ANTÔNIO FABIANO PAIVA

VOLUME E ÁREA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS USANDO O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015

ANTÔNIO FABIANO PAIVA

VOLUME E ÁREA DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS USANDO O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 7 de abril de 2015.

Mario José de Souza

Walter Huaraca Vargas

Mercio Botelho Faria
(Orientador)

Agradecimentos

A Deus por todos os meus conhecimentos e força para conseguir lutar!

À Leni, minha querida esposa, pelo apoio, compreensão, força e principalmente pelo amor cedido a mim durante todo este tempo.

Ao meu filho, Gabriel, pelo carinho incondicional dado a mim durante os meus estudos.

Aos meus pais, Ivan e Edna, pelas orações, conselhos durante as minhas viagens e a minha estadia em Viçosa.

A minha irmã, Fabiele, que mesmo distante sei que torceu e me ajudou mentalmente e do seu jeito.

Aos meus colegas de curso, pelo companheirismo, força e principalmente uma diversão sem tamanho enquanto estudávamos.

Aos meus novos amigos André, Daniel, Elias, Gilberto e Viviane, os quais formamos ao nosso jeito uma verdadeira irmandade.

As escolas as quais trabalhei durante os dois anos de estudo por compreenderem as minhas necessidades e organizações de horários.

Ao professor, Doutor Mércio Botelho, pela confiança, ensinamentos e principalmente pela paciência.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo

PAIVA, Antônio Fabiano, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2015. **Volume e Área de Sólidos Geométricos Usando o Princípio de Cavalieri**. Orientador: Mércio Botelho Faria.

Nesta dissertação estudamos e elaboramos algumas propostas de atividades educacionais quem envolvem o Princípio de Cavalieri, bem como o seu uso e aplicabilidade feito com recursos eletrônicos, tendo como principal ferramenta o software Geogebra 3D e material concreto. O nosso trabalho consta de uma apresentação teórica, bem como uma revisão bibliográfica de conceitos que são importantes para a obtenção de novos conhecimentos e resolução de exercícios e problemas práticos em sala de aula e no cotidiano, podendo ser elaborados para qualquer necessidade que os educandos possam ter em sua vida estudantil. Apresentamos, assim, atividades que podem servir de exemplos e incentivo a futuros trabalhos com outras partes da geometria e em outros ramos da Matemática.

Abstract

PAIVA, Antônio Fabiano, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, April 2015. **Volume and Area of Geometrics Solids Using the Cavalierit's Principle** Advisor: Mércio Botelho Faria.

In this dissertation we studied and created some proposals for educational activities which involve the Principle of Cavalieri, as well as its use and applicability done with electronic resources, having as the main tool Geogebra 3D software and concrete materials. Our work consists of a theoretical presentation, and a literature review of concepts that are important for obtaining new knowledge and solving practical exercises and problems in the classroom and in daily life. These exercises can be prepared for any need that the students can have in their student life. This way, we present activities that can serve as examples and encouragement to future work with other parts of geometry and other branches of mathematics.

Lista de Figuras

Introdução

Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), verificamos que os alunos do Ensino Médio devem ter um conhecimento pleno a respeito da Geometria Pana e Espacial e serem capazes de relacionar conceitos destas duas partes além de questionar a realidade, utilizando o raciocínio lógico, a criatividade e também a tecnologia. Podemos perceber, que de uma maneira generalizada, a Matemática, assim como uma de suas ramificações que é a Geometria, apresenta uma grande rejeição junto aos alunos. Pode - se explicar esse fato devido ao excessivo uso de fórmulas predeterminadas e ao ensino mecânico com resolução de atividades sem uma aplicação no cotidiano e sem um atrativo que muitas vezes está no próprio desenho ou na relação com o dia a dia dos discentes. Um dos principais desafios do professor é buscar uma forma inovadora para um ensino mais atrativo e que estimule os alunos a buscarem resultados, visualizando os mesmos e também construindo situações nas quais o aprendizado se torne mais significativo. Assim, a escolha dos mecanismos e recursos didáticos bem como a maneira de manipular tais recursos é extremamente importante.

Para efetivamente realizarmos o ensino da Geometria e gerarmos uma aprendizagem significativa, devemos estar atentos aos já existentes nos ajudam a apresentar e justificar algumas demonstrações não muito utilizadas no dia a dia dos professores e alunos.

Durante os próximos capítulos, iremos apresentar construções de determinados sólidos, os chamados sólidos de Platão e algumas demonstrações que se fazem importantes, além de alguns exercícios nos quais aplicamos o que foi apresentado, tudo isto mostrando também o embasamento dos PCNs para justificar tal trabalho e sua devida importância, sem esquecer o ENEM, que tem sido adotado como referência para o acesso de alunos nas instituições de ensino superior.

Apresentaremos também, os materiais concretos, que poderão ser usados para a visualização de elementos e obtenção de resultados a cerca do volume de um determinado sólido. O uso de softwares também terá um capítulo reservado, onde apresentaremos construções de vários sólidos geométricos e suas principais características além de visualizações diferenciadas.

Apresentamos também maneiras alternativas e maneiras usuais para o cálculo, a visualização do volume e áreas de sólidos, usando como recurso o Princípio de Cavallieri, o Teorema de Euler e softwares gráficos como o Geogebra, além de materiais concretos.

Considerando todas estas informações, proporemos com este projeto uma apresentação aos professores e principalmente aos alunos de uma maneira diferenciada para o ensino da Geometria Espacial, mais precisamente, a aplicação do Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes bem como o auxílio de softwares como o Geogebra para a visualização e o complemento das informações e o aprendizado.

Capítulo 1

Contando um pouco de História

A história nos diz que desde os primórdios da organização humana, principalmente nas organizações agrícolas, temos a necessidade de cálculo, análise e uso de volumes de sólidos geométricos. Euclides já citava o cálculo de áreas e volumes em seus trabalhos, no livro XII dos Elementos de Euclides, observamos alguns teoremas que relacionam a ideia de volume sem mesmo defini-lo. O trabalho com volumes e áreas se deu devido a uma necessidade filosófica e teológica, como nos aparece em várias situações nas civilizações gregas e em civilizações mais antigas, onde as figuras geométricas e consequentemente suas áreas e seus volumes eram usados para justificar situações nas quais não se dependia apenas da crença teológica mas sim de situações em que números e formas representavam ações e medidas tomadas por divindades. Os cálculos de áreas e dos próprios volumes citados anteriormente eram feitos, inicialmente, de forma aproximada, porém os métodos, foram sendo aperfeiçoados até que na antiguidade, em civilizações mais avançadas como os egípcios e os gregos, obteve-se fórmulas e abstrações muito sofisticadas. Alguns exemplos de fórmulas complexas e estruturadas para alguns sólidos específicos como: prismas, pirâmides e cilindros. Podemos ainda pensar primitivamente acerca de determinar o volume usando uma unidade como referência, como um cubo unitário, que serviria de referência para sabermos quantas vezes um sólido qualquer contém esse tal cubo unitário. Como dito, forma extremamente primitiva.

O italiano, nascido em Milão, Francesco Boaventura Cavalieri, foi um dos matemáticos mais influentes de sua época e foi o instigador de um método mais apurado para o cálculo de volumes e áreas, Kepler foi desafiado a encontrar áreas e volumes de algumas figuras e sólidos geométricos, indicando assim um estímulo para que Cavalieri estudasse uma maneira para efetuar tais cálculos como citado em [8]. Cavalieri foi um discípulo de Galileu Galilei, sendo este quem o indicou para ocupar uma cátedra na Universidade de Bolonha de 1629 a 1647, ano de sua morte. Ele ocupava paralelamente ao cargo de professor uma atividade religiosa no monastério de São Jerônimo, pois era um jesuado e não um jesuíta como é afirmado, exercendo também uma atividade como astrônomo. Estabeleceu então uma importante conclusão a respeito do volume de um sólido, através de partes do mesmo, que são secções obtidas através de cortes do sólido o que é chamado hoje de Princípio de Cavalieri. O Princípio de Cavalieri tem como base o método dos indivisíveis que começou a se desenvolver a partir de 1826 e que foi divulgado através do livro Geometria Indivisibilibus (Geometria dos Indivisíveis), publicado inicialmente no ano de 1635. A ideia apresentada por Cavalieri não era de todo nova, pois o próprio Galileu já havia tido a necessidade e o estímulo para o encontro dos volumes além dos gregos antigos que também instigaram a encontrar volume de sólidos usando tais ideias porém a demonstração das mesmas eram obtidas de maneira diferente pelo fato dos conhecimentos serem bem diferentes. O básico do Princípio de Cavalieri consistia no seguinte: Uma figura plana seria formada por uma infinidade de cordas paralelas entre si e uma figura sólida (um sólido geométrico) seria formado por uma infinidade de secções paralelas entre si, por isso essas cordas e essas secções são chamadas de indivisíveis. Essas ideias apresentadas por Cavalieri sobre os indivisíveis, envolviam uma dificuldade de entendimento, pois do ponto de vista lógico como poderíamos imaginar uma figura finita, limitada, formada por uma infinidade de elementos indivisíveis? Em quais situações podemos usar este conceito? O método dos indivisíveis e outros equivalentes a ele, foram efetivamente usados por Torricelli, Fermat, Pascal, Saint-Vincent, Barrow e outros que no curso de seu trabalho chegaram a resultados equivalentes à integração de expressões como x^n, $sen\theta$, $sen^2\theta$ e $\theta.sen\theta$.

O tratado inicial de Cavalieri é demasiadamente confuso, sendo de difícil entendimento, porém se estudado consegue-se apresentar uma colocação dentro da geometria plana e dentro da geometria espacial. O Princípio de Cavalieri propriamente dito é muito usado dentro da Geometria Espacial facilitando o entendimento e a aceitação do cálculo de volume de um sólido geométrico.

Considere dois sólidos X e Y com mesma altura. Os infinitos planos paralelos entre si ao interceptarem os sólidos X e Y vão determinar infinitas secções que darão a ideia dos indivisíveis que têm áreas iguais e portanto os sólidos têm volumes iguais. Alguns outros teoremas estabelecidos por Cavalieri que relacionam indivisíveis podem ser vistos dentro da geometria plana, tais como os que trabalham esses indivisíveis em paralelogramos e triângulos formados pelas diagonais dos mesmos.

O Princípio de Cavalieri representa uma ferramenta significativa para o cálculo de áreas e de volumes, podendo resolver muitos problemas de mensuração que às vezes poderiam requerer técnicas avançadas de cálculo diferencial e integral que não são apresentadas e deduzidas em nível médio e fundamental. Ele então facilita o entendimento e a ideia básica para o cálculo dos volumes de sólidos geométricos, principalmente para aqueles que estão sendo apresentados à geometria espacial e para os que têm resistência e dificuldade com a mesma.

Podemos deduzir o volume de uma esfera, usando algumas ideias básicas a respeito dos indivisíveis estabelecidos inicialmente por Cavalieri, e trabalhando com dois sólidos de natureza diferente, mas seccionando ambos por um mesmo plano e obtendo secções bem diferentes, porém com a mesma área e assim então os sólidos apresentados inicialmente têm o mesmo volume. De uma maneira geral, aceita-se o Princípio de Cavalieri como um axioma e de forma intuitiva, não havendo assim necessidade de se demonstrar.

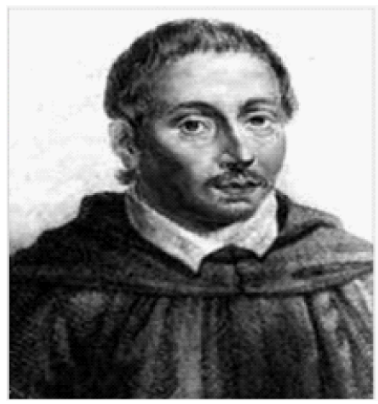

Figura 1.1: Boaventura Cavalieri - Fonte: matheusmathica.blogspt.com

Além das informações a respeito do Princípio de Cavalieri, podemos também usar o teorema de Euler para estabelecer as relações entre as faces, os lados e os vértices de um poliedro para podermos estruturar o cálculo do volume do mesmo, quando se trata de um prisma (reto ou obliquo), verificamos que estes são poliedros convexos, portanto poliedros eulerianos. Vale lembrar que o teorema de Euler relaciona a quantidade de faces, vértices e arestas de um poliedro convexo, e estas informações serão de fundamental importância para o encontro das quantidades de lados e consequentemente das áreas de polígonos que formam as secções de um sólido geométrico. Observe o exemplo da Figura 1.2 que temos a seguir em que analisaremos um quadrilátero convexo que poderá ser a secção de um sólido convexo do qual estaremos interessados em calcular o volume.

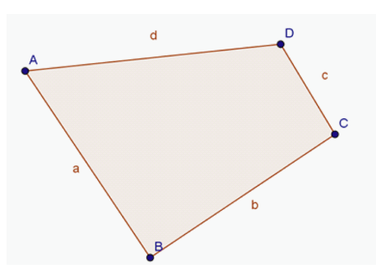

Figura 1.2: Aplicação do Teorema de Euler

Usando o teorema de Euler, podemos verificar a quantidade de lados, de arestas e faces que o poliedro (sólido), resultante da sobreposição de infinitas secções como esta.

Figura 1.3: Leonhard Paul Euler - Fonte: www.explicatorium.com

Devemos lembrar de que, em se tratando de um poliedro, podemos usar o Teorema de Euler para encontrarmos, por exemplo, o número de faces do mesmo e assim sendo o seu volume poderá ser obtido através do Princípio de Cavalieri.

É importante apresentar o Teorema de Euler, que foi descoberto em 1758, e que pode ser enunciado assim: Se um poliedro convexo tem V vértices, A aresta e F faces, vale a seguinte relação:

$$V + F = A + 2$$

Em que A é o número de arestas do poliedro, F o número de vértices e V o número de vértices.

Apenas uma informação histórica, o Teorema de Euler tem várias demonstrações como a que iremos mostrar agora, e que é apresentada em [6]

Definição 1.1 ***Superfície poliédrica limitada convexa*** *Superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou regiões poligonais convexas), tais que:*

a) Dois polígonos não estão no mesmo plano;
b) Cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;
c) Havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles devem formar uma figura poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
d) O plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semiespaço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas abertas. As que não têm contorno são chamadas de fechadas.

Parte I

Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar, preliminarmente, que para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta, vale a relação:

$$V_a + F_a - A_a = 1$$

em que:
V_a é o número de vértices,
F_a é o número de faces e
A_a é o número de arestas da superfície poliédrica limitada e aberta.

i) Para $F_a = 1$. Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de n lados e, então, $V_a = n$, $A_a = n$. Temos assim:

V$_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1$, o que implica que $V_a - A_a + F_a = 1$

Logo, a relação está verificada para:

$$F_a = 1$$

.

ii) Admitindo que a relação vale para uma superfície de F' faces(que possui V' vértices e A' arestas), vamos provar também que vale para uma superfície de $F' + 1$ faces (que possui $F' + 1 = F_1$ faces, V_a vértices e A_a arestas).

Por hipótese, para a superfície de F' faces, A' arestas e V' vale a seguinte relação:

$$V' - A' + F' = 1$$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) uma face de p arestas (lados) e considerando que q dessas arestas (lados) coincidem com as arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices tais que:

$F_a = F' + 1$

$A_a = A' + p$ - q, (q arestas coincidiram)

$V_a = V' + p$ - $(q + 1)$, (se q arestas coincidem, $q + 1$ vértices coincidem)

Formando assim a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores encontrados anteriormente, teremos:

$V_a - A_a + F_a = V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + (F' + 1) =$

$V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1 = V' - A' + F'$

E assim como $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$ provamos que essa expressão não se altera se acrescentamos (ou retiramos) uma face da superfície. Como por hipótese, $V' - A' + F' = 1$, vem que:

$V_a - A_a + F_a = 1$

O que prova a relação preliminar.

Parte II

Tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica convexa limitada e fechada (com V vértices, A arestas e F faces) e dela retiramos uma face.

Ficamos então com uma superfície aberta (com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces) pela qual vale a relação:

$V_a - A_a + F_a = 1$ e como $V_a = V$, $A_a = A$ e $F_a = F - 1$, vem $V - A + F - 1 = 1$, ou seja:

$V - F = A + 2.$

E assim finalmente provamos o Teorema de Euler.

Capítulo 2

O Princípio de Cavalieri, os Parâmetros Curriculares Nacionais e o ENEM

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais constituem um referencial para a educação no Ensino Fundamental e no Ensino Médio em todo o país. Sua função é orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações. O conjunto das proposições expressas nos Parâmetros Curriculares Nacionais responde à necessidade de referenciais a partir dos quais o sistema educacional do País se organize, a fim de garantir que sejam respeitadas as diversidades.

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional explicita que o Ensino Médio é a "etapa final da educação básica" (Art.36), o que concorre para a construção de sua identidade. O Ensino Médio passa a ter a característica da terminalidade, o que significa assegurar a todos os cidadãos a oportunidade de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental; aprimorar o educando como pessoa humana; possibilitar o prosseguimento de estudos; garantir a preparação básica para o trabalho e a cidadania; dotar o educando dos instrumentos que o permitam "continuar aprendendo". O Ensino Médio, portanto, é a etapa final de uma educação de caráter geral, afinada com a contemporaneidade, com a construção de competências básicas, que situem o aluno como sujeito produtor de conhecimento e participante do mundo em que ele está inserido, participando do trabalho no qual ele deseje, atuando como "sujeito em situação" - cidadão.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias indica que o aluno deve ter a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção no seu cotidiano.

No tópico 5 das Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio(DCNEM), observamos a seguinte orientação:

O aluno deverá ser capaz de:

- analisar qualitativamente dados quantitativos, representados gráfica ou algebricamente, relacionados a contextos sócio econômicos, científicos ou cotidianos;
- - identificar, representar e utilizar o conhecimento geométrico para aperfeiçoamento da leitura, da compreensão e da ação sobre a realidade.

Analisando os PCNs, verificamos a imensa necessidade de se trabalhar a geometria plana e espacial no Ensino Médio, pois o cotidiano dos alunos é baseado em cima de figuras e problemas que lhes dão a capacidade de estarem inseridos no processo de aprendizagem de maneira a manipular fórmulas com conceitos previamente apresentados e estipulados pelo professor e pelos materiais didáticos apresentados aos mesmos. Temos, segundo o PCN de Matemática, que apresentar situações que representem desafios para os alunos, que signifiquem não apenas a memorização de fórmulas, mas a aplicação das mesmas junto com um raciocínio mais elaborado e estruturado pelo próprio aluno, não tendo este feito uma simples repetição de processos e não deixando totalmente de lado algumas atividades nas quais se apresente ideias do tipo “calcule”, “resolva”, “encontre”, pois estas irão ser necessárias para que o aluno aprenda os procedimentos técnicos da solução dos problemas.

É bom observarmos também, que conceitos matemáticos, mais precisamente, conceitos geométricos, devem ser abordados e apresentados de uma maneira que não se prenda somente no cotidiano e numa aplicação prática e concreta, porque em algumas situações não teremos uma visualização no espaço que nos cerca daquelas definições e situações apresentadas. Temos que incentivar um envolvimento matemático em nível Médio e Fundamental, de forma que os discentes se familiarizem com a questão de estar usando conceitos e raciocínios que os ajudem em outras situações, em outros níveis matemáticos e também em outras áreas do conhecimento, não ficando dependentes de terem sempre uma situação prática para o uso ou uma justificativa de estudo, mas que estimulem principalmente o desenvolvimento e o apreço pelo raciocínio lógico matemático, pela importância e dependência de outras áreas e da própria matemática daquilo que se está estudando.

O ensino da geometria no Ensino Médio deve ser encarado como uma forma de levar o aluno a questionar várias situações em que ele está inserido, seja na escola seja no seu dia a dia fora do ambiente escolar em que ele deverá ser capaz de reconhecer e questionar aquilo do qual ele teve contato em sala de aula.

O Princípio de Cavalieri e suas aplicações são estudados mais especificamente na segunda série do Ensino Médio e apresenta-se, como uma ferramenta fundamental e básica para o entendimento e resolução de problemas simples ou mais elaborados no que diz respeito ao cálculo de volume de um sólido tridimensional, bem como o aprimoramento do cálculo e aplicação de áreas de figuras planas. Ele é a principal ferramenta elementar para a obtenção de expressões do volume de sólidos, é utilizado, por exemplo, na dedução da expressão do volume de cones e de esferas. Além disso, permite o cálculo de volume de sólidos não regulares. Assim, pela sua importância, o Princípio de Cavalieri deve ser ensinado no Ensino Médio.

Para um bom entendimento e compressão perfeita do Princípio de Cavalieri, faz-se necessário um conhecimento básico de geometria plana o que deverá ser apresentado aos alunos com antecedência pelos profissionais que trabalham em anos anteriores, ou de uma maneira mais sucinta, durante o próprio ano letivo em que se está apresentando as noções básicas de sólidos geométricos. Os conceitos básicos dos quais nossos discentes jamais poderão ser privados de seu conhecimento, tais como as noções básicas de polígonos e suas áreas, as noções gerais de plano, reta e ponto são o ponto de partida para que o Princípio de Cavalieri seja apresentado, entendido e principalmente fazer com que estes educandos sejam capazes de reconhecer, diferenciar e manipular com cálculos de áreas, perímetros e volumes de figuras bidimensionais e tridimensionais. Não podemos deixar de citar também a necessidade de os alunos terem um conhecimento a respeito da geometria de posição para saber como os sólidos podem estar relacionados com o plano a reta e o ponto.

Sabemos da imensa dificuldade que temos no nosso dia a dia e dos desafios com os quais nos deparamos ao trabalharmos com nossos alunos a geometria, principalmente a geometria espacial no que diz respeito ao desenho, na sua construção ou até na própria análise de formas que estão prontas. Nossos alunos, na sua grande maioria, têm uma dificuldade muito grande em realizar desenhos e até certo ponto em fazer uma análise dos mesmos. Precisamos então fazer com que eles passem a trabalhar de uma maneira mais familiar com as formas, para então entender melhor os conceitos geométricos, sua importância para algumas deduções e definições a serem estudadas e não só os encarem como uma dificuldade a mais para o aprendizado e o estudo da geometria espacial e plana. Podemos ainda usar, hoje em dia, outros recursos que não sejam necessariamente os mais triviais, como por exemplo, recursos eletrônicos e softwares matemáticos para o auxílio na dedução e na resolução de problemas com o Princípio de Cavalieri.

Vamos apresentar o Princípio de Cavalieri como sendo um elo entre a teoria e a prática para a resolução de problemas simples ou bem mais complexos que envolvam também outras áreas do conhecimento com recursos mais modernos para a sua melhor compreensão. O princípio se torna prático a partir do memento em que se tem a sua apresentação através de uma sobreposição de figuras com a mesma área. Fica claro para todos que o observam pela primeira vez que ao sobrepormos ŞinfinitasŤ figuras de mesma área, mas de formas geométricas diferentes, poderemos ter o mesmo volume. Cabe aqui, estabelecermos uma diferença entre volume e capacidade de um sólido. O volume de um sólido é o quanto ele ocupa no espaço, lembrando-se sempre de que o volume de um sólido, teoricamente, é definido como sendo o produto das suas três dimensões, comprimento, largura e altura, podendo ter variações dependendo do sólido estudado. A capacidade é o quanto o sólido armazena em seu interior.

É de fundamental importância ressaltarmos que ao nos basearmos nos PCNs de matemática, vamos apresentar em um determinado momento o uso e o apoio de materiais concretos e de recursos computacionais para a apresentação do Princípio de Cavalieri e seus desdobramentos e aplicações no cotidiano e como já citado anteriormente, para deduções de raciocínios que possam ser usados em outras áreas do conhecimento e em outras disciplinas, além de serem aproveitados dentro da própria matemática.

2.2 Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM

Em sua Matriz de Referência, o Exame Nacional do Ensino Médio, preconiza os seguintes tópicos:

2.2.1 EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. **Dominar linguagens (DL):** dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. **Compreender fenômenos (CF):** construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. **Enfrentar situações-problema (SP):** selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. **Construir argumentação (CA):** relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade cultural.

O Exame Nacional do Ensino Médio através das Habilidades e Competências de cada área do conhecimento preconizam que o aluno ao final do ensino médio deve ser capaz de:

Área do conhecimento: Matemática e suas tecnologias

2.2.2 Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

2.2.3 Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

Capítulo 3

Noções Iniciais a respeito dos poliedros de Platão e alguns sólidos

Apresentaremos alguns conceitos que estão relacionados com a geometria espacial. Trabalharemos com sólidos e observaremos que cada um destes sólidos é composto por sua superfície e por seu interior. Inicialmente serão apresentadas algumas noções básicas acerca do espaço tridimensional e da maneira como são formados os poliedros de uma maneira geral. Em seguida será feito um breve comentário sobre figuras geométricas com o objetivo de introduzir o conceito de poliedros para que possamos apresentar posteriormente os prismas e as pirâmides, bem como alguns exemplos para se ter uma visualização dos mesmos.

No encerramento desse trabalho serão apresentados exercícios para uma aplicação de alguns dos conceitos apresentados.

Uma primeira ideia para definir os poliedros é a seguinte: "Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono". Cada um desses polígonos chama-se face do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado de vértice do poliedro. Todo poliedro, limita uma região do espaço, chamada de interior desse poliedro. A área ocupada pela superfície pode ser obtida por meio de cálculo de áreas de figuras planas, enquanto que seu volume nem sempre será uma tarefa muito fácil e assim, utilizaremos o Princípio de Cavalieri para obtermos os volumes de determinados poliedros que são de interesse.

3.1 Poliedros Especiais

Daremos total atenção a partir desse momento a alguns poliedros especiais, em particular os prismas e as pirâmides. Vamos verificar que esses poliedros têm algumas particularidades e por isso mesmo podemos usá-las na resolução de vários problemas. Focaremos a nossa atenção nos problemas que envolvem áreas e volumes de tais poliedros, áreas de suas faces, relações entre os seus lados, suas arestas e seus vértices além das situações em que tenhamos que usar propriedades e conceitos importantes para a compreensão e resolução de problemas.

3.1.1 Prismas

Textos históricos mostram que o prisma é uma figura geométrica conhecida desde antes de 2000 a.C., pois, segundo [8], os estudiosos da época já mostram-se familiarizados com o volume do paralelepípedo reto retângulo e, mais geralmente, do volume do prisma reto de base trapezoidal. Estudos produzidos historicamente mostram que diversos estudiosos dedicaram-se ao estudo do prisma. Dentre estes estudiosos podemos destacar Platão, Demócrito e Arquimedes. Baseado nestes e outros dados, diversos matemáticos dedicaram-se ao estudo do prisma com objetivos diversos, neste trabalho será abordado o conceito de prisma segundo alguns autores contemporâneos. A definição formal de um prisma, segundo [6], é a seguinte: Consideremos uma região poligonal convexa plana (polígono plano convexo) $A_1A_2...A_n$ de n lados e uma reta r não paralela nem contida no plano da região (polígono). Chama - se prisma ilimitado convexo ou prisma convexo indefinido à reunião das retas paralelas a r e que passam pelos pontos da região poligonal dada. Como citado em [7], o prisma é um cilindro cujas bases são polígonos. Alguns exemplos importantes de primas que podemos citar são os cubos, os paralelepípedos, que são primas de bases quadrangulares, prisma hexagonal regular dentre outros. Importante dizermos que o nome de um prisma é dado de acordo com a forma de sua base e que um prisma regular é aquele em que esta base tem todos os seus lados com a mesma medida.

3.1.2 Pirâmides

Observando as pirâmides do Egito, Figura 3.1 verificamos que o estudo desse tipo de poliedro tem despertado interesse há milhares de anos. Podemos observar isso através da grande pirâmide de Gizé construída por volta de 2600 a.C.

A definição formal de uma pirâmide é dada em [6] da seguinte maneira:

Consideremos uma região poligonal plano convexa (polígono plano - covexo) $A_1A_2...A_n$ de n lados e um ponto V fora de seu plano. Chama - se pirâmide ilimitada convexa ou pirâmide convexa indefinida à reunião das semirretas de origem em V e que passam pelos pontos da região poligonal (polígono) dada. Uma pirâmide, como citado em [7], será um cone com base poligonal e assim como nos prismas podemos dizer que uma pirâmide é regular quando a sua base é um polígono regular (todos os lados com a mesma medida).

Figura 3.1: Pirâmides do Egito - Fonte: www.asconversa.com

3.2 Sólidos formados por superfícies não planas

Vejamos uma introdução breve a respeito de superfícies regradas desenvolvíveis cilíndricas como aparecem em [6].

Superfícies regradas e cilíndricas são superfícies geradas por uma reta r geratriz, que se mantém paralela a uma reta dada s, que é a direção, e percorre e os pontos de uma linha dada t que é a diretriz. Essas superfícies são denominadas de regradas por serem geradas por retas e desenvolvíveis por poderem ser aplicadas, estendidas ou até desenvolvidas num plano (planificadas) sem dobras ou rupturas em sua estrutura.

Apresentamos algumas superfícies regradas desenvolvíveis cilíndricas:

- se a diretriz é uma reta não paralela à reta s, a superfície cilíndrica gerada será um plano.
- se a diretriz é um polígono (linha poligonal fechada), cujo plano concorre com a reta s, a superfície cilíndrica gerada é uma superfície prismática ilimitada.
- se a diretriz é uma circunferência cujo plano concorre com a reta s, a superfície cilíndrica é um cilindro circular ilimitada.

Apresentemos as superfícies regradas desenvolvíveis cônicas que são superfícies geradas por uma reta r, denominada de geratriz, que passa por um ponto V (vértice) e percorre os pontos de uma linha dada, na qual denominaremos de s (diretriz), com V fora de s.

Apresentamos alguns exemplos de superfícies regradas desenvolvíveis cônicas:

- se a diretriz é um reta, a superfície gerada é um plano, menos a reta paralela à diretriz.

- se a diretriz é um reta, a superfície gerada é um plano, menos a reta paralela à diretriz.

- se a diretriz é um polígono (linha poligonal fechada) cujo plano não contém o vértice V, a superfície cônica gerada é a reunião das duas superfícies de ângulos poliédricos opostas pelo vértice (superfícies de pirâmides ilimitadas).

- se a diretriz é uma circunferência cujo plano não contém o vértice, a superfície cônica gerada é uma superfície cônica circular (de duas folhas).

3.2.1 Cilindro

Consideremos um círculo (região circular) de centro no ponto A e raio r, que esteja situado em um plano α, e um segmento de reta BC, não nulo, não paralelo e não contido no plano α. Denominamos de cilindro circular à reunião dos segmentos congruentes e também paralelos ao segmento BC, com uma de suas extremidades nos pontos do círculo e situados em um mesmo semiespaço dos determinados por α.

Veja na Figura 3.2:

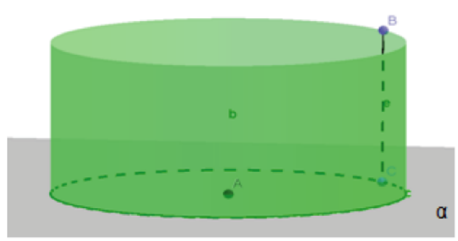

Figura 3.2: Cilindro Circular

3.2.2 Cones

Consideremos um círculo de centro O e raio r situado em um plano α e um ponto V fora deste plano. Denominamos de cone circular à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

Veja a Figura 3.3:

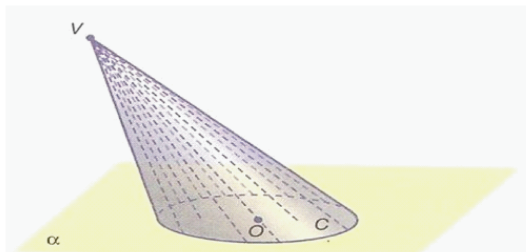

Figura 3.3: Cone - Fonte: loadinginformations.blo gspot.com

3.2.3 Esferas

Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto de pontos P do espaço tais que a distância OP seja menor ou igual a r.

Podemos conseguir uma esfera, rotacionando um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.

Observe a Figura 3.4 onde apresentamos uma esfera de revolução.

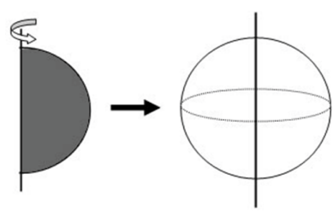

Figura 3.4: Esfera de revolução - Fonte: www.mundoeducacao.com

3.3 Áreas e volumes

Intuitivamente o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado, ou também o quanto "cabe" dentro daquele sólido. Pode-se observar este fato intuitivo quando se observa algumas embalagens de produtos observados no mercado. Para exprimir essa "quantidade de espaço ocupado" através de um número, devemos compará-la com uma unidade; o resultado dessa comparação será o que efetivamente chamaremos de volume.

A unidade de volume adotada será o cubo de aresta 1. Para cada tipo de unidade de comprimento, teremos uma unidade de volume correspondente. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for centímetro (cm), então a unidade correspondente de volume será o centímetro cúbico (cm^3). Assim o volume de um sólido S deve ser o número de vezes que esse sólido contém o cubo unitário. Mas, como esse sólido pode ter uma forma bastante irregular, não fica claro o número de vezes que o sólido contém o cubo.

A questão das áreas a serem calculadas, vamos nos basear na geometria do plano, pois para encontrarmos as áreas de superfície dos poliedros, usaremos os cálculos efetuados para obtenção da área de um polígono previamente estudado, tais como triângulos, quadriláteros, hexágonos, octógonos etc.

3.4 Exemplos de Poliedros

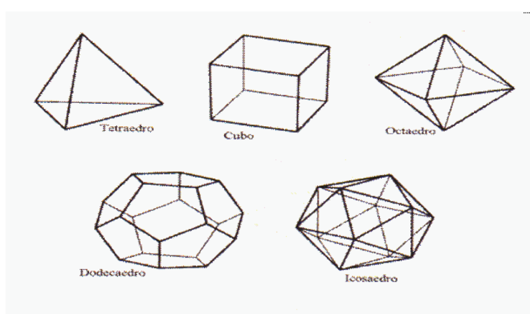

Figura 3.5: Poliedros - Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm16/curiosidades.htm

Dentre os exemplos apresentados acima, podemos verificar a existência de um prisma (cubo) e de uma pirâmide (tetraedro). Ambos os poliedros citados anteriormente são considerados regulares.

Capítulo 4

A noção intuitiva a respeito de volume de um sólido e volume de um paralelepípedo

O volume de um sólido é o que ele ocupa no espaço em que está inserido, ou seja, é o quanto ele está preenchendo do espaço analisado. Já foi dito anteriormente a diferença entre o volume e capacidade, ressaltando que vamos nos concentrar com afinco no cálculo de volume. Considere um paralelepípedo que tenha as suas três arestas iguais e medindo exatamente 1 unidade de comprimento, como apresentado na Figura 4.1:

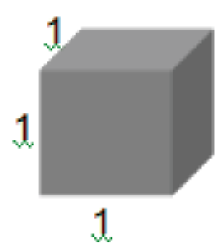

Figura 4.1: Paralelepípedo com arestas iguais

O que na verdade será um sólido o qual denominamos de cubo.

Podemos então afirmar que este cubo será a unidade de volume, ou seja, se tivermos um sólido que é formado por n "cubinhos" iguais a este, diremos que este sólido terá um volume n. Se aumentarmos uma das arestas deste cubo unitário, chamando de a, e isolando as outras duas arestas, teremos então que o novo volume será a, assim representado na Figura 4.2:

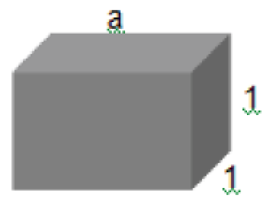

Figura 4.2: Paralelepípedo de arestas 1, 1 e a

Observando então que o novo volume será $1 \cdot a$

Agora, se este paralelepípedo tiver uma de suas arestas unitárias aumentada para b, e as outras duas arestas fixadas, teremos então o seguinte paralelepípedo apresentado na Figura 4.3:

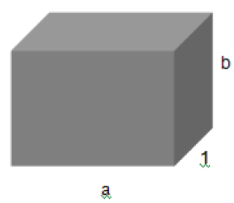

Figura 4.3: Paralelepípedo de arestas a, 1 e b

Novamente, fazendo uma observação a respeito deste novo sólido, observamos que o seu volume será $1 \cdot a \cdot b$

Tomando a aresta unitária restante e multiplicando - a por C e isolando as outras duas arestas, vamos finalmente obter o paralelepípedo apresentado na Figura 4.4:

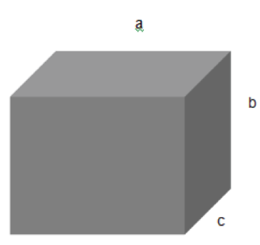

Figura 4.4: Paralelepípedo de arestas a, b e c

Assim então observando o volume deste paralelepípedo, vamos obter $a \cdot b \cdot c$ e comprovando que em um paralelepípedo de dimensões a, b e c, o seu volume será obtido através do produto destas três dimensões.

A situação do volume apresentado acima, poderá ser resumida através da situação **apresentada** na Figura 4.5:

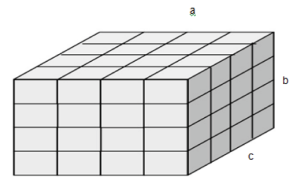

Figura 4.5: Paralelepípedo de arestas a, b e c - Fonte: anossaescola.com

Cada um dos pequenos paralelepípedos que forma a figura maior, é um dos que demonstramos anteriormente.

Considerando então que em um paralelepípedo retângulo, teremos a base sendo um retângulo de dimensões iguais a, b e c, poderíamos então dizer que o volume deste paralelepípedo será igual ao produto da área da base pela aresta b, que seria então a altura do sólido e assim:

$$V_{PARALELEPIPEDO} = AREA\,DA\,BASE \cdot ALTURA$$

Uma observação a se citar, como apresentado em [6], é a de que um paralelepípedo é chamado de romboedro quando possui as doze arestas iguais entre si e assim sendo, podemos chamar um cubo de romboedro. Vale salientar que nem todo romboedro é necessariamente um cubo. Apresentaremos alguns exemplos indicados na Figura 4.6:

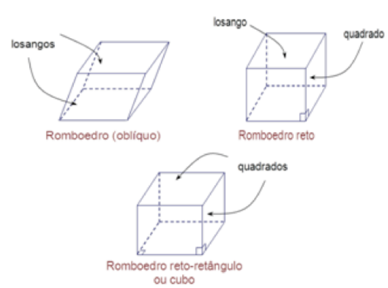

Figura 4.6: Romboedros - Fonte: www.portalescolar.net

Outra importante informação a ser abordada também, é o fato de que o cubo é um caso espacial de paralelepípedo e portanto poderá também ser calculado o seu volume usando o produto de suas três arestas, porém vale salientar que em cubo (romboedro retoretângulo), as arestas serão todas congruentes e assim sendo o seu volume será calculado da seguinte maneira:

$V_{CUBO} = a^3$ em que a é aresta do cubo.

Consideraremos agora um paralelepípedo oblíquo e assim verificaremos que o seu volume também poderá ser calculado pela fórmula citada anteriormente. Observe então o paralelepípedo da Figura 4.7:

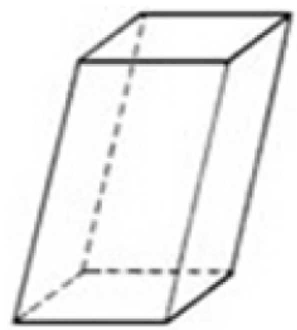

Figura 4.7: Paralelepípedo - Fonte: matematicacoes.blogspot.com

Verifiquemos que no prisma (paralelepípedo) da Figura 4.7, temos uma base que é um quadrilátero e as arestas laterais que não coincidem com a altura do sólido, porém nesta situação temos que estas arestas formam um ângulo α com o plano da base, sendo portanto maior que a altura.

Capítulo 5

O Princípio de Cavalieri

O Princípio de Cavalieri é assumido como um axioma e por isso não se vê a necessidade de uma demonstração formal principalmente pelo fato de se tratar de um assunto a ser abordado no Ensino Médio. Em nível de Ensino Médio sempre usamos o princípio referido anteriormente como uma "afirmação" que não necessita de uma demonstração e por isso mesmo consideramos o mesmo como um artifício prático para a resolução de vários problemas que envolvam volume de sólidos, visto que a grande maioria dos alunos não tem uma familiaridade com demonstrações. Vale lembrar que a demonstração do Princípio de Cavalieri requer conceitos avançados de Teoria da Medida e de Cálculo Diferencial e Integral, informações e conceitos não abordados no Ensino Médio, assim, mais uma vez, justifica-se a sua apresentação como um axioma.

Faz - se necessário então chamar a atenção dos alunos para que fiquem atentos quando da utilização do Princípio de Cavalieri, apresentado aqui como um axioma. Os exemplos apresentados na seção 5.1 não constituirão uma demonstração do princípio, mas sim uma boa indicação de que o mesmo é verdadeiro.

5.1 Procedimento do Princípio de Cavalieri

Princípio de Cavalieri para figuras planas - encontro de áreas

No Ensino Médio, o Princípio de Cavalieri muitas das vezes é apresentado apenas para o cálculo de volumes de sólidos e assim então se tem a noção de uso apenas em formas tridimensionais, porém, podemos aplicar o referido princípio no plano, ou seja, para o trabalho como formas bidimensionais. Vamos então admitir agora que tenhamos uma região limitada do plano que possa ser fatiada de tal maneira que observemos uma infinidade de segmentos "cortando" esta região limitada do plano. A reunião destes infinitos segmentos (dependendo da forma da região) será caracterizada como a área desta região. Obviamente quando caracterizamos duas regiões distintas do plano, que tenham mesmas áreas, a razão entre segmentos correspondentes deverá ser 1 unidade de comprimento. Vejamos a seguir uma ilustração na Figura 5.1:

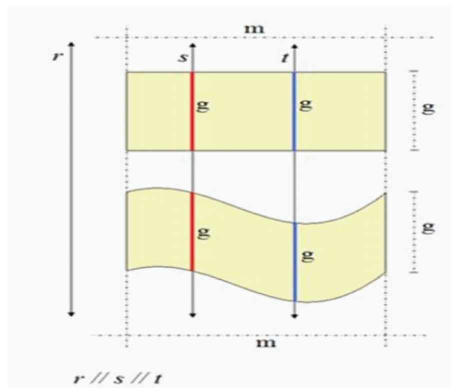

Figura 5.1: Cálculo de Áreas - Fonte: mauroweigel.blogspot.com

As áreas serão iguais, pois as retas s e t estão com segmentos correspondentes com mesmo comprimento, ou seja, as razões entre os segmentos serão iguais a 1.

Vejamos agora a Figura 5.2 onde podemos apresentar o princípio de Cavalieri para análise e comparação de áreas de figuras planas:

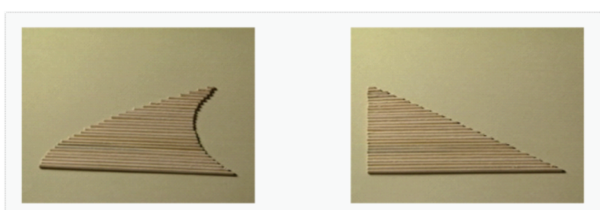

Figura 5.2: Figuras Planas - Fonte: Matemática Multimídia, Guia do Professor, Geometria e Medidas, Unicamp

Então mais uma vez, verificamos que duas regiões planas terão mesma área se os segmentos obtidos em cada uma das secções transversais tiverem o mesmo comprimento.

O uso do princípio de Cavalieri para figuras bidimensionais é bem menos usado para os alunos do Ensino Médio e a sua apresentação nem sempre é feita durante este nível de ensino. O importante é salientar que para o cálculo de áreas temos outros recursos mais simples e que podem ser apresentados sem causar nenhum transtorno.

Princípio de Cavalieri para o Cálculo de volumes:

Vamos admitir então que de uma maneira simples, tenhamos um bloco de forma retangular, mais conhecido como um paralelepípedo e que este possa ser dividido em "folhas" cada vez mais finas, quase transparentes, e que estas folhas possam ser sobrepostas, formando o próprio sólido. Estas folhas, geometricamente falando, seriam secções planas que são diferenciadas por um valor bem pequeno, uma medida bem pequena e assim sendo, o volume deste sólido será a reunião de todas as "folhas" ou secções citadas anteriormente e independentemente da posição destas folhas o volume será o mesmo e assim poderíamos pensar em ter várias formas ou vários "estilos" para este bloco, não alterando o seu volume. Raciocinando desta maneira, uma conclusão muito importante é a de que podemos ter dois sólidos com mesma altura e que possamos gerar secções com formas diferentes, mas com mesmo valor numérico de área de modo que os seus volumes serão iguais, isto quer dizer que comparando dois sólidos com mesmo volume, eles terão mesma altura e áreas de secções correspondentes sendo as mesmas. Veja a Figura 5.3, onde podemos comparar dois sólidos - um cilindro e um prisma com base sendo um quadrilátero:

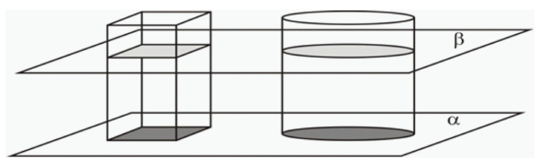

Figura 5.3: Sólidos - Fonte:obaricentrodamente.blogspot.com

Uma outra situação bem prática onde poderíamos verificar aplicação do Princípio de Cavalieri, seria aquela na qual agrupamos várias moedas Figura 5.4, e formamos um sólido redondo (um cilindro circular). Ao movermos estas moedas, sem diminuir a quantidade e sem alterarmos a sua angulação, teremos a observação de vários outros sólidos diferentes de um cilindro , mas que ao final, terão o mesmo volume, pois estamos "trabalhando" sempre com a mesma quantidade de moedas.

Figura 5.4: Moedas representando secções. Fonte: obaricentrodamente.blogspot.com

As moedas estão funcionando como as folhas apresentadas anteriormente e o sólido, a reunião destas moedas.

A apresentação do Princípio de Cavalieri, foi feita para a obtenção de volumes de sólidos geométricos e esta sendo relacionada através de sólidos com características de prismas, porém podemos estender o tal princípio para ser analisado e exemplificado com pirâmides e também sólidos de superfícies não planas, tais como, os cilindros, cones e esferas, que são estudados no Ensino Médio, inclusive apresentaremos a dedução do volume de uma esfera, usando o Princípio de Cavalieri. Esta apresentação é feita de maneira que possamos analisar seções planas com mesmas áreas. Vejamos a seguir, Figuras 5.5 e 5.6, alguns exemplos que citamos anteriormente.

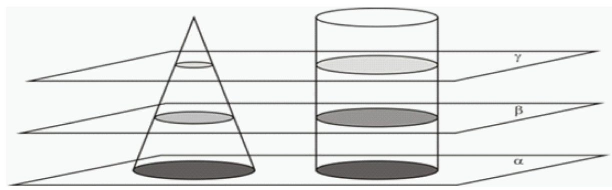

Figura 5.5: Procedimento de Cavalieri I - Fonte: obaricentrodamente.blogspot.com

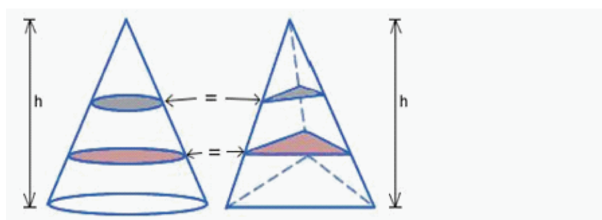

Figura 5.6: Procedimento de Cavalieri II - Fonte: obaricentrodamente.blogspot.com

Capítulo 6

Uso de recursos eletrônicos e softwares no emprego do Princípio de Cavalieri

Devido ao grande interesse dos jovens pela informática, podemos fazer uso deste interesse a nosso favor, usando os mesmos como aliados para o ensino de conteúdos de modo que softwares são usados como uma ferramenta essencial para despertar o interesse e a criatividade dos alunos para a aplicação, por exemplo, do cálculo de áreas de figuras planas, da observação e construção de polígonos regulares e convexos, além da construção e análises de paralelismos e perpendicularismos. Temos que salientar que uma das recomendações do PCN é a utilização de softwares para a melhor análise e compreensão de alguns conteúdos dentro da Matemática, tomando o cuidado de não transformá-lo em um recurso que possa parecer um professor virtual, mas sim um "ajudante" deste professor e que possa ser então uma ferramenta instrucionista, que sirva de ajuda na transmissão de conceitos e conhecimentos, ou seja, construcionista, onde o aluno terá um contato direto com a máquina e consequentemente fazendo construções e intervenções com o software. Podemos ser "ajudados" por alguns softwares de fácil manuseio, como o Geogebra, que será útil na construção de polígonos, nos cálculos de áreas e montagens de sólidos geométricos, bem como o seu volume. Com este recurso, além de termos uma base para o Princípio de Cavalieri, podemos apresentar aos nossos educandos, conceitos e maneiras interessantes de efetuar algumas construções e a visualização de figuras geométricas. Teremos também a opção do software Cavo, para efetuar cálculo de volume de sólidos geométricos, servindo assim de um aliado para algumas conferências de resultados. O uso do software wingeom também é muito interessante, pois apresenta ao usuário as informações perfeitas a respeito da construção de um sólido geométrico, bem como a visualização de relações importantes, facilitando assim uma comparação entre áreas e volumes. Os recursos do software Poly, facilitam na visualização em vários ângulos de um determinado sólido, além de podermos classificar os mesmos. Como pode ser visto nas Figuras 6.1, 6.2, 6.3.

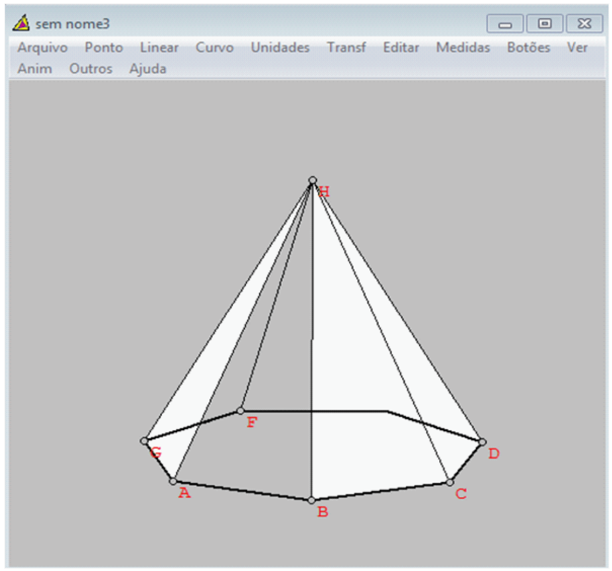

Figura 6.1: Pirâmide Wingeom

Figura 6.2: Edição da Pirâmide

Mas ao mostrarmos essas figuras, podemos inserir nos alunos uma curiosidade extremamente importante para a futura construção de outros sólidos. A ideia não é apresentarmos softwares que efetuem o cálculo, mas que construam figuras, mostrem elementos e assim possamos a partir deste momento efetuar os cálculos manualmente, lembrando que estes mesmos softwares têm a capacidade de calcular, não sendo este nosso objetivo final.

O que é importante mencionarmos é a necessidade de um conhecimento básico a respeito dos softwares que serão usados para uma melhor aprendizagem e uma melhor dinâmica em sala de aula.

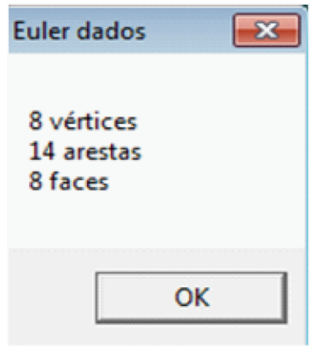

Figura 6.3: Relação de Euler

Usando os recursos citados anteriormente podemos fazer com que o aluno saiba, por exemplo, comparar, analisar e usar em algumas outras áreas do conhecimento o cálculo de volume usando o princípio de Cavalieri. O emprego correto de algumas definições e propriedades se faz necessário, pois caso contrário, o manuseio de tais recursos poderia se tornar inválido ou pior, servindo para uma fixação errônea de certos conteúdos ou obtenção de valores errados.

Como dito anteriormente, os softwares não irão simplesmente calcular os volumes de alguns sólidos mais conhecidos, mas apresentar outras informações além do cálculo propriamente dito. O que poderemos inserir em nossos alunos será o hábito de usar uma ferramenta para comparação de resultados e não simplesmente um instrumento que será utilizado para uma cópia de resultados, não analisando as mesmas e nem compreendendo o seu significado dentro do contexto apresentado ou em que ela poderá ser útil em uma situação futura. Sem estas noções o nosso aluno passa a ser um mero copiador de respostas e de fórmulas.

Como exemplo, podemos tomar um prisma hexagonal regular Figura 6.4, e ao calcularmos o seu volume, teremos que obrigatoriamente calcular a área da sua base que será um hexágono regular, podemos então usar o Geogebra para efetuar este cálculo, veja:

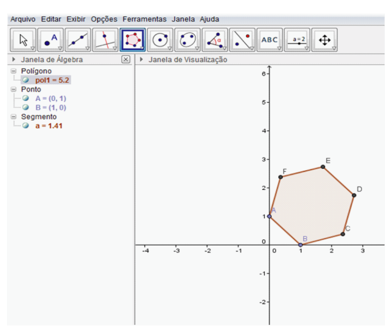

Figura 6.4: Polígono no Geogebra

Temos um hexágono regular de lado $\sqrt{2}$ do qual o software já calculou a área e, portanto, o cálculo do volume fica de fácil conclusão, pois dependendo da altura do prisma, podemos apenas aplicar a fórmula de cálculo e assim obter o mesmo.

Com alguns recursos do Geogebra, é possível também a visualização de sólidos geométricos, sendo assim um recurso interessante para que os alunos consigam construir, visualizar e calcular volumes e áreas de sólidos geométricos, como na Figura 6.5::

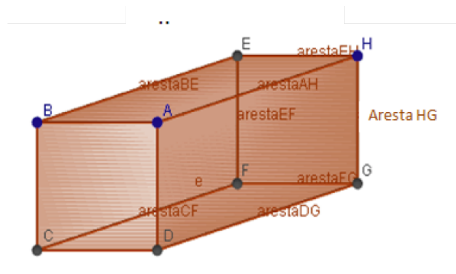

Figura 6.5: Paralelepípedo no Geogebra

Na figura acima, podemos observar a construção de um prisma quadrangular, onde são apresentadas as arestas, as bases e as faces laterais.

Uma informação muito importante, pois tem um papel fundamental na resolução e na observação de exercícios por parte dos alunos. Visualizando a Figura 6.5, o aluno conseguirá perceber elementos e informações preciosas que serão úteis para a composição do raciocínio e resolução de problemas.

O que é relevante citar será o fato de que o discente terá uma apresentação prévia a respeito do software, sabendo assim manipulá-lo de uma maneira básica, mas que lhe ajude.

Vejamos agora, na Figura 6.6, uma esfera e a partir da mesma, poderemos então calcular o seu volume e área de superfície:

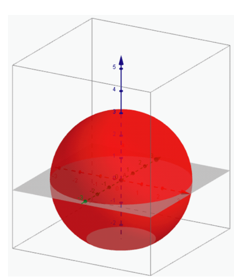

Figura 6.6: Esfera no Geogebra

Observação: Figura construída no Geogebra, usando recursos de janela 3D. Nesta figura conseguimos observar detalhes importantes, tais como a equação da esfera e alguns pontos da mesma.

As Figura 6.7 e 6.8 a seguir nos mostra a construção de um prisma regular reto tendo como base 10 lados (decágono), todos eles medindo 2 unidades de comprimento e altura igual a 4 unidades de comprimento.

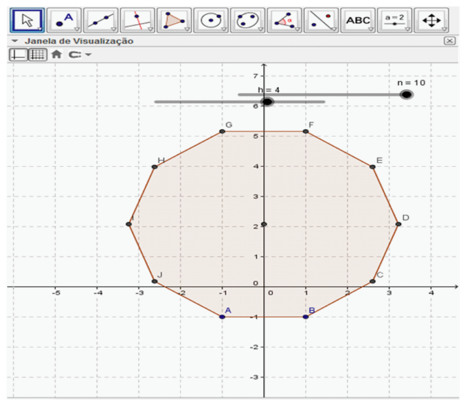

Figura 6.7: Decágono no Geogebra

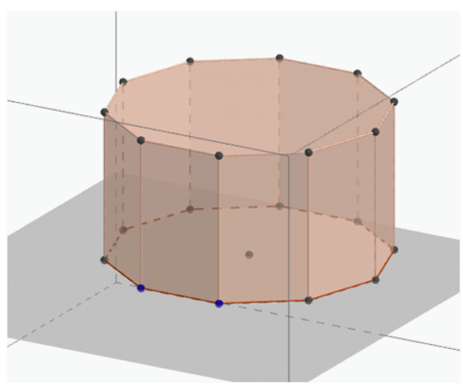

Figura 6.8: Prisma tendo como base um decágono

Na Figura 6.9, temos a apresentação de um prisma pentagonal regular, construído com o auxílio do Geogebra em que é fácil verificar o cálculo do volume deste sólido.

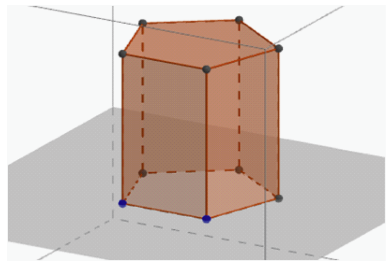

Figura 6.9: Prisma Pentagonal

Do mesmo prisma que apresentamos acima, verificaremos na Figura 6.10, a sua planificação também feita através do software Geogebra.

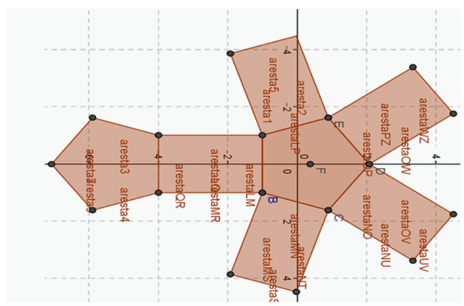

Figura 6.10: Planificação do Prisma Pentagonal

No software Poly, podemos de uma maneira bem simples, apresentar, planificar e mudar a posição de vários sólidos. Veja a Figura 6.11:

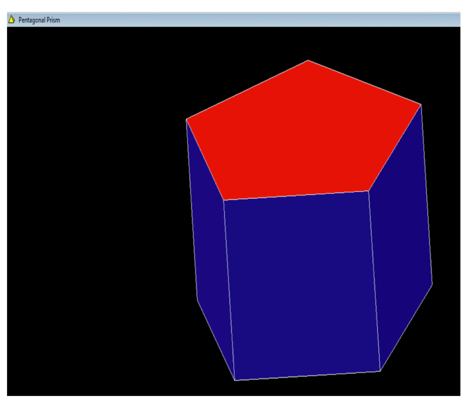

Figura 6.11: Prisma Pentagonal no Poly

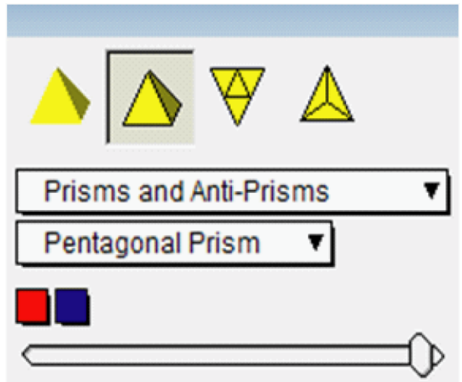

Figura 6.12: Prisma Pentagonal Regular

Do mesmo prisma que apresentamos acima, verificaremos a sua planificação também feita através do software Geogebra.

Capítulo 7

Uso de material "concreto" no estudo do Princípio de Cavalieri

Além dos recursos eletrônicos tais como softwares e aplicativos, podemos também usar como material de apoio à aprendizagem, materiais concretos que podem ser adquiridos da maneira mais simples e acessível. Esses materiais podem auxiliar a visualização por parte do aluno, de conceitos e informações teóricas apresentadas em sala de aula, além de poderem ser manipulados e confeccionados pelos próprios docentes. Pode - se, por exemplo, construir um prisma com uma caixa de sapatos ou qualquer outra embalagem que faça com que se associe à ideia de um prisma (bases planas e paralelas), além disso, podemos apresentar conceitos a respeito de sólidos redondos de uma maneira muito mais fácil de entendimento e de visualização como as geratrizes de um cilindro e a altura do mesmo também podem ser consideradas como esta geratriz.

Uma característica muito importante do trabalho em sala de aula com material concreto é a de podermos observar e apresentar planificações de sólidos e de estruturas mais difíceis de serem visualizadas somente em três dimensões, principalmente quando só temos como recurso didático, o livro ou apostila, além do caderno do aluno. Vale lembrar que uma das maiores dificuldades encontradas por parte dos alunos é a de não saberem desenhar, ou analisar um desenho já pronto, pois estamos na verdade querendo que o cérebro associe formas tridimensionais apresentadas em um plano que é bidimensional. Podemos efetuar cortes para observar a existência de elementos "obscuros", trabalhar a inserção de um sólido em outro, observando assim a inscrição e circunscrição dos mesmos, além de podermos comparar áreas e volumes. Dependendo do sólido estudado podemos até comparar volume e capacidade. Uma situação muito comum e fácil de apresentarmos aos alunos o Princípio de Cavalieri é com uma resma de folhas de papel ofício, onde cada uma das folhas, quando empilhadas, estaria representando uma secção plana e como todas as folhas têm a mesma espessura (mesma altura no caso de considerarmos secções) e são idênticas, podemos calcular o volume desta resma usando conceitos básicos a respeito de volume de um paralelepípedo e assim, encontrar também o volume de qualquer sólido geométrico formado com todas estas folhas empilhadas, visto que são fáceis de manipular e "deformar" para a utilização em outros sólidos.

Apresentaremos agora alguns exemplos importantes através dos quais poderemos mostrar aos alunos, informações concretas a respeito dos sólidos geométricos e mais precisamente o Princípio de Cavalieri. Podemos usar porta-copos que são distribuídos em bares, restaurantes e lanchonetes, para podermos construir, por exemplo, um cilindro circular reto, onde verificaremos que a justaposição destes porta-copos resultará no cilindro citado, podemos obter ou até construir superfícies de mesma área, mas com forma diferente e assim observaremos que a justaposição das mesmas formará sólidos geométricos de mesmo volume, justificando desta maneira o enunciado do Princípio de Cavalieri e fazendo com ele fique "visualizado".

As pirâmides são um outro exemplo para as quais os materiais concretos têm uma grande importância em sua apresentação e entendimento por parte dos alunos, pois dependendo da natureza da pirâmide a construção no plano ou até a análise de um sólido pronto em um livro ou apostila se torna muito difícil e em um material em que se possa manipular a visualização, o cálculo e o entendimento pode se tornar muito mais prazeroso e tranquilo. Em uma pirâmide de base hexagonal regular, podemos, por exemplo, enxergar os triângulos equiláteros que formam o hexágono regular base e assim construir faces internas e outros elementos de tal sólido, isso sem falar na questão do volume da mesma que é o nosso alvo principal. A seguir as Figuras 7.1, 7.2 e 7.3 são apresentadas.

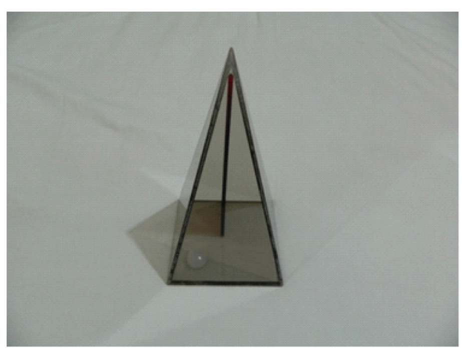

Figura 7.1: Pirâmide de Base Quadrangular

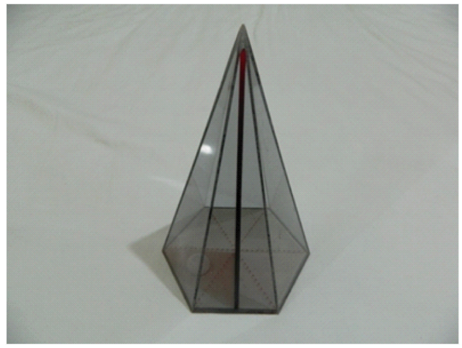

Figura 7.2: Pirâmide de Base Hexagonal

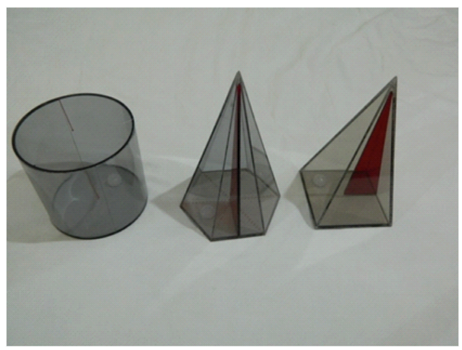

Figura 7.3: Sólidos de Natureza Diferente

Nas Figuras 7.1, 7.2 e 7.3, temos sólidos de natureza diferente (bases diferentes, sólidos redondos ou não), mas que têm o mesmo volume. Esta apresentação se torna muito importante a partir do momento em que conseguimos ver concretamente a ideia de termos formas diferentes com mesmo volume.

Podemos na verdade, com o material concreto observar e manipular vários tópicos e várias situações.

Capítulo 8

Demonstrações e exemplificações importantes

Vamos, a partir de agora apresentar algumas demonstrações e alguns exemplos e aplicações do Princípio de Cavalieri que são importantes para o conhecimento do mesmo.

8.1 Demonstração do Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, usando recursos de Cálculo Diferencial e Integral como justificativa para docentes.

Citando a demonstração feita em [18], temos:

Ressaltamos a notação apresentada que o volume de um sólido P será indicado por $v(P)$ e $a(R)$ indica a área de uma região R do plano.

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja P um sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja P_t a interseção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x, z)$ e $x = g(y, z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja Qt a interseção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $a(P_t) = k.a(Q_t)$ para todo t. Então $v(P) = k.v(Q)$.

Demonstração:

Da teoria de integração de funções reais temos:

$$v(P) = \iiint\limits_{P} dx\,dy\,dz = \int_0^C \left[\iint\limits_{Pz} dx\,dy \right] dz = \int_0^C a\,P_z\,dz = \int_0^C KaQ_z\,dz = K\cdot\int_0^C aQ_z\,dz$$

$$= \cdots = Kv(Q)$$

8.2 Princípio de Cavalieri para figuras planas - Demonstração

Considere duas regiões do plano, denominadas de R e Q, vamos "inserir" estas duas regiões em planos cartesianos distintos, como nas Figuras 8.1 e 8.2:

Figura 8.1: Região R

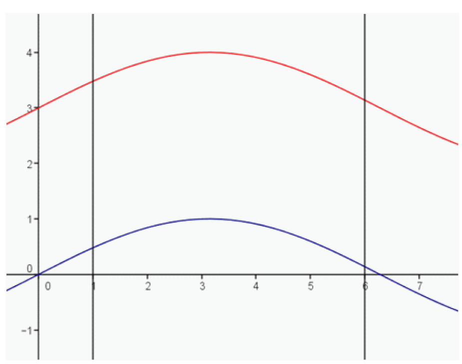

Figura 8.2: Região Q

Nas Figuras 8.1 e 8.2, anteriores, temos duas funções em cada uma delas e a região limitada pelos gráficos é que chamamos de região R e Q.

Vamos então tomar nestes planos, retas paralelas ao eixo das ordenadas e que intersectam as nossas regiões R e Q, formando nestas regiões segmentos de reta. Se para cada valor de x tomarmos retas que interceptam as duas regiões formando segmentos iguais em cada uma das regiões (mesmos valores de x para as duas regiões), então vamos verificar que estas regiões R e Q têm a mesma área. A demonstração deste fato se dá usando integrais:

Vamos chamar de cx os comprimentos dos segmentos que cortam a região R, dependendo do x no qual ele é relacionado do eixo das abscissas e de $c'x$ os comprimentos dos segmentos que cortam a região Q com relação aos mesmos valores de x. O que dissemos acima é que se a cada mesmo valor de $xc_x = c'_x$, então as regiões R e Q têm a mesma área. Faremos então o seguinte: Consideremos que a região R está limitada por duas funções, denominadas $f(x)$ e $g(x)$, isto que dizer que o comprimento cx, será na verdade $f(x) - g(x)$ e assim a área desta região será $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, ou seja, $\int_b^a c_x dx$. Agora vamos considerar a região Q também limitada por duas funções denominadas de $h(x)$ e $k(x)$, vamos então observar que a área da mesma será $\int_b^a [h(x) - k(x)]dx$ o que quer dizer $\int_b^a c'_x dx$. Como por hipótese $c_x = c'x$, podemos então dizer que $\int_b^a c_x dx = \int_b^a c'_x dx$, o que representa serem as duas áreas iguais.

8.3 Área de uma região determinada por uma curva $y = x^2$ e o eixo das abscissas.

8.3.1 Conceitos e informações preliminares

Conforme vemos em [6], podemos descrever o seguinte:

Cavalieri estabeleceu um teorema que relaciona os "indivisíveis" de um paralelogramo com aqueles observados em triângulos determinados por uma de suas diagonais. Indicaremos os primeiros por a e os segundos por x. Cavalieri provou que $\sum a = 2 \sum x$; $\sum a^2 = 3 \sum x^2 \ldots$

Observemos que os somatórios apresentados têm o sentido de apresentar a infinidade destas secções, correspondendo à ideia de integração para a formação das figuras.

Observe o que foi enunciado na Figura 8.3 a seguir:

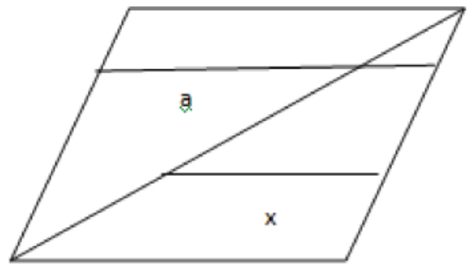

Figura 8.3: Área de um triângulo

Se o paralelogramo é um retângulo de altura b, sua área $\sum a$ é igual ao produto de um divisível pelo "número" b de indivisíveis, ou seja $\sum a = a.b$.

E assim usando a primeira parte das relações demonstradas por Cavalieri e que foram apresentadas no início da demonstração, obtemos a área do triângulo que será

$$\sum x = \frac{1}{2}\sum a = \frac{1}{2}a.b$$

A segunda parte das relações apresentadas permite calcular a área compreendida entre a curva $y = x^2$ e o eixo x (de 0 até a), vide Figura 8.4:

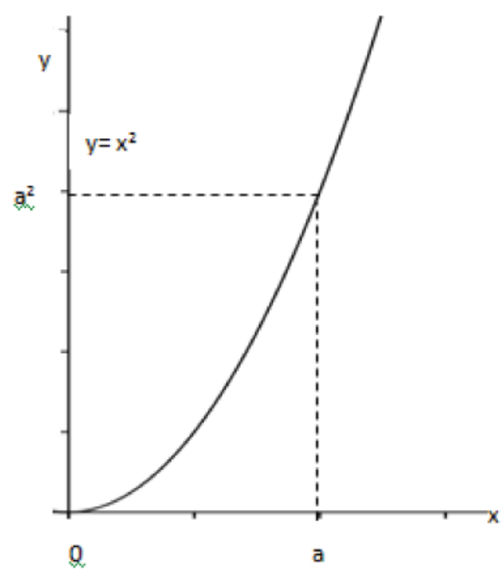

Figura 8.4: Área compreendida entre a curva $y = x^2$ e o eixo x

Segundo as ideias apresentadas por Cavalieri, essa área vale $\sum x^2$, pois cada um de seus indivisíveis vale x^2. Entretanto pela relação citada anteriormente, teremos:

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}\sum a^2$$

Onde $\sum a^2$ é a área do retângulo que contém a região da qual queremos a área. Porém, observando a Figura 8.4, podemos afirmar que a área deste retângulo pode ser "calculada" fazendo $a.a^2 = a^3$. Logo, a área pedida seria $\frac{a^3}{3}$.

8.4 Volume de um paralelepípedo qualquer - Demonstração

Esta é uma demonstração simples de ser feita e terá como embasamento fundamental o Princípio de Cavalieri.

Considere um paralelepípedo P , Figura 8.5, qualquer no qual as faces são quadriláteros congruentes dois a dois (por exemplo paralelogramos congruentes dois a dois), vamos então tomar uma dessas faces como sendo a base desse paralelepípedo. No plano em que esta base está apoiada, vamos tomar (por construção por exemplo) um retângulo com área numericamente igual à área do quadrilátero base do paralelepípedo P, ao construirmos um bloco (prisma reto) com base sendo este retângulo e altura igual a do paralelepípedo qualquer P, vamos estar na verdade construindo um prisma retangular reto, cujo volume já é conhecido e calculado pelo produto da área da base pela altura e assim pelo Princípio de Cavalieri podemos então afirmar que o volume do paralelepípedo P será igual ao volume desse paralelepípedo construído, ou seja, o produto da área da base pela altura.

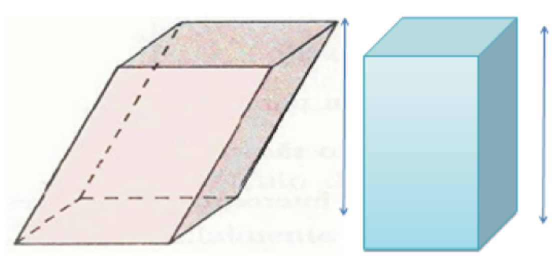

Figura 8.5: Paralelepípedo P - Fonte: Infoescola.com

8.5 Volume de uma pirâmide de base triangular - Demonstração

Apresentações preliminares

Um prisma de base triangular decomposto em três pirâmides de bases triangulares e com mesmos volumes.

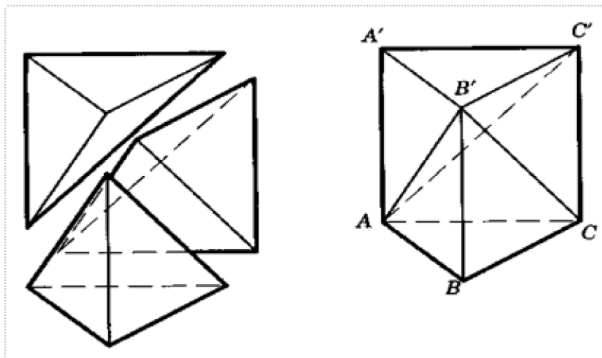

Figura 8.6: Volume de uma pirâmide triangular - Fonte: Elon Lages Lima - Medida e Forma em Geometria

Na Figura 8.6, podemos perceber a decomposição do prisma triangular em três pirâmides cujos volumes serão iguais e logo podemos então trabalhar com a ideia de que o volume de uma pirâmide triangular é um terço do volume de um prisma triangular que tem a mesma base. Provemos então que as pirâmides formadas têm o mesmo volume.

Vamos demonstrar que as três pirâmides são a própria $ABCB'$, a pirâmide $A'B'C'A$ (com base congruente à base de $ABCB'$ e com mesma altura) e a pirâmide $ACC'B'$, cuja base ACC' é congruente à base $AA'C'$ da segunda e cuja altura, a partir do vértice B', é igual à altura da segunda pirâmide, $AA'C'B$, a partir do mesmo vértice B'.

8.6 Volume de uma pirâmide qualquer (não sendo triangular)

Para calcularmos o volume de uma pirâmide de base não triangular, vamos recorrer à fórmula deduzida na última seção e usar o Princípio de Cavalieri que diz que sólidos apoiados em um mesmo plano que têm alturas com medidas iguais e as áreas de secções obtidas através da secção de planos paralelos às bases iguais têm volumes iguais e assim podemos deduzir que o cálculo de volume da mesma é: **um terço do produto da área da base pela altura**

deste sólido. Porém, podemos efetuar a demonstração de uma outra maneira e para isso utilizamos, sem perda de generalidade, uma pirâmide pentagonal regular.

A sua base pode ser assim:

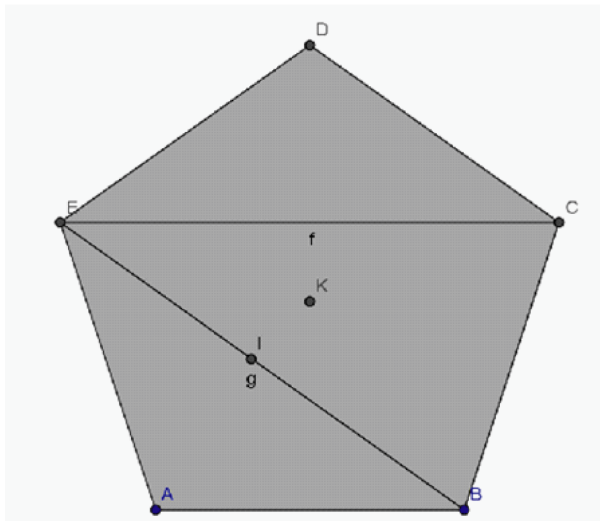

Figura 8.7: Pentágono em $n-2$ triângulos

Na Figura 8.7 observamos que o pentágono foi dividido em três triângulos. Lembremos que em um polígono qualquer de n lados, podemos ter $n-2$ triângulos, quando ligamos um vértice aos outros $n-3$ não adjacentes.

Cada um desses triângulos podem ser chamados da seguinte forma: triângulo ABE será denominado B_1, o triângulo BEC será denominado B_2 e o triângulo CED será denominado B_3.

Desta maneira, a pirâmide com base neste polígono, pode ser montada como na Figura 8.8:

Podemos então verificar a existência de três pirâmides com bases triangulares e com mesma altura da pirâmide dita "original". Esta altura denominaremos de h.

O volume da pirâmide $ABCDEF$ será dado por:

$V = V_1 + V_2 + V_3$ Onde V_1, V_2 e V_3 são os volumes das três subpirâmides.

Já sabemos que o volume de uma pirâmide triangular pode ser dado por:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}.$$

Sendo A_b a Área da Base e h a Altura da Pirâmide.

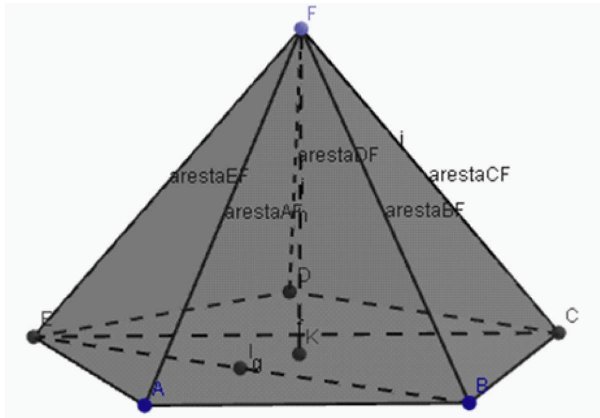

Figura 8.8: Pirâmide Pentagonal

E assim então $V = \frac{B_1.h}{3} + \frac{B_2.h}{3} + \frac{B_3.h}{3} = \frac{1}{3}h(B_1 + B_2 + B_3) = \frac{B.h}{3}$

Onde B é a área do pentágono (Somando a área dos três triângulos, teremos a área do pentágono).

Concluímos, então, que o volume da pirâmide pentagonal também poderá ser calculada por $\frac{AREA\,DA\,BASE \cdot ALTURA}{3}$.

8.7 Volume de uma esfera

Para determinarmos o volume de uma esfera, vamos tomar um cilindro equilátero tendo raio da base r e altura $2r$ e dois cones de bases iguais às bases do cilindro e altura igual a r. Unindo estes dois sólidos através de seu vértice comum, teremos um novo sólido denominado de clepsidra (a união dos dois cones com mesma altura e mesmos raios da base, ou seja, dois cones idênticos). Veja as Figuras 8.9:

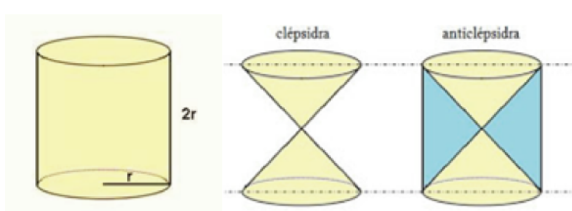

Figura 8.9: Clepsidra e Anticlepsidra. Fonte: obaricentrodamente.blogspot.com

Cilindro de raio r e altura $2r$,a clepsidra e a anticlepsidra, que é o sólido resultante da exclusão da clepsidra de um cilindro, que na verdade é o sólido que está no interior do cilindro e é exterior aos dois cones juntos (clepsidra).

Consideremos agora uma esfera de raio r, uma anticlépsidra como a que foi definida anteriormente e um plano α que secciona os dois sólidos simultaneamente. Vide a Figura 8.10:

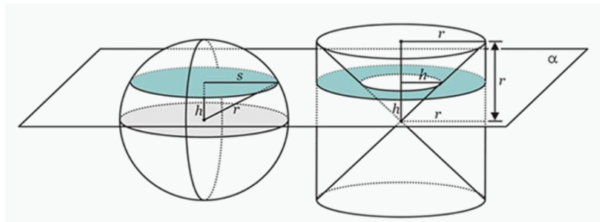

Figura 8.10: Volume de uma esfera. Fonte: obaricentrodamente.blogspot.com

Qualquer plano β que é secante à esfera e paralelo ao plano α distando h unidades de medida do centro da esfera e do vértice da clepsidra, também seccionará a anticlepsidra e assim sendo teremos como resultado as seguintes expressões para as secções:

Área da secção na esfera: Asecção/esfera$= \Pi s^2 = \Pi(\mathrm{r}^2 - h^2)$

Lembremos que esta secção é na verdade um círculo de raio s.

Área da secção na anticlepsidra: Asecção/anticlepsidra$=\Pi r^2 - \Pi h^2 = \Pi(\mathrm{r}^2 - h^2)$.

Lembremos que esta secção é na verdade uma coroa circular com círculos de raio maior sendo r e raio menor sendo h.

Como verificamos, as áreas de secções são as mesmas e assim pelo Princípio de Cavalieri, a esfera e a anticlepsidra têm volumes iguais.

$\mathrm{V}_{ESFERA} = V_{ANTICLEPSIDRA}$

E assim sendo teremos então:

$$V_{ESFERA} = V_{CILINDRO} - 2 \cdot V_{CONE} = \Pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \Pi r^2 \cdot r = 2 \cdot \Pi r^3 - \frac{2}{3} \cdot \Pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \Pi r^3$$

Capítulo 9

Proposta para o trabalho didático com princípio de Cavalieri no Ensino Médio

Como já citado anteriormente, a apresentação do princípio de Cavalieri deve ser feita mais precisamente na segunda série do Ensino Médio, pois é nessa etapa que o aluno tem contato maior com a parte da geometria espacial, conjuntamente com a geometria plana.

Apresentamos a seguir uma proposta para o trabalho didático que está sendo usada como exemplo no livro "A prática Educativa: como ensinar", de Antoni Zabala [21]. Essa proposta está estruturada da seguinte maneira:

I- Apresentação de uma situação problema por parte do professor.

O professor expõe aos alunos uma situação que gere um conflito e que pode ser resolvida através de meios matemáticos.

II- Busca de soluções. O professor pede aos alunos que explicitem e apresentem diferentes formas de resolver o problema e a situação.

III- Exposição do conceito e o algoritmo.

O professor aproveita as propostas dos alunos para elaborar um novo conceito e aí sim apresentar o modelo formal do algoritmo ou como no caso da geometria espacial, as fórmulas a serem usadas nos exercícios e situações futuras.

IV- Generalização.

O professor demonstra a função do modelo conceitual e o algoritmo, ou fórmulas, em todas aquelas situações que cumprem determinadas condições.

V- Aplicação.

Os alunos, individualmente ou em grupo, aplicam o modelo em diversas situações.

VI- Exercitação.

Os alunos resolvem atividades usando os algoritmos e no caso específico da geometria, usam as fórmulas apresentadas anteriormente.

VII- Prova ou exame.

Em classe, os alunos respondem às questões em uma simulação ou realização efetiva de uma prova.

VIII- Avaliação.

Os resultados alcançados pelos alunos serão apresentados aos mesmos pelo professor.

A sequência proposta acima começa sempre com uma problematização sobre o assunto que será introduzido. Ao coletar os comentários com os alunos chegaremos às soluções das questões propostas e assim sendo apresentar-se-á definições e orientações pertinentes aos questionamentos e assuntos propostos inicialmente. O próximo passo será propor uma lista de atividades com o objetivo principal de fixar o que foi comentado e apresentado. Tais exercícios serão selecionados de livros didáticos que estão sendo citados na bibliografia de vestibulares das principais Universidades do país, além de atividades do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Esta sequência não foi aplicada em nenhuma classe do ensino regular e assume-se o compromisso de realizá-la apresentando o seu resultado em um próximo trabalho.

Exercícios que podem ser trabalhados e que envolvem o Princípio de Cavalieri:

1. Um prisma tem por base um triângulo equilátero cujo lado e a altura desse prisma é igual ao dobro da altura do triângulo da base. Determine então o volume desse prisma.

2. Um prisma reto tem por base um quadrado inscrito em um círculo de 2 m de raio e altura medindo o dobro da diagonal deste quadrado. Qual é o seu volume?

3. (ENEM - 2010 - Adaptado) - Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, determine a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo.

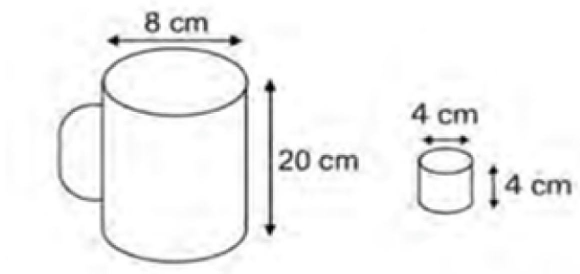

Figura 9.1: Enem 2010

4. (ENEM - 2010) - Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.

   Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá:

   a) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
   b) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
   c) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
   d) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
   e) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

5. A base de um paralelepípedo oblíquo é um quadrado de lado x. Uma das arestas laterais é y e forma um ângulo de 60ž com os lados adjacentes da base. Determine o volume deste paralelepípedo.

6. (FGV - SP) - Uma piscina tem o formato de um prisma hexagonal regular com profundidade igual a m. Cada lado do hexágono mede 2 m. Determine então o volume de água necessário para encher 80% do volume da piscina.

7. (UFU - MG) - Na figura a seguir, temos um cubo ABCDEFGH de aresta a = 6 cm. Os pontos I, J, K, L, M e N são pontos médios das arestas a que pertencem.

   Determine o volume da pirâmide de base hexagonal $IJKLMN$ e vértice H.

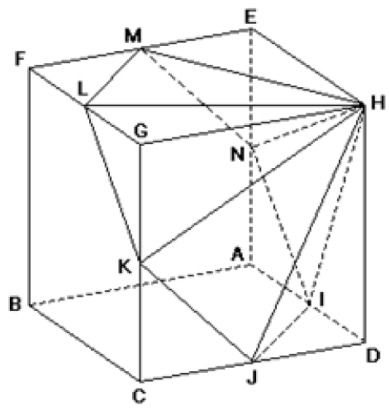

Figura 9.2: UFU - MG

8. (UFRS) - A partir de quatro dos vértices de um cubo de aresta 6, construído com madeira maciça, foram recortadas pirâmides triangulares congruentes, cada uma tendo três arestas de medida 3, conforme representado na primeira imagem da Figura 9.3.

   O sólido obtido após a retirada das pirâmides está representado na segunda imagem da Figura 9.3, a seguir.

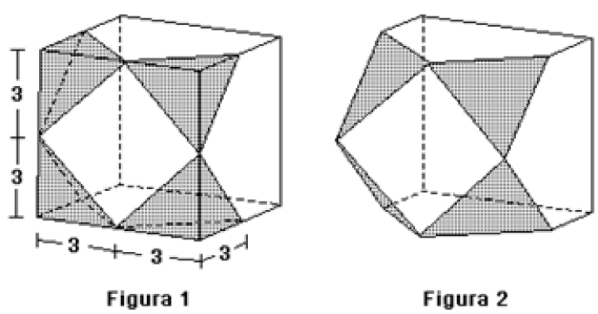

Figura 9.3: UFRS

   O volume do sólido obtido é

   a) 198. b) 204. c) 208. d) 212. e) 216.

9. (ENEM - 2010) - Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir:

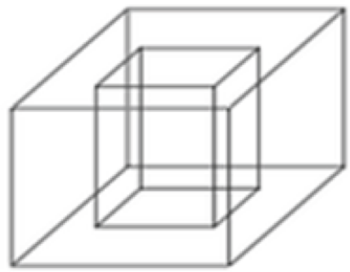

Figura 9.4: ENEM, 2010

O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm. O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:

a) 12 cm^3.
b) 64 cm^3.
c) 96 cm^3.
d) 1216 cm^3.
e) 1728 cm^3.

10. Determinar o volume de um cilindro inscrito em um cubo de aresta medindo 20 cm.

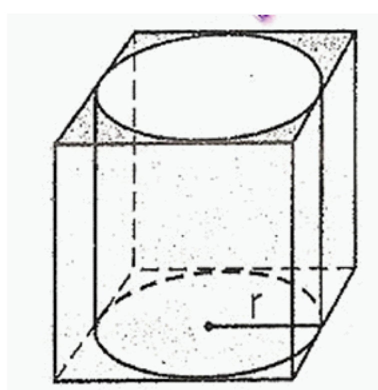

Figura 9.5: Cilindro inscrito. Fonte: www.maestroplomero.com

11. Um reservatório tem a forma de um hemisfério. Qual o volume máximo de líquido que cabe nesse reservatório em litros? Use $\Pi = 3$.

Dado: O diâmetro da semiesfera vale 5 m.

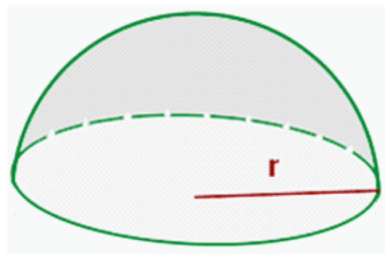

Figura 9.6: Semiesfera. Fonte: www.maestroplomero.com

12. Qual é o volume de um tetraedro regular de aresta a?

13. Quando duas pirâmides regulares de base quadradas e cujas faces laterais são triângulos equiláteros são colocadas base a base, o sólido resultante é chamado de octaedro regular. Calcule o volume de um octaedro regular de aresta medindo 5 cm.

14. Qual é a capacidade de uma lata de molho de tomate que tem a forma cilíndrica com 8 cm de diâmetro e 11 cm de altura? (Use $\Pi = 3$)

Figura 9.7: Extrato de Tomate: Realidade; Cilindro: Modelo Matemático

15. Um tanque cônico tem 4 m de profundidade e seu topo circular tem 6 m de diâmetro. Qual o volume máximo, em litros, que esse tanque pode conter de líquido?

9.1 Atividades alternativas que envolvem o Princípio de Cavalieri

9.1.1 Atividade 1

Verificação e validade do Princípio de Cavalieri.

Objetivo da atividade

Despertar nos alunos a sua intuição para que possam perceber a real validade do Princípio de Cavalieri, aceitando assim este Princípio como um axioma, verificando a sua validade e comprovando via cálculo a igualdade dos volumes a serem comparados. Com o auxílio do software Geogebra 5.0 com versão de janela 3D, os alunos tomarão conhecimento de sólidos com os quais trabalharão.

Materiais necessários

- Computadores que possuem o software Geogebra 5.0 com versão de janela 3D.
- O arquivo eletrônico CavalieriIl.ggb.
- Livro didático com assunto a respeito do Princípio de Cavalieri.

Tempo necessário

Serão necessários 50 minutos (1 aula) para a realização da atividade, onde os alunos basicamente trabalharão em computadores usando o software.

Pré-requisitos básicos para realização da atividade

- Conhecimento mínimo de informática básica e consequente manipulação do software;
- Conhecimentos básicos de cálculos volumétricos e trabalho como números inteiros e racionais.

Desenvolvimento da atividade

Inicialmente será apresentado o software para os alunos, principalmente para aqueles que não tenham conhecimento sobre o mesmo. Logo após iremos abrir o arquivo CavalieriII.ggb e então visualizaremos em sua interface dois sólidos que poderão ser manipulados com comandos oferecidos no arquivo e que também irão facilitar o cálculo de volume dos mesmos, justificado pelo Princípio de Cavalieri.

9.1.2 Atividade - 2

Cálculo do volume de um cilindro, de uma pirâmide e de um cone.

Objetivo da atividade

Esta atividade tem como principal objetivo apresentar aos alunos uma maneira prática de construir um cilindro de revolução e com seus elementos que serão apresentados no software calcular o seu volume e as suas áreas (da base e lateral). Além disso, será possível construir pirâmides e cones para que possamos também efetuar o cálculo de seu volume, visualizando os elementos importantes dos mesmos.

Materiais necessários

- Computadores que possuem o software Geogebra 5.0 com versão de janela 3D.
- Os arquivos eletrônicos cavaliericonepiramide.ggb, cilindro e cone.ggb, cilindrorevol.ggb.
- Livro didático com assunto a respeito do Princípio de Cavalieri.
- Caderno e lápis para efetuar anotações e pequenos cálculos.

Materiais necessários

Serão necessários 50 minutos (1 aula) para a realização da atividade, onde os alunos basicamente trabalharão em computadores usando o software.

Pré-requisitos básicos para realização da atividade

- Conhecimento mínimo de informática básica e consequente manipulação do software.
- Conhecimentos básicos de cálculos volumétricos e trabalho como números inteiros e racionais.
- Conhecimento básico acerca do Princípio de Cavalieri e da construção de sólidos geométricos.

Desenvolvimento da atividade

Com o software devidamente apresentado aos alunos e estes já de posse dos arquivos vamos inicialmente identificar elementos dos sólidos, anotando em um caderno valores que serão atribuídos a estes elementos e a seguir vamos então verificar, por meio de cálculos no caderno, os valores de volume destes sólidos, comparando com os mesmos apresentados no software.

Capítulo 10

Resolução dos exercícios teóricos do capítulo 9.

1. Vamos primeiramente estabelecer o desenho do prisma proposto na atividade.

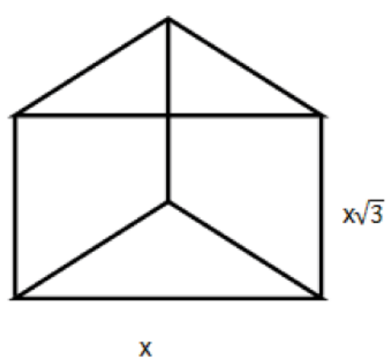

Figura 10.1: Prisma Triangular

Como a base é um triângulo equilátero, temos: $A_B = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Em se tratando de um prisma triangular, conseguimos, através do Princípio de Cavalieri, obter que o volume de qualquer prisma será $V = A_B.h$, onde h é a altura do prisma. Portanto:

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot x\sqrt{3} = \frac{3x^3}{4}$$

2. Esta seria então a visualização planificada da base inscrita em um círculo. Portanto, a diagonal do quadrado mediria $4m$. Como sabemos que a diagonal de um quadrado é

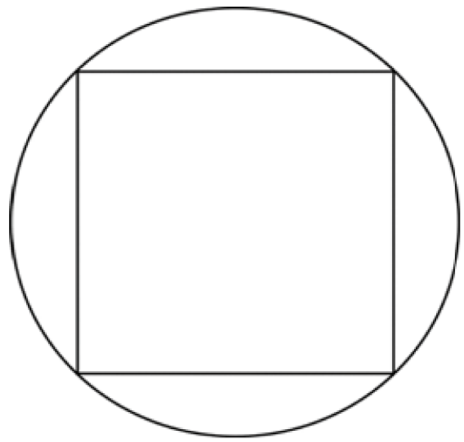

Figura 10.2: Quadrado inscrito em um círculo

dada pela expressão $l\sqrt{2}$, podemos então concluir que o lado deste quadrado tomado como base será $2\sqrt{2}m$ e a sua altura, como dito no enunciado será 8 m. Assim sendo, podemos então concluir que o volume do prisma será:

$V = A_B.h$, onde a base será um quadrado de lado $2\sqrt{2}$

$V = 8 \cdot 8 = 64m^3$

3. Temos dois sólidos com mesmo volume, porém com "formatos" diferentes.

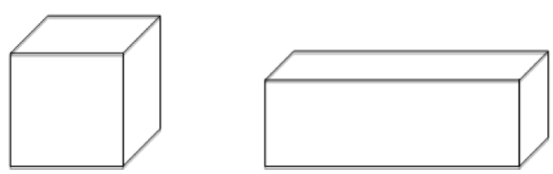

Figura 10.3: Paralelepípedo e cubo

O formato de paralelepípedo tem as seguintes dimensões: 3, 18 e 4 cm, portanto, o seu volume poderá ser calculado efetuando o produto das mesmas, ou seja, $V_{PARALELEPPEDO} = 3 \cdot 18 \cdot 4 = 216cm^3$.

Este volume será o mesmo para o cubo, portanto, $V_{CUBO} = 216cm^3$, e como sabemos que o volume de um cubo pode ser trabalhado como aresta elevado à terceira potência, vamos montar o seguinte raciocínio:

$216 = a^3$, logo $a = 6$.

Concluímos então que a aresta do cubo mede $6cm$.

4. Se ela deverá encher os 20 copinhos pela metade, obviamente ela encherá 10 copos inteiros e o volume destes dez copos cheios será:

$10 \cdot (V_{COPINHO} = A_{BASE} \cdot Altura)$

$10 \cdot (\Pi r^2 \cdot Altura)$

$10 \cdot (3,14 \cdot 4 \cdot 4)$

$10 \cdot 50,24 = 502,4\,cm^3$

O volume da leiteira é :

$V_{LEITEIRA} = 3,14 \cdot 16 \cdot 20 = 1004,8\,cm^3$, que é o dobro do volume dos 10 copinhos, logo precisaríamos encher a leiteira até a metade, pois o seu volume é 20 vezes o volume de cada copinho.

5. Obtendo o desenho, teremos:

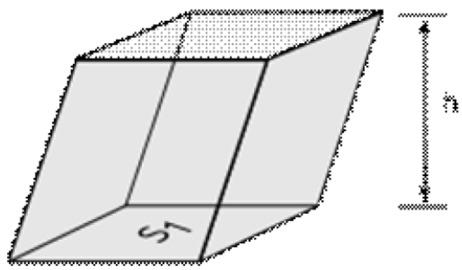

Figura 10.4: Prisma oblíquo. Fonte:www.msps.eng.br

Como os lados da base medem x e esta base é um quadrado, podemos então concluir que sua área será x^2. Basta agora encontrarmos a altura do prisma. Para encontrarmos essa altura, vamos trabalhar com a definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo:

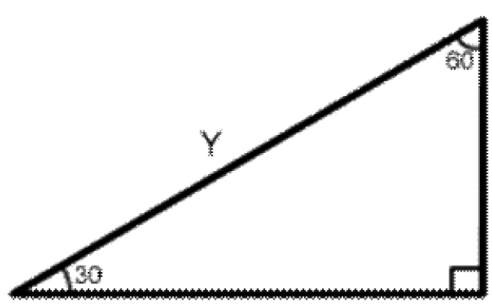

Figura 10.5: Triângulo Retângulo. Fonte: brainly.com.br

$sen60^0 = \frac{altura}{y}$ $\sqrt{3}2 = hy$ $h = \frac{y\sqrt{3}}{2}$

E assim sendo, podemos então calcular o volume do sólido.

$V_{PRISMA} = A_{BASE} \cdot h$

$V_{PRISMA} = x^2 \cdot \frac{y\sqrt{3}}{2}$

$V_{PRISMA} = x^2 \cdot \frac{y\sqrt{3}}{2}$

6. Pensando em um prisma hexagonal, teríamos a seguinte figura:

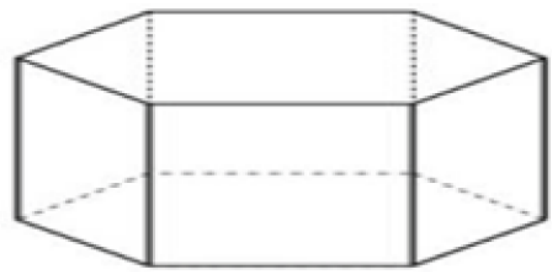

Figura 10.6: Prisma Hexagonal. Fonte: brainly.com.br

Calculando o volume, teremos:

V$_{PISCINA} = A_{BASE} \cdot ALTURA$

Onde a área da base será na verdade a área de um hexágono regular de lado 2 m, portanto:

$A_{BASE} = 6 \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}m^2$

E assim então:

$V_{PISCINA} = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9m^3$

Como queremos encher apenas 80% de sua capacidade, gastaremos $0,8.9 = 7,2m^3$, ou seja, 7200 litros.

A pirâmide formada terá uma base hexagonal de lado $3\sqrt{2}cm$ (uso do Teorema de Pitágoras, tomando a metade da aresta do cubo). Para encontrarmos a altura dessa pirâmide, vamos ter um pouco mais de trabalho. Usaremos o segmento JH, que será obtido através da aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo HJD

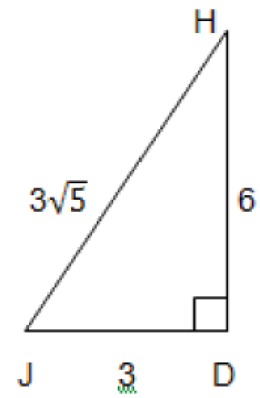

Figura 10.7: Triângulo retângulo JDH

Portanto, novamente podemos usar o Teorema de Pitágoras para encontrarmos a medida da altura da pirâmide a qual chamaremos de altura HO, considerando O como sendo o centro da base do hexágono que forma a base da pirâmide. Teremos então o seguinte triângulo retângulo:

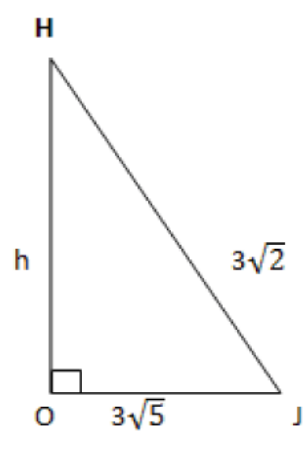

Figura 10.8: Triângulo Retângulo HJO

A atura h, será $3\sqrt{3}cm$. Consequentemente, podemos calcular o volume da pirâmide, usando a fórmula obtida: $V = \frac{AREA\,DA\,BASE \cdot ALTURA}{3}$, onde a área da base será a área de um hexágono regular de lado $3\sqrt{3}cm$. Sendo assim teremos $Ab = 27\sqrt{3}cm^2$. E finalmente o volume da pirâmide será então $81cm^3$.

O volume do cubo, antes da retirada das pirâmides será $63 = 216$ unidades de volume (basta lembrarmos que o volume de um cubo é na verdade o volume de um prisma com todas as arestas de mesma medida, portanto $V = A_B \cdot Altura$. Como as pirâmides "retiradas" são na verdade tetraedros com três arestas medindo 3 unidades, podemos então calcular o volume de cada uma.

Lembremos que o volume de uma pirâmide é dado pela seguinte fórmula:

$$V_{PIRAMIDE} = \frac{AREA\,DA\,BASE \cdot ALTURA}{3},$$

resultado que foi obtido usando o princípio de Cavalieri na comparação com uma situação em que tínhamos um prisma triangular decomposto em três pirâmides com mesma base e mesma altura.

Logo, o volume de cada uma das pequenas pirâmides será obtido da seguinte maneira:

A base destas pirâmides serão triângulos isósceles e equiláteros com dois lados medindo 3, logo a área de cada uma destas bases será $A_{BASE} = 4,5$ unidades de área e a altura de cada uma das pirâmides será a metade da medida da aresta do cubo, ou seja 3.

Assim o volume de cada pirâmide será:

$$V_{PIRAMIDE} = \frac{4,5 \cdot 3}{3} = 4,5\,unidades\,de\,volume$$

.

E como são quatro pirâmides, verificaremos que o volume delas será 18 e finalmente, o volume do sólido resultante será:

V_{FINAL} = (Volume do cubo) - (Volume das quatro pequenas pirâmides)

V$_{FINAL}$ =216 - 18 = 198.

O volume de madeira a ser usado na confecção será dado por:

V$_{MADEIRA} = V_{CUBO\,MAIOR} - V_{CUBO\,MENOR}$

Onde o volume do cubo maior tem aresta 12cm e o menor tem aresta 8cm.
V$_{CUBO\,MAIOR} = 123 = 1728\,\text{cm}^3$
V$_{CUBO\,MENOR} = 83 = 512\,\text{cm}^3$
Vamos mais uma vez lembrar que o volume de um cubo é dado pela relação entre a área da base e a sua altura, verificando que suas arestas são todas iguais, sendo assim o volume será calculado como o valor desta aresta elevado à terceira potência. Finalizando, teremos então V$_{MADEIRA} = 1728 - 512 = 1216\,\text{cm}^3$.

Como o cilindro está inscrito no cubo, podemos afirmar que o cilindro será um cilindro reto e que a sua altura terá a mesma medida da aresta do cubo, além de verificarmos que o raio da base será a metade da medida desta aresta, ou seja, 10 cm.

Assim o volume do cilindro dado será obtido usando a mesma relação usada para o cálculo do volume de um prisma, pois pelo princípio de Cavalieri

Para encontrar o volume máximo do reservatório, vamos lembrar da fórmula obtida para calcular o volume de uma esfera, tomando o cuidado para não se esquecer de que um hemisfério nada mais é do que uma semiesfera, ou seja: V$_{HEMISFERIO} = 4\Pi R^3 6$.

Usando o raio igual a 5 m, $\Pi = 3$, teremos:

$V_{HEMISFERIO} = \frac{4.3.125}{6} = \frac{1500}{6} = 250\, m^3$. O que equivale a 250.000 litros de capacidade.

Sabemos que um tetraedro regular tem as quatro faces sendo triângulos equiláteros. Calculando inicialmente a área da base (que é obviamente um triângulo equilátero), teremos:

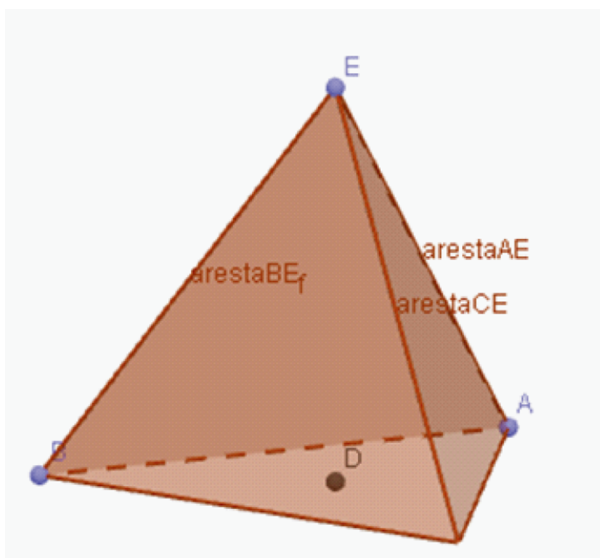

Figura 10.9: Pirâmide Triangular

$A_{BASE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, que é na verdade a área de um triângulo equilátero de lado a.

Calculamos agora a altura do tetraedro, onde D é o centro da base ABC. A altura do triângulo base será dividida na de maneira que o segmento BD seja $\frac{2}{3}$ de toda esta altura e como a altura da base é a altura de um triângulo equilátero temos que $H_{BASE} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, segue então que o segmento BD mede $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ e assim aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo BDE, encontraremos a medida da altura da pirâmide

$BE^2 = BD^2 + ED^2$, sendo ED a medida da altura da pirâmide.

$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2$

$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ e sendo desta maneira, poderemos, enfim, calcular o volume da pirâmide usando a fórmula do volume

$$V = \frac{AREA\, DA\, BASE\ \cdot\ ALTURA}{3} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{36} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Calcularemos o volume da pirâmide que forma o octaedro, teremos então o volume de uma pirâmide de base quadrada em que cada uma das arestas medem 5 cm.

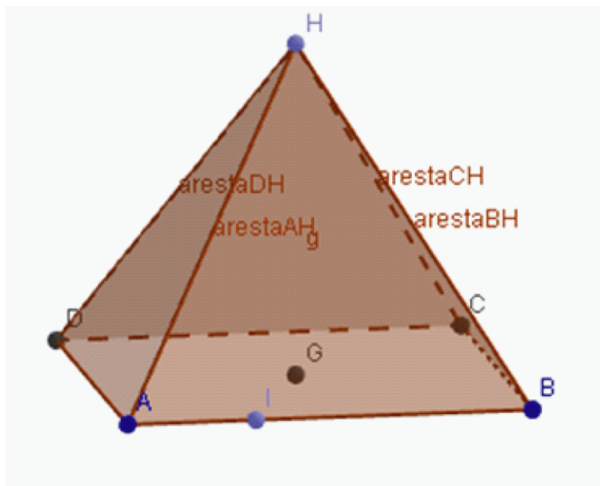

Figura 10.10: Pirâmide Quadrangular

A área da base será a área de um quadrado de lado medindo 5 cm, ou seja:

$A_{BASE} = 5^2 = 25\,\text{cm}^2$

Para encontrar a medida da altura desta pirâmide, vamos usar o Teorema de Pitágoras, usando a metade da diagonal da base e uma das arestas (segmento GD, aresta HD e altura HG)

$52 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2$

$h = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

E assim, podemos então calcular o volume desta pirâmide:

$V_{PIRAMIDE} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\frac{25 \cdot 5\sqrt{2}}{2}}{3} = 29,1\,\text{cm}^3$

Como no octaedro, temos duas pirâmides iguais, vamos obter seu volume final sendo o seguinte:

$\text{V}_{OCTAEDRO} = 2 \ \cdot 29,1 = 58,2\,\text{cm}^3$

Como o diâmetro da base da lata cilíndrica mede 8 cm, verificaremos que seu raio medirá 4 cm e assim sendo a área desta base será $A_{BASE} = 16\Pi cm^2$, ou seja: $48cm^3$ aproximadamente.

O volume da lata será: $V_{LATA} = A_{BASE} \cdot H$, onde H é a altura da lata.

(Basta relembrarmos do Princípio de Cavalieri)

$\mathrm{V}_{LATA} = 48 \cdot 11 = 528\,\mathrm{cm}^3$

Como o diâmetro do tanque mede 6 m, temos que o raio de sua base mede 3 m e como informado no enunciado, a sua altura vale 4 m.

Vamos então, inicialmente, calcular a área da "base" deste tanque.

Admitiremos que o valor de Π será aproximadamente 3,14.

$A_{BASE} = 9\Pi m^2 = 28,26\,\mathrm{m}^2$

Como a altura mede 4 m, para encontrarmos o volume, vamos usar:

$$V_{CONE} = \frac{AREA\,DA\,BASE\ \cdot\ ALTURA}{3} = \frac{28,3 \cdot 4}{3} = 37,68\,m^3$$

O que equivale a 37.680 litros.

Conclusão

Neste trabalho, apresentamos informações e aspectos importantes a respeito do cálculo, da dedução e de características relevantes sobre o volume de um sólido geométrico, além da contribuição do Princípio de Cavalieri para poder efetuar tais cálculos. Com este trabalho podemos verificar a natureza das fórmulas, construções dos sólidos e principalmente, uma maneira alternativa de se estabelecer os resultados de exercícios e situações que envolvem o volume de uma figura ou uma situação em que se faz necessário o uso ou cálculo de tal grandeza, fazendo com que os jovens do Ensino Médio fiquem mais interessados em determinados tópicos da matemática que supostamente seriam mais áridos para os mesmos. O material concreto e os softwares que fazem referência à disciplina Matemática são citados neste trabalho como peças fundamentais que estão sendo apresentadas juntamente aos exercícios e as definições teóricas, formando assim, um conjunto importante de ferramentas para auxiliar estudantes e professores do Ensino Médio no aprendizado, fixação e detalhamento de estruturas importantes a serem vistas.

Referências Bibliográficas

[1] BERLINGHOFF, W.P., GOUVÊA, F.Q. - "A matemática através dos tempos: Um guia fácil para professores e entusiastas." / Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Editora Blucher

[2] BICUDO, M.A.V. *Filosofia da Educação Matemática (Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas)* São Paulo: Editora da UNESP, 2010.

[3] BOYER, C. B. *História da matemática.* 2ł Edição. São Paulo. Edgard Blücher, 1996.

[4] BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. *Paramêtros curriculares nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental Secretaria de Educação Fundamental.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

[5] DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações.* v.2. Editora Ática, 2013.

[6] DOLCE, O., POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar, 10: Geometria Espacial, Posição e Métrica.* São Paulo. Editora Atual, 2013. [11] LIMA , E. L., Medida e Forma em Geometria. Rio de Janeiro, SBM, 1991.

[7] LIMA , E. L. *Medida e Forma em Geometria.* Rio de Janeiro, SBM, 1991.

[8] EVES, HOWARD. *Introdução à História da Matemática.* Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

[9] FERNANDEZ, P. J.MEDIDA E INTEGRAÇÃO. *Medida e Integração.* 2ł Edição. Rio de Janeiro. SBM, 1966.

[10] LIMA, E. L. *Temas e problemas elementares.* 12ł Edição. Rio de Janeiro. SBM, 2006.

[11] LIMA , E. L. *Medida e Forma em Geometria.* volume 2 - 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[12] LINDQUIST, M. *Aprendendo e ensinando geometria.* São Paulo: Editora Atual, 1994

[13] BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Paramêtros curriculares nacionais para o ensino médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Fundamental.* Brasília: MEC/SEF, 2006.

[14] MOISE, E.; DOWNS, F. *Geometria Moderna.* Volume 2, São Paulo: Edgard Blücher, 1975.

[15] PATERLINI, R. R. *Os "Teoremas" de Cavalieri. Revista do Professor de Matemática nº. 72, 2º quadrimestre de 2010, págs. 43 - 47* Versão ampliada com as demonstrações dos teoremas. www.dm.ufscar.br/ ptlini/.(Acesso em 20/11/2014).

[16] PINTO, A. *A teoria dos indivisíveis: Uma contribuição do padre Bonaventura Cavalieri.* Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC- SP. São Paulo. 2008.

[17] PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. *Tópicos de História da Matemática.* Rio de Janeiro : SBM, 2012 .(Coleção PROFMAT).

[18] PRIMO. M.E. *O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades.* Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

[19] SMOLE, K.C.S. , DINIZ, M.I.S. *Matemática: ensino médio* Volume 2, São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

[20] SOFTWARE GEOGEBRA 5.0 JOGL1 BETA 3D Disponível em: www.geogebra.org - Acessado em 11/01/2015.

[21] ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar.* Editora Artes Médicas Sul Ltda, 1998.