Universidade Estadual de Londrina

DANILO AUGUSTO FERREIRA DE JESUZ

DESENVOLVENDO O CONCEITO DE ÁREAS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ABORDAR REGIÕES PLANAS IRREGULARES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Londrina
2015

DANILO AUGUSTO FERREIRA DE JESUZ

DESENVOLVENDO O CONCEITO DE ÁREAS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ABORDAR REGIÕES PLANAS IRREGULARES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós Graduação em nível de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro

Londrina
2015

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

J58d Jesuz, Danilo Augusto Ferreira de.
Desenvolvendo o conceito de áreas : uma proposta didática para abordar regiões planas irregulares na educação básica / Danilo Augusto Ferreira de Jesuz. – Londrina, 2015.
122 f. : il.

Orientador: Neyva Maria Lopes Romeiro.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Geometria euclidiana – Teses. 3. Matemática – História – Teses. 4. Ensino auxiliado por computador – Teses. 5. Geometria euclidiana plana – Formação de conceitos – Teses. I. Romeiro, Neyva Maria Lopes. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

DANILO AUGUSTO FERREIRA DE JESUZ

DESENVOLVENDO O CONCEITO DE ÁREAS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ABORDAR REGIÕES PLANAS IRREGULARES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós Graduação em nível de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Prof.ª Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____

Prof.ª Dra. Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
UTFPR - Londrina

Londrina, _____de ___________de _____.

Dedico este trabalho à minha esposa Dirlene Santos de Oliveira, aos meus pais Antônio Ferreira de Jesuz e Ana Lucia Correia de Jesuz, aos meus irmãos Christian Cesar Ferreira de Jesuz, Daniele Cristina Correa de Jesuz, Gustavo Henrique Ferreira de Jesuz.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, que é a minha razão de viver.

Agradeço a minha orientadora, Prof.ª Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro, pela orientação, por partilhar suas experiências e contribuir de forma significativa com o desenvolvimento do trabalho.

Agradeço a minha esposa, a quem amo de forma incondicional, por me dar forças, aconselhar e principalmente me entender, durante o período do mestrado.

Agradeço aos meus pais Antônio e Ana Lucia, porque os sucessos que hoje posso gozar se devem exclusivamente ao amor, carinho, dedicação e trabalho empenhados em prol da construção do meu caráter. A vocês devo a minha vida e toda minha gratidão!

Agradeço aos queridos Leopoldo, Jilli, Sol, Gil, Alison, Darine, Fernando, Carla, Larissa e Júlio pela amizade, conselhos, apoio e carinho. Ao longo de toda minha vida me proporcionaram uma infinidade de momentos de infinita felicidade, estavam comigo nos intermináveis momentos de tristezas e angústias, acreditaram e me apoiaram quando eu perdi as esperanças. Louvo a Deus por ter me agraciado com amigos maravilhosos e agradeço a Ele por tê-los conservado em meu caminho. O melhor de mim é reflexo de cada um vocês!

Agradeço aos colegas da turma PROFMAT 2013 - UEL, em especial ao Gil, que por muitas vezes cedeu espaço em sua casa, para que fosse possível realizar as atividades do mestrado e ao Júlio, que não mediu esforços para me ajudar ao longo de todo o período de PROFMAT.

Agradeço ainda aos amigos João Paulo, Camila e Tony, companheiros de viagens todos os sábados para as disciplinas de mestrado. Apesar do espaço reduzido e das dores no corpo ao longo de dois anos de cansativas viagens só restaram lembranças das conversas, brincadeiras, piadas e das histórias do Tony, experiências que nos fortaleceram para continuar a jornada e criaram um grande vínculo de amizade.

Agradeço ao Marcos Aurélio de Assis e a Fernanda Queiroz que colaboraram em algumas etapas da elaboração do presente trabalho.

Por fim, agradeço a CAPES pelo auxilio financeiro, indispensável para custear as despesas provenientes dos estudos.

"...A geometria existiu e existe desde antes da Criação. É co-eterna com a mente de Deus...A geometria forneceu a Deus um modelo para a Criação...A geometria é o próprio Deus..."

Johannes Kepler

JESUZ, Danilo Augusto Ferreira. **Desenvolvendo o conceito de Áreas**: Uma Proposta Didática para Abordar Regiões Planas Irregulares na Educação Básica. 2015. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

Entendendo a importância do conceito de áreas de regiões planas na Educação Básica, apresentamos uma proposta que visa aprofundar o conteúdo, propondo atividades que versam sobre o estudo de áreas de regiões irregulares. Para desenvolver o conteúdo propomos uma articulação entre a História da Matemática e o software de geometria dinâmica GeoGebra. A participação da História da Matemática no ensino proporciona o desenvolvimento de um processo de (re)construção e (co)criação de conceitos que foram desenvolvidos ao longo do tempo, num processo de construção humana. Com base na perspectiva do modelo referencial teórico TPACK, definido por Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo, nossa proposta de utilização do *software* pode auxiliar na compreensão de conceitos que se apresentam abstratos ao passo que dinamiza a realização das atividades, possibilitando ao aluno analisar variações, criar e testar conjecturas. Tais características do software se apresentam essenciais, considerando que estudo de áreas de regiões curvas nos remete a conceitos do Cálculo Integral, que podem apresentar-se como abstratos aos alunos da Educação Básica. Esperamos que, ao utilizar a proposta, o professor crie um ambiente que proporcione ao aluno a construção de conceitos e o desenvolvimento de autonomia e criatividade para aplicar tais conceitos em situações de contexto social.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana Plana. Regiões Irregulares. Áreas. História da Matemática. GeoGebra. TPACK.

JESUZ, Danilo Augusto Ferreira. **Developing the Concept of Areas**: A Didactic Proposal for Approaching Irregular Flat Regions in Basic Education. 2015. 122 f. Dissertation (Professional Masters in Mathematics in National Network) – State University of Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

Understanding the importance of the concept of areas of flat regions in Basic Education, we present a proposal that aims to deepen the content, proposing activities that approach the study of areas of irregular regions. To develop the content we propose a link between History of Mathematics and the dynamic geometry software GeoGebra. The participation of History of Mathematics in teaching provides the development of a process of (re) construction and (co) creation of concepts that have been developed over time, in a human construction process. From the perspective of the theoretical model TPACK, defined by Technological Pedagogical Content Knowledge and our proposal of using the software may help to understand concepts that seem abstract while it dynamizes the performance of the activities, enabling the student to analyze variations, to create and to test conjectures. These software features are present essential, considering that the study of curves regions areas leads us to concepts of Integral Calculus, which can be presented as abstracts to students of Basic Education. We hope that, by using the proposal, the teacher creates an environment that provides the student with the construction of concepts and the development of autonomy and creativity to apply such concepts in situations of social context.

Keywords: Euclidean Plane Geometry. Irregular Regions. Areas. History of Mathematic. GeoGebra. TPACK.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CK	Conhecimento do Conteúdo
DCE	Diretrizes Curriculares Estaduais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Rede Nacional
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
LAL	Lado, Ângulo, Lado
LLL	Lado, Lado, Lado
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCK	Conhecimento Pedagógico do Conteúdo
PK	Conhecimento Pedagógico
TCK	Conhecimento Tecnológico do Conteúdo
TPACK	Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo
TPK	Conhecimento Pedagógico da Tecnologia
TIC	Tecnologias de Informação e Comunicação
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
TK	Conhecimento Tecnológico

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No presente trabalho apresentamos uma proposta para explorar o conceito de áreas na Educação Básica, sobretudo a abordagem de área de regiões irregulares que geralmente não é abordado no Ensino Fundamental e Médio.

A motivação que levou ao tema deste trabalho foram algumas inquietudes e questionamentos que surgiram no decorrer de minha[1] prática pedagógica na Educação Básica. Entendendo a relevância do conceito do cálculo de áreas, tanto no âmbito do conhecimento científico quanto considerando a sua aplicabilidade na vida social e pessoal de um indivíduo, ocorreu-me que, não poderia um aluno, depois de estudar em média treze anos na Educação Básica, não ter condições de calcular a área de um terreno que deseja comprar, determinar aproximadamente quantas pessoas havia em uma praça durante um show ou calcular o espaço compreendido em uma região curva.

Acredito que aprender a calcular a área de triângulos, quadriláteros notáveis, polígonos regulares e círculos não devam resolver todos os problemas, relacionados ao conceito de áreas, que porventura se apresentem em algum momento, presente ou futuro, da vida dos alunos. Portanto, percebendo que é preciso fornecer algo mais, nasce a proposta, na qual buscamos elaborar situações que, se não apresentarem situações reais e aplicáveis para determinados alunos, sirvam para a formação de um sujeito autônomo, capaz de desenvolver técnicas para adequar os conceitos desenvolvidos durante seus estudos, aos problemas específicos que um dia poderá se apresentar.

Entendemos que nossa proposta atende às expectativas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), pois o artigo 25 declara que “o Trabalho de Conclusão de Curso versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula” (SBM, 2014, p.8).

As Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná (DCE) propõem aos professores uma reflexão acerca das suas práticas docentes, levando em conta que a matemática pode ser concebida de duas formas distintas, onde podemos considerá-la como algo pronto e acabado, apenas reproduzindo conteúdos científicos pré-definidos, ou podemos pensar no “fazer matemática”, no qual se leva em consideração seu desenvolvimento progressivo, considerando as dúvidas, contradições e hesitações que surgem durante o

[1] Tomo a liberdade de utilizar, em alguns momentos, a primeira pessoa do singular, para expressar opiniões que são exclusivamente minhas.

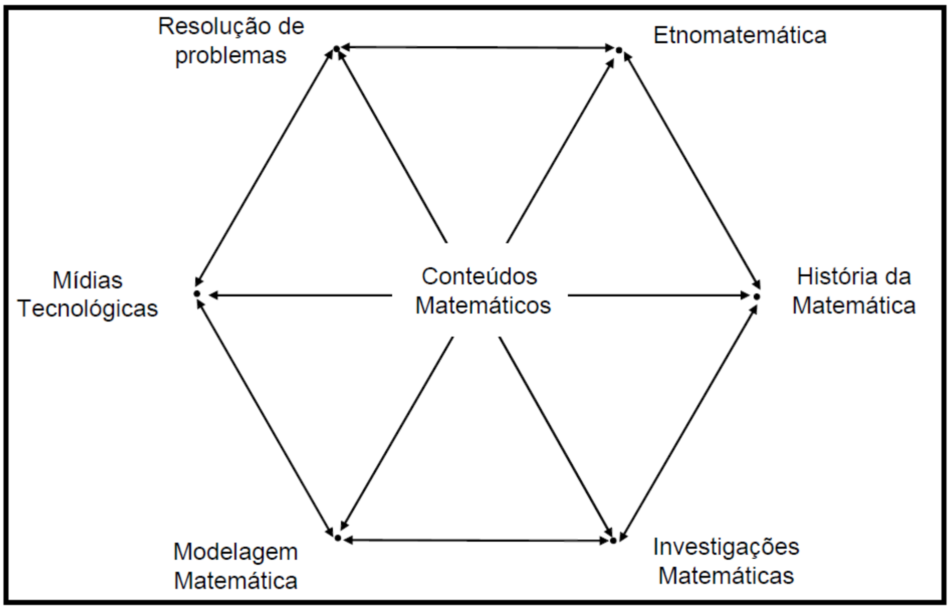
processo de ensino e aprendizagem. A partir dessa reflexão, o professor deve balizar sua ação pedagógica, de forma a considerar a Matemática como atividade humana em construção (PARANÁ, 2008). De acordo com as DCE

> Pela Educação Matemática, almeja-se um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias. Aprende-se Matemática não somente por sua beleza ou pela consistência de suas teorias, mas para que, a partir dela, o homem amplie seu conhecimento e, por conseguinte, contribua para o desenvolvimento da sociedade. (PARANÁ, 2008, p. 48).

As Diretrizes Curriculares Estaduais apontam importância de utilizar as tendências metodológicas que compõem o campo de estudo da Educação Matemática, a saber: Resolução de Problemas, Etnomatemática, Modelagem Matemática, Mídias Tecnológicas, História da Matemática e Investigação Matemática. E ainda apresenta que

> nenhuma das tendências metodológicas esgota todas as possibilidades para realizar com eficácia o complexo processo de ensinar e aprender Matemática, por isso, sempre que possível, o ideal é promover a articulação entre elas [...]. A Figura a seguir sugere que tais tendências se articulem com enfoque nos conteúdos matemáticos. (PARANÁ, 2008, p. 68).

Figura 1: Articulação Entre as Tendências Metodológicas na Educação Matemática



Fonte: PARANÁ (2008, p. 68)

Tomando como base as propostas das DCE, buscamos estabelecer recursos metodológicos para dar suporte aos conceitos que serão trabalhados. Durante a realização da pesquisa a História da Matemática chamou-nos a atenção, principalmente por percebermos que o desenvolvimento dos conceitos matemáticos das civilizações primitivas está pautado nas necessidades essencialmente práticas. Com base nesse aspecto, adotamos a História da

Matemática como ferramenta metodológica e buscamos estabelecer uma perspectiva de ensino embasada em tal tendência.

Com base na proposta de aprofundar o tema cálculo de áreas contemplando o cálculo de regiões curvas, entendemos que é inevitável o uso de alguns conceitos referentes ao Cálculo Integral, que consideramos ser abstratos e de difícil compreensão, tomando-se como base o conhecimento prévio de um aluno da Educação Básica. Nessa perspectiva analisamos que o uso do GeoGebra, que é um *software* de geometria dinâmica, poderá exercer papel fundamental facilitando o processo de compreensão de conceitos que, porventura, se apresentem aos alunos como abstratos. Dentre as muitas funcionalidades do *software* que poderão contribuir com as atividades propostas, destacamos a possibilidade de realizar modificações, criar e testar conjecturas e também nos auxiliar realizando tarefas como cálculos extensos e/ou trabalhos repetitivos.

Em consonância com os objetivos do PROFMAT de elaborar uma proposta relevante para o ensino de Matemática na Educação Básica e das DCE de utilizar as tendências metodológicas em sala de aula, apresentamos uma proposta de trabalho que consiste em desenvolver o conceito de áreas de Figuras planas, com ênfase no cálculo de áreas de regiões irregulares, por meio de uma articulação entre a História da Matemática e as Mídias Tecnológicas por meio do *software* GeoGebra. Buscamos apresentar ao docente uma proposta pautada num processo de construção do conhecimento, por meio de um estudo crítico que possibilite aos estudantes apropriar-se dos conceitos, a fim de aplicá-los em situações de contexto social.

O trabalho foi estruturado em três capítulos, no capítulo 1, apresentamos uma contextualização histórica, onde destacamos alguns dos principais trabalhos desenvolvidos pelos matemáticos que contribuíram com o desenvolvimento dos conceitos da Geometria Euclidiana. O capítulo também tem como objetivo auxiliar o professor que pretende fazer uso da proposta que elaboramos em suas atividades docentes, fornecendo base para suas pesquisas, podendo o docente aprofundar-se nos assuntos abordados, se julgar necessário, usando o referencial teórico que adotamos ou utilizando outros autores a sua preferência.

No capítulo 2 apresentamos a fundamentação teórica. Inicialmente apresentamos e discutimos sobre as perspectivas da História da Matemática na Educação Matemática, bem como suas potencialidades, com base em alguns autores, dentre os quais destacamos Miguel e Miorim (2004) e posteriormente apresentamos a perspectiva de trabalho que será usada em nossa proposta. Ainda no capítulo procuramos pressupostos metodológicos que nos auxiliem a utilizar o *software* GeoGebra no processo educacional. Para tanto nos apoiamos no modelo referencial TPACK (Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo) proposto por Mishra e Koehler (2006), com base nos estudos de Schulman (1986).

O capítulo 3 apresenta quatro propostas de atividades que versam sobre o tema. A primeira proposta é referente ao cálculo de áreas de quadriláteros quaisquer, na qual apresentamos questionamentos e encaminhamos alternativas para que o aluno desenvolva técnicas para calcular a área de tais polígonos. A segunda proposta apresenta um estudo da área do círculo e do número irracional π, por meio do Método de Exaustão. A terceira proposta versa sobre o cálculo de área da região limitada por uma parábola, com base nos conceitos intuitivos da Soma de Riemann. A última proposta apresenta o cálculo da área de uma região qualquer (propomos no trabalho o cálculo da área da cidade de Siqueira Campos) por meio da aproximação da região por um polígono, utilizando o Teorema de Pick.

Por fim apresentamos nossas considerações acerca do trabalho, dificuldades encontradas, sugestões para a continuidade e aprofundamento acerca do conceito de áreas.

CAPÍTULO 1 - CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Neste capítulo trataremos sobre a evolução dos conceitos da Matemática desde as primeiras civilizações. Abordaremos alguns trabalhos que trouxeram avanços significativos para a Matemática, sobretudo no campo da geometria, dando ênfase àqueles que envolvem conceitos pertinentes ao cálculo de áreas de Figuras planas.

1.1 IDADE DA PEDRA

De acordo com Eves (2011), o período datado de aproximadamente 5 milhões a.C. até 3000 a.C. é denominado de Idade da Pedra, caracterizado por povos nômades que subsistiam da caça de pequenos aninais e da colheita de frutas, castanhas e raízes. Normalmente viviam em regiões de Savanas, localizadas na África, sul da Europa, sul da Ásia e na América Central. Suas culturas caracterizaram-se por constantes deslocamentos a procura de alimentos e condições climáticas favoráveis para a subsistência.

> Tudo tinha que se adaptar à caça: seus instrumentos de pedra, madeira, osso e carapaça de animais eram desenhados ou para a caça ou para a preparação de alimentos; o fogo, que dominaram, era usado para cozer e para o aquecimento; sua arte retratava cenas de caçadas; sua religião era uma tentativa tímida de entender e submeter a imensidão rude que os cercava e apenas obscuramente se prendia à ideia de destino final. (EVES, 2011, p. 22).

Em detrimento a característica de vida dos povos da Idade da Pedra, pautada no binômio caçar/colher, no difícil panorama de deslocar-se constantemente, trilhando na incerteza de encontrar regiões com condições climáticas favoráveis e abundância de alimentos para caça e pesca, Eves (2011) atribui o limitado avanço científico intelectual desses povos.

> [...] Só tinham condições de levar consigo ferramentas pequenas, fáceis de transportar, roupas e objetos pessoais. Não havia lugar nessa sociedade para o volumoso equipamento necessário para fundir metais nem para as proporções de uma biblioteca; daí porque na Idade da Pedra não se desenvolveram ferramentas metálicas nem a linguagem escrita. [...]. Suas vidas eram agrestes e difíceis, de maneira que elas viviam demasiado ocupadas e em permanente agitação para poderem desenvolver tradições científicas. (EVES, 2011, p. 23-24).

Embora existam resquícios do desenvolvimento de conceitos matemáticos no período pré-histórico, de acordo com Boyer (2012) e Eves (2011), foi a partir de aproximadamente 3000 a.C. com o surgimento das comunidades agrícolas que se estabeleceram ao longo do rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio e ao longo do rio Amarelo na China, que a ciência e a Matemática apresentaram maiores avanços.

> Podemos fazer conjecturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjectura com história. É melhor suspender o julgamento nessa questão e ir adiante ao terreno mais firme da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós. (BOYER, 2012, p. 27).

1.2 Civilizações Antigas

De acordo com Eves (2011), o surgimento das civilizações organizadas na subsistência da prática agrícola foi uma consequência das mudanças climáticas. As savanas tornaram-se escassas pelos avanços das florestas ou transformando-se em regiões desérticas. À medida que a densidade populacional crescia consideravelmente o homem pré-histórico foi obrigado a se adaptar a um novo estilo de vida e encontrar alternativas para se precaver da fome. Em detrimento a esses fatos, profundas mudanças culturais ocorreram.

> Em suma, o período de 3000 a 525 a.C. testemunhou o nascimento de uma nova civilização humana cuja centelha foi uma Revolução Agrícola. Novas sociedades baseadas na economia agrícola emergiram das névoas da Idade da Pedra nos vales dos rios Nilo, Amarelo, Indo e Tigre e Eufrates. Esses povos criaram escritas; trabalharam metais; construíram cidades; desenvolveram empiricamente a matemática básica da agrimensura, da engenharia e do comércio; e geraram classes superiores que tinham tempo bastante de lazer para se deter e considerar os mistérios da natureza. Depois de milhões de anos, afinal a humanidade tomava a trilha das realizações científicas. (EVES, 2011, p. 56).

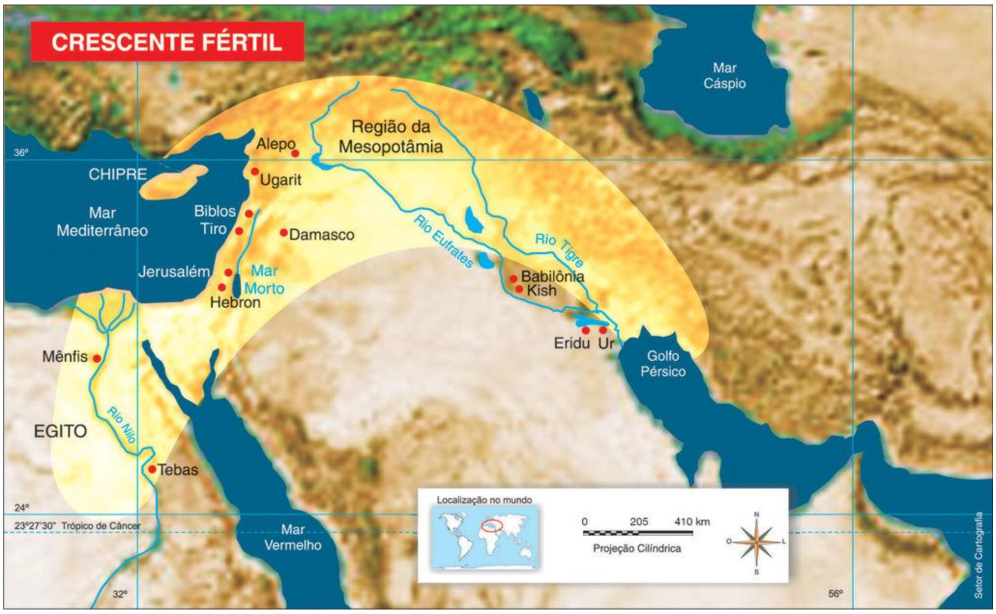
Segundo Eves (2011), com a revolução agrícola surge à escrita, e consequentemente a necessidade de criar sistemas de preservação dos registros para controlar produções. Em algumas regiões, em que a chuva era escassa, foram criados os sistemas de irrigações e, em outras, foram necessários construir barragens para as constantes cheias dos rios, dando início ao desenvolvimento da engenharia. Os agricultores se preocupavam em realizar previsões para os períodos das cheias dos rios, estações chuvosas ou de secas e, com isso, surgiram os calendários. As pessoas rezavam aos deuses para que chuvas e as cheias dos rios ocorressem conforme previsto nas suas observações, dando origem às religiões. Com a organização, surgiram novas classes de pessoas educadas: os sacerdotes, escribas e astrólogos, que tinham tempo para se dedicar ao lazer e ao desenvolvimento científico.

Conforme relata Eves (2011), nesse período foram construídas aldeias e vilas e começaram a despontar grandes cidades, surgiu então à classe dos mercadores e uma organização politica, com formas de governo centralizadas, na maioria das vezes organizadas como cidades-Estado[2] que, posteriormente, deram origem a impérios em expansão[3].

> Por fim, todos os ingredientes para o progresso científico estavam reunidos: escrita, necessidade de novas tecnologias, ambientes urbanos e tempo de lazer. É natural, portanto, que os historiadores se refiram ao Egito, à Índia, à China e ao Oriente Médio antigo como "berços da civilização". (EVES, 2011, p. 54).

Em relação ao desenvolvimento das civilizações antigas, existem poucas informações concretas acerca das civilizações orientais, de acordo com Boyer (2012), isso se deve ao fato de que usavam cascas de árvores e bambus para a realização das anotações, materiais que não resistiram ao tempo. Ao contrário das pedras e papiros utilizados pelos egípcios e das tábulas de argila cozida usadas pelos babilônios. Com base neste fato, abordaremos nas próximas seções os avanços matemáticos relacionados às civilizações egípcias e babilônicas, que habitavam a região conhecida como Crescente Fértil, Figura 2.

Figura **2**: Crescente Fértil



Fonte: Educacional, 2015

1.2.1 A Matemática nas Civilizações Egípcias

Na perspectiva de Boyer (2012) e Eves (2011), os egípcios, cujas civilizações viviam às margens do rio Nilo, conforme observamos na Figura 3, são considerados os precursores da geometria. Heródoto, após visitar o Egito em cerca de 450 a.C., afirma que a geometria originou-se a partir da necessidade prática de demarcações de

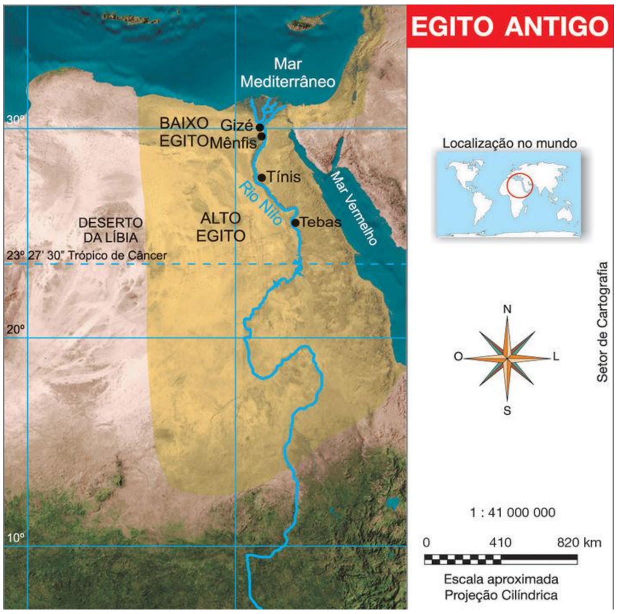
---

[2] Sociedade politicamente organizada e geograficamente limitada cujo núcleo era uma cidade na qual a autoridade era exercida pelos cidadãos livres que escolhiam sua forma de governo (AULETE, 2011, p. 330).

[3] Organização política de uma nação que tinha por objetivo dominar outras nações, com intuito de formar estados de grandes dimensões.

territórios após as constantes enchentes às margens do rio Nilo.

Figura 3: Civilização Egípcia Antiga



Fonte: Educacional, 2015

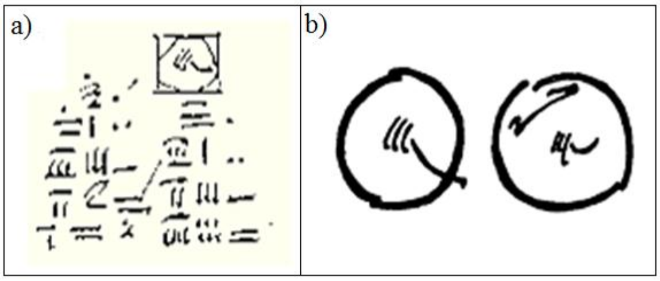
Dentre os materiais que embasaram os estudos da Matemática desenvolvida no Egito Antigo, destacam-se os Papiros de Moscou e de Rhind, também chamados, respectivamente, de Papiro de Golonishev e Papiro de Ahmes.

Eves (2011) descreve o Papiro de Moscou como um texto matemático, de origem por volta de 1850 a.C. que contém 25 problemas antigos, sendo que a maioria deles remontam situações práticas da vida. Em relação ao papiro de Rhind, Eves (2011, p.70) afirma que

> [...] é uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, sua solução para o problema da determinação da área de um círculo e muitas aplicações da matemática a problemas práticos.

Segundo Eves (2011), dos 110 problemas dispostos nos Papiros de Moscou e de Rhind, 25 tratam de geometria, onde muitos demonstram a constante busca dos egípcios em encontrar as relações entre as Figuras geométricas. Destaca-se o problema 14 no Papiro de Moscou no qual enuncia corretamente o cálculo do volume do tronco de uma pirâmide. No Papiro de Rhind, os problemas 48 e 50 abordam o conceito de área do círculo, o problema 51 envolve o cálculo da área de um triângulo isósceles, o problema 52 aborda a área de um trapézio e o problema 56 envolve cálculos de inclinação de uma pirâmide, abordando o conceito de cotangente.

Figura 4: a) Problema 48 do Papiro de Rhind e b) Problema 50 do Papiro de Rhind



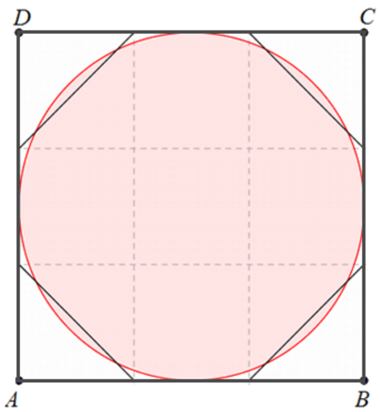
Fonte: Gaspar e Mauro (2003, p. 8)

Não se sabe ao certo como os egípcios chegaram à fórmula da área do círculo, porém o problema 48 apresentado na Figura 4a, pede que se faça a inscrição de um círculo no quadrado. O problema 50, Figura 4b, apresenta um corpo redondo de diâmetro 9 e pede-se para calcular a área, cuja solução apresentada é “remova 1/9 do diâmetro, o restante é 8. Multiplique 8 por 8; perfaz 64. Portanto, a área é 64”. (GASPAR e MAURO, 2003, p.8). Para Gaspar e Mauro (2003), o método descrito no papiro, Figura 4b), estabelece que a área da região circular é dada por oito nonos do quadrado do diâmetro, ou seja, se considerarmos d o diâmetro obtemos $A = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$ ou, simplesmente

$$A = \left(\frac{64}{81}\right)d^2 \ . \tag{1}$$

Gaspar e Mauro (2003) sugerem que a solução encontrada em (1), pode ter surgido pelo fato de que os egípcios cobriam tanto o modelo a ser utilizado quanto as suas paredes com malhas quadriculadas, com intuito de manter a proporção de seus desenhos. Tal estratégia levaria naturalmente a um octógono, conforme observamos na Figura 5.

Figura 5: Cálculo da Área do Círculo pelos Egípcios



Fonte: Gaspar e Mauro (2003, p.10, adaptado)

Como existem regiões do octógono que são externas ao círculo e regiões do círculo que são externas ao octógono, Figura 5, os egípcios podem ter considerado que as regiões que representam a falta e o excesso são equivalentes. Com base na proposta de Gaspar e Mauro (2003), considerando que o diâmetro *d* do círculo é igual ao lado do quadrado, temos

$A(octógono) = A(quadrado) - 4A(triângulo) = d^2 - 4\left(\frac{\left(d/3\right)^2}{2}\right) = d^2 - \frac{2}{9}d^2$, logo

$$A(octógono) = \frac{7}{9}d^2. \qquad (2)$$

Multiplicando e dividindo a equação (2) por 9 obtemos

$$A(octógono) = \frac{63}{81}d^2 \cong \frac{64}{81}d^2 \qquad (3)$$

que é um valor bem próximo ao determinado pelos egípcios no problema do Papiro de Rhind.

A partir do resultado obtido na equação (3) e considerando que a área do círculo é dada por $A(círculo) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$, o que equivale a

$$A(círculo) = \frac{\pi}{4}d^2. \qquad (4)$$

Podemos observar, de (3) e (4), que $\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$, ou seja, $\pi = \frac{256}{81} \cong 3{,}16$, logo podemos dizer que os egípcios estabeleceram uma ótima estimativa para a área do círculo, se levarmos em conta o período em que viveram, os recursos que tinham, comparados ao valor 3,14 que utilizamos atualmente como aproximação para o número π.

Embora as civilizações egípcias tenham desenvolvido conceitos científicos que permitiram resolver problemas práticos, tanto Boyer (2012) quanto Eves (2011) defendem a ideia do pragmatismo da geometria egípcia, pautada no isolamento natural da civilização, que era protegida pelo rio Nilo de ataques e invasões estrangeiras, fato que propiciou aos egípcios levar uma vida pacífica e sem desafios. A ideia fica evidente no relato:

> A geometria pode ter sido dádiva do Nilo, como Heródoto acreditava, mas as evidências disponíveis sugerem que os egípcios usaram essa dádiva, mas pouco fizeram para expandi-la [...]. Para realizações matemáticas mais progressistas, devemos examinar o vale pluvial mais turbulento conhecido como Mesopotâmia. (BOYER, 2012, p.37).

1.2.2 Civilizações Babilônicas

Às margens dos rios Tigres e Eufrates, na Ásia Oriental, região também conhecida como Mesopotâmia, estabeleceram-se as civilizações denominadas de babilônicas[4], Figura 6. Os babilônios utilizavam a escrita cuneiforme, em tábuas de barro mole, com estilete. Eves (2011) atesta que a escrita cuneiforme só foi decifrada no ano de 1846, pelo britânico Sir Henry Creswicke Rawlinson (1810-1895), aperfeiçoando o trabalho iniciado pelo filósofo e arqueólogo alemão Georg Friedrich Grotefend (1775-1853).

> Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de meio milhão de tábulas de argila.[...]. Das cerca de meio milhão de tábulas, quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, constituídas que são de tábuas e listas de problemas matemáticos. (EVES, 2011, p. 58).

Figura 6: Região da Mesopotâmia na Antiguidade

Fonte: Albuquerque (1998, p.73, adaptado)

Em relação às tábulas de Matemática, Eves (2011) relata que a maioria delas abordava conceitos de aritmética, algumas relacionadas a problemas de juros compostos, visto que os babilônios usavam a Matemática para o desenvolvimento do comércio. Na álgebra destaca-se a tábula que é conhecida como Plimpton322, que é constituída de várias ternas Pitagóricas.

Na geometria, Eves (2011) aponta que os babilônios conheciam regras

[4] Denominamos civilizações babilônicas por conveniência, pois muitos povos além dos babilônios habitaram a região da Mesopotâmia. Dentre eles os sumérios, caldeus, assírios. Eves (2012).

gerais para calcular a área de um retângulo, de um triângulo retângulo e de um triângulo isósceles, mas não se sabe se conheciam algum método para calcular a área de um triângulo qualquer. Também sabiam calcular a área de um trapézio reto e o volume de um prisma reto de base trapezoidal. Consideravam "uma circunferência como o triplo de seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva" (EVES, 2011, p.61).

Denominando d o diâmetro e C o comprimento da circunferência, podemos representar o método babilônico utilizando a expressão

$$C = 3d\,, \tag{5}$$

sendo a área do círculo dada por

$$A(círculo) = \frac{1}{12}C^2\,. \tag{6}$$

Substituindo (5) em (6) obtemos

$$A(círculo) = \frac{1}{12}(3d)^2 = \frac{3}{4}d^2\,. \tag{7}$$

Considerando $d = 2r$ e substituindo em (7) obtemos $A(círculo) = \frac{3}{4}(2r)^2 = \frac{12}{4}r^2 = 3r^2$.

Portanto, concluímos que o método babilônico de calcular a área do círculo considera a aproximação de $\pi = 3$. Roque e Carvalho (2012) afirmam que em alguns casos especiais os babilônios utilizavam relações para obter a área do círculo, que levam ao valor $\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$.

Boyer (2012) considera que os babilônios obtiveram melhores resultados se comparados aos egípcios tanto na álgebra quanto na geometria. O conhecimento do Teorema de Pitágoras e uma aproximação para a $\sqrt{2}$ até cerca de um milionésimo são fatores que exemplificam essa questão. Na geometria, tanto da civilização egípcia quanto da babilônica, Boyer (2012) aponta um defeito grave, que é a não distinção entre as medidas exatas e aproximadas, fato evidenciado no relato:

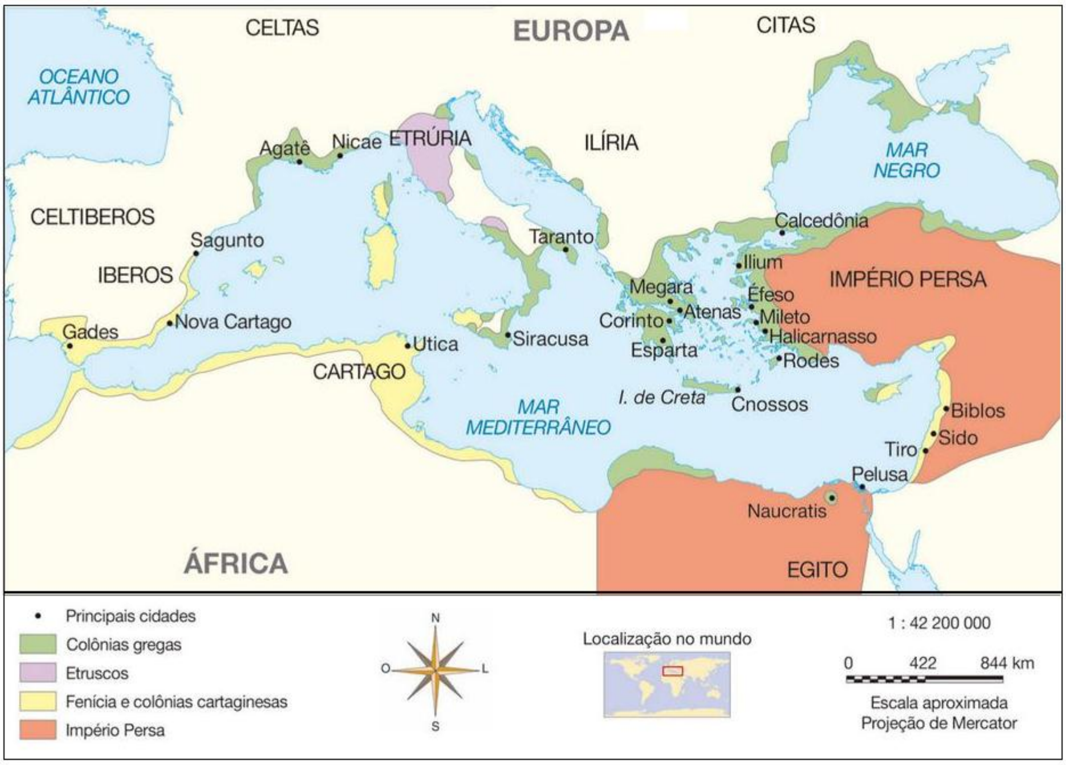
> A área de um quadrilátero era achada tomando o produto das médias aritméticas dos pares de lados opostos, sem nenhum aviso de que isso na maior parte dos casos era apenas uma aproximação grosseira. (BOYER, 2012, p. 49).

Assim como na civilização egípcia, o desenvolvimento científico dos babilônios teve caráter essencialmente prático e avanço limitado. Para continuar estudando os progressos da geometria, devemos analisar o desenvolvimento das civilizações gregas.

1.3 A Matemática na Grécia Clássica

No período de 800 a.C. até 800 d.C., denominado por Idade Talássica, surgiram os povos também conhecidos como helênicos, que se fixaram ao longo de todo o litoral mediterrâneo, Figura 7. Os helênicos assumiram a hegemonia cultural no período de destaque na História da Matemática por proporcionar muitas mudanças e grande produtividade intelectual (BOYER, 2012).

Figura 7: Grécia no Século VIII a. C.



Fonte: Albuquerque (1977, p.74 adaptado)

Uma das mudanças notórias que surgiram com a Matemática grega foi o uso do raciocínio lógico e dedutivo, introduzido por Tales de Mileto (624-548 a.C.), considerado, conforme Boyer (2012), o primeiro dos filósofos. O período Talássico deixa como herança um novo modelo de Matemática, que começa a se delinear como ciência demonstrativa. Eves (2011) credita a civilização grega nesse período como o “berço da matemática demonstrativa”.

> A visão estática do Oriente antigo sobre as coisas tornou-se insustentável e, numa atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar como e por quê.[...] Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?”. (EVES, 2011, p.94, grifo nosso).

De acordo com Boyer (2012), os mercadores, negociantes e estudiosos gregos aprenderam a Matemática por meio de viagens aos centros de cultura no Egito e na Babilônia. Eles se apropriaram dos conceitos das civilizações antigas, mas não estagnaram na Matemática essencialmente prática dos pioneiros, buscando aperfeiçoar e aprofundar os conceitos já existentes.

1.3.1 Tales de Mileto

Tales, o primeiro filósofo, considerado um dos "Sete Sábios"[5] da antiguidade, nasceu na cidade de Mileto. "Tales começou a sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens" (EVES, 2011, p.95).

De acordo com Boyer (2012), Tales aprendeu astronomia com os babilônicos e geometria com os egípcios. Foi em uma das viagens ao Egito que Tales calculou a altura de uma pirâmide por meio de sua sombra, utilizando o conceito de semelhança de triângulos. Na geometria, trouxe significativos avanços, sendo creditados os seguintes resultados:

> 1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
> 2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
> 3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
> 4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.[...]
> 5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.[...] (EVES, 2011, p.95).

1.3.2 Pitágoras e a Escola Pitagórica

Tanto Boyer (2012) quanto Eves (2011) relatam que a vida de Pitágoras, bem como a produção científica que se resgatou por meio dos historiadores é envolta em mistérios, lendas e misticismos.

Segundo relata Eves (2011), Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha egeia de Samos. Para Singh (2002), Pitágoras, a exemplo de Tales, adquiriu seu conhecimento matemático a partir de viagens às civilizações egípcias e babilônicas. Na perspectiva do autor, existem indícios não confirmados de que Pitágoras tivesse visitado outras civilizações orientais, voltando para Samos após vinte anos de viagens. O retorno se deu com intuito de

[5] Os sete sábios da Grécia são Tales de Mileto, Solon de Atenas, Quilon de Esparta, Pítaco de Mitilene, Bias de Priene, Cleóbulo de Lindos e Periandro de Corinto.

criar uma escola, porém, segundo Singh (2002), o filósofo e matemático não obteve sucesso em sua terra natal, mudando-se para a cidade de Crotona onde se aliou com um homem chamado Milo, que o ajudou a fundar a escola. A escola prosperou, obteve um grupo de 600 seguidores e fora denominada de Irmandade Pitagórica.

Conforme descreve Singh (2002), a escola Pitagórica era restrita, onde os participantes eram selecionados de acordo com suas aptidões e os adeptos deveriam doar todos os seus bens para um fundo comum e, caso saíssem da escola, tinham direito de receber o dobro da quantidade doada. Outra característica da escola era que os membros deveriam guardar segredo em relação a tudo que ocorria na escola e todas as produções científicas eram atribuídas a Pitágoras, conforme tradição da época.

A escola Pitagórica destaca-se por buscar relações matemáticas para explicar os fenômenos naturais. “Pitágoras percebeu que os números estavam ocultos em tudo, das harmonias da música até as órbitas dos planetas, o que o levou a proclamar que tudo é número” (SINGH, 2002, p. 39).

> Que Pitágoras foi uma das Figuras mais influentes da história é difícil negar, pois seus seguidores, sejam iludidos, sejam inspirados, espalharam suas crenças por quase todo o mundo grego. As harmonias e mistérios da filosofia e da matemática eram partes essenciais dos rituais pitagóricos. Nunca, antes ou depois, a matemática teve um papel tão grande na vida e na religião como entre os pitagóricos. (BOYER, 2012, p.56).

Conforme relato de Singh (2002), o declínio da Escola Pitagórica ocorreu por volta de 510 a.C. período em que Crotona estava em guerra. A população da cidade de Crotona, que estava incomodada pela obscuridade dos trabalhos desenvolvidos pela Irmandade Pitagórica, invadiu e queimou a escola com muitos de seus integrantes, inclusive Pitágoras. Os membros da escola, que conseguiram sobreviver ao incêndio, espalharam-se pela Grécia Antiga e difundiram os conceitos aprendidos na Escola Pitagórica.

São várias as contribuições dos Pitagóricos para a Matemática, neste trabalho serão tratadas em particular duas de suas produções que consideramos relevantes para o desenvolvimento da geometria, sobretudo para o posterior desenvolvimento do cálculo de áreas: o Teorema de Pitágoras a Incomensurabilidade.

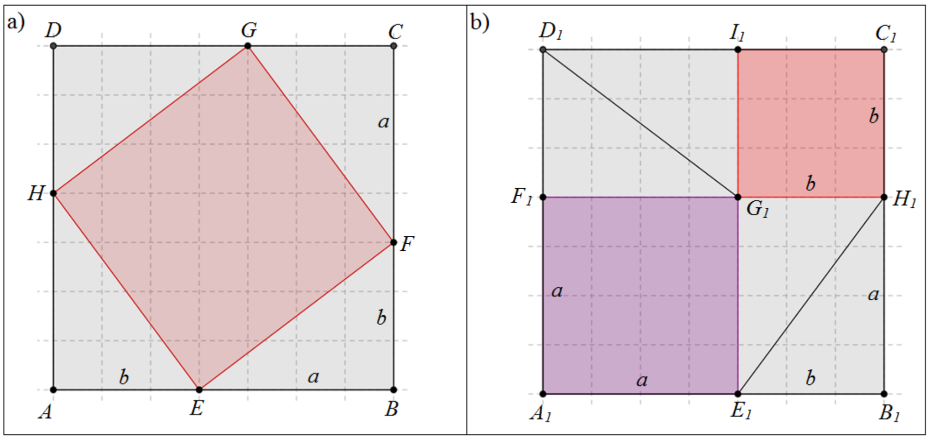
1.3.3 Teorema de Pitágoras

De acordo com relatos de Eves (2011) e Boyer (2012), os babilônios já conheciam o teorema sobre triângulos retângulos que hoje leva o nome de Teorema de Pitágoras, porém existem conjecturas que os pitagóricos teriam sido os primeiros a demonstrá-lo, fato que justifica a atribuição do teorema a Pitágoras.

O Teorema de Pitágoras, também conhecido como triplas pitagóricas, equivale à ideia de encontrar "dois números quadrados cuja soma também seja um número quadrado. Estas triplas são constituídas por números inteiros." (ROQUE e CARVALHO, 2012, p.68). Isto é equivalente a dizer que, em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

O livro "*The Pythagorean Proposition, de Elisha Scott Loomis*", contém 370 demonstrações diferentes para o Teorema de Pitágoras e não se sabe ao certo qual foi a forma utilizada pela escola Pitagórica para demonstrá-lo (LOOMIS, 1940). Neste trabalho optamos por utilizar uma demonstração que envolve o conceito de áreas. Para tanto, consideremos a Figura 8.

Figura 8: a) Teorema de Pitágoras e b) Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor

Na Figura 8a o quadrado $ABCD$, cujos lados medem $(a+b)$, está decomposto em 4 triângulos e o quadrilátero $EFGH$. Devemos provar que o quadrilátero $EFGH$ também é um quadrado. Primeiramente observamos que os triângulos GCF, FBE, EAH e HDG são congruentes pelo caso LAL[6], pois: $\overline{GC} \equiv \overline{FB} \equiv \overline{EA} \equiv \overline{HD}$, os ângulos com vértices nos pontos C, B, A e D são retos e $\overline{CF} \equiv \overline{BE} \equiv \overline{AH} \equiv \overline{DG}$. Da congruência dos triângulos é imediato que $\overline{EH} \equiv \overline{HG} \equiv \overline{GF} \equiv \overline{FE}$, logo o quadrilátero $EFGH$ é um losango. Para provar que é um quadrado, basta provar que tem um ângulo reto.

Consideremos que os ângulos $C\hat{G}F$ e $G\hat{F}C$ são complementares, ou seja

$$C\hat{G}F + G\hat{F}C = 90^{\circ}. \qquad (8)$$

[6] Caso LAL - Postulado: "Se dois triângulos têm, ordenadamente, congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes" (DOLCE e POMPEO, 2011, p. 39).

Segue da congruência dos triângulos que

$$C\hat{G}F \equiv B\hat{F}E \qquad (9)$$

Logo, de (8) e (9) concluímos que $G\hat{F}C$ e $B\hat{F}E$ são complementares, ou seja,

$$G\hat{F}C + B\hat{F}E = 90^{\circ}. \qquad (10)$$

Por outro lado, temos que

$$C\hat{F}B = C\hat{F}B + B\hat{F}E + G\hat{F}E = 180^{\circ}. \qquad (11)$$

Substituindo (10) em (11) obtemos $G\hat{F}E = 90^{\circ}$. Logo *EFGH* é um quadrado cujos lados denotaremos que, medem *c*.

Comparando os triângulos da Figuras 8, observamos que têm áreas iguais, restam na Figura 8a um quadrado de área c^2 e na Figura 8b dois quadrados de áreas a^2 e b^2. Portanto, concluímos que: $c^2 = a^2 + b^2$, como queríamos demonstrar.

Poderíamos demonstrar de forma simplificada, admitindo que a área do quadrado $A_1B_1C_1D_1$, Figura 8b), é dada por

$$A(A_1B_1C_1D_1) = (a+b)^2. \qquad (12)$$

Por outro lado, podemos calcular a mesma área somando as áreas dos quatro triângulos e do quadrado, Figura 8a), obtendo

$$A(ABCD) = 4.\frac{a.b}{2} + c^2. \qquad (13)$$

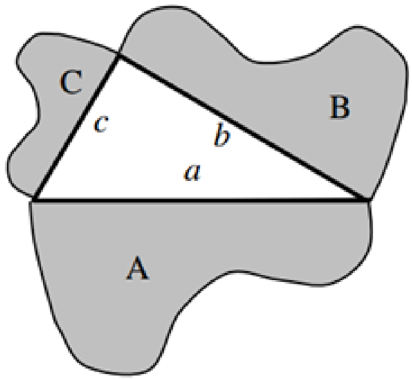
Igualando as expressões (12) e (13) obtemos

$$(a+b)^2 = 4.\frac{a.b}{2} + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2,$$ como esperado.

Interpretando geometricamente o Teorema de Pitágoras, podemos afirmar que a área do quadrado que tem como lado a hipotenusa *a* do triângulo retângulo que é igual a soma das áreas dos quadrados que tem como lados os catetos, *b* e *c*, do triângulo. De forma geral, essa afirmação é válida para quaisquer Figuras semelhantes[7], construídas sobre os lados do triângulo retângulo, conforme vemos na Figura 9.

[7] Definição de figuras semelhantes: Duas figuras são semelhantes quando todos os segmentos que aparecem em uma aparecem na outra, multiplicados por um fator constante. Essa definição mostra que, se duas figuras são semelhantes, uma é a ampliação ou a redução da outra, sejam elas no plano ou no espaço. (SOUSA, 2013, p.10)

Figura 9: Generalização do Teorema de Pitágoras



Fonte: Wagner (2011, p.12)

Sendo *A*, *B* e *C* a área das regiões planas da Figura 9 e considerando que “a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança” (DOLCE E POMPEO, 2011, p.340), temos

$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ e $\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$ que equivale a dizer que

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} \tag{14}$$

e

$$\frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2}. \tag{15}$$

Por outro lado, temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{16}$$

substituindo (16) em (14) e (15) obtemos

$$\frac{A}{b^2 + c^2} = \frac{B}{b^2} \Leftrightarrow Ab^2 = Bb^2 + Bc^2 \tag{17}$$

e

$$\frac{A}{b^2 + c^2} = \frac{C}{c^2} \Leftrightarrow Ac^2 = Cb^2 + Cc^2. \tag{18}$$

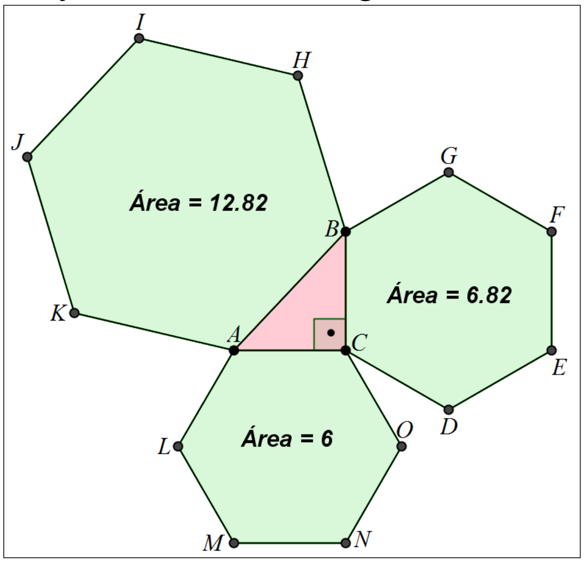
Somando as equações (17) e (18) temos $Ab^2 + Ac^2 = Bb^2 + Bc^2 + Cb^2 + Cc^2$ e simplificando obtemos $A(b^2 + c^2) = (B + C)b^2 + (B + C)c^2$, que equivale a

$$A(b^2 + c^2) = (B + C)(b^2 + c^2). \tag{19}$$

Dividindo ambos os membros de (19) por $b^2 + c^2$ obtemos: $A = B + C$, como queríamos demonstrar.

Na Figura 10 apresentamos um exemplo da generalização do Teorema de Pitágoras, utilizando hexágonos regulares.

Figura 10: Generalização do Teorema de Pitágoras Utilizando Hexágono Regular



Fonte: Autor

Somando as áreas dos hexágonos regulares em que os lados são os catetos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, apresentados na Figura 10, obtemos a área do hexágono com lado na hipotenusa $\overline{AC}$ do mesmo triângulo.

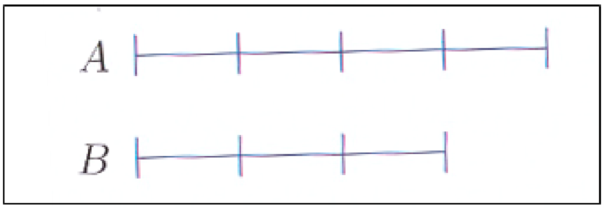
1.3.4 Incomensurabilidade[8]

Para os Pitagóricos, tudo poderia ser representado por meio das propriedades intrínsecas dos números e suas razões. Segundo Roque e Carvalho (2012) acreditava-se que, dados dois segmentos quaisquer, sempre existia uma unidade comum entre eles, ou seja, dados dois segmentos era sempre possível encontrar uma parte, mesmo sendo pequena, que coubesse um número inteiro de vezes em ambos os segmentos. A Figura 11 ilustra o conceito de Roque e Carvalho (2012), onde

> Suponhamos, por exemplo, que queiramos comparar dois segmentos *A* e *B*. Como o *B* não cabe um número inteiro de vezes em *A*, podemos dividir *B* em 3 e tomar a unidade como sendo um terço de *B*. Como essa unidade cabe 4 vezes em *A*, a comparação de *A* com *B* nos fornece a razão 4:3. É deste tipo de comparação que surgem as medidas expressas por relações entre números inteiros, que chamamos hoje de "racionais"[...]. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 73).

[8] Dois segmentos são incomensuráveis se não possuir uma unidade de medida em comum, ou seja, se não for possível encontrar uma parte que caiba um número inteiro de vezes em ambos (ROQUE e CARVALHO, 2012).

Figura 11: Segmentos Comensuráveis

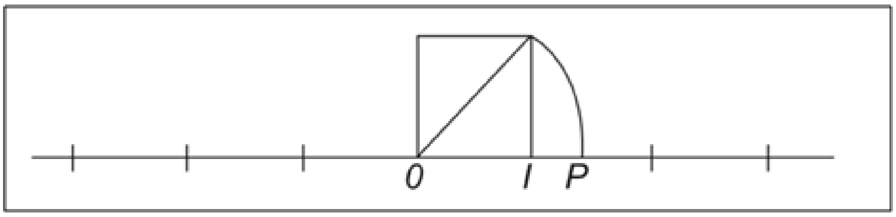


Fonte: Roque e Carvalho (2012, p.73)

Segundo Boyer (2012), a base da fé Pitagórica foi demolida com a descoberta que os números inteiros e as suas razões não eram suficientes para descrever todas as propriedades. A descoberta dos irracionais foi um momento turbulento e obscuro para a Matemática. Existem indícios que um seguidor da escola Pitagórica chamado Hipaso teria sido perseguido e morto por afogamento após descobrir e anunciar a existência dos incomensuráveis, conforme relata Singh (2002).

A discussão de como e por quem foi descoberta a existência dos incomensuráveis gera divergências, porém conforme afirma (EVES, 2011, p.105), “os pitagóricos provaram que não há nenhum número racional ao qual corresponda o ponto *P* da reta no caso em que *OP* é igual a diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade.” A Figura 12 ilustra o conceito.

Figura 12: A incomensurabilidade por meio da Diagonal do Quadrado



Fonte: EVES (2011, p.105)

Por meio do Teorema de Pitágoras, determinamos que a medida da diagonal equivale a $\sqrt{2}$. Para mostrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, tomamos como base Eves (2011). Primeiramente admitimos por hipótese que $\sqrt{2}$ é um número racional. Neste caso, consideramos que existem números a e b inteiros e primos entre si, com $b \neq 0$, tais que: $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Daí segue que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$, o que é equivalente a

$$a^2 = 2b^2. \tag{20}$$

Concluímos de (20) que a^2 é um número par e como consequência a também é um número par. Consideremos agora k um número inteiro e, escrevendo

$$a = 2k, \tag{21}$$

onde, substituindo (21) em (20) obtemos $(2k)^2 = 2b^2$, que equivale a $4k^2 = 2b^2$, ou ainda $2k^2 = b^2$ o que nos leva a concluir que b também é um número par. Mas é absurdo considerar que a e b sejam ambos pares, pois contraria a hipótese de que os números a e b são primos entre si, e, por este fato devemos abandonar a hipótese considerada de que $\sqrt{2}$ é um número racional.

Com o surgimento dos números irracionais, a Matemática grega toma um novo rumo. Em particular a geometria inicia a busca incessante, demonstrando certo fascínio e obsessão em obter áreas de regiões curvas, por meio do processo de quadraturas. Detalharemos na próxima seção os avanços da geometria após o surgimento dos números irracionais.

1.3.5 Os Três Problemas Clássicos

Segundo Eves (2011), os primeiros 300 anos da Matemática grega seguiram três diferentes linhas de desenvolvimento. A primeira obteve como resultado o livro *Os Elementos* de Euclides (c.330 a c. 277 a.C.), trabalho iniciado com os estudos dos Pitagóricos e continuado por Hipócrates de Quios(c. 470 a c. 410 a.C) , Eudoxo (408 a c. 355 a.C.), Teodoro (nascido c. 470 a. C.), Teeteto (c.415 a c. 369 a.C), dentre outros. A segunda foi o desenvolvimento das noções de infinitésimos e infinitos que só foram esclarecidos com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. A terceira linha é o desenvolvimento da geometria de curvas, que se originaram na tentativa de resolver três problemas de construção, amplamente discutidos no período.

Os três problemas em questão são:

1º) A duplicação do cubo, que consiste em construir o lado de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado;

2º) A trissecção do ângulo, que consiste em dividir um ângulo dado em três ângulos iguais;

3º) A quadratura do círculo que equivale a encontrar um quadrado que tenha a mesma área de um círculo dado, sendo que os três problemas deviam ser resolvidos utilizando apenas os instrumentos euclidianos[9].

A busca pela solução dos três problemas contou com matemáticos como Arquitas (428 a 347 a. C.), Platão (c. 427 a c. 327 a.C.), Hipócrates, Eudoxo, Menaecmus

[9] Os instrumentos euclidianos são a régua não graduada e o compasso. (EVES, 2011)

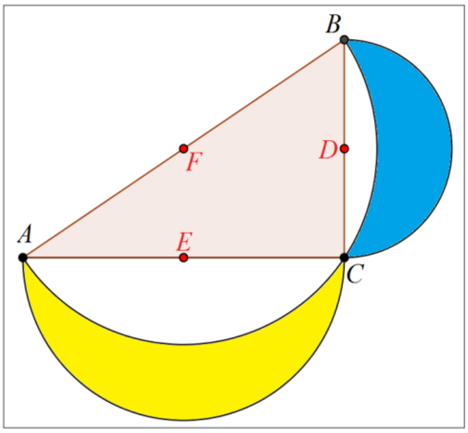
(380 a 320 a.C.), Dinostrato (390 a 320 a.C.), dentre outros. O trabalho desses matemáticos serviu como direção para dois grandes matemáticos: Euclides e Arquimedes (287 a 212 a.C.).

> Outras épocas também produziram uma comparável coleção de talentos, mas talvez nunca mais em qualquer época se faria um ataque tão audacioso a tantos problemas matemáticos fundamentais com recursos metodológicos tão insuficientes. É por isso que chamamos esse período [...] de Idade Heroica. (BOYER, 2012, p.76).

Após o declínio da escola Pitagórica os discípulos que conseguiram fugir do ataque em Crotona se encarregaram de difundir a doutrina Pitagórica em diferentes regiões da Grécia, dentre estes discípulos podemos citar Arquitas, que além de várias contribuições para a Matemática foi amigo íntimo de Platão e o converteu a uma visão Matemática, conforme relata Boyer (2012). Platão não forneceu resultados expressivos para a Matemática, porém foi o fundador da Academia em Atenas, cujo lema era: "Que ninguém ignorante de geometria entre aqui" (BOYER, 2012, p.76). A Academia reuniu grandes matemáticos e produziu muitos avanços científicos.

Hipócrates de Chios, na busca pela quadratura do círculo, realizou a quadratura de algumas lunas especiais, como a ilustrada na Figura 13. Na busca pelas curvas que resolveriam o problema de Hipócrates, Menaecmus, mais tarde desenvolveu o estudo das cônicas. Dinostrato, irmão de Menaecmus apresentara a solução para o problema da quadratura do círculo, Hípias apresentou uma solução para a trissecção do ângulo, porém ambos não usaram apenas os instrumentos euclidianos.

Figura 13: As Lúnulas de Hipócrates



Fonte: Autor

Na Figura 13 temos o triângulo ABC, sendo $A\widehat{C}B$ reto, D, E, F são os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e , $\overline{AB}$, respectivamente. Os semicírculos S_1 de centro D e raio $\overline{BD}$, S_2 de centro E e raio $\overline{AE}$ e S_3 de centro F e raio $\overline{AF}$ delimitam as lúnulas, destacadas nas cores azul e amarelo, Figura 13. Hipócrates provou que a soma das áreas das lúnulas é igual a área do triângulo ABC [10].

Embora a ocorrência de incessantes esforços frustrados em resolver os problemas clássicos gregos, o processo foi frutífero, dentre os importantes resultados gerados pelas tentativas fracassadas, destacamos o Método de Exaustão de Eudoxo.

1.3.6 Eudoxo e o Método da Exaustão

O método da Exaustão é fruto de uma busca de Eudoxo pela resolução do problema da quadratura do círculo que, segundo Eves (2011) é o mais famoso dos três problemas.

> Provavelmente nenhum outro problema exerceu um fascínio maior ou mais duradouro que aquele de construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Já em 1800 a. C. os egípcios haviam "resolvido" o problema, tomando o lado do quadrado igual a 8/9 do diâmetro do círculo dado. De lá para cá, literalmente milhares de pessoas trabalharam no problema e, a despeito de já se ter uma demonstração de que a construção é impossível com os instrumentos euclidianos, não há um ano que não tenha sua safra de "quadradores do círculo". (EVES, 2011, p.140).

Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) foi discípulo de Platão e é considerado o matemático e astrônomo mais célebre de seu tempo. Foi graças a Eudoxo, que a crise gerada pela descoberta da incomensurabilidade foi resolvida. Outra importante contribuição desse matemático foi estabelecer "comparação de configurações curvas e retilíneas" (BOYER, 2012, p.80). Embora o processo de inscrever e circunscrever polígonos em uma região curva e aumentar indefinidamente o número de lados desses polígonos já fosse um método conhecido por outros matemáticos, Arquimedes credita a Eudoxo a formulação do lema que é conhecido como Axioma da Continuidade[11]. O axioma serviu como base para o Método da Exaustão e para o desenvolvimento do cálculo integral. (BOYER, 2012)

Com base no Axioma da Continuidade, temos a proposição que hoje é conhecida como propriedade de exaustão:

> Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2011, p. 419).

[10] Sobre as lúnulas de Hipócrates: demonstrações, curiosidades e outras informações, sugerimos (SILVA, 2014, p. 67-74) e (GALVÃO E SOUZA, 2013).

[11] O Axioma da Continuidade diz que "dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra" (BOYER, 2012, p.81)

A proposição, em linguagens e símbolos atuais, é equivalente a:

> se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada da mesma espécie e r é uma razão tal que $1/2 \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro positivo N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo o inteiro $n < N$, isto é, a propriedade de exaustão equivale a dizer que $\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$ (BOYER, 2011, p.81).

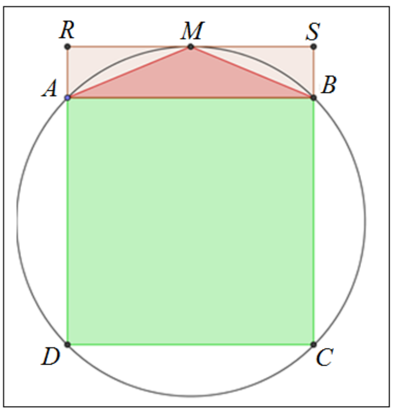
1.3.7 O Método da Exaustão e a Área do Círculo

Inicialmente vamos mostrar que a Propriedade de Exaustão é válida, quando aplicada ao círculo, que equivale a proposição 1:

Proposição 1: Considere um polígono P_1, de área $A(P_1)$, com n lados inscrito em um círculo C, de área $A(C)$. Ao dobrarmos o número de lados desse polígono, obtendo o polígono P_2, de área $A(P_2)$, o aumento da área dos polígonos é maior do que a metade da diferença entre as áreas do círculo C e de P_1, ou seja, $A(P_2) - A(P_1) >$ $\dfrac{A(C) - A(P_1)}{2}$.

Vamos demonstrar a Proposição 1 com base na proposta de Eves (2011). Sem perda de generalidade, considerando a Figura 14, onde M é o ponto médio do arco AMB, temos que a área do triângulo AMB é a metade da área do retângulo $ABSR$. Por outro lado, temos que a área do retângulo $ABSR$ é maior que a área do segmento circular AMB. Concluímos que a área do triângulo é maior que a metade da área do segmento circular AMB. Dessa forma, dobrando o número de lados do polígono, que denominamos P_1, inscrito no círculo, obteremos um novo polígono P_2 cuja área aumentará mais que a metade que a diferença entre a área do círculo e a do polígono P_1.

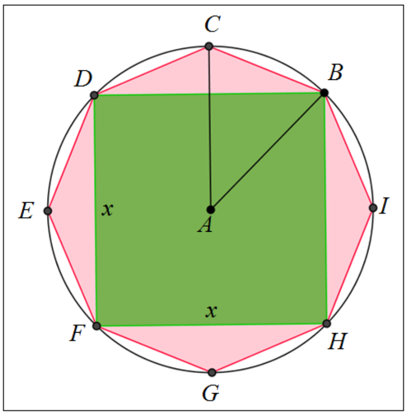
Figura 14: Método de Exaustão de Eudoxo.



Fonte: EVES (2011, p. 420, adaptado.)

A proposição 1 evidencia que a diferença entre a área do círculo e a área de um polígono nele inscrito pode ser tão pequena, quanto se queira, à medida que aumenta-se o número de lados desse polígono.

Figura 15: Caso Particular da Proposição 1 - Método da Exaustão



Fonte: Autor

Temos um caso particular da proposição 1, para $n = 4$, ou seja, consideremos um quadrado e um octógono inscritos no círculo, o octógono é o polígono com o dobro de lados do quadrado, ilustrado na Figura 15.

Considerando que o círculo possui raio 1, obtemos que a diagonal *BF* do quadrado mede 2 e por Pitágoras seque que $\left(\overline{BF}\right)^2 = \left(\overline{BD}\right)^2 + \left(\overline{DF}\right)^2$, ou ainda $4 = x^2 + x^2$, sendo x a medida do lado do quadrado. Temos, portanto que $x = \sqrt{2}$. Considerando $A(BDFH)$ a área do quadrado, temos que $A(BDFH) = 2$. Por outro lado, tomando o triângulo ABC, temos que $C\hat{A}B = \frac{360^o}{8} = 45^o$. Denominando $A(BCDEFGHI)$ a área do octógono, obtemos que $A(BCDEFGHI) = A(ABC).8$, segue que $A(BCDEFGHI) = \frac{1}{2}.\overline{AC}.\overline{AB}.sen(C\hat{A}B).8$, resultando em $A(BCDEFGHI) = \frac{1}{2}.1.1.\frac{\sqrt{2}}{2}.8$, logo $A(BCDEFGHI) = 2\sqrt{2}$. Consideremos ainda a área do círculo, dada por $A(círculo) = \pi \cong 3{,}14$.

O aumento da área do polígono é dada por

$$A(BCDEFGHI) - A(BDFH) \cong 0{,}82 . \quad (22)$$

Por outro lado, a diferença entre as áreas do círculo e do quadrado é dada por

$$A(círculo) - A(BDFH) \cong 1{,}14 . \quad (23)$$

Portanto, concluímos que o aumento da área do polígono, equação (22) é maior que a metade da diferença entre as áreas do círculo e do quadrado, equação (23).

Proposição 2: Dois círculos de áreas C_1 e C_2 estão entre si como o quadrado de seus diâmetros d_1 e d_2, ou seja, $\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$.

Boyer (2012) atesta que Eudoxo provavelmente tenha utilizado o Método de Exaustão para provar a Proposição 2. Assim, demonstraremos a proposição, com base nas propostas de Boyer (2012), Eves (2011) e Roque e Carvalho (2012).

Vamos provar por redução ao absurdo, admitindo por hipótese, que $\frac{C_1}{C_2} \rangle \frac{d_1^2}{d_2^2}$ ou $\frac{C_1}{C_2} \langle \frac{d_1^2}{d_2^2}$. Iniciemos considerado que

$$\frac{C_1}{C_2} \rangle \frac{d_1^2}{d_2^2}. \tag{24}$$

Consideremos que existe um polígono regular inscrito em C_1 de área p_n tal que

$$\frac{p_n}{C_2} \rangle \frac{d_1^2}{d_2^2}, \tag{25}$$

pois pela Proposição 1, podemos escolher um polígono de área p_n, com valor tão próximo quanto queiramos, da área de C_1, de forma que a desigualdade (25) continue sendo verdadeira. Consideremos ainda P_n a área de um polígono inscrito em C_2, sendo p_n e P_n polígonos semelhantes, com n lados. Temos que

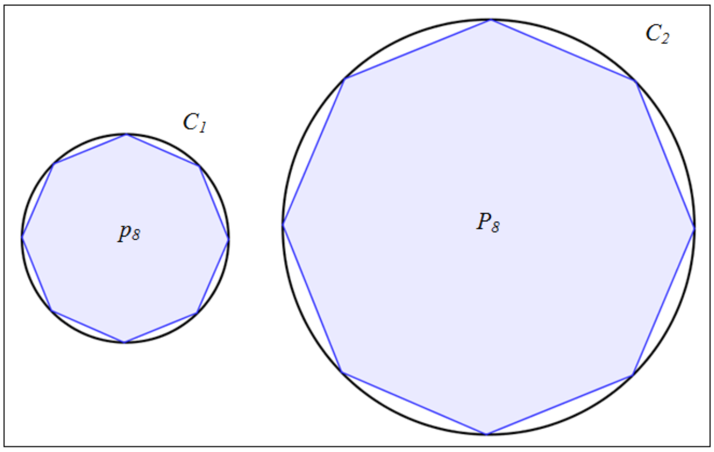
$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{d_1^2}{d_2^2}. \tag{26}$$

De (25) e (26) concluímos que $P_n > C_2$ o que é absurdo, pois P_n é a área do polígono inscrito no círculo de área C_2. Logo devemos abandonar a hipótese de que vale (24).

De maneira análoga, admitindo a validade do caso $\frac{C_1}{C_2} \langle \frac{d_1^2}{d_2^2}$ chegamos a um absurdo, fato que nos permite afirmar que $\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$, conforme queríamos demonstrar.

Para melhor compreensão, podemos observar um caso particular para $n = 8$, ilustrado na Figura 16.

Figura 16: Octógonos Inscritos na Circunferência



Fonte: Autor

De acordo com os relatos de Boyer (2012) Eudoxo é considerado o originador do Cálculo Integral pelo desenvolvimento do Método da Exaustão e também o pai da astronomia por seu trabalho em descrever o movimento dos planetas, utilizando a geometria.

1.3.8 Euclides de Alexandria

Segundo Eves (2011) pouco se sabe sobre a vida de Euclides, Mlodinow (2010) aponta que ele viveu por volta de 300 a.C. no litoral sul do mar mediterrâneo, um pouco a oeste do rio Nilo em Alexandria.

MLODINOW (2010, p.40) afirma que “A matemática é um edifício vertical que, diferentemente de um alto edifício, cairá se apenas um tijolo matemático estiver corrompido”. Euclides sabia desse importante fato e foi fundamental no desenvolvimento da geometria. Seu papel foi de organizar os conceitos geométricos desenvolvidos pelos seus predecessores. Esse trabalho árduo e cuidadoso resultou na escrita do livro Os Elementos, o qual Boyer (2012) referencia como o texto matemático mais bem sucedido de todos os tempos.

> Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos [...]. Nenhum trabalho exceto a Bíblia foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos *Elementos* já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria. (EVES, 2011, p. 167-168, grifo do autor).

Muitos dos trabalhos produzidos por Euclides se perderam ao longo do tempo, incluindo obras sobre as cônicas e lugares geométricos, porém conforme relata Boyer (2012), dentre as obras preservadas até hoje está o seu “*best-seller*” *Os Elementos.*

> *Os Elementos* está dividido em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o décimo sobre os incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre a geometria do espaço. (BOYER, 2012, p.90, grifo do autor).

De acordo com Mlodinow (2010) Euclides formulou 23 definições, 05 postulados geométricos e 05 postulados adicionais que chamou de “noções comuns”. Essa base permitiu que demonstrasse 465 teoremas, envolvendo todo o conhecimento geométrico existente naquele período. Euclides sentiu necessidade de diferenciar o que entendia por noções comuns das proposições puramente geométricas. As noções comuns dadas por ele são (BOYER, 2012, p.90):

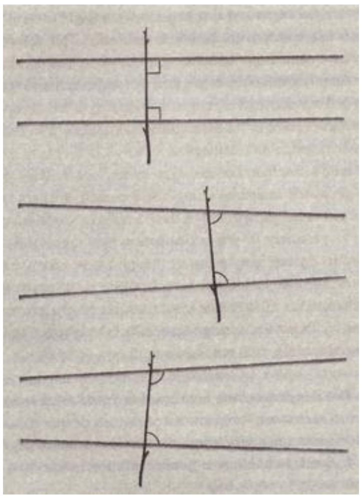
> 1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
> 2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
> 3. Se iguais são subtraídos de iguais, os totais são iguais.
> 4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma a outra.
> 5. O todo é maior que a parte.

Os cinco postulados de Euclides, usando uma linguagem moderna, podem ser descritos (MLODNOW, 2010, p.45-46):

> 1. Dados dois ponto, pode ser traçada uma linha tendo estes pontos como suas extremidades.
> 2. Qualquer linha pode ser prolongada indefinidamente em qualquer direção.
> 3. Dado qualquer ponto, pode ser desenhado um círculo com qualquer raio, com aquele ponto no centro.
> 4. Todos os ângulos retos são iguais.
> 5. Dada uma linha que cruze duas linhas retas de modo que a soma dos ângulos internos do mesmo lado seja menor que dois ângulos retos, então as duas linhas, quando prolongadas, acabarão por se encontrar (naquele lado da linha).

Existem outras maneiras de enunciar o quinto postulado, também chamado de Postulado das Paralelas de Euclides, uma delas é dizer que dados uma reta r e um ponto P, não pertencente à reta, existe uma única reta paralela à r, passando pelo ponto P. Segundo aponta Mlodinow (2010), Euclides evitava usar o quinto postulado sempre que possível. Os matemáticos que o sucederam imaginavam que o postulado das paralelas deveria ser provado e proposto como um teorema. A Figura 17 ilustra o Postulado das Paralelas de Euclides.

Figura 17: Postulado das Paralelas de Euclides



Fonte: Mlodinow (2010, p. 45)

De acordo com Junior (2013) muitos matemáticos fizeram tentativas frustradas de provar o quinto postulado de Euclides. Em 1820, Johann Boylai (1802-1860) resolveu negar a validade desse postulado, que trouxe como consequência o surgimento das geometrias não euclidianas.

1.3.9 Arquimedes de Siracusa

De acordo com os autores Aaboe (2013) e Boyer (2012) Arquimedes nasceu por volta de 287 a.C. Estudou em Alexandria, onde teve amigos matemáticos, com os quais se correspondia a respeito de suas obras, mas viveu a maior parte de sua vida em Siracusa. Arquimedes estudou assuntos relacionados à Matemática pura, Astronomia, Mecânica e Engenharia. Conforme relata Boyer (2012) na engenharia ele produziu máquinas de guerra que impediu durante aproximadamente três anos a aproximação dos inimigos romanos, fato que a ele rendeu o reconhecimento público.

Em 212 a.C., após uma distração do povo de Siracusa durante festividades na cidade, Arquimedes foi morto por um soldado, quando estava contemplando um diagrama geométrico num tabuleiro de areia. Segundo relatos de Eves (2011) Arquimedes pediu que o soldado romano se afastasse de seu diagrama e o soldado o matou com uma lança.

Embora Arquimedes tenha nascido na época em que Euclides morreu, o seu trabalho não fora influenciado pelo de Euclides, de forma que Roque e Carvalho (2012) afirmam que Arquimedes não pode ser considerado como sucessor de Euclides. Em relação às obras produzidas pelo matemático, Plutarco, que viveu no primeiro século d.C. relatou que

> Não é possível encontrar em toda a geometria problemas mais difíceis e complicados, ou explicações mais simples e lúcidas. Alguns atribuem isso à sua genialidade; enquanto outros acham que foram produzidos por esforço e trabalho incríveis, embora aparentemente sejam resultados fáceis e obtidos sem esforço. (AABOE, 2013, p. 89).

Aaboe (2013) compara que enquanto o trabalho de Euclides foi uma compilação de seus antecessores, o trabalho de Arquimedes contribuiu com novos conhecimentos para a Matemática. Os trabalhos preservados em grego são (AABOE, 2013, p. 95):

> Sobre o equilíbrio de Figuras Planas, I;
> Quadratura da Parábola;
> Sobre Equilíbrios de Figuras Planas, II;
> Sobre a Esfera e o Cilindro I, II;
> Sobre as Espirais;
> Sobre os Cones e Esferóides;
> Sobre os Corpos Flutuantes I, II;
> A Medida de um Círculo;
> O contador de Grãos de Areia.

Em 1906 o dinamarquês Heiberg encontrou uma obra que foi denominada por Arquimedes de "*O Método*". Segundo Boyer (2012) esse foi um de seus mais importantes trabalhos e revela muito de sua personalidade, além de apresentar sua forma particular de utilizar investigações mecânicas preliminares, para posteriormente formalizar por meio de conceito matemático.

Eves (2011) coloca que, dos trabalhos remanescentes, três abordam a geometria plana: *A Quadratura da Parábola*, *A Medida do Círculo* e *Sobre as Espirais*. O último trabalho, também conhecido como *Espiral de Arquimedes*, refere-se a uma "curva mecânica que permite resolver dois problemas clássicos da geometria grega, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo" (ROQUE e CARVALHO, 2012, p.150). Trataremos de forma mais detalhada os trabalhos: *A Quadratura da Parábola*, *A Medida do Círculo.*

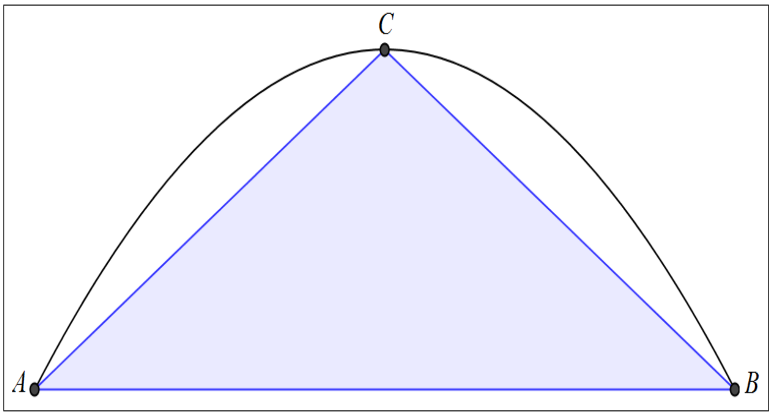
1.3.10 *A Quadratura da Parábola*

De acordo com Roque e Carvalho (2012) quadrar uma parábola consiste em encontrar a área de uma região denominada de segmento parabólico que é a região limitada por uma parábola e por um segmento de reta, comparando-a com a área de um triângulo, cuja base é o próprio segmento de reta, conforme ilustra a Figura 18. A hipótese formulada e demonstrada por Arquimedes pode ser enunciada (SILVA, 2010, p.128):

> Um segmento de parábola excede em 1/3 a área do triângulo inscrito de mesma base da secção da parábola e cujo vértice é o mesmo da parábola. Isto é, a área do segmento parabólico é 4/3 a área do triângulo inscrito na parábola, de mesma base e mesmo vértice[12].

Podemos representar a hipótese de Arquimedes, de acordo com a Figura 18, por $A(segmento\ parabólico\ ) = \frac{4}{3}A(ABC)$, onde $A(segmento\ parabólico\ ) = \frac{4}{3}A(ABC)$, e $A(ABC)$ representa a área do triângulo isósceles, com vértices *A*, *B* e *C*.

Figura 18: Quadratura da Parábola



Fonte: Autor

1.3.11 *A Medida do Círculo*

Arquimedes aborda a quadratura do círculo utilizando o método de Exaustão de Eudoxo. Primeiramente, Arquimedes demonstra que ”a área de um círculo de raio *r* é igual a de um triângulo cuja base é igual à circunferência *C* do círculo e cuja altura é *r*, ou seja: $A = \frac{1}{2}rC$ ” (AABOE, 2013, p.96).

Resulta, de *A Medida do Círculo*, que “a razão da área do círculo pelo quadrado de seu raio é igual à razão da sua circunferência por seu diâmetro. Esta razão comum é o que chamamos hoje de π” (AABOE, 2013, p.97). Utilizando o método de exaustão de Eudoxo, Arquimedes calculou o perímetro de polígonos regulares de 96 lados, inscritos e circunscritos na circunferência e com esse processo obteve o resultado de $3\frac{10}{71} \langle \ \pi \ \langle \ 3\frac{10}{70}$.

[12] Sobre demonstração para a hipótese da quadratura da parábola formulada por Arquimedes, consultar (BOYER, 2012, p.103).

A partir do trabalho proposto por Arquimedes surgiram inúmeras tentativas de encontrar a constante que representa a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência. Nesse momento deixaremos de seguir o aspecto cronológico linear desse texto, para relatar sobre a busca incessante pelo valor da constante, que mais tarde fora denominada π. Tendo em vista que a busca, de forma consciente ou não, permeia toda a História da Matemática, desde as primeiras civilizações até os dias atuais, fato este que evidência o seu importante papel na Matemática.

1.3.12 O número π

A constante que hoje atribuímos a denominação π pode ser definida de formas distintas, Roque e Carvalho (2012) adotaram π como sendo a área de um círculo de raio unitário. Cabe ressaltar que π ganhou essa denominação somente em 1706, pelo escritor inglês William Jones (1675-1749) e o uso da letra grega para representar a constante foi difundido apenas em 1737, depois que Euler adotou tal representação, conforme relata Eves (2011).

Desde Arquimedes muitos matemáticos se dedicaram a busca pelo valor da constante, a prova que π é irracional foi dada apenas em 1767 por Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Após a prova da irracionalidade iniciou-se a busca por métodos que fornecessem um número maior de casas decimais para o número π.

Os matemáticos buscavam aproximações para o valor da constante utilizando o método clássico, que consiste no método proposto por Arquimedes de inscrever e circunscrever polígonos na circunferência. Quanto maior o número de lados do polígono, maior a aproximação encontrada. Em 1630 foi encontrado o valor de π correto até a 39ª casa decimal, marcando o fim da busca de π pelo método clássico.

A busca por aproximações continuaram com base no uso de fórmulas e séries que convergiam rapidamente. Destaque para o inglês William Shanks (1812-1882) que determinou 527 casas decimais em 1874. Maiores avanços só foram obtidos com o uso de programas computacionais, a partir de 1949, quando foram obtidas 2037 casas decimais, segundo relata Eves (2011).

A obsessão por obter um número cada vez maior de casas decimais perdura ao longo dos séculos. Muitos buscavam aproximações gigantescas para π motivados apenas pelo desafio e a possibilidade de deixar o nome na História da Matemática. Nos tempos modernos a busca se intensificou com o surgimento de computadores. Atualmente o cálculo de π serve para testar a velocidade e a potência de novos computadores. Em 2011, A. Yee e S. Kondo calcularam 10 trilhões de casas decimais de π (DANTAS, 2013).

1.3.13 Herão de Alexandria

De acordo com Eves (2011) existem estimativas que Herão viveu no período entre 150 a.C. e 250 d.C. e supõe-se que ele era um egípcio com formação grega, embora seus trabalhos dessem ênfase as aplicações essencialmente práticas. Na geometria destaca-se o trabalho conhecido como "*A Métrica*" que é composto por três livros, dos quais o primeiro deles trata sobre área de diversos quadriláteros, polígonos regulares, círculos, elipses e segmentos parabólicos, superfícies do cilindro, cones, esferas e zonas esféricas. Nesse livro, também contém a fórmula tão conhecida por seu nome, que relaciona a área de um triângulo qualquer à medida de seus lados, que podemos representar por $A(ABC) = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$, sendo $A(ABC)$ a área de um triângulo de vértices *A*, *B* e *C*, de lados medindo *a*, *b*, *c*, sendo *p* o semiperímetro do triângulo representado por $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

O segundo livro de Herão trata essencialmente de volumes de diversos sólidos geométricos e de corpos redondos, já o terceiro livro aborda razões envolvendo áreas e também volumes, conforme relata Eves (2011).

1.3.14 Declínio da Matemática Grega

Após Arquimedes poucos avanços foram obtidos na geometria por um longo tempo, foi um período de retrocessos em relação à ciência.

> A ciência grega alcançou seu pináculo em Alexandria nos 150 anos iniciais da Era Helenística, entre 300 e 150 a.C. Depois disso teve início um longo e lento declínio, acentuado em 46 a.C. com o incêndio de grande parte da Universidade, em Alexandria, incluindo a biblioteca, e encerrado em 529 d.C. com o fechamento das portas da Academia de Atenas. (EVES, 2011, p.163).

Perto do final do século III surgiu Papus de Alexandria (290-350), um grande geômetra que produziu a *Coleção Matemática*, composta de oito livros, que compunha, além da geometria já existente, proposições originais, comentários, aprimoramentos, extensões e notas históricas (EVES, 2011).

Embora Papus fora um brilhante matemático, sua tentativa de ressuscitar a geometria fracassou, os matemáticos gregos que o sucederam tiveram o papel de comentadores, ou seja, apenas faziam comentários nas obras de seus predecessores. Esse trabalho segundo Boyer (2012) é bastante útil no sentido de informações históricas, em contrapartida não apresentam novos resultados que contribuam com a evolução da Matemática. Para analisar o desenvolvimento da geometria devemos avançar cerca de um milênio e considerar as produções dos matemáticos modernos.

1.4 A MATEMÁTICA A PARTIR DO SÉCULO XVII

Depois de Arquimedes, resultados significativos para a geometria surgiram apenas no século XVII, com a intervenção de métodos algébricos e infinitesimais, transformações que ocorreram graças à tentativa de aprimorar a geometria grega. Dentre os vários matemáticos que contribuíram com esse desenvolvimento destacam-se René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) (ROQUE e CARVALHO, 2012).

De acordo com Eves (2011) Descartes trouxe novas perspectivas ao estudo da geometria e juntamente com Pierre de Fermat, por meio dos estudos de lugares geométricos, deram contornos iniciais a Geometria Analítica, cuja essência real reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Para Roque e Carvalho (2012)

> A “exatidão” dos procedimentos empregados em geometria foi redefinida por Descartes. Ao invés de construções geométricas, foram admitidas técnicas algébricas na definição de curvas, instituídas como objeto central da geometria. A segunda metade do século XVII sentirá os efeitos desta mudança e o trabalho com curvas, incluindo a busca de tangentes e áreas, incentivará o desenvolvimento dos métodos infinitesimais. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p.244)

1.4.1 Cavalieri e o Método dos Indivisíveis

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) trouxe grande desenvolvimento para a Matemática com sua obra intitulada *Geometria Indivisibilus*, tratando sobre o que ele denominava de Métodos dos Indivisíveis (EVES, 2011).

> Cavalieri argumentava que uma linha é composta de pontos, assim como um cordão é composto de contas; um plano é feito de linhas, assim como uma roupa, de fios; e, um sólido é composto de planos, assim como um livro, de páginas. A área de uma Figura seria a soma de um número indefinido de segmentos de reta paralelos e seu volume seria a soma de um número

> indefinido de áreas paralelas. Estes seriam, respectivamente, os indivisíveis de área e de volume. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p.271).

A generalização desses conceitos intuitivos do matemático é o que conhecemos por Princípios de Cavalieri, que podem ser enunciado, segundo Eves (2011, p. 426) por

> 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
> 2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

1.4.2 Cálculo de Áreas por Fermat e Pascal

No século XVII surge uma nova forma de calcular áreas e volumes. Embora o conceito seja embasado no Método de Exaustão, a diferença é que houve a sistematização da aproximação das curvas pelo uso de retângulos, ao contrário do método proposto pelos gregos que utilizava diversos tipos de polígonos. A vantagem de se utilizar retângulos "infinitamente" finos é que ele se adequa a qualquer tipo de curva, além de que, calcular a área de retângulos uniformes é mais simples do que calcular a área de polígonos com muitos lados (ROQUE e CARVALHO, 2012).

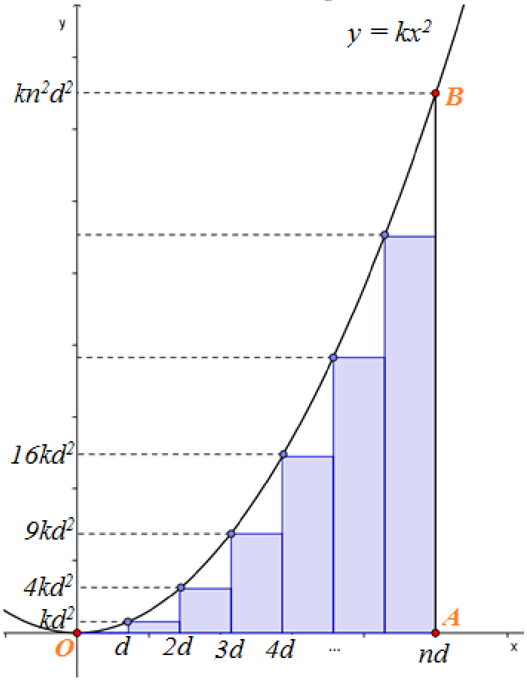
Os estudos desenvolvidos por Cavalieri, Pascal (1623-1662) e Fermat já delinearam conceitos básicos do Cálculo Integral que seria desenvolvido anos mais tarde. Apresentamos um exemplo de cálculo de áreas fornecido por Fermat e Pascal, conforme propõe Roque e Carvalho (2012).

Vamos exemplificar como Fermat e Pascal calcularam a área sob uma curva, que hoje representamos pela função $y = kx^2$, limitada pelo eixo das abcissas e pela reta $x = A$, sendo A uma constante natural.

Primeiramente marcamos n pontos equidistantes entre os pontos O e A, conforme notamos na Figura 19. Considerando d a distância entre dois pontos consecutivos, temos que

$$d = \frac{\overline{OA}}{n} \tag{27}$$

Figura 19: Cálculo de Áreas por Fermat e Pascal



Fonte: Roque e Carvalho (2012, p.272, adaptado)

Os retângulos observados na Figura 19 tem a base medindo d e as alturas medem, respectivamente kd^2, $4kd^2$, $9kd^2$, ..., kn^2d^2, que são as imagens da função nos domínios $1, 2, 3, \ldots, n$. Podemos calcular a soma das áreas dos retângulos, utilizando a expressão

$$Área \cong kd^3 + 4kd^3 + 9kd^3 + \ldots + n^2kd^3 = kd^3\left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right). \tag{28}$$

Fermat e Pascal já sabiam que a soma dos n primeiros números naturais, $S = \left(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right)$, podia ser calculado por

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \tag{29}$$

Substituindo, então, (27) e (29) em (28) obtemos $Área \cong k\left(\frac{\overline{OA}}{n}\right)^3\left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right]$ e segue que

$$Área \cong k\left(\overline{OA}\right)^3\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right]. \tag{30}$$

À medida que o número de retângulos aumenta indefinidamente, podemos desconsiderar as últimas duas parcelas da soma na expressão (30), de modo que a área da região pode ser representada por $Área = \frac{k\left(\overline{OA}\right)^3}{3}$. Como $\left(\overline{OA}\right)$ representa a coordenada das abcissas, temos que $\acute{A}rea = \frac{kx^3}{3}$.

Cabe ressaltar que o processo usado pelos matemáticos do século XVII era um pouco diferente, visto que o conceito de função ainda não existia, porém nosso intuito é apresentar a ideia utilizada pelos matemáticos do período e alguns dos conceitos que mais tarde inspirariam Newton e Leibniz a desenvolver o Cálculo Diferencial e Integral. (ROQUE e CARVALHO, 2012).

1.4.3 Newton, Leibniz e o Cálculo Diferencial e Integral

Isaac Newton (1642-1726) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) desenvolveram o Calculo Diferencial e Integral e protagonizaram a “guerra do cálculo”, nome dado a disputa pública gerada entre os matemáticos para reivindicar a autoria do conteúdo que é considerado um dos mais importantes legados do século XVII, conforme Bardi (2008).

Newton, ainda estudante na Universidade de Cambridge, nos anos de 1665 e 1666 produziu o método que denominou de Fluxos e Fluentes. Newton deixou seu trabalho em segredo durante décadas, apenas divulgando informalmente a alguns amigos.

Por outro lado Leibniz ingressou nos estudos do cálculo em Paris no ano de 1675, dez anos após Newton. Leibniz estudou durante dez anos e criou um sistema totalmente original de símbolos e representações gráficas, que são usados até hoje devido a sua eficácia e simplicidade. Embora Leibniz tenha desenvolvido seus estudos mais tarde, publicou dois trabalhos nos anos de 1684 e 1686, antes de Newton, fato este que o fez reivindicar a autoria do Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Bardi (2008) hoje, tanto Newton quanto Leibniz são vistos como coinventores independentes do Cálculo Diferencial e Integral, invenção essa que foi considerada o maior impulso dado a Matemática desde os gregos. Em 1713 Varignon, por meio de uma carta enviada por Leibniz disse que o cálculo era tão grande que deveria ser o bastante para os dois.

O Cálculo Diferencial e Integral possui um conteúdo denso de conceitos e de grande aplicação em diversas áreas. Em particular, na geometria, o cálculo trouxe novas perspectivas, sobretudo no estudo de uma infinidade de curvas bem como o cálculo de áreas e volumes. Cabe ressaltar que esse novo método para calcular áreas, que é o aperfeiçoamento do método empregado por Fermat, Pascal, Cavalieri e outros matemáticos, só foi possível graças à sistematização do conceito de funções, que ocorreu no século XVIII, com a contribuição de vários matemáticos.

Conforme o objetivo deste texto, vamos analisar na próxima seção os conceitos do cálculo aplicados à determinação de áreas, com base no trabalho desenvolvido por Riemann.

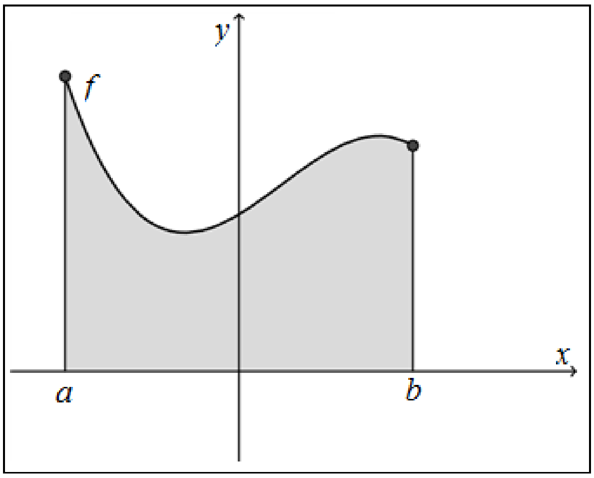
1.4.4 *A Integral de Riemann*[13]

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826 na Alemanha. Iniciou os estudos de filosofia e teologia na universidade de Gottingen em 1842, inspirado por seu pai. Porém em 1846 se transferiu para o curso de Matemática. Em 1851 já era doutor em Matemática sob orientação de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e começou a lecionar em Gottingen. Em 20 de julho de 1866 Riemann faleceu de tuberculose. Riemann deixou como legado diversos trabalhos, contribuindo com a Matemática e com a física (EVES, 2011).

Dentre os trabalhos de Riemann, destacamos a *Soma* e a *Integral de Riemann* que levaram a generalização do cálculo de áreas limitadas por funções. Abordaremos os trabalhos na sequência, com base na proposta de Guidorizzi (2006).

Consideremos inicialmente que queremos obter área limitada por uma função f, contínua no intervalo $[a,b]$, sendo $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$ e, pelas retas $x=a$, $x=b$ e $y=0$, ilustrada na Figura 20.

Figura 20: Cálculo de Área por Riemann



Fonte: Guidorizzi (2006, p. 310, adaptado)

[13] Embora tenha outras aplicações, abordaremos *A Integral de Riemann* aplicada ao cálculo de áreas, por ser o foco de nosso trabalho.

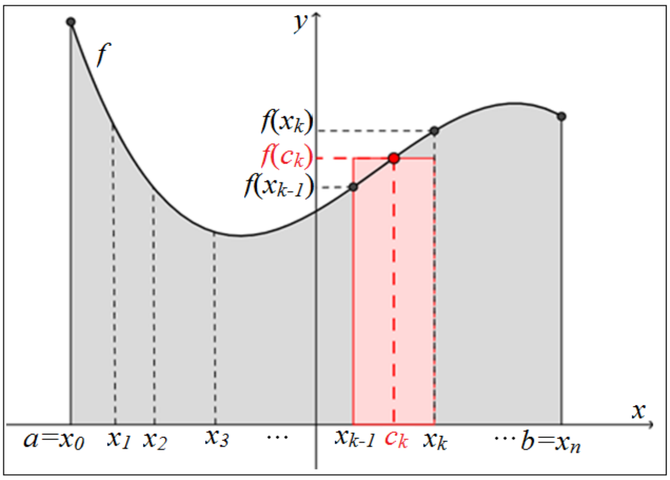
Primeiramente vamos particionar $[a,b]$ em n subintervalos, Figura 21, não necessariamente de mesma amplitude, tais que: $a = x_0 \langle x_1 \langle x_2 \langle \ldots\ x_k \langle\ \ldots \langle\ x_n = b$, onde x_k representa o k-ésimo termo pertencente à partição. Denotamos a amplitude do k-ésimo intervalo por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Escolhamos um $c_k \in [x_k, x_{k-1}]$ para todo índice k, ou seja, $k = 1, 2, 3, \ldots n$.

Definimos por soma de Riemann a expressão:

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n \ , \tag{31}$$

onde $f(c_k)\Delta x_k$ representa área de um retângulo de base Δx_k e altura $f(c_k)$.

Figura 21: Partições de Intervalos - Integral de Riemann



Fonte: Fonte: Guidorizzi (2006, p. 310, adaptado.)

Riemann concluiu que a soma $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, dada em (31) tende a um número real *K*, quando o máximo Δx_k tende a zero. Representado por

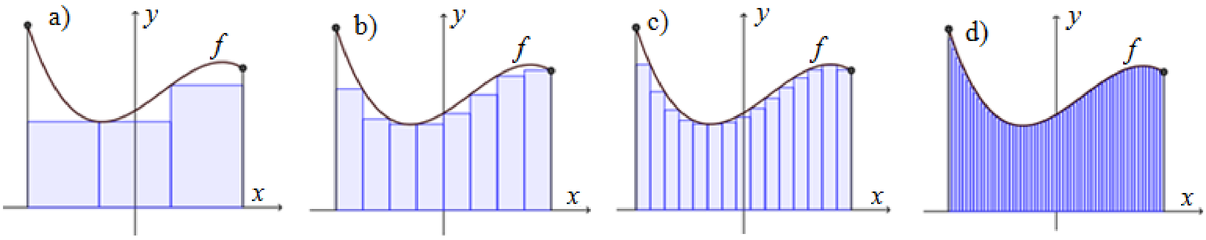
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{máx\ \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = K \ . \tag{32}$$

O número resultante em (32) é conhecido como Integral de Riemann. Como as somas de Riemann tendem a $\int_a^b f(x)dx$, podemos definir a área da região apresentada na Figura 21 por

$$Área = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Geometricamente podemos interpretar que, à medida que $\Delta x_k \to 0$ a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área limitada pela curva, representada pela função f, conforme podemos observar na Figura 22.

Figura 22: Aproximação da Área por Retângulos - Integral de Riemann onde: a) $n=3$, b) $n=8$, c) $n=15$ e d) $n=80$.



Fonte: Autor

Definimos inicialmente, por simplicidade, que $f(x) \geq 0$. Para o caso em que $f(x) < 0$ em $[a,b]$, temos que $f(c_k)\Delta x_k$ será negativo e, portanto definimos a área por $Área = -\int_a^b f(x)dx$.

1.4.5 Teorema de Pick

George Alexander Pick (1859-1942) nasceu em Viena. Ingressou na Universidade de Viena em 1875 e um ano após publicou o primeiro dos 67 artigos no campo da Matemática. Seus trabalhos abrangiam vários campos da Matemática, tais como Álgebra Linear, Análise Funcional, Cálculo Integral e Geometria. Na geometria publicou um trabalho de oito páginas intitulado por *Teorema de Pick*, em Praga no ano de 1899. O trabalho ganhou destaque após ser publicado no livro "*Mathematical Snapshots*" (Oxford Univ. Press, N. York, 1950), do matemático H. Steinhaus. Pick morreu no campo de concentração no ano de 1942 (HERMES, 2014, LIMA, 2006).

O Teorema de Pick chama a atenção por sua simplicidade e elegância. Para enunciar o Teorema, primeiramente devemos definir os conceitos de polígono simples e rede no plano.

Definimos um polígono como simples se "a interseção de um par de arestas não consecutivas é sempre vazia, (um par de arestas consecutivas é determinado por cada conjunto de três vértices consecutivos)" (PEREIRA e MELO, 2012, p.36).

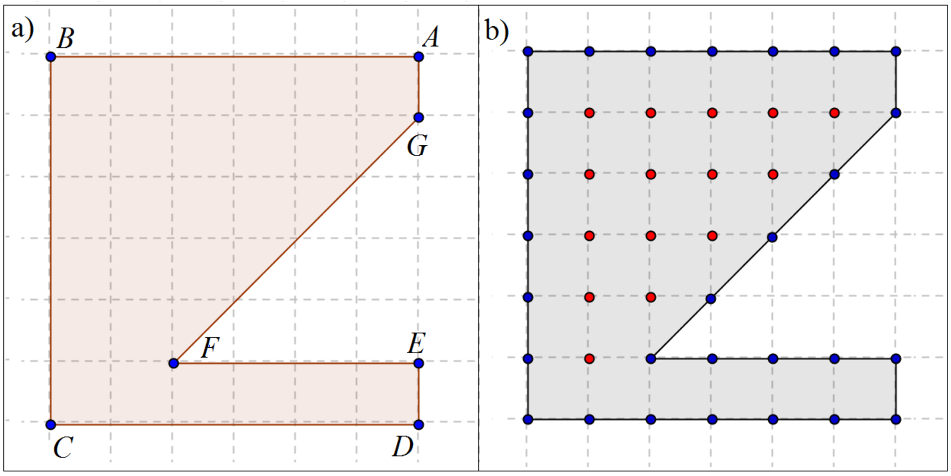
"Uma rede no plano é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal e vertical é igual a 1". (LIMA, 2006, p. 102).

Adotando o sistema de coordenadas cartesianas com origem em um dos pontos da rede, sendo um eixo horizontal e o outro vertical, podemos definir a rede como o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano, cujas coordenadas são números inteiros.

Teorema de Pick[14]: Consideremos um polígono P simples, cujos vértices são pontos de uma rede. Denotemos por I a quantidade de pontos da rede que são interiores ao polígono e por B a quantidade de pontos que pertencem às arestas desse polígono, incluindo os vértices. A área desse polígono, que representaremos por $\acute{A}rea\,(P)$, pode ser calculada por $\acute{A}rea\,(P) = I + \frac{B}{2} - 1$ (LIMA, 2006).

Para exemplificar o Teorema de Pick, calcularemos a área do polígono representado na Figura 23a. Observando a Figura 23b temos que $I = 15$ (pontos vermelhos), $B = 28$ (pontos azuis) onde a área é $\acute{A}rea\,(ABCDEFG) = I + \frac{B}{2} - 1 = 15 + \frac{28}{2} - 1 = 28\,u.a.$

Figura 23: a) Área pelo Teorema de Pick e b) Pontos do Polígono Pertencentes à Rede



Fonte: Autor

O Teorema de Pick tem várias aplicações, dentre elas destacamos a possibilidade de calcular uma aproximação para áreas irregulares, mesmo contendo regiões curvas, utilizando para tanto, uma aproximação por polígonos com vértices de coordenadas inteiras no plano cartesiano.

[14] A demonstração do Teorema de Pick não foi incluída neste trabalho. Duas diferentes demonstrações para o teorema se encontram disponíveis em: (PERERIRA e MELO, 2012, p.36-42, LIMA, 2006, p. 101-115).

CAPÍTULO 2 – ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PROPOSTA

No presente capítulo apresentamos os aspectos metodológicos, nos quais nos apoiamos, para abordar as atividades dispostas no capítulo 3. Na seção 2.1, tratamos aspectos relevantes sobre a participação da História da Matemática na sala de aula, posteriormente, na seção 2.2, discutimos sobre o uso das tecnologias em sala de aula. Na seção 2.3 apresentamos o *software* GeoGebra, que é a ferramenta tecnológica que escolhemos para utilizar nas atividades.

2.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Inicialmente, destacamos nossa posição acerca do papel da História da Matemática como recurso metodológico. Acreditamos que a inserção da História da Matemática na sala de aula vai além do modelo factual ou "anedotário" como classificam Miguel e Miorim (2004) que consiste em contar episódios da História da Matemática ou apresentar notas históricas ao final do capítulo de um livro. Em consonância com Miguel e Miorim (2004), acreditamos que esse modo de inserir a História da Matemática no contexto educacional atinge alguns objetivos específicos, porém entendemos que não contribui de forma efetiva com o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Com base nas pesquisas de Souto (2010), atualmente é crescente os discursos que versam sobre a inclusão da História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem, em contrapartida, na prática, a História da Matemática não tem sido efetiva no processo educacional. Para buscar uma melhor compreensão sobre o papel que a História da Matemática pode desempenhar em uma sala e de que forma poderá contribuir com o aprendizado, devemos analisar as perspectivas teóricas propostas, os pontos positivos e negativos que elas apresentam, com base nos autores que se propuseram a estudá-las.

Miguel e Miorim (2004) apontam cinco perspectivas que se fazem presentes no campo de investigação da História da Matemática: 1) Perspectiva Evolucionista Linear, 2) Perspectiva Estrutural-Construtivista Operatória, 3) Perspectiva Evolutiva Descontínua, 4) Perspectiva Sociocultural e 5) Perspectivas dos Jogos de Vozes e Ecos. (MIGUEL e MIORIM, 2004).

A Perspectiva Evolucionista Linear, difundida no século XIX, defendida por Ernest Haeckel (1834-1919), aborda a ideia de que "o desenvolvimento psíquico da criança é uma repetição abreviada da evolução filogenética". (MIGUEL e MIORIM, 2004, p.80).

> Tal crença nos obriga, é claro, a estabelecer um elo de natureza biológica entre o passado e o presente, baseado em um argumento recapitulacionista de cunho biológico. E daí tudo se passa como se a produção cultural do passado tivesse o poder de projetar-se biologicamente (e cronologicamente, por se ter uma concepção evolutiva da filogenia) sobre o presente e determinar, de algum modo, o seu curso. [...] De fato, segundo esse ponto de vista, a Matemática constituiria meramente um corpo cumulativo prévio e sequenciado de conhecimentos produzidos, cada um em um tempo determinado, que deveria ser administrado em etapas cronologicamente sequenciadas, hierarquizadas e qualitativamente indistintas durante o processo de ensino-aprendizagem. (MIGUEL e MIORIM, 2004, p.80-81).

No final do século XIX adotou-se um processo de ensino de Matemática pautado em tal perspectiva, que tinha como base o aprendizado de Matemática no mesma sequência cronológica em que ocorreram na História da Matemática, porém com uma forma abreviada e método não exaustivo. Na Perspectiva Evolucionista Linear o papel da História da Matemática é identificar a ordem cronológica dos conteúdos que serão trabalhados (Miguel e Miorim, 2004).

A Perspectiva Estrutural Construtivista Operatória teve como base os trabalhos de Piaget e García acerca do processo do aprendizado pautado no plano filogenético e psicogenético. “Piaget e Garcia defendiam a ideia de que para aprender matemática o sujeito deve reconstruir operações cognitivas que marcaram a construção histórica dos objetos matemáticos” (MOTTA, 2006, p. 02).

A Perspectiva Evolucionista Descontínua, desenvolvida, principalmente por investigadores filiados a escola francesa contemporânea tem como base a obra “A Formação do Espírito Científico” do filósofo francês Gaston Bachelard (1884-1962). A concepção de aprendizagem ocorre com base na superação de obstáculos que surgem a partir de situações-problemas previamente elaboradas, com base em critérios e objetivos bem definidos. Nessa concepção aprender Matemática equivale a aprender a superar obstáculos epistemológicos e o papel da História da Matemática consiste na busca pelas situações-problemas, que se fizeram presentes na própria história e que servirão de obstáculos epistemológicos. (Miguel e Miorim, 2004).

A Perspectiva Sociocultural é defendida por Luis Radford, professor da Université Laurentienne do Canadá, que aborda

> o conhecimento matemático como resultante da negociação social de significados e a História da Matemática como uma fonte de experiências humanas que podem ser trabalhadas nas atividades didáticas em matemática, através de um diálogo com práticas atuais e o contexto da época da produção de conceito. (MOTTA, 2006, p. 05).

Na Perspectiva Sociocultural o aprendizado de Matemática é pautado na "capacidade pessoal de internalizar (coapropriar-se, entender usar e coproduzir), através da negociação interativa, de natureza, sobretudo dialógica, as significações sócio-históricas constitutivas dos objetos matemáticos [...]" (MIGUEL e MIORIM, 2004, p.133). O processo de ensino e aprendizagem é mediado por atividades relacionadas ao contexto cultural escolar e a História da Matemática é caracterizada nesse processo como

> um laboratório de experiências humanas com as quais se procura dialogar através de um contraste oblíquo com as práticas pedagógicas atuais a fim de construírem atividades didáticas para o ensino-aprendizagem escolar da matemática. (MIGUEL e MIORIM, 2004, p.134).

A Perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos, que é defendida pela escola Italiana, é pautada nas teorias de Bakhtin (o construto Vozes) e Ludwig Wittgeinstein (construto jogos de linguagem), considerando o ponto de vista de Vygotsky acerca da distinção entre conceitos científicos (abordados na escola) e conceitos práticos (que são utilizados no cotidiano) (Miguel e Miorim, 2004).

> Toda a problemática de transmissão do conhecimento matemático na escola giraria[...] no estabelecimento e desenvolvimento de condições que propiciem a apropriação, por parte dos estudantes, das características do conhecimento matemático teórico[...] todas elas de natureza linguística e, particularmente, discursiva e dialógica. (MIGUEL e MIORIM, 2004, p.139).

A participação da História da Matemática nessa perspectiva de ensino requer uma prévia análise do conteúdo a ser trabalhado em sala de aula, com o intuito de investigar e explicitar as características particulares, bem como suas condições histórico-culturais. A partir dessa análise deve-se planejar e construir sequência ou tarefas de ensino e aprendizagem de modo que o estudante tenha acesso às vozes do passado a fim de que elas possam produzir ecos entre eles (Miguel e Miorim, 2004).

> o objetivo pedagógico não é construir um conceito ou uma solução original para um problema nem validar uma produção do estudante, mas detectar contradições entre vozes históricas e as dos estudantes a fim de propiciar a ampliação do horizonte cultural dos estudantes, nele incorporando elementos difíceis de serem construídos através de uma abordagem tradicional ou construtivista [...]. (MIGUEL e MIORIM, 2004, p.143).

Ao compararmos as cinco perspectivas apresentadas por Miguel e Miorim (2004) e em consonância com os autores, percebemos que as três primeiras baseiam-se no princípio recapitulacionista, ao contrário das duas últimas perspectivas que remontam a importância do contexto cultural e social. No modelo Sociocultural apresenta-se a busca pelo diálogo entre o presente e o passado, onde nem o passado se subordina ao presente e nem o presente se subordina ao passado, características comuns, a nosso ver, à Perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos. No Quadro 1 realizamos a comparação entre as características, que consideramos ser as principais, das cinco perspectivas teóricas.

Quadro 1 : Perspectivas Teóricas da História na Educação Matemática

<table>
<tr><th>Perspectiva Teórica</th><th>Principais Características</th></tr>
<tr><td>1) Evolucionista Linear</td><td rowspan="3">• Perspectivas pautadas (de forma direta ou indireta) no Princípio Recapitulacionista.</td></tr>
<tr><td>2) Estrutural-Construtivista Operatória</td></tr>
<tr><td>3) Evolutiva Descontínua</td></tr>
<tr><td>4) Sociocultural</td><td>• A História da Matemática como fonte de experiências humanas;
• Diálogo com práticas atuais e o contexto da época da produção dos conceitos.</td></tr>
<tr><td>5) Perspectiva dos Jogos de Vozes e Ecos</td><td>• Diálogo entre passado-presente;
• Planejar e construir sequencia ou tarefas de ensino e aprendizagem de modo que o estudante tenha acesso às vozes do passado afim de que elas possam produzir ecos entre eles.</td></tr>
</table>

Fonte: Autor

Entendemos que as perspectivas 4) e 5) possuem diversos aspectos que se revelam favoráveis ao processo educacional ao passo que o processo recapitulacionista, que subordina o presente ao passado, pode apresentar ao estudante uma impressão falsa de que a Matemática é uma ciência pronta e acabada e pode-se agravar ao deixar transparecer ao estudante a visão de que a Matemática é uma ciência inacessível e distante de sua realidade.

Ainda em relação ao comparativo entre as perspectivas ligadas a inserção da História da Matemática na Educação, Motta (2006) apresenta duas formas diferentes de conceber a história no processo educativo: a História da Matemática como um espelho ou a História da Matemática como uma pintura.

Para Motta (2006) as perspectivas caracterizadas pelo princípio recapitulacionista são exemplos de História da Matemática como Espelho, por apenas realizar repetição de processos historicamente produzidos. Em contrapartida, ao considerarmos a história da Matemática como processo de criação humana, levando em conta o contexto social do período e adequando-a a aspectos cotidianos, estamos adotando-a como uma pintura. Nesse contexto o conhecimento matemático é (re)criado e (co)criado, por meio de um processo interativo, fazendo com que a História da Matemática se torne

> [...] inspiradora de sequências didáticas para o ensino-aprendizagem ao possibilitar a constituição dos contextos e circunstâncias de produção dos conceitos, das significações produzidas e negociadas na produção,

> circulação, recepção e transformação desse conhecimento. [...] A História da Matemática serviria como um ponto de partida para o desenho de novas atividades para que os estudantes, de forma ativa, recriassem significados e conceitos e co-criassem outros novos, agindo e pensando por meio dos conceitos, significados e ferramentas de sua cultura. (MOTTA,2006, p. 05).

Acreditamos que a forma de conceber o papel da História da Matemática como recurso metodológico defendido pelos autores Miguel e Miorim (2004) e Motta (2006) vão ao encontro com as propostas metodológicas dos PCN, que argumentam a importância da História da Matemática no processo pedagógico.

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p.42)

Nessa perspectiva, as DCE orientam que a abordagem da história deve ser vinculada aos "fatos sociais e políticos, às circunstâncias históricas e às correntes filosóficas que determinaram o pensamento que influenciaram os avanços científicos dessa época" (PARANÁ, 2008, p. 66).

Mendes (2008) defende que a História da Matemática deve ser usada como prática pedagógica por meio de um processo investigativo, atuando de modo a unificar os aspectos cotidiano, escolar e científico.

> Nossa concepção a respeito da investigação histórica como modelo teórico de apoio a elaboração de atividades didáticas para o ensino da Matemática baseia-se na história e na investigação como fonte de geração da Matemática escolar. Para implementarmos tal perspectiva teórico-prática, precisamos valorizar as informações históricas, adaptando-a de modo a usá-la de forma mais produtiva possível em sala de aula. [...] O princípio que articula as atividades de ensino-aprendizagem via História da Matemática é a investigação [...] (MENDES, 2008, p.8).

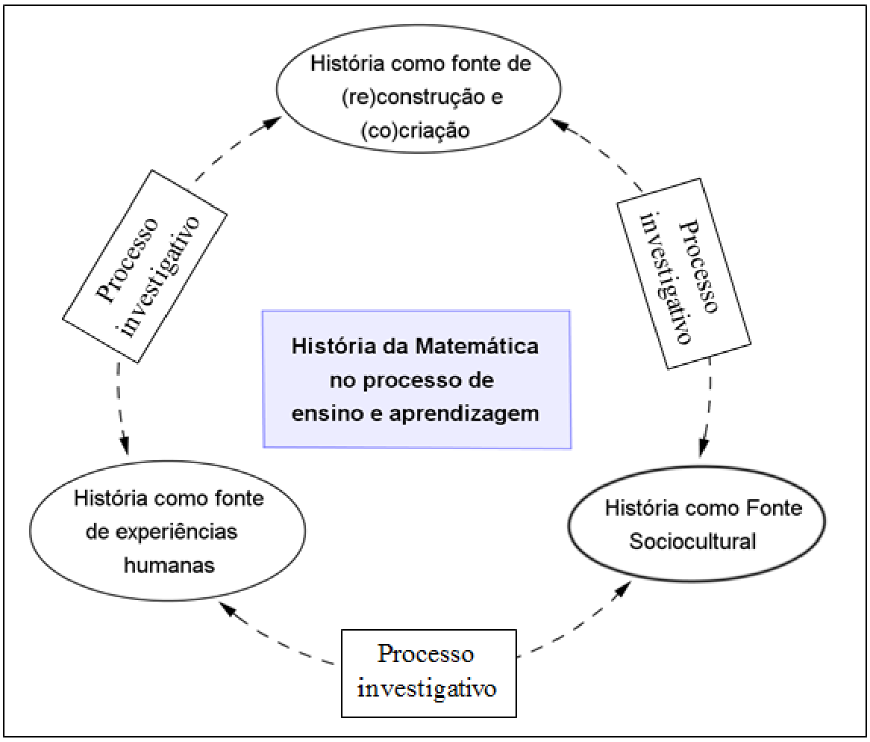
Miguel e Miorim (2004) estabelecem alguns objetivos pedagógicos que podemos atingir ao adotar a História da Matemática no desenvolvimento das atividades docentes: *i*) a matemática como criação humana; *ii*) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; *iii*) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; *iv*) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; *v*) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; *vi*) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; *vii*) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

Com base nas propostas e argumentos apresentados em *i*)- *vii*), acerca da participação da História da Matemática no contexto escolar, nos propomos a estabelecer alguns tópicos que, a nosso ver, são importantes para que a História da Matemática contribua de forma efetiva com a nossa proposta de aprofundar o conceito de área de Figuras planas na Educação Básica, de acordo com (MIGUEL e MIORIM, 2004, p.152)

> É claro que é indispensável conhecer, respeitar e debater tais propostas. Mas isso não dispensa a realização de um esforço pessoal e adicional do próprio professor no sentido de transformá-las ou mesmo de produzir novas propostas personalizadas tendo em vista a natureza, as condições e os propósitos singulares da instituição escolar em cada situação concreta.

Para desenvolver as atividades que serão propostas no capítulo 3, adotamos alguns itens que consideramos importantes no desenvolvimento de uma atividade pautada num processo investigativo, considerando: A História da Matemática como fonte de experiências humanas; A História da Matemática como fonte Sociocultural e A História da Matemática como fonte (re)construção e (co)criação. Acreditamos que esses três itens são fundamentais no processo ensino e aprendizagem de uma atividade pedagógica sob a abordagem histórica, de forma que os caracterizamos como os sustentáculos do nosso processo, como apresentado na Figura 24.

Figura 24: Perspectiva de Aprendizagem por Meio da História da Matemática



Fonte: Autor

2.2 MÍDIAS TECNOLÓGICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

É fundamental definirmos alguns conceitos que abordaremos na presente seção, com o intuito de orientar o leitor. Os conceitos são: 1) Tecnologia, 2) Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), 3) Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) e 4) Mídias Tecnológicas.

Vargas (2001) define Tecnologia como a capacidade do indivíduo em desenvolver instrumentos capazes de diminuir o esforço empregado no processo de produção e reprodução da vida humana.

Fraga (2013) afirma que as Tecnologias de Informação e Comunicação são aquelas desenvolvidas com o objetivo de facilitar a comunicação, compartilhando, distribuindo e reunindo informação. Podemos citar como exemplos de TIC a carta, jornal, televisão, livro, rádio, dentro outros.

As Tecnologias Digitais da Comunicação e Informação são uma evolução das TCIs e caracterizam-se pela transmissão dos conteúdos por meio da digitalização e da comunicação em redes. Alguns exemplos de TDIC são o computador, a televisão e o radio digitais, internet, telefonia móvel, e-mail, fotografias, vídeos, tecnologias de acesso remoto como o Wi-Fi e o Bluetooth, dentre outras. (FRAGA, 2013). Para Baldini (2014), no processo de ensino e aprendizagem as TDIC correspondem ao conjunto de recursos tecnológicos digitais integrados entre si.

Entendemos que as Mídias Tecnológicas a que se referem às DCE, são os recursos ou instrumentos tecnológicos que podem ser utilizados no ambiente de sala de aula, com o intuito de potencializar o processo de ensino e aprendizagem. Embora não esteja especificado nas DCE quais os tipos de tecnologias são contemplados no campo Mídias Tecnológicas, entendemos que as tecnologias propostas nas Diretrizes Curriculares Estaduais se assemelham as TDIC, fato que fica evidente no relato:

> Atividades com lápis e papel ou mesmo Quadro e giz, para construir gráficos, por exemplo, se forem feitas com o uso dos computadores, permitem ao estudante ampliar suas possibilidades de observação e investigação[...] Os recursos tecnológicos como o software, a televisão, as calculadoras, os aplicativos da Internet, entre outros, têm favorecido as experimentações matemáticas e potencializado as formas de resolução de problemas (PARANÁ, 2006, p. 65)

Entendemos que o software GeoGebra é uma TDIC. Alguns autores aqui referenciados utilizam o conceito mais amplo de TCI e consideramos, neste trabalho, que ao fazer menção a uma TCI estende-se também tal conceito a uma TDCI.

2.2.1 A Importância e os Benefícios das TDIC no Ensino de Matemática

Ao propor um trabalho que articula a História da Matemática ao uso de Mídias Tecnológicas buscamos pressupostos teóricos que nos possibilitem um resultado efetivo no processo de ensino e aprendizagem. Para tanto procuramos entender dois aspectos que consideramos fundamentais: qual é a importância e os benefícios que a utilização das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) podem proporcionar para o processo de ensino e aprendizagem e como se dá esse processo de inserção de uma TDIC no ensino de Matemática de forma que o ensino mediado pela tecnologia se torne eficaz.

No que diz respeito à importância do uso das tecnologias no ensino (BORSSOI, 2013, p. 41) ressalta que

> O aspecto de muitas das novas tecnologias permitem criar ambientes em que os alunos possam aprender fazendo, ao mesmo tempo em que recebem *feedback* e podem aprimorar continuamente seus conhecimentos construindo novos conhecimentos. Com essas tecnologias, conceitos difíceis de entender podem ser visualizados quando *softwares* de modelagem e simulação adequados são associados ao ensino.

Corroborando com essa ideia Fahd, Moreira e Silva (2013) afirmam que a utilização das tecnologias na educação proporciona um processo de interativo e amplia as possibilidades no processo educativo, modificando qualitativamente as atividades pedagógicas, contribuindo para a construção do conhecimento.

Martins (2009) atesta que tanto alunos quanto professores encontram na tecnologia uma ligação entre a Matemática e a vida real. A autora destaca também que a tecnologia pode fornecer "elementos motivadores, capazes de quebrar monotonias há muito instaladas e de facilitar a aprendizagem" (MARTINS, 2009, p.2727).

2.2.2 A Inserção das Mídias Tecnológicas no Processo de Ensino e Aprendizagem

De acordo com Fahd, Moreira e Silva (2013), Lang e González (2014) surgiram muitas discussões recentes acerca do uso das tecnologias no ensino. Os autores admitem que usar uma Tecnologia de Comunicação e Informação (TIC) na sala de aula não é uma tarefa simples, sendo influenciado por vários fatores, dentre os quais destacamos a formação do professor e o modo com que este encaminhará uma atividade mediada por uma tecnologia.

Sampaio e Coutinho (2012) apontam que o sucesso do uso de uma tecnologia não depende apenas da tecnologia escolhida, mas sim na forma como essa tecnologia é utilizada pelo professor. Os autores destacam também a importância de conceber o recurso tecnológico como uma ferramenta para auxiliar o processo educativo e não como o elemento principal no contexto educacional.

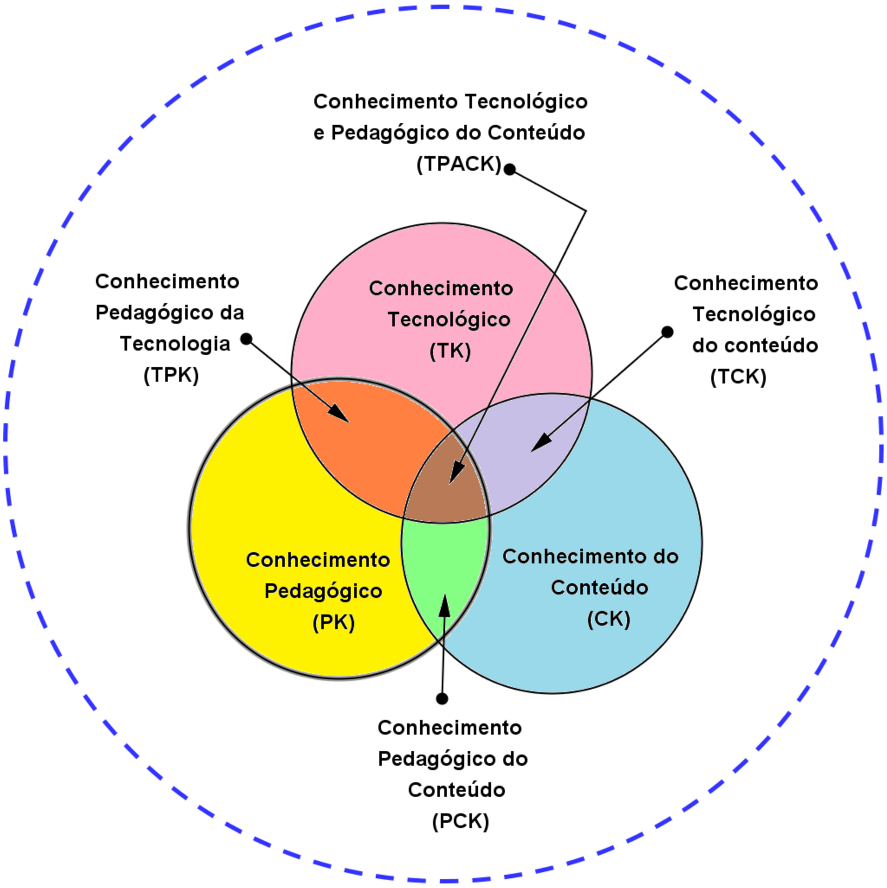
> Quando um carpinteiro pensa em construir uma mesa, em primeiro lugar, elabora um plano da construção, como um desenho da mesa, por exemplo, depois seleciona os materiais que irá necessitar para a mesa e só finalmente irá escolher as ferramentas necessárias para concretizar essa construção. Será que um carpinteiro alguma vez se perguntaria: tendo esta ferramenta que móvel poderei construir? [...] Não se deve selecionar primeiro a ferramenta de trabalho, ao invés, devemos cuidadosamente escolher os conteúdos e objetivos específicos de ensino, para elaborar um plano de aula, optando pela metodologia mais adequada e só depois se definem os recursos necessários e as TIC. *Chega de desenhar uma casa à volta de uma torneira!* (SAMPAIO, e COUTINHO, 2012, p.103, grifo dos autores).

Com base nessa perspectiva Fahd, Moreira e Silva (2013) entendem que a utilização das TIC não se trata apenas de um processo de inovação, mas de integrar à realidade educacional os recursos didáticos que tenham significados efetivos para o processo educativo.

Para atingir as potencialidades evidenciadas ao uso de uma tecnologia, muitos autores buscam pressupostos teóricos que possam servir de base para a prática docente permeada pelo uso de uma TIC. Mishra e Koehler (2006) desenvolveram um modelo denominado *Technological Pedagogical Content knowledge*, que pode ser traduzido como Conhecimento Tecnológico Pedagógico do Conteúdo. Esse modelo ficou conhecido como TPACK e tem como base os estudos de Schulman (1986).

Para Mishra e Koehler (2006) no processo de ensino-aprendizado deve-se considerar a relação entre três aspectos: o conteúdo, a pedagogia e a tecnologia. Nesse modelo, o sucesso da prática educacional está condicionado à capacidade com que o docente tem de relacionar os três aspectos, conforme podemos observar no diagrama elaborado pelos autores, na Figura 25, onde definem setes áreas importantes que permeiam o desenvolvimento de um processo de ensino e aprendizagem. Analisaremos cada uma delas, apontando os impactos no processo educacional.

Figura 25: O Quadro TPACK e os Respectivos Componentes do Conhecimento



Fonte: Koehler, Mishra e Cain (2013, p. 15, adaptado)

O Conhecimento do Conteúdo (CK) equivale à formação científica do docente relacionada aos conceitos específicos que se propõe no processo de aprendizagem. Para Koehler, Mishra e Cain (2013) o professor deve conhecer profundamente o conteúdo que se dispõe a ensinar e isso implica no conhecimento dos fatos e teorias científicas.

O Conhecimento Pedagógico (PK) equivale ao "profundo conhecimento dos professores acerca dos métodos de ensino e aprendizagem" (KOEHLER, MISHRA e CAIN, 2013, p. 15, tradução nossa). Nesse campo define-se a capacidade do docente em compreender como se dá o aprendizado dos alunos, a capacidade do planejamento de aula e processos avaliativos, métodos e técnicas que possam intervir positivamente no processo de ensino e aprendizagem. "Um professor com conhecimentos pedagógicos profundos entende como os alunos constroem o conhecimento e adquirem habilidades..." (KOEHLER, MISHRA e CAIN, 2013, p. 15, tradução nossa).

O Conhecimento Tecnológico (TK) equivale ao conhecimento sobre as tecnologias padrão, tais como, livros, giz e Quadro-negro, bem como as tecnologias mais avançadas como o computador, a internet, *hardwares* e *softwares*. (MISHRA e KOEHLER, 2008). O Conhecimento Tecnológico também se aplica a capacidade de saber utilizar a tecnologia de forma produtiva, em prol de algum objetivo, seja no ambiente escolar, profissional, pessoal ou outro. Nesse aspecto o TK exige um conhecimento e domínio mais profundo acerca das tecnologias, de forma que haja uma constante interação entre indivíduo e tecnologia, buscando o aperfeiçoamento constante, visto que as tecnologias estão em constante evolução (BALDINI, 2014).

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) relaciona a capacidade que o docente tem para direcionar ao aluno o aprendizado do conteúdo científico, de forma que o mesmo possa apropriar-se dos conceitos. O processo de ensino aprendizagem fica comprometido, quando não ocorre essa relação entre conteúdo e método de aprendizagem. De acordo com (BALDINI, 2014, p. 40-41)

> Inclui saber como um conteúdo pode ser organizado por um ensino melhor e as formas de representação de ideias, analogias, ilustrações, exemplos e demonstrações. Inclui também representações e formulações de conceitos, técnicas pedagógicas, conhecimentos daquilo que pode tornar os conceitos difíceis ou fáceis de serem aprendidos. Envolve o conhecimento de estratégias que possibilitam a superação de dificuldades e equívocos do aluno, promove uma compreensão significativa dos conceitos.

O conhecimento Tecnológico do Conteúdo (TCK) consiste na compreensão do modo como o conteúdo científico e as tecnologias se relacionam, quais são os aspectos positivos e negativos que uma tecnologia proporciona ao conteúdo que se propõe a ensinar. Segundo Mishra e Koehler (2008), o TCK também se aplica a capacidade de escolher a tecnologia adequada para se utilizar em um conteúdo específico.

O Conhecimento Pedagógico da Tecnologia (TPK) se aplica a capacidade que o docente tem de reconhecer as potencialidades e restrições que determinada tecnologia apresenta para o processo de aprendizagem. O uso das tecnologias requer criatividade dos professores, visto que muitas delas não foram criadas para fins pedagógicos, devendo o docente ter a sensibilidade de adequá-las de forma a torná-las efetivas no processo educacional (BALDINI, 2014). Nesse sentido Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 49-50) propõem que:

> [...] é fundamental explorarmos não somente os recursos inovadores de uma tecnologia educacional, mas a forma de uso de suas potencialidades com base em uma perspectiva educacional[...] Dessa forma buscamos formar cenários de investigação matemática, ou seja, um ambiente heurístico, de descobertas, de formulação de conjecturas acerca de um problema e busca por possíveis e diversificadas soluções.

Conforme destacamos nos parágrafos anteriores, o domínio dos três componentes básicos (conteúdo, didática e tecnologia) de forma desfragmentada não é suficiente para o sucesso no âmbito educacional. Para obter resultados efetivos no processo de ensino aprendizagem, mediado pelo uso de mídias tecnológicas é necessário que o professor possa relacionar esses três campos (conteúdo, pedagogia e tecnologia). O complexo processo de relacionar os três componentes básicos é a proposta denominada TPACK (Conhecimento Tecnológico e Pedagógico do Conteúdo), que segundo Mishra e Koehler (2008), é a base de um ensino eficaz mediado pelo uso de tecnologia. Em linhas gerais o TPACK demanda a compreensão de conceitos e técnicas pedagógicas que usam tecnologias de forma construtiva para ensinar o conteúdo (MISHRA e KOEHLER, 2008).

Ainda nesse aspecto Koehler, Mishra e Cain (2013) argumentam que as soluções para o uso das tecnologias em favor da educação encontram-se na capacidade de um professor em navegar de forma flexível no espaço definido pelos três elementos, que são o conteúdo, pedagogia e tecnologia, bem como as complexas interações entre esses elementos em contextos específicos. Ignorando a complexidade inerente a cada componente do conhecimento ou a complexidade das relações entre os componentes, pode-se encontrar soluções simplistas, mas que estão enfadadas ao fracasso.

2.3 O *SOFTWARE* GEOGEBRA

A partir da escolha da História da Matemática como pressuposto metodológico, analisamos que o uso da tecnologia seria imprescindível, principalmente considerando que ao longo do processo, os alunos vislumbrarão ideias e conjecturas, cujos conceitos remetem teorias ligadas ao Cálculo Diferencial e Integral. Neste aspecto acreditamos ser oportuno o uso do software GeoGebra, possibilitando a visualização de conceitos teóricos, principalmente aqueles abstratos, nos quais os alunos encontrarão dificuldades de apropriar-se. Nossos argumentos ficam evidenciados, conforme aponta (BORBA, SILVA e GADANIDIS, 2014, p. 54):

> A utilização do GeoGebra pode-se revelar significativa para a aprendizagem matemática quando o cenário didático-pedagógico formado a partir da realização de atividades matemáticas envolve complexidade com relação ao pensamento matemático.

O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica para todos os níveis de ensino que agrega conceitos de Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos. Além do vasto campo de conceitos aplicáveis, caracteriza-se pela simplicidade de uso. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países e se tornou um líder na área de *softwares* de geometria dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.[15]

O *software* foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg na Áustria e, atualmente conta com inúmeros colaboradores em vários países por todo o mundo, que promovem o seu desenvolvimento. O GeoGebra encontra-se disponível para *download* no site oficial www.geogebra.org e é compatível com os sistemas operacionais *Windows*, *Linux* e *OS*. O site também disponibiliza a instalação do *software* em *Tablets* e em *Smartphones.*

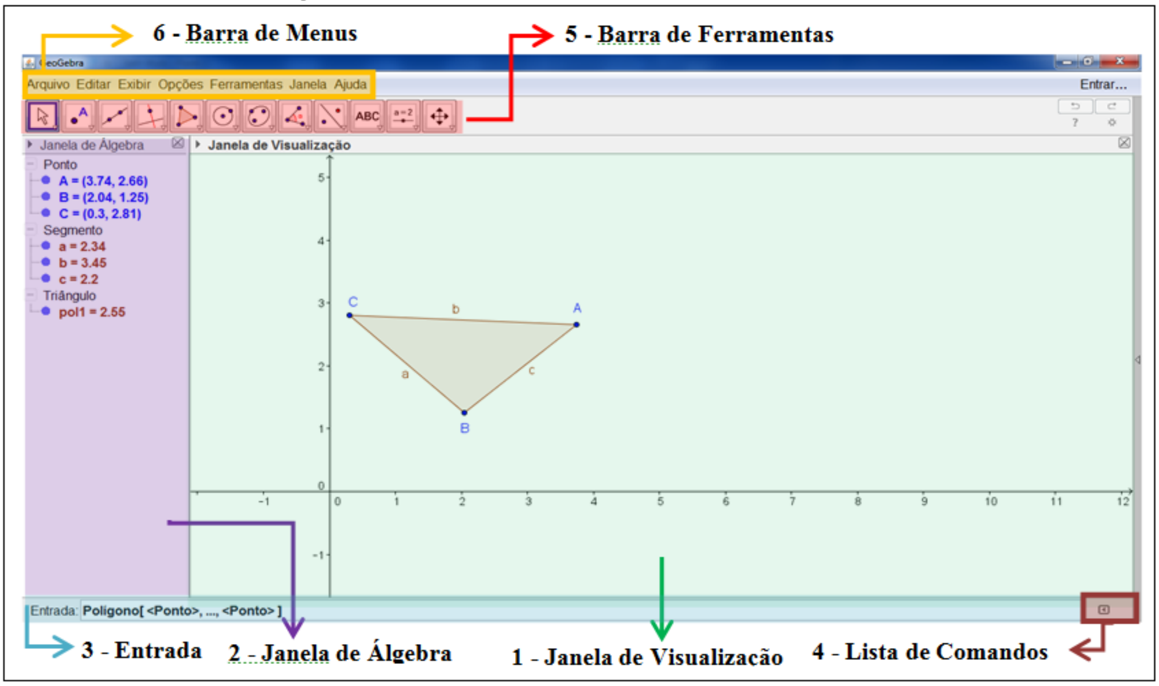
Embora um dos componentes importantes no processo de ensino mediado pela tecnologia, conforme abordamos na proposta metodológica da seção anterior, seja o conhecimento da tecnologia, analisamos que o GeoGebra é um *software* que oferece uma infinidade de possibilidades, permeia diversas áreas de conhecimento e está em processo contínuo de mudanças e aperfeiçoamento, de modo que é impossível que se tenha domínio pleno de seus recursos. Essa característica carrega consigo uma riqueza imensurável, pois a nosso ver, os limites do *software* são determinados pela criatividade daquele que se dispõe a explorá-lo.

Com base nessa vertente buscaremos apresentar algumas informações e conceitos elementares, a título de conhecimento e familiarização com o *software*, entendendo que cada docente tem plenas condições utilizar seus conhecimentos científicos e pedagógicos para explorar as potencialidades oferecidas pelo GeoGebra.

Na Figura 26 podemos observar a interface padrão do GeoGebra, com um exemplo da construção de um polígono. No *layout* destacamos importantes áreas, que delimitam as principais ferramentas de uso do software: a Janela de Visualização, Janela de Álgebra, Entrada, Lista de Comandos, Barra de Ferramentas e Barra de Menus.

[15] Para obter mais informações sobre o *software*, sugerimos o acesso ao site www.geogebra.org.

Figura 26: Interface e Ferramentas do GeoGebra



Fonte: Autor

Na Janela de Visualização são exibidas as construções geométricas, gráficos das funções, planilhas, Figuras, textos, dentre outros. A Janela de Álgebra apresenta informações algébricas ou aritméticas referentes aos objetos apresentados na Janela de Visualização, como por exemplo, as coordenadas dos pontos, medida dos segmentos de reta, área dos polígonos, equações de retas, lei de formação de funções, etc. O campo Entrada é o lugar onde podemos digitar comandos específicos, realizar construções ou modificar objetos já construídos. Na Lista de Comandos pode-se visualizar a forma de executar todos os comandos existentes no *software*. Para realizar determinados tipos de construções, tais como pontos, retas, cônicas, ângulos, polígonos, dentre outros, pode-se optar por utilizar a Barra de Ferramentas, recurso muito utilizado devido a sua natureza simples e também por proporcionar possibilidades de realizar modificações nas construções. A Barra de Menus possuem como características principais itens que agregam funções de formatação, tais como opções de salvamento, copiar e editar para área de transferência, *layouts* de exibição, etc.

Ao apresentar as propostas no capítulo 3, enunciaremos de forma detalhada, todos os passos para a construção das atividades propostas no *software*. Sugerimos ao docente, caso julgue necessário, buscar apoio com o acesso ao site oficial do GeoGebra, onde é possível obter manual de informações, dicas e materiais desenvolvidos por usuários e colaboradores, vídeos e materiais explicativos, dentre outras informações que podem auxiliar na aprendizagem e no aprofundamento do uso do *software*.

CAPÍTULO 3 - ATIVIDADES PROPOSTAS

No presente capítulo apresentamos algumas sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas, articulando os recursos metodológicos tratados nas seções 2.1 e 2.2, utilizando o *software* GeoGebra[16], conforme descrevemos na seção 2.3.

Cada proposta será apresentada em uma seção, contendo várias etapas. Durante ou após a descrição de cada etapa sugerimos possíveis encaminhamentos e abordagens, apresentamos os nossos objetivos, eventuais problemas e/ou dificuldades que poderão surgir. Também apresentamos possíveis soluções para algumas situações propostas, com o intuito de auxiliar na organização da atividade para a aplicação em sala de aula.

Em relação à organização das propostas, procuramos elaborar um padrão para a apresentação das atividades pertencentes a cada etapa. Dentro desse contexto de organização apresentamos alguns tópicos que especificaremos, quanto aos objetivos e funcionalidades.

- **Para Calcular**

Contém atividades que envolvem cálculos matemáticos que deverão ser realizados pelos alunos.

- **Para refletir e discutir**

Apresentamos alguns questionamentos, ora sobre conceitos matemáticos, ora sobre aspectos históricos com o intuito de levar o aluno a reflexão e posterior discussão em grupo. Acreditamos que essa etapa é fundamental para atingirmos os objetivos pedagógicos de nossas propostas. Vinculados aos questionamentos estão os pressupostos metodológicos que discutimos no capítulo 2, os quais norteiam o desenvolvimento da nossa proposta.

- **Discutindo a proposta**

São os momentos do texto que nos dirigimos diretamente ao professor. Aqui apresentamos sugestões, evidenciamos nosso posicionamento acerca das propostas, deixamos dicas quanto à abordagem de conceitos e/ou elementos históricos, possibilidades de aprofundamento e relações existentes entre as atividades e os conceitos abordados nos capítulos 1 e 2.

- **Problema**

De acordo Van de Walle (2001), caracteriza-se por problema qualquer tarefa

[16] As construções propostas no GeoGebra estão descritas de forma detelhada e foram anexados em um CD ao final do trabalho, para auxiliar o docente em caso de dúvidas.

ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Nessa perspectiva, apresentamos algumas situações de contexto social, em forma de problema, propondo ao aluno buscar alternativas para resolvê-lo.

- **Uma possível solução**

Apresentamos ao professor uma forma de resolver uma atividade ou problema proposto. As soluções que apresentamos aqui não são únicas, mas poderão servir como apoio para o docente encaminhar a proposta em sala de aula.

Os encaminhamentos que apresentaremos a seguir devem ser entendidos sempre como sugestões. Acreditamos que cada um poderá contribuir, a partir de seus conhecimentos e experiências, complementando, adaptando ou substituindo elementos, de forma a enriquecer as atividades que propomos. Entendemos que dessa forma, nossas propostas poderão atingir os objetivos educacionais esperados.

3.1 ATIVIDADES SOBRE QUADRILÁTEROS

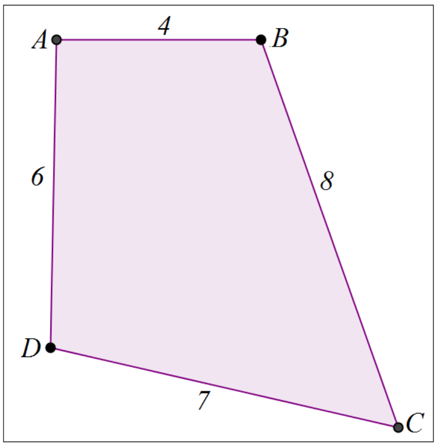
Nas civilizações antigas do Egito e da Mesopotâmia o conceito de áreas era muito utilizado, principalmente para calcular taxas de impostos sobre as terras. Com base na necessidade, os povos desse período desenvolveram técnicas para calcular a área de diversos tipos de regiões. Na sequência exploramos um método utilizado pelos babilônios.

3.1.1 Etapa 1: O cálculo de Área de Quadriláteros nas Civilizações Babilônicas

A área de um quadrilátero era calculada pelos babilônios tomando o produto das médias aritméticas dos pares de lados opostos[17].

[17] Para mais detalhes ler as seções 1.2.1 e 1.2.2

Figura 27: Quadrilátero *ABCD*



Fonte: Autor

Para Calcular

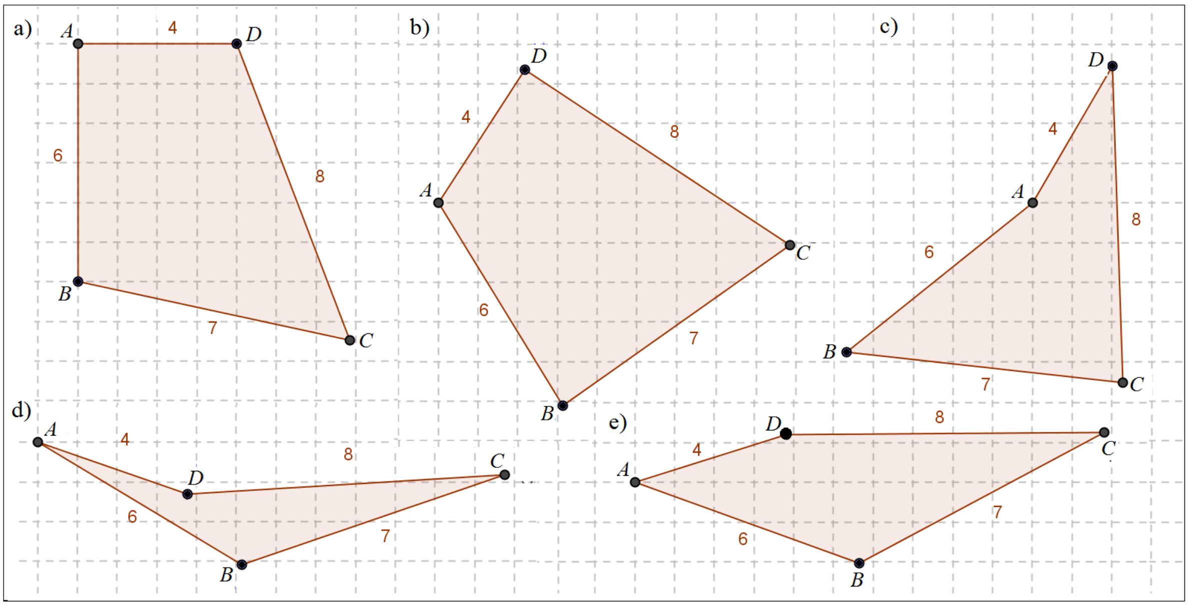
Calcule a área do quadrilátero *ABCD*, representado na Figura 27, com base no método proposto pelos babilônios.

Para refletir e discutir

Você acredita que o método estabelecido pelos babilônios está correto?

Agora vamos analisar a Figura 28 que apresenta diferentes quadriláteros, cujos lados medem $\overline{AB} = 6\,u.c.$, $\overline{BC} = 7\,u.c.$, $\overline{CD} = 8\,u.c.$ e $\overline{AD} = 4\,u.c.$

Figura 28: Quadriláteros na Malha Quadriculada



Fonte: Autor

Para refletir e discutir

a) Suponha que você tenha a opção de escolher um dos terrenos representados na Figura 28. Qual deles você escolheria? Justifique.

b) Faça uma estimativa para a área de cada um dos quadriláteros, considerando que cada quadradinho da malha possui área $1u.a.$

Discutindo a proposta

Antes de iniciar a etapa 1 sugerimos que o professor faça uma contextualização histórica, acerca dos povos do período da antiguidade, evidenciando aspectos culturais e sociais, suas perspectivas e principalmente os aspectos relevantes para o desenvolvimento da Matemática. O docente poderá se apoiar na seção 1.2, nas bibliografias referenciadas ou em outras fontes a sua escolha.

A etapa 1 tem dois objetivos principais. O primeiro objetivo é levar o aluno a perceber que, apenas conhecer as medidas dos lados de um quadrilátero qualquer é insuficiente para calcular a área e o segundo objetivo é conduzi-lo a descobrir que o processo estabelecido pelos povos antigos nem sempre fornece boas aproximações e muitas vezes não é viável utilizá-lo.

Nessa etapa o professor pode, a partir de suas reflexões com os alunos, evidenciar que a Matemática é parte de um processo de construção humana, passível de erros e falhas que foram sendo aperfeiçoadas ao longo do tempo. Acreditamos que, ao apresentar os sucessos e insucessos existentes ao longo da história no desenvolvimento dos conceitos matemáticos, o aluno poderá ser estimulado a se aventurar no estudo da ciência, encarando-a como desafio. Essa abordagem atende os pressupostos metodológicos que discutimos na seção 2.1.

Cabe ainda ressaltar que muitos dos erros e frustrações que ocorreram ao longo da história foram extremamente importantes para o desenvolvimento da Matemática, citamos como exemplo as tentativas frustradas de encontrar solução para os problemas clássicos gregos, que abordamos na seção 1.3.

3.1.2 Etapa 2: Explorando a Atividade no *Software* GeoGebra

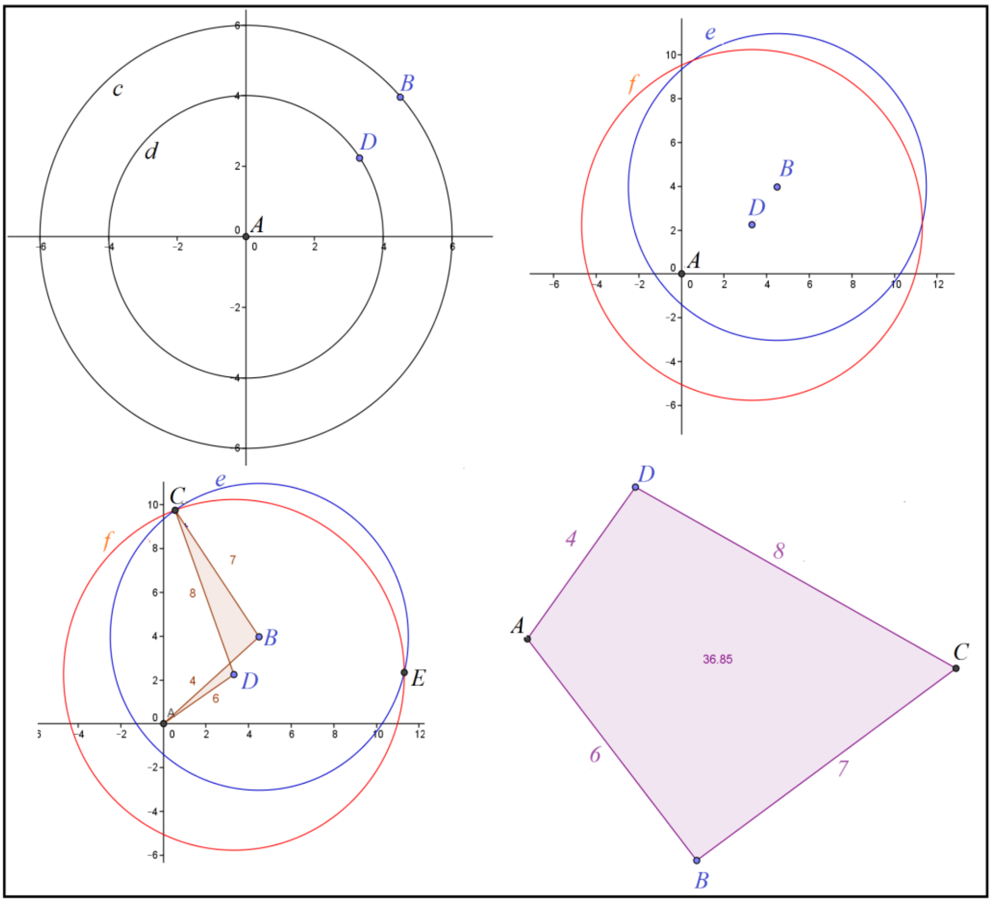
Considerando os quadriláteros ilustrados na Figura 28, que tem como características comuns as dimensões fixas $\overline{AB}=6; \overline{BC}=7; \overline{CD}=8$ e $\overline{DA}=4$, vamos construir e analisar as possibilidades, com a ajuda do *software* GeoGebra. O Quadro 2 apresenta os procedimentos para realizar a construção e a Figura 29 exibe alguns dos passos.

Quadro 2: Construção dos Quadriláteros no GeoGebra

Passos	Ferramenta	Descrição	Observações
1º	Ponto	Marque um ponto **A** em qualquer lugar do plano.	Sugestão: escolha a origem por simplicidade
2º	Circulo dados centro e raio	Marque um circulo com centro em **A** e raio medindo **6**.	Essa construção se deve ao fato de que $\overline{AB} = 6$
3º	Ponto em objeto	Selecione a ferramenta descrita e marque um ponto **B** na circunferência construída.	Note a circunferência construída é o lugar geométrico do ponto **B**.
4º	Circulo dados centro e raio	Marque um circulo com centro em **A** e raio medindo 4.	Essa construção se deve ao fato de que $\overline{AC} = 4$
5º	Ponto em objeto	Selecione a ferramenta descrita e marque um ponto na circunferência construída. Denomine o ponto por **D**.	Note a circunferência construída é o lugar geométrico do ponto **D**.
6º	Janela de Álgebra	Oculte a visualização das duas circunferências construídas.	Sugestão para melhorar a visualização.
7º	Circulo dados centro e raio	Marque um círculo com centro em **B** e raio **7**. Modifique a cor do círculo para azul.	Essa construção se deve ao fato de que $\overline{BC} = 7$
8º	Circulo dados centro e raio	Marque um círculo com centro em **D** e raio **8**. Modifique a cor do círculo para vermelho.	Essa construção se deve ao fato de que $\overline{CD} = 8$
9º	Intersecção de dois objetos	Selecione a ferramenta e clique nos dois círculos (vermelho e azul) para marcar os pontos de intersecção entre eles. Renomeie os pontos, chamando-os de **C** e $\mathbf{C_1}$.	Note que a intersecção das duas circunferências é o lugar geométrico do ponto C. Obtivemos duas soluções para a nossa construção.
10º	Polígono	Selecione a ferramenta e clique nos pontos A, B, C, D e A (nessa ordem) para construir o polígono procurado.	Se preferir poderá construir o polígono ABC_1D, ou poderá construir os dois polígonos.
11º	Janela de Álgebra	Para melhorar a visualização da sua construção, selecione os segmentos de reta que formam o polígono e com o botão direito do mouse selecione a opção propriedades e na opção "básico" mude a opção exibir rótulo para "exibir valor". Você pode fazer o mesmo procedimento para exibir a área do polígono e também ocultar a visualização dos círculos.	Aqui fica livre para realizar as formatações da construção. Deixamos algumas dicas que podem contribuir para a melhor visualização, de acordo com o propósito da atividade.

Fonte: Autor

Figura 29: Passos da Realização da Atividade de Quadriláteros no GeoGebra



Fonte: Autor

Ao realizar a construção no GeoGebra, os pontos *B* e *D* ficam na cor azul, ao passo que os pontos *A* e *C* ficam na cor preta. Isso se deve ao fato de que os pontos *A* e *C* são fixos e os pontos *B* e *D* podem ser mudados de posição, característica do software de geometria dinâmica. Ao movermos os pontos, com ajuda do cursor, perceberemos as diferentes possibilidades para os quadriláteros.

Para refletir e discutir

a) Modificando a posição dos vértices existe algum caso em que a Figura não representa um quadrilátero?

b) Observando a construção determine entre quais valores variam a área dos quadriláteros.

c) O que podemos perceber após a construção dos quadriláteros no GeoGebra em relação ao cálculo realizado na etapa 1?

d) Voltando a analisar o método propostos pelos babilônios, que ponderações podemos fazer?

Discutindo a proposta

Na etapa 2 o aluno poderá visualizar de forma concreta os conceitos estabelecidos na etapa 1. A propriedade dinâmica do *software* permitirá que o aluno analise as variações, verificando as áreas mínimas e máximas possíveis para esses quadriláteros de medidas de lados fixos.

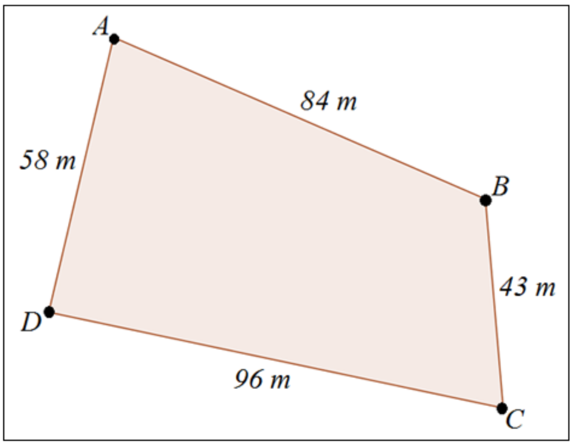
Entendemos que é de extrema importância que o professor tenha pleno domínio do processo de construção no GeoGebra, para que possa conduzir alguns questionamentos durante a realização da atividade, visto que surgirão ao longo da construção diversos conceitos da geometria que poderão ser explorados pelo docente, conforme podemos identificar nas observações do Quadro 2. Como exemplos de conceitos que podem ser trabalhados durante a realização da atividade destacamos aqueles relacionados ao círculo, a circunferência e a lugares geométricos. Para trabalhar tais conceitos sugerimos (DOLCE e POMPEO, 2011; NETO, 2012).

3.1.3 Etapa 3: Estabelecendo uma Estratégia para Calcular a Área de um Quadrilátero Qualquer.

Problema

Alison pretende comprar um sítio. O proprietário do terreno estima que o local tenha aproximadamente meio hectare. Alison está desconfiado da medida e deseja calcular a área da região que tem o formato de um quadrilátero. Com auxilio de uma trena, mediu os quatro lados e representou-os num esboço, Figura 30.

Figura 30: Medidas do Terreno



Fonte: Autor

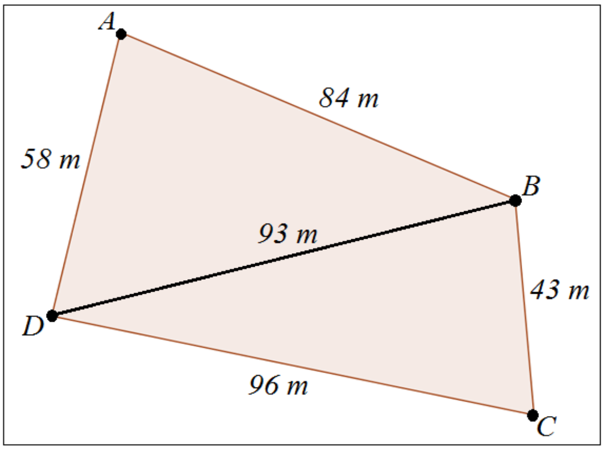
Para refletir e discutir

Já vimos que as medidas realizadas por Alison não bastam para calcular a área do quadrilátero. O que Alison precisa fazer para conseguir calcular a área exata dessa região?

Para Calcular

Alison mediu uma das diagonais do terreno, obtendo a medida de 93 metros, Figura 31. Calcule a área do terreno.

Figura 31: Medida da Diagonal do Terreno



Fonte: Autor

Discutindo a Proposta

O objetivo principal das atividades que propomos é que a discussão entre os grupos estabeleça uma estratégia para calcular a área do quadrilátero. Possivelmente os alunos estabeleçam a estratégia de medir uma das diagonais do terreno para decompor o quadrilátero em dois triângulos, utilizando a Fórmula de Herão[18] para calcular a área. Acreditamos que o papel do professor, como mediador das discussões é fundamental para alcançarmos o objetivo.

Para refletir e discutir

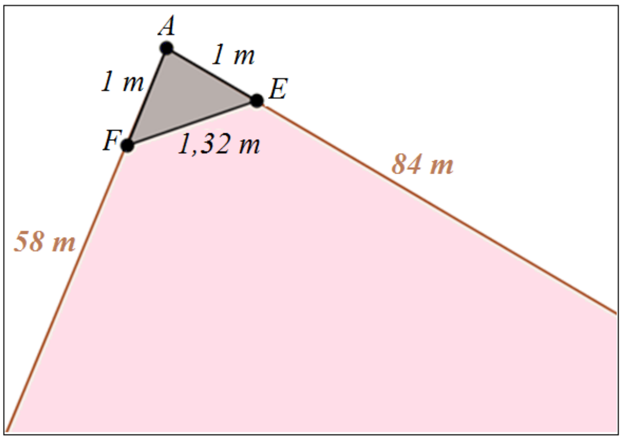
Ainda considerando o problema de Alison, vamos supor que não seja possível medir a diagonal, ou seja, consideremos que na região central do terreno está construída uma casa, que inviabiliza a medição. Dadas tais condições é possível estabelecer uma estratégia para calcular a área da região?

[18] A fórmula de Herão está descrita na seção 1.3.13

Uma possível solução

Uma possível solução para esse problema é que Alison divida o quadrilátero em dois triângulos: T_1 com vértices *A*, *B*, *D* e T_2 com vértices *C*, *B*, *D*, de acordo com a Figura 31. Posteriormente adotar uma medida à escolha (sugerimos a medida de um metro). A partir do vértice *A* marcar a medida escolhida nos dois lados adjacentes, fixando uma estaca para demarcar a região. O resultado é um triângulo isósceles, cuja medida base pode ser determinada com auxílio de uma trena. A Figura 32 representa o processo descrito, onde as estacas estão indicadas pelos pontos *A*, *E* e *F*.

Figura 32: Descobrindo a Medida de um Ângulo no Triângulo T_1



Fonte: Autor

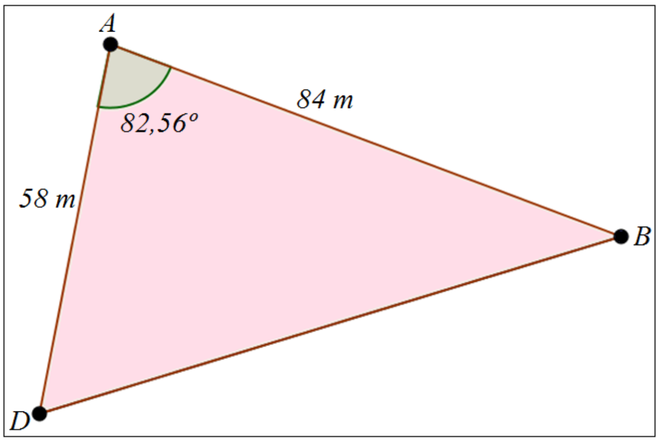
Com base na Figura 32 podemos calcular a área do triângulo *AEF* pela fórmula de Herão, com o auxilio de uma calculadora para facilitar os cálculos. Considerando p o semiperímetro temos que $p = \frac{1+1+1{,}32}{2} = 1{,}66$. A área é dada por $A(AEF) = \sqrt{1{,}66.(1{,}66-1{,}32).(1{,}66-1).(1{,}66-1)} \cong 0{,}4958\,u.a.$

Utilizando a fórmula $A = \frac{1}{2}.b.c.sen\hat{A}$, em que b e c são os lados adjacentes ao ângulo $\hat{A}$, obtemos que $0{,}4958 = \frac{1}{2}.1.1.sen\hat{A}$, logo $.sen\hat{A} = 0{,}9916$. Com o auxílio de uma calculadora determinamos que $\hat{A} \cong 82{,}56^{\circ}$.

Conhecendo agora a medida de um ângulo e dos lados adjacentes, do triângulo T_1, Figura 33, podemos calcular a área $A(T_1)$ por

$$A(T_1) = \frac{1}{2}.84.58.sen(82{,}56^{\circ}) \cong 2415{,}54\,m^2 \qquad (33)$$

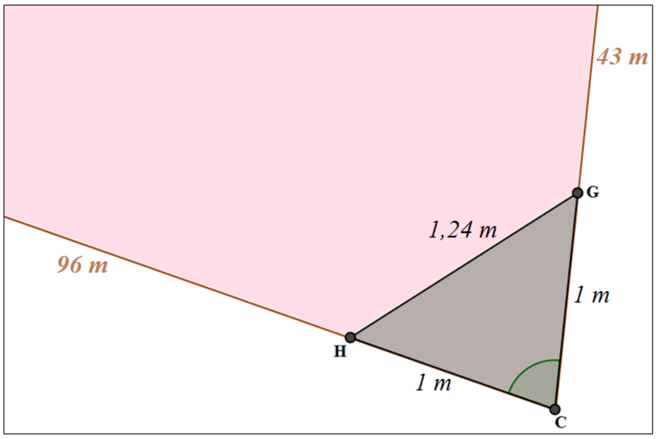
Figura 33: Calculando a Área do Triângulo T_1



Fonte: Autor

Com raciocínio análogo, descobrimos o ângulo oposto a $\hat{A}$, com vértice em *C*, utilizando o triângulo *DGH* da Figura 34.

Figura 34: Descobrindo a Medida de um Ângulo no Triângulo T_2

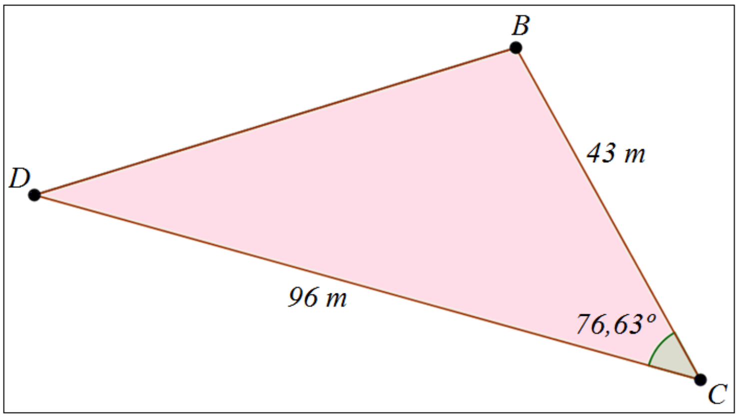


Fonte: Autor

Com base no triângulo *CGH* Figura 34, obtemos a área $A(CGH) \cong 0{,}4864\, u.a.$ e consequentemente o ângulo $\hat{C} \cong 76{,}63^{\circ}$. Com a medida do ângulo obtemos a área do triângulo T_2 , ilustrado na Figura 35, dada por

$$A(T_2) = \frac{1}{2}.43.96.sen(76{,}63^{\circ}) \cong 2009{,}05\, m^2 . \qquad (34)$$

Figura 35: Calculando a Área do Triângulo T_2



Fonte: Autor

De (33) e (34) obtemos a área de quadrilátero (terreno) $A_t \cong 4424{,}58\,m^2$.

Discutindo a proposta

Propomos uma solução alternativa para o problema, pois entendemos que nem sempre é possível determinar a medida da diagonal do quadrilátero. Cabe aqui ressaltar que esse processo pode ser utilizado também quando não for possível determinar a medida de um dos lados do quadrilátero. Sugerimos ao professor que realize uma discussão com os alunos comparando as estratégias estabelecidas para a obtenção da área do quadrilátero.

Para finalizar a atividade o professor poderá propor uma discussão, voltando à etapa inicial do problema e analisar com os alunos quais foram as possíveis barreiras encontradas pelas civilizações antigas ao propor tal método para determinar a área de um quadrilátero qualquer. O professor poderá também analisar com os alunos que, muitos dos conceitos que utilizamos na estratégia que desenvolvemos, foram estabelecidos centenas de anos mais tarde, tais como a trigonometria e a fórmula de Herão, fatos que evidenciam que a Matemática é resultado de um processo gradual, colaborativo, produto de construção humana.

Por fim deixamos a sugestão para a realização de um trabalho interdisciplinar, contemplado as disciplinas de Matemática e História. Esse trabalho poderá colaborar com as análises culturais e históricas dos povos da mesopotâmia, que analisamos como aspectos importantes no processo de ensino mediado pela História da Matemática.

3.2 Determinando a área de uma região circular

Essa proposta tem como objetivo principal, a sistematização do cálculo da área de uma região circular, estabelecendo um significado para a constante irracional π . Para o desenvolvimento dessa atividade partimos da definição que π equivale à área de um círculo de raio unitário, dada na seção 1.3.11.

3.2.1 Etapa 1: O Cálculo da Área do Círculo pelos Egípcios.

Uma das características dos povos do Antigo Egito era a sua religiosidade. Esse fato é evidenciado pelas pinturas e desenhos que realizavam. A Figura 36 representa um símbolo dos egípcios que é denominado por Olho de Hórus, também conhecido por *Udyat*. Segundo a Lenda Hórus é um deus que perdeu o seu olho durante uma batalha, o qual foi substituído por este amuleto. O *Udyat* significava poder e proteção para os egípcios.

Figura 36: O Olho de Hórus

Fonte: Livres Pensadores, 2015

Ao fazer um desenho, geralmente os egípcios utilizavam malhas quadriculadas para assegurar a manutenção da proporção entre o modelo e a Figura que estava reproduzindo. É possível que, a observação da malha quadriculada nos desenhos de formatos circulares pode ter originado a ideia de sobrepor polígonos para calcular a área de uma região circular (GASPAR e MAURO, 2003). Um possível método dos egípcios era utilizar o octógono para calcular a área do círculo, conforme ilustra a Figura 37.

Figura 37: Calculo da Área do Círculo dos Egípcios

Fonte: Livres Pensadores, 2015, adaptado.

Para Calcular[19]

Determine a área do octógono, considerando que a medida da diagonal do círculo é de 2 cm.

Para Refletir e discutir:

a) Na Figura 37 podemos constatar que existem partes do círculo que são exteriores ao polígono, assim como existem partes interiores ao polígono que não pertencem a região circular. Você acredita que a área do polígono e a área do círculo são iguais?

b) Na definição por nós adotada, consideramos que a área de um círculo de raio unitário equivale a π. Se considerarmos a área do círculo equivalente a área do octógono da Figura 37, conforme proposto pelos egípcios, qual será o valor de π?

c) Historiadores relatam que no Egito Antigo não havia a distinção entre áreas exatas e aproximadas. Considerando o contexto do período em que os egípcios viviam, os recursos que possuíam e o fato do desenvolvimento da Matemática essencialmente prática, como você analisa o método e os resultados encontrados pelos Egípcios para o cálculo da área do círculo?

Discutindo a proposta

Ao realizar essa etapa sugerimos que o professor faça um retrospecto histórico acerca das civilizações do Antigo Egito. O docente poderá utilizar elementos abordados na seção 1.2.1, as bibliografias que referenciamos ou outros materiais a sua escolha.

Na etapa 1 o objetivo é apresentar ao aluno a estratégia, que pode ter sido utilizada pelos egípcios para calcular a área da região circular, mas propondo ao aluno que desenvolva o cálculo utilizando seus conhecimentos. A discussão em relação à área calculada ser exata ou apenas uma aproximação para o círculo, poderá dividir opiniões dos alunos. Sugerimos que o professor esteja atento e aproveite as oportunidades de explorar os conceitos decorrentes dessa discussão.

3.2.2 Etapa 2: A Área do Círculo por Arquimedes

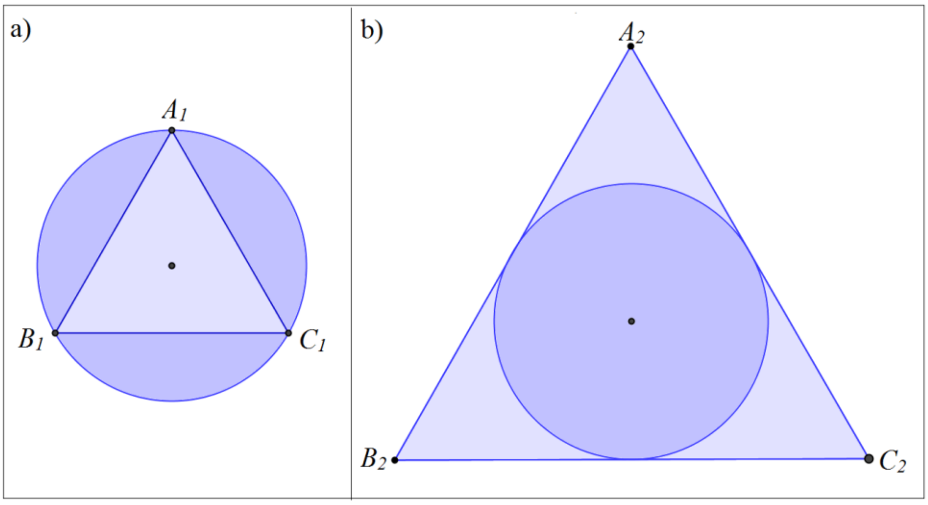
Para dar sequência nos estudos em relação à área de regiões circulares, vamos investigar os processos desenvolvidos pelos gregos. Vários matemáticos gregos viajaram até o Egito e a Mesopotâmia para adquirir conhecimentos e técnicas, que

[19] A resolução da atividade está descrita na seção 1.2.1.

posteriormente, aperfeiçoaram. Vamos agora entender um processo desenvolvido por Eudoxo que é denominado como Método da Exaustão[20].

Inicialmente consideremos um triângulo inscrito e um circunscrito na circunferência de raio unitário, dispostos na Figura 38.

Figura 38: a) Triângulo Equilátero Inscrito na Circunferência e b) Triângulo Equilátero Circunscrito à Circunferência



Fonte: Autor

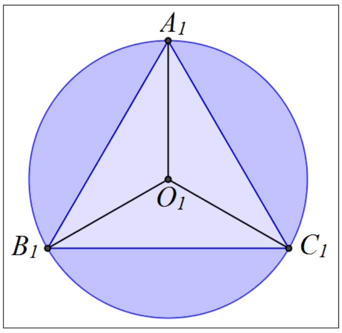
Para Calcular

Determine a área dos triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$

Uma possível solução

Primeiramente vamos dividir o triângulo $A_1B_1C_1$ em três triângulos com um de seus vértices no ponto O_1. Os três triângulos são: $A_1B_1O_1$, $C_1B_1O_1$, $A_1C_1O_1$, conforme observamos na Figura 39.

Figura 39: Determinando a Área do Triângulo Equilátero Inscrito na Circunferência



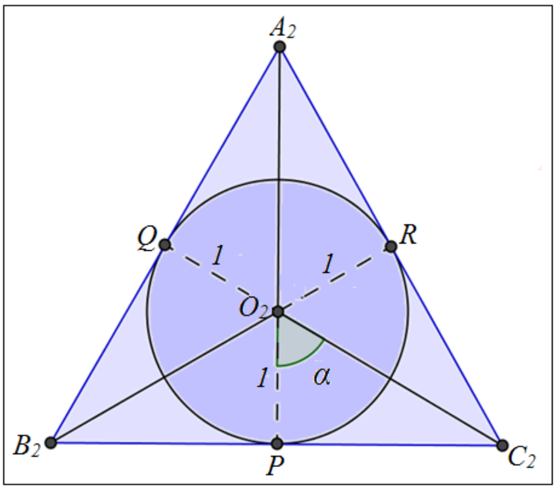
Fonte: Autor

[20] O Método de Exaustão foi enunciado e demonstrado na seção 1.3.7

Os triângulos obtidos na Figura 38 são todos isósceles, pois $\overline{A_1O_1} = \overline{B_1O_1} = \overline{C_1O_1} = 1$. Temos ainda que $A_1\hat{O}_1C_1 = B_1\hat{O}_1C_1 = A_1\hat{O}_1B_1 = 120^\circ$. Podemos concluir que os três triângulos são congruentes pelo caso LAL. Como consequência da congruência, segue que os triângulos tem a mesma área, logo temos que: $A(A_1B_1C_1) = 3.\left[\frac{1}{2}.1.1.sen(120^\circ)\right]$, logo $A(A_1B_1C_1) \cong 1{,}2990$.

Agora vamos calcular a área do triângulo $A_2B_2C_2$, para isto, dividimos o triângulo da Figura 38b, conforme mostra a Figura 40.

Figura 40: Determinando a Área do Triângulo Equilátero Circunscrito à Circunferência



Fonte: Autor

No triângulo equilátero[21], temos que o incentro, circuncentro e ortocentro coincidem num único ponto, no triângulo $A_2B_2C_2$ este ponto é O_2. Sendo O_2 circuncentro, segue que $\overline{O_2C_2} \equiv \overline{O_2B_2}$ e o triângulo $O_2B_2C_2$ é isósceles de base $\overline{B_2C_2}$ e altura $\overline{O_2P} = 1$. Por outro lado temos que o ângulo central $A_2\hat{O}_2C_2 = \frac{360º}{3} = 120^\circ$ e do fato de $O_2B_2C_2$ ser isósceles, O_2P é altura e bissetriz do triângulo, logo $P\hat{O}_2C_2 = \alpha = 60^\circ$.

Consideremos ainda que os triângulos $A_2O_2C_2$, $B_2O_2C_2$ e $A_2O_2B_2$ são congruentes pelo caso LAL ou LLL[22].

Utilizando os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo O_2C_2P,

[21] Sobre as propriedades do triângulo equilátero e pontos notáveis do triângulo, sugerimos (DOLCE e POMPEO, 2011, NETO, 2012).

[22] Caso de Congruência LLL: "Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes" (DOLCE e POMPEO, 2011, p. 42).

Figura 40, obtemos que $tg(60º) = \frac{\overline{PC_2}}{1}$ e $\overline{B_2C_2} = 2.tg(60º) \cong 3{,}4641$. Calculando a área do triângulo $A_2B_2C_2$, obtemos $A(A_2B_2C_2) = A(B_2O_2C_2).3 = \left[\frac{\overline{B_2C_2}\ .\ \overline{O_2P}}{2}\right].3 \cong 5{,}1961$.

Para calcular

Com base nos cálculos efetuados para a área dos triângulos inscrito e circunscrito ao círculo, determine uma fórmula para calcular a área de um polígono regular de *n* lados, inscrito na circunferência e uma fórmula para a área de um polígono regular de *n* lados, circunscrito à circunferência.

Uma Possível solução

Definindo A_i como sendo a área de um polígono regular de *n* lados inscrito na circunferência de raio *r* e A_c a área de um polígono regular de *n* lados circunscrito à mesma circunferência, obtemos $A_i = \frac{1}{2}.n.r^2.sen\left(\frac{360º}{n}\right)$ e $A_c = n.r^2.tg\left(\frac{180º}{n}\right)$. No caso particular em que *r* = 1, temos que $A_i = \frac{1}{2}.n..sen\left(\frac{360º}{n}\right)$ e $A_c = n.tg\left(\frac{180º}{n}\right)$. Para determinar tais resultados basta proceder com raciocínio análogo ao que realizamos para calcular a área dos triângulos $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_2$, Figuras 39 e 40.

Para Calcular

Com base nas generalizações para a área dos polígonos inscrito e circunscrito à circunferência, com auxílio de uma calculadora e das informações dispostas no Quadro 3, complete o Quadro 4.

Quadro 3: Informações Trigonométricas

α	$sen(\alpha)$		α	$tg(\alpha)$
15°	0,2588		$7{,}5^\circ$	0,1316
$7{,}5^\circ$	0,1305		$3{,}75^\circ$	0,0655
$3{,}75^\circ$	0,0327		$1{,}875^\circ$	0,0327

Fonte: O autor

Quadro 4: Aproximação da Área do Círculo pelo Método de Arquimedes

Número de lados do polígono	Área do polígono inscrito na circunferência	Área do polígono circunscrito à circunferência	Região que compreende a Área do círculo de raio unitário
3	1,2990 *u.a.*	5,1961 *u.a.*	$1{,}2990 < \pi < 5{,}1961$
6			
12			
24			
48			
96			
n			

Fonte: Autor

Discutindo a proposta

O objetivo principal da atividade é levar o aluno a conhecer de forma intuitiva o Método de Exaustão, compreender o significado da constante irracional π, percebendo que, por meio do Método de Exaustão, só podemos calcular a área de um círculo de forma aproximada e que, à medida que aumentamos o número de lados do polígono que estamos utilizando para exaurir o círculo[23], o valor encontrado se aproxima cada vez mais da área do círculo.

Para refletir e discutir

Com base nas atividades realizadas nas etapas 1 e 2, como podemos estabelecer uma fórmula para calcular a área de um círculo de raio r?

Possível solução

Consideremos inicialmente um círculo c_1 de raio unitário. Com base na definição adotada $A(c_1) = \pi$. Seja ainda um círculo c_2 de raio r área $A(c_2)$. Admitindo que a área de dois círculos estão entre si como o quadrado de seus diâmetros[24], temos

$$\frac{A(c_1)}{A(c_2)} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{\pi}{A(c_2)} = \left(\frac{2}{2r}\right)^2 \Rightarrow A(c_2) = \pi r^2$$

[23] Exaurir o círculo significa calcular a área aproximada do círculo utilizando o Método de Exaustão.
[24] A proposição foi enunciada e demonstrada na seção 1.3.7.

3.2.3 Etapa 3: Explorando a Atividade no GeoGebra

Vamos desenvolver os processos que realizamos nas etapas 1 e 2, utilizando o recurso do *software*, que nos permitirá a obtenção de aproximações ainda maiores do que aquelas que obtivemos. A seguir descrevemos cada passo da atividade, ilustrado no Quadro 5.

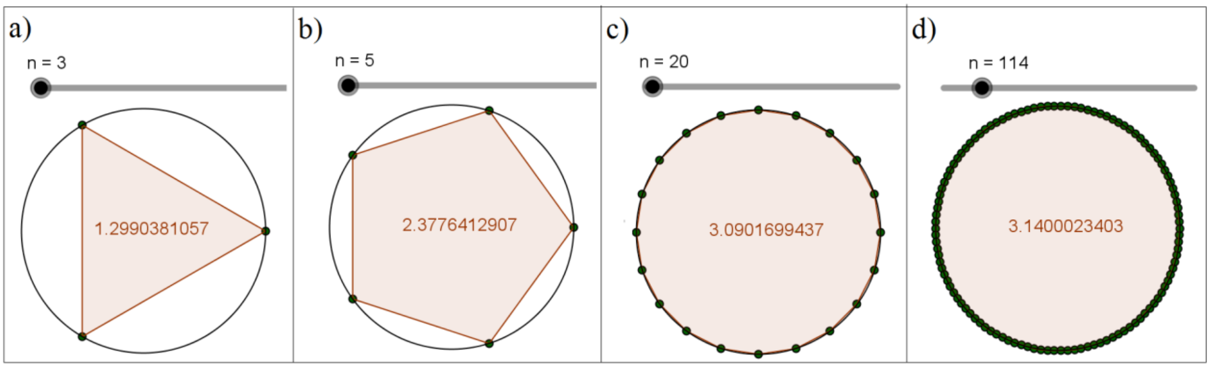
Quadro 5: Explorando a Atividade no GeoGebra

Passos	Ferramenta	Descrição	Observações
1º	a = 2 Controle deslizante	Construir um controle deslizante r, variação de 1 a 10 e incremento 0,1.	O controle deslizante será a medida do raio do círculo.
2º	a = 2 Controle deslizante	Construir um controle deslizante n, com variação de 3 a 720 e incremento 1.	Esse controle deslizante determinará o número de lados do polígono que vamos inscrever no círculo.
3º	Circulo dados centro e raio	Construir um círculo, utilizando a ferramenta “circulo dados centro e raio”. Com centro na origem e raio r	A medida do raio estará condicionada ao controle deslizante r.
4º	Entrada:	Digitar na Entrada o comando: **Sequência[Girar[(r,0), i*2pi/n], i, 1, n]** .	Essa ferramenta fará a inserção de uma sequência de pontos na circunferência.
5º	Entrada:	Digite o comando “**Polígono[lista1]**” na caixa de Entrada	Esse comando fará a inserção do polígono de n lados, inscrito na circunferência.
6º	Janela de Álgebra	Para melhorar a visualização da sua construção oculte a visualização dos eixos cartesianos, selecione o polígono e com o botão direito do mouse clique na opção propriedades e na opção “básico” mude a opção exibir rótulo para “exibir valor”.	Sugestões para melhorar a visualização da construção.

Fonte: Autor

Ao término da construção podemos alterar o valor de *n* para constatar o que ocorre com a área do polígono inscrito na circunferência. Também podemos clicar com o botão auxiliar sobre o controle deslizante *n* e acionar a opção animar, desta forma o valor irá variar gradativamente, enquanto observamos a área do polígono variar. Pode-se também observar a área de círculos de raios não unitários, para isso basta mudar o valor do controle deslizante *r*. A Figura 41 ilustra a construção realizada no GeoGebra.

Figura 41: Polígonos Inscritos na Circunferência - GeoGebra: a) n=3, b) n=5, c) n=20 e d) n=114



Fonte: Autor

Discutindo a Proposta

Ao explorar a atividade no GeoGebra, os alunos perceberão algumas vantagens, como por exemplo, a facilidade, simplicidade e rapidez na obtenção dos resultados. Outro fator que traz benefícios é a visualização dinâmica, que provavelmente contribuirá com a compreensão dos conceitos mais abstratos que envolvem a proposta.

Sugerimos o trabalho com o *software* na última etapa, após o processo algébrico, para evitar que o aluno se sinta desmotivado a desenvolver os cálculos. Nesse aspecto entendemos que a tecnologia não deve substituir o nosso trabalho, ao contrário, entendemos que o GeoGebra pode ser uma ferramenta eficaz, auxiliando-nos a alcançar nossos objetivos, no âmbito do processo de pedagógico. Essa perspectiva de trabalho está em consonância com os elementos discutidos na seção 2.3.

Também deixamos como sugestão a possibilidade de trabalhar de forma interdisciplinar, em conjunto com os professores de História e Arte, visto que o trabalho envolvendo o *Udyat* nos permite explorar diversos conceitos culturais, artísticos, questões relacionadas a religiosidade, mitos e crenças dos povos egípcios.

3.3 Calculando a Área da Cobertura de uma Quadra Poliesportiva

Problema

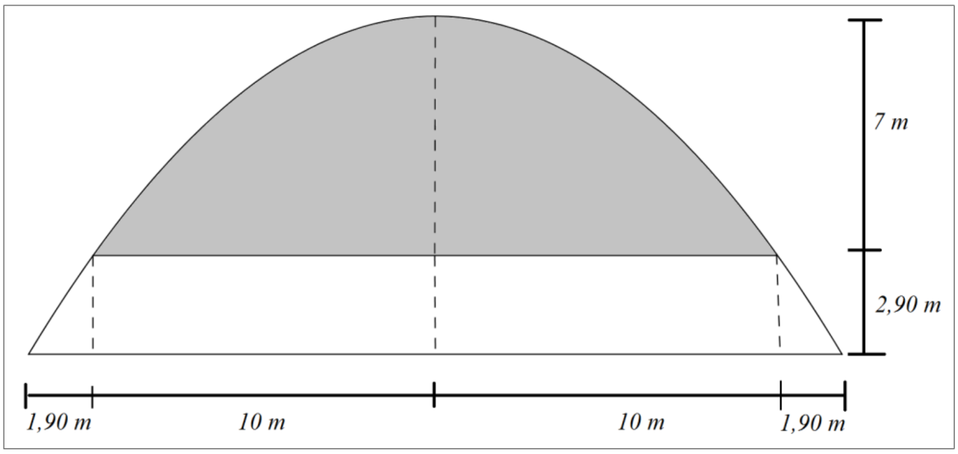
Fernando é pintor e cobra por cada m^2 de pintura realizada, o valor de R$ 14,00. Ao ser solicitado para fazer o orçamento para a pintura da cobertura de uma quadra poliesportiva, Fernando não conseguiu calcular o valor exato que deveria cobrar pelo serviço, obviamente o pintor fez um cálculo aproximado para o orçamento. Porém Fernando ficou curioso em saber qual seria o preço correto a ser cobrado. Vamos ajudar o pintor a calcular a área dessa região!

Figura 42: Quadra Poliesportiva

Fonte: FNDE, 2015

A Figura 42 apresenta a cobertura da quadra que Fernando pintou e a Figura 43 apresenta um esboço com as medidas que ele fez no momento do orçamento[25].

Figura 43: Esboço da Cobertura – Parte Frontal



Fonte: Autor

Para refletir e discutir

a) Qual é o formato da parte frontal da cobertura da quadra poliesportiva?

b) Será que o método de exaustão pode ajudar no cálculo da região frontal da quadra (Figura 43)?

c) Conseguiremos cobrir a região que pretendemos calcular a área com polígonos regulares?

d) Faça uma estimativa para a área dessa região.

Discutindo a proposta

Com o questionamento a) esperamos que os alunos formulem suas

---

[25] As medidas dispostas na Figura 43 foram retiradas do projeto padrão para coberturas de quadras poliesportivas, do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Realizamos aproximações dos valores dispostos no projeto para adequar ao nosso problema. O projeto arquitetônico completo está disponível em: http://www.fnde.gov.br/arquivos/category/45-projetos-arquitetonicos.

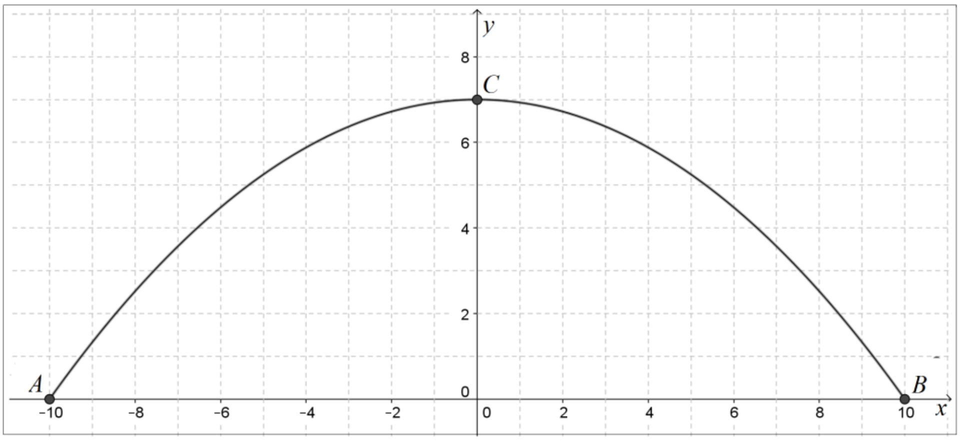
conjecturas acerca da curva, percebendo que ela aparenta ser uma parábola. Em relação aos questionamentos b) e c) pretendemos direcionar o aluno a perceber que a aproximação da área de uma região curva por polígonos nem sempre é tarefa fácil, dependendo da curva que estamos trabalhando, porém nesse momento o professor poderá fazer uma retrospectiva histórica com os alunos acerca do estudo de diversos matemáticos como Fermat, Cavalieri, Pascal e Riemann, que tomaram como base os estudos desenvolvidos por Arquimedes e Eudoxo e aperfeiçoaram para sistematizar o cálculo de áreas de regiões curvas[26].

O item d) deve ser discutido entre os alunos, de forma que eles procurem uma estratégia para estimar a área. A estimativa pode ser muito útil em determinada situação cotidiana, pois nem sempre dispomos de condições, materiais ou tempo adequado para calcular a área de uma região, porém podemos encontrar um valor altamente satisfatório (dependendo da necessidade) se desenvolvermos técnicas para estimar resultados.

3.3.1 Etapa 1: Determinando a Área da Região Frontal

Inicialmente vamos supor que a curva é uma parábola. Para facilitar a compreensão do problema sugerimos a representação da curva no eixo cartesiano, conforme ilustramos na Figura 44.

Figura 44: Curva no Plano Cartesiano



Fonte: Autor

Uma possível solução

Para encontrar a lei de associação que determina a parábola podemos substituir os três pontos que conhecemos na sua forma genérica $f(x) = ax^2 + bx + c$.

[26] Conceitos abordados na seção 1.4

Para o ponto $C\left(0{,}7\right)$ temos que $7 = a.0^2 + b.0 + c$, logo:

$$7 = c. \tag{35}$$

Para o ponto $A\left(-10{,}0\right)$ temos que $0 = a.(-10)^2 + b.(-10) + c$, segue que

$$0 = 100a - 10b + c. \tag{36}$$

Substituindo (35) em (36) obtemos:

$$0 = 100a - 10b + 7. \tag{37}$$

Analogamente, a partir do ponto $B\left(10{,}0\right)$ e substituindo (36) obtemos:

$$0 = 100a + 10b + 7. \tag{38}$$

Igualando as equações (37) e (38) temos que $100a - 10b + 7 = 100a + 10b + 7$ e segue que $b = 0$ e $a = \dfrac{-7}{100}$.

A função que representa a curva é definida por $f : \left[-10{,}10\right] \rightarrow R$, sendo, $f(x) = -0{,}07x^2 + 7$.

Riemann, partindo da ideia presente no método de exaustão, estabeleceu um procedimento padrão para determinar a área de qualquer região curva, utilizando apenas retângulos e aumentando indefinidamente a quantidade dos retângulos é possível estabelecer uma área tão próxima quanto se queira. Vamos entender a proposta desse matemático[27].

Para Calcular

Determine a área de cada um dos retângulos *ABCD*, *EFGH* e *IJKL*, ilustrados na Figura 45a, 45b, 45c, respectivamente.

Para discutir e refletir

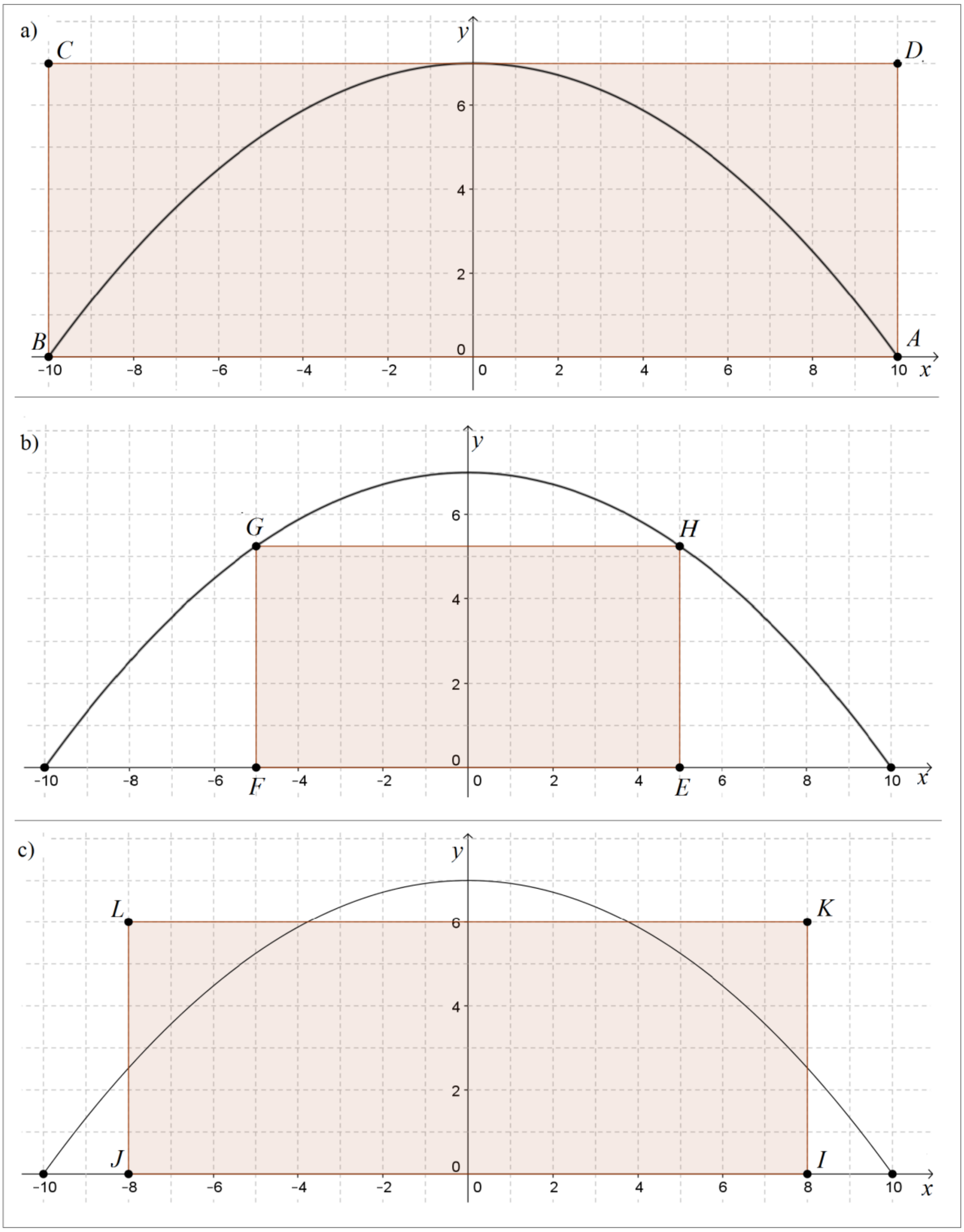
Em sua opinião em qual dos três retângulos, da Figura 45, apresenta uma área mais próxima da região limitada pela curva?

Discutindo a proposta

Ao calcular a área dos retângulos o professor poderá conduzir uma discussão entre os alunos sobre as possíveis estratégias. Talvez, nessa etapa, o aluno apresente dificuldade em descobrir a altura do retângulo.

[27] Os conceitos referentes a Integral de Riemann foram tratados na seção 1.4.4

Figura 45: Aproximando a Área por Retângulos: a) Retângulo *ABCD*, b) Retângulo *EFGH* e c) Retângulo *IJKL*

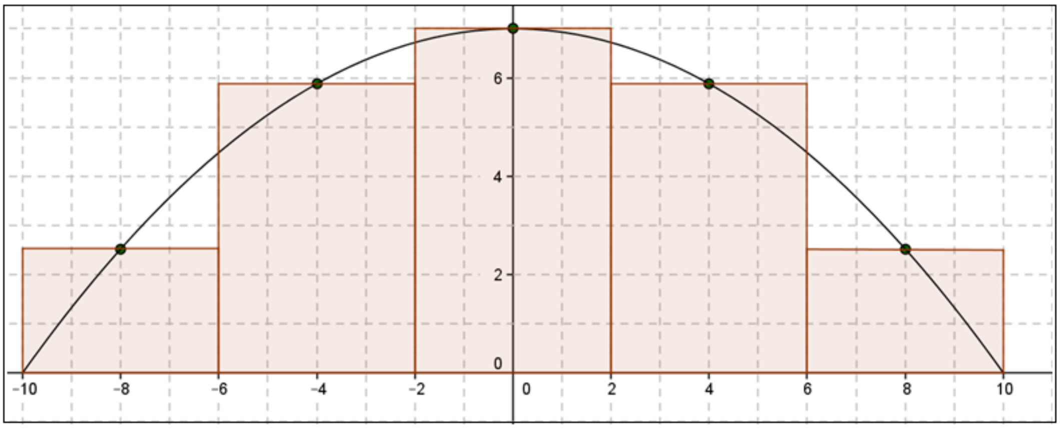


Fonte: Autor

Para calcular

Determine a área ocupada pelos retângulos da Figura 46.

Figura 46: Cálculo da Área – Aproximação por Retângulos

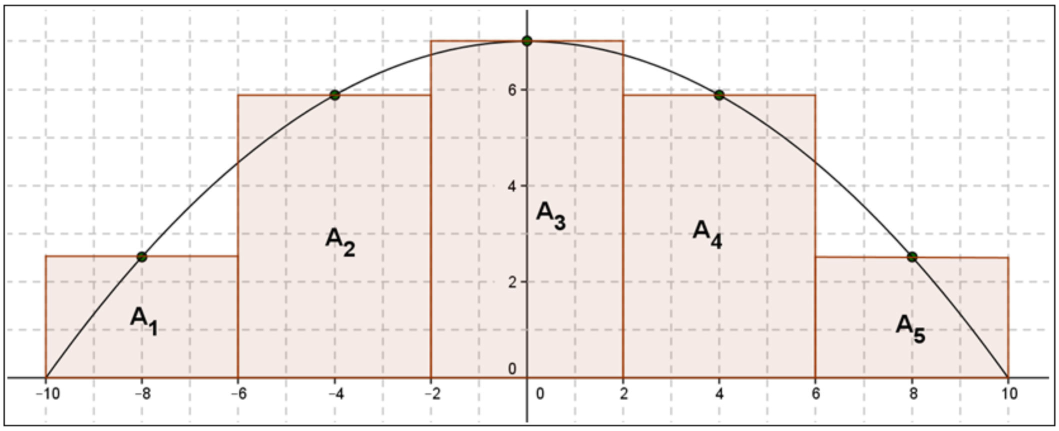


Fonte: Autor

Uma possível solução

Nomeamos cada um dos retângulos, conforme ilustra a Figura 47.

Figura 47: Calculando a Área dos Retângulos



Fonte: Autor

Com base na Figura 47, definimos que a área total da região ocupada pelos retângulos é dada por:

$$A_{total} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 , \tag{39}$$

onde, podemos representar, respectivamente, a área de cada retângulo por

$$A_1 = 4.f(-8); A_2 = 4.f(-4); \ A_3 = 4.f(0); \ A_4 = 4.f(4) \text{ e } A_5 = 4.f(8) \ . \tag{40}$$

De (39) e (40) segue que

$$A_{total} = 4.\left[f(-8) + f(-4) + f(0) + f(4) + f(8)\right]. \tag{41}$$

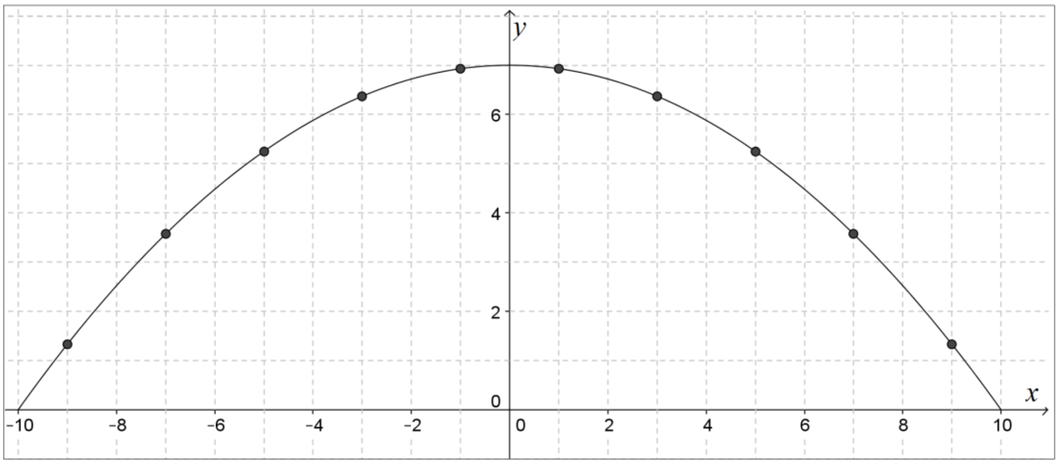
Considerando que $f(-8) = f(8)$ e $f(-4) = f(4)$, segue de (41) que $A_{total} = 4.[2.f(8) + 2.f(4) + f(0)]$. Calculando, obtemos $f(0) = 7$, $f(4) = 5{,}88$ e $f(8) = 2{,}52$. Portanto chegamos à conclusão que $A_{total} \cong 95{,}2\,ua$.

Para calcular

Utilizando o processo proposto nas questões anteriores, com auxílio de uma régua e calculadora, represente 10 retângulos na região de parábola da Figura 48 e depois calcule a área que esses retângulos ocupam.

Dica: Você poderá utilizar o Quadro 6 para organizar suas ideias

Figura 48: Construção dos Retângulos de Riemann



Fonte: Autor

Quadro 6: Área dos Retângulos

Retângulo	**Medida da Base (b)**	**Medida da altura f(i)**	**Área do retângulo A_i=b. f(i)**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Fonte: Autor

Para refletir e discutir

a) O que você observou em relação à área dos retângulos e da região limitada pela curva, à medida que fomos aumentando a quantidade de retângulos?

b) Quais foram os problemas e as dificuldades que você encontrou durante a realização dessa atividade?

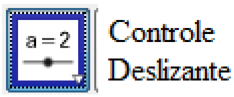
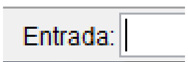
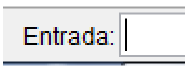
Discutindo a proposta

Ao término da etapa esperamos que os alunos consigam compreender intuitivamente os conceitos da *Soma de Riemann*[28], visto que esse é o objetivo principal da realização das atividades. Possivelmente os alunos apontarão que a realização da atividade demanda muito trabalho, o que é comum e nesse momento o professor poderá mediar a próxima etapa do trabalho, que será a realização da atividade por meio do *software* GeoGebra.

3.3.2 Etapa 2: Explorando a Atividade no GeoGebra

Para realizar a construção no *software* deixamos todos os passos indicados e comentados no Quadro 7.

Quadro 7: A Soma de Riemann no GeoGebra

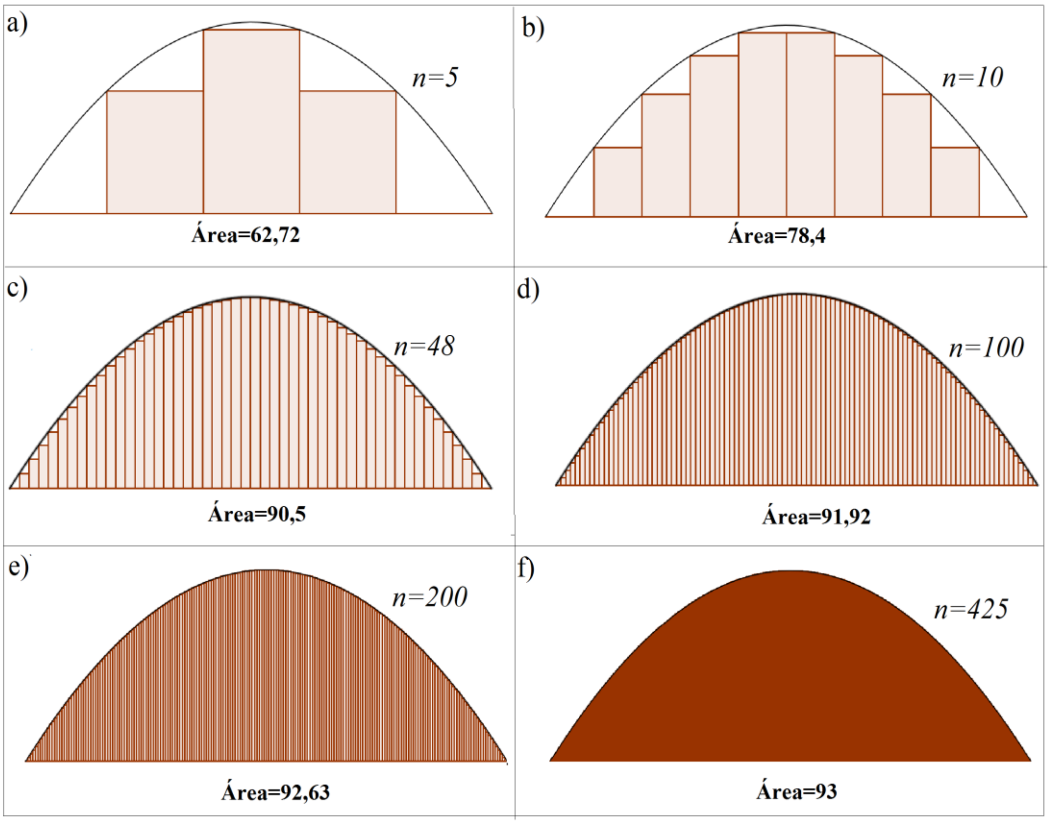
Passos	**Ferramenta**	**Descrição**	**Observações**
1º		Crie um controle deslizante **n** com variação de 0 a 500 e incremento 1. Na opção velocidade ajuste para 0.3	O controle deslizante representará a quantidade de retângulos que será inserido na parábola.
2º		No campo "Entrada" digite a expressão: **Função[-0.07*x^2+7, -10, 10]**	Digitamos a função que representa a parábola e limitamos o seu domínio entre -10 e 10.
3º		Digite no campo entrada a expressão: **SomaDeRiemannInferior[f, -10, 10, n]**	Esse comando realiza a inserção dos retângulos de Riemann na função f, no intervalo de -10 a 10 e o **n** representa a quantidade de retângulos.

Fonte: Autor

Após realizar a construção podemos movimentar manualmente o controle deslizante para observar o que ocorre com a Figura. Podemos também animar o controle deslizante e fazer com que o aumento da quantidade de retângulos seja automático. A Figura 49 ilustra a construção no software.

[28] A soma de Riemann foi abordada na seção 1.4.4

Figura 49: A Soma de Riemann no GeoGebra: a) n=5, b) n=10, c) n=48, d) n=100, e) n=200 e f) n=425



Fonte: Autor

Discutindo a proposta

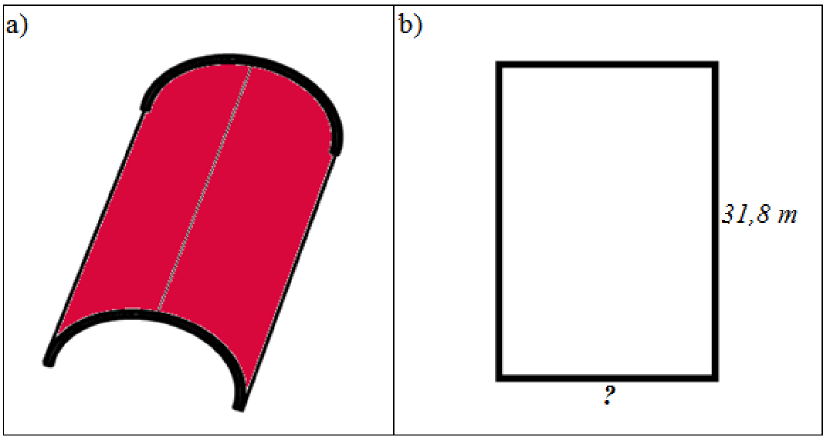
Observando as Figuras 49e e 49f, onde $n = 200$ e $n = 425$, respectivamente, percebemos pouca variação entre as áreas. O processo que realizamos, com base na Figura 46, é diferente do utilizado pelo *software*, visto que no GeoGebra utilizamos a ferramenta “soma inferior” e neste caso os retângulos ficam inteiramente contidos na região da curva, ao passo que nos cálculos realizados na seção 3.3.1, utilizamos como altura de cada retângulo a imagem do ponto médio da base. Neste caso, o valor obtido é mais próximo da área da região curva, pois existe uma compensação entre excessos e faltas, como pode ser observado na Figura 47. Percebemos este fato comparando os resultados entre as duas seções. Por exemplo, para $n = 5$, obtivemos a área de *95,2 u.a.* usando os cálculos apresentados em 3.3.1 e usando o GeoGebra a área foi de *62,72 u.a.*

Sugerimos que o professor realize a discussão com os alunos sobre qual valor deve ser utilizado como área. Parece bem coerente utilizar $93m^2$, pois já consideramos uma grande quantidade de retângulos, $n = 425$. Ao término dessa etapa devemos iniciar o cálculo da parte superior da cobertura.

3.3.3 Etapa 3: Cálculo da Parte Superior da Cobertura

Com base na planta da quadra Fernando fez um esboço da parte superior da cobertura, Figura 50a. Fernando sabe que o formato é um retângulo, Figura 50b, porém desconhece a medida da largura desse retângulo, visto que equivale ao contorno da parábola.

Figura 50: a) Esboço da Parte Superior da Cobertura e b) Representação Retangular

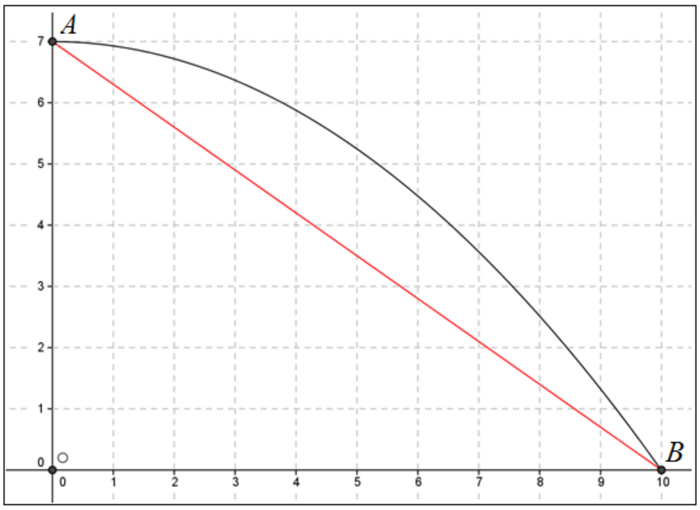


Fonte: Autor

Podemos calcular o comprimento aproximado da curva, utilizando segmentos de reta. Para simplificar consideremos apenas a parte da parábola que tem domínio positivo, considerando sua propriedade simétrica.

Vamos marcar o segmento de reta com extremidades nos pontos *A* e *B*, conforme apresenta a Figura 51.

Figura 51: Aproximando a Curva Utilizando Um Segmento de Reta



Fonte: Autor

Para calcular

Determine a distância entre os pontos *A* e *B*, isto é, o comprimento do segmento $\overline{AB}$, Figura 51.

Uma Possível solução

Podemos aplicar o Teorema de Pitágoras[29], no triângulo *AOB*, retângulo em *O*, cujos catetos medem $\overline{AO} = 7$ e $\overline{OB} = 10$. Segue que $\left(\overline{AB}\right)^2 = \left(\overline{AO}\right)^2 + \left(\overline{OB}\right)^2$, substituindo os valores encontramos $\overline{AB} = \sqrt{149} \cong 12{,}21$.

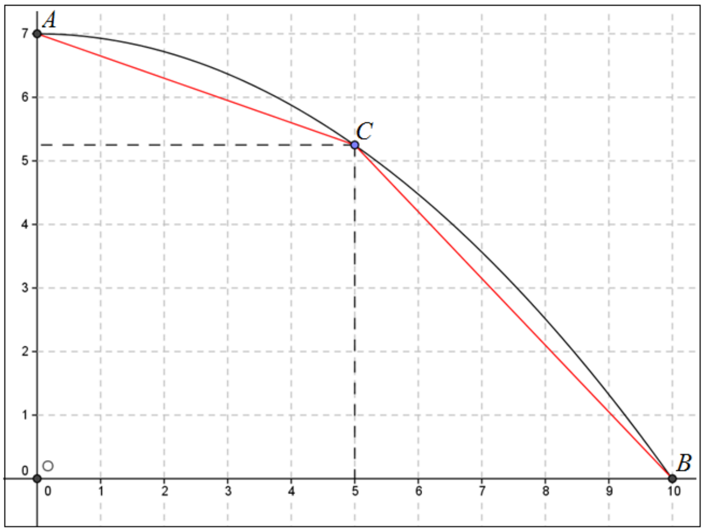
Para refletir e Discutir

Você acha que é conveniente tomar o segmento $\overline{AB}$ como medida aproximada do comprimento da curva?

Para calcular

Agora, considerando a Figura 52, determine a medida de $\overline{AC} + \overline{CB}$.

Figura 52: Aproximando a Curva Utilizando Dois Segmentos de Reta



Fonte: Autor

Discutindo a Proposta

Para calcular a medida dos dois segmentos propostos os alunos poderão novamente utilizar o Teorema de Pitágoras, ou aplicar diretamente a fórmula da distância entre pontos no plano cartesiano, que é decorrente do próprio Teorema de Pitágoras. Sugerimos que, mesmo que os alunos optem por trabalhar com o Teorema de Pitágoras, o

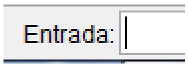
[29] Os conceitos referentes a Pitágoras e ao Teorema estão enunciados nas seções 1.3.2 e 1.3.3

professor aborde esse conceito após os cálculos, como uma alternativa, visando a sequência dessa atividade.

Acreditamos ser fundamental que o aluno perceba nessa etapa da atividade que, à medida que aumentamos a quantidade de segmentos, a soma desses segmentos nos dará uma aproximação cada vez maior para o comprimento da curva. Por outro lado, precisamos utilizar uma ferramenta que facilite a realização do processo, pois quanto mais segmentos inserirmos, maior será o número de cálculos. Com base nesse fato vamos propor a próxima etapa por meio do *software*.

3.3.4 Etapa 4: Explorando a Atividade no GeoGebra

Quadro 8: Planilha no *Software* GeoGebra

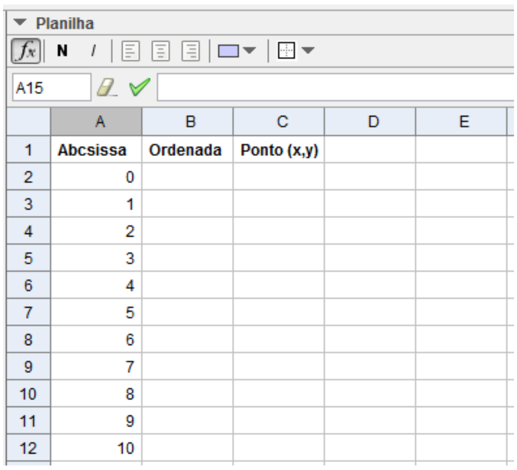
Passos	Ferramenta	Descrição	Observações
1º		Digite na entrada o comando **Função[-0.07*x^2+7, 0, 10]**	Será construído apenas a parte da parábola que tem domínio não negativo.
2º		Na Barra de Menus selecione a opção “exibir” e em seguida a opção “planilha”.	A planilha aparece no canto direito da janela de visualização. Você pode ajustá-la aumentando ou diminuindo a área de visualização, arrastando-a com o cursor.

Fonte: Autor

Sendo o 1º Passo e o 2º Passo apresentados no Quadro 8, estabelecemos agora os próximos passos para elaborar uma planilha que nos auxilie no processo de efetuar os cálculos.

3º Passo: Na primeira coluna colocaremos o valor das abcissas, na segunda o valor das ordenadas e na terceira representaremos os pontos, conforme observamos na Figura 53.

Figura 53: Construção da Planilha no GeoGebra

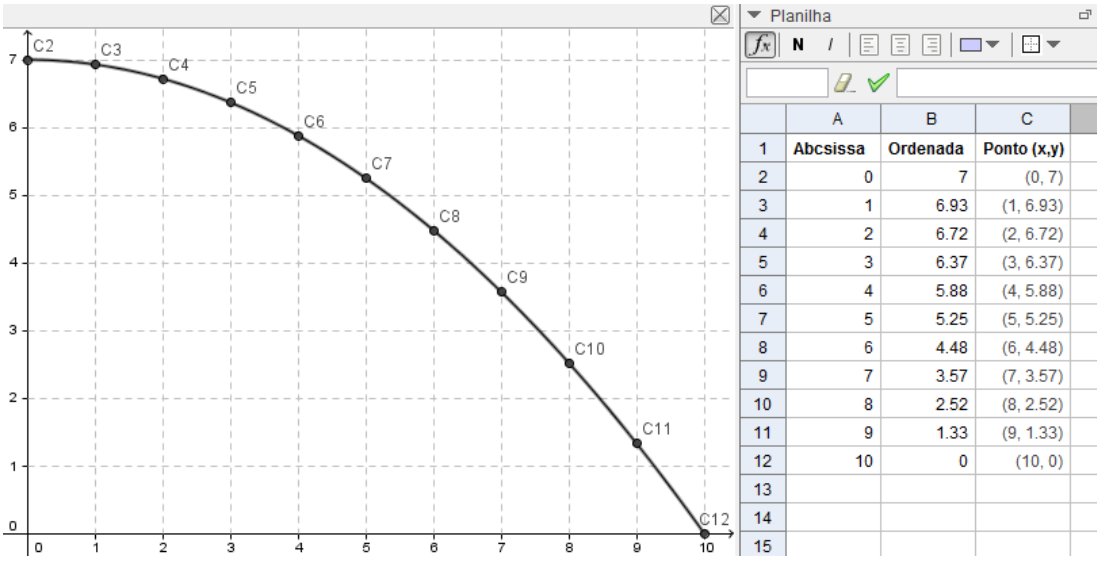


	A	B	C	D	E
1	Abcsissa	Ordenada	Ponto (x,y)		
2	0				
3	1				
4	2				
5	3				
6	4				
7	5				
8	6				
9	7				
10	8				
11	9				
12	10				

Fonte: Autor

Após digitar os valores de 0 a 10 para as abcissas, digitaremos na célula B2 a fórmula “=f(A2)” e em seguida, utilizando o cursor, estendemos a fórmula para as demais células dessa coluna. Em seguida digitamos na célula C2 a fórmula “=(A2, B2)”. Estendemos o comando para as demais células da coluna, para obter os pontos. Podemos notar na Figura 54 que, simultaneamente aos comandos, os pontos são construídos no gráfico da função, na janela de visualização ao lado esquerdo.

Figura 54: Planilha e o Gráfico da Parábola no GeoGebra



	A	B	C
1	Abcsissa	Ordenada	Ponto (x,y)
2	0	7	(0, 7)
3	1	6.93	(1, 6.93)
4	2	6.72	(2, 6.72)
5	3	6.37	(3, 6.37)
6	4	5.88	(4, 5.88)
7	5	5.25	(5, 5.25)
8	6	4.48	(6, 4.48)
9	7	3.57	(7, 3.57)
10	8	2.52	(8, 2.52)
11	9	1.33	(9, 1.33)
12	10	0	(10, 0)
13			
14			
15			

Fonte: Autor

4º Passo: Digitamos na célula D1 o nome “distância entre pontos” e na célula D2 digitamos a fórmula “= ((A2-A3)^2+(B2-B3)^2)^0.5” que corresponde ao cálculo da distância entre os pontos C2 e C3. Arrastando o comando até a célula D11 obtemos todas as medidas dos segmentos que necessitamos. As distâncias são exatamente as medidas dos segmentos $\overline{C_2C_3}; \overline{C_3C_4}; \overline{C_4C_5}; \ldots \overline{C_{11}C_{12}}$.

5º Passo: Agora basta somar as medidas dos segmentos, para isso selecionamos uma célula (E2) e clicamos na opção soma, que aparece no canto superior esquerdo do software, em seguida selecionamos as células que contém as distâncias (D2 até D11), para obter a soma desejada.

Figura 55: Cálculos na Planilha do GeoGebra

Planilha

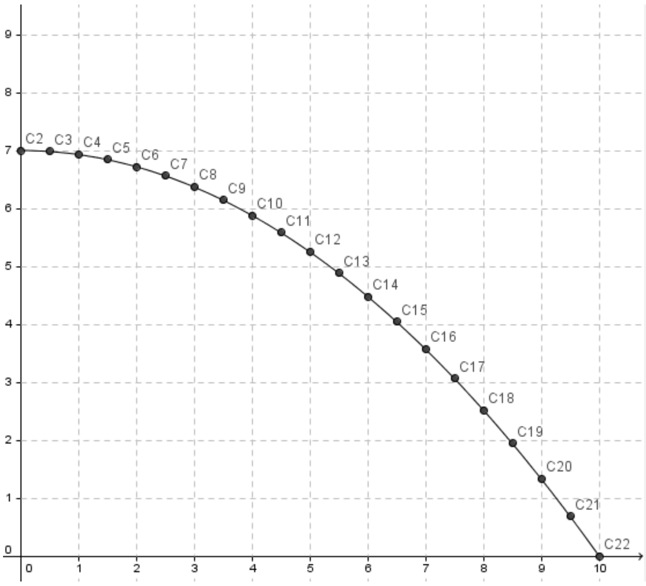
	A	B	C	D	E
1	Abcsissa	Ordenada	Ponto (x,y)	Distância...	Soma dos segmentos
2	0	7	(0, 7)	1	12.66
3	1	6.93	(1, 6.93)	1.02	
4	2	6.72	(2, 6.72)	1.06	
5	3	6.37	(3, 6.37)	1.11	
6	4	5.88	(4, 5.88)	1.18	
7	5	5.25	(5, 5.25)	1.26	
8	6	4.48	(6, 4.48)	1.35	
9	7	3.57	(7, 3.57)	1.45	
10	8	2.52	(8, 2.52)	1.55	
11	9	1.33	(9, 1.33)	1.66	
12	10	0	(10, 0)		

Fonte: Autor

Com os procedimentos que realizamos obtivemos a soma de 10 segmentos obtidos na parte positiva da parábola, obtendo o valor de 12,66, conforme observamos na Figura 55, em destaque na cor vermelha. Na Figura 56 apresentamos o resultado considerando a soma de 20 segmentos e ao compararmos os resultados, percebemos que a diferença é de apenas um centésimo.

Sugerimos que, após a construção da planilha, os alunos refaçam o processo, aumentando a quantidade de segmentos, para poder comparar e perceber que com 10 segmentos já obtemos uma medida satisfatória.

Figura 56: Aproximação da Curva por Segmentos de Reta no GeoGebra



	A	B	C	D	E
1	Abcsissa	Ordenada	Ponto (x,y)	Distância ...	Soma dos segmentos
2	0	7	(0, 7)	0.5	12.67
3	0.5	6.98	(0.5, 6.98)	0.5	
4	1	6.93	(1, 6.93)	0.51	
5	1.5	6.84	(1.5, 6.84)	0.51	
6	2	6.72	(2, 6.72)	0.52	
7	2.5	6.56	(2.5, 6.56)	0.54	
8	3	6.37	(3, 6.37)	0.55	
9	3.5	6.14	(3.5, 6.14)	0.56	
10	4	5.88	(4, 5.88)	0.58	
11	4.5	5.58	(4.5, 5.58)	0.6	
12	5	5.25	(5, 5.25)	0.62	
13	5.5	4.88	(5.5, 4.88)	0.64	
14	6	4.48	(6, 4.48)	0.66	
15	6.5	4.04	(6.5, 4.04)	0.69	
16	7	3.57	(7, 3.57)	0.71	
17	7.5	3.06	(7.5, 3.06)	0.74	
18	8	2.52	(8, 2.52)	0.76	
19	8.5	1.94	(8.5, 1.94)	0.79	
20	9	1.33	(9, 1.33)	0.82	
21	9.5	0.68	(9.5, 0.68)	0.85	
22	10	0	(10, 0)		

Fonte: Autor

Discutindo a proposta

Ao propor essa etapa da atividade nos preocupamos com uma possível desmotivação do aluno pelo fato de ter que realizar cálculos trabalhosos e extensos. Nesse viés o *software* se apresenta como ferramenta eficaz, visto que, partimos inicialmente da atividade manual, abordando os conceitos e instigando o raciocínio dos alunos para depois propomos que o *software* seja utilizado, realizando o processo trabalhoso e repetitivo. Com essa abordagem acreditamos que o GeoGebra poderá contribuir com o processo pedagógico, visto que não estará substituindo o raciocínio e desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Essa proposta está pautada na seção 2.3, de acordo com modelo referencial teórico TPACK, que adotamos como embasamento pedagógico.

Para Calcular

Qual seria o preço justo a ser cobrado por Fernando pela pintura da cobertura da quadra?

Uma possível solução

Com base nas discussões realizadas nas seções 3.3.2-3.3.4 podemos estimar as áreas da região frontal (A_F) e da parte superior (A_S) da cobertura. Temos que $A_F = 93\,m^2$ e para calcular A_S devemos considerar o retângulo da Figura 50 que tem dimensões[30] $31{,}8\,m$ e $25{,}32\,m$, logo $A_S = 31{,}8\,.\,25{,}32 \cong 805\,m^2$. Chamando A_T a área total da cobertura podemos estimar que $A_T = 2.A_F + A_S \cong 2\,.\,93 + 805 \cong 991\,m^2$

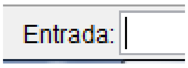
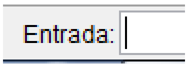
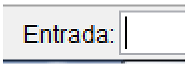
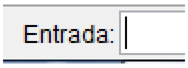
Como Fernando cobra o valor de R$ 14,00 por m^2 de pintura realizada, temos que o preço justo a ser cobrado é de R$ 13 986,00.

3.3.5 Uma Proposta Alternativa Para a Realização da Atividade no GeoGebra

Propomos, no Quadro 9, uma forma alternativa para a realização da atividade no *software*.

[30] O valor 25,32 m refere-se à largura do retângulo, Figura 48, que é o comprimento da curva delimitada pela parábola. Por simplicidade, considerando a propriedade de simetria da parábola em relação ao vértice, na seção 3.3.3 calculamos apenas o comprimento da parte não negativa da parábola. Dobrando a medida 12,66 m, Figura 55, obtemos a largura de 25,32m.

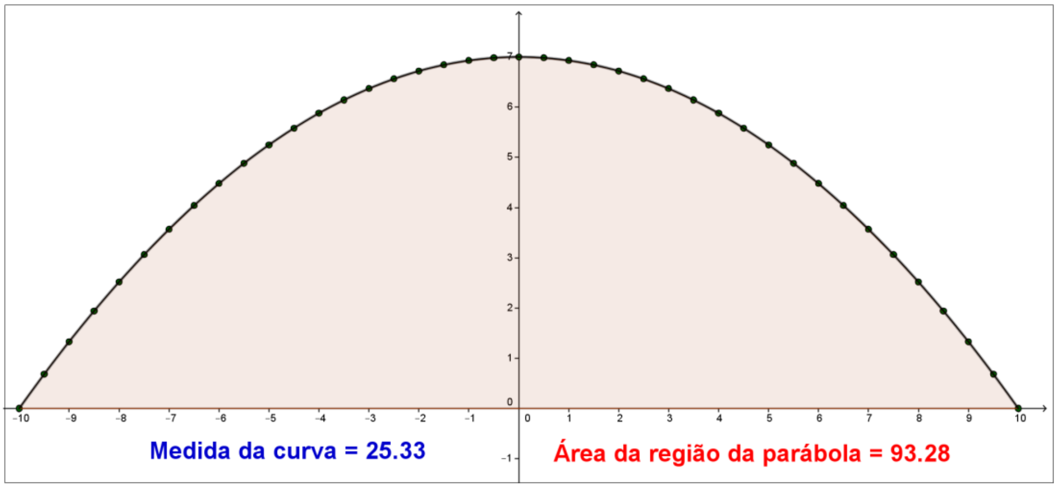
Quadro 9: Proposta Alternativa para a Atividade no GeoGebra

Passos	Ferramenta	Descrição	Observações
1º		No campo “Entrada” digite a expressão: **Função[-0.07*x^2+7, -10, 10]**	Digitamos a função que representa a parábola e limitamos o seu domínio entre -10 e 10.
2º		No campo “Entrada” digite a expressão: **Sequência[(i, f(i)), i, -10, 10, 0.5]**	Esse comando irá criar uma sequência de pontos (i,f(i)), iniciando na abcissa -10 e encerrando na abcissa 10. O incremento (0,5) significa o intervalo de variação das abcissas.
3º		Digite no campo “Entrada” a expressão: **Polígono[lista1]**	Note que ao realizar essa etapa temos a área aproximada da região limitada pela parábola.
4º		Digite no campo “Entrada” a expressão: **Perímetro[pol1]**	Obtemos agora o perímetro do polígono construído. Para obter a medida desejada basta retirar 20 unidades que equivale a medida da base desse polígono.

Fonte: Autor

O processo nos permite determinar, tanto a área do segmento parabólico, quanto o comprimento da curva com uma construção simples, conforme ilustra a Figura 57.

Figura 57: Aproximando a Região da Parábola por Polígonos



Fonte: Autor

Discutindo a proposta

Um aspecto que consideramos negativo, ao realizar a atividade alternativa é que o procedimento só é viável se for realizado com o *software*, dessa forma a construção poderá omitir a riqueza da discussão dos conceitos matemáticos envolvidos no processo, visto que a tecnologia estaria substituindo o nosso trabalho.

Em contrapartida pensamos que é interessante ter um método alternativo e uma forma diferente de resolver o problema proposto, por isso apresentamos para que o professor analise se é viável ou não propor essa atividade aos alunos.

3.4 Cálculo da Área de uma Região Plana usando uma Aproximação por Polígonos, por Meio do Teorema de Pick

Nessa seção apresentamos uma proposta para o cálculo da área da cidade de Siqueira Campos-PR[31], por meio da aproximação de polígonos, utilizando o Teorema de Pick[32]. A presente proposta não contempla a participação direta e efetiva da História da Matemática, bem como o uso das tecnologias, porém acreditamos ser essencial apresentá-la nesse momento, devido a sua importância para o cálculo de áreas irregulares e também a sua aplicabilidade no contexto social, visto que os conceitos que serão abordados podem ser adaptados para ser utilizados em diversas situações de contexto social.

O objetivo dessa proposta é apresentar ao aluno uma possibilidade para calcular a área de uma região plana qualquer, ou seja, uma região que não possui uma forma geométrica definida.

Para a realização da atividade serão necessários os seguintes materiais:

- Carbono para tecido;
- Pontos no reticulado com espaçamento de 1 cm (anexo A);
- Pontos no reticulado com espaçamento de 0,5 cm (anexo B);
- Computador com acesso a internet para pesquisa no *Google Maps*;
- Editor de Figuras (sugerimos o uso do *Paint*).

3.4.1 Proposta Para o Cálculo da Área da Cidade de Siqueira Campos

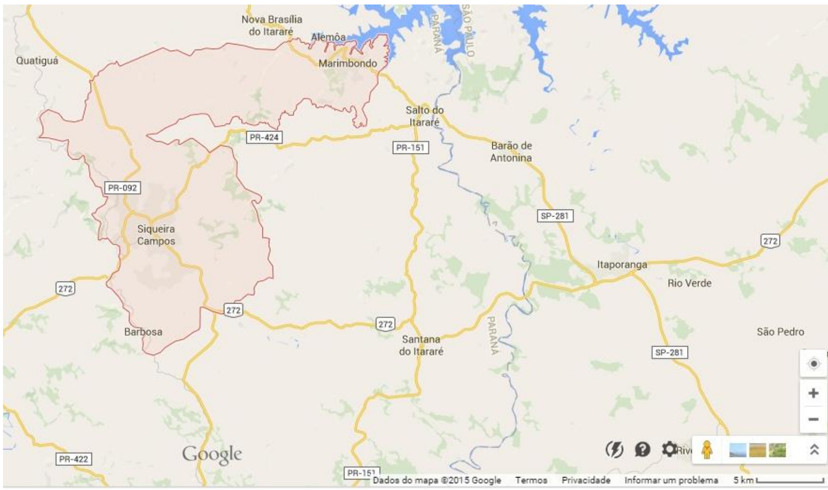
Apresentaremos todos os passos para o cálculo da área da cidade de Siqueira Campos-PR.

1º Passo: Pesquisar no *Google Maps*, usando o site https://www.google.com.br/maps, o mapa da cidade de Siqueira Campos. Adaptar a imagem, Figura 58, deixando-a do maior tamanho

[31] Foi escolhido Siqueira Campos, porque é a cidade em que trabalho como professor na Educação Básica.
[32] Essa proposta tem como base os conceitos discutidos na seção 1.4.5.

possível. Capturar a imagem obtida na tela, utilizando a tecla *Print Screen*, e colar em um editor de Figuras.

Figura 58: Mapa da Cidade de Siqueira Campos

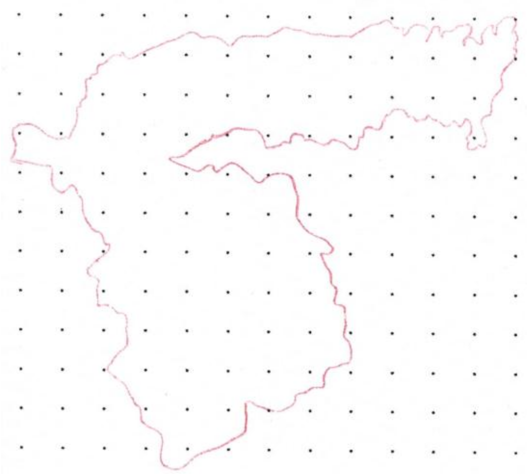


Fonte: Google Maps, 2015, adaptado.

2º Passo: Na Figura 58 retiramos as partes que não serão necessárias, deixando apenas o mapa e a escala, que se encontra no canto inferior esquerdo. Devemos cuidar para manter a proporção da imagem e das medidas referentes à escala. Após editar da Figura devemos imprimi-la em uma folha sulfite.

3º Passo: Utilizando o carbono para tecido, devemos transferir a imagem impressa do mapa para o papel composto com os pontos da rede, como apresentado no Anexo A. A Figura 59 ilustra o procedimento. Utilizamos uma rede em que os pontos consecutivos, na horizontal ou vertical distam $1\,cm$.

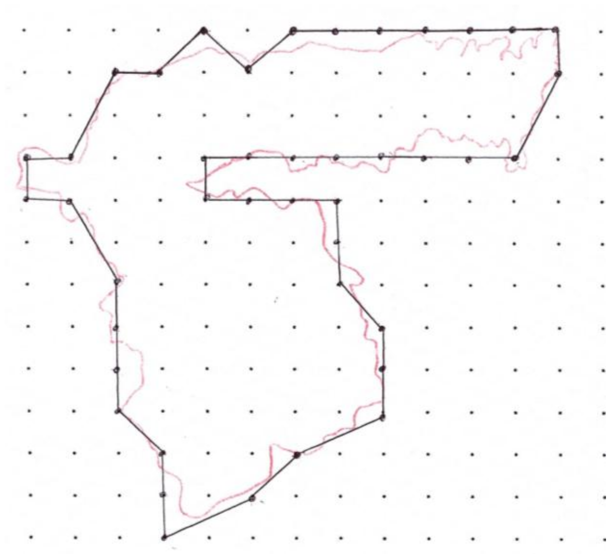
Figura 59: Mapa de Siqueira Campos Representado em Uma Rede



Fonte: Autor

4º Passo: A partir do contorno do mapa devemos construir um polígono que tenha todos seus vértices nos pontos da rede, que se aproxime ao máximo da região do mapa, uma possibilidade está ilustrada na Figura 60.

Figura 60: Aproximação da Região do Mapa Utilizando Um Polígono



Fonte: Autor

Para Calcular

Utilizando o Teorema de Pick, determine a área limitada pelo polígono representado na Figura 59.

Possível solução

O Teorema de Pick nos garante que a área do polígono, Figura 60, é dada por $Área\ (P) = I + \frac{B}{2} - 1$, sendo I a quantidade de pontos, da rede, que são interiores ao polígono e B a quantidade de pontos que pertencem às arestas do polígono, incluindo os vértices. Contando os pontos na Figura 60 obtemos $I = 48$ e $B = 42$. Considerando que a distância entre os pontos da rede é de 1 *cm* temos

$$Área\ (P) = 48 + \frac{42}{2} - 1 = 68\,cm^2 \tag{42}$$

5º Passo: Com uma régua devemos determinar a medida da escala, que é o segmento que está disposto no canto inferior esquerdo do mapa na Figura 58. Nesse caso temos que 5 km equivalem a 2,4 cm, logo temos a razão de semelhança

$$k = \frac{5}{2,4}\ . \tag{43}$$

Para calcular

Considerando a propriedade em que “a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança” (DOLCE E POMPEO, 2011, p.340), calcule a área da cidade de Siqueira Campos.

Uma possível solução

Considerando a propriedade das áreas de polígonos semelhantes, temos que

$$\frac{A}{A(P)} = k^2. \tag{44}$$

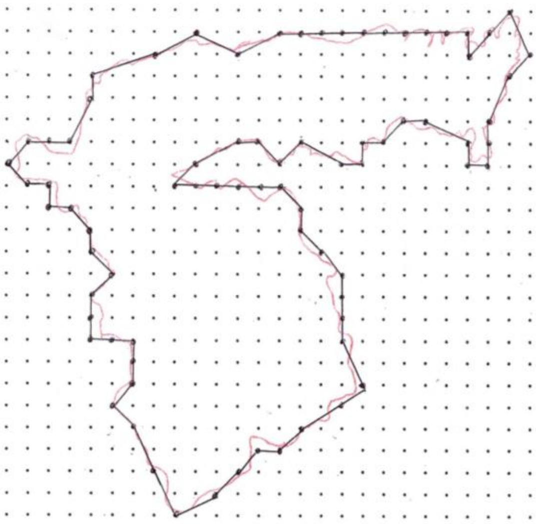
onde A é a área representa a área da cidade.

Substituindo (42) e (43) em (44) obtemos $\frac{A}{68} = \left(\frac{5}{2{,}4}\right)^2 = 295{,}14\, km^2$.

Discutindo a proposta

Após calcularmos a área aproximada da cidade podemos propor ao aluno que realize novamente o processo utilizando a malha quadriculada, cuja distância entre os pontos consecutivos na horizontal e vertical é de 0,5 *cm*. A Figura 61 ilustra o mapa, já com o desenho do polígono que aproxima a região procurada.

Figura 61: Aproximação da Região do Mapa por um Polígono em Uma Rede



Fonte: Autor

Para calcular

Utilizando o Teorema de Pick, determine a área limitada pelo polígono representado na Figura 60.

Uma possível solução

Efetuando a contagem dos pontos obtemos $I = 211$ e $B = 78$. Calculando, obtemos $Área\ (P) = 211 + \frac{78}{2} - 1 = 249$. Como cada quadradinho da malha (formada ligando os pontos da rede) tem área de $0,5 . 0,5 = 0,25 cm^2$, para encontrar a área do polígono que aproxima a região do mapa devemos fazer $Área\ (P) . 0,25$. Assim, a área da região do mapa equivale a $Área\ (P_2) = 62,25\ cm^2$.

Podemos estimar a área da cidade calculando $\frac{A}{A(P_2)} = k^2$, o que resulta em $\frac{A}{62,25} = \left(\frac{5}{2,4}\right)^2$, logo $A = 270,18\, km^2$.

Discutindo a Proposta

Com base nos dados apresentados pelo IBGE[33], a área da unidade territorial da cidade de Siqueira Campos é de $278,035\, km^2$. Em comparação com os resultados apresentados, temos que os mesmos forneceram erros aproximados, em valor absolto, de 6,2% e 2,8%, considerando as malhas quadriculadas de 1 *cm* e 0,5 *cm*, respectivamente.

Se achar conveniente o professor poderá usar o papel carbono normal, também substituir os pontos da rede por uma malha quadriculada.

Para diminuir o erro no cálculo da área o professor poderá propor o cálculo com os pontos no reticulado em que as distâncias dos pontos sejam menores do que 0,5 *cm*. Nesse caso, para facilitar o processo de contagem de pontos, o professor também poderá inserir linhas de grade na malha quadriculada, conforme apresentamos nos Anexos C e D.

Ao realizar a atividade o professor poderá propor aos alunos o cálculo da densidade demográfica do município, com base nos dados do Censo do IBGE. Sugerimos ainda estender a proposta aqui apresentada para calcular a área de uma praça, de um sítio, ou outra região plana de formato irregular ou ainda estimar a quantidade de pessoas presentes em determinado evento. Todas essas propostas podem ser realizadas utilizando os recursos do *Google Earth*[34], que fornece imagens capturadas por satélite.

Sugerimos, para enriquecer a proposta, a possibilidade de realização de um trabalho interdisciplinar, contemplando a disciplina de Geografia.

---

[33] Informações disponíveis em: http://cidades.ibge.gov.br/xtras/perfil.php?codmun=412660. Acesso em 10/06/2015.

[34] Informações disponíveis em: http://www.google.com.br/intl/pt-BR/earth/

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações que aqui faremos poderá parecer repetitiva, devido ao fato que buscamos discutir todas as etapas das atividades, colocando nosso ponto de vista, sugestões e ponderações. O nosso intuito aqui é buscar elementos que consideramos fundamentais e que foram discutidos ao longo do trabalho.

Evidenciamos ainda a extrema dificuldade de dar linhas finais ao presente trabalho, levando-se em conta o propósito do texto que é apresentar uma proposta didática para o trabalho docente na Educação Básica. Neste aspecto entendemos que análises detalhadas e significativas em relação ao texto terão maior relevância durante e após o momento em que a proposta for utilizada em sala de aula, pelo docente.

A experiência de escrever o primeiro capítulo foi gratificante, pois nos proporcionou um aprendizado acerca de muitos aspectos peculiares da História e do desenvolvimento da Matemática. A pesquisa ainda nos proporcionou a analisar de forma aprofundada e diferente aqueles elementos históricos que nos eram familiares.

No capítulo 1 destacamos uma das dificuldades que encontramos ao longo do desenvolvimento de nosso projeto, que foi transcrever no limitado espaço de algumas páginas, a riqueza imensurável transcorrida em séculos de história, contemplando grandes nomes da humanidade e episódios dignos de serem discutidos de forma detalhada, mas que aqui não o pudemos fazer. Considerando essa perspectiva, entendemos que o primeiro capítulo servirá apenas como base para o leitor que deverá aprofundar os conceitos que se fizerem necessários, ao fazer uso da proposta.

Ao longo das pesquisas minha concepção em relação a História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem mudou. Ao avaliar diversas perspectivas analiso que a História da Matemática poderá trazer muitos benefícios pedagógicos para a aula, porém está condicionado a um processo minucioso, elaborado e que deve ser pensado de forma responsável. Entendo que a contribuição efetiva da História da Matemática no presente trabalho dependerá da forma com que o professor abordará as propostas apresentadas, fato que justifica a nossa constante discussão com o docente ao longo do desenvolvimento da proposta.

Cabe ainda ressaltar, em linhas gerais, que paraticipação da História da Matemática no processo educacional, da forma que discutimos no presente trabalho, vai além de simplesmente usar os problemas históricamente produzidos ou usar certo conceito desenvolvido por um matemático, fatos que consideramos necessários, porém não suficientes.

Ao nosso ver a História da Matemática deverá responder algumas perguntas tais como: 1) Quais fatores levaram os povos antigos a desenvolver conceitos matemáticos? 2) Porque os egípcios e babilônios estagnaram no desenvolvimento da Matemática? 3) Que aspectos proporcionaram aos gregos desenvolver conceitos abstratos, dentro de padrões formais? 4) Qual foi a importância dos erros no processo de produção de conceitos e teorias matemáticas ao longo da história?

Ressaltamos a importância de conceber a Matemática como processo de produção humana, propondo ao aluno a possibilidade de (re)construir e (re)criar os conceitos usando sua criatividade. Não acreditamos que esse processo seja simples, mas analisamos que é possível, a partir da prática investigativa e do esforço pessoal do docente.

Ao propormos o uso do GeoGebra durante algumas etapas das atividades, buscamos evidenciar ao leitor a nossa preocupação acerca de não deixar que o *software* se torne o ponto principal das atividades. Conforme discutimos na seção 2.2 e 2.3 o uso da tecnologia só trará beneficos mediante ao uso correto que compreende analisar uma série de fatores relacionados ao conhecimento do conteúdo, do processo pedagógico e da tecnologia.

Evidenciamos ainda nossa maior preocupação a de que o aluno não assuma a posição de “zona de conforto” a partir da observação das potencialidades do *software*, deixando que o GeoGebra substitua sua função de raciocinar, desenvolver conceitos e realizar cálculos. Nesse aspecto entendemos que é essencial ao professor evidenciar ao aluno que o GeoGebra é composto de uma infinidade de recursos, mas que só poderá realizar qualquer comando por meio da criatividade e capacidade intelectual de quem o manuseia.

Ao deixarmos quatro propostas no capítulo 3, buscamos cobrir determinadas situações em que a Matemática poderia ser útil para resolver problemas sociais dos alunos, à exemplo do que foi a Matemática para os egípcios e babilônios. Em contrapartida, não entendemos que esses problelmas devam servir de modelo ao aluno, ao contrário, entedemos que as atividades podem auxiliar no desenvolvimento de pensamento crítico autonomo, bem como a capacidade de criar soluções para os problemas que posteriormente poderão se apresentar ao longo de sua vida.

Não entendemos que as atividades aqui propostas devam ser consideradas prontas e muito menos necessitam ser seguidas fielmente, pois analisamos que cada docente deve considerar a viabilidade, a partir do contexto ao qual se propõe a aplicá-las, podendo adequar a proposta, acrescentando, retirando ou substituindo elementos, sempre que achar coerente. Ainda nesse contexto entendemos que o conhecimento, a experiência e as qualidades específicas de cada docente poderão enriquecer a proposta apresentada neste trabalho, tornando-a efetiva para o aprendizado dos alunos.

Como sugestão para a continuidade desse trabalho deixamos duas propostas, a primeira consiste em aprofundar os conceitos aqui abordados, utilizando a perspectiva histórica, buscando estudar os problemas de quadraturas, tão discutidos na Grécia antiga e também nas civilizações egípcias. Destacamos o trabalho de Hipócrates, sobre quadratura de lúnulas e os trabalhos de Arquimedes. Como base para pesquisa do assunto, sugerimos (CORRÊA, 2008; MACIEL, 2011; BALIEIRO, 2004).

A segunda sugestão consiste em abordar o processo de maximização de áreas, dando continuidade ao trabalho que aqui iniciamos. A maximização de áreas consiste em determinar a máxima área possível de ser obtida, a partir de um perímetro constante. Tal questão permeou toda a História da Matemática, por meio do problema da princesa fenícia Dido[35]. Em 1987 Weierstrass forneceu uma prova completa da existência de uma solução para o problema, com base na teoria que desenvolveu para tratar problemas envolvendo a maximização ou minimização de certas integrais.

O problema de Dido esta pautado na desigualdade perimétrica, que afirma que “qualquer curva fechada de comprimento l cerca uma área menor ou igual $\frac{l^2}{4\pi}$ e este valor só é atingido se a curva for um círculo de raio $\frac{l}{2\pi}$” (SOUZA, 2006, p. 1). Para desenvolver tal estudo, poderíamos primeiramente provar que, dentre os polígonos de n lados e perímetro fixo k o que possui maior área é o polígono regular. Posteriormente devemos provar a desigualdade isoperimétrica (SOUZA, 2006). O conceito intuitivo da desigualdade isoperimétrica pode ser observado no desenvolvimento da atividade 3.2.3, quando exaurimos o círculo por polígonos regulares nele inscritos.

Analisamos que o estudo da maximização de áreas proporcionará ao aluno a capacidade de tomada de decisões, analisando possibilidades para minimizar gastos e aproveitar espaços, conceito que geralmente não é explorado de forma detalhado na Educação Básica, fatos que justificam nossa sugestão. Na seção 3.1 apresentamos atividades que abordam, de forma sucinta, o conceito de maximização de áreas e podem ser exploradas pelo docente.

[35] No século IX antes de Cristo, a princesa fenícia Dido, que havia assassinado seu marido, chegou às terras do norte da África (Túnez) junto com seu irmão Pigmalião e fizeram um acordo com seus habitantes. Ao querer a princesa Dido comprar terra para se estabelecer com seu povo, o rei daquele lugar somente lhe permitiu comprar a parcela de terra que poderia ser coberta pela pele de um touro. Dido cortou a pele em finas tiras formando uma larga corda (de 1000 a 2000 metros) e a dispôs de maneira que cobrisse a maior parte de terreno possível... (SOUZA, 2006, p. 1).

REFERÊNCIAS

AABOE, A. Episódios da História Antiga da Matemática. 3 Ed. Trad. João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ALBUQUERQUE, M.M. de. **Atlas Histórico Escolar**. Rio de Janeiro: Fename, 1977.

ALBUQUERQUE, M.M. de. **Atlas Histórico Escolar**. Rio de Janeiro: Fae, 1988.

AULETE, C. **Dicionário Contemporâneo da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Lexikon, 2011.

BALDINI, L. A. F. **Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de Matemática na utilização do software GeoGebra**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina – UEL. Londrina, 2014.

BALIEIRO, I.F. **Arquimedes, Descartes, Pappus e Polya – Quatro Episódios da História Heurística.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista – UNESP. Rio Claro, 2004.

BARDI, J,S. **A Guerra do Cálculo**. Trad. Aluizio Pestana da Costa. Rio de Janeiro: Record, 2008.

BORBA, M.C. SILVA, R.S.R. GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática – Sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina – UEL. Londrina, 2013.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. 3 Ed. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática.** 1 Ed. Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CORRÊA, J. F. **Um Estudo Histórico sobre Quadraturas**. Dissertação (Ensino de Ciência e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina – UEL. Londrina, 2008.

DANTAS, M. R. N. **Sobre o número π.** Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2013.

DOLCE, O. POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar 9: Geometria Plana**. 8 Ed. São Paulo: Atual, 2011.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. Ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2011.

FAHD, W. C. B. MOREIRA, D. M. SILVA, A. Z. O Uso das TIC na Educação: da Formação à Atuação Docente. In: **CONINTER – Congresso Internacional interdisciplinar em Sociais e Humanidades**, 2013. Belo Horizonte, 2013.

FONSECA, H. BRUNHIERA, L. PONTE, J.P. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática.** Lisboa, 1999.

FRAGA, L.B.F.F. **O uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no Ensino de Língua Estrangeira.** Monografia (Licenciatura em Letras Língua Espanhola e Literatura de Língua Espanhola) Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, 2013.

GALVÃO, M. E. E. L, SOUZA, V. H. G. Luas, Áreas e Quadraturas-Um problema e muitos séculos na História da Matemática. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 13, n.27, p. 17-42, 2013.

GASPAR, M. T. MAURO, S. **Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática**. Coleção História da Matemática para Professores. Rio Claro. SP: SBHMat, 2003.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo 1**. 5 Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

HERMES, J. D. V. **O Teorema de Pick**. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) Universidade Federal São João del Rei – UFSJ. São João del Rei, 2014.

JUNIOR, C. A. S. **Geometria Não Euclidiana.** Dissertação (mestrado) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.

KOEHLER, M. J. MISHRA, P. CAIN, W. What is Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK)? **Journal of Education,** v. 3, n. 193, p. 13-19, 2013.

LANG, A.M.R, GONZALES, F.J. A Proposta Teórica do Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo e a (Sub)Utilização das TIC na Educação Básica. **Congreso Iberoamericano de Ciência, Tecnología, Innovación y Educación**. Buenos Aires, 2014.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean proposition**. 2 Ed. Ann Arbor, Michigan, USA: NCTM, 1940.

MACIEL, T.S. **A História da Matemática e o Estabelecimento de Elos entre o Ensino Superior e a Educação Básica**. Monografia (Graduação). Universidade Federal da Paraíba – UFPB. João Pessoa, 2011.

MARTINS, Z. As TIC no ensino-aprendizagem da Matemática. **Anais do X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia.** Universidade do Minho. Portugal. p. 2727-2742, 2009.

MENDES, I. A. A História como Agente de Cognição na Educação Matemática. Revista Matemática e Ciência, v. 1, n.2, p. 7-18, 2008.

MIGUEL, A. MIORIM, M.A. **História na Educação Matemática: Propostas e Desafios**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MISHRA, P. KOEHLER, M. J. Introducing Pedagogical Content Knowledge. **Annual Meeting of the American Educational Research Association**. New York, 2008.

MISHRA, P. KOEHLER, M. J. Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for integrating Technology in teacher knowledge. **Teacher College Record**, 1089(6), p. 1017-1054, 2006.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides –** A história da geometria das paralelas ao hiperespaço. 6 ed. Trad. Enézio de Almeida. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

MOTTA, C.D.V.B. **História da Matemática na Educação Matemática: Espelho ou Pintura?** São Paulo, 2006.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar 2: Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba: SEED, 2006.

PEREIRA, A. L. MELO, S. T. Contando Áreas – o Teorema de Pick. **RPM - Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.78, p. 36-42, 2º quadrimestre, 2012.

PIRIE, S. **Mathematical investigations in your classrooms: A pack for teachers**. Oxford: University of Oxford, Department of Education Studies, 1987.

PONTE, J.P. **Investigar, ensinar e aprender.** Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM.

PONTE, J.P. Et al. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. Projecto Matemática para Todos: Investigações na sala de aula.** Lisboa, 2003.

PONTE, J.P. MATOS, J.F. **Processos Cognitivos e Interacções Sociais nas Investigações Matemáticas.** Lisboa, 1992.

ROQUE, T. CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de História da Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SAMPAIO, P. A. S. R. COUTINHO, C. M. G. F. P. Ensinar Matemática com TIC: Em Busca de um Referencial Teórico. **Revista Portuguesa de Pedagogia**, Coimbra, v. 2, n. 46, p. 91-109, 2012.

SBM. Conselho Diretor. Sociedade Brasileira de Matemática. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**. Rio de Janeiro, 2014.

SCHULMAN, L. Those Who Understand: knowledge growth in teaching. Educational Research. Washington, v.12, n.2, p. 4-14, 1986.

SILVA, J. E. B. **Teorema de Pitágoras: algumas extensões/generalizações e atividades com o software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede em Rede Nacional-PROFMAT) Universidade Estadual Paulista-Unesp. São José do Rio Preto, 2014.

SILVA, M. D. F. **Problemas e modelos que contribuíram com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral: dos gregos a Newton. 2010**. Tese (Doutorado em educação matemática)-Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos**. 9 Ed. Trad. Jorge L. Calife. Rio de Janeiro: Record, 2002.

SOUSA, D.D. **Propostas Para o Ensino de Semelhança.** Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA. Rio de Janeiro, 2013.

SOUTO, R.M.A. História na Educação Matemática – um estudo sobre os trabalhos publicados no Brasil nos últimos cinco anos. **Boletim de Educação Matemática - Bolema**, Rio Claro, n. 35B, v.23, p. 515-536, 2010.

SOUZA, C. R. A. **Duas Demonstrações de Desigualdade Isoperimétrica**. Monografia (Graduação) – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG. Belo Horizonte, 2006.

STEINHAUS, H. **Mathematical Snapshots**. New York: Oxford Univ. Press, 1950.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School MathemaTIC**. 4. ed. New York: Longman, 2001.

VARGAS, M. Prefácio. **Grispun M.P.S.Z. (org)**. Educação Tecnológica – Desafios e Perspectivas. São Paulo: Cortez. 2001, p. 7-23

WAGNER, E. **Teorema de Pitágoras e áreas**. Disponível em: http://www.obmep.org.br/export/sites/default/arquivos/apostilas_pic2010/Apostila3-teorema_de_pitagoras.pdf. Acesso em 11/06/2015.

Sítios da Internet Consultados

Educacional, 2015. Disponível em: <http://www.educacional.com.br/AVA/pesquisa/pesquisa.asp#item-393164> Acesso em: 14/01/2015

Educacional, 2015. Disponível em: <http://www.educacional.com.br/AVA/pesquisa/pesquisa.asp#item-391577>. Acesso em: 14/01/2015.

FNDE, 2015. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/arquivos/category/45-projetos-arquitetonicos> Acesso em 31/05/2015.

GeoGebra. Disponível em: <http://www.geogebra.org/> Acesso em 11/06/2015.

Google Maps, 2015. Disponível em: <https://www.google.com.br/maps/place/Siqueira+Campos+-+PR/@-23.6888442,-49.8270303,14z/data=!3m1!4b1!4m2!3m1!1s0x94c1e8c1090220ef:0x9a715cb1ef35a342> Acesso em 26/05/2015.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE. Disponível em: <http://www.ibge.com.br/home/> Acesso em 11/06/2015.

Livres Pensadores, 2015. Disponível em: <http://livrespensadores.net/o-olho-de-horus-conheca-sobre-o-misterioso-simbolo-egipcio/>. Acesso em: 08/06/2015.

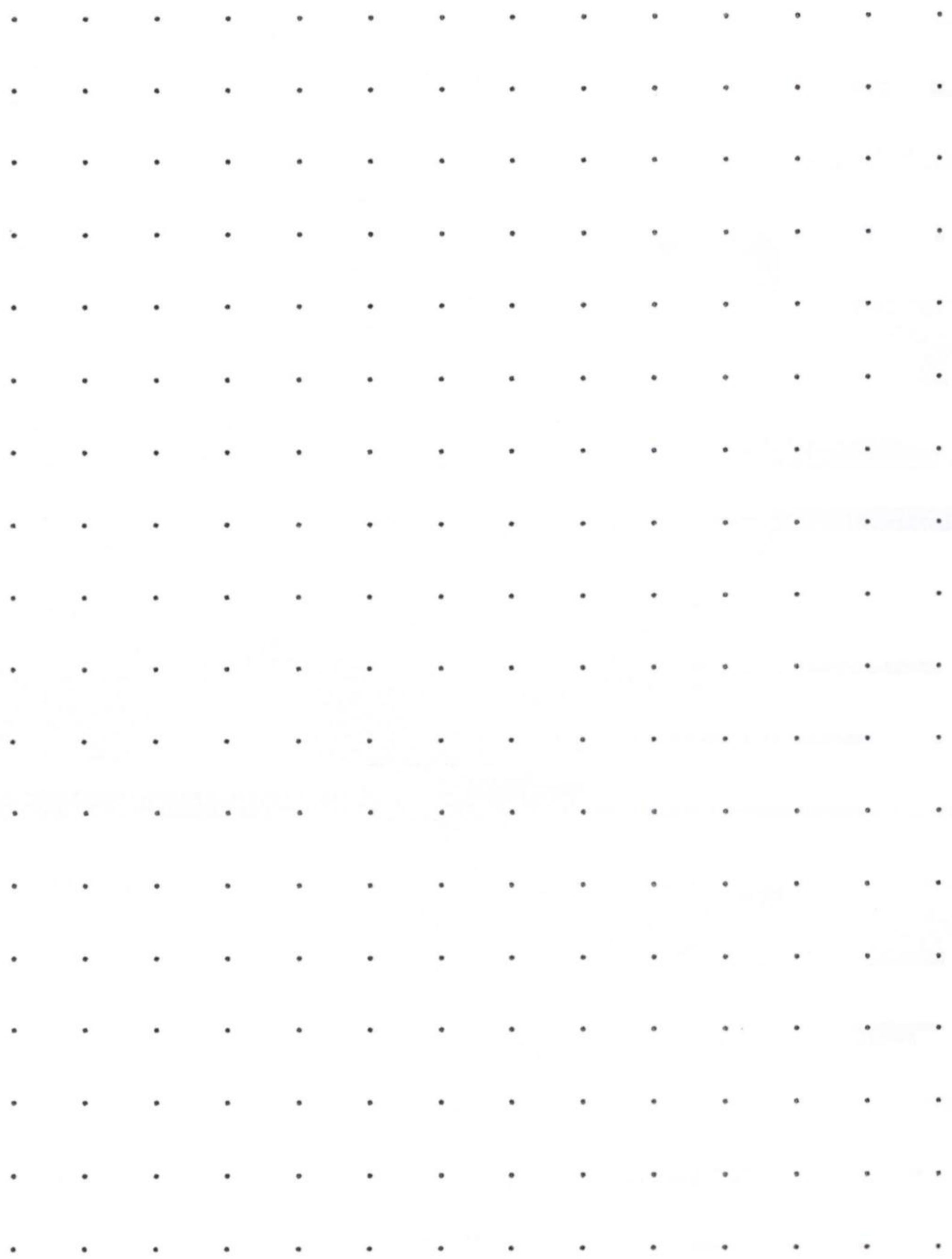
O GeoGebra. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/site/>. Acesso em 10/06/2015.

Scientific Gems **- Facts, ideas, and images from the shoreline of science.** Disponível em: <https://scientificgems.wordpress.com/2013/11/20/plimpton-322-mathemaTIC-3800-years-ago/>. Acesso em: 13/01/2015.

ANEXOS

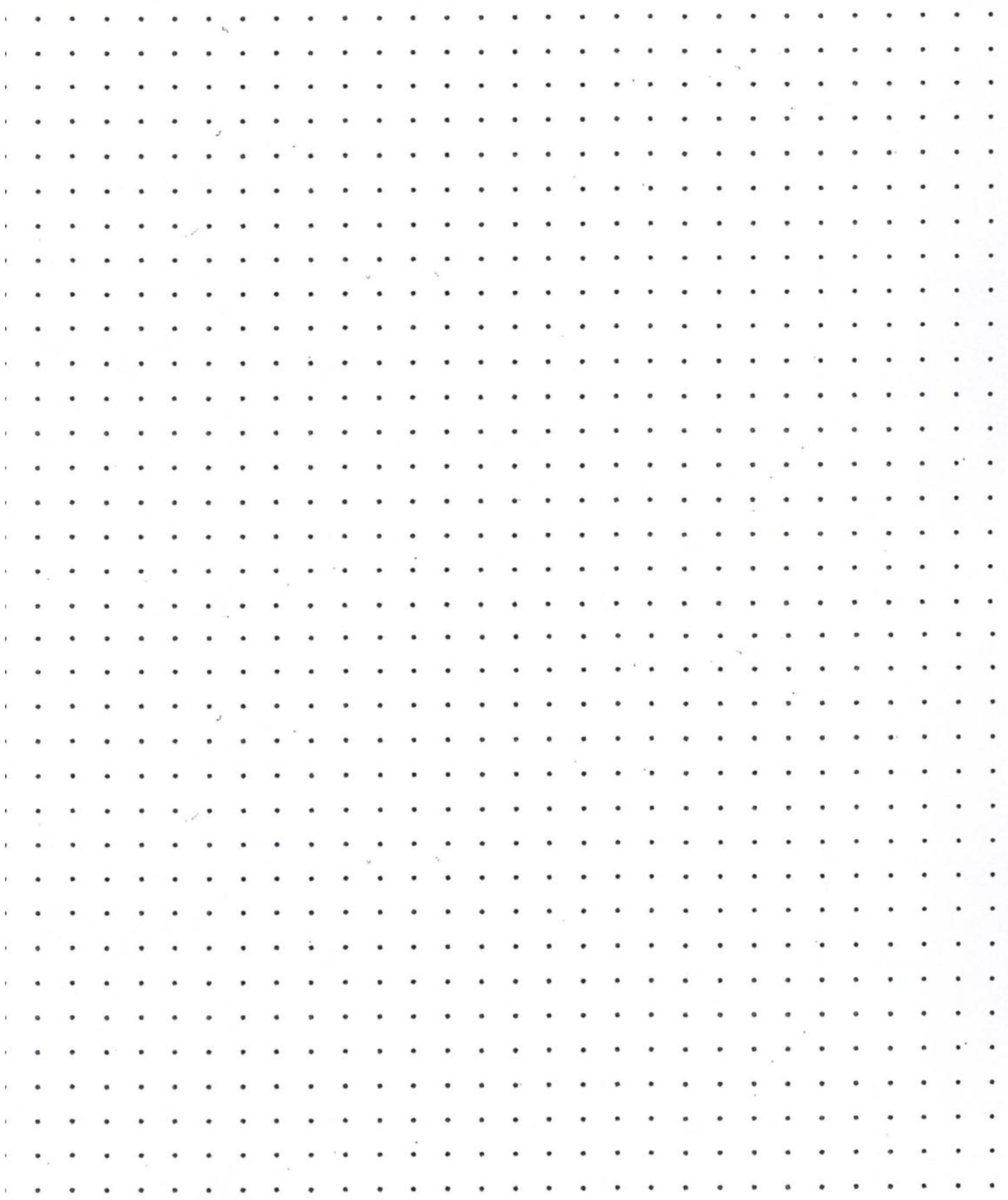
ANEXO A

Pontos do Reticulado - *1 cm*



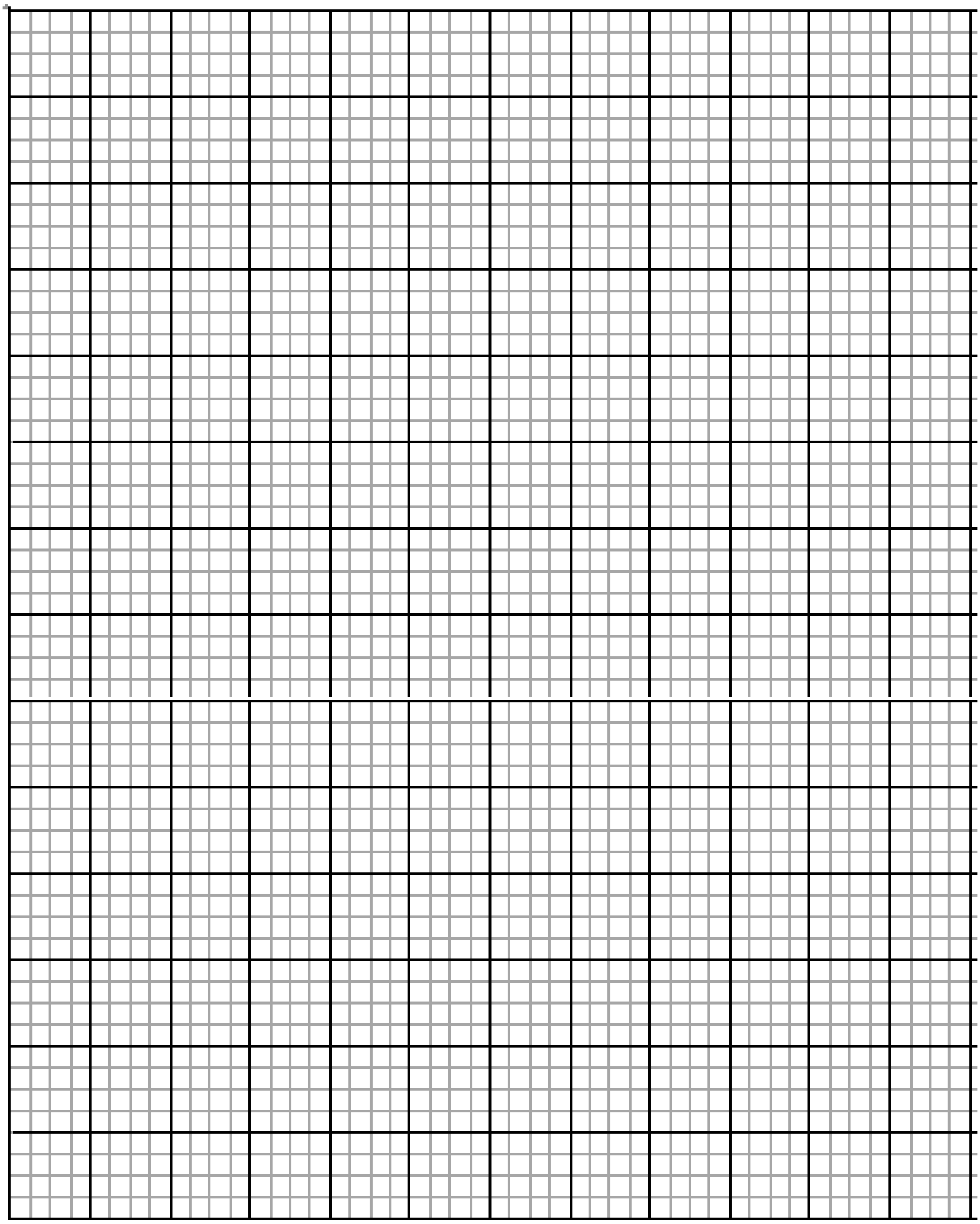
ANEXO B

Pontos no Reticulado - *0,5 cm*



ANEXO C

Malha Quadriculada - *0,3 cm*



ANEXO D

Malha Quadriculada - *0,2 cm*