UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

(Mestrado)

PRISCILA GLEDEN NOVAES DA SILVA

FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI: HISTÓRIA E PROPRIEDADES

Maringá-PR
2013

PRISCILA GLEDEN NOVAES DA SILVA

Funções Elípticas de Jacobi: História e Propriedades

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá
2013

Funções Elípticas de Jacobi: História e Propriedades

Priscila Gleden Novaes da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

COMISSÃO JULGADORA

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali - Orientador
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Prof. Dr. Cícero Lopes Frota
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Prof. Dr. Jamil Vianna Pereira
UNESP-RC

Aprovada em: xx de março de 2013.
Local de defesa: Anfiteatro xxxxxx, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Acima de tudo, rendo graças a Deus, que me tem abençoado, guiado e guardado com Sua onipotentíssima mão por toda minha vida.

Agradeço a toda minha família, especialmente, a meus pais, à Andréia, ao Gabriel e à vó Adélia por seu apoio, carinho e tempo dispensado cuidando do meu bem mais precioso, meu filho.

A meus grandes amigos Cláudio e Gislaine, por estarem sempre por perto quando mais preciso deles.

A todos os queridos colegas do mestrado, especialmente aos amigos Amarildo, Cleonice, Roberto e Ronaldo, nossa convivência foi sem dúvida a melhor parte desses dois anos e será inesquecível.

Sou grata aos professores por seu empenho, especialmente ao meu orientador Dr. Fábio Matheus Amorin Natali, pela condução no trabalho e pela confiança que em mim depositou na realização deste.

Duas pessoas em especial merecem meus agradecimentos, meu caro esposo Heli e meu filho Leonardo. A meu esposo por seu amor, por me ter feito acreditar e estar aqui, e aos dois, pela compreensão e paciência nos momentos de ausência e por me fazerem sentir tão amada.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

O Senhor é o meu rochedo, e o meu lugar forte, e o meu libertador; o meu Deus a minha fortaleza, em quem confio; o meu escudo, a força da minha salvação, e o meu alto refúgio.

Salmos 18:2

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar as funções elípticas de Jacobi. Primeiro, fazemos um relato histórico do desenvolvimento dessa teoria, passando pelos principais matemáticos envolvidos e suas contribuições ao tema. Adicionalmente, definimos as integrais e funções elípticas, bem como, provamos algumas de suas principais propriedades. Finalmente, uma aplicação que tange a existência de soluções periódicas para uma equação diferencial não linear.

Palavras-chave: Funções especiais. Funções Elípticas de Jacobi.

Abstract

The objective of this dissertation is to present the Jacobi's Elliptic Functions. First, we do a historical account of the development of this theory, through the leading mathematicians involved and their contributions to the subject. Additionally, we define the integrals and elliptic functions, and we prove some of its main properties. Finally, an application regarding the existence of periodic solutions for a nonlinear differential equation.

Keywords: Special Functions. Jacobi's Elliptic Function.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

As integrais elípticas e as funções elípticas têm atraído, por um longo tempo, os matemáticos, não somente pela beleza de sua teoria, mas também pela sua utilização em aplicações práticas.

Em 1702, John Bernoulli conjecturou que a integral de qualquer função racional pode ser expressa em termos de outra função racional, trigonométrica ou logarítmica, o que se verifica verdadeiro [6]. No entanto, problemas como calcular o comprimento do arco de uma elipse ou de uma hipérbole requeriam um tipo especial de integração em suas soluções.

É nesse contexto que surge, despertando o interesse de inúmeros matemáticos, uma importante classe de integrais, as do tipo $\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{P(x)}}$ em que $P(x)$ representa um polinômio do terceiro ou quarto grau em x, e $F(x)$ uma função racional. Segundo [8], quando as raízes de $P(x)$ são todas desiguais foi provado ser impossível reduzir essa integral às conhecidas integrais elementares (logarítmicas, funções trigonométricas inversas e funções algébricas).

Frente à dificuldade apresentada no entendimento de textos clássicos e escassa bibliografia em português, sentimos a necessidade de, neste trabalho, fazer um texto de caráter didático, que visasse trazer aos estudantes e pesquisadores de Matemática e Física, uma abordagem simples e consistente sobre a teoria e o cálculo dessas integrais e funções, secundada pelo encadeamento histórico do surgimento de tais ideias. Parte deste trabalho foi desenvolvido em conjunto com a mestranda Cleonice Salateski Simão.

O desenvolvimento histórico dessas funções tem início com Fagnano em seus estudos sobre a lemniscata, seguido por Euler e Legendre, a quem coube o importante papel de reduzir as integrais do tipo acima citado em três grupos de integrais conhecidas como integrais elípticas de primeira, segunda e terceira espécie.

No entanto, as descobertas que viriam de fato fundamentar essa teoria foram apresentadas por Abel e Jacobi, ao inverter as integrais elípticas em funções elípticas e mostrar sua dupla periodicidade, fato que, ao que parece, já era conhecido por Gauss.

Tendo em vista que as funções elípticas são normalmente definidas pela inversão de uma integral, inicialmente definiremos dessa maneira as funções circulares, seno e cosseno, mostrando que podemos, mesmo através de uma definição não usual, encontrar suas conhecidas propriedades.

Após a definição das funções elípticas de Jacobi, procedemos com a explanação sobre suas propriedades: módulo, identidades, derivadas, expansão em séries de potências, os casos degenerados e fórmulas da adição de arcos. Estendemos então a definição dessas funções para todos os valores reais, obtemos sua periodicidade, seu comportamento gráfico e mostramos as outras funções que advém das conhecidas *sn u*, *cn u* e *dn u*. Apresentamos também uma definição alternativa baseada em conceitos geométricos.

O estudo detalhado de tais tópicos indica quão duro e dificultoso tornar-se-ia qualquer esforço em tentar abranger todos os principais aspectos matemáticos envolvidos. Nosso objetivo primordial aqui é a partir de um relato histórico, apresentar de maneira mais detalhada as propriedades destas funções e integrais, bem como, uma de suas aplicações.

Utilizando o método da quadratura, buscaremos as soluções periódicas reais para a equação

$$-\varphi'' + \omega\varphi - \varphi^3 = 0 \quad (i)$$

que pode ser escrita $\varphi'^2 = \frac{1}{2}F_\varphi(t)$ onde F é um polinômio dado por $F_\varphi(t) = -t^4 + 2\omega t^2 + 4B$ e B é uma constante de integração. Para este fim, usaremos o método descrito em [12]. Como as soluções da equação (i) devem depender das raízes do polinômio F_φ, mostraremos que se F_φ tem raízes reais $\pm\eta_1$, $\pm\eta_2$ com $\eta_1 \geq \eta_2 \geq 0$, obtemos uma solução do tipo onda dnoidal dada por

$$\varphi(\varepsilon) = \eta_1 dn\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\varepsilon; k\right) \quad \text{com} \quad \frac{(\eta_1^2 - \eta_2^2)}{\eta_1^2}$$

e com período fundamental T_φ, dado por

$$T_\varphi \equiv \frac{2\sqrt{2}}{\eta_1} K(k),$$

onde dn representa a função elíptica de Jacobi do tipo dnoidal.

Assim dividiremos esse trabalho em três capítulos. O primeiro traz um relato histórico do desenvolvimento da teoria das funções elípticas. O segundo capítulo destina-se a definir e apresentar as propriedades dessas funções. E, no terceiro capítulo, tratamos de uma aplicação desta teoria à solução de uma equação diferencial. Para terminar apresentamos as considerações finais.

Capítulo 1

História das Funções Elípticas de Jacobi

Giulio Carlo Fagnano nasceu em 06 de dezembro de 1682 e morreu em 26 de setembro de 1766 em Sinigaglia (hoje Senigallia), Itália. Considerado o primeiro matemático a se interessar pela teoria das funções elípticas, foi um autodidata em matemática e tratou o assunto como hobby. No entanto, alcançou fama internacional considerável como matemático por suas contribuições a diversos temas como métodos de resolução de equações de segundo, terceiro e quarto graus e triângulos [3].

Fagnano recebeu muitos prêmios. Louis XV, em 1721, lhe conferiu o título de conde, em 1723 foi eleito para o Royal Society de Londres e em 1745 foi feito marquês de Sant' Onofrio. Além disso, em 1766, foi proposto para a Academia de Ciências de Paris, mas morreu antes que pudesse ser eleito.

Em seu estudo sobre a retificação da lemniscata, Fagnano provou propriedades notáveis como o cálculo de sua área e o fato de seus arcos poderem ser divididos em n partes iguais usando uma régua e compasso, introduzindo através desse estudo engenhosas transformações analíticas que seriam as bases para a teoria das integrais elípticas [8].

Segundo [9], os teoremas de Fagnano proporcionaram um início fundamental para o entendimento da natureza das integrais elípticas e tornaram-se um marco para todo o desenvolvimento posterior. Seu trabalho *Method for Measuring the Lemniscate*, publicado em 1718 teria despertado o entusiasmo de Euler, que partindo dos resultados de Fagnano obteve a fórmula da adição para as integrais elípticas.

Leonard Euler, um suíço que nasceu na Basiléia em 1707 e morreu em Petrogrado, atual

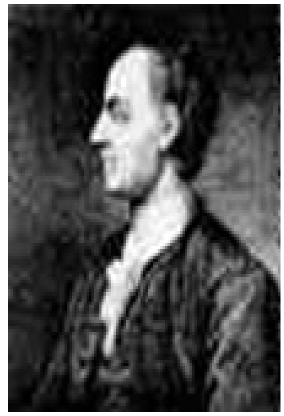

Figura 1.1: Leonard Euler

São Petersburgo, em 1783, encontrou sua vocação na matemática após tentar uma carreira na teologia. Primeiramente instruído por seu pai, que tinha sido aluno de Jakob Bernoulli (1654-1705), Euler teve uma ampla instrução, pois, somado ao estudo da matemática e teologia havia medicina, astronomia, física e línguas orientais [6].

Segundo [8], "Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática; não há ramo da matemática que seu nome não figure" (p.472). Além disso, em quase tudo o que escrevia Euler já o fazia na notação que usamos hoje, sendo conhecido como o construtor de notação mais bem sucedido de todos os tempos. Publicou mais de 500 livros e artigos sobre os mais diversos ramos da Matemática.

Partindo então dos resultados de Fagnano, [9] relata que as ideias fundamentais com relação à adição e multiplicação das integrais elípticas de primeira ordem foram desenvolvidas no trabalho *De Integratione Aequationis Differentialis* de Euler.

O próximo matemático a investigar as integrais elípticas foi Legendre. Adrien-Marie Legendre nasceu em Toulouse em 18 de setembro de 1752 e faleceu em Paris em 10 de janeiro de 1833. Suas obras mais notáveis são *Geómetrie, Theorie des Nombres, Exercicis de Cálcul Intégral* e o *Traité des Fonctions Elliptiques.*

Legendre foi, como se sabe, o primeiro a empreender esforço para reduzir as integrais da forma

$$\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{P(x)}} \tag{1.1}$$

onde $P(x)$ representa um polinômio do terceiro ou quarto grau em x e $F(x)$ uma função racional. Foi ele o primeiro a averiguar que as expressões desta espécie, denominadas integrais elípticas, não podiam ser reduzidas às formas normais conhecidas [6].

Sua redução origina três novas formas, que, na impossibilidade de mais simples expressão, se calculam numericamente. Esses três termos chamam-se integrais elípticas. A redução a esses termos é encontrada em [13] e foge ao objetivo de nosso trabalho. Teremos, então que o integral (2.1) origina três grupos de integrais. São elas:

$$F(x,k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{1.2}$$

$$E(x,k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} \tag{1.3}$$

$$\Pi(x,\lambda,k) = \int_0^x \frac{dt}{(1-\lambda t^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{1.4}$$

que se chamam integrais elípticas de primeira, segunda e terceira espécie, respectivamente. Se os coeficientes em $P(x)$ forem reais, sua redução à essas formas pode ser efetuada de modo que k seja real e $0 < k < 1$.

Por quase quarenta anos Legendre teria realizado pesquisas neste ramo da Matemática estando muitos dos seus resultados expostos nos seus trabalhos: *Exercices de Calcul Integral e Traité des Fonctions Elliptiques*. À ele é creditado o fato de ter demonstrado que todas as integrais elípticas podem ser reduzidas às três formas canônicas fixas, que podem ainda ser escritas na forma trigonométrica abaixo, ao substituirmos $t = \operatorname{sen}\phi$ e fazendo o limite inferior da integração como zero [13].

$$F(\phi,k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}} \tag{1.5}$$

$$E(\phi,k) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}\,d\phi \tag{1.6}$$

$$\Pi(x,\lambda,k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{(1+\lambda\operatorname{sen}^2\phi)}\sqrt{(1-k^2\operatorname{sen}^2\phi)}} \tag{1.7}$$

Segundo [9], desde o início todo esforço em reduzir a integral (1.1) às conhecidas formas elementares de integrais foram em vão, valendo lembrar os trabalhos de McLaurin (1742),

V. Ricatti (1742) e D'Alembert (1746, 1748), os quais não produziram significativos avanços sobre o tema. Suas tentativas de reduzir muitas das integrais do tipo (1.1) para o caso particular que representa o comprimento do arco de uma elipse teria implicado na suposição incorreta que esta integral é a mais simples de todas as integrais. Ao que tudo indica, do ponto de vista histórico, esta seria a razão porque integrais desse tipo receberam a denominação de integrais elípticas.

Legendre foi, portanto, quem encerrou basicamente esse ciclo ao introduzir as três formas normais para as integrais elípticas. Mais tarde, Abel e Jacobi, de forma simultânea e independente, analisando os trabalhos de Legendre, deram um novo e valiosíssimo impulso ao estudo deste ramo da análise.

Figura 1.2: Niels Henrik Abel

Vindo de uma família pobre, Niels Henrik Abel nasceu em Findoe, na Noruega, em cinco de agosto de 1802 e morreu em Arendal no dia seis de março de 1829. Conforme [6], Abel nasceu numa numerosa família e perdeu o pai aos dezoito anos tendo sobre si uma grande responsabilidade com a família. Mesmo diante de adversidades aos dezenove anos provou a impossibilidade de se resolver uma equação algébrica de grau cinco por meio de radicais.

Conforme [9], a teoria das integrais elípticas como desenvolvida por Fagnano, Euler e Legendre era excessivamente complicada, envolvendo muitos valores para cada integral elíptica. Em 1827, Abel, trouxe mais simplicidade ao tema ao inverter as integrais elípticas em funções elípticas, e mostrar que essas funções são duplamente periódicas. A consideração das funções inversas aos integrais de Legendre mostrou a possibilidade de tornar a sua teoria análoga à das funções trigonométricas.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado o príncipe dos matemáticos, talvez, tenha sido o primeiro pesquisador a trabalhar com as funções elípticas como sendo uma função inversa das integrais elípticas. Segundo [9], é intrigante o fato de Gauss não ter publicado seus resultados em torno das funções elípticas, pois em sua obra *Disquisitiones Arithmeticae* de 1801 já havia algum conhecimento de muitos dos teoremas que foram mais tarde introduzidos e demonstrados por Abel e Jacobi em 1823.

Acerca da discussão sobre quem seria de fato o precursor dessas descobertas na teoria das funções elípticas [6] afirma:

> Não é fácil estabelecer-se a prioridade da descoberta da dupla periodicidade. O tratado clássico de Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellpiticarum*, apareceu em 1829, o ano da morte de Abel, e o trabalho de Abel foi publicado em 1827-1828. Mas Gauss parece ter sido de longe o primeiro a fazer a descoberta, que ficara repousando entre seus papéis por um quarto de século antes que Abel e Jacobi também dessem com ela. (p.376).

De ascendência judia, Carl Gustav Jacobi nasceu em Potsdam em dez de dezembro de 1804 e faleceu em Berlim em dezoito de fevereiro de 1851. Foi educado na Universidade de Berlim onde obteve o grau de doutor em 1825. Foi professor em Konigsberg (1827-1842) e em Berlim até sua morte.

Considerado o maior professor de matemática de sua geração, introduziu o que hoje constitui a notação da teoria das funções elípticas e chamou de funções elípticas às funções inversas, permanecendo desde então a denominação de integrais elípticas para aquelas do tipo (1.1). [8]

Este trabalho tratará das denominadas funções elípticas de Jacobi que são definidas através da inversão das integrais completas de primeira espécie, simbolizadas por $K(k)$ e

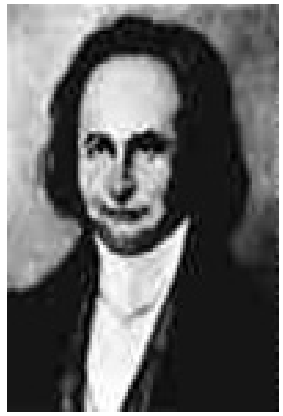

Figura 1.3: Carl Gustav Jacobi

definidas trigonometricamente por

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi)}} = F(\frac{\pi}{2}, k)$$

De acordo com [9] a grande contribuição de Abel foi estudar o limite superior x dessas equações como uma função de u. Jacobi introduziu a notação $\phi =$ amplitude de u, ou melhor, $\phi = am\ u$ e considerando x uma função de u, escreveu

$$x = \operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} am\ \ u$$

associando-se a essa função as duas outras funções elípticas

$$\cos \phi = \cos am\ \ u$$

e

$$\Delta\phi = \Delta am\ \ u = 1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u$$

Posteriormente, Gudermann (1758-1851) e Glaisher (1848-1928) modificaram tal notação para

$$x = \operatorname{sen} \phi = sn\ \ u$$

Enquanto para as outras duas temos

$$\sqrt{(1 - x^2)} = \cos \phi = cn\ \ u$$

e

$$\sqrt{1 - k^2 x^2} = \Delta\phi = dn\ \ u,$$

sendo esta última a notação que utilizaremos neste trabalho e que mantém uma analogia com as funções circulares ordinárias que são, sob certas circunstâncias, um caso degenerado das funções elípticas jacobianas.

As funções $sn\ u$, $cn\ u$ e $dn\ u$ são denominadas senoidal, cnoidal e dnoidal, respectivamente e suas definições, bem como, propriedades serão discutidas no próximo capítulo.

Capítulo 2

Funções Elípticas de Jacobi

2.1 Funções Circulares: Seno e Cosseno

A fim de melhor entendermos a forma pela qual as funções elípticas são geralmente definidas, primeiramente façamos o mesmo com as funções circulares.

Definimos a função $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \qquad (i)$$

Como o integrando é positivo e a derivada de (i) é também positiva, caracterizamos $u(x)$ como estritamente crescente. Além disso, usando [14] teremos:

$$\lim_{x \to 1^-} u(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \operatorname{sen}^{-1} 1 - sen^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad (ii)$$

observe ainda que $u(x)$ é uma função ímpar, pois,

$$\begin{aligned} u(-x) &= \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= -\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \end{aligned}$$

Assim, a equação (i) define u como uma função de x que varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$ enquanto x varia de 0 a 1.

Inversamente, a mesma equação define x como uma função de u que varia de 0 a $\frac{\pi}{2}$ enquanto x varia de 0 a 1 ; denotemos essa função por $\operatorname{sen} u$, e teremos em (i)

$$u = \operatorname{sen}^{-1} x, \quad logo, \ x = \operatorname{sen} u \qquad (iii)$$

A função $\cos u$ pode ser definida como sendo a relação:

$$\cos u = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} \qquad (iv)$$

tendo a raiz quadrada positiva quando $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, temos que $\cos u$ é uma função par.

Como pela definição $u = 0$ quando $x = 0$ e $u = \frac{\pi}{2}$ quando $x = 1$, notamos, em particular que $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Partindo da equação (iv) obtemos a famosa identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1 \qquad (v)$$

enquanto da equação (i) temos que $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ e, portanto,

$$\frac{d(\operatorname{sen} u)}{du} = \frac{dx}{du} = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} = \cos u \qquad (vi)$$

e então, pelas regras de diferenciação $\frac{d(\cos u)}{du} = \frac{d(\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u})}{du} = -\operatorname{sen} u$.

Podemos agora, pela diferenciação repetida e substituição nas séries de Maclaurin, encontrar as expansões de $\operatorname{sen} u$ e $\cos u$ em potências de u.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} u &= u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos u &= 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Podemos também provar as fórmulas da Adição de Arcos

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v \qquad (vii)$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \qquad (viii)$$

Provemos (vii). Assumindo que u, v e $(u+v)$ pertencem ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e considerando

$$z = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

Diferenciando parcialmente temos:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + \cos u \cos v,$$

então, $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}$ e podemos fazer $z = F(u+v)$, portanto,

$$F(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$

onde $F(u+v)$ denota uma função de $u+v$. Como as funções F e *seno* possuem o mesmo domínio, provemos que estas são iguais ponto a ponto.

Se colocarmos $v = 0$ temos $F(u) = \operatorname{sen} u \cos 0 + \cos u \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} u\ \forall u$, como $u + v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, temos que $F(u+v) = \operatorname{sen}(u+v)$, o que prova o desejado.

Até agora, u tem estado restrito ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, e podemos através da fórmula da soma estender a definição de $\operatorname{sen} u$ para todos os outros valores reais de u. Assim, se pusermos $u = u_1$ e $v = \frac{\pi}{2}$ em (vii) obtemos $\operatorname{sen}(u_1 + \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} u_1 \cos\frac{\pi}{2} + \cos u_1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \cos u_1$, fazendo nessa fórmula $u = u_1 + \frac{\pi}{2}$ ela pode ser reescrita $\operatorname{sen} u = \cos(u - \frac{\pi}{2})$ que define $\operatorname{sen} u$ quando $\frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi$.

O mesmo pode ser feito para $u = u_1$ e $v = \pi$ de onde obtemos $\operatorname{sen}(u_1 + \pi) = \operatorname{sen} u_1 \cos\pi + \cos u_1 \operatorname{sen}\pi = -\operatorname{sen} u_1$, ou melhor, $\operatorname{sen} u = -\operatorname{sen}(u - \pi)$ que define $\operatorname{sen} u$ quando $\frac{\pi}{2} \leq u \leq 2\pi$. Fazendo agora $v = 2\pi$ vem que $\operatorname{sen}(u_1 + 2\pi) = \operatorname{sen} u_1 \cos 2\pi + \cos u_1 \operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen} u_1$ e temos dessa forma definido $\operatorname{sen} u$ para todos os valores reais de u, além de que, mostramos que é uma função periódica, com período 2π. Lançando mão do método descrito acima definiremos as funções elípticas de Jacobi.

2.2 Funções Elípticas de Jacobi: *sn u*, *cn u*, *dn u*

Seja

$$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{2.1}$$

e

$$K(k) = u(1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{2.2}$$

Primeiramente supondo x e k reais com $0 < k < 1$ e $-1 \leq x \leq 1$, temos as raízes $\sqrt{(1-t^2)}$ e $\sqrt{(1-k^2t^2)}$ positivas. A equação (2.1) define u como uma função ímpar de x, com o integrando do lado direito da equação positivo, variando de 0 a K enquanto x varia de 0 a 1.

Inversamente, a mesma equação define x como uma função de u, que varia de 0 a 1 enquanto u varia de 0 a K. Esta função é denotada por $sn\ u$, por isso, de (2.1) podemos colocar $u = sn^{-1}x$ e

$$x = sn \quad u \tag{2.3}$$

As outras funções elípticas básicas, as funções cnoidal e a dnoidal, ou, $cn\ u$ e $dn\ u$ podem ser definidas pelas equações

$$cn \quad u = \sqrt{(1 - sn^2u)} \tag{2.4}$$

$$dn \quad u = \sqrt{(1 - k^2sn^2u)} \tag{2.5}$$

cada raiz quadrada sendo positiva quando u pertence ao intervalo $[-K, K]$, logo $cn\ u$ e $dn\ u$ são funções pares de u.

2.3 Propriedades

2.3.1 Módulo

Apesar de serem funções de u, chamado argumento, as funções $sn\ u$, $cn\ u$ e $dn\ u$ dependem do parâmetro k, que é denominado módulo das funções jacobianas, sendo $k^{'} = \sqrt{(1-k^2)}$ ou

$$k^{'2} + k^2 = 1 \tag{2.6}$$

o módulo complementar.

Para diferentes valores do módulo (às vezes utiliza-se $m = k^2$, como aparece na definição), haverá diferentes valores para as funções elípticas para cada argumento particular. Ou seja, $sn\ u$, $cn\ u$ e $dn\ u$ são na verdade, funções de duas variáveis, e no caso em que a explicitação de dependência sobre k seja necessária escreve-se $sn(u, k)$, $cn(u, k)$ e $dn(u, k)$.

Como pela definição temos $u = 0$ se $x = 0$ e $u = K$ se $x = 1$, temos que $sn\ 0 = 0$ e $sn\ K = 1$. Por outro lado, $cn\ u = \sqrt{(1 - sn^2 u)}$, logo $cn\ 0 = 1$ e $cn\ K = 0$. Além disso, $dn\ u = \sqrt{(1 - k^2 sn^2 u)}$ de onde vem $dn\ 0 = 1$ e $dn\ K = k^{'}$.

2.3.2 Identidades

Das equações (2.4) e (2.5) seguem as identidades

$$\begin{aligned} sn^2 u + cn^2 u &= 1 && (2.7)\\ dn^2 u + k^2 sn^2 u &= 1 && (2.8)\\ k^2 cn^2 u + k^{'2} &= dn^2 u && (2.9)\\ cn^2 u + k^{'2} sn^2 u &= dn^2 u && (2.10) \end{aligned}$$

Temos que as identidades (2.7) e (2.8) vêm direto das equações (2.4) e (2.5).

Como $k^{'2} + k^2 = 1$, por (2.7) temos $k^2(sn^2 u + cn^2 u) + k^{'2} = 1$, aplicando a distributiva e reorganizando obtemos $k^2 cn^2 u + k^{'2} = 1 - k^2 sn^2 u$ que por (2.8) traz $k^2 cn^2 u + k^{'2} = dn^2 u$, provando (2.9).

A identidade (2.10) também pode ser provada a partir de (2.7) pois $1 = sn^2 u + cn^2 u = (k^{'2} + k^2) sn^2 u + cn^2 u = cn^2 u + k^{'2} sn^2 u + k^2 cn^2 u$, assim temos por (2.8) que $cn^2 u + k^{'2} sn^2 u = dn^2 u$.

2.3.3 Derivadas

As derivadas de $sn\ u$, $cn\ u$ e $dn\ u$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{d(sn\ u)}{du} &= cn\ u\, dn\ u && (2.11)\\ \frac{c(cn\ u)}{du} &= -sn\ u\, dn\ u && (2.12)\\ \frac{d(dn\ u)}{du} &= -k^2 sn\ u\, cn\ u && (2.13) \end{aligned}$$

Com efeito, temos que

$$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-t^2)}},$$

logo,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

Dessa forma, por (2.3), segue que

$$\frac{d(sn\ u)}{du} = \frac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-sn^2x}\sqrt{1-k^2sn^2x} = cn\ u\ dn\ u$$

o que prova (2.11). Agora, pelas regras de diferenciação e identidades obtemos (2.12) e (2.13)

$$\frac{d\,(cn\ u)}{du} = \frac{d\left(\sqrt{1-sn^2u}\right)}{du} = -\frac{2sn\ u\ cn\ u\ dn\ u}{2\sqrt{1-sn^2u}} = -\frac{sn\ u\ cn\ u\ dn\ u}{\sqrt{cn^2u}} = -sn\ udn\ u$$

$$\frac{d(dn\ u)}{du} = \frac{d\left(\sqrt{1-k^2sn^2u}\right)}{du} = -\frac{2k^2sn\ u\ cn\ u\ dnu}{2\sqrt{1-k^2sn^2u}} = -\frac{k^2sn\ u\ cn\ u\ dnu}{\sqrt{dn^2u}} = -k^2sn\ u\ cn\ u$$

.

2.3.4 Expansão em Séries de Potências de u

Calculando as derivadas sucessivas de $sn\ u$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{d(sn\ u)}{du} &= cn\ u\,dn\ u\\
\frac{d^2(sn\ u)}{du} &= -sn\ u\,dn^2u - k^2\ sn\ u\,cn^2u\\
\frac{d^3(sn\ u)}{du} &= -cn\ u\,dn^3u + 2k^2\ dn\ u\,sn^2u\,cn\ u - k^2\ dn\ u\,cn^3u + 2k^2\ sn^2u\,dn\ u\,cn\ u\\
\frac{d^4(sn\ u)}{du} &= sn\ udn^4u + 3k^2\ cn^2u\,dn\ u\,sn\ u - 2k^4\ sn^3u\,cn^2u + 4k^2\ sn\ u\,dn^2u\,cn^2u -\\
&\quad 2k^2\ dn^2u\,sn^3u + k^4\ cn^4u\,sn\ u + 3k^2\ cn\ u\,sn\ u\,dn^2u - 2k^4\ sn^3u\,cn^2u +\\
&\quad 4k^2\ sn\ u\,dn^2u\,cn^2u - 2k^2\ sn^3u\,dn^2u.
\end{aligned}$$

A fim de reduzirmos um pouco o trabalho e o tamanho das expressões, na derivada quinta apenas nos interessa os termos em que $sn\ u$ não figuram, pois quando substituirmos $u = 0$

sabemos que tais termos irão zerar. Portanto, faz sentido derivarmos na expressão acima apenas os termos em que $sn\ u$ aparecem com potência um.

Assim obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d^5(sn\ u)}{du} \quad = \quad & cn\ u\ dn^5u - 4k^2\ sn^2u\ cn\ udn\ u - 6k^2\ sn^2u\ cn\ u\ dn^2u - 3k^4\ cn^3u\ sn^2u + \\ & 3k^2\ cn^3u\ dn^2u + 4k^2cn^3u\ dn^3u - 8k^4\ sn^2u\ dn\ u\ cn^3u - 8k^2\ sn^2u\ dn^3u\ cn\ u - \\ & 4k^4\ cn\ u\ sn^2u\ dn\ u + k^4cn^5u\ dn\ u - 3k^2\ sn^2u\ dn^3u + 3k^2\ cn^2u\ dn^3u - \\ & 6k^4\ cn^2u\ sn^2u\ dn\ u + 4k^2\ cn^3u\ dn^3u - 8k^4\ cn^3u\ sn^2u\ dn\ u - 8k^2\ sn^2u\ dn^3u\ cn\ u.\end{aligned}$$

Fazendo $u = 0$, lembrando que $sn\ 0 = 0$ e $cn\ 0 = dn\ 0 = 1$ e substituindo na série de Maclaurin obtemos

$$sn\ u = u - \frac{(1+k^2)u^3}{3!} + \frac{(1+14k^2+k^4)u^5}{5!} + \dots \qquad (2.14)$$

Da mesma forma podemos encontrar os valores das sucessivas derivadas de $cn\ u$ e $dn\ u$ quando $u = 0$, e substituindo na série de Maclaurin encontramos os primeiros termos da expansão dessas funções em séries de potências de u:

$$cn\ u \quad = \quad 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{(1+4k^2)u^4}{4!} - \dots \qquad (2.15)$$

$$dn\ u \quad = \quad u - \frac{k^2u^2}{2!} + \frac{k^2(4+k^2)u^4}{4!} - \dots \qquad (2.16)$$

Segundo [9] poucos são os detalhes conhecidos sobre tais expansões e que, ao que parece, não há nenhuma fórmula de recorrência para tais coeficientes. Na citada referência a série avança até os primeiros quinze termos (p. 31).

2.3.5 Fórmulas da Adição Para As Funções Elípticas

$$sn(u+v) = \frac{sn\,u\;cn\,v\;dn\,v + sn\,v\;cn\,u\;dn\,u}{1-k^2sn^2u\;sn^2v} \tag{2.17}$$

$$cn(u+v) = \frac{cn\,u\;cn\,v - sn\,u\;dn\,v\;sn\,v\;dn\,u}{1-k^2sn^2u\;sn^2v} \tag{2.18}$$

$$dn(u+v) = \frac{dn\,u\;dn\,v - k^2\;sn\,u\;cn\,u\;sn\,v\;cn\,v}{1-k^2sn^2u\;sn^2v} \tag{2.19}$$

Mostremos tais fatos.

Denotemos $s_1 = sn\,u$, $s_2 = sn\,v$, $c_1 = cn\,u$, $c_2 = cn\,v$, $d_1 = dn\,u$, $d_2 = dn\,v$ e fazendo $\Delta = 1 - k^2 s_1^2 s_2^2$. Seja

$$z = \frac{(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)}{\Delta} \tag{2.20}$$

então, por diferenciação parcial em relação a u, conseguimos em (2.20) pela regra do quociente e considerando as derivadas de sn, cn e dn

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\Delta(c_1d_1c_2d_2 - s_1s_2d_1^2 - k^2s_2s_1c_1^2) + (2k^2s_1c_1d_1s_2^2)(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)}{\Delta^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u}\Delta^2 &= \Delta[(c_1d_1c_2d_2) - s_1s_2(d_1^2 + k^2c_1^2)] + 2k^2s_1c_1d_1s_2^2(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1) \\
&= \Delta(c_1d_1c_2d_2) - \Delta s_1s_2(d_1^2 + k^2c_1^2) + 2k^2s_1^2s_2^2c_1d_1c_2d_2 + 2k^2s_1c_1^2d_1^2s_2^3 \\
&= c_1d_1c_2d_2(\Delta + 2k^2s_1^2s_2^2) - s_1s_2[\Delta(d_1^2 + k^2c_1^2) - 2k^2s_2^2c_1^2d_1^2] \\
&= c_1d_1c_2d_2(\Delta + k^2s_1^2s_2^2 + k^2s_1^2s_2^2) - s_1s_2[\Delta d_1^2 + \Delta(k^2c_1^2) - k^2s_2^2c_1^2d_1^2 - k^2s_2^2c_1^2d_1^2]
\end{aligned}$$

como $\Delta = 1 - k^2s_1^2s_2^2$ temos $\Delta + k^2s_1^2s_2^2 = 1$, então

$$\frac{\partial z}{\partial u}\Delta^2 = c_1d_1c_2d_2(1 + k^2s_1^2s_2^2) - s_1s_2[d_1^2(\Delta - k^2s_2^2c_1^2) + k^2c_1^2(\Delta - s_2^2d_1^2)]$$

Novamente utilizando $\Delta = 1 - k^2s_1^2s_2^2$ e as identidades $s_1^2 + c_1^2 = 1$ e $d_2^2 + k^2s_2^2 = 1$ obtemos $\Delta - k^2s_2^2c_1^2 = 1 - k^2s_1^2s_2^2 - k^2s_2^2c_1^2 = 1 - k^2s_2^2(s_1^2 + c_1^2) = d_2^2$. Além disso, pelo mesmo argumento $\Delta - s_2^2d_1^2 = 1 - k^2s_1^2s_2^2 - s_2^2d_1^2 = 1 - s_2^2(k^2s_1^2 + d_1^2) = c_2^2$, portanto substituindo na última expressão de $\frac{\partial z}{\partial u}\Delta^2$ obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial u}\Delta^2 = c_1d_1c_2d_2(1 + k^2s_1^2s_2^2) - s_1s_2[d_1^2d_2^2 + k^2c_1^2c_2^2]$$

Observemos que $\frac{\partial z}{\partial u}$ é simétrico em u e v, e como z também é simétrico, segue que $\frac{\partial z}{\partial v}$ será igual a $\frac{\partial z}{\partial u}$, ou seja, z satisfaz a equação diferencial parcial $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial u}$. Consequentemente, para uma função $f(u+v)$ de $u+v$, temos $z = f(u+v)$, onde

$$f(u+v) = \frac{(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)}{1 - k^2s_1^2s_2^2}$$

e se fizermos $v = 0$ obtemos $f(u) = sn\, u\ \forall u$, logo $f(u+v) = sn(u+v)$. O que prova (2.17).

Agora por (2.8) e (2.17) temos

$$cn^2(u+v) = 1 - sn^2(u+v) = 1 - \frac{(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)^2}{(1 - k^2s_1^2s_2^2)^2}$$

$$= \frac{[(1 - k^2s_1^2s_2^2)^2 - (s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)^2]}{(1 - k^2s_1^2s_2^2)^2}$$

se expressarmos $(1 - k^2s_1^2s_2^2)^2$ na forma $(c_1^2 + s_1^2d_2^2)(c_2^2 + s_2^2d_1^2)$ então a expressão se reduz para

$$cn^2(u+v) = \frac{(c_1c_2 - s_1s_2d_1d_2)^2}{(1 - k^2s_1^2s_2^2)^2}.$$

Após tirarmos as raízes quadradas de ambos os lados e substituirmos $v = 0$, percebemos que devemos optar pelo sinal positivo. E assim deduzimos (2.18).

Por fim, a partir de (2.9) e (2.17) temos

$$dn^2(u+v) = 1 - k^2sn^2(u+v) = 1 - \frac{k^2(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)^2}{(1 - k^2s_1^2s_2^2)^2}$$

$$= \frac{[(1 - k^2s_1^2s_2^2)^2 - k^2(s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)^2]}{(1 - k^2s_1^2s_2^2)^2}$$

No lado direito do numerador substituímos $(1 - k^2s_1^2s_2^2)^2$ por $(d_1^2 + k^2s_1^2c_2^2)(d_2^2 + k^2s_2^2c_1^2)$ e depois de feita uma redução obtemos (2.19).

2.3.6 Extensão da Definição de $sn\ u$, $cn\ u$ E $dn\ u$ Para Todos os Valores Reais de u

A fórmula da adição pode agora ser utilizada para ampliar a definição das funções elípticas para valores além do intervalo $[-K, K]$, de forma que suas propriedades continuem a ser satisfeitas. Como feito para seno e cosseno, fazendo $v = K$ em (2.17), (2.18) e (2.19), e sabendo que $sn\, K = 1$, $cn\, K = 0$ e $dn\, K = k'$ obtemos

$$sn(u+K) = \frac{sn\, u\, cn\, K\, dn\, K + sn\, K\, cn\, u\, dn\, u}{1 - k^2 sn^2 u sn^2 K} = \frac{cn\, u\, dn\, u}{dn^2 u} = \frac{cn\, u}{dn\, u} \tag{2.21}$$

$$cn(u+K) = \frac{cn\, u\, cn\, K - sn\, u\, dn\, K\, sn\, K\, dn\, u}{1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 K} = -\frac{k' sn\, u\, dn\, u}{dn^2 u} = -\frac{k' sn\, u}{dn\, u} \tag{2.22}$$

$$dn(u+K) = \frac{dn\, u\, dnK - k^2\, sn\, u\, cn\, u\, sn\, K\, cn\, K}{1 - k^2\, sn^2 u\, sn^2 K} = \frac{k' dn\, u}{dn^2 u} = \frac{k'}{dn\, u} \tag{2.23}$$

Fazendo agora $u = K$, vemos que

$$sn\, 2K = 0,\ cn\, 2K = -1,\ dn\, 2K = 1 \tag{2.24}$$

Novamente, se pusermos $v = 2K$ em (2.17), (2.18) e (2.19) e usarmos o resultado (2.24), temos

$$sn(u+2K) = -sn\, u \tag{2.25}$$

$$cn(u+2K) = -cn\, u \tag{2.26}$$

$$dn(u+2K) = dn\, u \tag{2.27}$$

De (2.25) e (2.26), através da substituição de u por $u + 2K$,

$$sn(u+4K) = sn\, u \text{ e } cn(u+4K) = cn\, u \tag{2.28}$$

Estendemos assim o intervalo de definição das funções elípticas para todos os valores reais, além disso, da equação (2.28) vê-se que $sn\, u$ e $cn\, u$ são funções periódicas de u, com período $4K$, e de (2.27) que $dn\, u$ é periódica com período $2K$.

Utilizando o programa MAPLE em todos os gráficos deste trabalho, abaixo mostramos o comportamento das três funções, indicados nas figuras 2.1, 2.2 e 2.3.

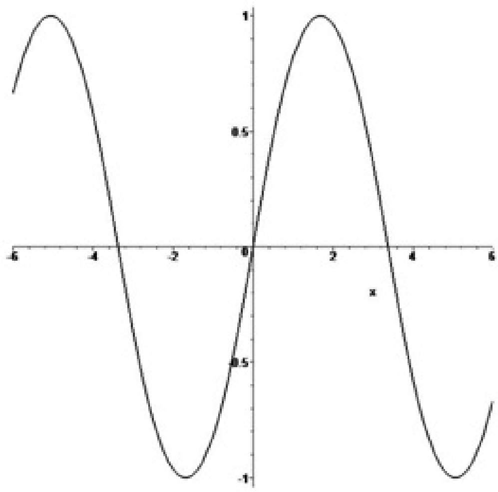

Figura 2.1: Gráfico sn(u,0.5)

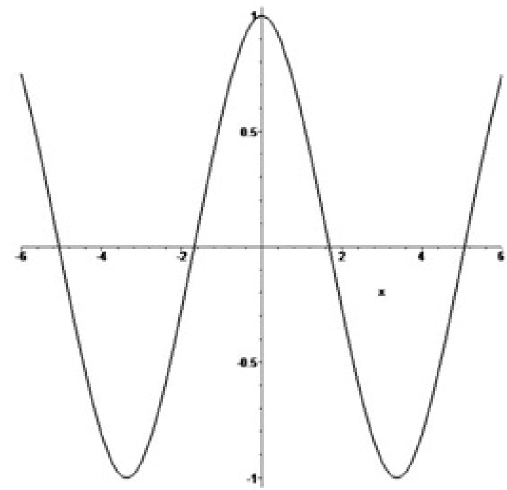

Figura 2.2: Grafíco cn(u,0.5)

2.3.7 Periodicidade

Como visto acima, assim como as funções trigonométricas, as funções elípticas são sujeitas à periodicidade.

$$\begin{aligned} sn(u \pm 4K) &= sn\, u \\ cn(u \pm 4K) &= cn\, u \\ dn(u \pm 2K) &= dn\, u \end{aligned}$$

Porém como característica distintiva, seu período não é um número absoluto, pois o valor assumido por K depende do valor do módulo. Outra diferença é que essas funções são duplamente periódicas, pois têm, além do período real um segundo período imaginário[1], que não será explorado nesse trabalho.

2.3.8 Outras Funções Elípticas

Seguindo a notação de Glaisher, existem outras nove funções elípticas, que são definidas a partir da inversão ou dos quocientes das funções elípticas de Jacobi. As três funções

[1] Para períodos e argumento complexo das funções elípticas ver [5].

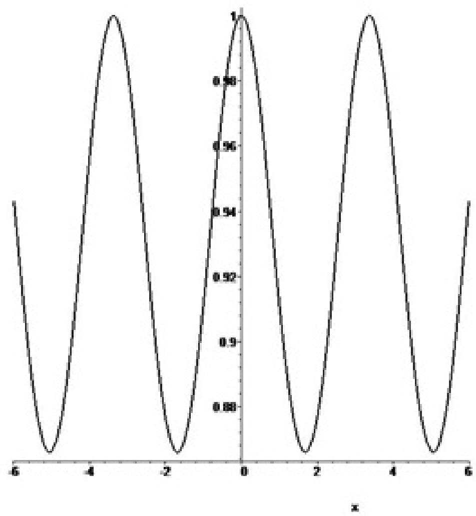

Figura 2.3: Gráfico dn(u,0.5)

abaixo são definidas através da inversão das ordens das letras da função

$$\begin{aligned} ns\,u &= \frac{1}{sn\,u} \\ nc\,u &= \frac{1}{cn\,u} \\ nd\,u &= \frac{1}{dn\,u} \end{aligned}$$

e os quocientes são denotados escrevendo, nessa ordem, a primeira letra do numerador e do denominador da função

$$sd\ u = \frac{sn\ u}{dn\ u}$$

$$cs\ u = \frac{cn\ u}{sn\ u}$$

$$ds\ u = \frac{dn\ u}{sn\ u}$$

$$sc\ u = \frac{sn\ u}{cn\ u}$$

$$cd\ u = \frac{cn\ u}{dn\ u}$$

$$dc\ u = \frac{dn\ u}{cn\ u}$$

2.3.9 Casos Degenerados

As funções elípticas, representam funções circulares quando $k = 0$ e hiperbólicas quando $k = 1$. Se supusermos $k = 0$ em (1.1) obtemos $u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = arcsenx$, e teremos que $u(1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = arcsen1 = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $K(1) = \frac{\pi}{2}$. Ademais, como $k'^2 + k^2 = 1$ temos $k' = 1$ e consequente, $K' \to \infty$, onde $K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$.

Dessa forma, para $k = 0$

$$k' = 1,\ K(1) = \frac{\pi}{2} \text{ e } K' \to \infty \tag{2.29}$$

E então

$$sn\ u = \operatorname{sen} u,\ cn\ u = \cos u,\ dn\ u = 1 \tag{2.30}$$

o que pode ser observado nos gráficos abaixo.

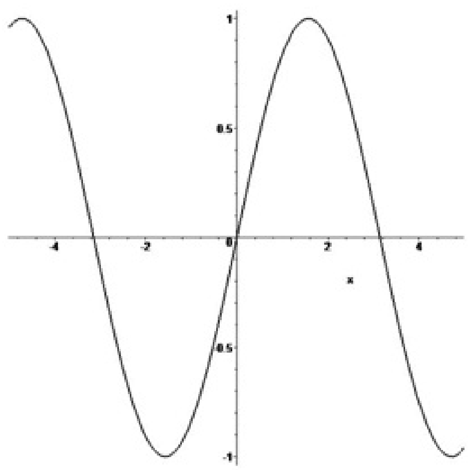

Figura 2.4: Gráfico: sn (u,0)

Observa-se que os gráficos 2.4 e 2.5 representam, respectivamente, os gráficos das funçoes seno e cosseno, enquanto o gráfico 2.6 a função constante igual a um.

Por outro lado, supondo $k = 1$ encontramos em (1.1) $u(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = tgh^{-1}x$ e, portanto, agora temos $K = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)} \to \infty$ e como $k' = 0$, obtemos $K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)}} = \frac{\pi}{2}$.

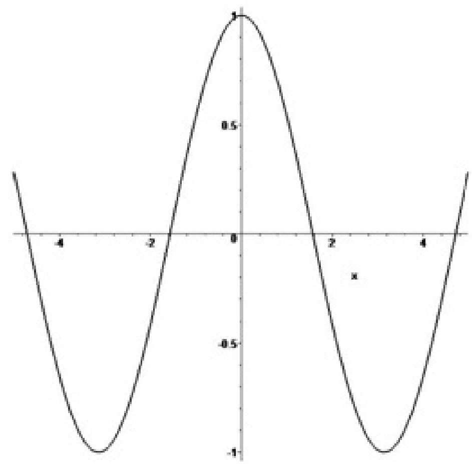

Figura 2.5: Gráfico: cn (u,0)

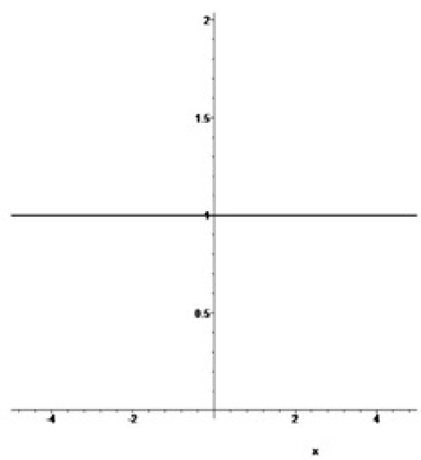

Figura 2.6: Gráfico: dn (u,0)

Resumindo, para $k = 1$

$$k' = 0,\ K \to \infty,\ K' = \frac{\pi}{2} \tag{2.31}$$

e teremos

$$sn\ u = tanh\ u, cn\ u = dn\ u = sech\ u \tag{2.32}$$

que pode ser verificado pelos gráficos abaixo, onde nota-se que a figura 2.7 representa o gráfico da função tangente hiperbólica e as figuras 2.8 e 2.9 a função secante hiperbólica.

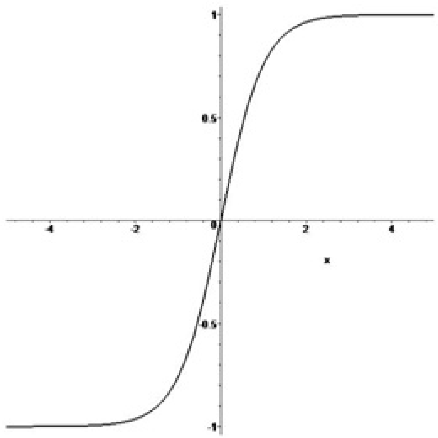

Figura 2.7: Gráfico: sn (u,1)

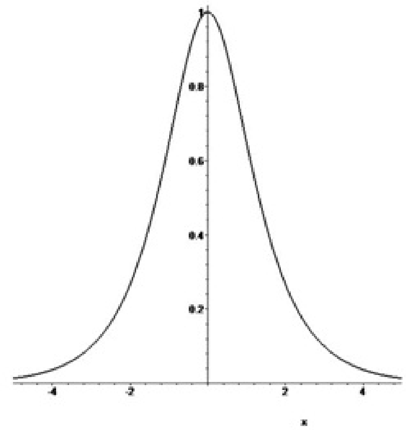

Figura 2.8: Gráfico: cn (u,1)

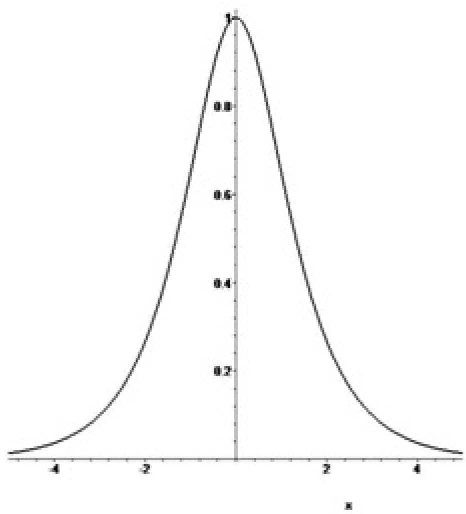

Figura 2.9: Gráfico: dn(u,1)

2.3.10 Gráficos

A fim de visualizarmos o comportamento dessas funções exemplificamos alguns gráficos das funções $sn(u,k)$, $cn(u,k)$ e $dn(u,k)$, fazendo o módulo variar. A linha contínua representa a função para $k = 0.8$ e a linha pontilhada para $k = 0.5$, nos gráficos 2.10, 2.11 e 2.12.

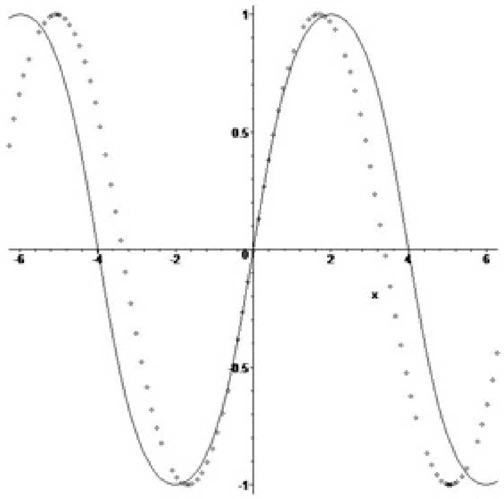

Figura 2.10: Gráfico: sn(u,k)

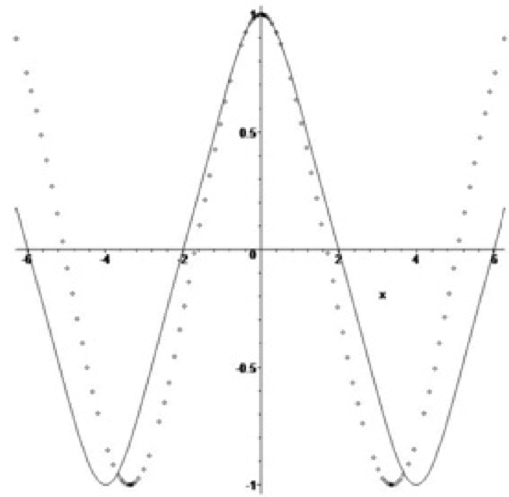

Figura 2.11: Gráfico cn(u,k)

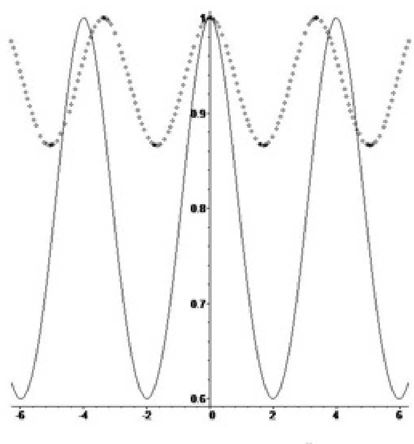

Figura 2.12: Gráfico: dn(u,k)

2.4 Uma Outra Definição

As funções elípticas são normalmente definidas da forma acima descrita, invertendo-se uma integral, algo incomum. No entanto, existem outras maneiras possíveis de definirmos tais funções. Em [7] as encontramos definidas a partir de derivadas, já [11] o faz partindo de equações diferenciais.

Dentre as possíveis definições, trazemos ainda um vislumbre de uma que poderia ser utilizada num curso do Ensino Básico baseada em conceitos de geometria e que está descrita em [10].

Como ilustrado na figura 2.13, consideremos um círculo S e um ponto P dentro dele. Traçando cordas que passem por esse ponto e considerando os segmentos com comprimento inversamente proporcional à raiz quadrada do comprimento da corda toda, então obtemos uma curva convexa fechada C que nos auxiliará a definir as funções elípticas de Jacobi.

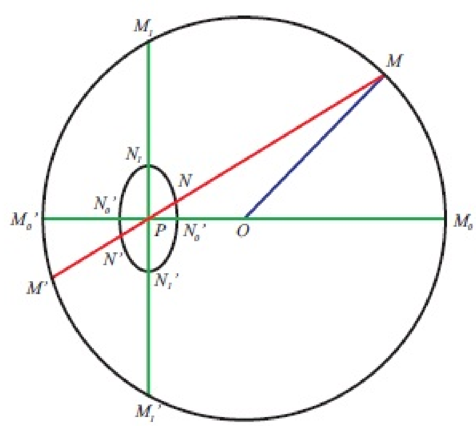

Figura 2.13: Curva Convexa Fechada

Denotemos os pontos finais de uma dessas cordas por M e M' e seja N e N' os pontos de interseção desta corda com C. Pontos estes, simétricos com relação a P. Temos também o diâmetro mínimo $N_0N_{0'}$ de C correspondendo à corda $M_0M_{0'}$, e o diâmetro máximo de C correspondendo à corda $M_1M_{1'}$. Se considerarmos PN uma linha em movimento, então definimos o ângulo entre ela e sua posição inicial PN_0 positivo conforme se mova no sentido anti-horário sobre o círculo S, e com sinal negativo se o movimento for para a direção oposta.

Semelhantemente, consideramos a área dentro da seção C limitada por PN e PN_0 positiva se o ângulo entre as duas linhas for positivo, caso contrário, a área será negativa. Assim, se a posição de PN continua a se movimentar ao redor de S de modo a completar círculos inteiros, continuamos a acrescentar à área, portanto, temos que a área é uma função que atinge valores em toda reta real.

Agora, seja R o raio de S, e δ a distância OP do centro de S ao ponto P. Segue que

$$PN = l\sqrt{\frac{2(R+\delta)}{MM'}}$$

para um comprimento arbitrário l.

Suponha que definamos um argumento u por

$$u = \frac{AreaN_0PN}{l^2},$$

e definimos φ como a metade do ângulo $M_0\hat{O}M$. Segue que φ é uma função de u, a qual nós denotamos por

$$\frac{1}{2}M_0\hat{O}M = \varphi = am\ u$$

que é a amplitude de u.

Suponha também que denotemos a razão entre a área total dentro de C e l^2 por $2K$, então segue da definição da amplitude que

$$am\ 0 = 0,\ \ am\ K = \frac{\pi}{2},\ \ am\ 2K = \pi\ \ e\ \ am(-u) = -am\ u.$$

Quando o ponto P é escolhido de forma que coincida com o centro do círculo S, então a curva C se reduz a um círculo com raio l. Portanto, a função $am\ u$ se torna simplesmente igual a u. Em geral $am\ u$ difere de u em proporção à excentricidade de C. Esta excentricidade é o módulo k que definimos por

$$k = \frac{2\sqrt{R\delta}}{R+\delta}.$$

Semelhantemente, temos o módulo complementar

$$k^{'} = \frac{R-\delta}{R+\delta}$$

de onde segue que $k^2 + k^{'2} = 1$, e que tanto k quanto $k^{'}$ assumem valores entre 0 e 1.

Podemos agora definir as funções elípticas de Jacobi como o seno e cosseno de $am\ u$, e como a distância do ponto P ao M o qual corresponde ao argumento u no círculo S. Disto segue que

$$sn\ u = \operatorname{sen} am\ u, \ \ cn\ u = \cos\ am\ u\ \ e\ \ dn\ u = \frac{PM}{PM_0} = \frac{PM}{R+\delta}.$$

A partir das propriedades das funções circulares seno e cosseno, temos que $sn\ u$ e $cn\ u$ assumem valores entre -1 e 1 e satisfazem a identidade

$$sn^2\ u + cn^2\ u = 1,$$

enquanto a função $dn\ u$ é, pela definição, sempre positiva, e seu valor máximo é 1 correspondendo à linha PM_0 enquanto seu valor mínimo correspondente à $PM_0^{'}$ é igual à $k^{'}$.

Podemos, portanto, continuar o desenvolvimento das propriedades das funções elípticas e chegar às propriedades já vistas anteriormente, nesse momento, partindo de uma definição geométrica.

Após a apresentação do desenvolvimento histórico das funções elípticas de Jacobi e também de sua definição e principais propriedades, passamos agora à aplicação dessa teoria na resolução de uma equação diferencial.

Capítulo 3

Aplicação: Existência de ondas periódicas para a equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger foi deduzida em 1926 pelo físico austríaco Erwin Schrödinger. Fisicamente, esta equação é usada em mecânica ondulatória para a função de onda de uma partícula. Ela se assenta num modelo atômico inteiramente baseado em ondas estacionárias e constitui a base da física e química modernas. No caso unidimensional, a equação de Schrödinger permite calcular a função de onda associada $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à uma partícula que se move dentro de um campo de forças descrito por um potencial $V(x,t)$ (que pode depender da posição e do tempo).

A equação referida pode ser traduzida pela expressão

$$iu_t(x,t) + u_{xx}(x,t) + V(x,t)\,u(x,t) = 0 \tag{3.1}$$

que no caso em que $V(x,t) = |u(x,t)|^2$ é conhecida como equação de Schrödinger com não linearidade cúbica, ou simplesmente, equação de Schrödinger cúbica:

$$iu_t(x,t) + u_{xx}(x,t) + |u(x,t)|^2 u(x,t) = 0 \tag{3.2}$$

Esta equação descreve, por exemplo, um modelo teórico de pulsos eletromagnéticos em um cabo de fibra óptica usado em telecomunicações e admite soluções especiais chamadas ondas estacionárias do tipo solitária e periódica da forma $u(x,t) = e^{i\omega t}\,\varphi(x)$ onde ω é chamado frequência da onda.

Considerando que, $u_t\,(x,t) = i\omega e^{i\omega t}\varphi(x)$, $u_{xx}\,(x,t) = e^{i\omega t}\varphi''(x)$ e pela fórmula de Euler dos números complexos $e^{i\omega t} = \cos t + isen\ t$ temos

$$\left|e^{i\omega t}\right| = \sqrt{\cos^2\ t + \operatorname{sen}^2\ t} = 1.$$

Assim, substituindo $u(x,t)\ = e^{i\omega t}\varphi(x)$ na equação (3.2) vem

$$i\left(i\omega e^{i\omega t}\varphi(x)\ \right) + e^{i\omega t}\varphi''(x) + \varphi\ ^2 e^{i\omega t}\varphi(x) \ \ = \ 0$$

e colocando o fator não nulo $-e^{i\omega t}$ em evidência

$$e^{i\omega\varphi}(-\omega\varphi + \varphi^{''} + \varphi^3) = 0$$

obtemos a seguinte equação diferencial

$$-\varphi^{''} + \omega\varphi - \varphi^3 = 0 \quad \omega > 0 \tag{3.3}$$

Definição 3.1. Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma geral

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = f(x,\varphi,\frac{d\varphi}{dx}) \tag{3.4}$$

e dizemos que φ é solução de (3.4) se φ é duas vezes diferenciável e a satisfaz.

Afim de obter a solução da equação diferencial (3.3) utilizaremos o método da quadratura. Multiplicando ambos os lados de (3.3) por $\varphi^{'}$ temos

$$-\varphi^{''}\varphi^{'} + \omega\varphi\varphi^{'} - \varphi^3\varphi^{'} = 0.$$

Integrando a igualdade em $[a,x]$

$$-\int_a^x \varphi"\varphi^{'} + \int_a^x \omega\varphi\varphi^{'} - \int_a^x \varphi^3\varphi^{'} = 0,$$

ou seja,

$$-\frac{1}{2}\int_a^x \frac{d}{ds}\varphi^{'2} + \frac{\omega}{2}\int_a^x \frac{d}{ds}\varphi^2 - \frac{1}{4}\int_a^x \frac{d}{ds}\varphi^4 = 0$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo vem

$$-\frac{1}{2}\varphi'^2(x) + \frac{1}{2}\varphi'^2(a) + \frac{\omega}{2}\varphi^2(x) - \frac{\omega}{2}\varphi^2(a) - \frac{1}{4}\varphi^4(x) + \frac{1}{4}\varphi^4(a) = 0.$$

Logo,

$$-\frac{1}{2}\varphi'^2 + \frac{\omega}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4}\varphi^4 + B = 0$$

A expressão acima nos fornece

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}\varphi^4 + \omega\varphi^2 + 2B}.$$

Escolhemos o ramo positivo, dessa forma, teremos

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{-\frac{1}{2}\varphi^4 + \omega\varphi^2 + 2B}. \tag{3.5}$$

e novamente integrando ambos os lados obtemos por separação de variáveis,

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{-\varphi^4 + 2\omega\varphi^2 + 4B}} = \int dx$$

Note que a integral do lado esquerdo é uma típica integral elíptica pois $F(\varphi) = -\varphi^4 + 2\omega\varphi^2 + 4B$ é um polinômio de 4º grau. E nosso objetivo é através de algumas manipulações algébricas, transformá-la numa integral elíptica de primeiro tipo a fim de encontrarmos sua solução.

Voltemos a olhar para (3.5) que na forma quadrática fica

$$\varphi'^2 = \frac{1}{2}\left[-\varphi^4 + 2\omega\varphi^2 + 4B\right] = \frac{1}{2}\left(\eta_1^2 - \varphi^2\right)\left(\varphi^2 - \eta_2^2\right) \tag{3.6}$$

onde, B é uma constante de integração e, η_1 $-\eta_1$, η_2, $-\eta_2$ são zeros da função polinomial $F_\varphi(t) = -t^4 + 2\omega t^2 + 4B$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\eta_1 > \eta_2 > 0$. Consequentemente, precisamos que $\eta_2 \leq \varphi \leq \eta_1$ e que os $\eta_i's$ satisfaçam pela regra da soma e produto das raízes

$$\begin{cases} 2\omega = \eta_1^2 + \eta_2^2 \\ 4B = -\eta_1^2\eta_2^2, \end{cases}$$

Definimos, $\phi = \frac{\varphi}{\eta_1}$e $k^2 = \frac{\left(\eta_1^2-\eta_2^2\right)}{\eta_1^2}$ e fazendo as substituições em (3.6) temos

$$\phi'^2\eta_1^2 = \frac{1}{2}\left(\eta_1^2 - \phi^2\eta_1^2\right)\left(\phi^2\eta_1^2 - \eta_2^2\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\phi'^2 &= \frac{1}{2\eta_1^2}\eta_1^2\left(1-\phi^2\right)\eta_1^2\left(\phi^2 - \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2}\right)\\
&= \frac{\eta_1^2}{2}\left[\left(1-\phi^2\right)\left(\phi^2 - \frac{\eta_1^2}{\eta_1^2} + \frac{\eta_1^2}{\eta_1^2} - \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2}\right)\right]\\
&= \frac{\eta_1^2}{2}\left[\left(1-\phi^2\right)\left(\phi^2 - 1 + \frac{\eta_1^2-\eta_2^2}{\eta_1^2}\right)\right]\\
&= \frac{\eta_1^2}{2}\left[\left(1-\phi^2\right)\left(\phi^2 - 1 + k^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\phi'^2 = \frac{\eta_1^2}{2}\left[\left(1-\phi^2\right)\left(\phi^2 - 1 + k^2\right)\right] \tag{3.7}$$

Agora, definimos uma variável adicional ψ através da relação

$$\phi^2 = 1 - k^2 \operatorname{sen}^2\ \psi. \tag{3.8}$$

Derivando implicitamente (3.8) temos $2\phi\phi^{'} = -2k^2 \operatorname{sen}\ \psi \cos\ \psi\psi'$ então isolando $\phi^{'}$ vem $\phi^{'} = \frac{-2k^2 \operatorname{sen}\ \psi \cos\ \psi\psi'}{2\phi}$ elevando ao quadrado e substituindo (3.8) obtemos $\phi^{'2} = \frac{k^4 \operatorname{sen}^2\psi cos^2\psi\psi'^2}{1-k^2\operatorname{sen}^2\ \psi}$. Finalmente substituindo em (3.7) vem

$$\frac{k^4 \operatorname{sen}^2\ \psi cos^2\psi\psi^{'2}}{1-k^2\operatorname{sen}^2\ \psi} = \frac{\eta_1^2}{2}\left[\left(1 - 1 + k^2\operatorname{sen}^2\ \psi\right)\left(1 - k^2\operatorname{sen}^2\psi - 1 + k^2\right)\right]$$

isto é,

$$\frac{k^4 \operatorname{sen}^2\ \psi cos^2\psi\psi^{'2}}{1-k^2\operatorname{sen}^2\ \psi} = \frac{\eta_1^2}{2}\ k^2\operatorname{sen}^2\ \psi k^2\left(1 - \operatorname{sen}^2\ \psi\right) = \frac{\eta_1^2}{2}\ k^2\operatorname{sen}^2\ \psi k^2\left(cos^2\psi\right).$$

Isolando $\psi^{'2}$ e eliminando os fatores repetidos em ambos os lados temos então

$$\psi'^2 = \frac{\eta_1^2}{2}\left(1 - k^2 \operatorname{sen}^2\ \psi\right),$$

ou seja,

$$\frac{\psi'}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\ \psi}} = \frac{\eta_1}{\sqrt{2}}$$

obtemos, portanto, para, $l = \frac{\eta_1}{\sqrt{2}}$ que $\int_0^{\psi(\varepsilon)} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\ t}} = l\varepsilon$. Que segue da definição da integral elíptica de Jacobi $y = sn(u,k)$ onde sen $\psi = sn(l\varepsilon; k)$ e consequentemente em (3.8)

$$\phi(\varepsilon) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(l\varepsilon; k)} = dn\ (l\varepsilon; k).$$

Dessa forma, retornando às variáveis iniciais onde, $\varphi = \eta_1 \phi$ obtemos as chamadas soluções ondas dnoidais

$$\varphi(\varepsilon) \equiv \varphi(\varepsilon; \eta_1, \eta_2) = \eta_1 dn\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\varepsilon; k\right) \tag{3.9}$$

onde

$$k^2 = \frac{(\eta_1^2 - \eta_2^2)}{\eta_1^2},\ \ 2\omega = \eta_1^2 + \eta_2^2,\ \ \eta_1 > \eta_2 > 0. \tag{3.10}$$

Agora, dn tem como período fundamental $2K$, pois como vimos, $dn\ (u + 2K; k) = dn\ (u; k)$, onde $K = K(k)$ representa a integral elíptica de primeiro tipo, portanto, temos que a solução onda dnoidal φ em (3.7) tem um período fundamental T_φ, dado por

$$T_\varphi \equiv \frac{2\sqrt{2}}{\eta_1} K(k). \tag{3.11}$$

Capítulo 4

Considerações Finais

Reiteramos que o objetivo principal desse trabalho foi o de apresentar as integrais elípticas e as funções elípticas jacobianas de uma maneira clara e simples, em nenhum momento tendo a pretensão de esgotar tal tema tendo em vista sua vasta abrangência e complexidade. Sendo assim, contamos parte da história, surgimento e desenvolvimento, dessas funções e partindo de sua definição, fizemos um estudo detalhado de suas propriedades principais, mostrando quão parecidas são estas funções das funções circulares.

As integrais elípticas e as funções elípticas jacobianas têm desempenhado um papel central na obtenção dos novos resultados trazidos pela Física nas equações não lineares, e pudemos nesse trabalho mostrar também uma de suas aplicações, na busca de soluções periódicas para uma equação diferencial, encontrando as chamadas soluções ondas dnoidais dadas por

$$\varphi(\varepsilon) = \eta_1 dn\left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\varepsilon; k\right)$$

que possuem um período fundamental T_φ, dado por

$$T_\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\eta_1}K(k).$$

Destacamos ainda que a forma como aqui definimos as funções elípticas é uma dentre várias possíveis, que podemos também defini-las através de equações diferenciais, derivadas ou geometricamente, ou seja, há alternativas na escolha da definição dessas funções, o que permite adequar este conteúdo ao público que se quer atingir.

Para finalizar este trabalho propomos alguns caminhos para novas pesquisas sobre o tema. Explorar aplicações como as descritas em [5], a parametrização das equações da elipse em termos de $sn\ u$ e $cn\ u$, o Teorema de Fagnano e o problema do pêndulo. Ampliar o estudo destas funções para o argumento complexo e apresentar as aplicações cabíveis a ele. Além disso, a variedade de formas de se definir tais funções, por si só, se faria suficiente para este fim.

Bibliografia

[1] *Biografia Abel*. Disponível em: http://www.history.mcs.st.andrews.ac.uk/-Biographies/Abel.html. Acesso dia 26/11/2012.

[2] *Biografia Euler*. Disponível em: http://www.history.mcs.st.andrews.ac.uk/-Biographies/Euler.html. Acesso dia 26/11/2012.

[3] *Biografia Fagnano*. Disponível em:http://www.history.mcs.st.andrews.ac.uk/-Biographies/FagnanoGiulio.html. Acesso dia 26/11/2012.

[4] *Biografia Jacobi*. Disponível em: http://www.history.mcs.st.andrews.ac.uk/-Biographies/Jacobi.html. Acesso dia 26/11/2012.

[5] BOWMAN, F., *Introduction to elliptic functions with aplications*, Dovers publications, NY, (1961).

[6] BOYER, C. B. *História da Matemática*, – 2a ed., – Editora Edgard Blucher, 1996.

[7] DIXON, Alfred Cardew. *The Elementary Properties of the Elliptic Functions*, Macmillan & Co; London, 1894.

[8] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*; tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[9] FILHO, A. Ribeiro, D. S. Vasconcelos. *Introdução ao Cálculo das Funções Elípticas Jacobianas*. UFBA, 1994.

[10] HALPHEN, G.H.(1886). *Traité dês fonctions elliptiques ET de leurs applications*. Gauthier-Villars, Paris, France.

[11] MEYER, K. R. *Jacobi Elliptic Functions from a dynamical System Point of View*. Disponível em http://math.uc.edu/ meyer/amm2001.pdf acessado dia 26/11/2012.

[12] PAVA, J. Angulo. J. *Differential Equations* 235 (2007) 1-30.

[13] PIEDADE, Antonio Zeferino Candido da. *Integraes e Funcções Ellipticas*. Dissertação inaugural para o acto de conclusões magnas na Faculdade de Mathematica. COIMBRA: imprensa da universidade, Portugal, 1875.

[14] STEWART, James. *Cálculo, volume 1* - 6a ed. - São Paulo: Cengage Learning, 2011.