(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n})$ representa o formato dos n-ésimos argumentos de suas respectivas n-ésimas raízes, e como $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$, podemos escrever a sequência:

$$(\frac{\theta_1 + 2.0\pi}{n}, \frac{\theta_1 + 2.1\pi}{n}, \frac{\theta_1 + 2.2\pi}{n}, ..., \frac{\theta_1 + 2(n-2)\pi}{n}, \frac{\theta_1 + 2(n-1)\pi}{n})$$

$$(\frac{\theta_1}{n}, \frac{\theta_1 + 2\pi}{n}, \frac{\theta_1 + 4\pi}{n}, ..., \frac{\theta_1 + 2(n-2)\pi}{n}, \frac{\theta_1 + 2(n-1)\pi}{n})$$

Fazendo uma correspondência com sequências numéricas finitas:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-2}, a_{n-1})$, temos:

$$a_1 = \frac{\theta_1}{n}$$

$$a_2 = \frac{\theta_1 + 2\pi}{n}$$

$$a_3 = \frac{\theta_1 + 4\pi}{n}$$

$$a_4 = \frac{\theta_1 + 6\pi}{n}$$

$$\ldots$$

$$a_{n-1} = \frac{\theta_1 + 2.(n-2)\pi}{n}$$

$$a_n = \frac{\theta_1 + 2.(n-1)\pi}{n}$$

agora, executando as diferenças de cada termo pelo seu anterior:

$$a_2 - a_1 = \frac{\theta_1 + 2\pi}{n} - \frac{\theta_1}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{\theta_1 + 4\pi}{n} - (\frac{\theta_1 + 2\pi}{n}) = \frac{2\pi}{n}$$

$$a_4 - a_3 = \frac{\theta_1 + 6\pi}{n} - (\frac{\theta_1 + 4\pi}{n}) = \frac{2\pi}{n}$$

$$\ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{\theta_1 + 2n\pi}{n} - (\frac{\theta_1 + 2(n-1)\pi}{n}) = \frac{2\pi}{n}$$

Como esta diferença é uma constante, temos a caracterização de uma progressão aritmética. Essa diferença constante é chamada razão da progressão e geralmente representada pela letra r(LIMA et al., 2006).

Note ainda que o argumento da primeira raiz, ou seja, quando $k = 0$ sempre terá o formato $\frac{\theta}{n}$, este resultado será fundamental na utilização do material manipulável, proposta principal deste trabalho.

Uma vez constatado que os afixos das n-ésimas raízes estão em progressão aritmética e somado ao fato de que os módulos destas raízes são iguais, pois não dependem de k, a representação geométrica das n-ésimas raízes no plano complexo (plano de Argand-Gauss) é um polígono regular de n-lados(NEVES, 2014a), sempre que $n \geq 3$, pois para o caso $n = 2$, como são duas raízes, serão extremos de um diâmetro da circunferência de raio igual ao seus módulos, como mostram as Figuras 4,5 e 6 .

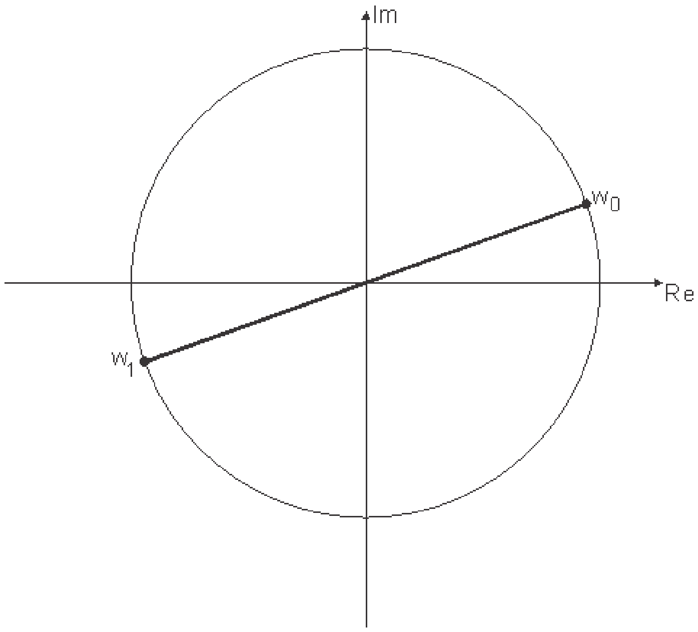

Figura 4: Raízes Quadradas

Fonte: Acervo particular

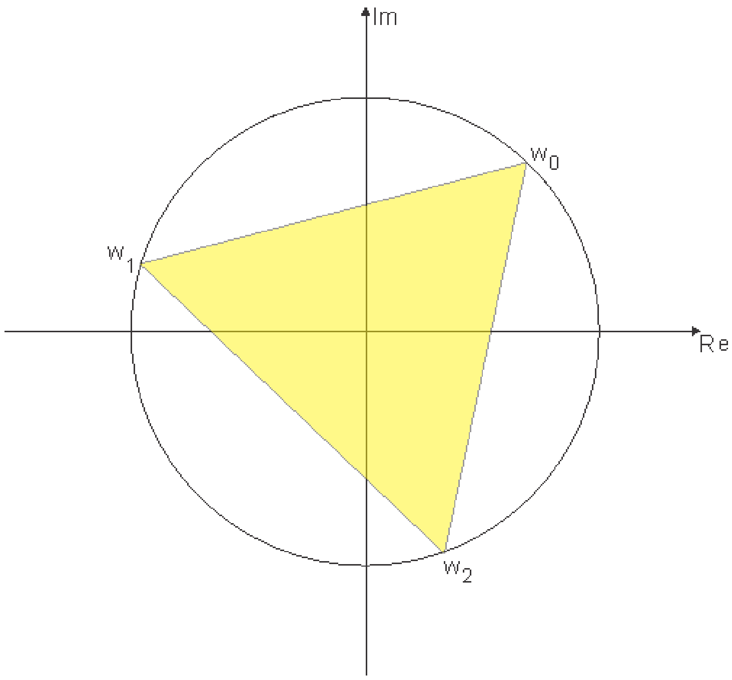

Figura 5: Raízes Cúbicas

Fonte: Acervo particular

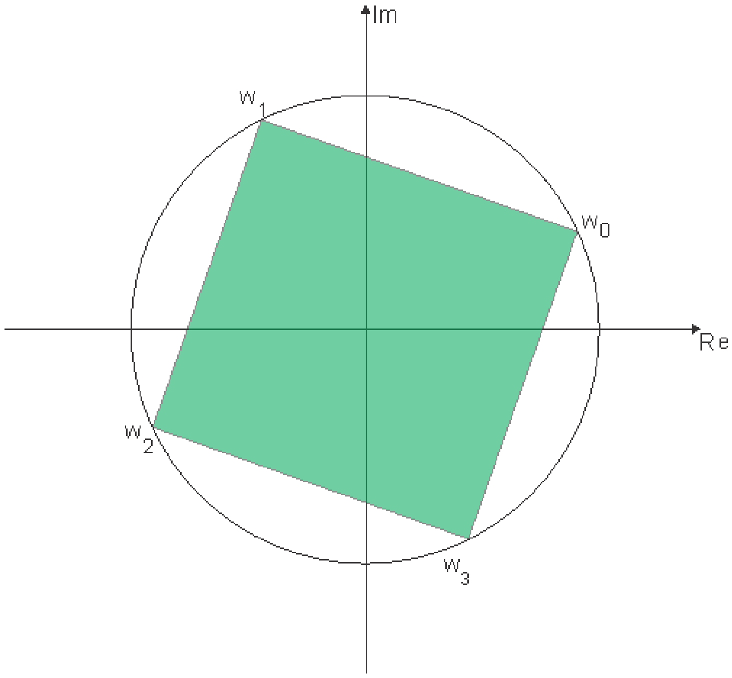

Figura 6: Raízes Quartas

Fonte: Acervo particular

3.1.5 A Forma Exponencial

De fato, devido à necessidade de ferramentas matemáticas geralmente estudadas apenas em nível superior, o rigor desta demonstração normalmente é omitida dos alunos do ensino médio que necessitam apenas de seu resultado final para a resolução de problemas relacionados a este conteúdo.

Primeiramente vamos lembrar da Série de Taylor, definida em (PROFMAT, 2014):

Seja $f : I \longrightarrow R$ uma função infinitas vezes derivável em $a \in I \subset R$. A série infinita

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

é chamada série de Taylor da função $f \in R$ no ponto a. Esta série, para $a = 0$, é chamada série de Maclaurin.

Tomando-se $f(x) = e^x$ com $a = 0$ podemos demonstrar que

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

analogamente teremos:

$$senx = \lim_{n\to\infty}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1)$$

e ainda:

$$cosx = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (2)$$

Agora, partindo de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$ e fazendo $x = \theta i$ teremos:

$e^{\theta i} = 1 + \theta i + \frac{(\theta i)^2}{2} + \frac{(\theta i)^3}{3!} + \frac{(\theta i)^4}{4!} + \frac{(\theta i)^5}{5!} + ...$, e como $i^2 = -1$:

$$e^{\theta i} = 1 + \theta i - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^3 i}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5 i}{5!} + ...$$

agrupando:

$$e^{\theta i} = (1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - ...) + (\theta i - \frac{\theta^3 i}{3!} + \frac{\Theta^5 i}{5!} - ...)$$

$$e^{\theta i} = (1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - ...) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ...)$$

e utilizando os resultados (1) e (2):

$$e^{\theta i} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$e^{\theta i} = cos\theta + isen\theta$, conhecida como Fórmula de Euler.

Com este resultado podemos escrever a seguinte equivalência:

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta) = \rho e^{\theta i}$$

ou seja:

$z = \rho e^{\theta i}$, que é a forma exponencial de um número complexo.

Este resultado será de grande utilidade na resolução de algumas problemas propostos na sequência de atividades da seção 2.2.

3.1.5.1 A potenciação na forma exponencial

Nesta seção, por ser de relevância deste trabalho, evidenciaremos a operação potenciação de um número complexo escrito na forma exponencial.

O processo de multiplicações sucessivas ou potenciação de números complexos é análogo aos números reais.

Exemplos:

Sendo $z = \rho e^{\theta i}$ podemos escrever:

$z^2 = (\rho e^{\theta i})^2 = \rho^2 (e^{\theta i})^2 = \rho^2 e^{2\theta i}$

$z^3 = (\rho e^{\theta i})^3 = \rho^3 (e^{\theta i})^3 = \rho^3 e^{3\theta i}$

$z^4 = (\rho e^{\theta i})^4 = \rho^4 (e^{\theta i})^4 = \rho^4 e^{4\theta i}$

$z^5 = (\rho e^{\theta i})^5 = \rho^5 (e^{\theta i})^5 = \rho^5 e^{5\theta i}$, que pode ser generalizado por:

$z = \rho e^{\theta i} \Longrightarrow z^n = \rho^n e^{n\theta i}$

Demonstração:

Aplicando indução matemática sobre n:

I) Para $n = 1$:

$z^1 = (\rho e^{\theta i})^1 = \rho^1 e^{1.\theta i} = \rho e^{\theta i} \Longrightarrow z = \rho e^{\theta i}$, de fato, verdadeiro.

II) Admitindo que $z^n = \rho^n e^{n\theta i}$ é verdadeiro para algum $n = k$, ou seja, que $z^k = \rho^k e^{k\theta i}$, devemos provar para $n = k + 1$.

Partindo de $z^k = \rho^k e^{k\theta i}$ e multiplicando ambos os lados da igualdade por z teremos:

$z^k.z = \rho^k e^{k\theta i}.z$

$$\Longrightarrow z^{(k+1)} = \rho^k e^{k\theta i}.z, \text{ mas como } z = \rho e^{\theta i}$$

$$\Longrightarrow z^{(k+1)} = \rho^k e^{k\theta i}.\rho e^{\theta i}$$

$$\Longrightarrow z^{(k+1)} = \rho^k \rho.e^{k\theta i} e^{\theta i}$$

$$\Longrightarrow z^{(k+1)} = \rho^{(k+1)} e^{(k\theta i+\theta i)}$$

$$\Longrightarrow z^{(k+1)} = \rho^{(k+1)} e^{(k+1)\theta i} \text{ , provando o resultado.}$$

3.1.5.2 Interpretação geométrica

A Figura 7 representa o número complexo $z = \rho e^{\theta i}$ no plano de Argand-Gauss.

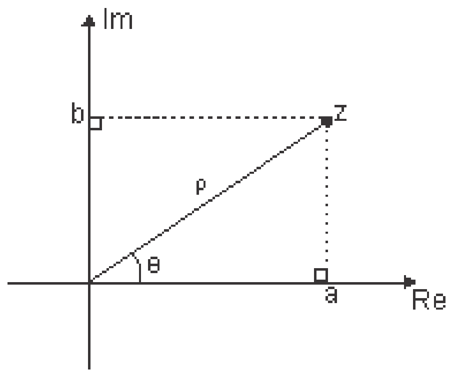

Figura 7: Representação Geométrica

Fonte: Acervo particular

Neste caso é importante lembrar da equivalência $z = \rho e^{\theta i} = a + bi$.

Quando operamos z^n que implica em $z^n = \rho^n e^{n\theta i}$ teremos como resultado geométrico a ponderação no módulo do complexo bem como uma variação no valor do argumento, como mostra a Figura 8.

Dependendo dos valores de θ e n certamente irão ocorrer variações nas representação geométrica quanto aos quadrantes no plano de Argand-Gauss, como, por exemplo, mostra a Figura 9.

É interessante salientar, que tanto o exemplo da Figura 8, quanto o exemplo da Figura 9, são equivalentes à forma algébrica $z' = a' + b'i$, onde $z' = z^n$.

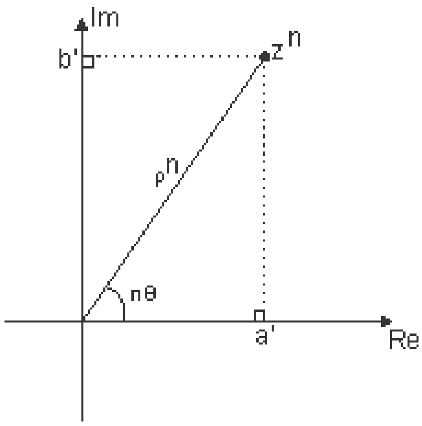

Figura 8: Potência de z

Fonte: Acervo particular

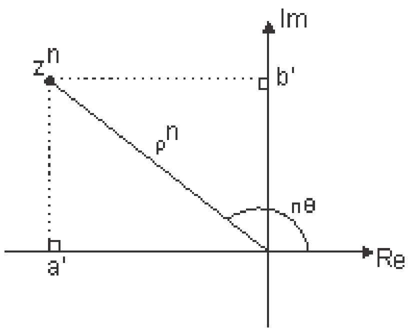

Figura 9: Potência de z com variação de n

Fonte: Acervo particular

3.1.6 Semelhança de triângulos

O conhecimento deste assunto é um pré-requisito para a utilização do GeoPlexo, bem como no respaldo matemático das fundamentação nas explicações do tema.

De acordo com Lima (2006), dois triângulos semelhantes têm ângulos iguais e lados homólogos proporcionais. Reciprocamente, se dois triângulos cumprem uma das três condições seguintes então eles são semelhantes:

a) Têm lados proporcionais;

b) Têm ângulos iguais;

c) Têm um ângulo igual compreendido entre lados proporcionais.

A demonstração deste teorema está na página 51 do livro supra citado.

Interessante ressaltar que Lima (2006) usa uma linguagem um tanto informal quando utiliza o termo "ângulos iguais"como referência aos ângulos congruentes.

De forma mais simplificada, (GIOVANNI; BONJORNO, 2005) afirma que dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos respectivamente congruentes ou os lados correspondentes proporcionais. Definição muito utilizada por autores de material didático para o ensino médio.

O fato é que, quando dois triângulos possuem os ângulos congruentes, são semelhantes. E se são semelhantes, possuem lados proporcionais, como afirma (LIMA, 2006).

Observe a Figura:

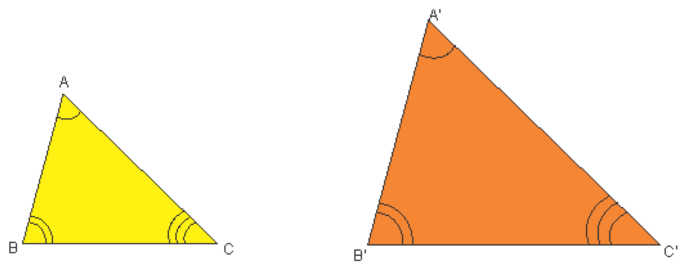

Figura 10: Triângulos semelhantes

Fonte: Acervo particular

Se $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$, $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ e $\widehat{C} \cong \widehat{C}'$, então $\Delta(ABC) \sim \Delta(A'B'C')$. Logo, pela definição, os lados são proporcionais. Então podemos escrever:

$\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = k$, onde k é denominada constante de proporcionalidade.

Esta constante será utilizada como fator de ponderação na resolução das atividades .

Vamos tomar duas retas, r e s, que se cruzam sob um ângulo diferente de 90^0:

Em seguinda, marcamos dois pontos distintos, B e C, sobre a reta r e traçamos suas projeções ortogonais em relação à reta s.

Desta forma teremos dois triângulos, $\Delta(ABD)$ e $\Delta(ACE)$, Figura 13.

Como são triângulos retângulos, a soma dos dois ângulos agudos totaliza 90^0 e como, neste caso, o ângulo $\widehat{A}$ é comum, $\widehat{B} \cong \widehat{C}$. Logo, todos os ângulos correspondentes são congruentes e isso nos leva a garantir que os triângulos são semelhantes, Figura 14.

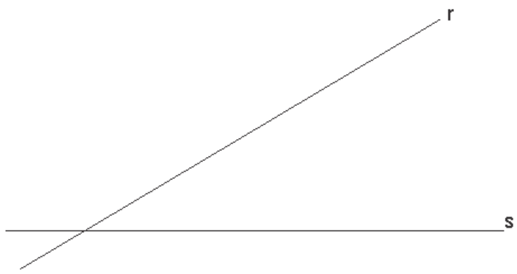

Figura 11: Retas concorrentes

Fonte: Acervo particular

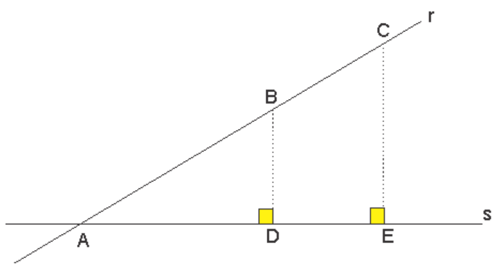

Figura 12: Projeção ortogonal

Fonte: Acervo particular

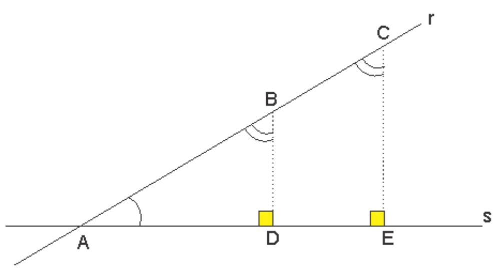

Figura 13: Visualização dos triângulos

Fonte: Acervo particular

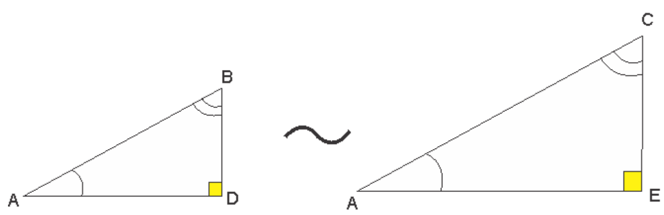

Figura 14: Triângulos semelhantes

Fonte: Acervo particular

E sendo semelhantes, possuem os lados correspondentes proporcionais. Saber isso, é entender que se partirmos de um triângulo qualquer, se forem mantidos os valores de seus ângulos, ao variar um de seus lados, os outros sofrerão a mesma variação. Por exemplo, se dobrarmos um lado de um triângulo sem alterar seus ângulos, então os outros dois lados também dobrarão de valor. A reciproca é verdadeira, se reduzirmos a medida de um dos lados à metade, os outros lados também sofrerão redução proporcional, como mostra a Figura 15 .

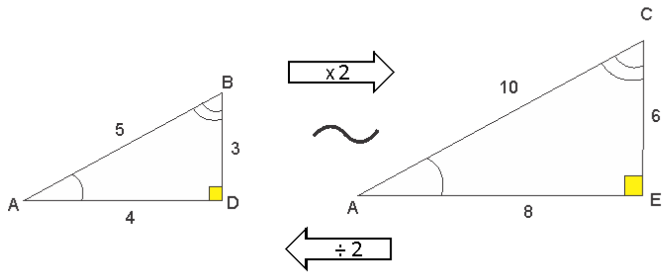

Figura 15: Triângulos semelhantes

Fonte: Acervo particular

De maneira geral, sendo um número real $k > 0$ o coeficiente de proporcionalidade entre dois triângulos semelhantes, a recíproca é verdadeira bastando tomar $\frac{1}{k}$. Ou seja, quando multiplicamos os lados de um triângulo por um valor $k > 0$, para fazer a volta basta dividir pelo mesmo $k > 0$. Essa ideia se estende, obviamente, para triângulos retângulos semelhantes, como pode ser visto na Figura 16.

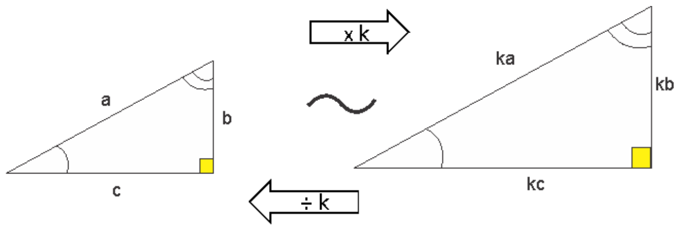

Figura 16: Triângulos retângulos semelhantes

Fonte: Acervo particular

A semelhança de triângulos também será imprescindível para a resolução de alguns exercícios da sequência de atividades apresentada na seção 2.2 através do uso do GeoPlexo.

Notem que, se quisermos aumentar um triângulo, bastaria tomar um $k > 1$. Na Figura 15, por exemplo, o triângulo maior é o dobro do menor, justamente por $k = 2$. Se quisermos voltar ao triângulo original bastaria tomar $k = \frac{1}{2}$, que significa dividir a medida dos lados do triângulo maior por 2.

3.2 Materiais manipuláveis como recursos didáticos para o ensino da matemática

Em geral, todo professor busca que seus alunos possam efetivamente aprender os conteúdos propostos e, como não poderia ser diferente, os professores de matemática, a cada dia, participam mais de eventos pertencentes à área de educação matemática, com o intuito de tomar conhecimento das novas práticas, tendências e metodologias de seu ensino, buscando formas para facilitar o processo de ensino e aprendizagem e desfazer o grande tabu criado a respeito desta disciplina.

Por conta desta necessidade é que opta-se nesse trabalho pela criação de um material manipulável para o ensino dos Números Complexos.

De fato, o processo de ensinar matemática é muito eclético. Alguns professores possuem uma maneira peculiar de transmitir e compartilhar o conhecimento apenas com a verbalização e com o uso da lousa. Outros, fazem do recurso virtual um grande aliado no seu dia-a-dia de trabalho. Há aqueles que buscam nos materiais manipuláveis a sustentação de seu método e finalmente àqueles que fazem uso de todos esses recursos, de acordo com cada situação específica.

Quanto aos materiais manipuláveis, é comum perceber que a grande expectativa de muitos professores está em justificar seu uso meramente como fator de motivação, não percebendo que por trás de cada material há uma proposta pedagógica e que, de forma alguma, os professores devem subjugar suas próprias metodologias de ensino a qualquer deles, como expressa Lorenzato (2006). Isso geralmente acontece quando o uso do material manipulável não relaciona a experiência concreta com a matemática formal, conFigurando então, um exemplo negativo. Em outras palavras, além de possuir uma ferramenta, é necessário dominar sua utilização.

> Um uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática. O problema não está na utilização desses materiais, mas na maneira como utilizá-los.(NACARATO, 2005)

Para nortear nossa discussão precisamos primeiramente definir materiais manipuláveis. Uma das definições mais conhecidas, citada em (SOUSA; OLIVEIRA, 1993), é a de Reys, que define materiais manipuláveis como *"objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que tem aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia"*.

De acordo com Lorenzato (2006), quando um material apresenta aplicabilidade para modelar um grande número de ideias matemáticas, ele pode ser considerado um bom material didático. Este autor também cita e elenca alguns critérios definidos por Reys[1], usados como parâmetros para selecionar bons materiais manipuláveis:

> 1. os materiais devem proporcionar uma verdadeira personificação do conceito matemático ou das ideias a serem exploradas;

[1] R. Reys (1971), "Considerations for teaching using manipulative materials", Arithmetic Teacher.

> 2. os materiais devem representar claramente o conceito matemático;
> 3. os materiais devem ser motivadores;
> 4. os materiais, se possível, devem ser apropriados para usar quer em diferentes anos de escolaridade, quer em diferentes níveis de formação de conceitos;
> 5. os materiais devem proporcionar uma base para a abstração;
> 6. os materiais devem proporcionar manipulação individual.

Inegavelmente, tais critérios reforçam a preocupação com o uso destes materiais ao mesmo tempo que fornecem um conjunto de variáveis a serem observadas pelo professor, que dependendo de suas intenções, poderão desempenhar inúmeras funções em sala de aula, sejam para apresentar um assunto, para a simples motivação, memorização de resultados ou para facilitar a redescoberta pelos alunos.

O planejamento das atividades também é de fundamental importância no êxito da utilização do material. As ações do professor precisam da dosagem certa a fim de impedir que a aula torne-se simplesmente outra aula expositiva e mecânica não permitindo a verdadeira construção do conhecimento.

É evidente, portanto, que o material manipulável por si só não irá ensinar matemática. É necessário que o professor seja um mediador neste processo e para tanto, precisa fazer um estudo aprofundado sobre o material que esteja pretendendo usar. Deve buscar conhecer, não apenas sobre seu uso, mas também sobre sua construção e criação. Assim, poderá perceber todos os assuntos que podem ser explorados pelo material, adquirindo maior segurança e obviamente proporcionando maior proveito a seus alunos, como comentado por (SOUSA; OLIVEIRA, 1993).

Não obstante, o uso do material manipulável deve priorizar o verdadeiro aprendizado. Não deve jamais ser usado como subterfúgio de apenas facilitar o trabalho em sala de aula sem que haja uma abordagem realmente efetiva com uma relação estreita com o conteúdo formal e analítico. Cabe a cada professor procurar a melhor maneira de utilizá-lo, seja como ponto de partida para um conceito, ou como explicação para tal. O aluno precisa ser parte ativa neste processo, maximizando suas potencialidades, melhorando assim a possibilidade de seu aprendizado.

> Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um "aprender"mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um "aprender"que se esvazia em brincadeiras. Mas um "aprender"significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.
>
> (FIORENTINI; MIORIM, 1993)

Deste forma, não só poderá facilitar o trabalho em sala de aula, como poderá cumprir a sua função principal que é a de ensinar matemática, como reforça Lorenzato (2006). Sua escolha e correta utilização serão os grandes aliados do professor.

Acreditando nisso, desenvolvemos um material manipulável ao qual denominamos GeoPlexo, que tem como objetivo auxiliar no trabalho com os Números Complexos promovendo uma associação direta com a geometria e a manipulação propriamente dita.

O GeoPlexo, que será descrito e utilizado no capítulo 4, conFigura-se como uma base de trabalho capaz de associar os Números Complexos com sua representação geométrica de forma dinâmica, possibilitando a realização de operações, principalmente a potenciação e a radiciação, dando um sentido concreto aos resultados encontrados pelas primeira e segunda fórmula de Moivre.

Apostamos que o uso de um material manipulável possa ser uma possibilidade para ensinar o conteúdo dos Números Complexos por promover a visualização e por tentar cumprir os critérios definidos por Reys.

4 GeoPlexo: material manipulável como recurso didático para o ensino dos Números Complexos

A experiência de duas décadas em sala de aula, a convivência e troca de informações com outros professores tanto de ensino médio quanto de ensino superior e pela própria abordagem realizada dentro do programa PROFMAT, fez-nos perceber a grande dificuldade que os alunos encontram, não apenas em compreender o conteúdo Números Complexos, mas também na dificuldade da manutenção deste conhecimento.

Numa época em que o desenvolvimento tecnológico atinge níveis surpreendentes e os recursos virtuais parecem ser a menina dos olhos no direcionamento dos rumos da educação, parece que o uso de materiais manipuláveis está na contra mão desta tendência.

De fato, o recurso computacional é importante no processo ensino e aprendizagem, seja pela precisão nas informações ou pela própria dinâmica da animação gráfica, dentre outras virtudes. Portanto, a criação do GeoPlexo não tem por objetivo substituir e/ou desprezar outras ferramentas, muito pelo contrário, tem o objetivo de agregar esforços a todo o aparato já existente, incluindo tais recursos, a fim de facilitar a visualização das ideias e tornando palpável as informações, bem como o seu tratamento.

Após tantas aulas ministradas sobre o assunto e sempre explorando formas de exposição, seja através das aulas expositivas tradicionais, expositivas dialogadas, usando apenas o quadro negro, retroprojetor ou softwares tais como PowerPoint e GeoGebra, surgiu a ideia de transformar tudo isso em algo que o aluno pudesse realmente "pegar na mão", manipular.

O espírito da "bricolagem" facilitou a concretização desta ideia. Foi confeccionado um primeiro protótipo, totalmente caseiro, incluindo as peças móveis. A partir daí, percebendo-se a necessidade de melhoria da precisão, o projeto partiu para outra etapa, onde as peças em acrílico foram recortadas a laser, formando o kit que hoje denominamos de GeoPlexo.

Este capítulo será organizado em duas seções principais: uma destinada à descrição dos itens que compõem o GeoPlexo e a outra, destinada à utilização do material com sugestões de atividades a serem desenvolvidas com alunos e/ou professores.

4.1 Descrição do Material Manipulativo - GeoPlexo

O material manipulável, denominado GeoPlexo é composto por 10 partes, envolvendo peças fixas e peças móveis, que serão elencadas e descritas a seguir.

4.1.1 PEÇAS FIXAS

1. Base

Consiste de uma placa de MDF de espessura variando entre 10 mm a 20 mm, preferencialmente lisa e de coloração mais clara possível a fim de facilitar a visualização das marcações, oriunda de retalhos descartados de indústrias moveleiras da própria cidade de Pato Branco – Pr. O aproveitamento desta matéria prima, além de baratear o material manipulável, destaca a importância da reciclagem como forma de inserção na abordagem da sustentabilidade como tema transversal.

Seu formato é quadrangular com dimensões de 30 cm, onde serão traçados os eixos horizontal e vertical, com divisões em milímetros, que representarão o plano de Argand-Gauss e servirão para a marcação das projeções ortogonais dos Números Complexos. O centro desta base quadrada coincide com o centro do plano complexo, onde será fixada uma peça de madeira com 6 mm, conhecida por cavilha, que irá servir de eixo de fixação para as peças móveis, como mostra a Figura 17.

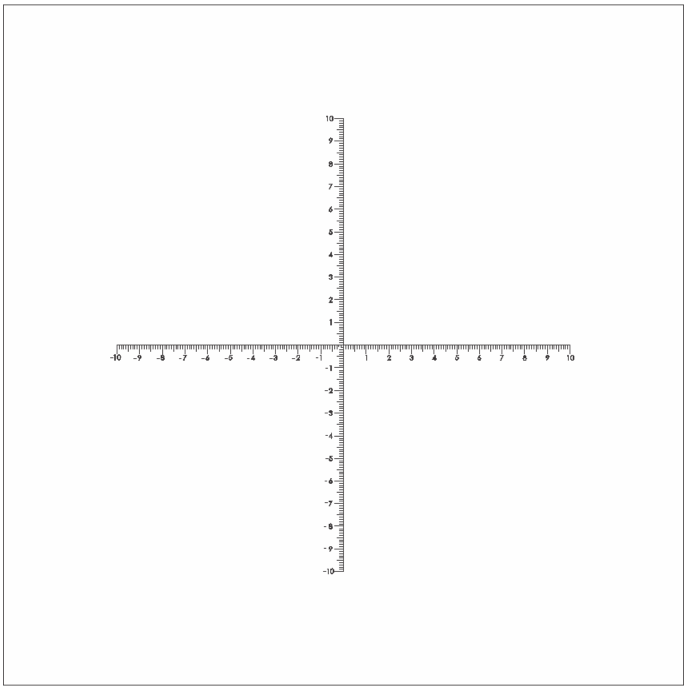

Figura 17: Base do GeoPlexo

Fonte: Acervo particular

2. Base Transferidor

É uma peça quadrada confeccionada em acrílico transparente incolor (ou colorido) de 3 mm de espessura, cujas dimensões periféricas equivalem às da base em MDF. Ela é vasada na parte interna, com um furo circular de raio igual a 10 cm, e sua parte interior possui marcações correspondentes a 360^0 destinadas às medições dos ângulos. Em seus quatro cantos foram feitos furos de 6 mm para fixação.

Devemos ressaltar que os recortes e marcações foram feitos a laser numa empresa especializada que requisitou o projeto em arquivo de um software específico, o CorelDraw X7. (Figura 18).

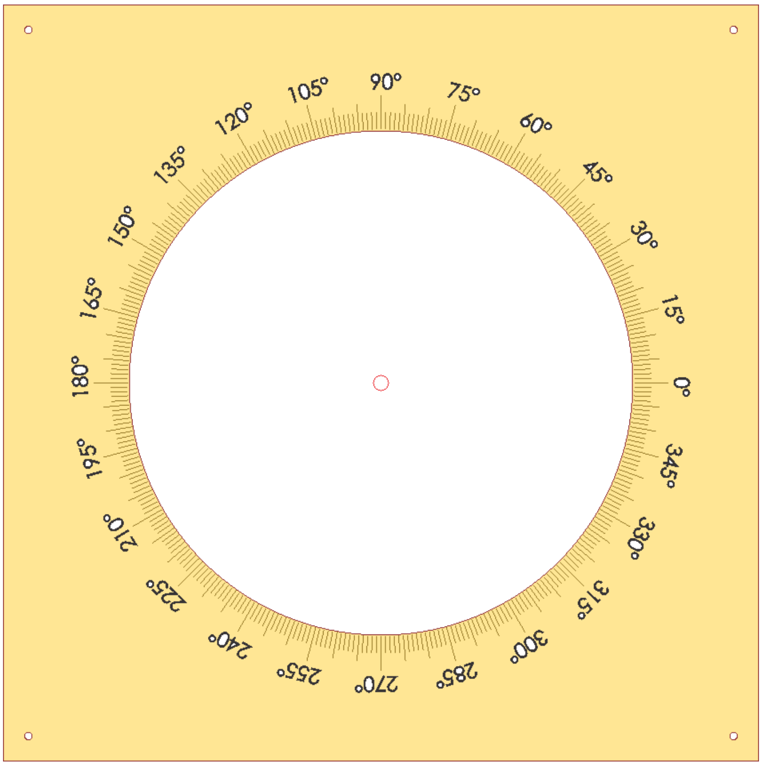

Figura 18: Base Transferidor

Fonte: Acervo particular

Esta peça é sobreposta e fixada sobre a base de MDF, com parafusos comuns para madeira que também são encontrados no comércio local, como mostra a Figura 19.

3. Moldura

Peça em acrílico, podendo ser transparente ou fosco, que será fixada sobre a Base Transferidor e tem como objetivo ser o guia para a régua. Esta peça não necessita de espessura específica, entretanto optamos por manter um padrão de 3 mm.

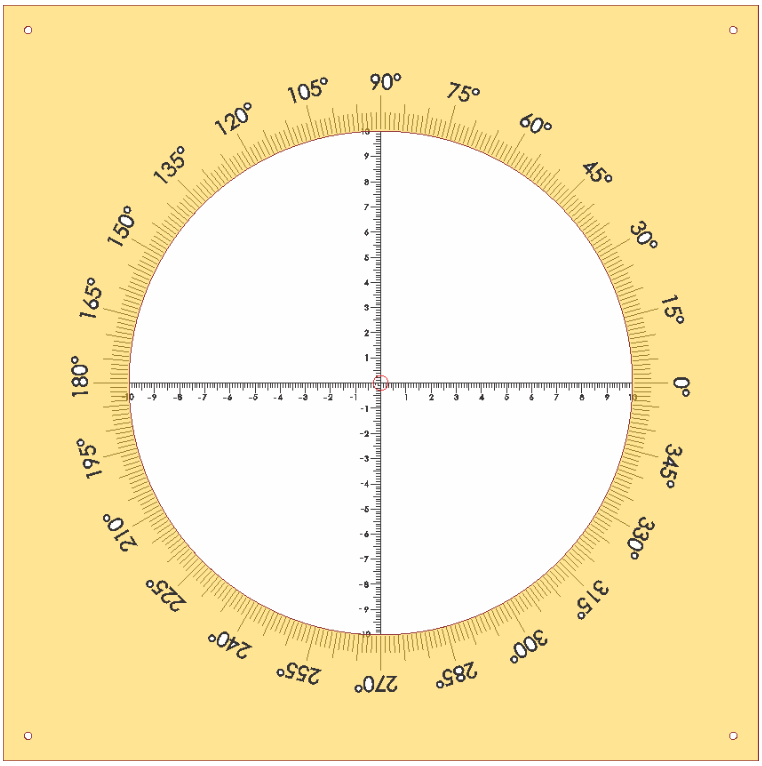

Figura 19: Conjunto Base - Base Transferidor

Fonte: Acervo particular

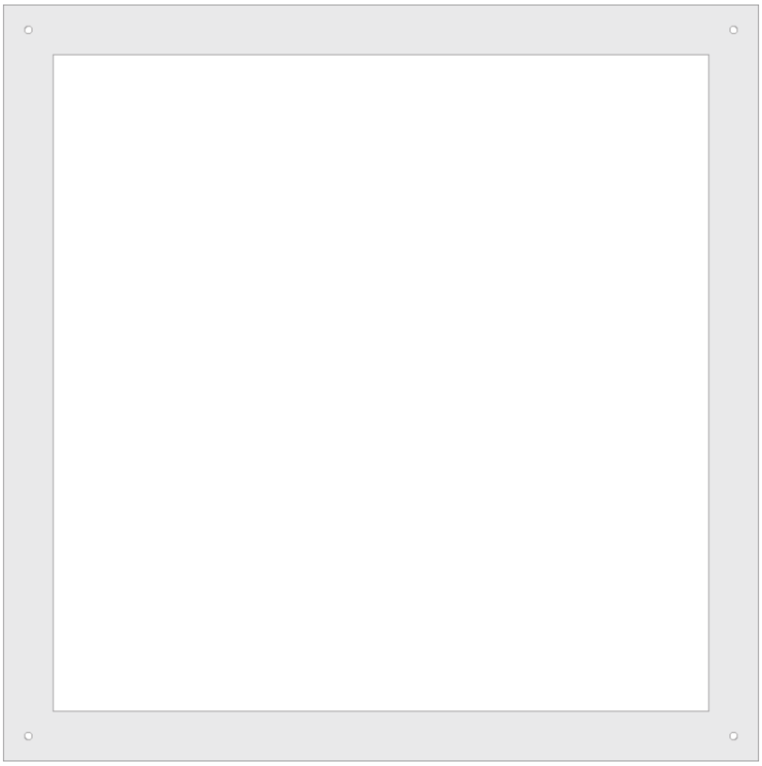

Figura 20: Moldura

Fonte: Acervo particular

A Figura 21 mostra o conjunto com as três partes: Base, Base Transferidor e moldura.

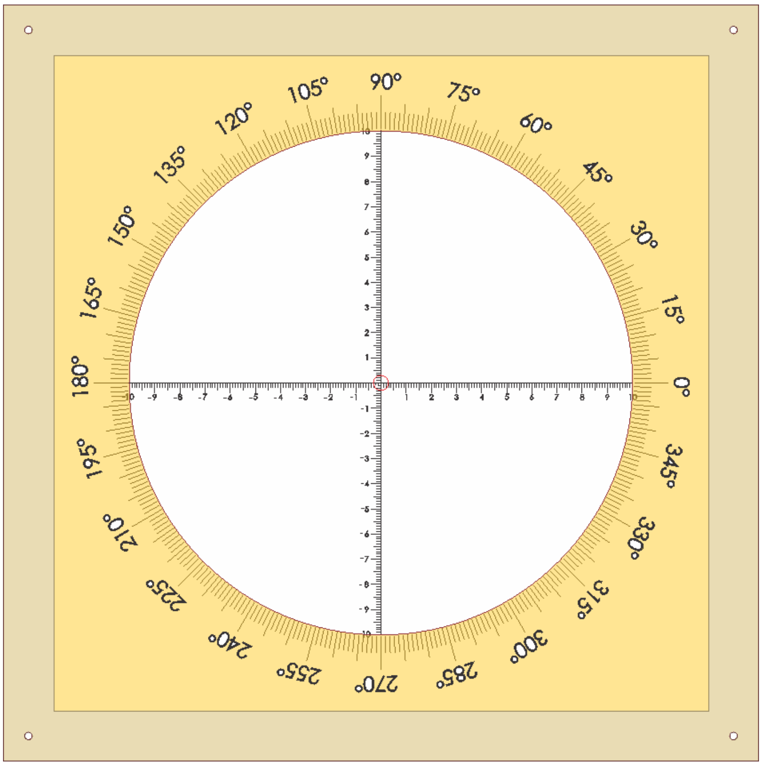

Figura 21: Conjunto: moldura - base transferidor - base

Fonte: Acervo particular

A Figura 22 mostra o conjunto completo das peças fixas que formam a base de trabalho do GeoPlexo.

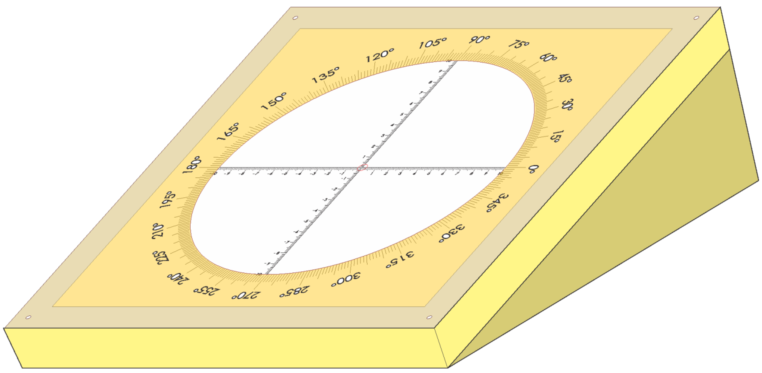

Figura 22: Base de trabalho completa

Fonte: Acervo particular

4.1.2 PEÇAS MÓVEIS

Faz-se necessário informar que todas as peças móveis foram confeccionadas em acrílico transparente de 3 mm, justamente a espessura da Base-Transferidor (podendo ser incolor ou colorido). Estes fatos são importantes para facilitar a translação da régua, que terá como guia a moldura, e visualização das projeções, implicando diretamente na precisão das leituras. Com exceção da régua, todas as peças móveis também possuem um furo de 6 mm em seus centros, onde serão encaixados na cavilha de madeira, fixada no centro da base em MDF.

1. Régua

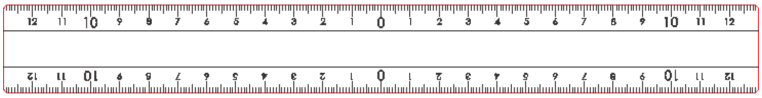

Figura 23: Régua

Fonte: Acervo particular

Em formato retangular com vértices arredondados medindo 26 cm, milimetrada a partir do meio até a extremidade de 0 a 130 mm. Será encaixada sobre a Base-Transferidor, limitada e guiada pela moldura sempre num ângulo de 90^0. Tem por objetivo fornecer o valor das projeções ortogonais dos Números Complexos e deverá ser utilizada tanto na horizontal quanto na vertical, como mostram as Figuras 24 e 25.

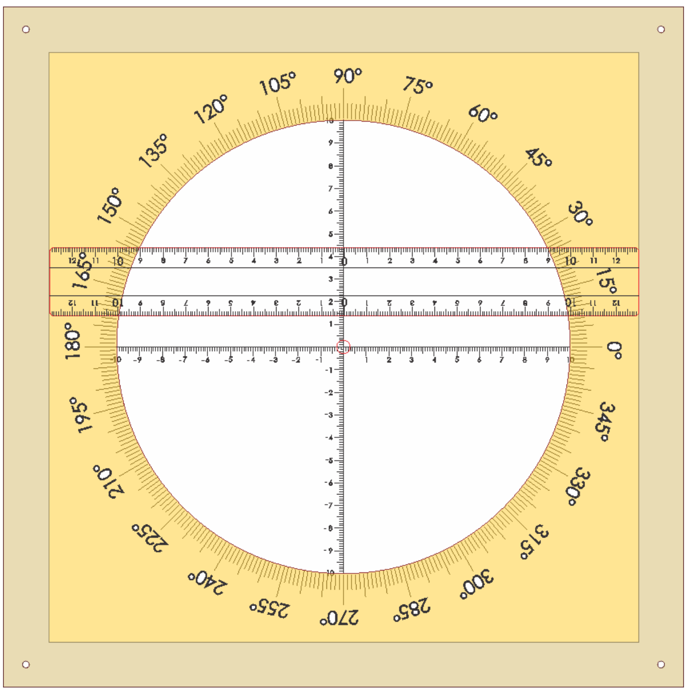

Figura 24: Régua na horizontal

Fonte: Acervo particular

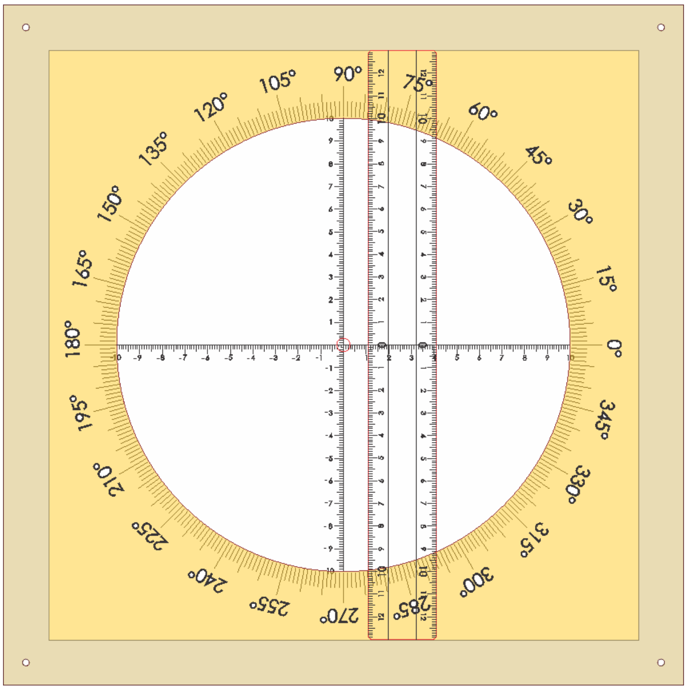

Figura 25: Régua na vertical

Fonte: Acervo particular

2. Haste

Trata-se de uma peça no formato de um losango, neste caso foram confeccionadas duas com tonalidades diferentes, com uma régua de 10 cm, localizada sobre a diagonal maior do losango iniciando no centro e terminando no vértice mais distante. Será utilizada para a marcação dos módulos(raios) dos Números Complexos.

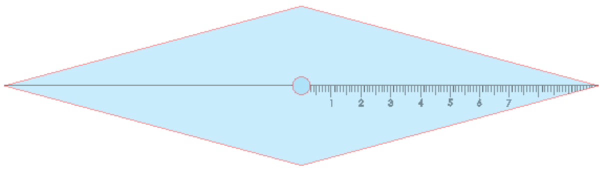

Figura 26: Haste

Fonte: Acervo particular

A função desta peça, além da visualização geométrica de inúmeras situações, também é de encontrar as raízes quadradas de um número complexo.

Podemos compreender melhor visualizando a Figura 27.

Note que neste caso, está sendo feita a leitura da coordenada real(parte real) de uma das raízes quadradas de um complexo.

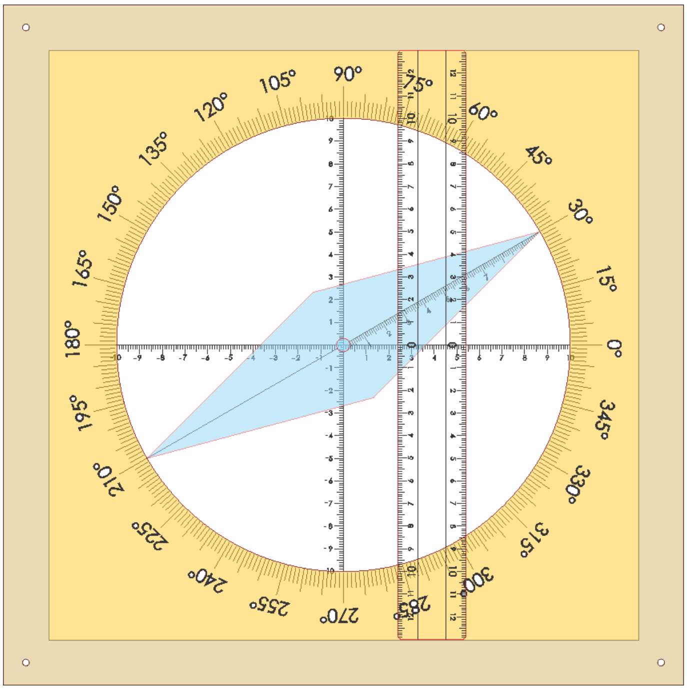

Figura 27: Haste e Régua

Fonte: Acervo particular

3. Triângulo

Triângulo equilátero com raio de circunferência circunscrita igual a 10 cm que determina um lado de 17,3 cm aproximadamente. Estas medidas fazem com que a peça se encaixe perfeitamente sobre a base em MDF ficando limitada pela circunferência da Sobre-Base em acrílico.

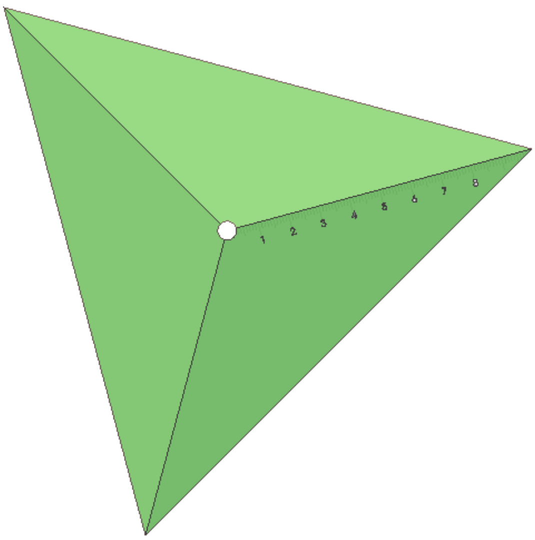

Figura 28: Triângulo

Fonte: Acervo particular

Quando encaixamos a peça na base, podemos fazer a leitura das raízes cúbicas de um determinado número complexo, como mostra a Figura 29.

Neste caso, por exemplo, o GeoPlexo está fornecendo a coordenada imaginária(parte imaginária) de uma das raízes cúbicas de um número complexo.

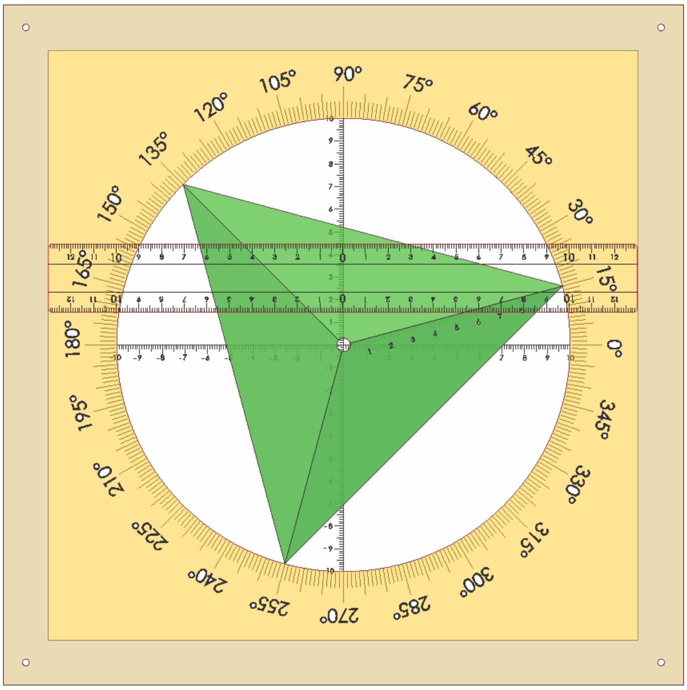

Figura 29: Triângulo e Régua

Fonte: Acervo particular

4. Quadrado

Quadrado com diagonal medindo 20 cm, que corresponde ao diâmetro do círculo vazado da Base-Transferidor(Figura 30).

Esta peça será usada para o obtenção das raízes quartas de um complexo, como pode ser visto na Figura seguinte que mostra a extração da coordenada real(parte real) de uma das quatro raízes(31).

5. Pentágono

Pentágono regular, com raio da circunferência circunscrita, também medindo 10 cm e terá como função a obtenção das raízes quintas de um complexo, que pode ser visualizado pela Figura 32.

Note que neste caso o GeoPlexo está fornecendo a coordenada real(Parte real) de um número complexo.

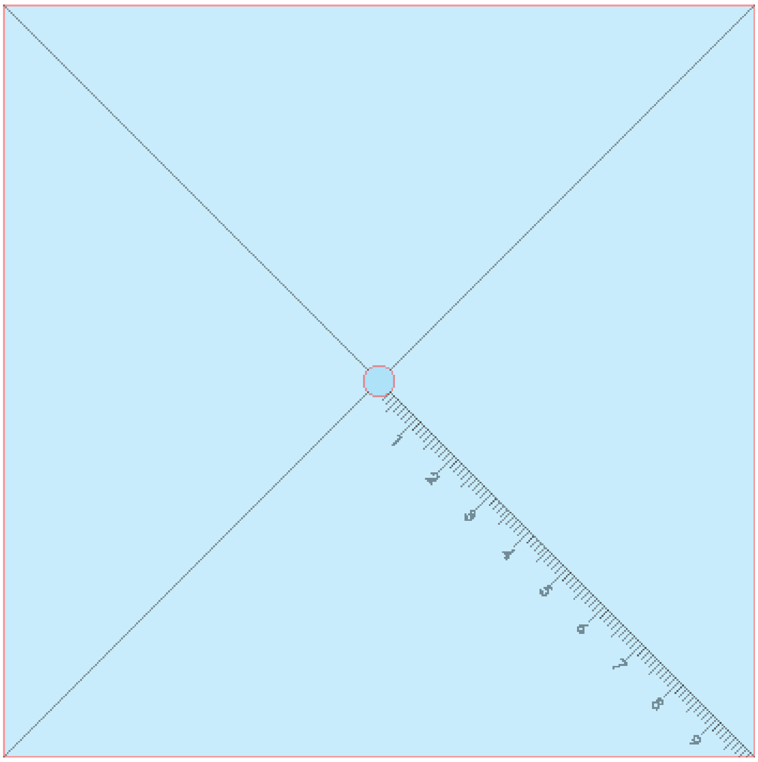

Figura 30: Quadrado

Fonte: Acervo particular

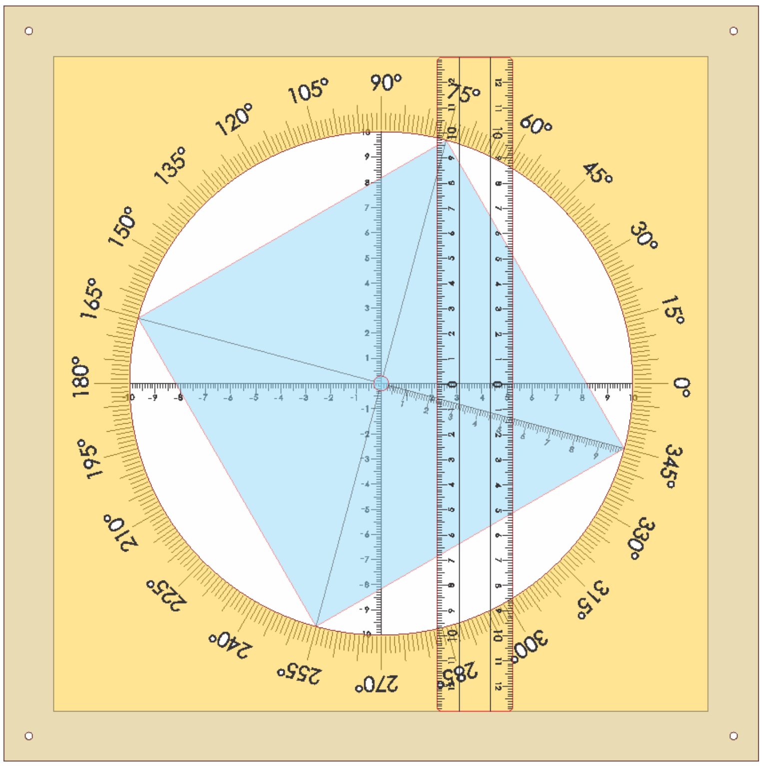

Figura 31: Quadrado e Régua

Fonte: Acervo particular

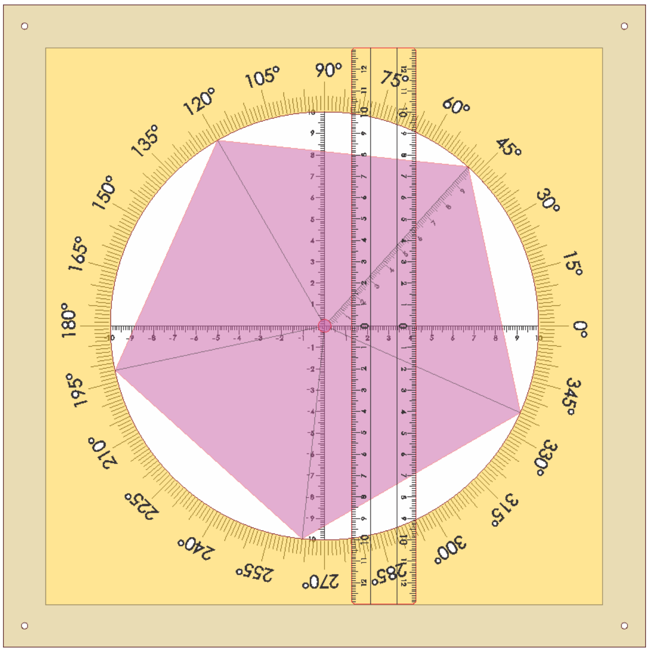

Figura 32: Pentágono

Fonte: Acervo particular

6. Hexágono

Hexágono regular, com as mesmas características dos polígonos regulares anteriores, ou seja, também possui circunferência circunscrita de diâmetro 20 cm e tem como finalidade encontrar as raízes sextas de um número complexo, Figura 33.

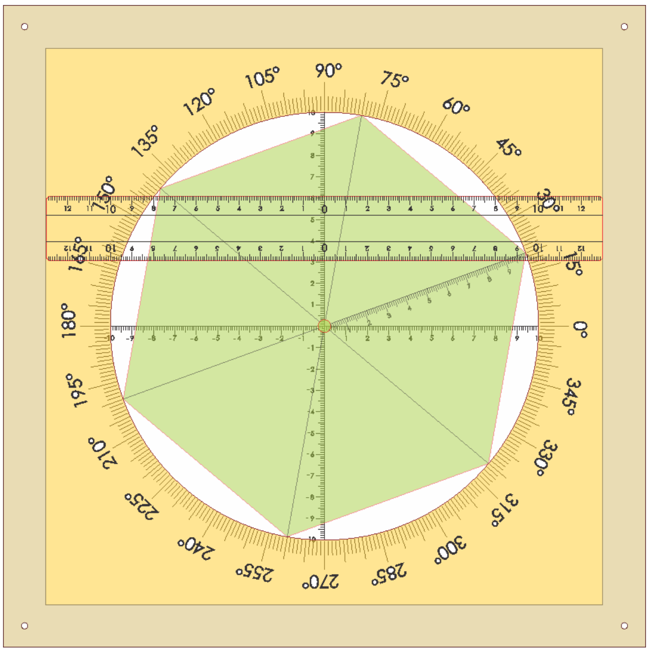

Figura 33: Hexágono

Fonte: Acervo particular

4.1.3 O GeoPlexo

Este já é o resultado de ajustes e acertos que foram baseados na construção do "GeoPlexo geração I"que teve todas as peças construídas de forma totalmente artesanal, incluindo as peças móveis. O GeoPlexo possui uma inclinação variando entre 20^0 e 25^0 visando o conforto do usuário. As Figuras 34, 35 e 36 são fotos que mostram as 3 peças fixas ainda separadas e o conjunto todo montado.

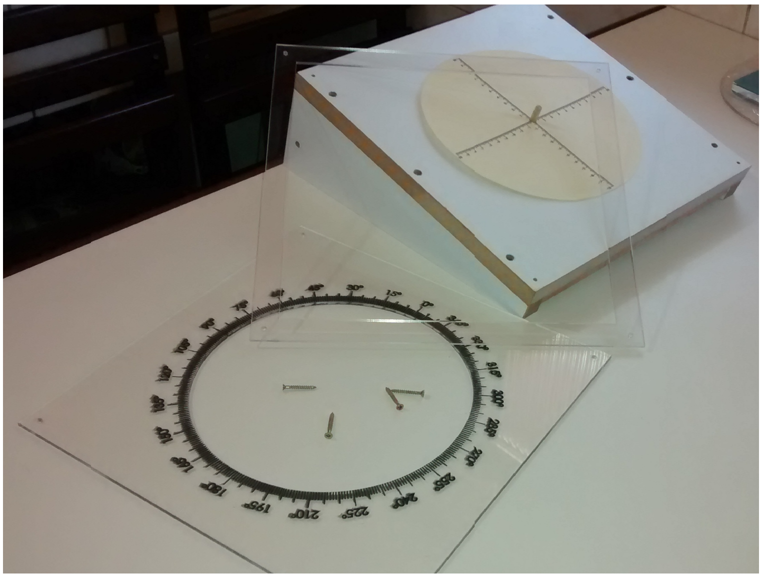

Figura 34: Peças Fixas

Fonte: Acervo particular

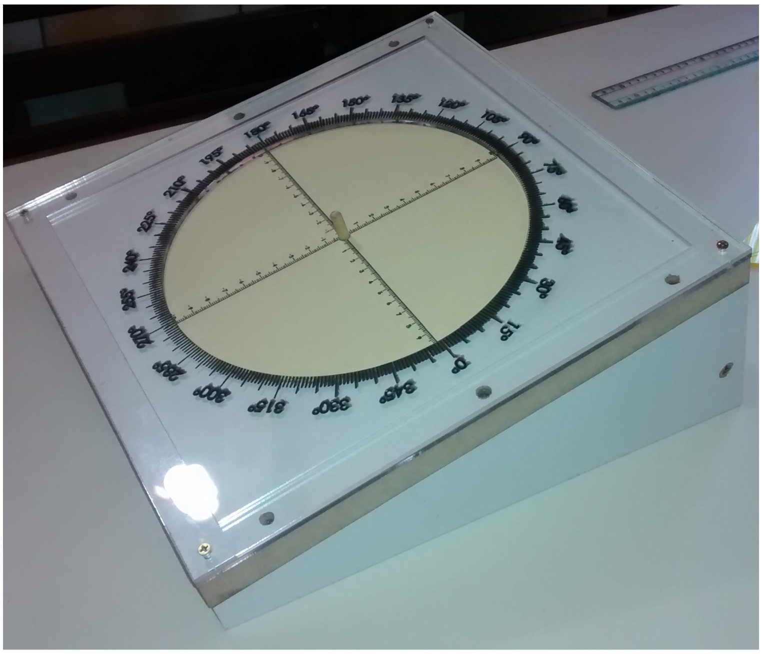

Figura 35: Base completa

Fonte: Acervo particular

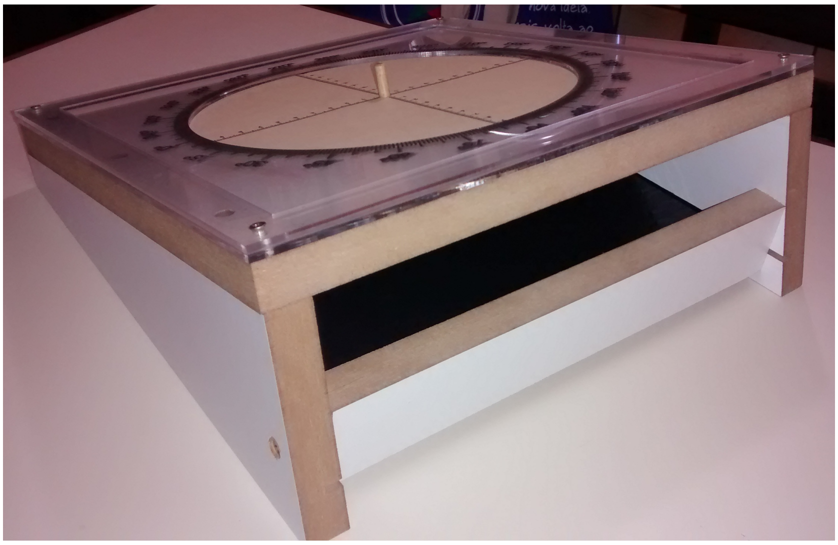

Figura 36: Base completa em outra perspectiva

Fonte: Acervo particular

As peças móveis foram recortadas e marcadas à laser, porém as escalas foram "pintadas manualmente"com tinta a fim de dar maior contraste, facilitando a leitura das medidas. A Figura 37 mostra as 7 peças que compõe o conjunto.

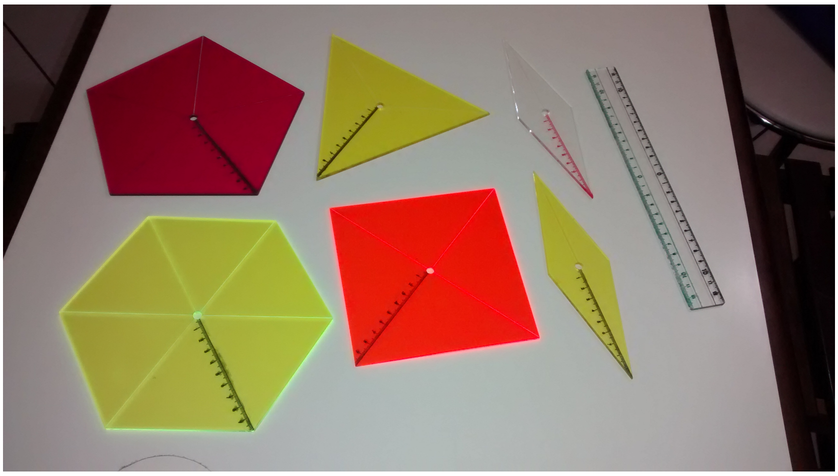

Figura 37: Peças móveis

Fonte: Acervo particular

As Figuras 38 e 39 mostram o conjunto completo, composto pelas 3 peças fixas e pelas 7 peças móveis, num total de 10 peças.

Por tratar-se de uma ideia inédita, temos a intenção de patentear este material.

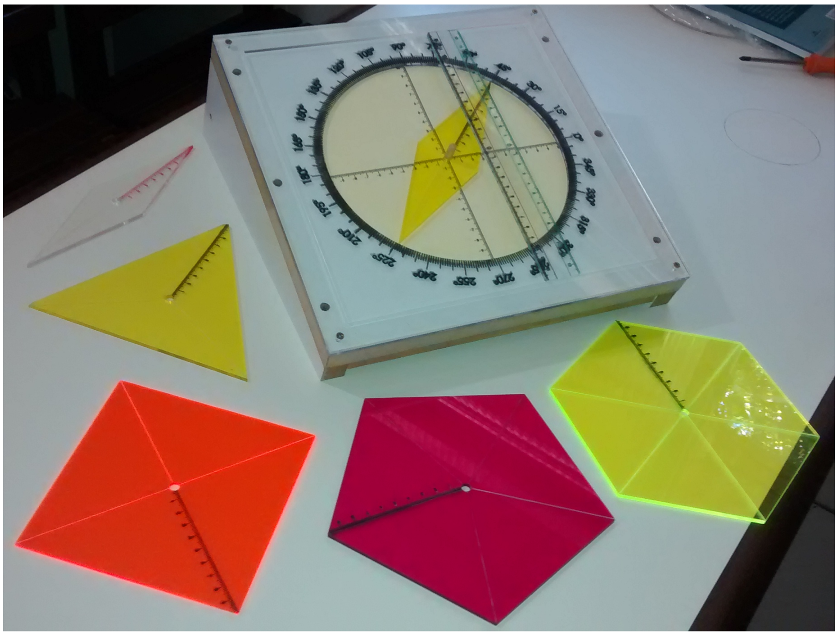

Figura 38: GeoPlexo completo

Fonte: Acervo particular

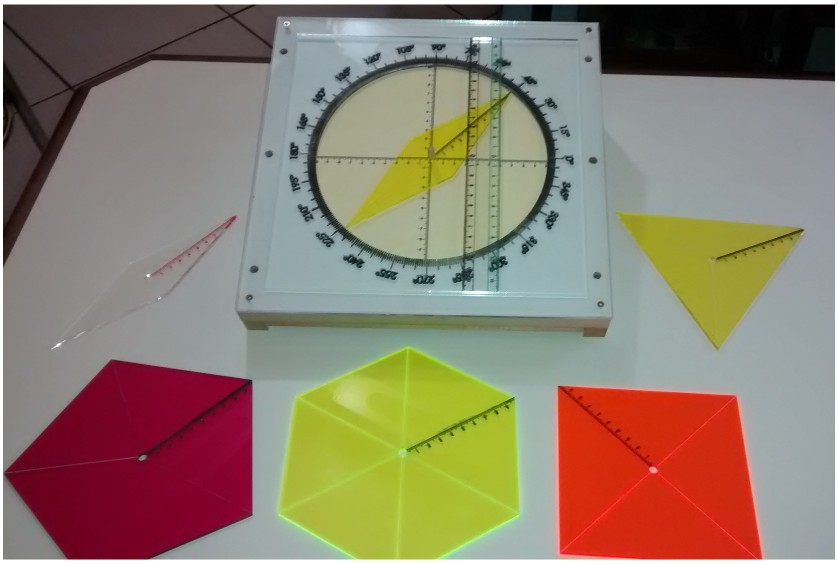

Figura 39: GeoPlexo completo visto de frente

Fonte: Acervo particular

4.2 Sequência de Atividades

Nesta seção apresentaremos um conjunto de atividades resolvidas de duas maneiras, sendo uma pelo método clássico (forma expositiva e mais popular entre os professores) e outra com o uso do material manipulável GeoPlexo.

ATIVIDADE 1:

Escreva a forma algébrica do número complexo que possui módulo igual a 5 e argumento igual a 30^0.

Método clássico:

Devemos representar o número complexo no plano de Argand-Gauss:

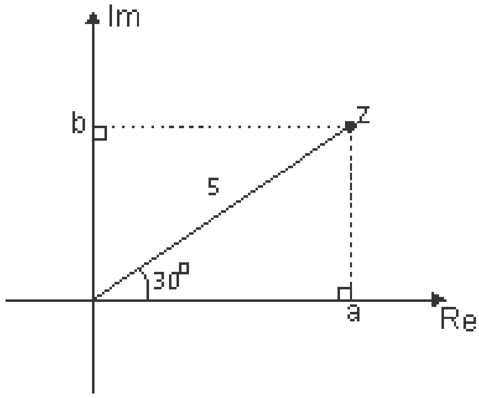

Figura 40: Representação geométrica

Fonte: Acervo particular

Note que o módulo do complexo é $\rho = 5$ e o argumento é $\theta = 30^0$.

Lembrando que $a = \rho cos\theta$ e $b = \rho sen\theta$, como visto anteriormente, temos:

$$a = 5cos30^0 \;\text{ e }\; b = 5sen30^0 \Longrightarrow a = 5.\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } b = 5.\frac{1}{2}$$

E como a forma algébrica é $z = a + bi$, a resposta da atividade é $z = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i$.

Se fizermos $\sqrt{3} \approx 1,73$, teremos: $a \approx 4,325$ e $b = 2,5$.

resultando na resposta aproximada: $z \approx 4,325 + 2,5i$.

Usando o GeoPlexo:

Primeiramente encaixe a haste no pino central da base do GeoPlexo, alinhando uma das pontas com o ângulo de 30^0, tal como mostra a Figura 41.

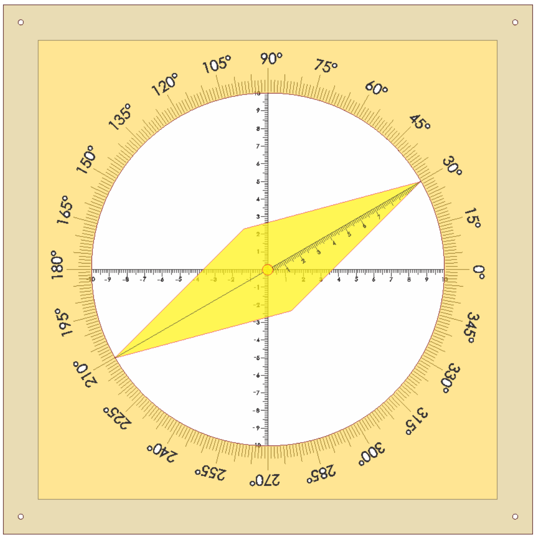

Figura 41: Posicionamento da haste sobre a base

Fonte: Acervo particular

Em seguida posicione a régua na vertical, alinhando com o valor do módulo graduado sobre a haste, neste caso $\rho = 5$. A partir daí basta fazer a leitura: no eixo real $a \approx 4,3$ e na própria régua, o valor da parte imaginária $b \approx 2,5$, vide Figura 42.

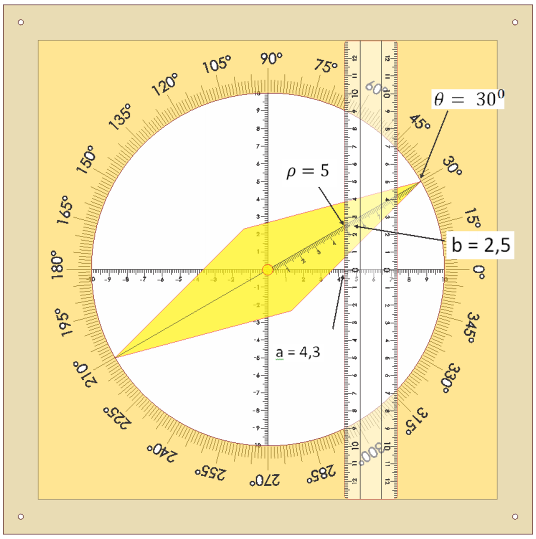

Figura 42: Leitura dos valores com régua na vertical

Fonte: Acervo particular

Também podemos utilizar a régua na horizontal, neste caso as leituras seriam: no eixo imaginário $b \approx 2,5$ e na própria régua o valor da parte real, ou seja $a \approx 4,3$, representado na Figura 43.

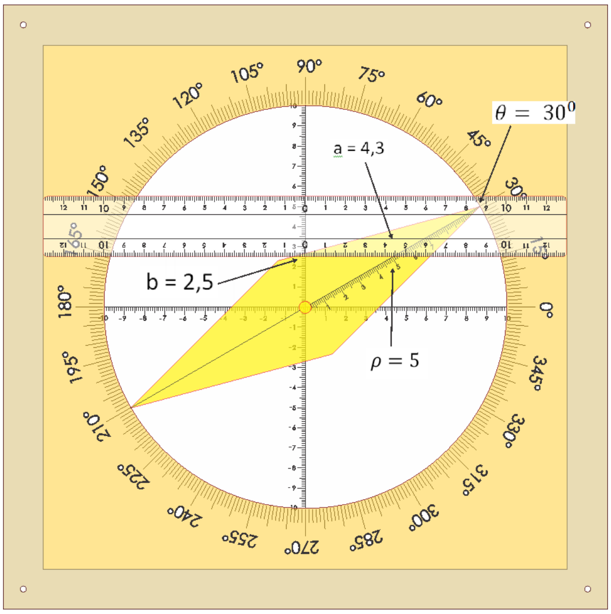

Figura 43: Leitura dos valores com régua na horizontal

Fonte: Acervo particular

Agora, basta escrever o resultado: $z \approx 4,3 + 2,5i$.

É imprescindível destacar a importância de sempre garantir a perpendicularidade da régua tanto com o eixo horizontal (real) quanto com o eixo vertical (imaginário), uma vez que as projeções do plano de Argand-Gauss são ortogonais. Por uma questão de preferência, optaremos em utilizar a régua, sempre que possível, na posição vertical.

Podemos notar que, apesar da velocidade com que encontramos o resultado utilizando o GeoPlexo, os valores possuem uma boa aproximação.

Obviamente que os cálculos poderiam ser feitos utilizando uma calculadora ou até mesmo usando um software, entretanto o uso do material manipulável GeoPlexo cria a possibilidade de tornar a situação literalmente palpável, justamente pelo fato do usuário poder manusear as peças.

ATIVIDADE 2:

Escreva a forma algébrica do número complexo que possui módulo igual a 6 e argumento igual a 120^0.

Método clássico:

Devemos representar o número complexo no plano de Argand-Gauss(Figura44):

Note que o módulo do complexo é $\rho = 6$ e o argumento é $\theta = 120^0$.

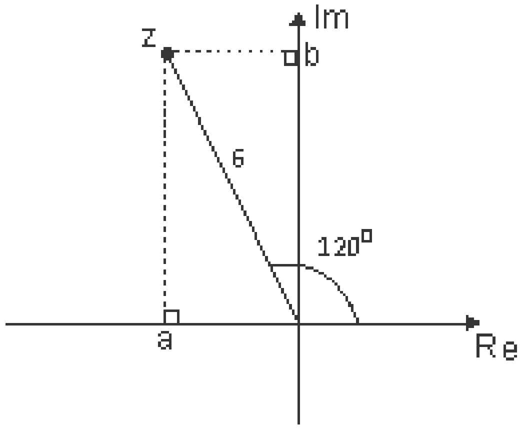

Figura 44: Representação geométrica

Fonte: Acervo particular

Agora podemos utilizar o triângulo retângulo com ângulo de 60^0, que pode facilitar a visualização do aluno, como mostra a Figura 45.

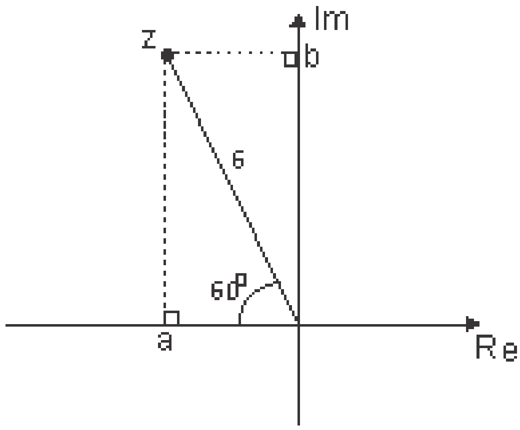

Figura 45: Representação geométrica

Fonte: Acervo particular

$a = 6cos60^0$ e $b = 6sen60^0 \Longrightarrow a = 6.\dfrac{1}{2} = 3$ e $b = 6.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Neste momento, é importante frisar que o valor da parte real é negativo por estar à esquerda da origem, ou seja $a = -3$.

Os cálculos também poderiam ser feitos da seguinte forma:

Lembrando que $a = \rho cos\theta$ e $b = \rho sen\theta$, como visto anteriormente, temos:

$a = 6cos120^0$ e $b = 6sen120^0 \Longrightarrow a = 6.\dfrac{-1}{2} = -3$ e $b = 6.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Esta é uma boa oportunidade para mostrar, no próprio GeoPlexo, a equivalência de alguns resultados trigonométricos, tais como:

$cos120^0 = -cos60^0$ e $sen120^0 = sen60^0$.

E como a forma algébrica é $z = a + bi$, a resposta da atividade é $z = -3 + 3\sqrt{3}i$.

Se fizermos $\sqrt{3} \approx 1,73$, teremos: $b \approx 5,19$.

resultando na resposta aproximada: $z \approx -3 + 5,19i$.

Usando o GeoPlexo:

Primeiramente encaixe a haste no pino central da base do GeoPlexo alinhando uma das pontas com o ângulo de 120^0, tal como mostra a Figura 46.

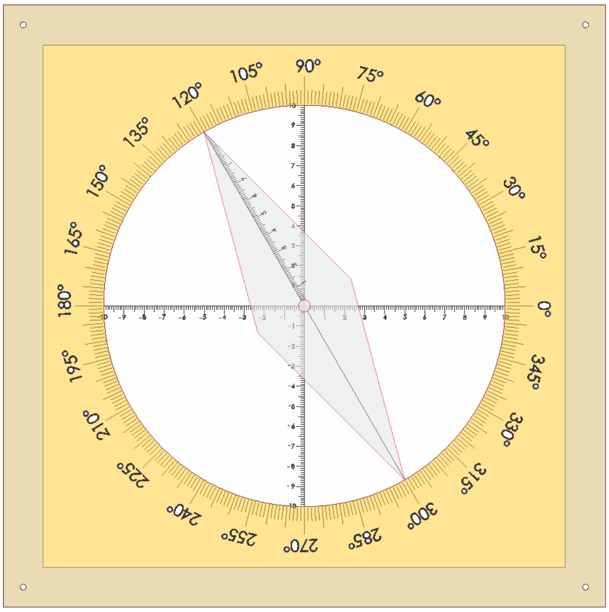

Figura 46: Posicionamento da haste sobre a base

Fonte: Acervo particular

Em seguida posicione a régua na vertical(sempre garantindo a perpendicularidade com o eixo real), alinhando com o valor do módulo graduado sobre a haste, neste caso $\rho = 6$. A partir daí basta fazer a leitura: no eixo real $a \approx -3$ e na própria régua, o valor da parte imaginária $b \approx 5,2$, vide Figura 47.

Agora, basta escrever o resultado: $z \approx 4,3 + 2,5i$.

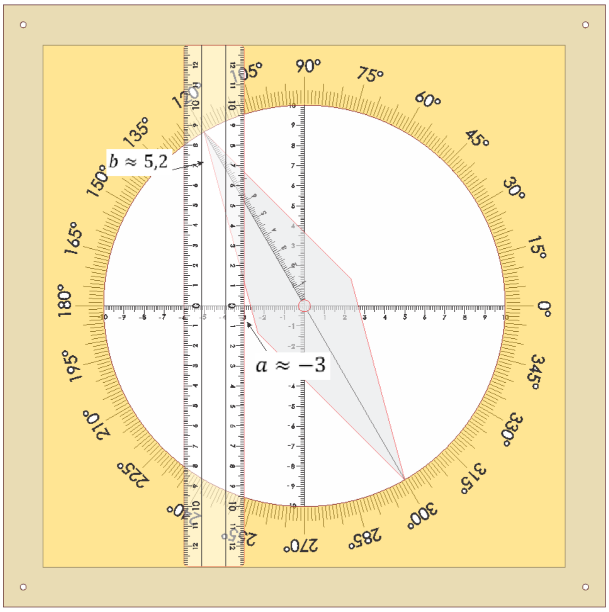

Figura 47: Leitura dos valores com régua na vertical

Fonte: Acervo particular

ATIVIDADE 3:

Sabendo que o argumento da primeira raiz quarta de um complexo z, ou seja, quando $k = 0$, é igual a 10^0, encontre os argumentos das outras 3 raízes.

Método clássico:

Como são 4 raízes e lembrando que, no plano de Argand-Gauss, seus afixos formam um polígono regular. Então, fazendo $\dfrac{360^0}{4} = 90^0$ temos a razão da progressão aritmética dos argumentos de z. Logo:

PA dos argumentos $(10^0, 10^0 + 90^0, 10^0 + 2.90^0, 10^0 + 3.90^0)$, ou seja:

Solução: $(10^0, 100^0, 190^0, 280^0)$.

Usando o GeoPlexo:

Como trata-se de raízes quartas, escolheremos a peça quadrada e posicionaremos sobre a base do GeoPlexo alinhando um dos vértices com o ângulo do primeiro argumento que foi fornecido pelo exercício, no caso 10^0. Agora basta fazer a leitura dos outros ângulos(argumentos)que estão alinhados com os outros vértices do quadrado e escrever a resposta, como mostra a Figura 48.

Solução: $(10^0, 100^0, 190^0, 280^0)$.

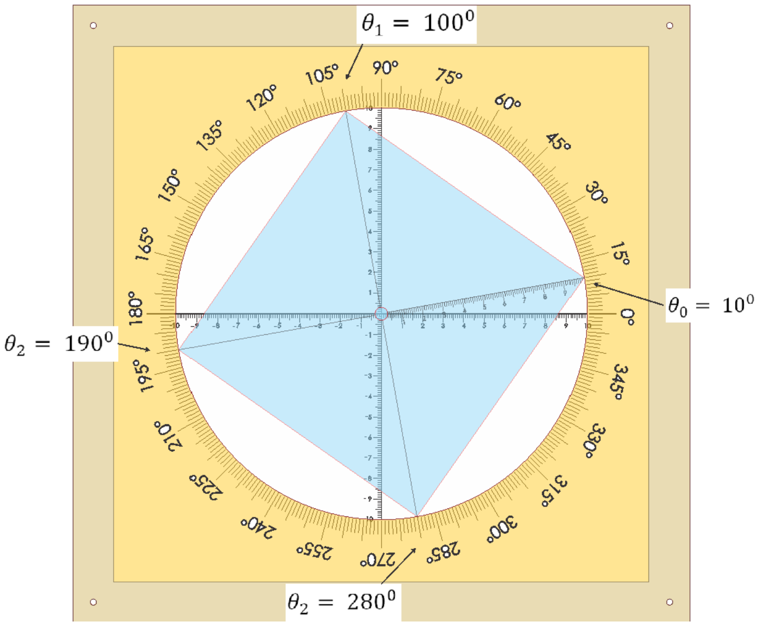

Figura 48: Leitura usando o quadrado

Fonte: Acervo particular

Nesta hora é interessante ressaltar que o material manipulável ajuda a tornar concreto os valores encontrados pelo aluno quando resolvido pelo método clássico. Isso mostra que a ideia do GeoPlexo não é descartar outros métodos de resolução, pelo contrário, o GeoPlexo irá auxiliar na visualização dando um sentido geométrico às respostas que antes, para muitos alunos, não passavam de valores algébricos abstratos.
Também podemos observar que poderíamos encontrar a forma algébrica de quatro números complexos com argumentos equivalentes aos deste exercício, bastando para isso arbitrar o valor do módulo(ρ).

ATIVIDADE 4:

Dado o número complexo $z = 2(cos30^0 + isen30^0)$, encontre a forma algébrica de z^3.

Método clássico:

Sendo $z = 2(cos30^0 + isen30^0)$ podemos utilizar a primeira fórmula de Moivre:

$z^3 = 2^3(cos3.30^0 + isen3.30^0)$

$z^3 = 8(cos90^0 + isen90^0)$, que após substituirmos os valores do seno e cosseno, teremos:

$z = 8(0 + i.1)$, ou seja:

$z = 8i$, neste caso, um imaginário puro.

Usando o GeoPlexo:

Posicionando a haste sobre a base com abertura de 30^0 verificamos que o afixo de z está sobre o 2 da escala, como mostra a Figura 49.

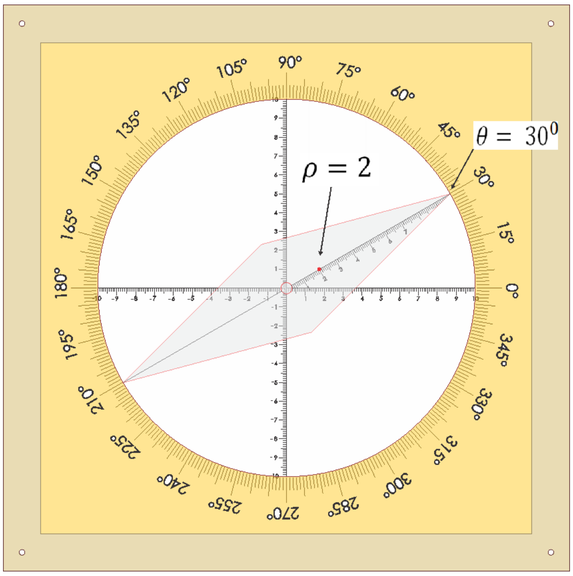

Figura 49: Posicionamento da haste

Fonte: Acervo particular

Agora, para fazer z^3 faremos duas operações: $\rho' = 2^3 = 8$ e $\theta' = 3.30^0 = 90^0$, que representam, respectivamente, o módulo e o argumento do novo complexo z^3. Em seguida posicionamos a haste no novo argumento(90^0) e marcamos, visualmente, a posição do novo módulo sobre a haste ($\rho' = 8$), como na Figura 50.

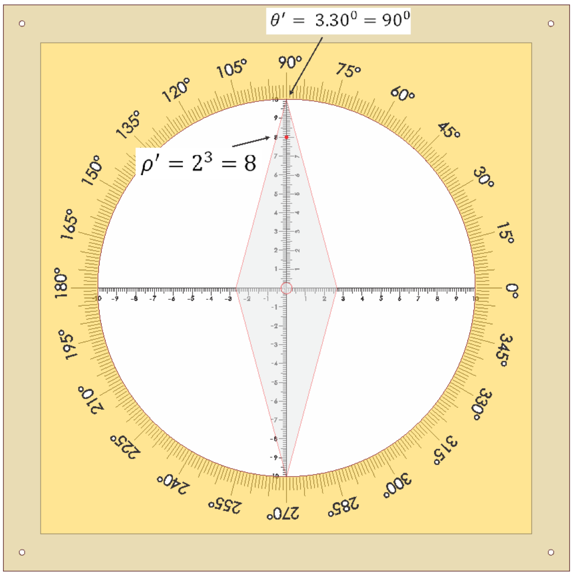

Figura 50: Reposicionamento da haste

Fonte: Acervo particular

Note que neste caso, a haste ficou totalmente perpendicular ao eixo real, isso indica que não há projeção sobre o eixo real, ou seja, $a = 0$ e no eixo imaginário o valor é o próprio módulo de z^3, ou seja, $b = 8$, conforme destaca a Figura 51.

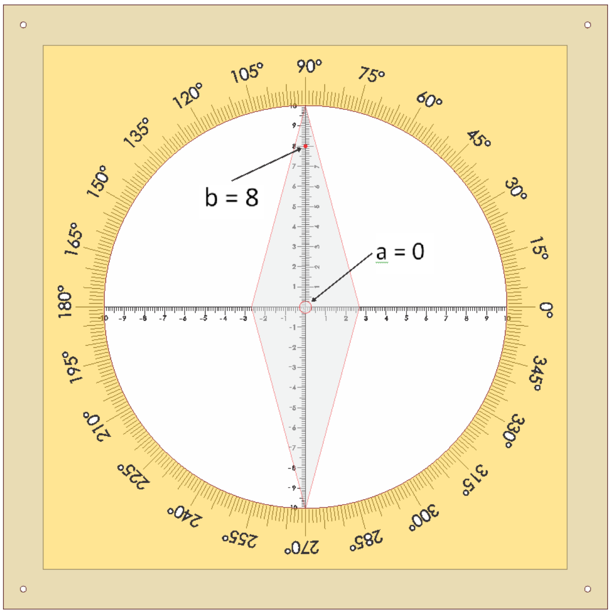

Figura 51: Leitura dos valores

Fonte: Acervo particular

Portanto, $z^3 = 0 + 8i = 8i$.

Interessante destacar, que neste caso, a transformação da visualização geométrica num resultado literalmente concreto foi uma grande contribuição do GeoPlexo.

ATIVIDADE 5:

Dado o número complexo $z = 2(cos60^0 + isen60^0)$, encontre a forma algébrica de z^3.

Método clássico:

Analogamente ao exercício anterior, como $z = 2(cos60^0 + isen60^0)$ podemos utilizar a primeira fórmula de Moivre:

$z^3 = 2^3(cos3.60^0 + isen3.60^0)$

$z^3 = 8(cos180^0 + isen180^0)$, que após substituirmos os valores do seno e cosseno, teremos:

$z = 8(-1 + i.0)$, ou seja:

$z = -8$, neste caso, um número real.

Usando o GeoPlexo:

Como fizemos anteriormente, posicionamos a haste sobre a base com abertura de 60^0 verificamos que o afixo de z está sobre o 2 da escala, como mostra a Figura 52.

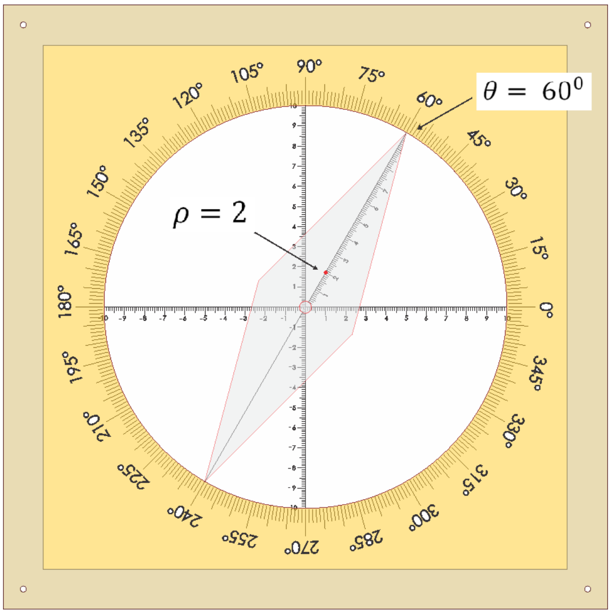

Figura 52: Posicionamento da haste

Fonte: Acervo particular

Da mesma forma, para fazer z^3: $\rho' = 2^3 = 8$ e $\theta' = 3.60^0 = 180^0$, que representam, respectivamente, o módulo e o argumento do novo complexo z^3. Em seguida posicionamos a haste no novo argumento(180^0) e marcamos a posição do novo módulo sobre a haste ($\rho' = 8$), como na Figura 53.

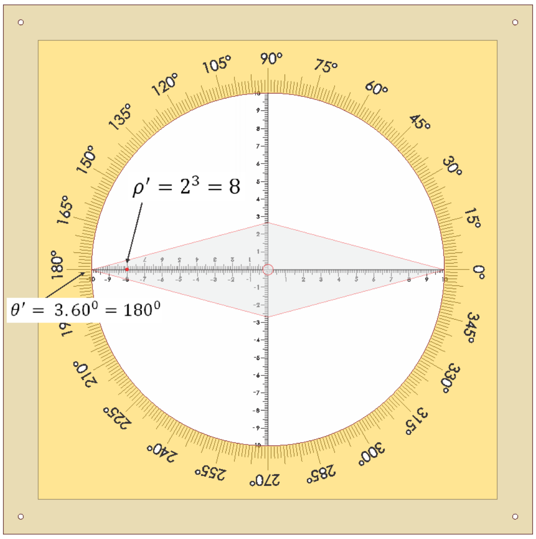

Figura 53: Reposicionamento da haste

Fonte: Acervo particular

Note que neste caso, a haste ficou totalmente horizontal, isso indica que não há projeção sobre o eixo imaginário, ou seja, $b = 0$ e no eixo real, como o valor do módulo de z^3 está para a esquerda o valor será negativo, ou seja, $b = -8$, conforme destaca a Figura 54.

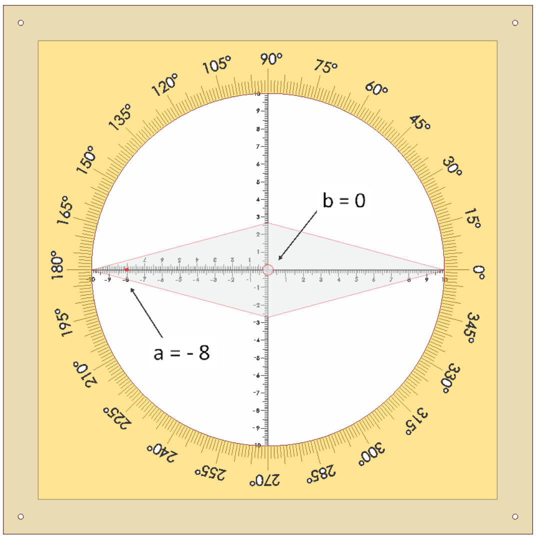

Figura 54: Leitura dos valores

Fonte: Acervo particular

Portanto, $z^3 = -8 + 0.i = -8$.

Novamente, a contribuição geométrica na representação concreta do resultado é uma fator altamente esclarecedor.

O respaldo teórico usado na resolução das atividades 4 e 5, está descrito na secção 3.1.5 da fundamentação teórica deste mesmo capítulo, entretanto é importante relembrar.

Como visto e demonstrado, $z = \rho(cos\theta + isen\theta) = \rho e^{\theta i}$ e que $z = \rho e^{\theta i} \Longrightarrow Z^n = \rho^n e^{n\theta i}$.

Na atividade 4 teremos: $z = 2(cos30^0 + isen30^0) = 2e^{30^0 i}$, e ainda:

$z = 2e^{30^0 i} \Longrightarrow Z^3 = 2^3 e^{3.30^0 i} = 2^3 e^{3.30^0 i} = 8e^{90^0 i}$, mostrando, de fato, que o novo complexo Z^3 possui módulo $\rho = 8$ com abertura ou argumento igual a 90^0.

ATIVIDADE 6:

Represente no plano complexo o número $z = 5e^{45^0 i}$ **e escreva suas formas trigonométrica e algébrica.**

Método clássico:

De imediato, como $z = \rho(cos\theta + isen\theta) = \rho e^{\theta i}$, a forma trigonométrica será:

$z = 5e^{45^0 i} = 5(cos45^0 + isen45^0)$.

No plano de Argand-Gauss temos:

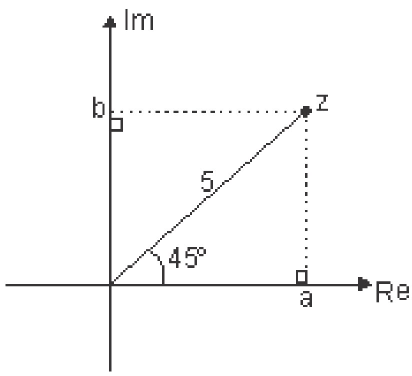

Figura 55: Representação geométrica de z

Fonte: Acervo particular

De onde, lembrando que $a = \rho cos\theta$ e $b = \rho sen\theta$, podemos fazer:

$a = 5cos45^0$ e $b = 5sen45^0$ e atribuindo os valores correspondentes:

$a = 5cos45^0$ e $b = 5sen45^0$, ou seja:

$a = 5\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $b = 5\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, logo a forma algébrica será:

$z = 5\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 5\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ e se fizermos $\sqrt{2} \approx 1,41$ teremos a aproximação:

$z \approx 3,525 + 3,525i$, que caracteriza a forma algébrica.

Usando o GeoPlexo:

Obviamente, como a forma trigonométrica depende apenas do módulo e do argumento já fornecidos através da forma exponencial dada, a resolução é imediata, tal como o método clássico.

No entanto, para encontrarmos a forma algébrica começaremos posicionando a haste na base do GeoPlexo no ângulo em questão(45^0) marcando a posição do módulo sobre a escala da haste, neste caso $\rho = 5$, tal como na Figura 56.

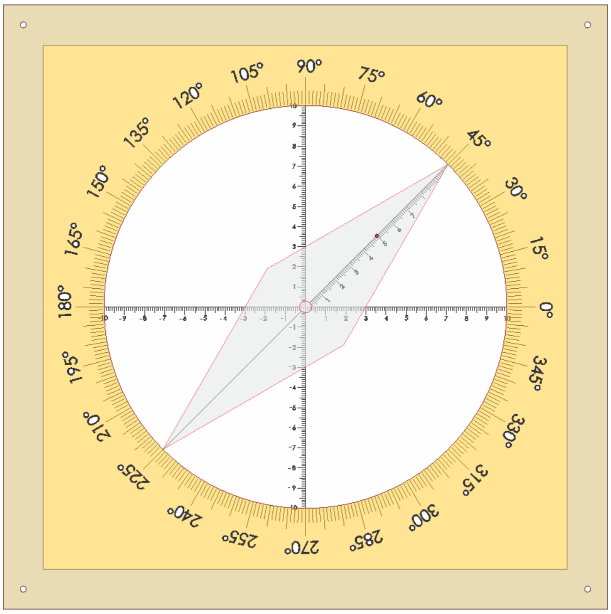

Figura 56: Posicionamento da haste

Fonte: Acervo particular

Em seguida posicionaremos a régua sobre o ponto que representa o módulo do complexo e fazemos a leitura, como indica a Figura 57.

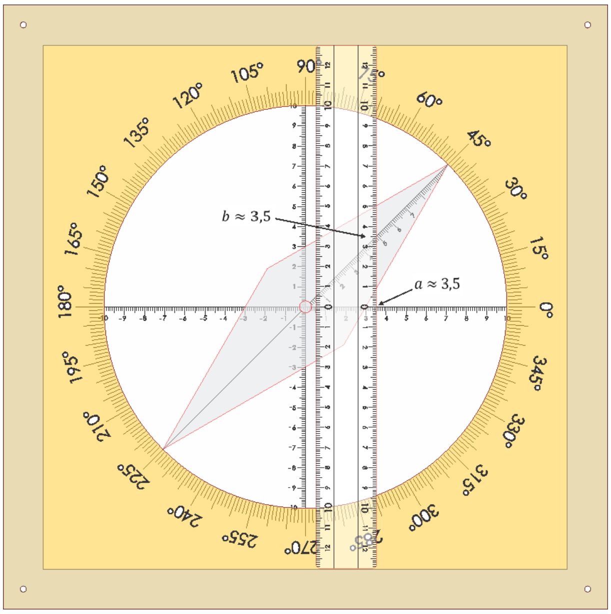

Figura 57: Posicionamento da régua

Fonte: Acervo particular

O valor projetado no eixo real $a \approx 3,5$ e o valor da régua representa o valor da parte imaginária, $b \approx 3,5$. Nos levando a $z \approx 3,5 + 3,5i$, que é a forma algébrica pedida.

Confrontando os resultados obtidos pelos dois métodos podemos perceber que os valores se equivalem na primeira casa decimal. Aqui faz-se necessário entendermos que, assim como qualquer material manipulável, existe um limite físico na tomada de valores, justamente por esse motivo é importante destacar que os resultados são aproximados.

ATIVIDADE 7:

Escreva a forma algébrica do número z^4, sendo $z = 2(cos30^0 + isen30^0)$.

Método clássico:

Neste caso, podemos utilizar diretamente a primeira fórmula de Moivre para a obtenção direta do resultado.

$z^4 = 2^4(cos4.30^0 + isen4.30^0) \Longrightarrow$

$z^4 = 16(cos120^0 + isen120^0) \Longrightarrow$ e utilizando de conhecimento trigonométrico, onde $cos120^0 = -cos60^0 = -\dfrac{1}{2}$ e $sen120^0 = sen60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ temos:

$z^4 = 16(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ e se atribuirmos $1,73$ para $\sqrt{3}$ teremos:

$z^4 \approx -8 + 13,84i$, sua forma algébrica.

Usando o GeoPlexo:

Tomando as informações fornecidas pelo enunciado: $\rho = 2$ e $\theta = 30^0$ faremos:

$\rho' = 2^4 = 16$ e $\theta' = 4.30^0 = 120^0$. Quanto ao argumento θ', não há problema algum, pois a base do GeoPlexo contém a volta completa(360^0), porém, como o limite físico do raio circunferência da base é de 10 unidades, devemos fazer a ponderação deste valor para que o valor do módulo seja ≤ 10.

Uma boa opção é dividir por 2 e efetuar o uso no GeoPlexo normalmente, porém lembrando, que para chegarmos no resultado correto deveremos multiplicar pelo mesmo 2.

Então, dividindo $\frac{16}{2} = 8$. Agora basta posicionar a haste na base e marcar o valor 8 sobre sua escala na abertura de 120^0, como mostra a Figura 58.

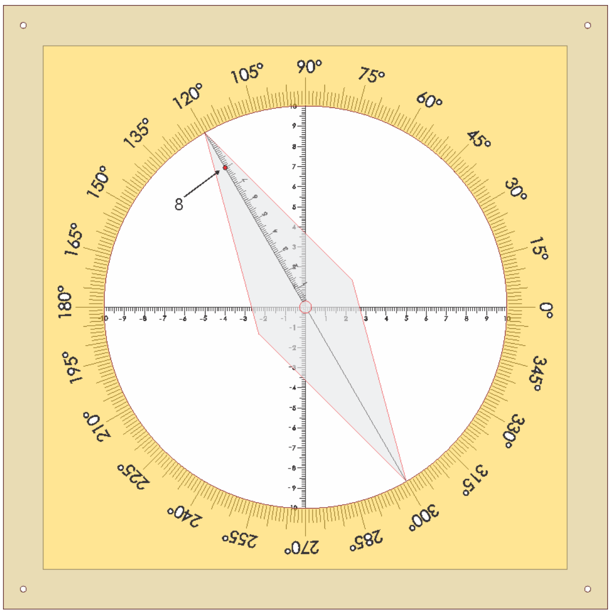

Figura 58: Posicionamento da haste

Fonte: Acervo particular

Em seguida faz-se a tomada de valores, por exemplo, posicionando a régua na vertical como mostra a 59, e teremos $a' \approx -4$ e $b' \approx 7$, logo, $(z^4)' \approx a' + b'i = -4 + 7i$, lembrando que agora temos que multiplicar por 2:

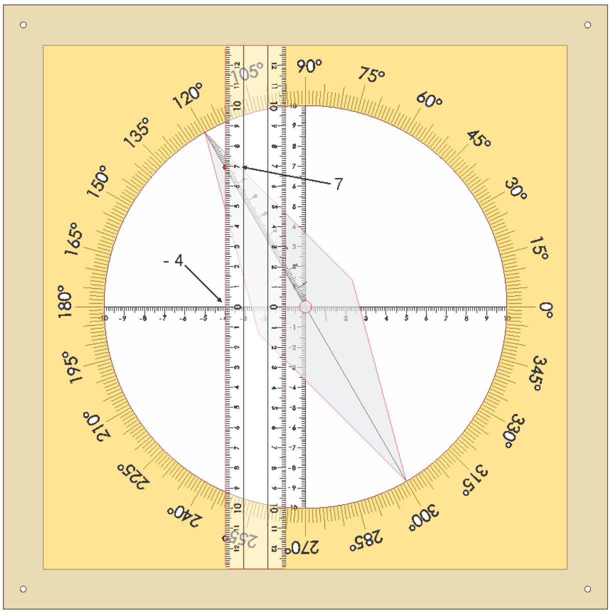

Figura 59: Leitura dos valores com régua na vertical

Fonte: Acervo particular

Portanto $z^4 \approx 2(-4+7i) \approx -8+14i$, que é o resultado do exercício.

ATIVIDADE 8:

Encontre as raízes quadradas do número $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Método clássico:

Primeiramente vamos resolver utilizando a segunda fórmula de Moivre, que é descrita da seguinte maneira:

Dado um número complexo z na forma trigonométrica, tal que $z = \rho cos\theta + \rho sen\theta i$, chamamos de raíz n-ésima de Z a qualquer número complexo w, tal que $w = \rho cos\alpha + \rho sen\alpha i$, que verifica a relação $(w_k)^n = z$, com $n \in N*$. Os valores de w_k são dados por:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho_1}[cos(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n})], \text{ com } k = 0, 1, 2, ..., (n-1).$$

Portanto, primeiramente devemos transformar o número complexo $z = 2 + 2\sqrt{3}i$, que está na forma algébrica, para a forma trigonométrica. Para tanto, precisamos de θ e de ρ, que são respectivamente, o argumento e o módulo de z.

Lembrando que, sendo $z = 2 + 2\sqrt{3}i$, temos $a = 2$ e $b = 2\sqrt{3}$, logo:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\tan(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}(60^o)$$

Visualizando o complexo $Z = 2 + 2\sqrt{3}i$ no plano de Argand-Gauss:

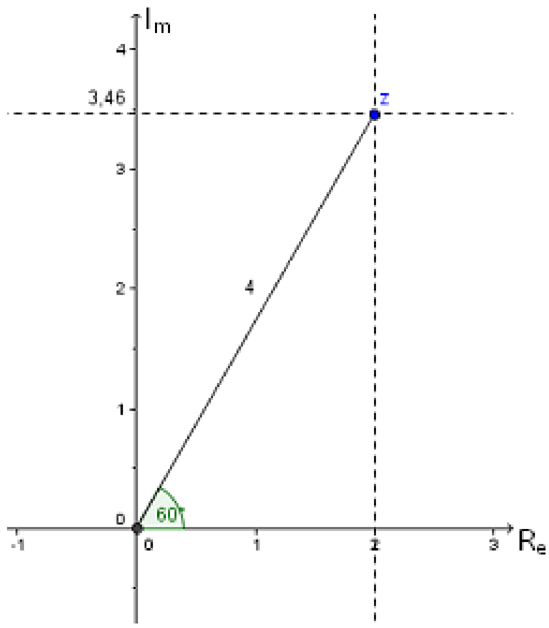

Figura 60: Representação geométrica de $Z = 1 + \sqrt{3}i$

Fonte: Acervo particular

(Note que $2\sqrt{3} \approx 2.1,73 \approx 3,46$)

Então, como a forma trigonométrica de Z é $z = \rho(cos\theta + sen\theta i)$, temos:

$$z = 2(cos\frac{\pi}{3} + sen\frac{\pi}{3}i)$$

A seguir, podemos utilizar a segunda fórmula de Moivre. Neste caso, como estamos procurando as raízes quadradas, $n = 2$, e como k varia de 0 até $n - 1$ seus valores serão $k = 0$ e $k = 1$ que juntamente com $\rho = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}(60^o)$ teremos:

$$w_0 = \sqrt{4}[cos(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.0\pi}{2}) + isen(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.0\pi}{2})] \Longrightarrow$$

$w_0 = 2[cos(\frac{\pi}{6}) + isen(\frac{\pi}{6})] \Longrightarrow$

$w_0 = 2[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i] \Longrightarrow$

$w_0 = \sqrt{3} + i$(forma algébrica).

Analogamente:

$w_1 = \sqrt{4}[cos(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.1\pi}{2}) + isen(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.1\pi}{2})]$

$w_1 = 2[cos(\frac{7\pi}{6}) + isen(\frac{7\pi}{6})]$, onde ao substituirmos os valores dos seno e cosseno correspondente teremos:

$w_1 = -2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{1}{2}i \Longrightarrow$

$w_1 = -\sqrt{3} - i$ (forma algébrica).

Portanto, as raízes quadradas de $z = 2 + 2\sqrt{3}i$, são $w_0 = \sqrt{3} + i$ e $w_1 = \sqrt{3} - i$.

Usando o GeoPlexo:

Ainda faz-se necessário conhecer o módulo e o argumento de z.

Como $z = 2+2\sqrt{3}i$, sendo $a = 2$ e $b = 2\sqrt{3}i$, temos $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$.

Também utilizando a representação no plano de Argand-Gauss:

podemos fazer $tg\theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} = 60^0$.

De posse do módulo $\rho = 4$ e do argumento $\theta = 60^0$ e como queremos encontrar as raízes quadradas: $\rho' = \sqrt{4} = 2$ e $\theta' = \frac{60^0}{2} = 30^0$, que são o módulo e o argumento da primeira raiz e a peça móvel será a haste.

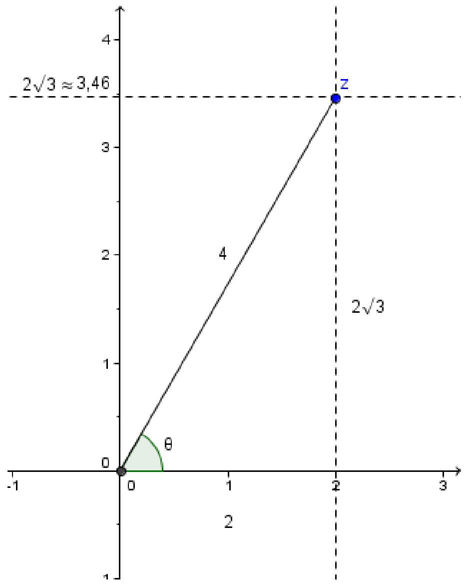

Figura 61: Representação geométrica de $Z = 1 + \sqrt{3}i$

Fonte: Acervo particular

Agora basta posicionar a haste no 30^0 e observar o valor do módulo 2, Figura 62:

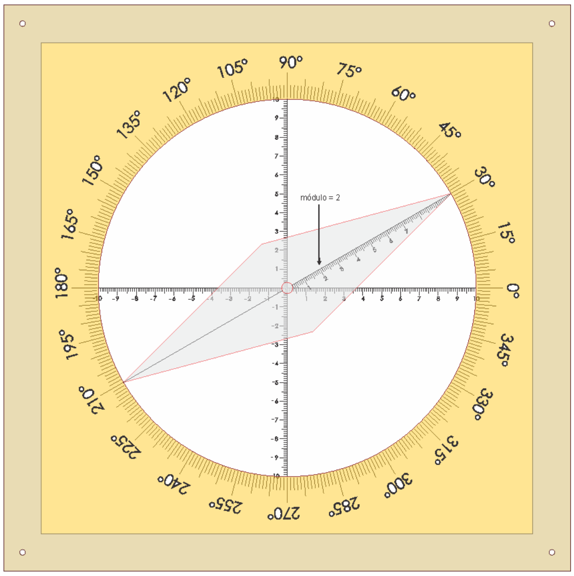

Figura 62: Posicionamento da haste

Fonte: Acervo particular

Em seguida efetuar a leitura dos valores, como mostra a Figura 63.

Logo,$w_0 \approx 1,73 + i$ ou $w_0 \approx \sqrt{3} + i$ (primeira raiz quadrada).

A segunda raiz quadrada está na outra extremidade da haste (210^0), também com módulo 2, como mostra a Figura 64 e a tomada de valores é análoga, porém com sinais negativos devido ao quadrante em questão, ou seja: $w_1 \approx -1,73 - i$ ou $w_1 \approx -\sqrt{3} - i$.

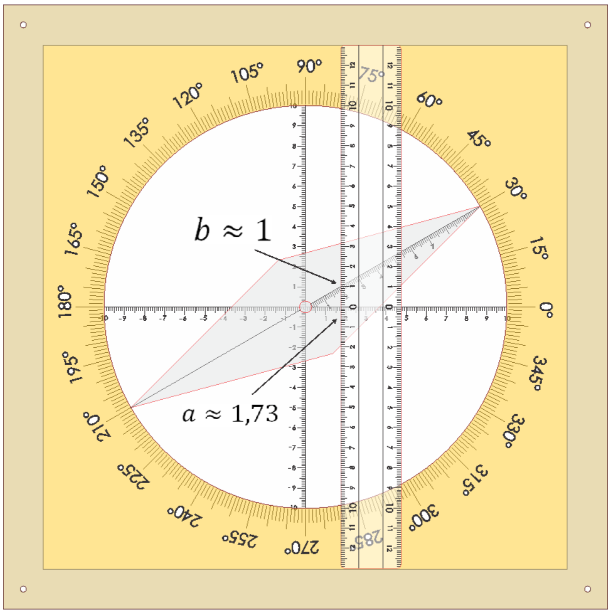

Figura 63: Posicionamento da régua e leitura

Fonte: Acervo particular

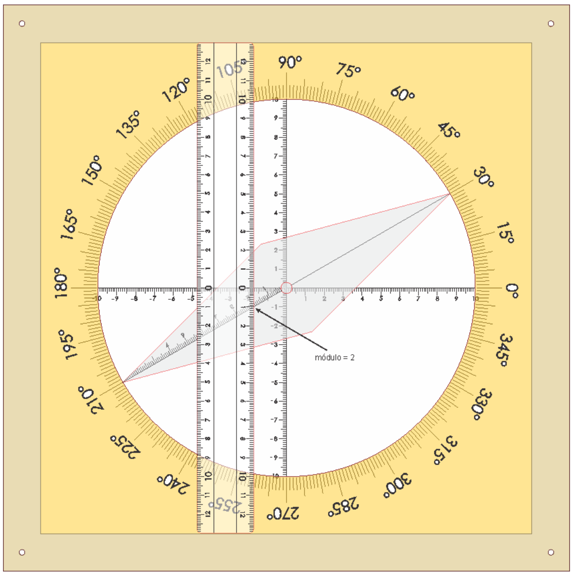

Figura 64: Reposicionamento e leitura

Fonte: Acervo particular

Portanto, as raízes quadradas de z são $w_0 \approx 1,73 + i$ e $w_1 \approx -1,73 - i$ ou $w_0 \approx \sqrt{3} + i$ e $w_1 \approx -\sqrt{3} - i$.

ATIVIDADE 9:

Encontre as raízes cúbicas do número $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Método clássico:

Usaremos a segunda fórmula de Moivre, que é descrita da seguinte maneira:

Dado um número complexo z na forma trigonométrica, tal que $z = \rho cos\theta + \rho sen\theta i$, chamamos de raíz n-ésima de z a qualquer número complexo w, tal que $w = \rho cos\alpha + \rho sen\alpha i$, que verifica a relação $(w_k)^n = z$, com $n \in N*$. Os valores de w_k são dados por:

$w_k = \sqrt[n]{\rho_1}[cos(\dfrac{\theta_1 + 2k\pi}{n}) + isen(\dfrac{\theta_1 + 2k\pi}{n})]$, com $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$.

Portanto, primeiramente devemos transformar o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, que está na forma algébrica, para a forma trigonométrica. Para tanto, precisamos de θ e de ρ, que são respectivamente, o argumento e o módulo de z.

Lembrando que, sendo $z = 1 + \sqrt{3}i$, temos $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$, então:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}(60^o)$$

Visualizando o complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$ no plano de Argand-Gauss:

(Note que $\sqrt{3} = 1,73$)

Então, como a forma trigonométrica de z é $z = \rho(cos\theta + sen\theta i)$, temos:

$$z = 2(cos\frac{\pi}{3} + sen\frac{\pi}{3}i)$$

A seguir, podemos utilizar a segunda fórmula de Moivre. Neste caso, como estamos procurando as raízes cúbicas, $n = 3$, e como k varia de 0 até $n - 1$ seus valores serão $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$ que juntamente com $\rho = 2$ e $\theta = \dfrac{\pi}{3}(60^o)$ teremos:

$$w_0 = \sqrt[3]{2}[cos(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.0\pi}{3}) + isen(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.0\pi}{3})]$$

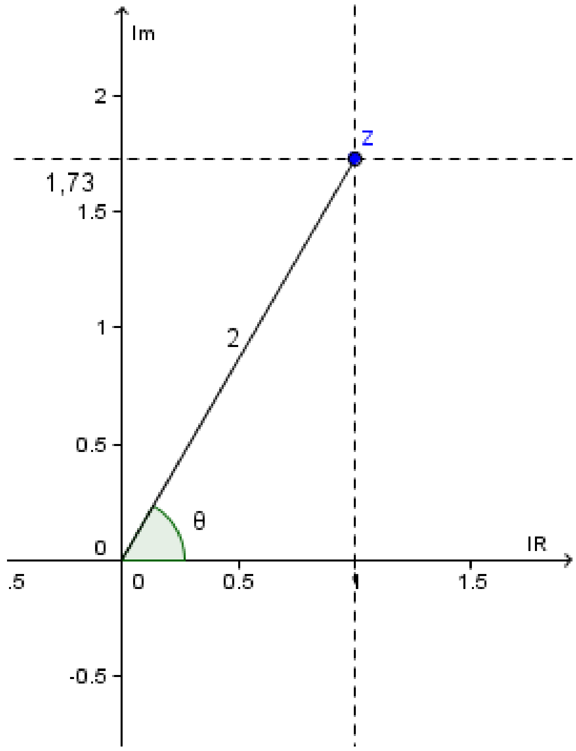

Figura 65: Representação geométrica de $z = 1 + \sqrt{3}i$

Fonte: Acervo particular

$w_0 = \sqrt[3]{2}[cos(\dfrac{\pi}{9}) + isen(\dfrac{\pi}{9})]$ e neste caso, fazendo uso de uma calculadora temos :

$w_0 \approx 1,18 + 0,43i$ (forma algébrica).

Analogamente:

$$w_1 = \sqrt[3]{2}[cos(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.1\pi}{3}) + isen(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.1\pi}{3})]$$

$w_1 = \sqrt[3]{2}[cos(\dfrac{7\pi}{9}) + isen(\dfrac{7\pi}{9})]$, onde ao substituirmos os valores dos seno e cosseno correspondente teremos:

$w_1 \approx -0,96 + 0,8i$(forma algébrica).

e, finalmente:

$$w_2 = \sqrt[3]{2}[cos(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.2\pi}{2}) + isen(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.2\pi}{2})]$$

$w_2 = \sqrt[3]{2}[cos(\frac{13\pi}{9}) + isen(\frac{13\pi}{9})]$ que fazendo a atribuição de valores correspondentes:

$w_2 \approx -0,2 - 1,2i$(forma algébrica).

Portanto, as raízes cúbicas de $z = 1+\sqrt{3}i$, são $w_0 \approx 1,18+o,43i$,$w_1 \approx -0,96+0,8i$ e $w_2 \approx -0,2 - 1,2i$.

Usando o GeoPlexo:

Como $Z = 1 + \sqrt{3}i$, temos $\rho = 2$ $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$, logo:
$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}(60^o)$.

Como queremos encontrar as raízes cúbicas de z, $n = 3$(peça móvel = triângulo) e então:

$\rho' = \sqrt[3]{2} \simeq 1,26$ e $\theta_0 = \frac{60^0}{3} = 20^0$(argumento da primeira raiz).

Agora basta posicionar um dos vértices do triângulo apontando para 20^0, como mostra a Figura 66:

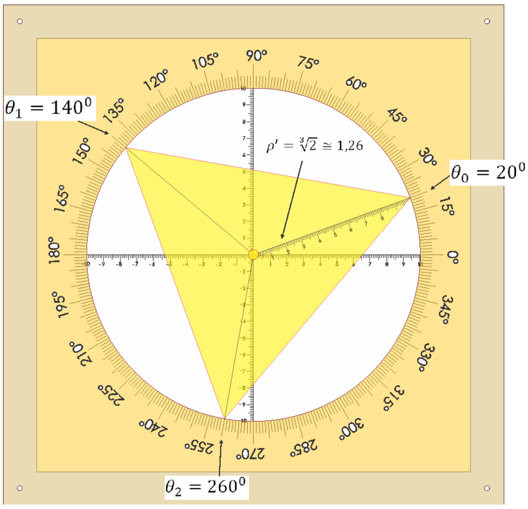

Figura 66: Representação geométrica

Fonte: Acervo particular

Em seguida, basta fazer a leitura dos valores, $a \approx 1,2$ no eixo real e $b \approx 0,4$ na própria régua, que representa o eixo imaginário, Figura 67:

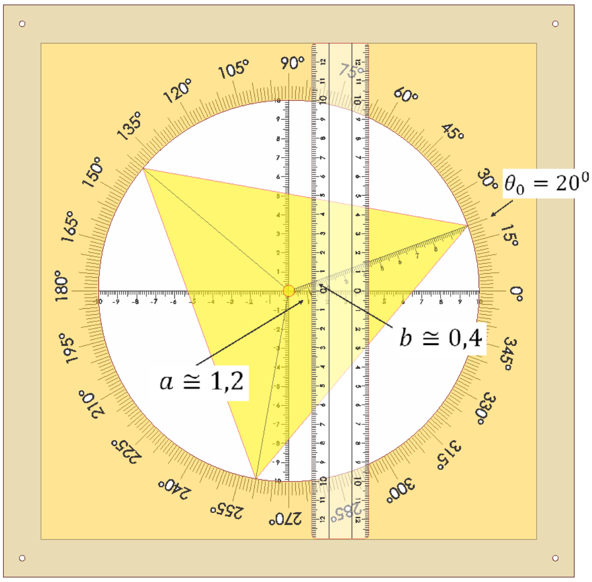

Figura 67: Leitura da primeira raiz

Fonte: Acervo particular

$w_0 \approx 1,2 + 0,4i.$

Note que, após posicionarmos um dos vértices do triângulo, automaticamente os outros ficam posicionados apontando para os argumentos das outras raízes, bastando a partir daí, fazer a leitura das outras raízes, como mostram as Figura 68 e 69:

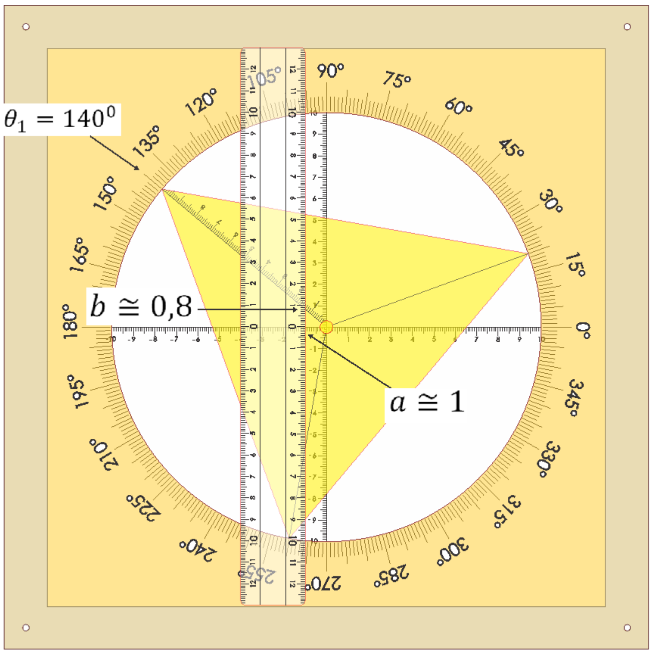

Figura 68: Leitura da segunda raiz

Fonte: Acervo particular

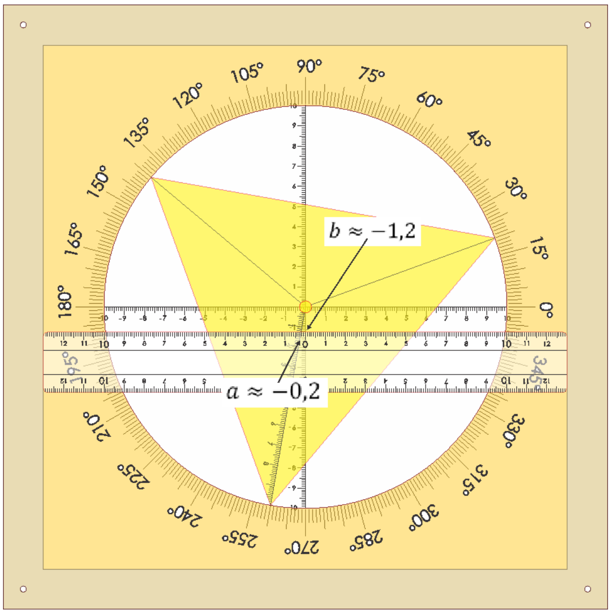

Figura 69: Leitura da terceira raiz

Fonte: Acervo particular

Portanto, as raízes cúbicas de $z = 1 + \sqrt{3}i$ são: $w_0 \approx 1,2 + o,4i$, $w_1 \approx -1 + o,8i$ e $w_2 \approx -0,2 - 1,3i$.

Note que para a leitura da terceira raiz, a régua foi posicionada na horizontal, ou seja, paralela ao eixo real. Pois, neste caso, não foi possível atingir o valor de 1,26 do módulo das raízes do complexo no material manipulável que, como já dito anteriormente, possui um limite físico, como evidencia a figura.

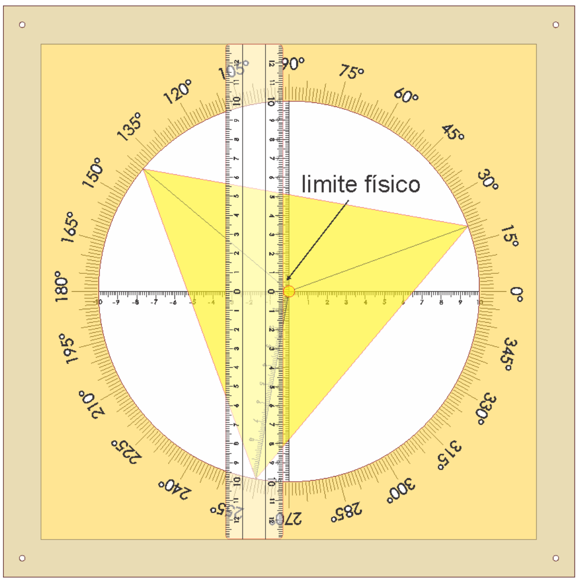

Figura 70: Limitações físicas

Fonte: Acervo particular

Porém, aquilo que poderia parecer uma falha do material, na verdade torna-se uma grande oportunidade para que o professor possa instigar seus alunos a buscarem outras alternativas que permitam à leitura do resultado, aprimorando suas habilidades de perceber novos caminhos.

Nesta atividade, por exemplo, poderíamos utilizar a ponderação (proporcionalidade), que possui o respaldo teórico quando lembramos da semelhança de triângulos, visto no capítulo da fundamentação teórica (3.1.6). Bastaria multiplicar $1,26$ por 5, por exemplo, e trabalhar com o valor $1,26.5 = 6,3$, que é um número de fácil utilização no GeoPlexo. Obviamente depois das leituras serem realizadas, os valores devem ser divididos por 5 para a obtenção da resposta correta.

Esperamos que a utilização deste material manipulável traga novas ideias e sugestões de melhoria e/ou aprimoramento.

ATIVIDADE 10:

Encontre as raízes quartas de $z = 8 + 8\sqrt{3}i$**.**

Método clássico:

Como $a = 8$ e $b = 8\sqrt{3}$, então:

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16.$

No plano A-G:

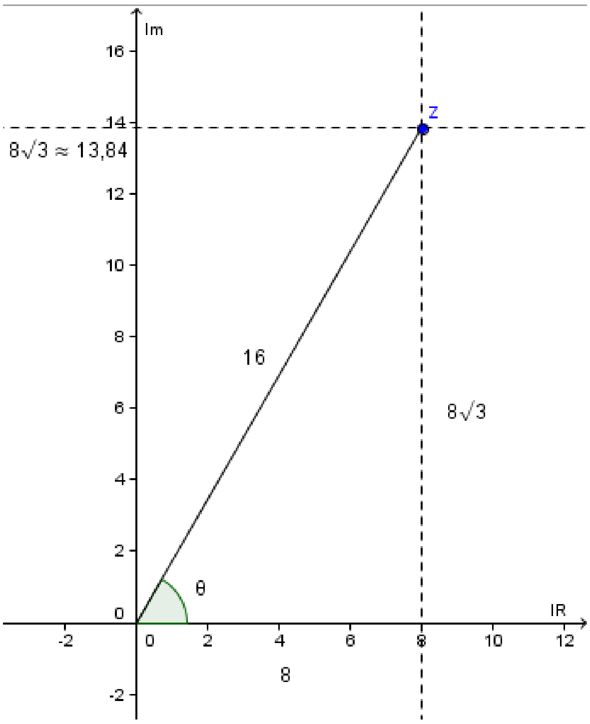

Figura 71: Representação geométrica

Fonte: Acervo particular

Assim, $tg\theta = \dfrac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = 60^0.$

Dispondo do módulo $\rho = 16$ e do argumento $\theta = 60^0$, vamos utilizar a segunda fórmula de Moivre:

$w_k = \sqrt[4]{16}[cos(\dfrac{60^0 + 360^0 k}{4}) + isen(\dfrac{60^0 + 360^0 k}{4})]$, com $k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$, neste caso $k = 0, 1, 2, 3$, assim:

$$w_0 = \sqrt[4]{16}[cos(\frac{60^0 + 360^0.0}{4}) + isen(\frac{60^0 + 360^0.0}{4})]$$

$$w_0 = 2[cos(\frac{60^0}{4}) + isen(\frac{60^0}{4})]$$

$$w_0 = 2[cos(15^0) + isen(15^0)]$$

$w_0 = 2(0,96 + 0,26i) \approx 1,92 + 0,52i$(primeira raiz).

Analogamente:

$$w_1 = \sqrt[4]{16}[cos(\frac{60^0 + 360^0.1}{4}) + isen(\frac{60^0 + 360^0.1}{4})]$$

$$w_1 = 2[cos(\frac{420^0}{4}) + isen(\frac{420^0}{4})]$$

$$w_1 = 2[cos(105^0) + isen(105^0)]$$

$w_1 = 2(-0,26 + 0,96i) \approx -0,52 + 1,92i$(primeira raiz)(segunda raiz),

$$w_2 = \sqrt[4]{16}[cos(\frac{60^0 + 360^0.2}{4}) + isen(\frac{60^0 + 360^0.2}{4})]$$

$$w_2 = 2[cos(\frac{780^0}{4}) + isen(\frac{780^0}{4})]$$

$$w_2 = 2[cos(195^0) + isen(195^0)]$$

$w_2 = 2(-0,96 - 0,26i) \approx -1,92 - 0,52i$(primeira raiz)(terceira raiz) e

$$w_3 = \sqrt[4]{16}[cos(\frac{60^0 + 360^0.3}{4}) + isen(\frac{60^0 + 360^0.3}{4})]$$

$$w_3 = 2[cos(\frac{1140^0}{4}) + isen(\frac{1140^0}{4})]$$

$$w_3 = 2[cos(285^0) + isen(285^0)]$$

$w_3 = 2(0,26 - 0,96i) \approx 0,52 - 1,92i$(quarta raiz).

Portanto, as raízes quartas são:

$w_0 = 2(0,96 + 0,26i) \approx 1,92 + 0,52i,$

$w_1 = 2(-0,26 + 0,96i) \approx -0,52 + 1,92i,$

$w_2 = 2(-0,96 - 0,26i) \approx -1,92 - 0,52i$ e

$w_3 = 2(0,26 - 0,96i) \approx 0,52 - 1,92i.$

Usando o GeoPlexo:

Lembrando que $z = 8 + 8\sqrt{3}i$, então $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16.$

Também, no plano complexo

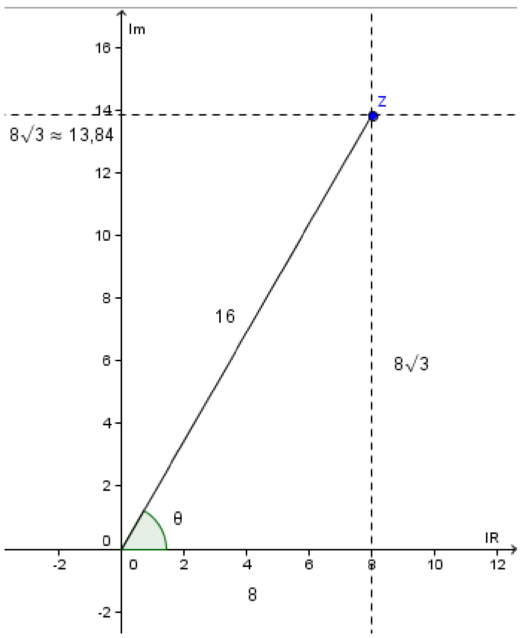

Figura 72: Representação geométrica

Fonte: Acervo particular

podemos escrever: $tg\theta = \dfrac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = 60^0.$

Tendo o módulo $\rho = 16$ e o argumento $\theta = 60^0$ e como queremos as raízes quartas devemos fazer:

$\rho' = \sqrt[4]{16} = 2$, que representa o módulo das raízes e $\theta_0 = \dfrac{60^0}{4} = 15^0$, que é o argumento da primeira raiz, ainda lembrando que a peça móvel é o quadrado(raízes quartas), agora basta posicionar um dos vértices do quadrado alinhado com o primeiro argumento $\theta_0 = 15^0$ e os demais argumentos ficarão automaticamente alinhados, como mostra a Figura 73. Daí basta fazer as leituras e anotar os resultados, ver Figuras 74, 75, 76 e 77.

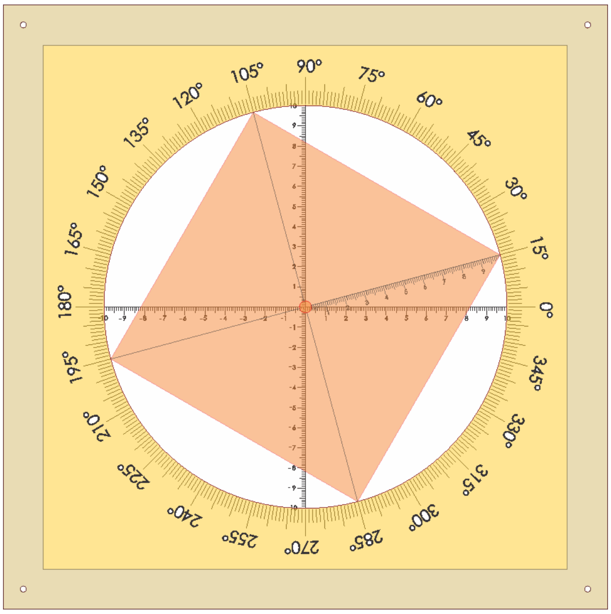

Figura 73: Posicionamento o quadrado

Fonte: Acervo particular

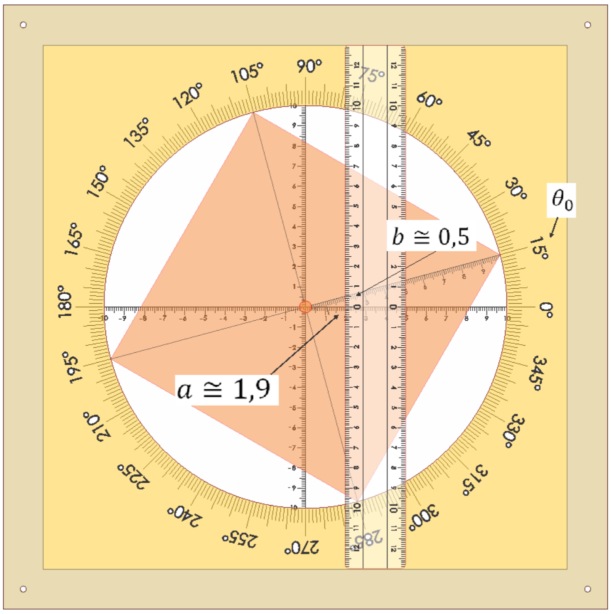

Figura 74: Leitura da primeira raiz

Fonte: Acervo particular

Primeira raiz: $w_0 \approx 1,9 + 0,5i$,

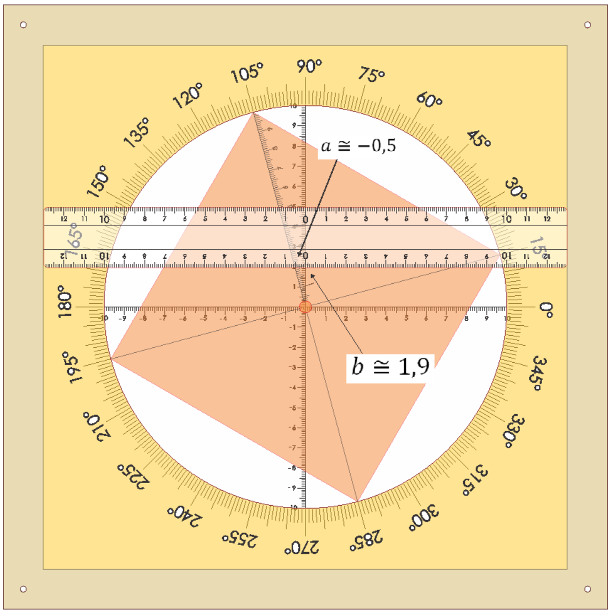

Figura 75: Leitura da segunda raiz

Fonte: Acervo particular

Segunda raiz: $w_1 \approx -0,5 + 1,9i$,

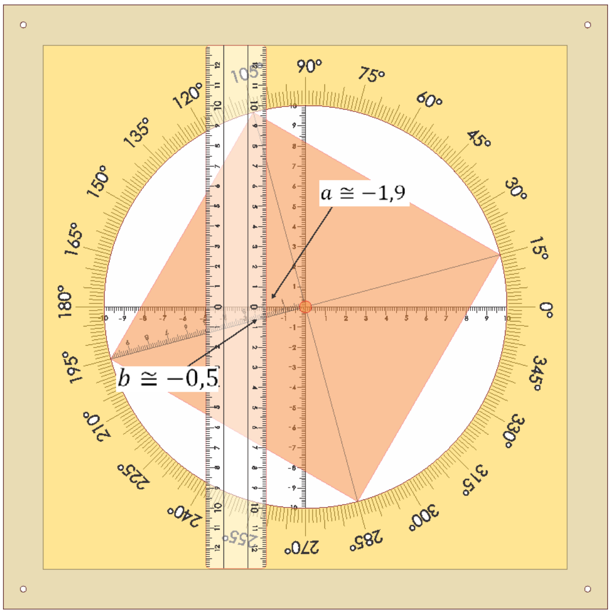

Figura 76: Leitura da terceira raiz

Fonte: Acervo particular

Terceira raiz: $w_2 \approx -1,9 - 0,5i$ e

E Finalmente:

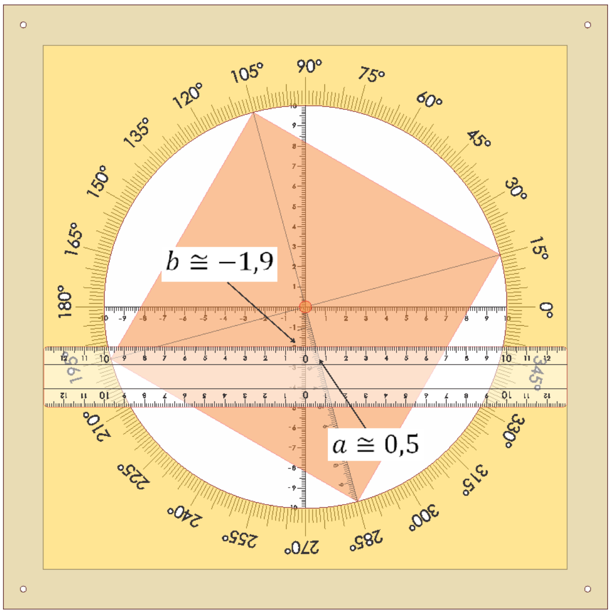

Figura 77: Leitura da quarta raiz

Fonte: Acervo particular

Quarta raiz: $w_3 \approx 0,5 - 1,9i$.

Portanto, as raízes quartas são:

$w_0 \approx 1,9 + 0,5i$,

$w_1 \approx -0,5 + 1,9i$,

$w_2 \approx -1,9 - 0,5i$ e

$w_3 \approx 0,5 - 1,9i$.

ATIVIDADE 11:

Escreva o conjunto solução da equação $w^5 = z$, dado que $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Método clássico:

Como $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$.

Agora, a representação geométrica facilitará a obtenção das informações para encontrar o argumento:

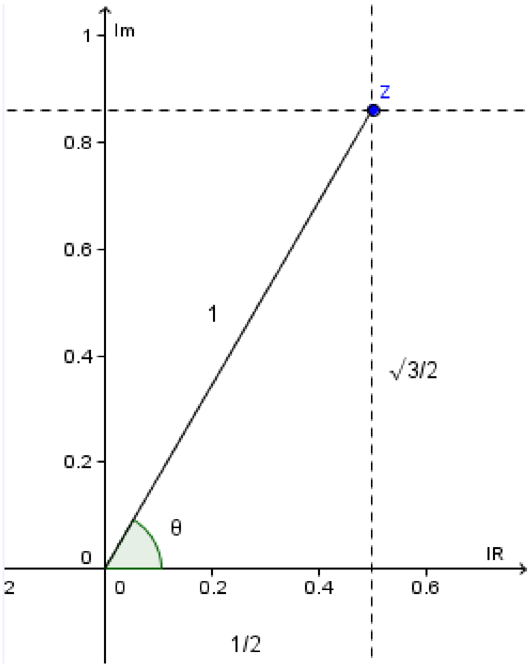

Figura 78: Representação geométrica

Fonte: Acervo particular

Daí podemos escrever: $tg\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = 60^0.$

Tendo o módulo e o argumento, podemos utilizar a segunda fórmula de Moivre:

$$w_k = \sqrt[5]{1}[cos(\frac{60^0 + 360^0 k}{5}) + isen(\frac{60^0 + 360^0 k}{5})] \Longrightarrow$$

$$w_k = 1.[cos(\frac{60^0 + 360^0 k}{5}) + isen(\frac{60^0 + 360^0 k}{5})]$$

$$w_k = cos(\frac{60^0 + 360^0 k}{5}) + isen(\frac{60^0 + 360^0 k}{5})$$

$$w_k = cos(\frac{60^0 + 360^0 k}{5}) + isen(\frac{60^0 + 360^0 k}{5}), \text{ com } k = 0, 1, 2, ..., (n-1),$$

neste caso $k = 0, 1, 2, 3, 4$, assim:

$$w_0 = cos(\frac{60^0 + 360^0.0}{5}) + isen(\frac{60^0 + 360^0.0}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_0 = cos(\frac{60^0}{5}) + isen(\frac{60^0}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_0 = cos12^0 + isen12^0 \Longrightarrow$$

$w_0 \approx 0,98 + 0,2i,$

$$w_1 = cos(\frac{60^0 + 360^0.1}{5}) + isen(\frac{60^0 + 360^0.1}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_1 = cos(\frac{420^0}{5}) + isen(\frac{420^0}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_1 = cos84^0 + isen84^0 \Longrightarrow$$
$$w_1 \approx 0,10 + 0,99i,$$

$$w_2 = cos(\frac{60^0 + 360^0.2}{5}) + isen(\frac{60^0 + 360^0.2}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_2 = cos(\frac{780^0}{5}) + isen(\frac{780^0}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_2 = cos156^0 + isen156^0 \Longrightarrow$$
$$w_2 \approx -0,91 + 0,40i,$$

$$w_3 = cos(\frac{60^0 + 360^0.3}{5}) + isen(\frac{60^0 + 360^0.3}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_3 = cos(\frac{1140^0}{5}) + isen(\frac{1140^0}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_3 = cos228^0 + isen228^0 \Longrightarrow$$
$$w_3 \approx -0,67 - 0,74i,$$

$$w_4 = cos(\frac{60^0 + 360^0.4}{5}) + isen(\frac{60^0 + 360^0.4}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_4 = cos(\frac{1500^0}{5}) + isen(\frac{1500^0}{5}) \Longrightarrow$$
$$w_4 = cos300^0 + isen300^0 \Longrightarrow$$
$$w_4 \approx 0,5 - 0,86i,$$

Portanto, as raízes quintas são:

$w_0 \approx 0,98 + 0,2i,$

$w_1 \approx 0,10 + 0,99i,$

$w_2 \approx -0,91 + 0,40i,$

$w_3 \approx -0,67 - 0,74i$ e

$w_4 \approx 0,5 - 0,86i$

Usando o GeoPlexo:

São necessários o módulo ρ e o argumento θ. Como $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, temos $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$.

E no plano de Argand-Gauss:

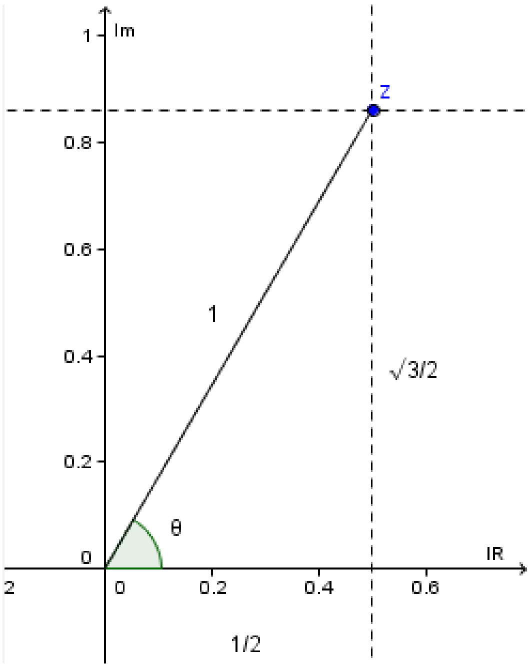

Figura 79: Representação geométrica

Fonte: Acervo particular

temos que $tg\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = 60^0$.

Tendo o valor do módulo $\rho = 1$ e do argumento $\theta = 60^0$ e sabendo que a solução do exercício são as raízes quintas de z:

$\rho' = \sqrt[5]{1} = 1$, que representa o módulo das raízes

e $\theta_0 = \frac{60^0}{5} = 12^0$, que representa o argumento da primeira raiz.

O próximo passo é escolher o pentágono(raízes quintas $\Longrightarrow n = 5$) e posicionar um de seus vértices alinhando com o 12^0, ficando, como já vimos, os outros vértices alinhados com os demais argumentos, Figura.

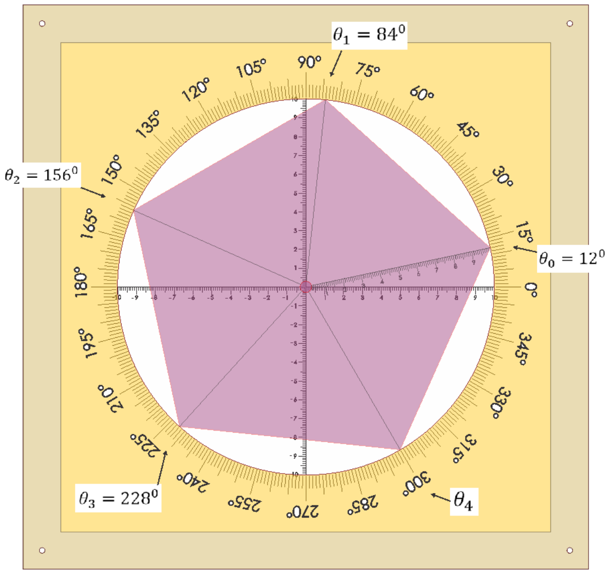

Figura 80: Posicionamento do pentágono

Fonte: Acervo particular

A partir daí basta iniciar as leituras, como mostra a figura 81.

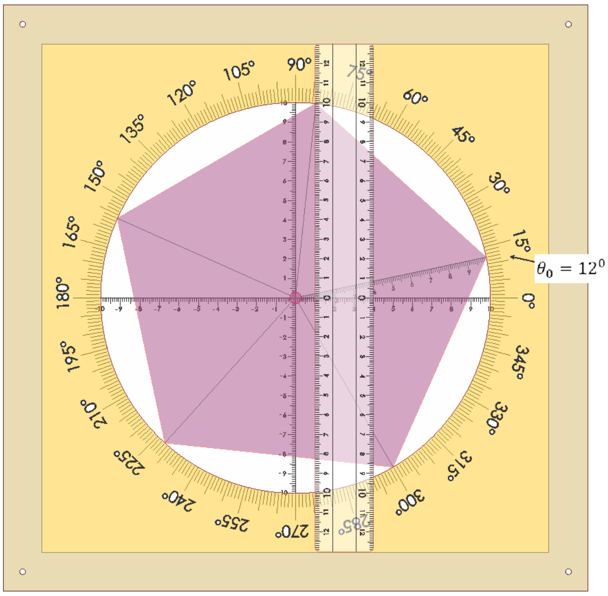

Figura 81: Primeira tentativa de leitura

Fonte: Acervo particular

Neste momento, podemos perceber certa dificuldade para fazer a leitura das projeções. Este evento gerou-se a partir da associação entre $\rho' = 1$ que é relativamente pequeno e de $\theta_0 = 12^0$ que nestas condições torna-se relativamente próximo ao eixo real.
Uma alternativa, é multiplicar o valor de $\rho' = 1$ por 5, ou seja $\rho'' = 5$. A partir daí, basta fazer as leituras, como mostram as figuras.

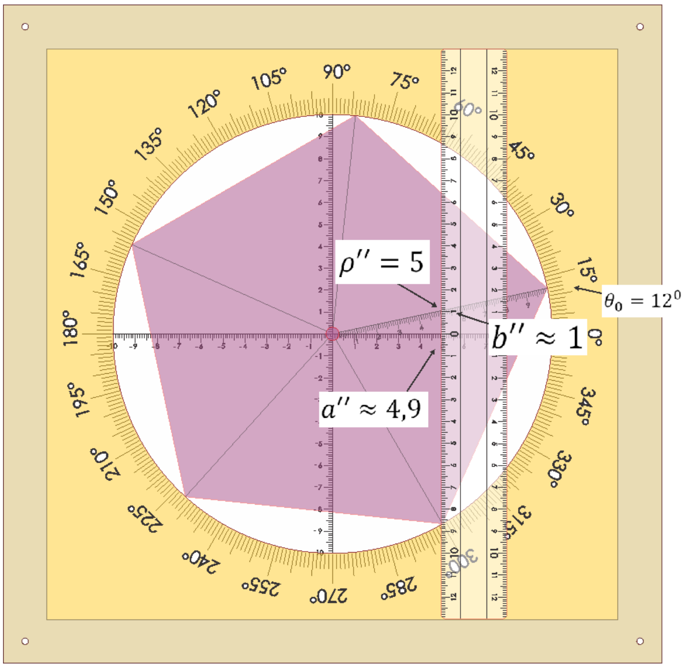

Figura 82: Leitura da primeira raiz

Fonte: Acervo particular

$w'_0 \approx 4,9 + 1.i,$

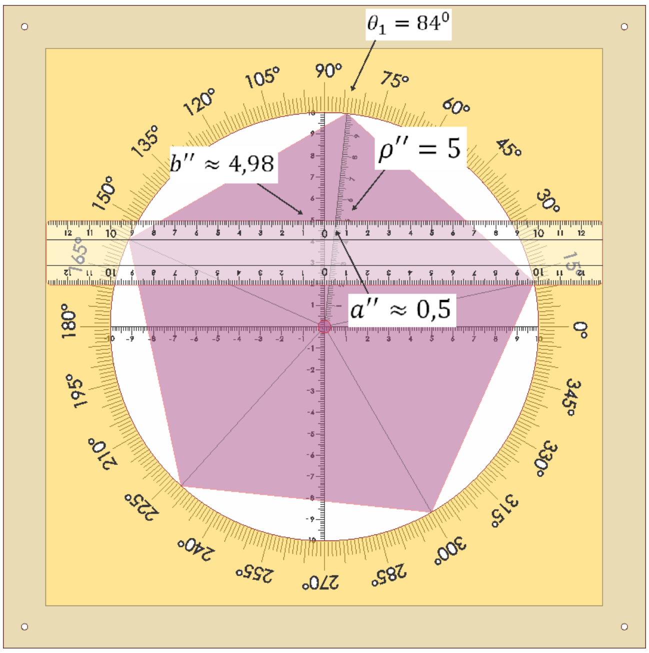

Figura 83: Leitura da segunda raiz

Fonte: Acervo particular

$w'_1 \approx 0,5 + 4,98.i,$

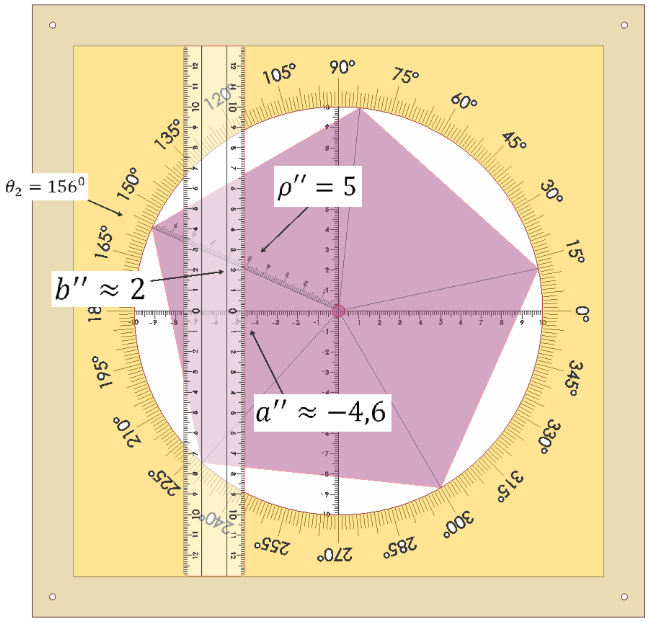

Figura 84: Leitura da terceira raiz

Fonte: Acervo particular

$w'_2 \approx -4,6 + 2.i$,

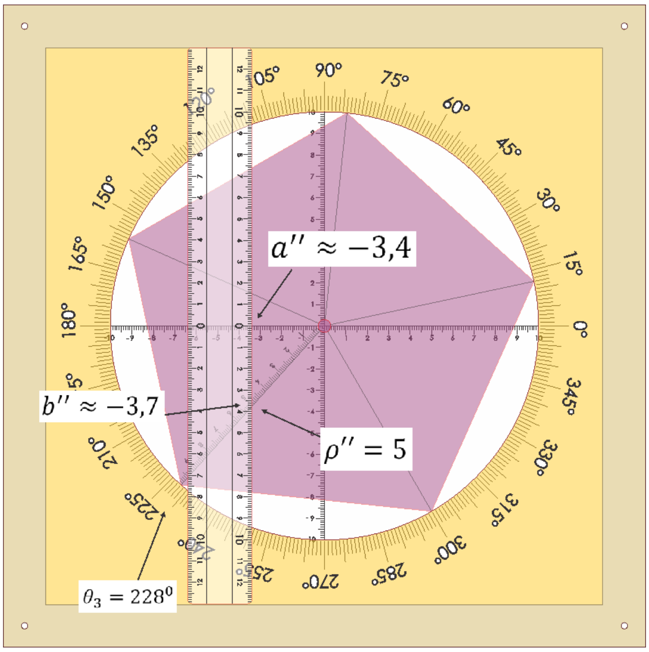

Figura 85: Leitura da quarta raiz

Fonte: Acervo particular

$w'_3 \approx -3,4 - 3,7.i$ e

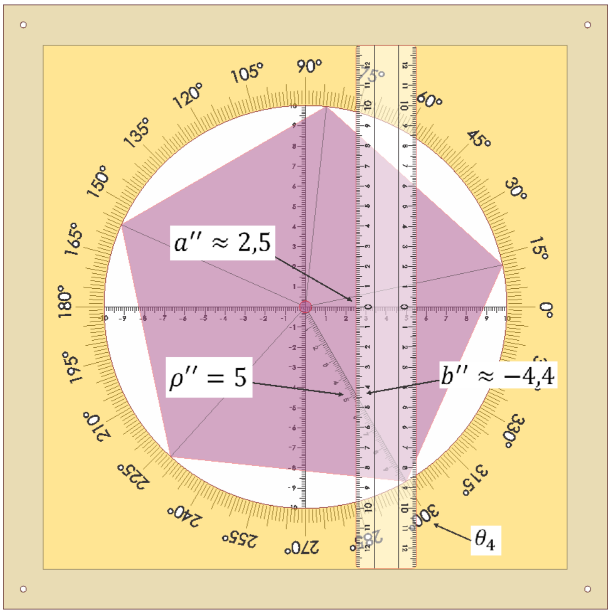

Figura 86: Leitura da quinta raiz

Fonte: Acervo particular

$w_4' \approx 2,5 - 4,4.i$

Agora, é de fundamental importância lembrar que, a solução final será $w_k = \dfrac{w_k'}{5}$,

Portanto, as raízes quintas serão, aproximadamente:

$$w_0 \approx \frac{4,9 + 1.i}{5} \Longrightarrow w_0 \approx 0,98 + 0,2i,$$
$$w_1 \approx \frac{0,5 + 4,98.i}{5} \Longrightarrow w_1 \approx 0,1 + 0,99i,$$
$$w_2 \approx \frac{-4,6 + 2.i}{5} \Longrightarrow w_2 \approx -0,92 + 0,4i,$$
$$w_3 \approx \frac{-3,4 - 3,7.i}{5} \Longrightarrow w_3 \approx -0,68 - 0,74i \text{ e}$$
$$w_4 \approx \frac{2,5 - 4,4.i}{5} \Longrightarrow w_4 \approx 0,5 - 0,88i$$

4.3 Discussão do Material Manipulativo

Apesar do objetivo principal de nosso trabalho não ser a aplicação do material, surgiu a oportunidade onde foram realizadas duas oficinas para a utilização do GeoPlexo. Num primeiro momento um encontro com 22 acadêmicos do PIBID, subprojeto Matemática PB, provenientes do 1º ao 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR de Pato Branco e em seguida com 10 acadêmicos do 3º ano que cursam a disciplina

Instrumentação para o Ensino da Matemática do mesmo curso e universidade. O intuito de primeiramente apresentar o material manipulativo GeoPlexo a acadêmicos do curso de licenciatura em matemática foi de obter o *feedback* de um público que já conhece sobre o assunto e que pudessem contribuir com nosso trabalho.

Foram resolvidas algumas das atividades da própria sequência deste capítulo e no final os alunos foram convidados a opinarem, de forma anônima e por escrito, sobre o uso do GeoPlexo.

As opiniões dos 32 acadêmicos foram analisadas e organizadas segundo suas percepções sobre o material manipulável e estão descritas na tabela 2.

Tabela 2: Percepções sobre o GeoPlexo

Percepções	**Número de citações**
Redução considerável da abstração existente no ensino dos Números Complexos	13
Material prático e de fácil manuseio	7
Interessante, porém necessita de melhorias na parte física	2
Excelente precisão na tomada de valores	5
A redução dos cálculos facilita os resultados	2
Possibilita a interação entre os alunos	2
Criativo e motivador, tornando a aula mais atrativa	6
Visualização de outros conteúdos relacionados	2

Fonte: Acervo próprio

É importante frisar que algumas opiniões estão associadas a mais de uma percepção, ou seja, a segunda coluna da tabela registra o total de vezes que cada percepção apareceu em cada comentário.

Também separamos algumas das descrições originais de opiniões que estão apresentadas a seguir:

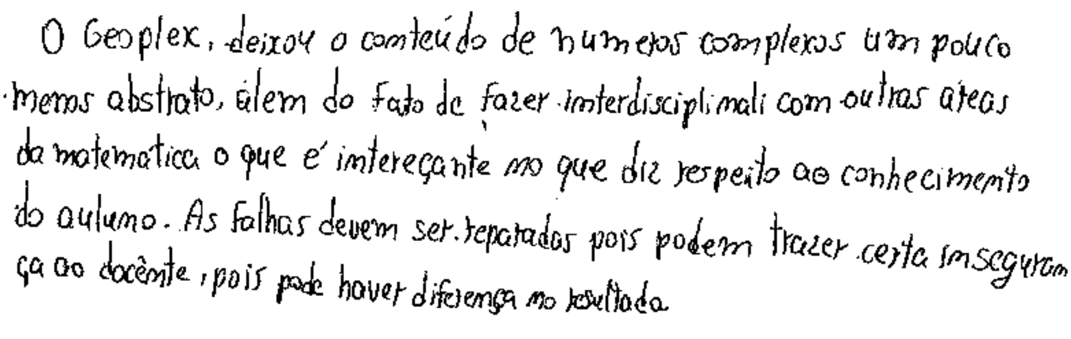
O Geoplex, deixou o conteúdo de numeros complexos um pouco menos abstrato, alem do fato de fazer interdisciplinali com outras areas da matematica o que é intereçante no que diz respeito ao conhecimento do aulumo. As falhas devem ser reparados pois podem trazer certa insegurança ao docênte, pois pode haver diferença no resultado.

Figura 87: Opinião 1

Fonte: Acervo particular

Neste comentário, o aluno faz comentários positivos quanto ao uso do Geoplexo, apenas com uma ressalva quanto à apresentação do material impresso que foi utilizado na oficina.

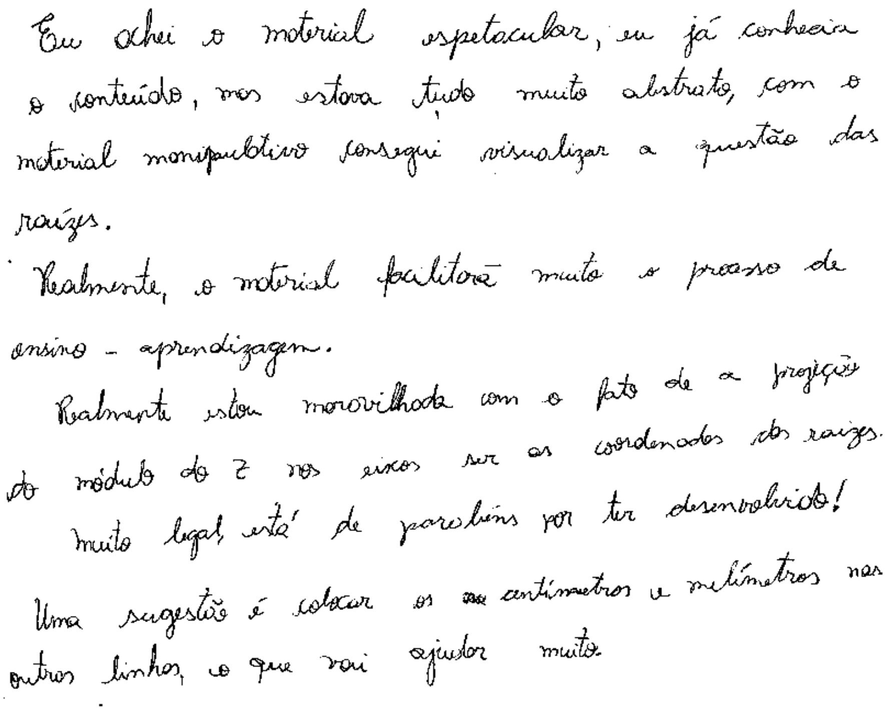
Eu achei o material espetacular, eu já conhecia
o conteúdo, mas estava tudo muito abstrato, com o
material manipulativo consegui visualizar a questão das
raízes.
Realmente, o material facilitará muito o processo de
ensino - aprendizagem.
Realmente estou maravilhada com o fato de a projeção
do módulo de z nos eixos ser as coordenadas das raízes.
Muito legal, está de parabéns por ter desenvolvido!
Uma sugestão é colocar os centímetros e milímetros nas
outras linhas, o que vai ajudar muito.

Figura 88: Opinião 2

Fonte: Acervo particular

Este comentário enfatiza vários pontos positivos do GeoPlexo, sugerindo a inclusão da graduação de todas as linhas internas dos polígonos regulares, fato antecipado e que já estava sendo resolvido.

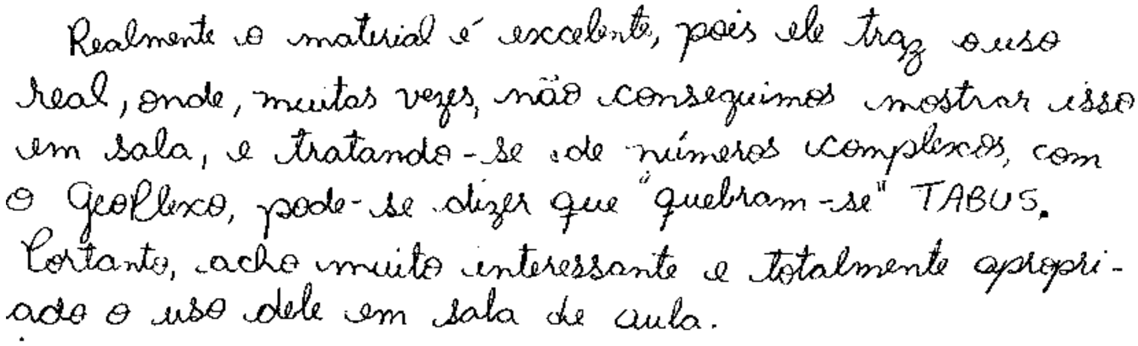
Realmente o material é excelente, pois ele traz o uso
real, onde, muitas vezes, não conseguimos mostrar isso
em sala, e tratando-se de números complexos, com
o GeoPlexo, pode-se dizer que "quebram-se" TABUS.
Portanto, acho muito interessante e totalmente apropri-
ado o uso dele em sala de aula.

Figura 89: Opinião 3

Fonte: Acervo particular

Este acadêmico também opina de maneira positiva quanto ao uso do GeoPlexo, considerando-o totalmente apropriado.

O material é muito bom e deve ser faxinante para os alunos no Ensino Médio.
Não sei se cabe a este relato, mas gostaria de fazer algumas ressalvas:
- Na parte equacionário e de cálculos na lousa não ficou muito claro;
- Quando definido $n = \frac{1}{N}$ deveria ter lembrado que $N \neq 0$, pois os alunos não tem maturidade necessária para compreender isto;

Enfim, o projeto é ótimo uma experiência muito válido.

Figura 90: Opinião 4

Fonte: Acervo particular

Apesar de considerar o material muito bom, este aluno critica a exposição na lousa, como ele mesmo escreve e também contribui lembrando sobre detalhes inerentes ao cálculo das raízes n-ésimas.

Com este material facilitou para conseguir entender melhor os números complexos, que todos aprendemos a ter medo no ensino médio.
Além de conseguirmos pegar e entender o resultado, é uma forma para alunos começarem a entender a matemática de outro modo, se com apenas números e contas não entendem.

Figura 91: Opinião 5

Fonte: Acervo particular

SIMPLESMENTE UM MATERIAL FANTASTICO, PRINCIPALMENTE PARA O PRIMEIRO CONTATO DO ALUNO COM O CONTEÚDO. ABRE A MENTE DO ALUNO PARA ENTENDER A FORMA GEOMÉTRICA DOS COMPLEXOS. MOSTRA PARA O ALUNO COMO É A CONSTRUÇÃO DOS NUMEROS COMPLEXOS

Figura 92: Opinião 6

Fonte: Acervo particular

Acredito que o Geoplexo possa auxiliar de uma maneira a diferenciar as aulas, ainda sobre um conteúdo que fica "nebuloso" na mentalidade do aluno, sendo assim, ter um material manipulável para tornar mais "próximo" do aluno, muda por completo a visão do conhecimento em si.

Porém vejo que a única dificuldade/empecilho do material é a sua precisão, mas não deixa a desejar em nada.

Figura 93: Opinião 7

Fonte: Acervo particular

O geoplex ajuda a dar mais significado no aprendizado sobre números complexos. É excelente, para demonstrar de forma física que os cálculos com complexos tem sentido.

Figura 94: Opinião 8

Fonte: Acervo particular

Eu achei o material incrível, mesmo não estando concluído ainda, já fornece uma excelente base para o ensino dos complexos, pois deixa de ser um conteúdo tão abstrato, estabelecendo uma relação entre o conteúdo escrito e o manual, sendo ótimo para o ensino em todos os níveis de ensino

Figura 95: Opinião 09

Fonte: Acervo particular

- Achei que o projeto envolvendo o kit GeoPlexo ajudou muito a mim para entender o conteúdo dos números complexos e também me possibilitou a trabalhar de uma maneira diferente quando eu for abordar esse conteúdo em sala de aula.

Acredito que o tempo foi uma dificuldade para o professor Alexandre, mas foi muito proveitoso e muito interessante abordar esse assunto e traz um material muito completo e pouco defeituoso na questão dos milímetros.

Figura 96: Opinião 10

Fonte: Acervo particular

Apesar do registro contemplar apenas dez opiniões, constatamos que todas se mostraram solidárias ao uso do material manipulável GeoPlexo em sala de aula e que a maioria ressaltou apenas pontos positivos. Outros comentários, considerados de grande importância, mostraram algumas falhas e/ou sugestões não necessariamente envolvendo apenas o material manipulável GeoPlexo, mas à explanação do conteúdo pelo mestrando, também nos ajudaram na melhoria deste trabalho.

As duas experiências foram muito positivas e fundamentais para a validação da proposta.

Durante a utilização do GeoPlexo percebemos a necessidade de realizarmos algumas alterações de maneira a dinamizar sua utilização e melhorar a precisão na tomada dos valores. A régua, por exemplo, passou a ter um formato um pouco diferente do que está descrito neste trabalho. Essa alteração consistiu em criar uma base mais ampla nas duas extremidades, a fim de facilitar o posicionamento na base de trabalho mantendo a perpendicularidade e/ou paralelismo uma vez que as projeções no plano de Argand-Gauss são ortogonais. Essa modificação pode ser vista na Figura 97.

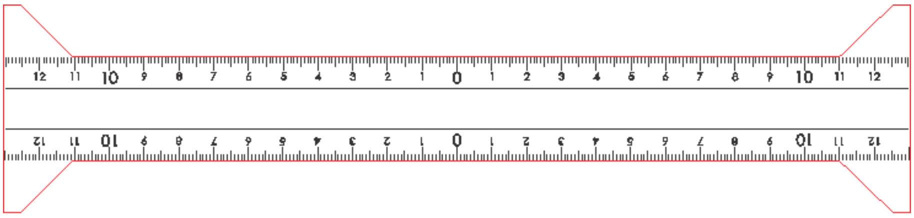

Figura 97: Nova Régua

Fonte: Acervo particular

A peças móveis, por sua vez, tiveram todas as linhas graduadas, tornando a leitura dos valores mais dinâmica, justamente por eliminar a necessidade de girá-las para posicionar a única linha que era graduada, como podemos verificar na Figura 98.

A partir deste trabalho, também percebemos a possibilidade e podemos sugerir como trabalhos futuros, a ampliação do uso do GeoPlexo, como no estudo da Trigonometria, possivelmente com a inclusão de outras peças ao modelo básico já desenvolvido e confeccionado.

As análise da bibliografia, os estudos e as experiências compartilhadas com colegas e professores durante os trabalhos dentro no programa PROFMAT, a oficina realizada com os acadêmicos do PIBID e da disciplina Instrumentação do Ensino da Matemática na utilização do GeoPlexo e a experiência em sala de aula nos possibilitaram compreender que há uma grande dificuldade no processo Ensino e Aprendizagem dos Números Complexos e que o uso algum recurso que motive este ensino e possibilite novas perspectivas, como o uso de Materiais Manipulativos, melhoram consideravelmente as chances de sucesso no processo ensino-aprendizagem.

Também percebemos que as discussões sobre essa questão está se elevando a um nível muito interessante, principalmente no que tange a importância dos Números Complexos no Ensino Básico, justamente pela sua importância em outras áreas do conhecimento, como é o caso das engenharias, mas também no próprio coroamento dos estudos realizados durante todo o Ensino Médio, uma vez que os Números Complexos contemplam um rol muito grande de conteúdos dentro da própria matemática. Na geometria plana, onde podemos utilizar desde a semelhança de triângulos e o estudo dos polígonos regulares. Na geometria analítica, sempre que utilizamos o plano de Argand-Gauss e tratamos do raio da circunferência onde os afixos estão localizados. Na trigonometria, pois os Números Complexos estão diretamente associados aos ângulos e suas relações trigonométricas. Nas progressões aritméticas, também associadas aos polígonos regulares e a própria unidade imaginária e todas as operações associadas às potências de i.

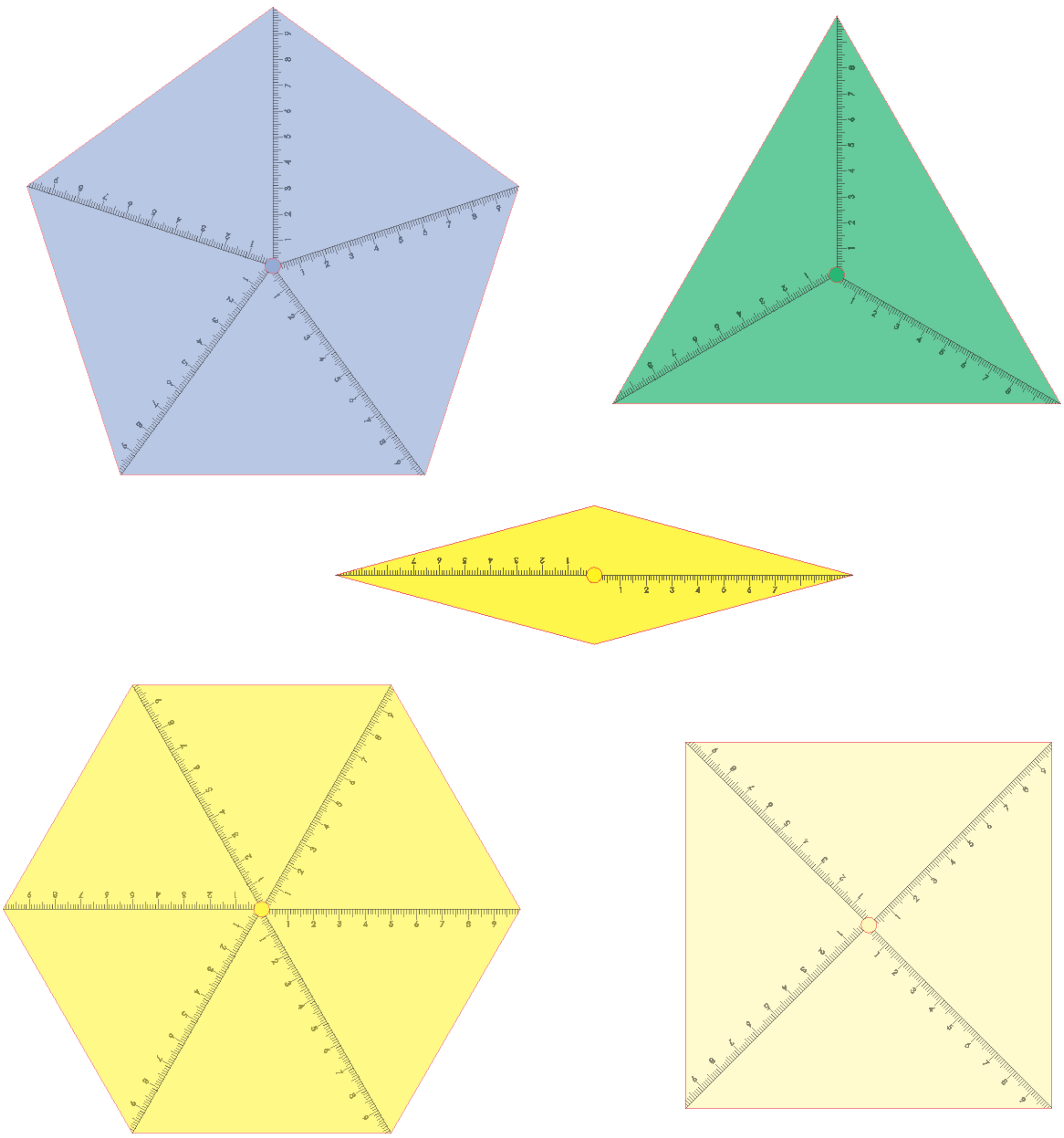

Figura 98: Novas Peças Móveis

Fonte: Acervo particular

5 Conclusões

A busca incansável pela melhor maneira de ensinar um determinado conteúdo, provavelmente seja uma companhia constante de todo o professor de matemática.

Ensinar a matemática já não tem sido uma das tarefas mais fáceis e quando se trata dos Números Complexos, parece que o nome faz jus à fama. De um lado, muitos alunos ansiosos em aprender, mas na maioria das vezes sem a base e motivação necessárias. De outro, os professores, que apesar da preocupação com a questão, muitas vezes não possuem recursos didáticos apropriados e segurança em relação ao tema.

Nosso objetivo de investigar e conhecer o cenário a partir do ponto de vista de pesquisas comprovou o elevado grau de dificuldade inerente ao assunto e a necessidade de ações que pudessem alavancar uma reação efetiva para o ensino dos Números Complexos.

Muitos esforços já foram realizados e muitas tentativas foram feitas em busca desta superação e por mais que pareça estarmos na contra mão da evolução tecnológica, acreditamos que a utilização de um material manipulável no ensino dos Números Complexos possa trazer novas perspectivas sobre o significado de novas tecnologias. E justamente por isso, que o nosso objetivo principal de desenvolver um material manipulável para o ensino dos Números Complexos foi atingido, dando vida ao GeoPlexo.

Relembrando a definição de Reys sobre materiais manipuláveis, citada por (SOUSA; OLIVEIRA, 1993) no *X* Encontro Nacional de Educação Matemática, *"objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que tem aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia"* e comparando com o GeoPlexo, percebemos que nosso objetivo foi atingido, justamente por atender a todas estas questões.

Além disso, o GeoPlexo também se enquadra na afirmação de Lorenzato (2006) que classifica como um bom material didático aquele que apresenta aplicabilidade para modelar um grande número de ideias matemáticas, justamente por toda a gama de conteúdos envolvidos em seu uso, como as geometrias plana e analítica, a trigonometria, as progressões aritméticas, dentre outras.

E ainda, percebemos que o GeoPlexo atende a todos os critérios elencados por Reys para selecionar bons materiais manipuláveis, seja quanto à personificação do conceito a ser explorado, pois o GeoPlexo foi desenvolvido especificamente para este ensino; da clareza na apresentação, pois acreditamos que o material facilita a abordagem do conteúdo; da motivação, por se tratar de algo novo e concreto atrai a atenção do aluno; podem ser usados em diferentes anos de escolaridade, neste caso ressaltamos que o uso é direcionado ao ensino médio onde os alunos estão em condições de acompanhar o raciocínio; proporcionam base para a abstração, a medida que o aluno começa perceber a relação do material com os conteúdos já conhecidos e manipulação individual, pois o material pode ser usado exclusivamente por um aluno.

Acreditamos que o GeoPlexo possa ser somado a outros esforços que visem melhorar o Ensino dos Números Complexos, sendo mais um recurso didático à serviço do Professor de Matemática e de seus alunos.

Percebemos que o GeoPlexo pode ser utilizado no ensino de outros conteúdos da matemática e por isso podemos sugerir algumas ideias para trabalhos futuros:

1. utilizar o GeoPlexo para o ensino da circunferência trigonométrica;

2. utilizar o GeoPlexo para o ensino da função seno e da função co-seno de um ângulo;

3. utilizar o GeoPlexo nas operações de adição e multiplicação de Números Complexos.

Referências

ALMEIDA, S. P. de. *Números Complexos Para o Ensino Médio: Uma Abordagem com História, Conceitos Básicos e Aplicações - Dissertação*. Campina Grande - PB: [s.n.], 2013. Citado na página 12.

ARAUJO, A. T. de. *Números Complexos: Um estudo de aplicações a trigonometria e as equações algébricas - Dissertação*. Juazeiro do Norte - CE: [s.n.], 2014. Citado na página 10.

ARAúJO, B. L. de. *Aplicabilidade dos Números Complexos nos Circuitos Elétricos em Corrente Alternada - Dissertação*. João Pessoa - PB: [s.n.], 2014. Citado na página 13.

ARAúJO, T. de S. *Números Complexos e Cônicas - Dissertação*. Amazonas - AM: [s.n.], 2014. Citado na página 10.

BASTOS, L. de M. *Números Complexos e Geogebra - Dissertação*. Rio Claro - SP: [s.n.], 2013. Citado na página 8.

CALDEIRA, C. R. da C. *Números Complexos: Uma Proposta Geometria - Dissertação*. Porto Alegre - RS: [s.n.], 2013. Citado na página 11.

CAON, F. *Números Complexos: Inter-Relação entre Conteúdos e Aplicações*. Ponta Grossa - Pr: [s.n.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 17.

CAON, F. *úmeros Complexos: Inter-Relação entre Conteúdos e Aplicações - Dissertação*. Ponta Grossa - PR: [s.n.], 2013. Citado na página 5.

CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria/Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Citado na página 20.

CHAGAS, J. S. B. *A Relevância do Ensino de Números Complexos no Ensino Médio na Opinião do Professores de Matemática - Dissertação*. Campos dos Goytacazes - RJ: [s.n.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 13.

COSTA, R. F. da. *A Matemática e os Circuitos Elétricos de Corrente Contínua - Dissertação*. Porto Alegre - RS: [s.n.], 2007. Citado na página 2.

CUNHA, D. da. *Modelagem Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem de Números Complexos: Uma Proposta Didática- Dissertação*. Londrina - PR: [s.n.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 11.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2010. Citado na página 16.

DIAS, M. A. *Representação Geométrica dos Números Complexos: Aplicações e Possibilidades Didáticas - Dissertação*. Santo André - SP: [s.n.], 2013. Citado na página 12.

FEITOSA, L. F. *Aplicações dos Números Complexos na Geometria Plana - Dissertação*. João Pessoa - PB: [s.n.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.

FILHO, J. M. B. *Transformação de Mobius no Plano Complexo - Dissertação*. São José do Rio Preto - SP: [s.n.], 2013. Citado na página 14.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática. Ano 4, nº 7*. 1993. Disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didaticos/>. Citado na página 40.

FONSECA, J. C. M. da. *Números Complexos: Uma Abordagem Para o Ensino Médio - Dissertação*. Manaus - AM: [s.n.], 2013. Citado na página 14.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. *Matemática Completa - 2ª edição*. São Paulo: FTD, 2005. Citado na página 36.

GOMES, M. R. *Explorando Um Tratamento Matricial Para Uma Introdução dos Números Complexos - Dissertação*. Viçosa - MG: [s.n.], 2013. Citado na página 11.

GOMES, R. *Números Complexos e Polinômios - Dissertação*. Maringá - PR: [s.n.], 2013. Citado 3 vezes nas páginas 5, 8 e 9.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e Equações Algébricas*. Rio de Janeiro: SBM: Coleção PROFMAT, 2012. Citado na página 17.

JúNIOR, W. L. de F. *Números Complexos: Uma Proposta de Ensino - Dissertação*. Niterói - RJ: [s.n.], 2013. Citado na página 11.

LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria - 4ª edição*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do Ensino Médio - Volume 2*. Rio de Janeiro: SBM - Coleção Do Professor de Matemática, 2006. Citado na página 29.

LIRA, E. da S. *Uma Aplicação dos Números Complexos no Ensino Médio da Educação Profissional Técnica - Dissertação*. Teresina - PI: [s.n.], 2014. Citado na página 10.

LOPES, T. B. *Uma metodologia baseada na história para a obtenção do conceito sobre Números Complexos - Dissertação*. Palmas - TO: [s.n.], 2014. Citado na página 10.

LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis*. Campinas: Autores Associados, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 39, 41 e 102.

MILIES, C. P. *A emergência dos números complexos*. São Paulo: SBM: Revista do Professor de Matemática, nº 24, pp. 5-15, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

MILIES, F. C. P. *A introdução dos números complexos*. 2000. Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/complexos.html>. Citado na página 17.

MONZON, L. W. *Números Complexos e Funções de Variáveis Complexas no Ensino Médio - Dissertação*. Porto Alegre - RS: [s.n.], 2012. Citado na página 9.

NACARATO, A. M. *Eu Trabalho Primeiro no Concreto*. São Paulo: SBEM-SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 9-10, p. 1-6, 2005. Citado na página 39.

NETO, A. L. *funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 1993. Citado na página 20.

NEVES, R. C. *Aplicações de Números Complexos em Geometria*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2014. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 29.

NEVES, R. C. *Aplicações de Números Complexos em Geometria - Dissertação*. Rio de Janeiro - RJ: [s.n.], 2014. Citado na página 12.

NOBRE, W. R. *Números Complexos e Algumas Aplicações - Dissertação*. Niterói - RJ: [s.n.], 2013. Citado na página 9.

OLIVEIRA, O. R. B. de. *Cálculo Diferencial e Integral IV - Intitudo de Física da USP*. 2009. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~oliveira/MAT220IFCap1.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.

OLIVEIRA, S. B. de. *Números Complexos e Geometria - Dissertação*. Campina Grande - PB: [s.n.], 2014. Citado na página 10.

OLIVEIRA, W. A. de. *Números Complexos: Ensino e Aplicações - Dissertação*. Mato Grosso do Sul - MS: [s.n.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 13.

PAES, L. A. A. *Números Complexos: Uma Proposta Didática Baseada na Modelagem Matemática e em Contextos Históricos - Dissertação*. Londrina - Pr: [s.n.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 11.

PARANá, S. de Estado da Educação do. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica*. 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Citado na página 2.

PCN. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1998. Citado na página 2.

PEREIRA, H. R. *Números Complexos e Transformação de Mobius - Dissertação*. Goiânia - GO: [s.n.], 2013. Citado na página 14.

PINHEIRO, R. B. *Números Complexos: Alguns Aspectos Algébricos e Geométricos - Dissertação*. São Luis - MA: [s.n.], 2013. Citado na página 11.

PROFMAT. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Citado na página 31.

ROCHA, A. S. da. *Nem Complexos, nem imaginário. Ressignificando o ensio de Números Complexos no Ensino Médio - Dissertação*. vitória da Conquista - BA: [s.n.], 2013. Citado na página 12.

ROCHA, V. J. *Números Complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra - Dissertação*. Goiânia - GO: [s.n.], 2014. Citado na página 14.

SANTOS, J. C. A. dos. *Números Complexos Aplicados à Geometria - Dissertação*. Rio de Janeiro - RJ: [s.n.], 2014. Citado na página 12.

SANTOS, M. A. dos. *Dos Números Complexos aos Quatérnions: Desenvolvimento Algébrico, Interpretação Geométrica e Aplicações - Dissertação*. Curitiba - PR: [s.n.], 2013. Citado na página 14.

SIMãO, M. R. *Números Complexos: Um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3º ano do Ensino Médio - Dissertação*. Juiz de Fora - MG: [s.n.], 2014. Citado na página 10.

SOUSA, G. C. de; OLIVEIRA, J. D. S. de. *O uso de materiais manipuláveis e jogos no ensino de matemática*. 1993. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T11_CC468.pdf>. Citado 4 vezes nas páginas 2, 39, 40 e 102.

SPADA, A. B. D. *A Construção de Jogos de Regras na Formação dos Professores de Matemática - Dissertação*. Brasília - DF: [s.n.], 2009. Citado na página 6.

SUL, U. F. do Rio Grande do. *Curso de especialização em matemática, mídias digitais e didática*. 2013. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/>. Citado na página 9.

ÁVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações - 3ª edição*. Rio de Janeiro: LTC, 2008. Citado na página 24.