

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Carlon Gama de Azevedo

MANAUS
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA REDE NACIONAL

Carlon Gama de Azevedo

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e, ofertado pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2015

CARLON GAMA DE AZEVEDO

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e, ofertado pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 14 de maio de 2015.

BANCA EXAMINADORA

.....
Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

.....
Profa. Dr. Disney Douglas de Lima Oliveira
Membro

.....
Prof. Dr. Alcides de Castro Amorin Neto
Membro

AGRADECIMENTOS

É justo, acima de tudo, agradecer a Deus pelo dom da vida e por Ele sempre estar ao meu lado, auxiliar-me nas decisões mais difíceis do trabalho, dando-me a fé necessária para executar essa tarefa com qualidade. Nesse momento de fé, sou grato também a Nossa Sra. Maria e a Santa Rita de Cássia por interceder ao Pai do céu por mim.

Agradeço também aos amores da minha vida: minha esposa Aldanize Pessoa Garcia e filhos, Luiz Fernando Garcia de Azevedo, Eduarda Tereza Pessoa Garcia e Lucas Vinícius dos Santos de Azevedo pelo incentivo, compreensão e amor nunca negados a mim. E ao meu orientador Nilomar pela disposição e tempo dedicados ao meu trabalho.

Sou grato posteriormente aos meus sogros, pais e outros familiares pelas parcelas de ajuda atribuídas a mim de forma direta indiretamente.

Enfim, agradeço aos amigos e todos que contribuíram para o meu sucesso.

RESUMO

Neste trabalho, procurou-se mostrar algumas aplicações matemáticas simples e detalhadas, através de certos Problemas de Otimização em nível de Ensino Médio, de forma que o discente desse nível perceba e compreenda o mundo matemático que o cerca. A princípio, apresentamos um pouco da História do Cálculo enfatizando grandes matemáticos que tornaram esse ramo da Matemática em uma ferramenta poderosa para solucionar diversos problemas desta Ciência e outras. Em seguida, foi feita uma síntese de resultados importantes referente ao Cálculo cujo desenvolvimento foi feito com base em funções reais trabalhadas no ensino médio. Só então, a partir daí, usou-se esse conhecimento para construir definições, teoremas e proposições a respeito da Otimização que proporcionasse ferramentas capazes de solucionar problemas de Matemática, Física e Economia.

Palavras-chave: História, Cálculo, Otimização, Problemas, Ensino Médio.

ABSTRACT

In this work, we tried to show some simple and detailed mathematical applications through certain Optimization Problems in Secondary level, so that the students of this level realize and understand the mathematical world around. At first, we present some of the Calculation History emphasizing great mathematicians who have made this branch of mathematics into a powerful tool for solving many problems of Science and others. Then a synthesis of important results concerning the Calculus was made whose development was based on actual functions worked on the Secondary. Just then, from there, we used that knowledge to build definitions, theorems and propositions regarding the optimization that would provide tools capable of solving problems of Mathematics, Physics and Economics.

Keywords: History, Calculus, Optimization, Problems, Education Secondary.

LISTA DE SÍMBOLOS

1. Dada a função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $y = f(x)$, então $(x, f(x)) = (x, y)$ representa um par de valores reais, denominado ponto no plano cartesiano, tais que $x, y \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.
3. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, então $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ e $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.
5. \overleftrightarrow{AB} representa uma reta e \overline{AB} um segmento de reta, onde A e B são pontos. Podemos também representá-los por letras minúsculas.
6. \hat{A} é um ângulo referente ao vértice (ponto) A .
7. $\triangle ABC$ é um triângulo de vértices A , B e C e, neste caso, podemos definir o ângulo no vértice A por $B\hat{A}C$.
8. Dada uma circunferência e os pontos A e B distintos e pertencentes a mesma, tem-se que \widehat{AB} é o arco que une esses dois pontos.

Sumário

Introdução	1
1 Breve relato histórico	3
1.1 Um pouco da História do Cálculo	3
1.2 Motivação e Métodos do Trabalho	5
1.3 Estrutura do Trabalho	5
2 Funções	6
2.1 Função Polinomial	7
2.2 Funções Trigonométricas	13
2.3 Função Modular	21
2.4 Função Composta	23
3 Cálculo Diferencial	25
3.1 Sequências em \mathbb{R}	25
3.2 Limite e Continuidade de uma função	26
3.3 Derivada	33
4 Otimização	38
4.1 O problema em Otimização	39
4.2 A busca de solução em Otimização	42
4.3 Problemas de Otimização de funções de uma variável real.	44
4.3.1 Problemas de Matemática	44
4.3.2 Problemas de Física	47
4.3.3 Problemas de Economia	49
Considerações Finais	53
Referências Bibliográficas	54

Introdução

A Matemática, para a maior parte dos alunos do ensino básico, é incompreensível porque eles não conhecem e pouco menos compreendem a importância desse conhecimento para as suas vidas. Sendo assim, para despertar o interesse dos estudantes desse nível de ensino por esta Ciência, torna-se essencial buscar saídas que incentivem e facilitem a compreensão dos conteúdos dessa área. Por isso, analisar a história da humanidade no contexto matemático e rever os grandes feitos produzidos pelo homem através de seus resultados é um dos grandes passos para a inserção de uma nova Matemática nas mentes de nossos alunos. No entanto, para se obter êxito no processo de ensino-aprendizagem desta Ciência é ideal também mostrar sua aplicabilidade na vida do ser humano.

Historicamente, em muitas ocasiões, a humanidade progrediu por causa do desenvolvimento de uma ótima ferramenta conhecida como Modelagem Matemática. Foi através dessa aliada que hoje em dia as pessoas têm, a sua disposição, uma tecnologia altamente avançada comparada a anos anteriores. Então, mostrar que a Matemática sempre foi necessária para o homem expor ou resolver vários de seus problemas, é um dos argumentos mais eficazes de explicar a sua utilidade e importância. E no ensino básico, essa responsabilidade é primordial, pois é o alicerce do conhecimento que projeta o alcance do nível de aprendizagem.

Em diversas aulas apresentadas por muitos professores de Matemática do ensino básico, observa-se o desenvolvimento impecável de diversos conteúdos de Matemática, porém, em muitas situações, a realidade do aluno está muito distante da utilidade desse conhecimento. Sendo assim, é essencial mostrar a aplicabilidade dessa ciência numa visão mais acessível e dinâmica para que nossos alunos do ensino fundamental e médio possam compreender e gostar. É bom ressaltar que todos sabem que o conhecimento é importante, no entanto, a maioria das pessoas não sabe como e nem onde usá-lo. Com isso, surge a antipatia de grande parte dos alunos em relação a Matemática, a qual se apresenta com grande intensidade em nossas escolas públicas. Então, o docente deve usar a realidade do aluno ao seu favor, como um meio de mostrar a relevância dessa Ciência, uma vez que, essa é uma maneira elegante e viável para adquirir respeito e confiança dos jovens estudantes que desconhecem a maravilha do mundo matemático.

Todavia, a Modelagem Matemática é um campo bastante amplo a ser explorado e estudado. Por isso, estudaremos, embasado no conhecimento de funções reais de uma única variável e no Cálculo Diferencial, um pouco de um de seus ramos mais úteis, que é a Otimização. Esse trabalho está voltado especialmente para o Ensino Médio através de um estudo sobre Otimiza-

ção, direcionado ao público alvo. Esse estudo trabalha uma visão mais completa para aguçar a construção de mentes cada vez mais brilhantes, com o intuito de mostrar que a teoria e prática devem andar sempre juntas para obtermos bons resultados na Educação no que se refere as Ciências Exatas. E é nesse contexto que trabalhamos um pouco do rigor matemático cujo foco é dar a maturidade necessária ao aluno do Ensino Médio para este estar preparado para enfrentar o estudo empregado no ensino superior.

Capítulo 1

Breve relato histórico

1.1 Um pouco da História do Cálculo

Em um contexto histórico geral, apenas os líderes de determinadas regiões, entidades ou movimentos se destacam nos livros de História. Entretanto, as pessoas que modificam significativamente a História como os grandes cientistas e os matemáticos criativos, raramente são mencionados, no entanto, é através deles que ocorre a evolução de muitas Ciências que modificam drasticamente o mundo. Então, torna-se importante observar a História com base nesses indivíduos esquecidos para compreender o desenvolvimento das Ciências e conseqüentemente da humanidade, pois estudar o passado de um determinado objeto é entendê-lo no tempo presente, para num futuro próximo traçar metas necessárias que desenvolvam ou aperfeiçoem o estudo em questão. É diante desse processo que a evolução do conhecimento humano se mostra como um resultado da conexão entre teoria e prática, necessidades humanas do dia-a-dia explicadas pela Matemática. Entretanto, como em outras áreas do conhecimento humano, o Cálculo foi desenvolvido em diversas partes do mundo, através de uma parceria entre problemas da realidade e a Matemática. Muitos foram os contribuidores desse ramo da Matemática, porém poucos se dedicaram e apresentaram com tanto rigor essa ferramenta matemática como os que citaremos a diante.

Numa visão resumida, os problemas de tangentes e quadraturas (determinação de áreas limitadas por curvas, eixos e ordenadas) foram a base para o progresso do também conhecido Cálculo Diferencial e Integral, onde o modelo geométrico exerceu um papel central e fundamental para o desenvolvimento do mesmo. Essa área de conhecimento está alicerçada em dois ramos: a derivação, que está relacionada com a descrição e mensuração da maneira como as coisas variam, se movem e crescem e; a integração, que é constituída através do processo de somas. E a sua aplicabilidade está presente em muitas Ciências como a Física, a Biologia, a Química e outras que possuem uma base matemática.

Baseado em resquícios do passado, precisamente em [1] e [11], encontra-se raízes profundas do Cálculo na Grécia Antiga, a qual, herdou muitas ideias matemáticas dos egípcios e

abilônios. Nesse período, entre tantos gregos, o matemático, físico e inventor *Arquimedes de Siracusa* (287-212 A.C.) foi o que mais se destacou nesse ramo matemático por causa das suas façanhas na Física. Através do método da exaustão, proposto por Eudoxus (408-355 a.C.), Arquimedes apresentou ideias características do Cálculo Integral ao construir e usar com tanta frequência e competência, métodos de integração em problemas de área e volume.

Entretanto, de acordo com as fontes supracitadas, até a idade moderna o Cálculo se restringia aos trabalhos de Arquimedes. Nessa época, mudanças significativas ocorreram, transformado o Cálculo em um diamante essencial para a Matemática Aplicada. Essas mudanças foram feitas por outros dois grandes matemáticos que por anos alimentaram uma rivalidade entre Alemanha e Inglaterra. Um desses dois autodidatas é o inglês *Issac Newton* (1642-1727) que, com o objetivo de resolver certos problemas como os de linhas curvas, apresentou grandes resultados ao que ele intitulava de "método de fluxões" como, formular regras e procedimentos sistemáticos para solucionar a maioria de problemas desse ramo, além de unificar as regras criadas por seus antecessores e, definir a diferenciação e a integração como operações inversas. Newton também buscou impor rigor em seus trabalhos, mas ele não conseguiu, causando assim controvérsias e preocupações em determinados detalhes de sua obra por mais de um século depois de sua morte. O outro grande nome é o alemão *Gottfried Leibniz* (1646-1716 d.C) que construiu um trabalho independente ao apresentado por Newton, chamando-o de Cálculo. Leibniz iniciou seu estudo a partir das relações entre áreas e com tais condições, propôs uma ideia de uma linguagem simbólica e geral, definiu a determinação de áreas e de tangentes como operações inversas, usou triângulos característicos para deduzir transformações gerais de área, entre outras contribuições. Todavia, por uma injustiça, ainda em vida, Leibniz foi acusado por muitos de plagiar o trabalho de Newton, onde, na verdade, tanto ele quanto Newton desenvolveram de forma única e independente esse diamante que precisara apenas ser lapidado devido os problemas de consistência lógica dos conceitos fundamentais.

Com isso, coube a outros matemáticos fundamentar teoricamente, o Cálculo, iniciado por Arquimedes e desenvolvido por Leibniz e Newton. Entre eles temos em destaque o francês *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857) que apresentou um novo enfoque de rigor ao Cálculo, especialmente a limites, continuidade, derivadas, integrais, séries e análise complexa. E foi de acordo com os trabalhos de Cauchy que o alemão *Georg Friedrich Bernard Riemann* (1826-1866) aperfeiçoou a integral e a intitulou como integral de Riemann e que, o outro alemão *Karl Wilhelm Theodor Weierstrass* (1815-1897) apresentou bons resultados sobre continuidade e diferenciabilidade.

Em resumo, o modelo geométrico, curva plotada no plano, exerceu um papel central no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral tal que o conceito de integração surgiu através da solução de problemas de áreas, volume e comprimento de arcos e, o conceito de diferenciação está associado aos problemas de tangente, curvatura e valores extremos. Enfim, todos os matemáticos modernistas supracitados, entre outros que não mencionamos, trabalharam no sentido de expandir e "desgeometrizar" a matemática criada pelos seus antecessores, porém eles

não sabiam que a elevariam a um patamar impressionante que hoje conhecemos por Análise, cuja base está no estudo de funções. E, após anos de desenvolvimento, esse ramo vem com seus métodos se tornando cada vez mais útil e aplicável para solucionar inúmeros problemas de várias Ciências como a determinação de valores extremos, isto é, a Otimização.

1.2 Motivação e Métodos do Trabalho

Na sala de aula das escolas públicas ou qualquer entidade educacional, a Matemática é vista sempre com receio e temor. Consequentemente, no meio social e profissional, vemos muitas situações que mostram os verdadeiros resultados do ensino da Matemática. Nas escolas então, a realidade é a mais crítica possível e mesmo assim fechamos os olhos para esse problema que alcança as universidades e posteriormente a mão-de-obra qualificada. Entretanto, isso parece um tanto contraditório diante de uma "evolução" educacional apresentada por algumas estatísticas. E assim, com esses números, muitos se perguntam o que está havendo com o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Na verdade, existem muitos fatores que contribuem para esse desânimo e resultados ruins de nossos alunos em relação a essa Ciência bastante útil para a sociedade. Então, não devemos fugir de nossas origens, pois a Matemática está presente na realidade dos estudantes, e o que devemos fazer é apenas de certa forma induzir e forçar os estudantes a usar o raciocínio matemático para compreender muitas situações que ocorrem de fato na realidade das pessoas.

Outro fator importante que vemos na disciplina de História é fato de estudar o passado para entender fatos presente. Logo, torna-se essencial o entendimento de como cada matemático construiu tal conhecimento que são estudados na Matemática nos dias de hoje, compreendendo a importância do mesmo em nossas vidas. Sendo assim, a Otimização que está alicerçada no Cálculo é um conhecimento bastante indicado para alcançar com êxito as mentes dos estudantes do ensino básico, uma vez que esses não tem a oportunidade de estudá-la.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho se apresenta sobre um breve contexto histórico e conceitual do Cálculo para posteriormente estudar um tipo de Matemática Aplicada conhecida como Otimização. O estudo se desenvolve com uma linguagem um pouco mais simples com o intuito de alcançar pelo menos estudantes aplicados em Matemática no ambiente do Ensino Médio, desejando proporcionar para estes a possibilidade de se aprofundar cada vez mais nesta Ciência Exata e em outras. E no decorrer desse estudo usa-se [5] como um auxílio para construir figuras, entre outros detalhes.

Capítulo 2

Funções

Na vida, assim como em muitas ocasiões que vivenciamos ao cursar o ensino médio, surgem diversas situações-matemáticas cujo valor de uma grandeza está ligada ao valor de uma segunda grandeza, determinado em termos matemáticos um par de valores, o qual, chamamos de **Relação**. Ao estudar o caso mais a fundo, percebe-se que essa relação de duas grandezas quaisquer está sob certas condições de dependência ou sob uma lei que permite tal relação, fato esse que, definimos como **Função**. Por exemplo, quando vamos a o supermercado nos deparamos com duas grandezas que são a quantidade e o preço referente a cada produto comprado, onde a lei em questão é que o preço a pagar é igual ao preço unitário vezes a quantidade comprada.

Os conceitos citados neste Capítulo podem ser mais explorados em [2], [4], [6] e [8].

Definição 2.1. *Função é uma relação tal que existe uma regra que associa a cada objeto em um conjunto X um e apenas um objeto de um conjunto Y , onde o conjunto X é chamado de **domínio** da função e o conjunto Y é chamado de **contradomínio** da mesma. Simbolicamente,*

$$f \text{ é uma função de } X \text{ em } Y \iff \forall x \in X \exists! y \in Y; (x, y) \in f.$$

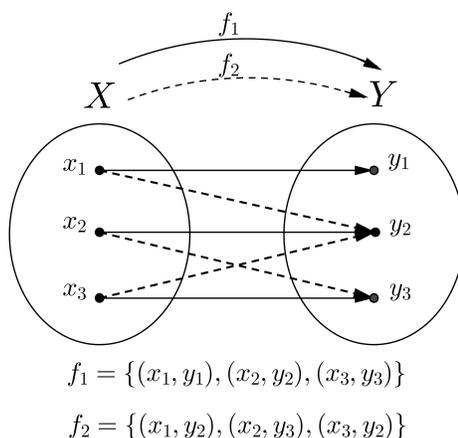


Figura 2.1: Exemplo de uma função através de diagrama.

Particularmente, uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função *real* de variável real. Nessas condições, o gráfico de f é um subconjunto do plano cartesiano \mathbb{R}^2 , isto é,

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in X \text{ e } y = f(x)\}.$$

Então, $(x, y) \in G(f)$ se, e somente se $x \in X$ e os números reais x e y satisfazem a lei de formação da f .

Exemplo 1. *Determine o valor que devo pagar se eu comprar 60 kg de açúcar à R\$ 1,89 a unidade.*

Solução: *Modelando a situação, temos a função preço $p : \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(n) = 1,89 \cdot n$, onde n é a quantidade de quilograma de açúcar comprados e $p(n)$ é o preço a pagar por essa quantia. Então, $p(60) = 113,4$, isto é, o valor a ser pago é de R\$ 113,40.*

Observação 2.1. *Resumidamente, uma função possui três características básicas: domínio, contradomínio e uma lei de formação que define o par de valores oriundo desses conjuntos. Vale ressaltar também que, os elementos pertencentes ao contradomínio que correspondem aos elementos do domínio formam um novo conjunto conhecido como a **Imagem** da função, um subconjunto do contradomínio.*

Diante dessas informações estudaremos também direta e indiretamente as operações de funções como *adição, subtração, multiplicação, divisão e composição*.

2.1 Função Polinomial

Definição 2.2. *Dados os números reais c_0, c_1, \dots, c_n com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $X, Y \subset \mathbb{R}$, chama-se **Função Polinomial** a função $f : X \rightarrow Y$ definida por $y = f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$.*

Observação 2.2. *Como a função polinomial está definida por um polinômio, então o grau, que é mensurado pelo monômio de maior grau deste polinômio, especifica o tipo de função polinomial que estamos estudando.*

Exemplo 2. *Qual é o volume de um cubo de aresta x ?*

Solução: *A aresta deve ser positiva por se tratar de volume, então o domínio dessa função é o conjunto dos números reais positivos. No entanto, o contradomínio pode ser o conjunto dos números reais, pois neste caso a imagem será um subconjunto do mesmo.*

Para finalizar, falta definir a lei de formação dessa função cuja regra está definida pela relação entre as grandezas comprimento e volume. Logo, definimos uma função $v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(x) = x^3$.

Função Afim

Definição 2.3. Uma função polinomial $f : X \rightarrow Y$ é dita Afim quando dados os números reais a e b , tem-se $f(x) = ax + b$. Particularmente, se nas mesmas condições $f(x) = ax$ com $a \neq 0$, então f é dita linear. E se dado um valor real b $f(x) = b$ para todo $x \in X$ então f é dita constante.

Definição 2.4. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : X \rightarrow Y$ tal que $y = f(x)$. Dados $x_1, x_2 \in X$, tem-se que

1. f é crescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
2. f é decrescente se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Teorema 2.1. Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : X \rightarrow Y$ crescente ou decrescente tal que $y = f(x)$. Se $f(x+h) - f(x)$ depender apenas de h , mas não de x , então f é uma função afim. (Demonstrado em [8], Apêndice 2, pag. 16)

Observação 2.3. Geometricamente, a função afim está definida por uma **Reta**.

Exemplo 3. Eduarda conhecida como Duda trabalha em uma loja de vestidos para casamento e ganha um valor fixo de R\$ 850,00 mais uma comissão de R\$ 60,00 por vestido vendido. Determine uma função que descreva o salário mensal de Eduarda. E sabendo que neste mês Duda vendeu 5 vestidos, quanto ela receberá esse mês?

Solução: Primeiramente, vamos modelar matematicamente tal problema com base em uma função que melhor descreve o mesmo. Para isso, sabemos que são necessários um domínio, um contradomínio e uma regra. Para começar, sabemos que as grandezas envolvidas nessa função são o valor do salário e a quantidade de vestidos vendidos, onde aquele depende deste. Sendo assim, sabe-se que quantidade condiz aos números naturais, valor em dinheiro aos números racionais positivos e a regra em questão é que o salário mensal de Duda é igual ao salário fixo mais a comissão, então temos uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $s_1(x) = 850 + 60 \cdot x$. Em segundo plano, temos que $x = 5$, então $s(5) = 850 + 60 \cdot 5 = 1.150$, isto é, o salário de Duda este mês é de R\$ 1.150,00.

Exemplo 4. Luiz é um garçom um pouco desastrado que ganha R\$ 960,00 mensal, porém ele é alertado pelo seu chefe que seu salário poderá diminuir caso ele quebre alguma taça importada, a qual custa R\$ 32,89 cada. No mês passado Alexandre recebeu R\$ 696,88, então quantas taça ele quebrou? E quantas taças ele pode quebrar para receber pelo menos um salário mínimo? (Consideremos o salário mínimo o valor de R\$ 788,00)

Solução: Baseando-se no exemplo 3, temos que o salário de Luiz pode ser determinado por

uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 960 - 32,89 \cdot x$, onde x é a quantidade de taças quebradas. Para responder a primeira pergunta, tem-se que

$$f(x) = 696,88 \implies 960 - 32,89 \cdot x = 696,88 \implies x = 8 \text{ taças,}$$

e a segunda que

$$f(x) \geq 788 \implies 960 - 32,89 \cdot x \geq 788 \implies x \leq \frac{172}{32,89} \implies x = 5 \text{ taças.}$$

Nos exemplos 3 e 4 percebemos alguns conceitos matemáticos estudados neste tópico como equação, inequação e sinal da função. O exemplo 3 apresenta uma função afim crescente, enquanto o exemplo 4 mostra uma função afim decrescente. Entretanto, é através do gráfico dessas funções que estudamos com mais profundidade as propriedades de cada uma.

Exemplo 5 ([8], pag. 12). *Uma corrida de táxi custa a reais por km rodado mais uma taxa fixa de b , chamada a "bandeirada". Então, o preço de uma corrida de uma corrida de x km é de $f(x) = ax + b$ reais.*

A partir desse exemplo podemos fazer uma grande análise desse estudo. Na função afim $f(x) = ax + b$, o coeficiente linear $b = f(0)$ chama-se o **valor inicial** e o coeficiente angular $a = f(1) - f(0)$ é chamado de **taxa de variação** de f . Logo, pelo teorema 2.1, $a = f(x + 1) - f(x)$, onde a determina a variação de $f(x)$ por unidade de variação de x . Observando por outro lado, temos que f é a soma de uma função linear com uma função constante, ou seja, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ tal que $f_1(x) = ax$ e $f_2(x) = b$. Portanto, através do coeficiente angular, podemos fazer três análises

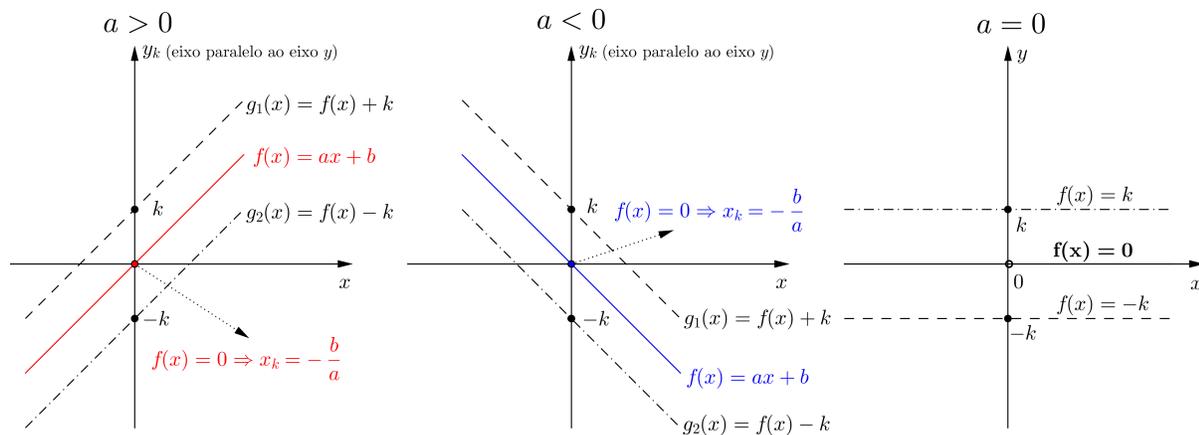


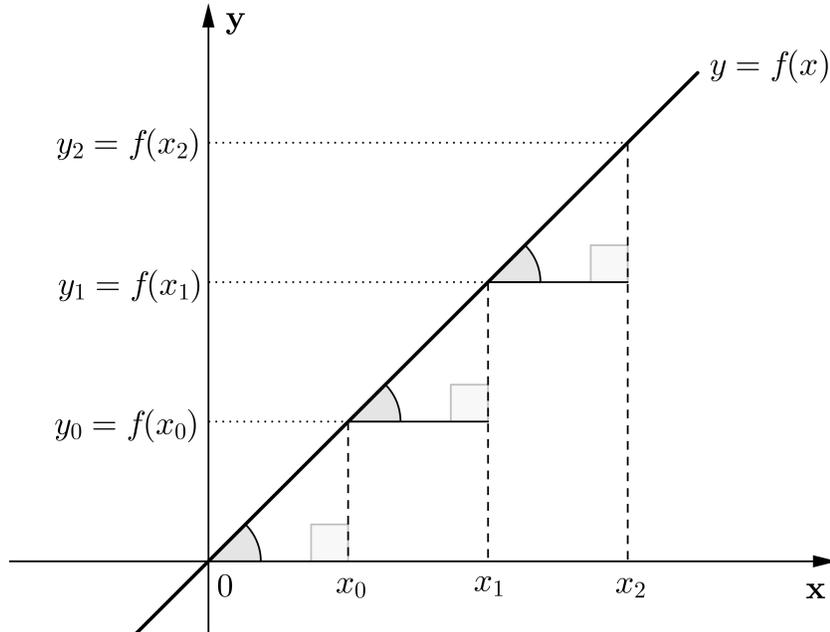
Figura 2.2: O gráfico da função afim.

Quando $a > 0$, a função afim $f(x) = ax + b$ é crescente, pois $x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2 \implies ax_1 + b < ax_2 + b \implies f(x_1) < f(x_2)$;

Quando $a < 0$, a função afim $f(x) = ax + b$ é decrescente, pois $x_1 < x_2 \implies ax_1 > ax_2 \implies ax_1 + b > ax_2 + b \implies f(x_1) > f(x_2)$;

Quando $a = 0$, a função afim $f(x) = ax + b$ é constante, pois $f(x) = b$.

No primeiro e no segundo caso, observa-se que o zero da função, onde $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$, define o período de transição para a função f ser positiva ou negativa. E analiticamente, a função afim pode ser entendida como



$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dots = \frac{y - y_0}{x - x_0} = a \implies y - y_0 = a(x - x_0)$$

com a sendo uma constante real, pois as grandezas x e y crescem ou decrescem proporcionalmente.

Função Quadrática

Definição 2.5. Determinamos como função Quadrática uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, b e c sendo constantes reais.

Exemplo 6. A área de um quadrado pode ser modelado em uma função quadrática. Considere um quadrado de aresta x , então podemos assim obter a área desse quadrado como sendo uma função $A : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $A(x) = x^2$.

Para um melhor estudo deste tipo de função, podemos tomar sua lei de formação e a reescrevemos numa outra maneira algébrica conhecida como *forma canônica* para fazer algumas análises. Seja a função quadrática f tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, então

$$f(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c.$$

Em seguida temos,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c \\
 &= a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \frac{b^2}{4a} + c \\
 &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
 f(x) &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right). \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

Analisando a equação 2.1 temos que $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\frac{4ac - b^2}{4a}$ é uma constante real. Dessa maneira,

- Se $a > 0$, então o menor valor de $f(x)$ é $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$;
- Se $a < 0$, então o maior valor de $f(x)$ é $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Podemos também fazer outra análise algébrica. Se $f(x) = 0$ e $a \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
 a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) &= 0 \\
 a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},
 \end{aligned}$$

o que nos permite afirmar que

- Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, existem duas raízes reais;
- Se $\Delta = 0$, existe uma única raiz real;
- Se $\Delta < 0$, não existe nenhuma raiz real.

Agora vamos mostrar que a função quadrática é representada geometricamente por uma *parábola*. Isto é, considere no plano xy uma reta d e um ponto F fora dela. A *parábola* de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes do ponto F e da

reta d . Vale lembrar que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta, no caso a reta d . A reta que contém o foco F e é perpendicular à diretriz chama-se *eixo da parábola*. E o *vértice* V é o ponto da curva que está mais próximo da diretriz d .

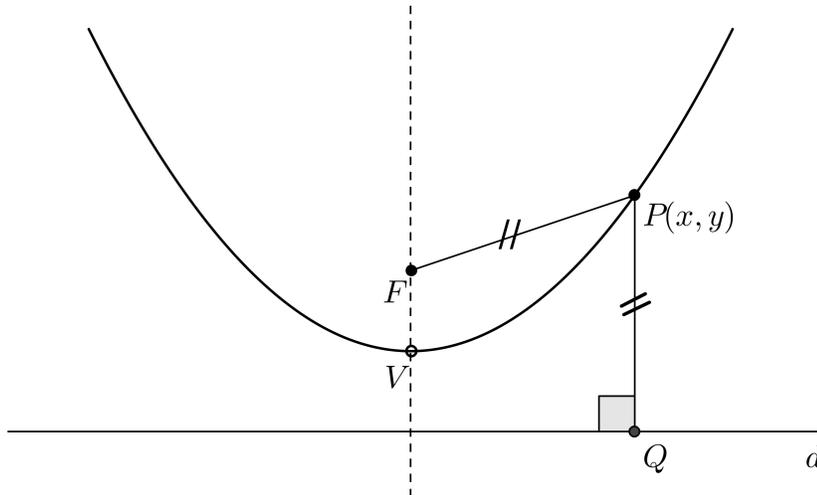
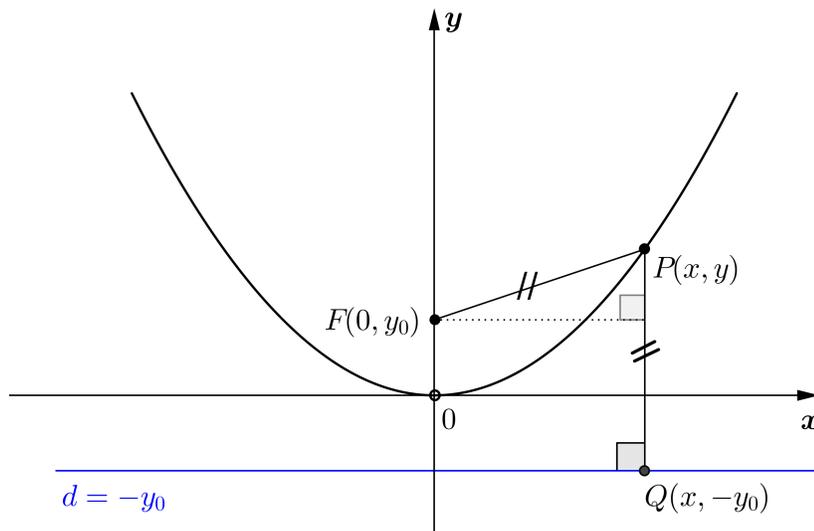


Figura 2.3: O gráfico da função quadrática.

$$\overline{FP} = \overline{PQ} \tag{2.2}$$

Demonstração. Demonstraremos analiticamente um caso em que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, depois usaremos esse fato para compreender essa afirmação em um contexto mais geral. Então, tome o plano cartesiano, considerando que o vértice da parábola está exatamente na origem e que $F = F(0, y_0)$ com $y_0 \neq 0$, onde conseqüentemente, $d = -y_0$.



Baseando-se no teorema de Pitágoras e nas extensões do conceito de módulo estudados nas

seções posteriores e, na equação 2.2 temos

$$\begin{aligned}\sqrt{(y - y_0)^2 + x^2} &= |y - (-y_0)| \\ (\sqrt{(y - y_0)^2 + x^2})^2 &= |y + y_0|^2 \\ (y - y_0)^2 + x^2 &= (y + y_0)^2 \\ y^2 - 2yy_0 + y_0^2 + x^2 &= y^2 + 2yy_0 + y_0^2 \\ x^2 &= 4yy_0 \\ y &= \frac{1}{4y_0} \cdot x^2 \\ y &= a \cdot x^2 \text{ com } a = \frac{1}{4y_0}.\end{aligned}$$

□

2.2 Funções Trigonômicas

Para esse estudo, faz-se necessário alguns conceitos básicos referentes ao estudo de triângulos, mas não nos aprofundaremos tanto, pois esse não é o objetivo do estudo. No entanto, caso seja necessário, procure fazer um estudo mais detalhado sobre o assunto, principalmente a respeito das condições necessárias e suficientes que determinam que uma figura plana seja um triângulo.

Congruência e semelhança de triângulos e triângulo retângulo

A princípio, apresentaremos condições necessárias e suficientes para que dois triângulos possam ser considerados iguais, isto é, estudaremos a igualdade de triângulos, a qual recebe o nome especial de *congruência*. Conceitualmente, dois triângulos são ditos *congruentes* se existe uma correspondência entre os vértices de um e do outro, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como os lados opostos a vértices correspondentes. Com base na definição, a figura 2.4 mostra dois triângulos congruentes ABC e $A_0B_0C_0$, com as correspondência de vértices $A \longleftrightarrow A_0$, $B \longleftrightarrow B_0$ e $C \longleftrightarrow C_0$. Para tais triângulos, temos

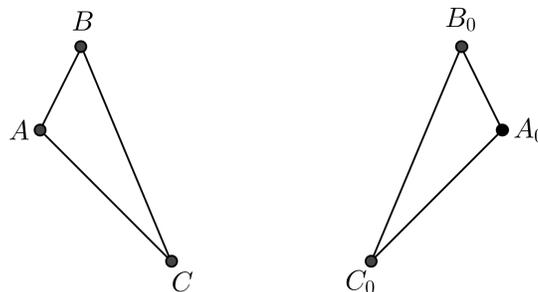
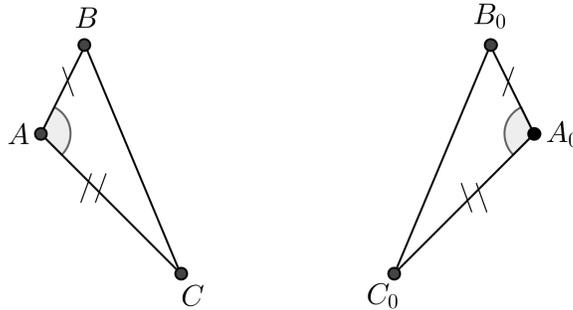


Figura 2.4: Dois triângulos congruentes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}_0, \quad \hat{B} = \hat{B}_0 \quad \text{e} \quad \hat{C} = \hat{C}_0 \\ \overline{AB} = \overline{A_0B_0} \quad \overline{AC} = \overline{A_0C_0} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = \overline{B_0C_0} \end{array} \right. .$$

Podemos também verificar tal congruência, baseando-se apenas em três axiomas.

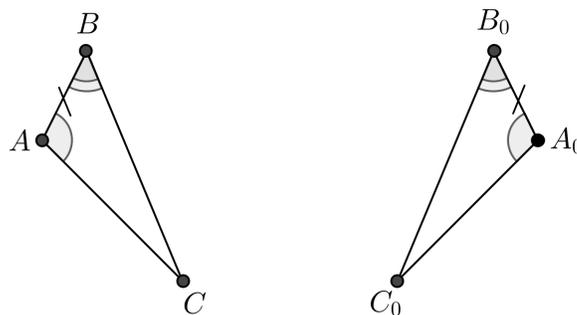
Axioma 1. (LAL) Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.



Dados dois triângulos ABC e $A_0B_0C_0$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A_0B_0} \\ \overline{AC} = \overline{A_0C_0} \\ \hat{A} = \hat{A}_0 \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A_0B_0C_0.$$

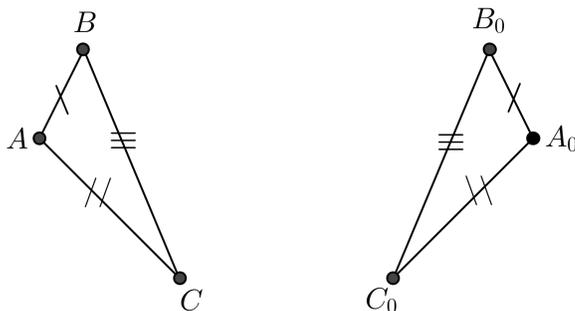
Axioma 2. (ALA) Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.



Dados dois triângulos ABC e $A_0B_0C_0$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}_0 \\ \hat{B} = \hat{B}_0 \\ \overline{AB} = \overline{A_0B_0} \end{array} \right\} \stackrel{ALA}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A_0B_0C_0.$$

Axioma 3. (LLL) Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.



Dados dois triângulos ABC e $A_0B_0C_0$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A_0B_0} \\ \overline{AC} = \overline{A_0C_0} \\ \overline{BC} = \overline{B_0C_0} \end{array} \right\} \stackrel{LLL}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta A_0B_0C_0.$$

Podemos, por outro lado, fazer outra relação entre triângulo que denominamos *semelhança*. Neste caso, dizemos que dois triângulos são *semelhantes* quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão (quociente) entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma. Em resumo, temos que se $\Delta ABC \sim \Delta A_0B_0C_0$, ou seja, ΔABC e $\Delta A_0B_0C_0$ são *semelhantes*, então existe um $k > 0$ tal que

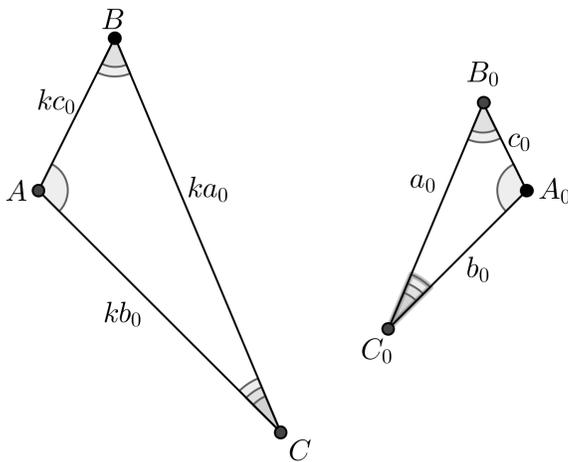


Figura 2.5: Dois triângulos semelhantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}_0, \hat{B} = \hat{B}_0 \text{ e } \hat{C} = \hat{C}_0 \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A_0B_0}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A_0C_0}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_0C_0}} = k \end{array} \right. .$$

Semelhante a congruência, com base na definição anterior, a *semelhaça de triângulos* apresenta três proposições suficientes e usuais.

Proposição 2.1. (LLL) *Sejam os triângulos ABC e $A_0B_0C_0$ no plano, tais que $\frac{\overline{AB}}{A_0B_0} = \frac{\overline{AC}}{A_0C_0} = \frac{\overline{BC}}{B_0C_0}$, então $\Delta ABC \sim \Delta A_0B_0C_0$.*

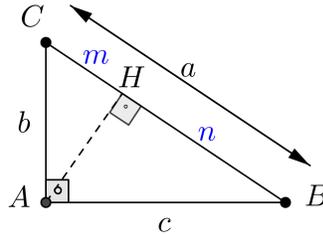
Proposição 2.2. (LAL) *Sejam os triângulos ABC e $A_0B_0C_0$ no plano, tais que $\frac{\overline{AB}}{A_0B_0} = \frac{\overline{BC}}{B_0C_0}$ e $\hat{B} = \hat{B}_0$, então $\Delta ABC \sim \Delta A_0B_0C_0$.*

Proposição 2.3. (AA⁰) *Sejam os triângulos ABC e $A_0B_0C_0$ no plano, tais que $\hat{A} = \hat{A}_0$ e $\hat{B} = \hat{B}_0$, então $\Delta ABC \sim \Delta A_0B_0C_0$.*

Dando continuidade, vale lembrar que um triângulo é dito *triângulo retângulo* quando um de seus ângulos internos é reto, isto é, igual a 90° ou $\frac{\pi}{2}$ radianos.

Teorema 2.2. (Teorema de Pitágoras) *Seja ΔABC um triângulo retângulo em A com os catetos $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ e, a hipotenusa $\overline{BC} = a$. Então, nessas condições, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.*

Demonstração. Por hipótese temos que ΔABC é um triângulo retângulo em A com os catetos $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ e, a hipotenusa $\overline{BC} = a$. Considere agora H sendo o pé da altura relativa à hipotenusa tal que $\overline{BH} = n$ e $\overline{CH} = m$.



Dando continuidade e observando os triângulos ΔABC e ΔHBA , verifica-se que $\hat{CAB} = \hat{AHB}$ e $\hat{ABC} = \hat{HBA}$. Então, através da proposição 2.3, concluímos que o $\Delta ABC \sim \Delta HBA$. E da mesma forma, mostra-se que o $\Delta ABC \sim \Delta HAC$.

Dessas duas análises obtemos os seguintes resultados:

- $\Delta ABC \sim \Delta HBA \implies \frac{c}{a} = \frac{n}{c}$, isto é,

$$c^2 = an; \tag{2.3}$$

- $\Delta ABC \sim \Delta HAC \implies \frac{b}{a} = \frac{m}{b}$, isto é,

$$b^2 = am. \tag{2.4}$$

Somando as equações 2.3 e 2.4 obtemos $b^2 + c^2 = a \cdot (m+n)$. Logo, nessas condições temos que $a^2 = b^2 + c^2$. \square

Razões trigonométricas de um triângulo retângulo

Definição 2.6. Considere $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A com os catetos $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$, a hipotenusa $\overline{BC} = a$ tal que $x = \hat{A}BC$. Então,

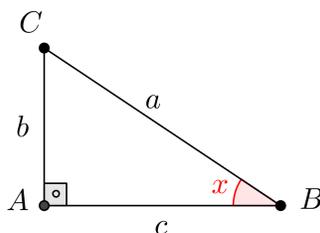


Figura 2.6: Razões trigonométricas.

1. O seno de x ou $\text{sen } x$ é a razão entre o cateto oposto ao ângulo x e a hipotenusa, o qual está definido por

$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a};$$

2. O cosseno de x ou $\text{cos } x$ é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo x e a hipotenusa, o qual está definido por

$$\text{cos } x = \frac{\text{cateto adjacente a } x}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a};$$

3. A tangente de x ou $\text{tan } x$ é a razão entre o cateto oposto ao ângulo x e o cateto adjacente ao ângulo x , a qual definimos também por

$$\text{tan } x = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{cateto adjacente a } x} = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{b}{c}.$$

A partir da definição anterior podemos apresentar algumas *relações* importantes da trigonometria. O primeiro resultado que podemos apresentar se baseia no teorema de Pitágoras. Neste caso, seguindo as mesmas condições do teorema e da definição obtemos uma igualdade que conhecemos como *relação fundamental* e está definida por

$$b^2 + c^2 = a^2 \implies \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \implies \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 \text{ para todo } 0^\circ < x < 90^\circ. \quad (2.5)$$

Uma segunda relação trigonométrica denominamos como *lei dos cossenos* porque é uma relação bastante útil que envolve os três lados de um triângulo qualquer e o cosseno de um de seus

ângulos internos. Vale relembra que o teorema de Pitágoras já expôs a situação do triângulo retângulo, então basta analisarmos apenas duas outras situações: uma é quando o triângulo é acutângulo (todos os ângulos internos agudos) e outra quando o triângulo é obtusângulo (um dos ângulos internos é obtuso).

Em resumo, tome um $\triangle ABC$ acutângulo e $\triangle A_0B_0C_0$ obtusângulo com \hat{C}_0 sendo o ângulo obtuso, onde os lados deste são $\overline{A_0B_0} = c_0$, $\overline{B_0C_0} = a_0$ e $\overline{C_0A_0} = b_0$ e, os lados daquele são $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$. Em seguida, considere a partir do $\triangle ABC$ um ponto D que é o pé da altura $\overline{BD} = h$ relativa à \overline{AC} com $\overline{AD} = d$ e, de outro modo, considere com base no $\triangle A_0B_0C_0$ um ponto D_0 pertencente a reta A_0C_0 tal que $\triangle A_0B_0D_0$ seja retângulo em D_0 cuja altura é $\overline{B_0D_0} = h_0$ e $\overline{A_0D_0} = d_0$, como se pode observar na figura a seguir.

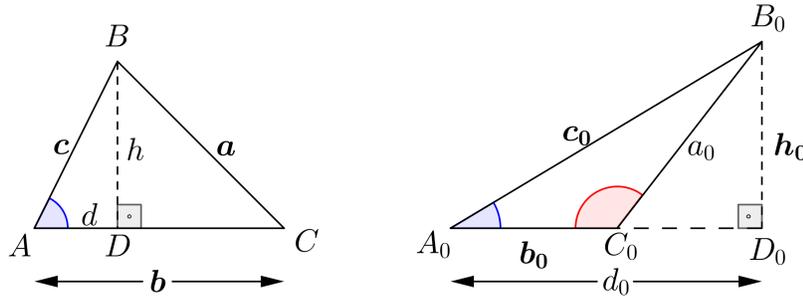


Figura 2.7: Lei dos cossenos.

Dessa forma, usando a definição 2.6 e o teorema de Pitágoras, podemos obter a partir de uma análise sobre os ângulos \hat{A} e \hat{A}_0 os seguintes resultados

$$\begin{cases} \triangle DBC : & a^2 = h^2 + (b - d)^2 \\ \triangle ABD : & c^2 = h^2 + d^2 \text{ e } d = c \cdot \cos \hat{A} \end{cases} \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A};$$

$$\begin{cases} \triangle C_0B_0D_0 : & a_0^2 = h_0^2 + (d_0 - b_0)^2 \\ \triangle A_0B_0D_0 : & c_0^2 = h_0^2 + d_0^2 \text{ e } d_0 = c_0 \cdot \cos \hat{A}_0 \end{cases} \implies a_0^2 = b_0^2 + c_0^2 - 2 \cdot b_0 \cdot c_0 \cdot \cos \hat{A}_0. \quad (2.6)$$

tal que isso ocorre para todo ângulo (em radianos) pertencente ao intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Agora, ao analisarmos de forma semelhante a figura 2.7, mas tomando como referência o triângulo $\triangle A_0B_0C_0$ e seu ângulo \hat{C}_0 , obtemos que

$$\begin{cases} \triangle A_0B_0C_0 : & c_0^2 = h_0^2 + (b_0 + \overline{C_0D_0})^2 \\ \triangle C_0B_0D_0 : & a_0^2 = h_0^2 + \overline{C_0D_0}^2 \text{ e } \overline{C_0D_0} = a_0 \cdot \cos \hat{C}_0 \end{cases} \implies c_0^2 = a_0^2 + b_0^2 + 2 \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot \cos \hat{C}_0 \quad (2.7)$$

tal que isso acontece para todo ângulo (em radianos) pertencente ao intervalo $(0, \pi)$.

Outra relação que também se torna importante é a chamada *lei dos senos* que está fortemente

relaciona com a circunferência. Nesta relação, considera-se um $\triangle ABC$ qualquer inscrito em uma circunferência de raio r tal que seus lados são $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$. Depois, toma-se um ponto D diferente dos vértices do triângulo, porém pertencente a circunferência tal que $\overline{BD} = 2r$, como pode ser visualizado na figura 2.8. Nessa situação, como tanto o ângulo \widehat{BAC} quanto \widehat{BDC} estão relacionados ao mesmo arco \widehat{BC} , então $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Uma outra observação que se verifica é que o $\triangle DBC$ é reto no vértice C , pois o arco \widehat{DB} é exatamente uma semicircunferência e assim, $\widehat{BCD} = 90^\circ$. Logo,

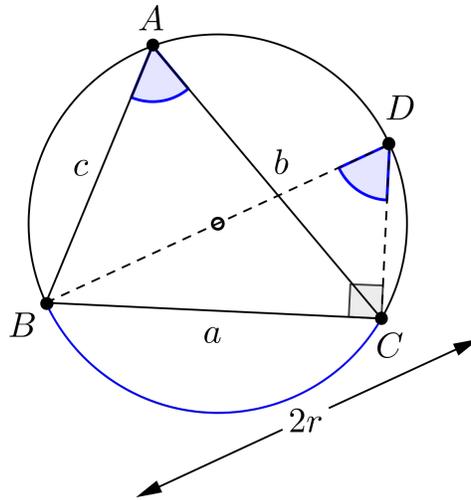


Figura 2.8: Lei dos senos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle DBC \text{ é reto em } C \\ \widehat{D} = \widehat{BDC} = \widehat{BAC} = \widehat{A} \end{array} \right. \Rightarrow \text{sen } \widehat{A} = \text{sen } \widehat{D} = \frac{a}{2r} \implies \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = 2r.$$

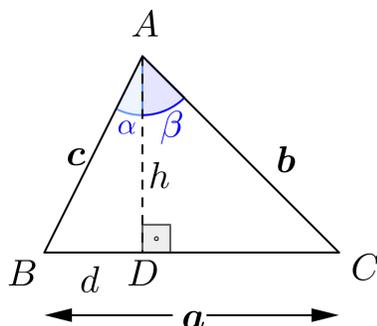
Por fim, analisando da mesma maneira o $\triangle ABC$, mas tomando agora como referência o ângulo $\widehat{ABC} = \widehat{B}$ e numa outra situação o ângulo $\widehat{BCA} = \widehat{C}$, conclui-se que

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = 2r \quad \forall \quad 0^\circ < \widehat{A} + \widehat{B}, \widehat{A} + \widehat{C}, \widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ. \quad (2.8)$$

Prosseguindo e, com base nas relações anteriores, podemos definir pelo menos mais duas *relações* essenciais para o nosso estudo, as quais denotamos como *relações da soma de dois ângulos*.

Mostraremos que dados os ângulos $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tem-se que $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha$. E os demais ficam a cargo do leitor. Considere um $\triangle ABC$ qualquer como na figura a seguir. Então:

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \triangle ABD : d = c \cdot \text{sen } \alpha \\ \triangle ACD : a - d = b \cdot \text{sen } \beta \end{array} \right. \Rightarrow a = c \cdot \text{sen } \alpha + b \cdot \text{sen } \beta$$



$$(II) \left\{ \Delta ABD : \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow a = \text{sen } \hat{A} \cdot \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \text{ e } \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{b} \cdot \text{sen } \hat{B} \right.$$

Substituindo (II) em (I) temos

$$\begin{aligned} \text{sen } \hat{A} \cdot \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} &= c \cdot \text{sen } \alpha + b \cdot \text{sen } \beta \\ \text{sen } \hat{A} &= \frac{\text{sen } \hat{B}}{b} \cdot c \cdot \text{sen } \alpha + \text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } \beta \\ \text{sen } \hat{A} &= \text{sen } \hat{C} \cdot \text{sen } \alpha + \text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } \beta \\ \text{sen } (\alpha + \beta) &= \cos \beta \cdot \text{sen } \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta. \end{aligned}$$

Logo, resumidamente, podemos definir as seguintes relações:

$$\text{sen } (\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta \pm \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha \quad (2.9)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta. \quad (2.10)$$

Observação 2.4. As relações trigonométricas apresentadas até aqui valem para qualquer valor real (mensurado em radianos), uma vez que o estudo no círculo trigonométrico referente a função seno e cosseno mostra que a partir do intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 1º quadrante, os resultados são equivalentes.

Funções trigonométricas

Definição 2.7. Definimos como função trigonométrica real, uma função f cuja lei de formação está determinada por seno e/ou cosseno de um valor pertencente aos reais.

Exemplo 7. Sejam as funções $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = \cos x$.

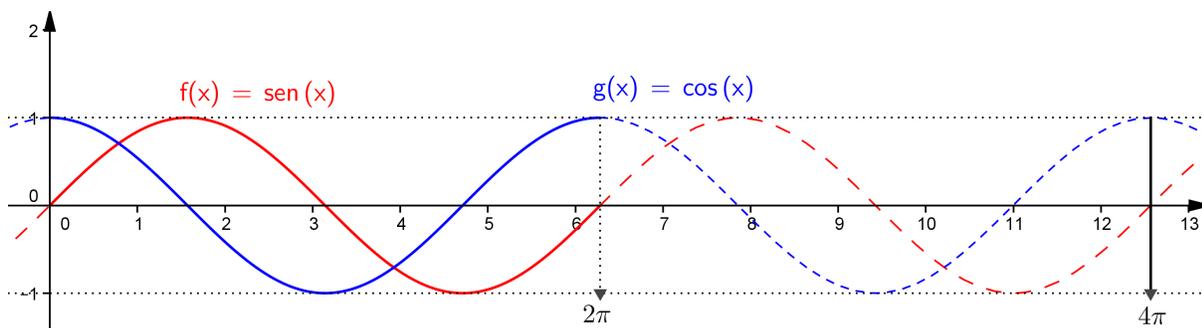


Figura 2.9: Gráficos da função seno e cosseno.

2.3 Função Modular

Valor absoluto e desigualdades

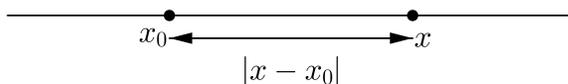
Definição 2.8. Considere $x \in \mathbb{R}$, então definimos o valor absoluto ou módulo de x através de pelo menos três situações.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$|x| = \max\{-x, x\} \quad (2.12)$$

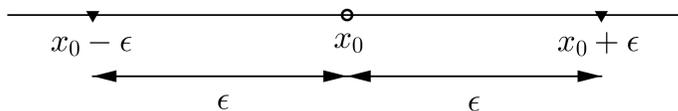
$$|x| = \sqrt{x^2}. \quad (2.13)$$

Numa visão geométrica $|x|$ representa a distância até a origem. Então, dados quaisquer $x, x_0 \in \mathbb{R}$ temos que $|x - x_0|$ define a distância de x a x_0 .



De modo geral, se existe um $\epsilon > 0$ tal que $|x| < \epsilon$, então $-\epsilon < x < \epsilon$. Sendo assim, considere que a distância de x a x_0 é menor que ϵ , logo

$$|x - x_0| < \epsilon \iff -\epsilon < x - x_0 < \epsilon \iff x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon.$$



Propriedades

Sejam os números reais x_0 e x . Então:

1. $|x + x_0| \leq |x| + |x_0|$;

Demonstração. Devemos analisar duas situações. Primeiro, se $x \leq |x|$ e $x_0 \leq |x_0|$, então $x + x_0 \leq |x| + |x_0|$. Em outra situação, se $-x \leq |x|$ e $-x_0 \leq |x_0|$, então $-(x + x_0) \leq |x| + |x_0|$. Logo, com base nas duas situações conclui-se que $|x + x_0| = \max\{x + x_0, -(x + x_0)\} \leq |x| + |x_0|$. \square

2. $|x \cdot x_0| = |x| \cdot |x_0|$.

Demonstração. Facilmente se verifica tal propriedade, pois

$$|x \cdot x_0|^2 = (x \cdot x_0)^2 = x^2 \cdot x_0^2 = |x|^2 \cdot |x_0|^2 \Rightarrow |x \cdot x_0| = |x| \cdot |x_0|.$$

\square

Função modular

Definição 2.9. Um função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$ é dita função modular.

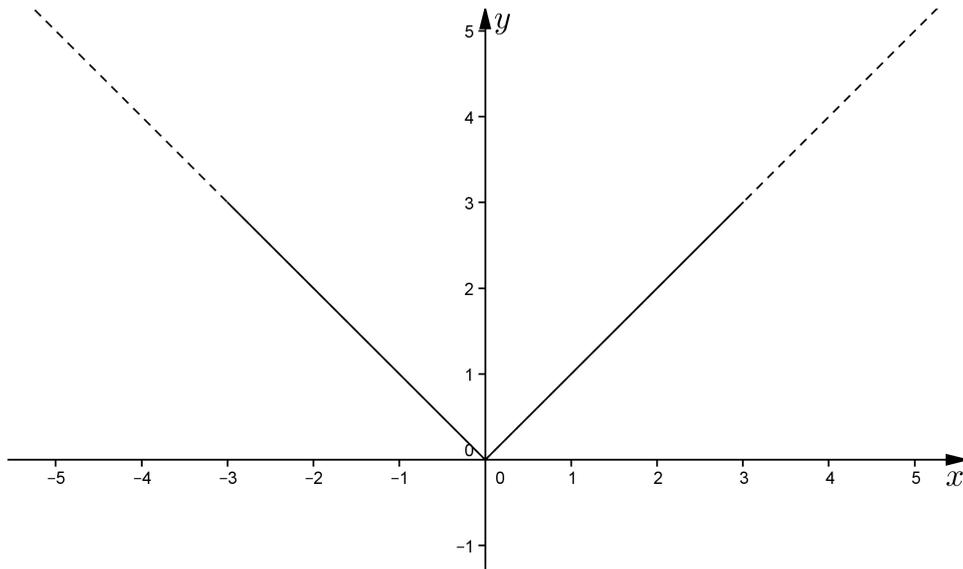


Figura 2.10: Gráfico da função modular.

Observação 2.5. Dependendo das operações aplicadas entre funções, observa-se que o gráfico da função resultante deve mudar um pouco ou drasticamente desses gráficos que definimos anteriormente.

2.4 Função Composta

Definição 2.10. Tome os conjuntos X, Y e $W \subset \mathbb{R}$. E sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow W$ funções reais. Chama-se de função composta de f e g à função $h : X \rightarrow W$ tal que $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in X$.

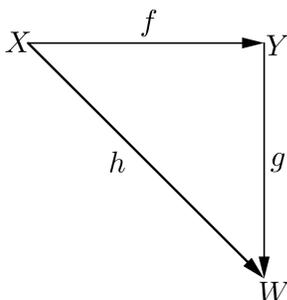
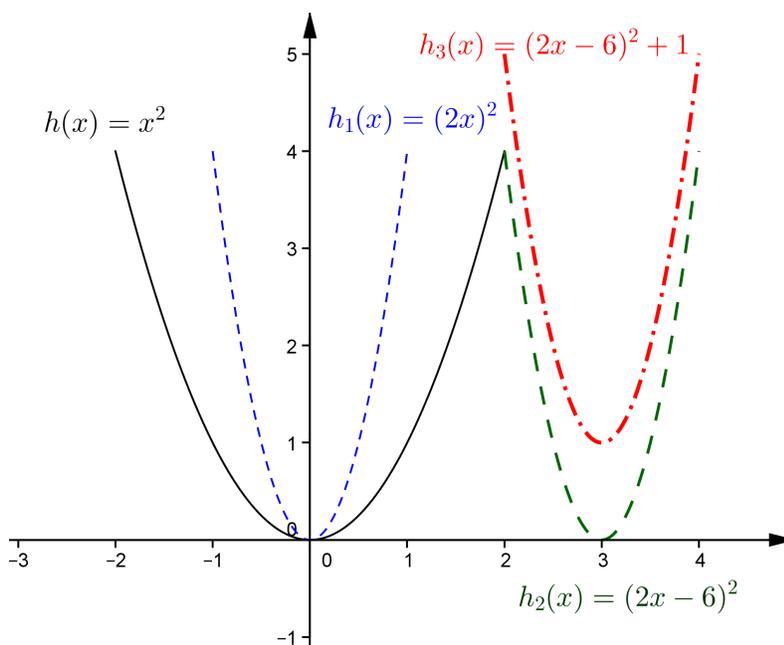


Figura 2.11: Função Composta.

Exemplo 8. Sejam as funções reais $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a_1 \cdot x + a_0$ e $g(x) = |x|$ com a_0 e a_1 sendo constantes reais. Então, usando a composição de funções obtemos uma outra função denominada $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = g(f(x)) = |a_1 \cdot x + a_0|$ com a_0 e a_1 sendo constantes reais.

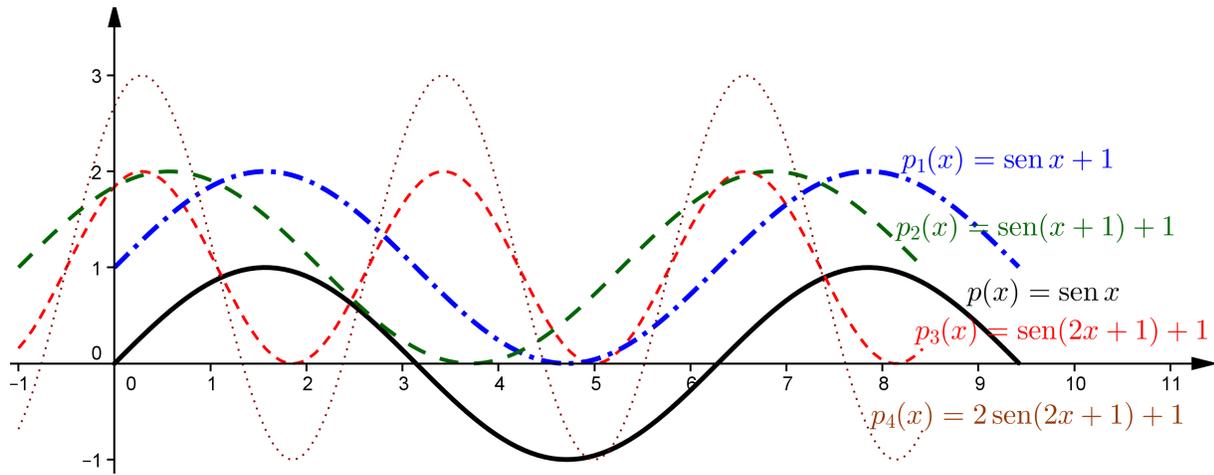
Exemplo 9. Sejam as funções reais $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a_1 \cdot x + a_0$ e $g(x) = x^2 + b$ com $a_0, a_1 \neq 0$ e b sendo constantes reais. Então, usando a composição de funções obtemos a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = g(f(x)) = b_1 \cdot (a_1 \cdot x + a_0)^2 + b_0$ com $a_0, a_1 \neq 0$ e b sendo constantes reais.



Nessas condições, podemos estudar em h a variação dos parâmetros com a_0 , a_1 e b para observar o comportamento da função quadrática no plano cartesiano como, por exemplo, verifica-se na figura anterior.

Exemplo 10. Sejam as funções reais $m, n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $m(x) = c_1 \cdot \text{sen } x + c_0$ e $n(x) = d_1 \cdot x + d_0$ com $c_0, c_1 \neq 0, d_0$ e d_1 números reais fixos. Então, nessas condições, podemos usar uma operação que definimos como função composta e construir a função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = m(n(x)) = c_1 \cdot \text{sen}(d_1 \cdot x + d_0) + c_0$ com $c_0, c_1 \neq 0, d_0$ e d_1 números reais fixos.

Com essa função podemos melhor estudar a função seno, observando os parâmetros c_0, c_1, d_0 e d_1 e perceber como se comporta a função com a variação desses parâmetros.



Capítulo 3

Cálculo Diferencial

Os conceitos apresentados neste capítulo podem ser mais explorados em [3].

3.1 Sequências em \mathbb{R}

Definição 3.1. Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa-se um número real $x_n = x(n)$, chamado o n -ésimo termo da sequência.

As notações usadas para indicar uma sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ são $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (x_n) , ou ainda (x_1, \dots, x_n, \dots) .

Exemplo 11. Sejam as funções $x, y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:

- $x(n) = \left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$;
- $y(n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots\right)$.

Observação 3.1. Como as sequências são funções reais, então elas podem ser somadas, subtraídas e multiplicadas.

Definição 3.2. Uma sequência (x_n) é dita limitada superiormente (ou inferiormente), se existe um $k > 0$ tal que $x_n \leq k$ ($x_n \geq k$), para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que (x_n) é limitada quando ela for limitada inferiormente e superiormente, ou seja, existe um $k > 0$ tal que $|x_n| < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3.3. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é considerada monótona quando, para todo $n \in \mathbb{N}$, a mesma atende a uma das quatro definições abaixo onde:

1. (x_n) é dita decrescente se $x_{n+1} < x_n$;
2. (x_n) é dita não crescente se $x_{n+1} \leq x_n$;
3. (x_n) é dita crescente se $x_{n+1} > x_n$;

4. (x_n) é dita não decrescente se $x_{n+1} \leq x_n$.

Definição 3.4. Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, uma subsequência de (x_n) é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$, e é indicada pelas notações $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$.

Exemplo 12. Seja uma sequência monótona decrescente $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ definida $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$, então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2i}, \dots\right)$ com $\mathbb{N}_1 = \{2, 4, 6, \dots, 2i, \dots\} \subset \mathbb{N}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 3.5. Sejam (x_n) uma sequência de números reais e l um número real. Dizemos que (x_n) converge para l , ou é convergente, e escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, quando para qualquer número real $\delta > 0$, existe um número natural $n_0 \geq 1$, de modo que $x_n \in (l - \delta, l + \delta)$ para todo $n > n_0$, onde $(l - \delta, l + \delta)$ é um intervalo aberto. Podemos expressar a definição na forma a seguir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \iff \forall \delta > 0 \exists n_0 \geq 1; n > n_0 \implies |x_n - l| < \delta.$$

Exemplo 13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. De fato, pois considerando um número real $\delta > 0$ qualquer e $n_0 > 1$ um número natural tal que $n_0 > \frac{1}{\delta}$ temos que $\frac{1}{n_0} < \delta$ e se, $n > n_0$, conclui-se que

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \delta.$$

Observação 3.2. O limite de uma sequência, quando existe, é único e pode ser demonstrado facilmente por absurdo.

3.2 Limite e Continuidade de uma função

Seja a função $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{(2x-1) \cdot (x+1)}{x+1}$. Então, estudando tal função quando x assume valores próximos de -1, isto é, atribuindo valores para x à esquerda e à direita de -1 obtemos os seguintes resultados para $f(x)$:

x	-2	-1.5	-1.25	-1.125	-1.0625		-0.875	-0.75	-0.5	-0.25	0
f(x)	-5	-4	-3.5	-3.25	-3.125	-3	-2.75	-2.5	-2	-1.5	-1

Considerando a tabela anterior como base, podemos fazer a seguinte análise:

1. Para os valores de x à esquerda de -1 temos:

- $|-2 - (-1)| = 1 \implies |-5 - (-3)| = 2$

- $|-1.5 - (-1)| = 0.5 \implies |-4 - (-3)| = 1$
- $|-1.25 - (-1)| = 0.25 \implies |-3.5 - (-3)| = 0.5$
- $|-1.125 - (-1)| = 0.125 \implies |-3.25 - (-3)| = 0.25$
- $|-1.0625 - (-1)| = 0.0625 \implies |-3.125 - (-3)| = 0.125$

2. Para os valores de x à direita de -1 temos:

- $|0 - (-1)| = 1 \implies |-1 - (-3)| = 2$
- $|-0.25 - (-1)| = 0.75 \implies |-1.5 - (-3)| = 1.5$
- $|-0.5 - (-1)| = 0.5 \implies |-2 - (-3)| = 1$
- $|-0.75 - (-1)| = 0.25 \implies |-2.5 - (-3)| = 0.5$
- $|-0.875 - (-1)| = 0.125 \implies |-2.75 - (-3)| = 0.25$

Note que dado um ϵ tem-se um $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Generalizando, pode-se afirmar que, qualquer que seja o $\epsilon > 0$, tem-se um $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ tal que

$$0 < |x - (-1)| < \delta \implies |f(x) - (-3)| < \epsilon.$$

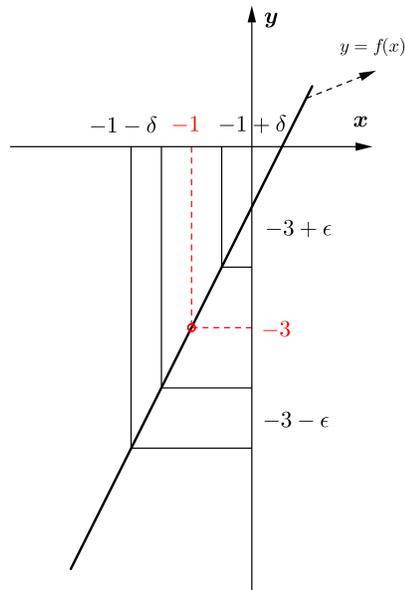


Figura 3.1: Definição geométrica de Limite.

Limite de uma função

Definição 3.6. *Sejam uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$ tal que $I = (a, b)$ é um intervalo aberto. Diz-se que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$.*

Simbolicamente, temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ . } \equiv \text{ . } \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Exemplo 14. Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 1$. Mostre através da definição que o $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -3$.

Solução: Tomemos um valor real $\delta > 0$ tal que $0 < |x - (-1)| = |x + 1| < \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}$ próximo de -1 . Observe então que

$$|f(x) - (-3)| = |(2x - 1) - (-3)| = |2x + 2| = |2| \cdot |x + 1| < 2\delta = \epsilon,$$

uma vez que $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$. Logo, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{2} > 0$ tal que $0 < |x - (-1)| < \delta$ implica $|f(x) - (-3)| < \epsilon$. Em outra maneira, isso quer dizer que o $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -3$.

Exemplo 15. Demostre através da definição que o $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$.

Solução: Considere um valor real $\delta > 0$ tal que $0 < |x - 1| < \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}$ próximo de 1. Observe então que

$$|x^2 - 1| = |(x - 1) \cdot (x + 1)| = |(x - 1) \cdot ((x - 1) + 2)| = |(x - 1)^2 + 2 \cdot (x - 1)| \Rightarrow$$

$$|x^2 - 1| \leq |(x - 1)^2| + |2 \cdot (x - 1)| = |x - 1|^2 + |2| \cdot |x - 1| \Rightarrow$$

$$|x^2 - 1| < \delta^2 + 2\delta = (\delta + 1)^2 - 1 = \epsilon,$$

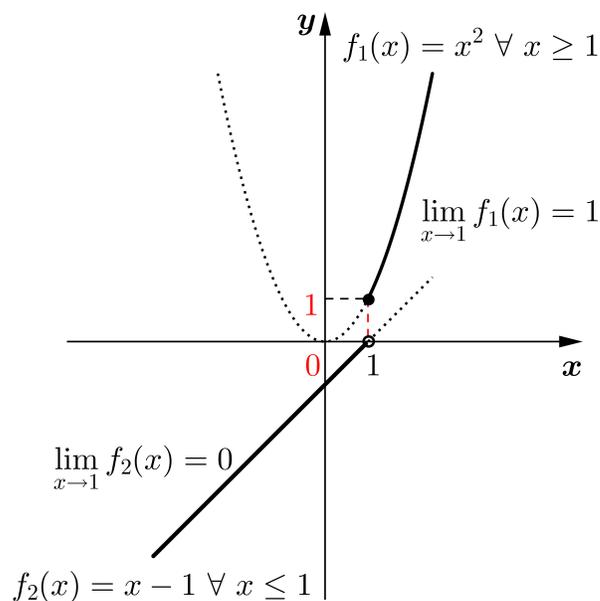
uma vez que $\delta = \sqrt{\epsilon + 1} - 1 > 0$. Logo, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \sqrt{\epsilon + 1} - 1 > 0$ tal que $0 < |x - 1| < \delta$ implica $|x^2 - 1| < \epsilon$. Isto é, o $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$.

Proposição 3.1. (Unicidade do limite de uma função) Se o $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Demonstrado em ([3], pag. 25).

Exemplo 16. Consideremos a função f definida em \mathbb{R} , dada por $f(x) = x - 1$ se $x \leq 0$ e $f(x) = x + 1$ se $x > 0$. Essa função não admite limite se x tende para 0. Por exemplo, se tomarmos $x_n = -\frac{1}{n}$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} - 1\right) = -1$. Por outro lado, se tomarmos $x_n = \frac{1}{n}$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right) = 1$.

Exemplo 17. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 1 \\ x - 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$. Pela proposição 3.1 verificamos que o $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe, pois quando x tende a 1 pela esquerda o limite da f é 0, enquanto que quando x tende a 1 pela direita o limite da f é 1.



Propriedades de Limite

Sejam f e g duas funções em \mathbb{R} tais que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, então:

$$P_1. \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \text{ com } c \text{ sendo uma constante real;}$$

$$P_2. \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot L \text{ com } c \text{ sendo uma constante real;}$$

$$P_3. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \pm M;$$

$$P_4. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \cdot M;$$

$$P_5. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n = L^n \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$P_6. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ para } M \neq 0;$$

$$P_7. \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L} \text{ (se } n \in \mathbb{N} \text{ e } L \geq 0 \text{ ou se } n \text{ é ímpar e } L \leq 0).$$

Você pode consultar as demonstrações dessas propriedades em [3] ou em outro livro de Cálculo I.

Proposição 3.2. *O limite de uma função polinomial $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ com c_0, c_1, \dots, c_n constantes reais, quando x tende a x_0 , é igual ao valor numérico de $f(x)$, $f(x_0)$ para $x = x_0$.*

Demonstração. Faremos a demonstração em duas etapas. Primeiramente, temos de forma imediata que $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, pois dado $\epsilon = \delta > 0$ temos $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon$. Por fim,

usando as propriedades do limite e a primeira parte desta demonstração, temos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n) \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} c_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} c_1x + \cdots + \lim_{x \rightarrow x_0} c_nx^n \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} c_0 + c_1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x + \cdots + c_n \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x^n \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} c_0 + c_1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} x + \cdots + c_n \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n \\
 &= c_0 + c_1x_0 + \cdots + c_nx_0^n = f(x_0).
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 18. Usando as propriedades do limite e a proposição 3.2 podemos calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x + 2) \stackrel{Prop. 3.2}{=} 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 4$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2 - x + 1}{3x + 2} \right)^2 \stackrel{P_5}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x + 1}{3x + 2} \right)^2 \stackrel{P_6}{=} \left(\frac{\lim_{x \rightarrow -1} 2x^2 - x + 1}{\lim_{x \rightarrow -1} 3x + 2} \right)^2 \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2 - x + 1}{3x + 2} \right)^2 \stackrel{Prop. 3.2}{=} \left(\frac{2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 1}{3 \cdot (-1) + 2} \right)^2 = 4$

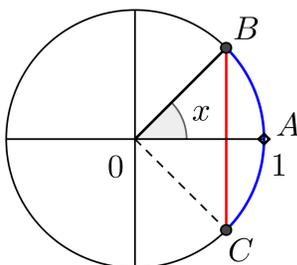
Teorema 3.1. (Teorema do confronto) Sejam f, g, h funções reais e $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ e $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in I - x_0$, onde I é um intervalo aberto, então $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Demonstração. Demonstrado em ([3], pag. 89). □

Proposição 3.3. Mostre que $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ e o $\lim_{x \rightarrow \bar{x}_0} \cos x = \cos \bar{x}_0$ para todo $x_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Mostraremos o primeiro limite e faremos essa demonstração em duas etapas.

1. Mostraremos que $\forall x \in \mathbb{R}$, tem-se $|\sin x| \leq |x|$. Então, consideremos $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Pela figura a seguir, temos que o segmento \overline{BC} tem comprimento menor que o arco \widehat{BC} .



Portanto, $2 \operatorname{sen} x \leq 2x$ e, assim, $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Entretanto, se $x > \frac{\pi}{2}$, temos que $|\operatorname{sen} x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < x = |x|$. Por outro lado, se $x < 0$, então $-x > 0$ e pelo que acabamos de mostrar, $|\operatorname{sen}(-x)| \leq |-x|$. Como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, então concluímos também que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ para $x < 0$, finalizando aqui a etapa 1.

2. Agora, através das identidades trigonométricas, temos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2} \right)$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(\frac{x+x_0}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-x_0}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+x_0}{2} \right) \quad (3.1)$$

e analogamente

$$\operatorname{sen} x_0 = \operatorname{sen} \left(\frac{x+x_0}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-x_0}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+x_0}{2} \right), \quad (3.2)$$

onde subtraindo a equação 3.1 pela equação 3.2, obtém-se

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+x_0}{2} \right).$$

Então, com base na demonstração da etapa 1 temos que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = \left| 2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+x_0}{2} \right) \right| = 2 \cdot \left| \operatorname{sen} \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \right| \cdot \left| \cos \left(\frac{x+x_0}{2} \right) \right|$$

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq 2 \cdot \left| \operatorname{sen} \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = |x-x_0|.$$

Nesses termos, podemos considerar que $0 \leq |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq |x-x_0|$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} |x-x_0| = 0$ e, baseado no teorema 3.1, concluir que $\lim_{x \rightarrow x_0} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = 0$ e consequentemente que $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$.

Consequentemente, com base nas identidades trigonométricas e nas propriedades de limite temos que

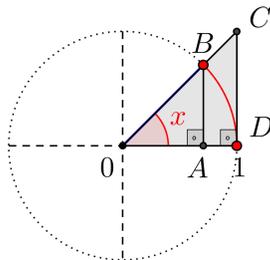
$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}_0} \cos^2 x = \lim_{x \rightarrow \bar{x}_0} (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 1 - \left(\lim_{x \rightarrow \bar{x}_0} \operatorname{sen} x \right)^2 = 1 - \operatorname{sen}^2 \bar{x}_0 = \cos^2 \bar{x}_0.$$

Isto é, o $\lim_{x \rightarrow \bar{x}_0} \cos x = \cos \bar{x}_0$. □

Proposição 3.4 (Limite Fundamental Trigonométrico). $O \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Demonstração. Considere sem perda de generalidade o intervalo aberto $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Então, observando a seguinte figura temos que a

- Área do triângulo OAB é igual a $\frac{(\text{sen } x) \cdot (\text{cos } x)}{2}$;
- Área do setor circular ODB é igual a $\frac{x}{2}$;
- Área do triângulo ODC é igual a $\frac{\tan x}{2}$.



Nessas condições obtemos

$$\frac{(\text{sen } x) \cdot (\text{cos } x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}.$$

Como $\text{sen } x > 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, segue que

$$\text{cos } x < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\text{cos } x}.$$

Nesses termos e baseado nas propriedades de limite e na proposição 3.3, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\text{cos } x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \text{cos } x} = \frac{1}{1} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \text{cos } x.$$

Então, pelo teorema 3.1 obtemos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen } x} = 1$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen } x}} = 1.$$

Analogamente, verifica-se que esse limite vale para o intervalo aberto $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. □

Continuidade

Definição 3.7. *Sejam uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ tal que $y = f(x)$. Dizemos que a função f é contínua em x_0 se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ou seja, o $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe e é igual a $f(x_0)$.

De forma mais ampla, f é dita contínua se isso ocorrer para todo $x_0 \in X$, isto é, se tais condições forem verificadas em todo domínio da função.

Exemplo 19. Vimos anteriormente na proposição 3.3 que as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ são ambas contínuas, pois $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ e $\lim_{x \rightarrow \bar{x}_0} \cos x = \cos \bar{x}_0$ para todo $x_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 20. Com base na proposição 3.2, tem-se que toda função polinomial definida em \mathbb{R} é contínua.

3.3 Derivada

Como foi observado no Capítulo 1, o Cálculo é um produto de um longo processo evolutivo desde a Grécia Antiga e está dividido em duas partes extremamente importantes: Cálculo Diferencial e Cálculo Integral. Aquele baseou-se no problema das tangentes cujo foco era calcular o coeficiente angular da reta tangente à uma curva num ponto dado sobre a mesma. Em síntese, sejam uma curva $y = f(x)$ e um ponto fixo $P = (x_0, f(x_0))$ sobre essa curva. Considere $Q = (x, y)$ um segundo ponto próximo de P onde $\overleftrightarrow{PQ} = s$ é uma reta secante à curva $y = f(x)$. Então, agora, a reta tangente em P definida por t pode ser compreendida como a posição-limite da reta secante variável quando Q desliza ao longo da curva em direção de P .

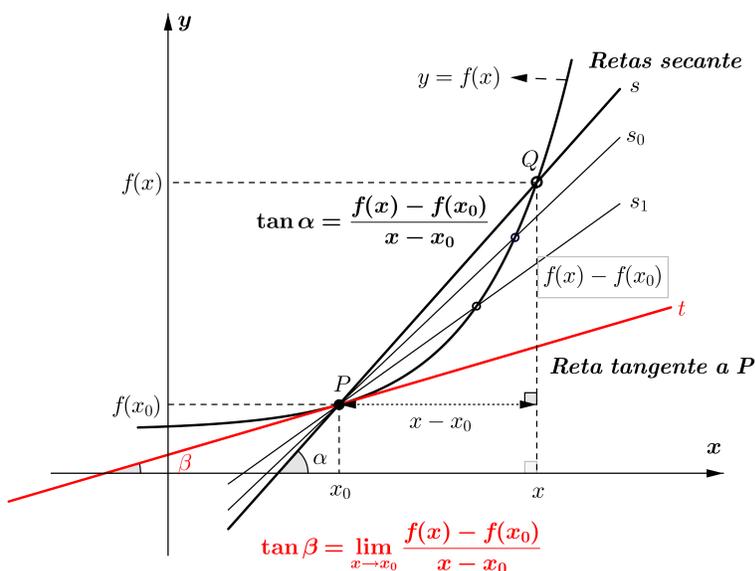


Figura 3.2: Definição geométrica de Derivada.

Como existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e a função tangente é contínua, então

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \tan \alpha = \tan(\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha) = \tan \beta.$$

Daí, conclui-se que a derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

Vale ressaltar que o conteúdo referente a Derivadas e Regras de Derivação aqui exposto pode ser estudado com mais riqueza de detalhes em [3] e [11] ou em qualquer outro livro de Cálculo I.

Definição 3.8. *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no aberto X e $x_0 \in X$, tal que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ está definido para todo $x \neq x_0$. Se existe o limite e este limite é finito quando x tende a x_0 , chamamos este limite de derivada de f no ponto x_0 , isto é,*

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (3.3)$$

Observação 3.3. *Podemos, através da definição 3.8, fazer uma mudança de variável, tomando $h = x - x_0$. Neste caso, quando x se aproxima de x_0 , tem-se que a diferença que tomamos como h tende para 0. Então, f' pode ser reescrito como*

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.4)$$

Exemplo 21. *Determine a derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$ no ponto $x_0 = 1$.*

Solução: *O exemplo se resume em encontrar $f'(1)$. Então com base na equação 3.3 efetuaremos dois passos:*

1^o **passo:** *Calcular $f'(x_0)$ através da definição $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, logo*

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 3x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3 \cdot (x + x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 3 \cdot (x + x_0) = 6x_0;$$

2^o **passo:** *Por fim, calcular $f'(1)$, ou seja, $f'(1) = 6 \cdot 1 = 6$.*

Exemplo 22. *Use a definição para determinar a derivada de $g(x) = \text{sen } x$ e $h(x) = \text{cos } x$.*

Solução: *Consideremos um ponto x_0 fixo e arbitrário. Com base na equação 3.4 e nas propriedades de limite temos*

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x_0 + h) - \text{sen}(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{sen } x_0 \cdot \text{cos } h + \text{sen } h \cdot \text{cos } x_0) - \text{sen } x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\text{sen } x_0 \cdot \frac{(\text{cos } h - 1)}{h} + \frac{\text{sen } h}{h} \cdot \text{cos } x_0 \right) \\ &= \text{sen } x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{cos}^2 h - 1)}{h \cdot (\text{cos } h + 1)} + \text{cos } x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \end{aligned}$$

e de acordo com a proposição 3.4, Limite fundamental, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx}(x_0) &= -\text{sen } x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2 h}{h \cdot (\cos h + 1)} + \cos x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \\ &= -\text{sen } x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{\cos h + 1} + \cos x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \\ &= -\text{sen } x_0 \cdot 1 \cdot 0 + \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0.\end{aligned}$$

Analogamente, podemos também determinar que $\frac{dh}{dx}(x_0) = -\text{sen } x_0$.

Exemplo 23. Sejam as funções $f_1(x) = c$ e $f_2(x) = x^n$ com c constante real e $n \in \mathbb{N}$, ambas definidas em \mathbb{R} . Nessas condições, determine f'_1 e f'_2 .

Solução: Usaremos a equação 3.3 da definição para determinar as derivadas, então considere novamente x_0 fixo, logo através das propriedades de limite temos

$$f'_1(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0 \quad \forall x_0 \in D \subset \mathbb{R},$$

onde D é o domínio de f_1 . Em poucas palavras, a derivada de qualquer função constante é 0. Por outro lado, com base também na proposição 3.2

$$\begin{aligned}f'_2(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} x \cdot x_0^{n-2} + \lim_{x \rightarrow x_0} x_0^{n-1} \\ &= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = n \cdot x_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Como x_0 é arbitrário, então $f'_2(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Equação da Reta Tangente

De maneira particular, se queremos obter a equação da reta tangente t ao gráfico de uma curva $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$, em que f é derivável basta tomar como base a equação da reta tangente

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.5)$$

Regras de Derivação

Sejam f e g funções definidas em um intervalo aberto I e suponha que sejam deriváveis em $x_0 \in I$. Então:

1. (Derivada da Soma) A função soma $f + g$ é derivável em x_0 e vale que

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

2. (Derivada do Produto) A função produto $f \cdot g$ é derivável em x_0 e vale que

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0);$$

3. (Derivada do Quociente) Se $g(x_0) \neq 0$, então a função quociente $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e vale que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)};$$

4. (Regra da Cadeia) Se f e g são deriváveis e $h(x) = f(g(x))$, obedecendo a operação composição, então h é derivável e h' é dada pelo produto

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (3.6)$$

Exemplo 24. O cálculo da derivada da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - x \cdot \text{sen } x$ está definido no seguinte raciocínio:

Por primeiro, através da regra derivação da soma, tem-se que

$$f'(x) = ((x^2 + 2)^{\frac{1}{2}})' - (x \cdot \text{sen } x)'$$

Em seguida, com base na regra da cadeia e do produto, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 2)' - ((x)' \cdot \text{sen } x + x \cdot (\text{sen } x)') \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x - \text{sen } x - x \cdot \cos x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} - \text{sen } x - x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Exemplo 25. A derivada da função $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{1}{x} + \cos(x^3)$ segue da mesma forma o procedimento anterior.

Usando a regra da soma temos que

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' + (\cos(x^3))'.$$

Por outro lado, usando as regras quociente e cadeia, verifica-se que

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} - \text{sen}(x^3) \cdot (x^3)' \\ &= -\frac{1}{x} - 3x^2 \cdot \text{sen}(x^3).\end{aligned}$$

Caso queira se aprofundar mais nos conceitos sobre limite, continuidade e derivada de uma função com apenas uma variável basta estudar detalhadamente a referência [3].

Capítulo 4

Otimização

São muitas as situações, nas mais diversas Ciências, que se torna útil o conhecimento da aplicabilidade do Cálculo. Dentre as aplicações mais notáveis e importantes do Cálculo Diferencial estão aquelas em que se buscam maximizar ou minimizar determinadas funções. Em nosso cotidiano surgem inúmeros problemas referente a essa área de estudo que os matemáticos e outras pessoas consideram interessantes e essenciais para serem solucionados. Por exemplo, na Economia, um homem de negócios procura maximizar o lucro e minimizar os custos; na Engenharia, um engenheiro ao projetar um novo automóvel deseja maximizar a eficiência, assim como um piloto de linha aérea tenta minimizar o tempo de voo e o consumo de combustível. Em Ciências naturais, por exemplo, um raio de luz atravessa um sistema de lentes ao longo de uma trajetória que minimiza o tempo total de percurso; e, em outro caso, um fio flexível suspenso assume uma forma que minimiza a energia potencial em virtude da gravidade. Sendo assim, quando tais problemas citados anteriormente puderem ser expressos em termos de variáveis e funções, o que nem sempre é possível, teremos as ferramentas do Cálculo Diferencial disponíveis para nos ajudar a compreendê-los e/ou resolvê-los. Em si, problemas de otimização são problemas em que alguma grandeza é dada por uma função de uma ou mais variáveis e a informação que buscamos consiste em encontrar o máximo ou mínimo da função.

Neste capítulo usaremos alguns resultados de [7] e [10]. Logo, mais formalmente, tal problemática consiste em

maximizar ou **minimizar** uma função $f(x)$

sujeito a $x \in X \subset \mathbb{R}$,

onde, geralmente, o conjunto X é definido por restrições de igualdade e/ou desigualdade. Em outras palavras, **máximos** e **mínimos** de uma função são, respectivamente, os maiores e menores valores que a função assume em seu domínio, os quais, são chamados *valores extremos* da função, tal que neste caso, estes são ditos *extremos absolutos*. Também são importantes os *valores extremos* em uma vizinhança de um ponto do domínio e estes, são denominados *extremos*

locais.

4.1 O problema em Otimização

Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$. Então, consideremos dois tipos de situações em otimização:

Definição 4.1. *Seja $x_0 \in X$, onde $f(x_0)$ é um valor extremo global de f em X , chamado também de extremo absoluto. Então:*

- 1) x_0 é um ponto de mínimo global de f em X se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in X$;
- 2) x_0 é um ponto de máximo global de f em X se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in X$.

Observação 4.1. *Se $f(x) > f(x_0)$ ou $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in X$ tal que $x \neq x_0$, diremos que se trata de um extremante global estrito em X .*

Definição 4.2. *Seja o intervalo aberto $I = (a, b) \subset X$ tal que para $x_0 \in I$, tem-se que $f(x_0)$ é um valor extremo local de f em I . Então:*

- 3) x_0 é um ponto de mínimo local de f em I se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in I$;
- 4) x_0 é um ponto de máximo local de f em I se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in I$.

Observação 4.2. *Se $f(x) > f(x_0)$ ou $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in I$ tal que $x \neq x_0$, diremos que se trata de um extremante local estrito em I .*

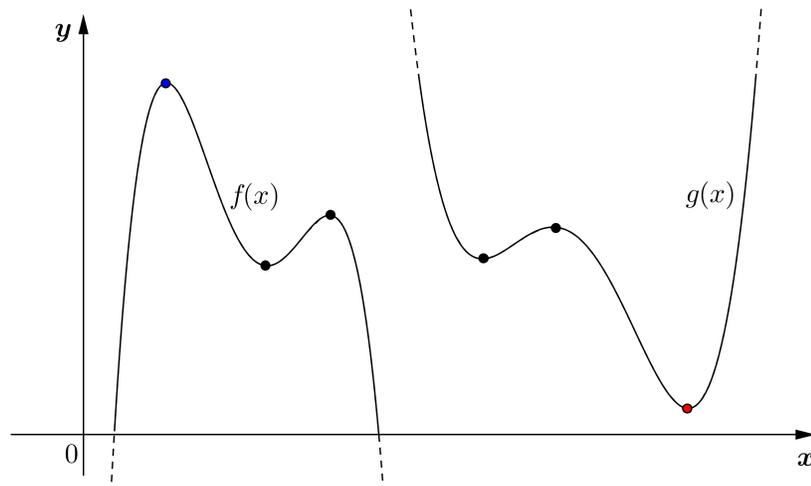


Figura 4.1: Apresentação geométrica de Máximos e Mínimos.

Teorema 4.1 (Teorema de Weierstrass). *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $y = f(x)$. Então, existem números reais x_1 e $x_2 \in [a, b]$ tais que para todo $x \in [a, b]$,*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Demonstração. Demonstrado em [7], página 81. \square

Teorema 4.2 (Teorema de Rolle). *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $y = f(x)$ com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) , então existe pelo menos um número real $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = 0.$$

Demonstração. Com base no teorema de Weierstrass f atinge seu valor mínimo em x_1 e seu valor máximo em x_2 tais que $x_1, x_2 \in [a, b]$. Se $a = x_1$ e $b = x_2$, então $x_1 = x_2$ e f será constante pois $f(a) = f(b)$. Daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se c estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$. \square

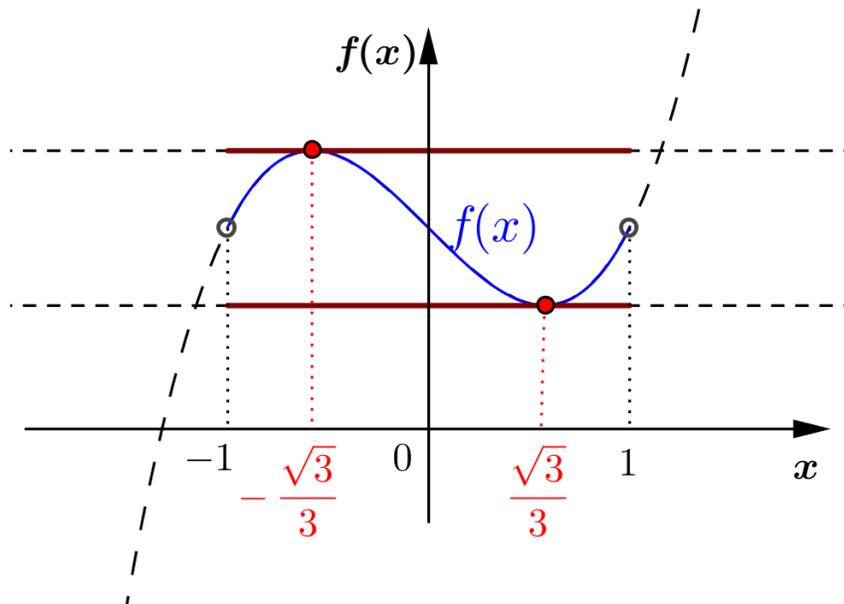
Exemplo 26. *Seja a função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x + 1$. Mostre que existe pelos menos um $x \in [-1, 1]$ tal que $f'(x) = 0$.*

Temos que $f(-1) = f(1) = 1$ e f é contínua. Pelo teorema de Rolle, há pelo menos um valor $x \in (-1, 1)$ tal que $f'(x) = 0$.

Como $f(x) = x^3 - x + 1 \implies f'(x) = 3x^2 - 1$, então

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Neste caso, tanto $\frac{\sqrt{3}}{3}$ quanto $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ estão contidos no intervalo aberto $(-1, 1)$.



Teorema 4.3 (Teorema do Valor Médio). *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $y = f(x)$. Se f é derivável em (a, b) , então existe pelo menos um número real $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Tomemos uma função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - d \cdot x$, onde d é uma constante real escolhida de modo que $g(a) = g(b)$, isto é, $d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Então, pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = f'(c) - d = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

O teorema do valor médio relaciona um aspecto global do comportamento da função (a variação média de f em todo o percurso do domínio) com um aspecto local (a derivada de f em um valor do domínio). Em outras palavras, se um objeto está na posição $s = 10$ m no tempo $t = 1$ s e está na posição $s = 40$ m no tempo $t = 7$ s, então podemos calcular sua velocidade média por

$$v_m = \frac{40 - 10}{7 - 1} = 5 \text{ m/s}.$$

O teorema do Valor Médio mostra que não só a velocidade média é de 5 m/s, como a *velocidade instantânea* em algum instante do percurso é de 5 m/s.

Exemplo 27. Seja uma função $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$. Tome os pontos $A = (0, f(0))$ e $B = (2, f(2))$ pertencentes ao gráfico de f tal que $\overleftrightarrow{AB} = r$ é a reta que passa por A e B . Encontre um número $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c)$ é igual ao coeficiente angular de r .

Neste caso, como f é uma função polinomial, então f é contínua e derivável em $[0, 2] \subset \mathbb{R}$. Logo, através do teorema do Valor Médio existe ao menos um $c \in (0, 2)$, um intervalo aberto, tal que $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$, então:

O coeficiente angular da reta que passa por A e B é

$$f'(c) = \frac{8 - 0}{2 - 0} = 4.$$

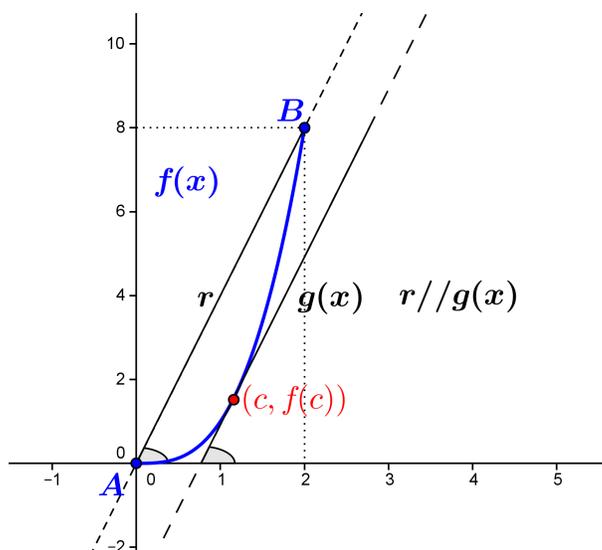
Como $f(x) = x^3$ então $f'(x) = 3x^2$. Portanto,

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 = 4 \implies x = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Logo, para $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \in (0, 2)$, temos $f'(c)$ igual ao coeficiente angular de r . Isto é, r é paralela a reta que tangencia f no ponto $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, definida pela equação da reta tangente

$$g(x) - f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = f'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \implies g(x) - \frac{8\sqrt{3}}{9} = 4 \cdot \left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

e pode ser observado na figura a seguir.



4.2 A busca de solução em Otimização

Teorema 4.4 (Condição necessária.). *Seja $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua dada por $y = f(x)$. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = x_0$ com $x_0 \in (a, b)$ e f é derivável em x_0 , então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Faremos a demonstração apenas para uma situação de mínimo local, pois o outro caso é análogo.

Suponha que x_0 é um minimizador local de f . Por hipótese, $f'(x_0)$ existe e podemos definir por

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (4.1)$$

Como $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x suficientemente próximo de x_0 , então a expressão $f(x) - f(x_0) \leq 0 \forall x$ suficientemente próximo de x_0 . Daí, como $x - x_0 > 0$ para $x_0 < x$ e $x - x_0 < 0$ para $x_0 > x$, temos que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ para } x_0 < x,$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ para } x < x_0$$

desde que x esteja suficientemente próximo de x_0 .

Com base nessas duas observações e em 4.1 concluímos que $f'(x_0) \geq 0$ e $f'(x_0) \leq 0$, logo $f'(x_0) = 0$. \square

Definição 4.3. *Um ponto x_0 é chamado de ponto crítico de uma função real f e, consequentemente, $f(x_0)$ é dito valor crítico se ocorre um dos dois seguintes casos:*

- f não é derivável em x_0 ;
- f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 0$.

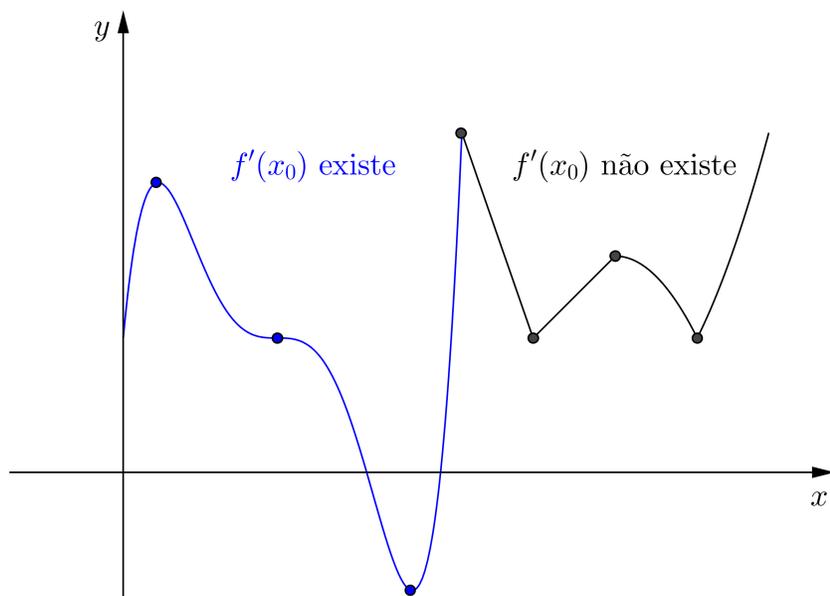


Figura 4.2: Definição geométrica de um ponto crítico.

Uma vez identificados os pontos críticos de uma função, os seguintes resultados podem ser usados para determinar se esses pontos são minimizadores ou maximizadores.

Baseado na definição 4.3, podemos extrair alguns resultados. Particularmente, para determinar o *máximo* e *mínimo absoluto* de uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ devemos proceder da seguinte forma.

- 1^o Determine os pontos críticos de f no intervalo (a, b) ;
- 2^o Determine $f(a)$ e $f(b)$;
- 3^o Compare os valores assumidos por f nos pontos críticos com $f(a)$ e $f(b)$ e conclua que o maior entre eles será o *máximo absoluto* de f em $[a, b]$ e o menor entre eles será o *mínimo absoluto* de f em $[a, b]$.

Proposição 4.1. *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em (a, b) dada por $y = f(x)$, então:*

1. f é não decrescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Por outro lado, se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$.
2. f é não crescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Por outro lado, se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.

Proposição 4.2 (Teste da primeira derivada). *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b) dada por $y = f(x)$ tal que x_0 é um ponto crítico de f , então:*

1. Se f' passa de positiva para negativa em x_0 então f tem máximo local em x_0 .

2. Se f' passa de negativa para positiva em x_0 então f tem mínimo local em x_0 .
3. Se f' não muda de sinal em x_0 então f não tem máximo e nem mínimo local em x_0 .

Proposição 4.3 (Condição suficiente.). *Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em (a, b) dada por $y = f(x)$. Seja $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Se $f''(x_0)$ existe e:*

1. $f''(x_0) > 0$, então $f(x_0)$ é um mínimo local de f .
2. $f''(x_0) < 0$, então $f(x_0)$ é um máximo local de f .
3. $f''(x_0) = 0$, então nada se pode afirmar, isto é, $f(x_0)$ pode ser extremante local ou não.

Demonstração. Ver [7], páginas 107 e 108. □

4.3 Problemas de Otimização de funções de uma variável real.

A matemática é às vezes considerada uma entidade vasta, semelhante a uma árvore, com grandes ramos que correspondem as suas grandes divisões e que por sua vez se ramificam em assuntos especializados, até que chegamos às extremidades da árvore, onde brotam as flores e os frutos. ([12], pag. 117)

Como diz o matemático australiano Terence Tao ganhador da medalha Fields, "a viagem de mil quilômetros começa com um passo". E para darmos esse passo focaremos em problemas que modelados apresentem funções deriváveis e em caráter de continuidade que atendam a condições propostas anteriormente.

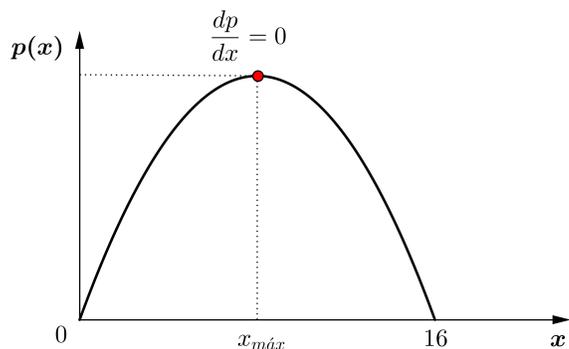
4.3.1 Problemas de Matemática

Problema 1 ([11], pag. 160). *Achar dois números positivos cuja soma é 16 e cujo produto é o máximo possível.*

Solução: *Sejam x e y dois números positivos, onde a soma é 16, isto é, $x + y = 16$ e cujo produto $p = xy$. é o máximo possível. Aqueles definem as restrições e este define a função objetivo.*

A dificuldade inicial é que p depende de duas variáveis, e o nosso cálculo de derivadas trabalha somente com funções de uma única variável independente. Entretanto, a primeira equação nos permite expressar y em função de x de tal forma que $y = 16 - x$. Com isso, podemos expressar p em função apenas de x , onde $p = x(16 - x) = 16x - x^2$. Como, x , y e p devem ser valores positivos, então p é uma função $p : [0, 16] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 16x - x^2$.

A função p é derivável em todo seu domínio, logo recai na definição 4.3, então temos:

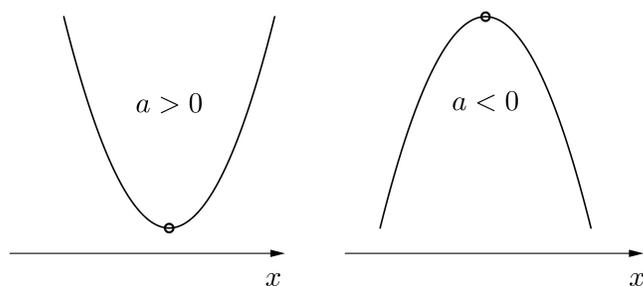


- O valor $p(8)$ é o único valor crítico tal que $8 \in (0, 16)$, pois $p'(x) = \frac{dp}{dx} = 16 - 2x = 0 \Rightarrow x = 8$;
- Como a função p é contínua e, $p(0) = p(16) = 0$ e $p(8) = 64$, então $p(8)$ é o valor máximo absoluto de p em $[0, 16]$.

Com base na análise anterior, $x = 8$ é a solução, onde conseqüentemente $y = 16 - x = 16 - 8 = 8$. Logo, a resposta para esse problema é $x = y = 8$ que nos dá $p = 8 \cdot 8 = 64$ como produto máximo.

Problema 2. Determine com o auxílio de derivadas o extremante da função quadrática.

Solução: Baseado na definição de uma função quadrática, considere $f : [d, e] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $0 \neq a$, b e c constantes reais. Observa-se que f é duas vezes derivável em (d, e) , então:



- Através da primeira derivada temos $f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$, logo $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é candidato a um valor extremo local da f , uma vez que, por definição, $a \neq 0$;
- E com base na segunda derivada que $f''(x) = 2a$. Como f'' depende apenas de a , existem duas possibilidades a serem analisadas. A primeira é que se $a > 0$, então $f''(a) = 2a >$

$$0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ é um minimizador local. Por outro lado, se } a < 0, \text{ então } f''(a) = 2a < 0$$

$$0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ é um maximizador local.}$$

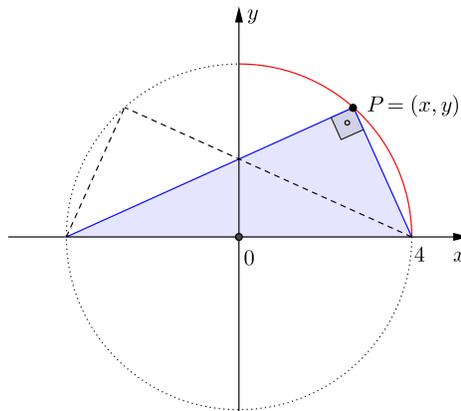
Logo, como tomamos um intervalo arbitrário, então $x = -\frac{b}{2a}$ é o ponto de máximo ou mínimo global da f , uma vez também que,

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

implica que $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é exatamente o vértice da parábola.

Problema 3. Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 4 tal que um de seus lados é o diâmetro da circunferência. Determine as dimensões do triângulo de área máxima.

Solução: Para esse problema podemos desenhar essa circunferência no plano cartesiano \mathbb{R}^2 cujo centro é o ponto $(0, 0)$. Fixando a base (diâmetro da circunferência) do triângulo sobre o eixo x e com base nos conceitos de congruência de triângulos podemos restringir o problema apenas ao 1º quadrante como pode ser observado na figura a seguir.



Como a base desse triângulo é o diâmetro da circunferência, então o ângulo P é reto, uma vez que ele é a metade do ângulo central, π rad. Dessa forma temos:

- Como restrições, pela equação da circunferência, que $x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$ com $x, y \in [0, 4]$;
- E como a função objetivo, a área do triângulo retângulo $a = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{8 \cdot y}{2}$.

Assim, a função que devemos maximizar é $a : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(x) = 4 \cdot \sqrt{16 - x^2}$. Como a é derivável duas vezes no intervalo $(0, 4)$, então pela regra da cadeia

$$a'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{4x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ é o ponto crítico.}$$

E conseqüentemente, pela segunda derivada, $x = 0$ é ponto de máximo, pois através da regra do quociente $f''(0) < 0$. Isso implica que a altura que maximiza essa área é $y = 4$, sendo assim, pelo teorema de Pitágoras, concluímos que se trata de um triângulo retângulo isósceles cujos outros lados são iguais a $\sqrt{4^2 + 4^2} = 4 \cdot \sqrt{2}$.

4.3.2 Problemas de Física

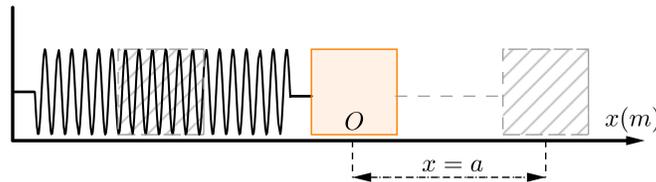
Problema 4 ([9], pag. 341). *Uma partícula realiza um Movimento Harmônico Simples (MHS) tal que os módulos máximos de sua velocidade escalar e de sua aceleração escalar são respectivamente 3.0 m/s e 6.0 m/s^2 . Determine a amplitude e a pulsação (frequência angular) do movimento.*

Solução: Temos que a função horária do MHS está definida por

$$x = a \cdot \cos(\gamma) = a \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma_0),$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} a : \text{ amplitude expressa em m;} \\ \omega : \text{ pulsação expressa em rad/s;} \\ t : \text{ tempo expresso em s;} \\ \gamma_0 : \text{ ângulo inicial expresso em rad.} \end{array} \right.$$



Considerando t como a única variável real positiva dessa função e fixando ω , $\gamma_0 > 0$ e $a \neq 0$ constantes reais, observa-se que a função x é duas vezes derivável, então podemos definir, através da regra da cadeia de derivação, a função da velocidade escalar do MHS e a função da aceleração escalar do MHS por

$$v(t) = x' = a \cdot (\cos(\omega \cdot t + \gamma_0))' \cdot (\omega \cdot t + \gamma_0)' \Rightarrow v(t) = -a\omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \gamma_0) \quad (4.2)$$

e

$$\alpha(t) = x'' = -a\omega \cdot (\text{sen}(\omega \cdot t + \gamma_0))' \cdot (\omega \cdot t + \gamma_0)' \Rightarrow \alpha(t) = -a\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma_0) \quad (4.3)$$

respectivamente. Então, das equações 4.2 e 4.3 definimos uma função $v(t)$ duas vezes derivável tal que

$v'(t) = \alpha(t) = 0 \implies -a\omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \gamma_0) = 0 \implies \cos(\omega \cdot t + \gamma_0) = 0 \implies$
 $\omega \cdot t + \gamma_0 = k\pi + \frac{\pi}{2} \implies t = \frac{k\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma_0}{\omega}$ com $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ define pontos crítico. E que este é extremo pois

$$v''(t) = \alpha'(t) = a\omega^3 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \gamma_0) \implies \alpha'\left(\frac{k\pi + \frac{\pi}{2} - \gamma_0}{\omega}\right) = \pm a\omega^3 \neq 0,$$

logo $|v(t)|_{\text{máx}} = \left| -a\omega \cdot \text{sen}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| = a\omega.$

Com base na equação 4.3 e, de modo semelhante, temos que $|\alpha|_{\text{máx}} = a\omega^2.$

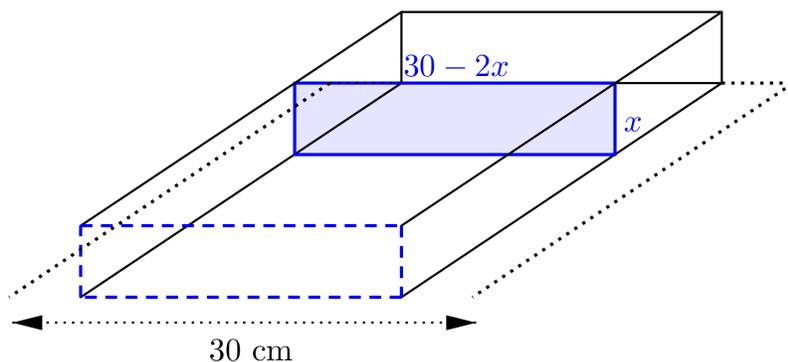
Sendo assim, os módulos máximos da velocidade e da aceleração são dados por

$$|v|_{\text{máx}} = a\omega \quad e \quad |\alpha|_{\text{máx}} = a\omega^2.$$

Portanto, $3.0 = \omega \cdot a$ e $6.0 = \omega^2 \cdot a \implies \frac{6.0}{3.0} = \frac{\omega^2 \cdot a}{\omega \cdot a} \implies \omega = 2.0 \text{ rad/s}$ e $a = 1.5 \text{ m}.$

Problema 5. De uma longa folha de metal de 30 cm de largura deve-se fazer uma calha dobrando as bordas perpendicularmente à folha. Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado de modo que a calha tenha capacidade máxima?

Solução: Tomemos x cm a altura da calha tal como podemos observar na figura a seguir.



Sabendo que a capacidade de escoamento de água da calha (cm^3/s) é o produto entre a área da secção (cm^2) pela velocidade do fluído (cm/s), no caso a água e, considerando a velocidade constante temos que maximização da capacidade equivale a maximização da área da secção. Então, considere a função área $a : [0, 15] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(x) = (30 - 2x) \cdot x$. Nessas condições, $a(x)$ recai no teorema de Weierstrass, logo sabemos que a função admite um máximo absoluto.

- Dessa forma, sabe-se que a primeira derivada de a nos dá os pontos críticos e como $a(x)$ é derivável em $(0, 15)$, então pela regra do produto temos

$$a'(x) = -2 \cdot x + (30 - 2x) \cdot 1 = 30 - 4x \implies a'(x) = 30 - 4x = 0 \implies x = 7,5 \text{ cm},$$

onde $a(7,5) = 112,5 \text{ cm}^2$.

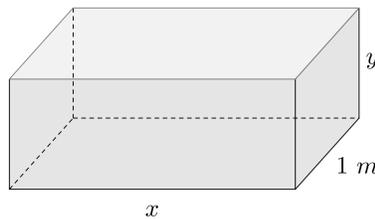
- Por outro lado, verifica-se que $a(0) = a(15) = 0$.

Portanto, fazendo uma comparação entre os dois tópicos anteriores, concluímos que a altura ideal que maximiza a capacidade da calha é $x = 7,5 \text{ cm}$.

4.3.3 Problemas de Economia

Problema 6 ([8], pag. 39). Deseja-se cavar um buraco retangular com 1 m de largura de modo que o volume cavado tenha 300 m^3 . Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa 10 reais e cada metro de profundidade custa 30 reais, determinar o comprimento e a profundidade do buraco a fim de que seu custo seja o menor possível.

Solução: Para modelar o problema, consideremos x o comprimento da área da base do buraco e y a altura do mesmo, ambos na unidade metro tal que:



Com os dados do problema temos:

- Como restrições que os valores $x, y > 0$ por se tratar de volume e área e, conseqüentemente, o volume desse buraco é $v = \text{Base} \cdot \text{altura} = (x \cdot 1) \cdot y = xy \implies xy = 300$;
- E como função objetivo o custo total a pagar que é dado por $c = \text{Custo da base} + \text{Custo da altura} = 10 \cdot (x \cdot 1) + 30 \cdot y \implies c = 10x + 30y$.

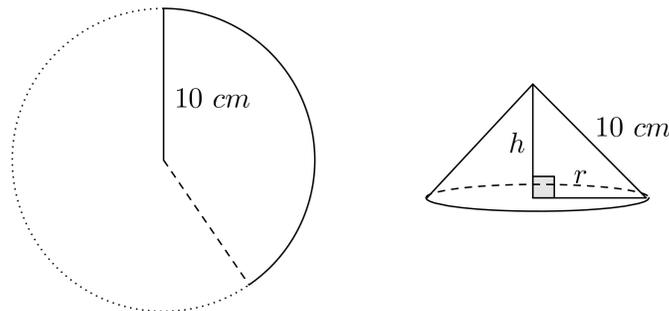
Baseado nas duas situações citadas anteriormente obtemos uma função $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ em relação apenas da varável x , pois

$$\begin{cases} xy = 300; (x, y > 0) \\ c = 10x + 30y \end{cases} \implies \begin{cases} y = \frac{300}{x} \\ c = 10x + 30y \end{cases} \implies c(x) = 10x + 9000x^{-1}.$$

É fácil ver que c é duas vezes derivável e atende a proposição 4.3, então a primeira derivada $c'(x) = 10 - 9000x^{-2} = 0$ nos dá $x = 30$ como o candidato a minimizador. E a segunda derivada $c''(x) = 18000x^{-3}$ confirma que $x = 30$ m é o minimizador, pois $c''(30) = 18000 \cdot 30^{-3} = \frac{2}{3} > 0$. E conseqüentemente, $y = \frac{300}{30} = 10$ m. Logo, o comprimento e a profundidade do buraco que minimizam o custo são respectivamente 10 m e 30 m, onde o custo é de 600 reais.

Problema 7. Uma certa empresa decide produzir funis de alumínio em formato de cone cuja geratriz é igual 10 cm. Desconsidere a alça e outros detalhes e assim, determine as dimensões de modo que se tenha o maior volume possível.

Solução: A ideia desse problema é definir a melhor função que descreve-o para depois otimizá-lo. Então, tome r sendo o raio do círculo da base do cone e h sendo a altura do cone.



Nessas condições, temos que o volume do cone é um terço do produto da base pela altura, ou melhor, $v = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$. Temos também através do teorema de Pitágoras que $h^2 + r^2 = 10^2$. Então, com base nesta restrição podemos deixar o volume do cone apenas em função de h , isto é, $v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$v = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \Rightarrow v = \frac{\pi \cdot (100 - h^2) \cdot h}{3} \Rightarrow v(h) = \frac{100\pi h - \pi h^3}{3}.$$

Como v é uma função polinomial, logo ela atende as condições propostas pelo pela proposição 4.3. Nesses moldes,

- $v'(h) = 0 \Rightarrow \frac{100\pi}{3} - \pi h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{10}{\sqrt{3}} \cong 5,77;$
- $v''(h) = -2\pi h \Rightarrow v''\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{20\pi}{\sqrt{3}} < 0.$

E conseqüentemente,

$$h^2 + r^2 = 10^2 \Rightarrow \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + r^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 100 - \frac{100}{3} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 10 \cong 8,16.$$

Logo, as dimensões buscadas para que o volume seja máximo são aproximadamente altura 5,77 cm e raio da base 8,16 cm.

Problema 8 ([3], pag. 194). Um fazendeiro tem 80 porcos, pesando 150 kg cada um. Cada porco aumenta de peso na proporção de 2.5 kg por dia. Gastam-se 2 reais por dia para manter um porco. Se o preço de venda está a 3 reais por kg e cai 0.03 reais por dia, quantos dias deve o fazendeiro aguardar para que seu lucro seja máximo?

Solução: Para solucionar o problema, devemos extrair com cuidado os dados para passo a passo modelá-lo. Primeiro vamos dividir este caso em três situações considerando t o número de dias passados até o dia da venda:

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} \text{São 80 porcos} \\ \text{O peso de 1 porco é } 150 + 2.5t \text{ em } t \text{ dias} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Peso total } \wp = 80 \cdot (150 + 2.5t) \Rightarrow$$

$$\wp = 12000 + 200t;$$

- 1 kg de porco custa $3 - 0.03t$ reais em t dias;
- O prejuízo com os porcos em t dias é de $80 \cdot (2t) = 160t$.

Com base nessas análises obtemos o lucro com as vendas dos porcos $l(t) = \text{Preço} \cdot \text{Peso} - \text{Prejuízo} = (3 - 0.03t) \cdot (12000 + 200t) - 160t$, a qual, é a função a ser estudada.

Em segundo plano, devemos usar as derivadas para encontrar a solução desejada. Então, utilizando a primeira derivada, regra do produto, temos

$$l'(t) = (-0.03) \cdot (12000 + 200t) + (3 - 0.03t) \cdot 200 - 160 = 80 - 12t = 0 \Rightarrow t = \frac{20}{3} \cong 6.7$$

é o candidato a solução. E através da segunda derivada temos $l''(t) = -12 < 0 \forall t$. Portanto, 7 dias é a resposta, pois é o valor inteiro que melhor satisfaz o problema.

Problema 9. Uma livraria compra de uma editora o exemplar de certo livro por R\$ 15,00 e vende-o por R\$ 50,00 reais. Por esse preço tem vendido 40 exemplares por mês. A livraria pretende diminuir o preço para aumentar as vendas e estima que para cada redução de R\$ 1,00 no preço do livro, 5 livros a mais serão vendidos por mês. Por que preço a livraria deve vender o livro para que o lucro seja o maior possível?

Solução: Supomos que x é redução do preço de venda do livro em reais tal que $x \in (1, 5)$. Então, o lucro da livraria mensal $l = (\text{preço do livro}) \cdot (\text{número de livros vendidos por mês}) - \text{R\$ } 15,00 \cdot (\text{número de livros vendidos por mês}) = (50 - x) \cdot (40 + 5x) - 15 \cdot (40 + 5x)$. Assim, temos que maximizar a função $l : [1, 50] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $l(x) = (35 - x) \cdot (40 + 5x)$. Como a

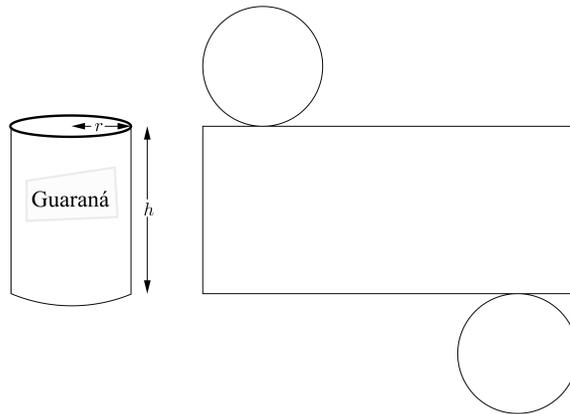
função l atende as condições de otimização com derivadas, então

$$l'(x) = -1 \cdot (40 + 5x) + (35 - x) \cdot 5 = 0 \implies x = 13,5$$

defina o possível valor da redução do preço e $l''(13,5) < 0$ confirma que esse é o valor que buscamos. Logo, o preço que maximiza o lucro é R\$ 36,50.

Problema 10. Uma empresa de refrigerantes deseja confeccionar o recipiente de um refrigerante em lata de 330 ml em um formato cilíndrico. Use o fato de que 1 litro equivale a 1 decímetro cúbico e determine as dimensões desse recipiente com a menor quantidade possível de metal.

Solução: Usaremos o fato de que esse metal tem uma espessura padrão, então consideremos r o raio da base e h a altura desse recipiente cilíndrico. Sabendo que o volume e a área total do cilindro é respectivamente $v = \text{Área da base} \cdot \text{altura} = (\pi r^2) \cdot h$ e $a = 2 \cdot \text{Área da base} + \text{Área lateral} = 2 \cdot (\pi r^2) + 2\pi r \cdot h$ temos que $(\pi r^2) \cdot h = 0,33$ l (litro) é a restrição, e $a = 2 \cdot (\pi r^2) + 2\pi r \cdot h$ é a função objetivo a ser minimizada.



Nessas condições, como $r > 0$, obtemos

$$h = \frac{0,33}{\pi r^2} \text{ e } a = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \implies a(r) = 2\pi r^2 + \frac{0,66}{r}.$$

Onde, verifica-se que a é duas vezes derivável. Então,

$$a'(r) = 4\pi r - \frac{0,66}{r^2} = 0 \implies r = \sqrt[3]{\frac{0,66}{4\pi}} \cong 0,374 \text{ decímetro}$$

mostra o ponto crítico e conseqüentemente o ponto de mínimo, pois $a''(0,374) > 0$. Logo, $h \cong \frac{0,33}{\pi \cdot (0,374)^2} \cong 0,750$ decímetro. Ou melhor, as dimensões que minimizam o problema são $r \cong 3,74$ centímetros e $h \cong 7,5$ centímetros.

Considerações Finais

Desde o princípio do trabalho, houve a preocupação de estabelecer um estudo mais compacto e compreensivo de alguns problemas de Otimização referente a funções deriváveis e contínuas de uma única variável cujo resultado fosse uma boa abordagem da história e aplicações do Cálculo Diferencial, apresentando de forma agradável um conhecimento que estivesse ao alcance dos estudantes do ensino médio.

Apesar de estar alicerçado no modelo atual que é o estudo de função, o trabalho produzido neste material também se apegou em requícios matemáticos da antiga base do Cálculo que era o modelo geométrico, expondo assim grande parte dos problemas sob uma visão de Geometria Analítica. E, acima de tudo, buscou apresentar um pouco da utilidade da Matemática, dando abertura para futuros acréscimos ou críticas que puderem enriquecer a qualidade deste trabalho.

Todavia, o professor e o aluno de Matemática do ensino Médio devem dispor de um ensino matemático palpável e bastante presente na realidade local que estimule a produção de um conhecimento principalmente qualitativo. Logo, torna-se importante dar ênfase a um estudo matemático esquecido e muitas vezes descartado no Ensino Médio, mas que é extremamente explorado e essencial numa vida acadêmica cuja Matemática esteja presente. Dessa forma, fica para uma extensão deste trabalho a execução dessas ideias, pelo menos, no 3º Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

- [1] BARON, Margaret E. *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo*. Unidade 1. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.
- [2] BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. *Curso de Matemática*. 2^a ed. São Paulo: Moderna, 1998.
- [3] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. *Fundamentos de Matemática Elementar 8: limites, derivadas e noções de integral*. 6^a ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [4] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. *Matemática Fundamental: uma nova abordagem, ensino médio*. São Paulo: FTD, 2002.
- [5] GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco. *Recursos computacionais no ensino de Matemática*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [6] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [7] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*. Vol. 1. 6^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.
- [8] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *Temas e problemas*. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [9] RAMALHO, Francisco; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. *Os Fundamentos da Física 2: Termologia, Óptica e Ondas..* 8^a ed. São Paulo: Moderna, 2003.
- [10] RIBEIRO, Ademir Alves; KARAS, Elizabeth Wegner. *Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [11] SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica*. Vol. 1. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.
- [12] TAO, Terence. *Como resolver problemas matemáticos-Uma nova perspectiva*. Tradução de Paulino Ventura. Rio de Janeiro: SBM, 2013.