

Robson Piacente Alves

Coloração de grafos e aplicações

Florianópolis / SC

Junho de 2015

Robson Piacente Alves

Coloração de grafos e aplicações

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Bedin

Florianópolis / SC

Junho de 2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Alves, Robson Piacente
Coloração de grafos e aplicações / Robson Piacente Alves
; orientador, Luciano Bedin - Florianópolis, SC, 2015.
132 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Grafos. 3. Coloração de vértices e
arestas. 4. O Teorema das quatro cores. I. Bedin, Luciano.
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Matemática. III. Título.

Robson Piacente Alves

Coloração de grafos e aplicações

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática. Trabalho aprovado.

Florianópolis / SC, 29 de junho de 2015.

Profa. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Coordenadora em exercício - PROFMAT/UFSC

Prof. Dr. Luciano Bedin
Orientador - MTM/UFSC

Profa. Dra Louise Reips
Membro externo - UFSC/Campus Blumenau

Profa. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Membro interno - MTM/UFSC

Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz
Membro interno - MTM/UFSC

Este trabalho é dedicado às pessoas mais importantes em minha vida: minha mãe, Luzia, a quem “eu deixei chorando a me abençoar”; meu pai, Jair, que sempre batalhou para possibilitar este momento; minhas irmãs, Raiane e Regiane, de quem sempre tive muito orgulho.

Agradecimentos

A todos os professores que contribuíram de algum modo para o conhecimento adquirido ao longo de minha vida acadêmica, em especial, a meu orientador deste trabalho.

A meus grandes amigos, Mizael e Graciliano, que mesmo distantes ou ao meu lado, são essenciais em minha vida.

A CAPES, pela concessão da bolsa durante estes dois anos.

“Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.”

(Albert Einstein)

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo de grafos aplicado à coloração de vértices e arestas. Para tal, faremos uma breve apresentação sobre conceitos básicos de grafos, bem como a importância de suas aplicações. Buscamos aqui a resolução de problemas envolvendo coloração e sua possível aplicação matemática na educação básica.

Palavras-chaves: Grafos. Coloração de vértices e arestas. O teorema das quatro cores.

Abstract

The objective of this work is the study of graphs applied to colouring of vertex and edges. To do this, we will give a brief presentation about basics concepts of graphs, as well as the importance of its applications. We seek here the solution of the problems involving colouring and its possible mathematical application in basic education.

Keywords: Graphs, vertex and edges colouring, the four colour theorem.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração para o problema das pontes de Königsberg.	23
Figura 2 – Grafo 4 -regular e grafo 2 -regular, respectivamente. .	26
Figura 3 – Estados do Brasil e sua representação por meio de um grafo.	26
Figura 4 – Um grafo com laço no vértice f	27
Figura 5 – Tabela representando os vértices adjacentes entre si pelo grafo à esquerda.	27
Figura 6 – Grafo G e sua matriz de adjacência.	28
Figura 7 – O grafo H é um subgrafo de G	29
Figura 8 – Grafo completo.	29
Figura 9 – Clique de um grafo.	30
Figura 10 – Caminhos, grafos G e H , sendo H um caminho fechado.	30
Figura 11 – Grafo conexo e grafo desconexo.	31
Figura 12 – Grafo ciclo H	32
Figura 13 – Grafo para determinação do número de ciclos.	32
Figura 14 – Grafo ciclo par e ciclo ímpar.	33
Figura 15 – Árvores.	34
Figura 16 – Grafos bipartidos.	34
Figura 17 – Conjuntos independentes.	35
Figura 18 – Grafo para aplicação de uma coloração de vértices. .	41
Figura 19 – Grafo após a aplicação de uma coloração de vértices.	42
Figura 20 – Grafo para aplicação de uma segunda coloração de vértices.	43
Figura 21 – Grafo após a aplicação de uma segunda coloração de vértices.	43
Figura 22 – (a) Grafo C_4 ; (b) Grafo C_5	47
Figura 23 – Coloração de vértices do grafo C_4	47
Figura 24 – Grafo ciclo par, C_n	48
Figura 25 – Coloração de vértices do grafo C_5	48

Figura 26 – Grafo ciclo ímpar, C_n	49
Figura 27 – Grafo G e grafo H , respectivamente.	49
Figura 28 – Grafo G e grafo \overline{G} , respectivamente.	50
Figura 29 – Grafo G e sua cadeia de Kempe G_{23}	52
Figura 30 – Grafos bipartidos G e H , respectivamente.	53
Figura 31 – Recoloração dos vértices da componente conexa G_{pq} que contém o vértice v_p	55
Figura 32 – Recoloração dos vértices da componente G_{pq} que não é um caminho.	57
Figura 33 – Cadeias de Kempe G_{pq} e G_{pr}	58
Figura 34 – Coloração do grafo representando uma compatibili- dade entre as espécies.	61
Figura 35 – Coloração do grafo representando a compatibilidade entre as espécies com base em uma nova ordenação de vértices.	61
Figura 36 – Grafo para efetuarmos uma coloração de arestas. . .	65
Figura 37 – Grafo após efetuarmos a primeira etapa de coloração de arestas.	66
Figura 38 – Grafo após efetuarmos a segunda etapa de coloração de arestas.	66
Figura 39 – Grafo após efetuarmos a terceira etapa de coloração de arestas.	67
Figura 40 – Grafo após efetuarmos uma possível coloração de arestas.	67
Figura 41 – O Tetraedro, o Octaedro e o Cubo, respectivamente. .	68
Figura 42 – Representação como grafo planar para o Tetraedro, o Octaedro e o Cubo.	69
Figura 43 – Grafo K_5 e grafo bipartido $K_{3,3}$	69
Figura 44 – Curva ligando o interior e o exterior de uma curva simples fechada.	70
Figura 45 – Grafo e suas faces.	71
Figura 46 – Subdivisões elementares.	75
Figura 47 – Grafos homeomorfos.	75

Figura 48 – Mapa de Portugal, representação por meio de um grafo e uma possível coloração.	77
Figura 49 – Mapa de Portugal e sua representação por um grafo dual.	78
Figura 50 – Primeira etapa após aplicação do algoritmo “guloso” para colorir os vértices do grafo representando o mapa de Portugal.	80
Figura 51 – Possível coloração para o mapa de Portugal obtida após a aplicação do algoritmo “guloso”.	80
Figura 52 – Possível coloração para os vértices adjacentes a v	85
Figura 53 – Aplicativo GRAFO para Android	87
Figura 54 – Primeiro desafio sendo realizado, observando que são dois minutos de tempo máximo.	88
Figura 55 – Segundo desafio sendo realizado, observando a pontuação obtida até o momento no canto superior esquerdo e o tempo disponível no canto superior direito.	88
Figura 56 – Tela após o término do jogo, com resultado individual e opção de envio para comparar com demais jogadores on line.	88
Figura 57 – Tentativa de solução para o problema das 5 regiões vizinhas.	89
Figura 58 – Tentativa de solução para o problema da união entre as 5 capitais das províncias.	90
Figura 59 – Ilustração para o problema da água, luz e gás.	91
Figura 60 – Figuras bicoloríveis.	91
Figura 61 – Representação por meio de grafos da Figura 60.	92
Figura 62 – Mapa do Brasil.	92
Figura 63 – Duas possíveis colorações distintas para o mapa do Brasil.	93
Figura 64 – Grafo representando as disciplinas para realização de exames.	94
Figura 65 – Subdivisão das disciplinas para aplicação dos exames.	95

Figura 66 – Mapa da América do Sul e sua representação por um grafo.	96
Figura 67 – Possível coloração para o mapa da América do Sul. .	97
Figura 68 – Mapa dos Estados Unidos da América (EUA). . . .	98
Figura 69 – Grafo representando o mapa dos Estados Unidos da América (EUA).	98
Figura 70 – Primeira etapa da aplicação do algoritmo guloso para coloração do mapa dos Estados Unidos da América (EUA).	102
Figura 71 – Segunda etapa da aplicação do algoritmo guloso para coloração do mapa dos Estados Unidos da América (EUA).	103
Figura 72 – Terceira etapa da aplicação do algoritmo guloso para coloração do mapa dos Estados Unidos da América (EUA).	103
Figura 73 – Uma coloração do mapa dos Estados Unidos da América (EUA) após a aplicação do algoritmo guloso. . .	104
Figura 74 – Grafo representando os produtos reagentes entre si.	104
Figura 75 – Possível coloração representando os produtos que devem estar separados nos containers.	106
Figura 76 – SUDOKU 4×4 e sua representação por meio de um grafo.	107
Figura 77 – SUDOKU 4×4 e sua representação por meio de um grafo com as condições iniciais fornecidas.	108
Figura 78 – SUDOKU 4×4 e sua representação após a determinação do conjunto T_1 através do algoritmo “guloso” para coloração de vértices.	109
Figura 79 – SUDOKU 4×4 e sua representação após a determinação do conjunto T_2 através do algoritmo “guloso” para coloração de vértices.	110
Figura 80 – SUDOKU 4×4 e sua representação após a determinação do conjunto T_3 através do algoritmo “guloso” para coloração de vértices.	110

Figura 81 – SUDOKU 4×4 resolvido após a aplicação do algoritmo “guloso” para coloração de vértices.	111
Figura 82 – Respresentação como um grafo para os produtos F_1, F_2, \dots, F_7 e seus reagentes.	112
Figura 83 – Possível solução para o problema utilizando coloração de vértices.	112
Figura 84 – Grafo complementar ao grafo da Figura 82	113
Figura 85 – Cadeia de Kempre F_1F_3	113
Figura 86 – Cadeia de Kempre F_1F_4	114
Figura 87 – Possível coloração de arestas para o grafo.	114

Lista de símbolos

$d(v)$	Grau do vértice v
$\Delta(G)$	Grau máximo do grafo G
$\delta(G)$	Grau mínimo do grafo G
$V(G)$	Conjunto dos vértices de G
$E(G)$	Conjunto das arestas de G
C_n	Grafo ciclo com n vértices
$K_{p,q}$	Grafo bipartido, sendo p e q a cardinalidade dos subconjuntos independentes
$\alpha(G)$	Número de independência do grafo G
$\chi(G)$	Número cromático do grafo G
$G_{i,j}$	Cadeia de Kempe do grafo G , correspondente a duas cores i e j
$\chi'(G)$	Índice cromático do grafo G
n	Número de vértices do grafo
m	Número de arestas do grafo
f	Número de faces do grafo

Introdução

Apesar de passarem despercebidos para leigos, os grafos estão presentes em nossas vidas diariamente e nos auxiliam direta e indiretamente em inúmeras situações do cotidiano, entre elas, acessar a internet, verificar qual o caminho de menor custo, minimizar despesas, ou seja, decisões que requerem otimização e que em sua maioria podem ser resolvidas, de maneira eficiente, pelo uso de algoritmos. Em [12] e [4], por exemplo, são descritas aplicações para esses e outros casos.

Como citado em [12], tudo começou com um desafio proposto pelos habitantes da cidade de Königsberg (hoje Kaliningrado). Na época, o rio Pregel cortava a cidade dividindo-a em 4 distritos, que eram conectados por sete pontes. Como os moradores frequentemente caminhavam pelas pontes, surgiu uma questão: é possível atravessar as sete pontes do Rio Pregel, sem passar duas vezes na mesma ponte, retornando ao ponto de partida?

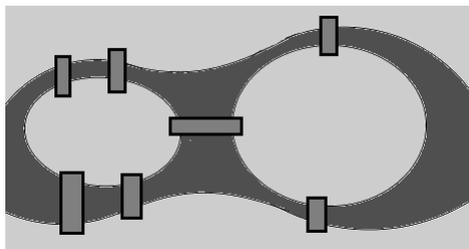


Figura 1 – Ilustração para o problema das pontes de Königsberg.

Em 1736 Euler publicou um artigo demonstrando que tal percurso é impossível, sem utilizar a terminologia grafo. A palavra “grafo” é um neologismo derivado da palavra *graph* em inglês e, historicamente, foi utilizada pela primeira vez (no sentido que nos interessa aqui) pelo matemático inglês James Joseph Sylvester (1814 - 1897).

A coloração de grafos é um caso especial de rotulagem de grafos, atribuindo rótulos tradicionalmente chamados “cores”, sujeitas a certas restrições, a elementos de um grafo, ou seja, é uma coloração dos vértices de um grafo tal que não haja dois vértices adjacentes que compartilhem a mesma cor. Da mesma forma, em uma coloração de arestas atribuímos uma cor para cada aresta sem que haja duas arestas adjacentes da mesma cor.

Iniciamos essa dissertação com a apresentação dos conceitos básicos sobre grafos, definindo e exemplificando os conceitos básicos que serão necessários posteriormente. Ao mesmo tempo, buscamos contextualizar a história do desenvolvimento de tais teorias sempre que possível, incluindo algumas propriedades, além de mostrarmos como a Teoria dos Grafos relaciona-se com o Problema das Quatro Cores, conforme [13]. Em seguida, apresentamos algumas definições adicionais, teoremas e suas respectivas demonstrações, além de uma descrição sobre a demonstração do Teorema das Quatro Cores. Apresentamos também o Teorema das Cinco Cores, como demonstrado por Heawood, [8]. Por fim, traremos exemplos e aplicações dos conteúdos abordados relacionados principalmente com a coloração de vértices e arestas, contextualizando com a coloração de mapas, o transporte de produtos reagentes e a resolução de um SUDOKU, dentre outros.

O trabalho segue da seguinte forma: no primeiro capítulo são descritas e exemplificadas as definições e propriedades necessárias para a compreensão do trabalho. No segundo capítulo abordamos a coloração de vértices e arestas assim como alguns de seus respectivos teoremas, em particular, o teorema das quatro cores. No terceiro capítulo são desenvolvidas aplicações referentes a coloração de vértices e arestas e os algoritmos para realiza-las, de forma a aplicar alguns conceitos, como a coloração de mapas, inclusive com alunos do ensino fundamental e médio. Vale ressaltar que tal assunto está presente no PCN - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias - orientando o trabalho curricular da matemática para o ensino médio.

1 Conceitos básicos

Neste capítulo formalizamos a definição de grafo (não-orientado) e introduzimos os conceitos de vértice, aresta, subconjuntos independentes, entre outros. Os conceitos abordados nesta seção são baseados principalmente nas referências [4] e [6].

Para qualquer conjunto $V \neq \emptyset$, denotamos por $V^{(2)}$ o conjunto de todos os pares não-ordenados de elementos de V . Os elementos de $V^{(2)}$ podem ser identificados como os subconjuntos de V que têm cardinalidade igual a 1 ou 2, ou seja, subconjuntos que possuem 1 ou 2 elementos. Desse modo, cada elemento de $V^{(2)}$ terá a forma (v, w) , sendo v e w dois elementos de V . Observe que se V tem n elementos, então $V^{(2)}$ tem $\binom{n}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n$ elementos, considerando os casos (v, v) .

Definição 1.1. Um **grafo** é um par (V, E) em que $V \neq \emptyset$ é um conjunto arbitrário e E é um subconjunto de $V^{(2)}$. Os elementos de V são chamados **vértices** e os de E são chamados **arestas**.

Dado um grafo $G = (V, E)$, dizemos que dois vértices v e w estão *geometricamente ligados* ou *relacionados*, se $(v, w) \in E$. Nesse caso, diz-se que a aresta (v, w) , à qual é também denotada por vw , incide em v e em w . Além disso, v e w são as “pontas” da aresta. Se vw é uma aresta, diremos que os vértices v e w são **vizinhos** ou **adjacentes**. O número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v é chamado **grau do vértice** v , simbolizado por $d(v)$. Note que arestas com vértice de partida igual ao vértice de chegada são possíveis de existir e são chamadas *laços*. Nesse trabalho consideraremos somente grafos em que V é um conjunto finito. Dessa forma, dado um grafo G , a partir de seus vértices podemos definir $\Delta(G)$ (grau máximo de seus vértices) e $\delta(G)$ (grau mínimo de seus vértices) como sendo o **grau**

máximo e mínimo de G , respectivamente. Denota-se o *conjunto dos vértices* de um grafo G por $V(G)$, enquanto que o *conjunto das arestas* de G é denotado por $E(G)$. A **ordem** do grafo G é definida como sendo a cardinalidade do conjunto $V(G)$.

Definição 1.2. Um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau k é chamado de **grafo k -regular**.

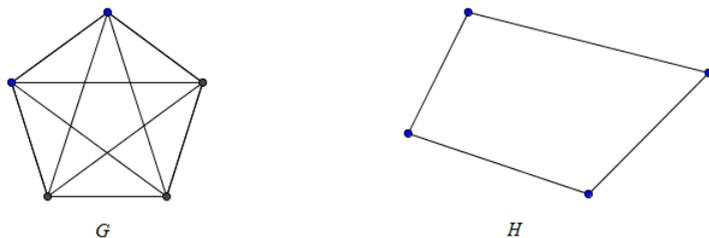


Figura 2 – Grafo 4-regular e grafo 2-regular, respectivamente.

Exemplo 1.1. O grafo dos estados do Brasil é definido assim: cada vértice é um dos estados da República Federativa do Brasil; dois estados são adjacentes se têm uma fronteira comum. Podemos representá-lo pela figura:

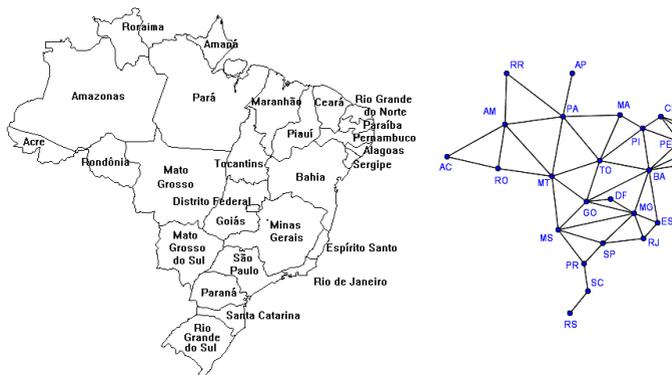


Figura 3 – Estados do Brasil e sua representação por meio de um grafo.

Observe que, neste caso, dois vértices estão relacionados quando os respectivos estados possuem uma fronteira em comum.

De acordo com nossa definição, um grafo nunca terá duas arestas diferentes formadas pelo mesmo par de pontas (ou seja, não pode ter arestas “paralelas”). Teremos um **grafo simples** sempre que o conjunto E não possuir elementos da forma (v, v) , ou seja, se o grafo não possuir laços.

Exemplo 1.2. *O grafo abaixo possui um laço no vértice f (possui uma aresta ff), logo não representa um grafo simples.*

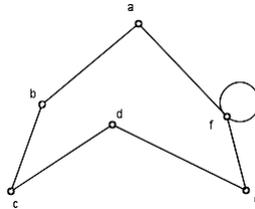
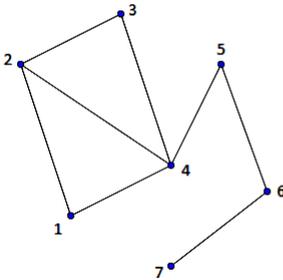


Figura 4 – Um grafo com laço no vértice f .

Exemplo 1.3. *Observemos um grafo simples e as relações de adjacência entre seus vértices:*



Vértices	Vértices adjacentes
1	2, 4
2	1, 3, 4
3	2, 4
4	1, 2, 3, 5
5	4, 6
6	5, 7
7	6

Figura 5 – Tabela representando os vértices adjacentes entre si pelo grafo à esquerda.

A coluna dos vértices adjacentes nos fornece uma ideia sobre a *lista de adjacências* do grafo, ou seja, representa as relações de adjacências (arestas) entre os vértices. Com tal representação, fica fácil observar, por exemplo, que a aresta $(1, 2)$ é adjacente à aresta $(1, 4)$; a aresta $(2, 1)$ é adjacente às arestas $(2, 3)$ e $(2, 4)$; e assim por diante. Vale ressaltar, ainda, que quando nos referimos à aresta $(2, 1)$ é equivalente a nos referirmos à aresta $(1, 2)$, visto que o grafo é não-orientado.

Definição 1.3. Dado um grafo $G = (V, E)$, a **matriz de adjacência** de G $A = [a_{i,j}]$ é uma matriz $A = [a_{i,j}]$ de ordem $n \times n$ tal que:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{se } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}. \quad (1.1)$$

Desse modo, a definição nos diz que $a_{i,j} = 1$ quando existe uma aresta entre v_i e v_j e $a_{i,j} = 0$ se não há aresta ligando os dois vértices v_i e v_j . Observe que a presença do 1 na diagonal principal da matriz indica que o grafo possui um laço.

Exemplo 1.4. Dado o grafo G a seguir, elaboremos a sua matriz de adjacência:

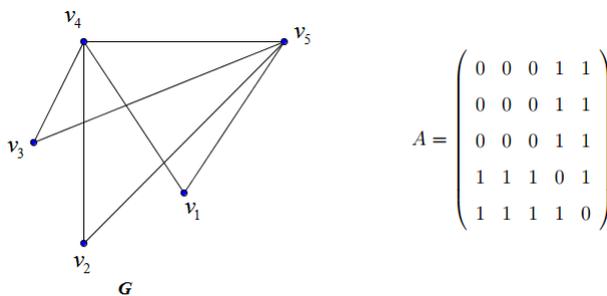


Figura 6 – Grafo G e sua matriz de adjacência.

Definição 1.4. Dado um grafo G , um **subgrafo** de G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

A definição nos diz que H está contido em G e que seu conjunto de ligações também está no de G . Informalmente, dizemos que um subgrafo nada mais é que um grafo que “se encaixa dentro de outro”.

Exemplo 1.5. O grafo H representa um subgrafo do grafo G . Note que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

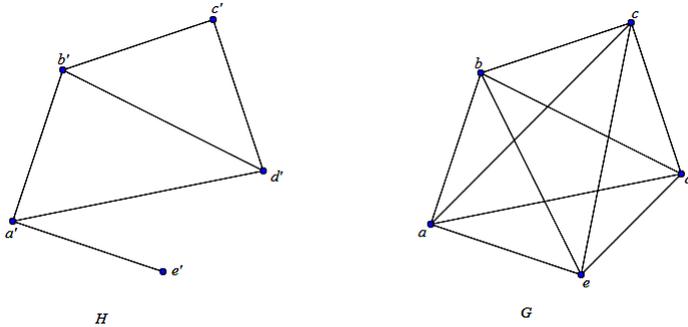


Figura 7 – O grafo H é um subgrafo de G .

Definição 1.5. Um grafo G é dito completo se é simples e se, para quaisquer pares distintos de vértices u e v , tivermos $(u, v) \in E(G)$.

Exemplo 1.6. Um grafo completo pode ser representado pela figura abaixo:

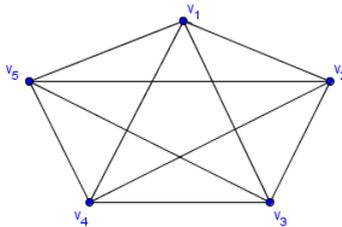


Figura 8 – Grafo completo.

Definição 1.6. Um **clique** em um grafo simples G é um subgrafo completo H de G .

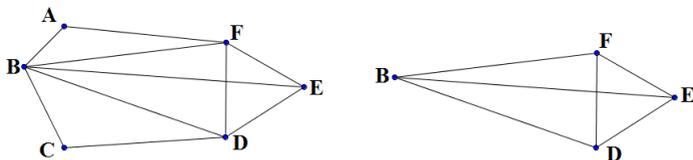


Figura 9 – Clique de um grafo.

Note que, no exemplo ilustrado na Figura 9, o vértice A só poderia compor um *clique* em conjunto com os vértices B e F , pois não possui ligação com os demais vértices. O mesmo caso ocorre com o vértice C , ligado apenas aos vértices B e D .

A qualquer problema que possui como objetivo encontrar subgrafos completos aplica-se o conceito de clique. Exemplos de aplicações para cliques podem estar relacionadas a redes sociais, onde os vértices do grafo representam as pessoas e as arestas representam o conhecimento mútuo.

Definição 1.7. Um **caminho** em um grafo G é um subgrafo simples H de G cujos vértices (distintos) podem ser rearranjadas numa sequência v_1, v_2, \dots, v_n de forma tal que $E(H) = \{(v_i, v_{i+1}), 1 \leq i \leq n - 1\}$. Se, além disso, H é tal que $v_n v_1 \in E(H)$, H é denominado um **caminho fechado**. O primeiro vértice é chamado de vértice inicial e o último é chamado de vértice final.

Exemplo 1.7. Observe os grafos abaixo, com os vértices ordenados adequadamente para representar caminhos:

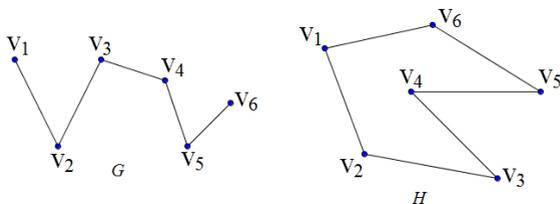


Figura 10 – Caminhos, grafos G e H , sendo H um caminho fechado.

Definição 1.8. O **comprimento de um caminho** de um vértice v a um vértice w é o número mínimo de arestas existentes entre eles.

No exemplo anterior, o grafo G possui comprimento 5 quando nos referimos ao caminho de v_1 a v_6 . No grafo H , o caminho de v_1 a v_6 tem comprimento 1, pois os vértices v_1 a v_6 estão ligados por uma aresta.

Definição 1.9. O grafo G é dito **conexo** se existe um caminho entre quaisquer dois vértices distintos de G . Quando algum de seus vértices não satisfaz tal propriedade, o grafo é dito **desconexo**.

Exemplo 1.8. Nas figuras abaixo, observe que o grafo G é conexo e o grafo H desconexo, pois possui um de seus vértices que não está ligado a nenhum dos outros. Logo, não é possível obter um caminho ligando tal vértice a qualquer outro.

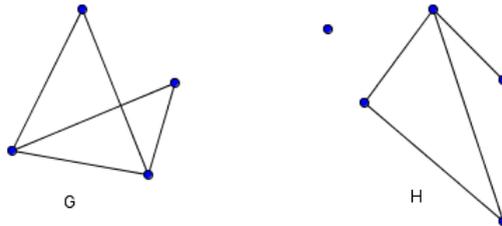


Figura 11 – Grafo conexo e grafo desconexo.

Definição 1.10. Um **ciclo** de um grafo G é um caminho fechado de G , que possui três ou mais vértices.

Se o grafo G corresponder a um ciclo então ele é denominado de *grafo ciclo*. O grafo ciclo com n vértices é chamado C_n . O número de vértices em um C_n se iguala ao número de arestas, e cada vértice tem grau 2; isto é, cada vértice tem exatamente duas arestas incidentes a ele. No caso de um ciclo, o primeiro e o último vértice coincidem, mas nenhum outro vértice é repetido.

Exemplo 1.9. No exemplo abaixo, o grafo G não representa um ciclo, porém o H sim.

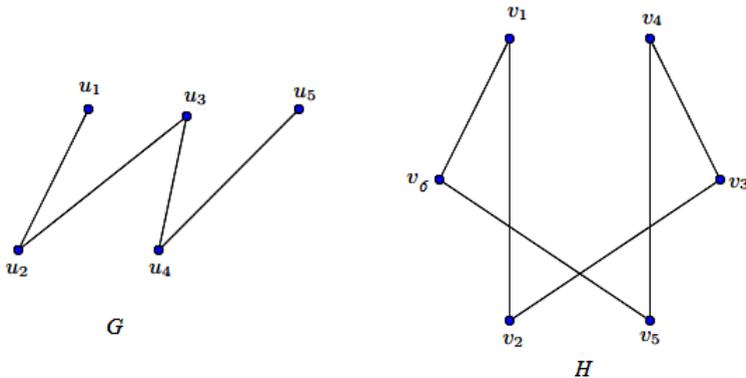


Figura 12 – Grafo ciclo H .

Uma sequência cíclica para o grafo H é dada por: $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_1$. Pode-se escolher outro vértice para iniciar a sequência, sem perder as características de um ciclo.

Um tipo de problema interessante para desafiar alunos do ensino básico é apresentado no exemplo a seguir:

Exemplo 1.10. Qual o número de ciclos existentes no grafo abaixo?

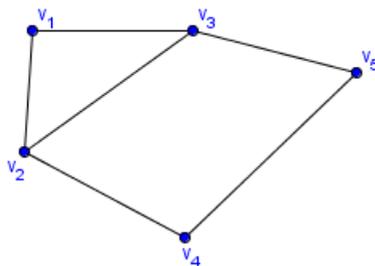


Figura 13 – Grafo para determinação do número de ciclos.

Note que, neste caso, apenas para os vértices v_1, v_2 e v_3 há 6 seqüências cíclicas possíveis, representadas por: $v_1v_2v_3v_1$; $v_1v_3v_2v_1$; $v_2v_3v_1v_2$; $v_2v_1v_3v_2$; $v_3v_1v_2v_3$ e $v_3v_2v_1v_3$. Além do mais, v_2, v_3, v_4 e v_5 também formam mais 8 seqüências cíclicas entre si e, ainda, os vértices v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 mais 10 seqüências cíclicas.

Definição 1.11. Um ciclo com um número par de vértices é chamado de **ciclo par**; um ciclo com um número ímpar de vértices é chamado de **ciclo ímpar**.

Exemplo 1.11. Na figura abaixo, G é um grafo ciclo par e H um grafo ciclo ímpar.

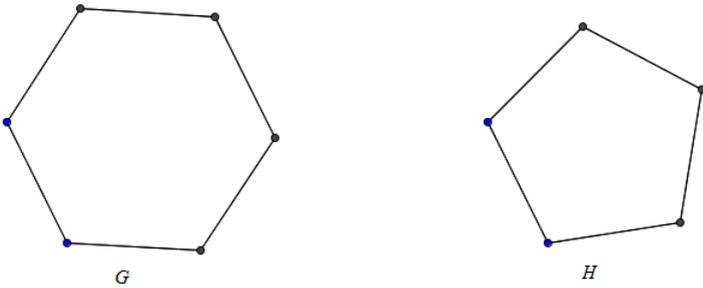


Figura 14 – Grafo ciclo par e ciclo ímpar.

Definição 1.12. Um **conjunto independente** de um grafo G é um conjunto S de vértices de G tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S . Em outras palavras, se u e v são vértices quaisquer de um conjunto independente, não há aresta entre u e v .

Definição 1.13. Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico (não possui ciclos). Uma **árvore geradora** de um grafo G é qualquer árvore de G que contenha todos os vértices de G .

Exemplo 1.12. Todos os grafos abaixo são exemplos de árvores.

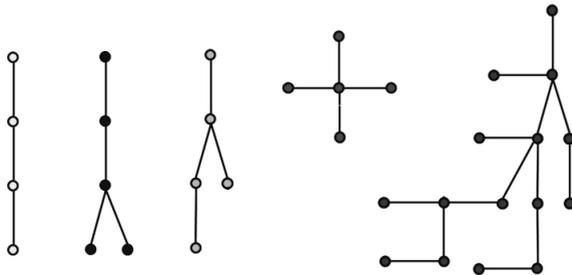


Figura 15 – Árvores.

Definição 1.14. Diz-se que um grafo é **bipartido** sempre que o seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos independentes U e V . Frequentemente se escreve $G = (U, V, E)$ para denotar um grafo bipartido cuja partição tem as partes U e V .

Exemplo 1.13. Grafos bipartidos:

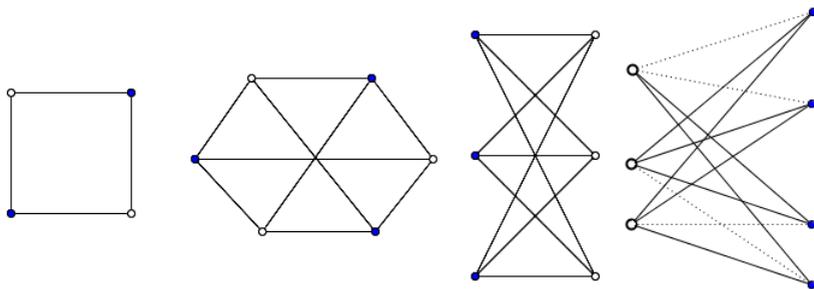


Figura 16 – Grafos bipartidos.

Podemos definir também um grafo **bipartido completo** como sendo um grafo bipartido com o maior número de arestas possível. Note que nos exemplos ilustrados acima, todos são grafos bipartidos completos. Para tais grafos usaremos a notação $K_{p,q}$ (sendo p e q as cardinalidades dos dois conjuntos independentes sendo que temos $p + q = n$). Desse modo, $K_{p,q}$ possui $p \times q$ arestas.

No exemplo acima (da esquerda para a direita) o primeiro grafo é do tipo $K_{2,2}$, o segundo e o terceiro são do tipo $K_{3,3}$ e o quarto grafo não é completo, pois podemos inserir as linhas pontilhadas como arestas e o grafo continua sendo bipartido.

Definição 1.15. *Um conjunto independente é dito **maximal** quando não existe nenhum outro conjunto independente que o contenha.*

Além disso, este é **máximo** se todos os outros conjuntos independentes têm cardinalidade menor ou igual.

Exemplo 1.14. *Observe o que acontece por exemplo com o ciclo C_6 :*

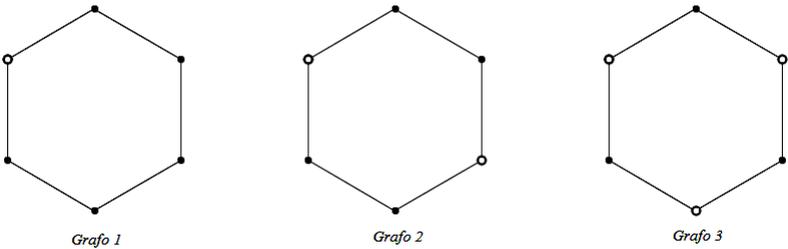


Figura 17 – Conjuntos independentes.

Note que nos três casos, os vértices representados por um círculo sem preenchimento representam subconjuntos de vértices independentes. No Grafo 2, não é possível acrescentar nenhum outro vértice ao subconjunto dos vértices destacados sem perder a independência, por isso, dizemos que é um subconjunto independente **maximal**. Além disso, note que o Grafo 3 possui 3 vértices que formam um subconjunto de vértices independentes e que não existe nenhum subconjunto independente com cardinalidade maior. Neste caso, dizemos que tal subconjunto é independente **máximo**.

Definição 1.16. *O número de independência $\alpha(G)$ de um grafo G é a cardinalidade de um subconjunto independente máximo de vértices do grafo.*

Desse modo, é possível observar que, no exemplo acima, $\alpha(G) = 3$.

Grafos que contém laços podem não possuir conjuntos independentes. Nesses casos, tacitamente, admitimos que $\alpha(G) = 0$.

Teorema 1.1. *Se G é um grafo simples, G possui pelo menos um subconjunto independente máximo.*

Demonstração. Consideremos G um grafo simples com $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Utilizando o processo de indução finita em n vamos, primeiramente, demonstrar que G possui subconjuntos independentes maximais. Se $n = 1$, o resultado é óbvio. Admita que para um certo $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, todo grafo G com $V(G) = \{v_1, \dots, v_k\}$ possua pelo menos um subconjunto independente maximal. Tome um grafo qualquer G' com $V(G') = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$. Pela hipótese de indução, o subgrafo $H \subseteq G'$, com $V(H) = \{u_1, \dots, u_k\}$, possui pelo menos um subconjunto independente maximal $V_{max} = \{u_{i_1}, \dots, u_{i_m}\}$, $1 \leq m \leq k$. Se u_{k+1} não está relacionado a nenhum elemento de V_{max} , então $V'_{max} = \{u_{i_1}, \dots, u_{i_m}, u_{k+1}\}$ é um subconjunto independente e maximal de G' . Isso decorre do fato que, se acrescentarmos a esse conjunto algum outro elemento $u \in V(H)$, u estará relacionado a algum elemento de V_{max} , pois V_{max} é maximal em H . No caso em que u_{k+1} está relacionado a algum elemento de V_{max} , temos que V_{max} é um subconjunto independente e maximal de G' , pois se acrescentarmos a esse conjunto o elemento u_{k+1} ou qualquer elemento $u \in V(H)$, esse conjunto deixa de ser independente. Isso prova que G' possui pelo menos um subconjunto independente maximal e, pelo princípio da indução, esse é resultado é verdadeiro para todo grafo simples G . Agora consideremos $A \subset \mathbb{N}$ o conjunto formado pelas cardinalidades dos subconjuntos independentes

maximais de G . Como G possui pelo menos um subconjunto independente maximal, temos que $A \neq \emptyset$. Obviamente, A é um conjunto finito, pois há uma quantidade finita de subconjuntos independentes de G . Logo existe $\alpha \in A$ tal que $\alpha \geq \ell$, para todo $\ell \in A$, ou seja, existe um subconjunto independente maximal de G que possui a maior cardinalidade possível, a qual denotamos por $\alpha(G)$. \square

2 Coloração

Dado um grafo qualquer, realizar uma coloração nada mais é do que atribuir rótulos a elementos de um grafo (vértices ou arestas), os quais chamamos de “cores”. Tal processo é efetuado com base em algumas restrições e é chamado de uma *coloração de vértices (ou arestas)*. No caso de uma coloração de vértices, dois vértices adjacentes não devem receber a mesma cor e, no caso de uma coloração de arestas, atribuímos uma cor para cada aresta de modo que duas arestas adjacentes não possuam a mesma cor. Diremos sempre “uma” e não “a” coloração, o que será justificado mais adiante quando apresentarmos o uso de algoritmos para efetuar colorações.

2.1 Coloração de vértices

Ao efetuarmos uma coloração de vértices em um grafo simples, é fácil produzir uma coloração com muitas cores. O caso mais elementar seria atribuir uma cor diferente para cada vértice. Porém, obter uma coloração com poucas cores pode não ser um problema tão simples. Os problemas de coloração só fazem sentido para grafos simples. Sendo assim, a partir deste capítulo, sempre que nos referirmos a “um grafo” qualquer, fica subentendido que se trata de um *grafo simples*.

Definição 2.1. *O número cromático $\chi(G)$ de um grafo G é o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Se o número de cores utilizado na coloração de vértices de um grafo for igual a $\chi(G)$, a coloração é dita **ótima**.*

Observamos que o processo de coloração de vértices é sempre possível, uma vez que, se o grafo tem n vértices, podemos usar n cores

distintas. Isso significa que o subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ cujos elementos correspondem à quantidade de cores relativa a cada colorações de vértices para G , é não vazio. Ou seja, $\chi(G)$ está bem definido como sendo o mínimo do conjunto A .

O método sequencial para coloração de vértices, descrito a seguir, corresponde a uma *heurística gulosa*. O processo de heurística gulosa determina uma solução analisando elemento a elemento, sendo que a cada passo é adicionado um único elemento “candidato”. O candidato escolhido segue um certo critério. A aplicação do método termina quando todos os elementos candidatos foram analisados. Vale ressaltar que um algoritmo heurístico pode determinar boas soluções na maioria das vezes, mas não é possível garantir uma boa solução para todos os casos. Uma ideia “gulosa” seria: “Percorremos todos os vértices do grafo e se não houver conflitos de independência acrescentamos o vértice ao conjunto”.

Podemos seguir os passos abaixo para realizar um processo de coloração heurística dos vértices de um grafo G .

Método de coloração sequencial:

Entrada: um grafo G .

Saída: uma coloração de G .

- Enumerar os vértices do grafo, ou seja, escolher uma sequência v_1, \dots, v_n em que cada vértice aparece uma e uma só vez. É importante ressaltar que essa enumeração não tem relação alguma com a ordem em que os vértices aparecem no grafo G ;
- Pintar os vértices um a um, na sequência estabelecida no item anterior, atribuindo a v_i o menor inteiro (positivo) ainda não atribuído a um dos seus vértices vizinhos já coloridos.

Este processo pode gerar diferentes resultados, dependendo da ordenação de vértices escolhida, o que é um dos motivos de sua com-

plexidade. Além disso, como diferentes ordenações (dos vértices) geram diferentes resultados, os problemas envolvendo coloração, não possuem uma única solução, por isso sempre vamos sempre nos referir a “uma possível coloração” ao longo do texto.

Utilizando o método de coloração sequencial dos vértices de um grafo G , é possível obter um limite superior para $\chi(G)$ uma vez que este número nunca será maior que $\Delta + 1$, independente da ordem em que os vértices são apresentados. Justifica-se este resultado pelo fato de que os vértices adjacentes (ao vértice que será colorido) sempre utilizam no máximo Δ cores. Quando um vértice v está prestes a ser colorido, o número de cores utilizadas por seus vizinhos já coloridos certamente não é maior do que o seu grau $d(v)$, ou seja, não é maior do que Δ , lembrando que $\Delta = \max\{d(v_i)\}$. Desse modo, certamente uma das cores $1, 2, \dots, \Delta + 1$ estará disponível ao tentarmos colorir cada um dos vértices v_i . Portanto, $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Exemplo 2.1. *Dado o grafo abaixo, analisaremos o processo heurístico descrito acima para efetuar a coloração de seus vértices:*

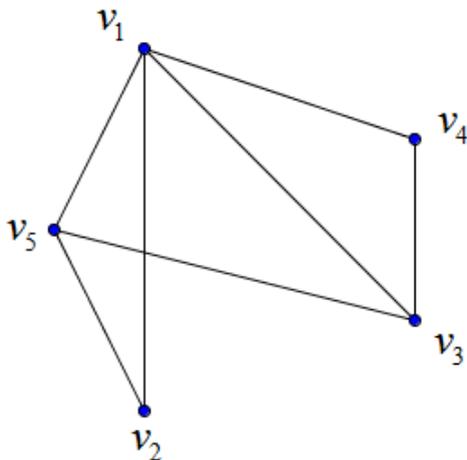


Figura 18 – Grafo para aplicação de uma coloração de vértices.

Observe que, ao utilizarmos a *cor 1* no vértice v_1 , a mesma cor não pode aparecer nos vértices v_2, v_3, v_4 e v_5 , pois todos eles são adjacentes a v_1 . Desse modo, utilizaremos uma *cor 2* para o vértice v_2 , sendo que a mesma cor pode ser utilizada para colorir o vértice v_3 que não é adjacente a v_2 , porém, a *cor 2* também não pode ser utilizada para colorir os vértices v_4 e v_5 , pois são adjacentes a v_3 . Por fim, será necessária uma *cor 3* para colorir os vértices v_4 e v_5 , sendo que tais vértices não são adjacentes entre si. Portanto, com a ordenação escolhida são necessárias três cores, dispostas como na figura abaixo:

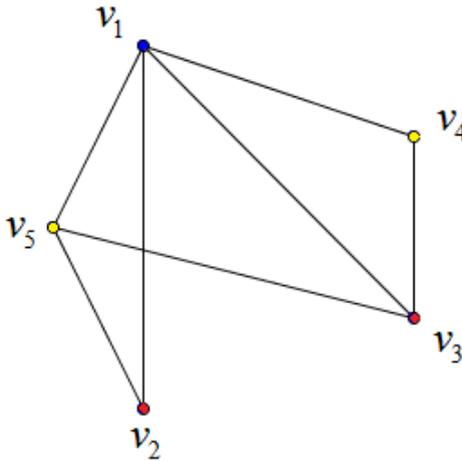


Figura 19 – Grafo após a aplicação de uma coloração de vértices.

Como relatado anteriormente, a coloração obtida depende da ordenação dos vértices escolhida no início do processo de coloração. Deste modo, utilizaremos uma nova ordenação dos vértices do grafo em questão (representada na figura abaixo) e analisaremos o resultado obtido.

Seguindo os mesmos passos, obteríamos como uma outra coloração possível:

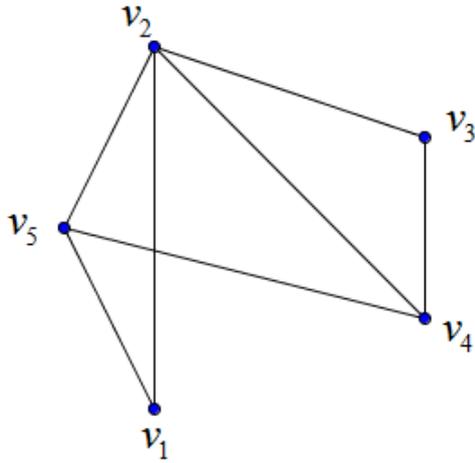


Figura 20 – Grafo para aplicação de uma segunda coloração de vértices.

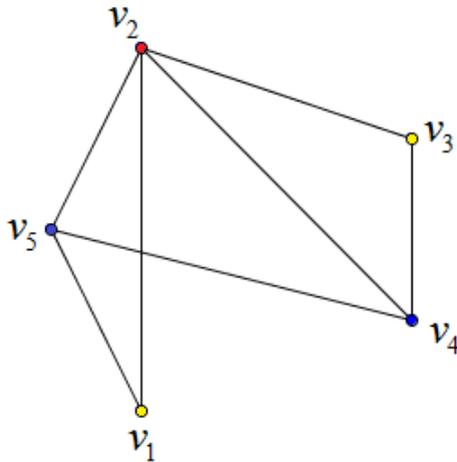


Figura 21 – Grafo após a aplicação de uma segunda coloração de vértices.

Conforme mencionado anteriormente e destacado em [6], o número de cores utilizado por esta coloração heurística gulosa depende

muito da ordenação escolhida para os vértices. Por exemplo, se $K_{n,n}$ é um grafo bipartido completo com partições $X := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $Y := \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, então o grafo bipartido $H(X, Y)$ obtido a partir do grafo $K_{n,n}$, suprimindo a correspondência perfeita $x_i y_i : 1 \leq i \leq n$ requer n cores se os vértices foram listados na ordem $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$. Por outro lado, seria necessário apenas duas cores se os vértices foram apresentados na ordem $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$. Na verdade, há sempre uma ordenação que produz *uma coloração ótima*. O problema é interessante pela dificuldade em saber com antecedência qual ordenação vai produzir essa coloração.

Teorema 2.1. *Dado qualquer grafo G , há uma ordenação dos seus vértices tal que o método de coloração sequencial de vértices, aplicado a essa ordenação, produz uma coloração ótima.*

Demonstração. Dado um grafo G , seja $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Por simplicidade, vamos denotar $\chi(G)$ por χ . De acordo com a definição de χ , há uma coloração de vértices de G que utiliza χ cores. Isso significa que podemos particionar o conjunto $V(G)$ em χ subconjuntos independentes da forma $\{v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{k_i}\}$, $1 \leq i \leq \chi$. Cada um desses subconjuntos de vértices é colorido com uma das χ cores. Consideremos a seguinte ordenação dos vértices de G :

$$v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}.$$

Aplicando o método de coloração sequencial de vértices com respeito a essa ordenação, obtemos uma coloração com χ cores. Provamos isso por indução em χ . De fato, se $\chi = 1$, podemos atribuir esse inteiro a cada elemento de $V(G)$. Ou seja, $V(G)$ é um subconjunto independente de G e o método de coloração sequencial aplicado aos vértices ordenados da forma v_1, \dots, v_n também atribui o inteiro 1 a cada um desses vértices, devido a ausência de arestas. Como hipótese de indução supomos que, sendo χ o número cromático de um grafo, ordenando os vértices de G na forma

$$v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi},$$

o método de coloração sequencial fornece exatamente χ inteiros. Considere um grafo G com número cromático igual a $\chi + 1$ e a ordenação

$$v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}, v_{\chi+1}^1, \dots, v_{\chi+1}^{k_{\chi+1}}.$$

O número cromático do grafo G' com $V(G') = \{v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}\}$ é exatamente igual a χ pois, caso contrário, se este fosse igual a $\eta < \chi$, G poderia ser colorido com as $\eta + 1 < \chi + 1$ cores, o que é absurdo. Logo, pela hipótese de indução, ao aplicarmos o método sequencial de coloração a $v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, v_2^1, \dots, v_2^{k_2}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}$ obtemos exatamente χ inteiros que podem ser atribuídos a esses vértices. O processo sequencial, aplicado ao vértice $v_{\chi+1}^1$, atribui um inteiro n que é igual ao menor inteiro ainda não atribuído aos vizinhos de $v_{\chi+1}^1$; ou seja, n é igual a $\chi + 1$ se $v_{\chi+1}^1$ está relacionado a todos os vértices $v_1^1, \dots, v_1^{k_1}, \dots, v_\chi^1, \dots, v_\chi^{k_\chi}$ ou $n \leq \chi$, caso contrário. O mesmo ocorre com os vértices $v_{\chi+1}^2, \dots, v_{\chi+1}^{k_{\chi+1}}$, já que estes vértices não estão relacionados entre si e tampouco com $v_{\chi+1}^1$. A pelo menos um dos vértices $v_{\chi+1}^j$, com $1 \leq j \leq k_{\chi+1}$, será atribuído o inteiro $\chi + 1$ pois, caso contrário, o número cromático de G seria igual a χ . Portanto, no final do processo sequencial aplicado ao grafo G , obtemos $\chi + 1$ inteiros. Pelo princípio da indução o teorema está provado.

□

Uma p -coloração dos vértices de um grafo G pode ser representada por uma partição em conjuntos V_i , compostos por vértices do grafo, de modo que $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$. Se os conjuntos V_i são conjuntos independentes então obtemos uma coloração própria (ou seja, uma coloração em que vértices adjacentes não possuem a mesma cor). Desse modo, podemos utilizar um “algoritmo guloso” para encontrar conjuntos independentes de um grafo G , colorindo cada um dos conjuntos independentes com uma cor.

Identificando conjuntos de vértices que não estão ligados por uma aresta, separando-os em grupos por cores (o que equivale a pro-

curar conjuntos independentes maximais, não sendo possível acrescentar mais vértices aos conjuntos), podemos obter um limite inferior para $\chi(G)$. De fato, temos que para um grafo G com n vértices, $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$, isto é, $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$. Uma demonstração para este fato:

Seja $\{V_1, \dots, V_k\}$ uma coloração própria dos vértices de G , em que cada V_i corresponde a um conjunto de vértices coloridos com a mesma cor, ou seja, $V_i \subseteq V(G)$, para $1 \leq i \leq k$. Temos $|V_i| \leq \alpha(G)$, para cada i , visto que $\alpha(G)$ é a cardinalidade de um subconjunto independente máximo e que $|V_i|$ representa o número de elementos do conjunto V_i . Logo, $n = |V_1| + |V_2| + \dots + |V_k| \leq k \cdot \alpha(G)$. Mas, $\chi(G) = \min\{k\}$ e, desse modo, $n \leq \chi(G) \alpha(G)$. Portanto, $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Para descrever o processo de obtenção de um conjunto independente máximo, utilizaremos o seguinte algoritmo:

Algoritmo guloso para construção de um Conjunto Independente Máximo:

1. Selecione um vértice (de menor grau) ainda não considerado;
2. Se este vértice não possuir conflitos com vértices já adicionados, inclua-o no conjunto;
3. Remova as arestas deste vértice e os seus vértices vizinhos do grafo original;
4. Se houverem vértices ainda não considerados volte para 1.

Para grafos ciclos, analisaremos dois exemplos. No primeiro deles, verificamos que um grafo ciclo pode ter número cromático 2 ou 3; no seguinte, utilizaremos o algoritmo descrito para determinar um subconjunto independente, verificando que ele pode ser máximo ou não de acordo com a ordenação dos vértices.

Exemplo 2.2. *Observe os grafos ciclos C_4 e C_5 na Figura 22. Queremos determinar o número cromático para estes grafos e generalizar o número cromático dos ciclos C_n em geral.*

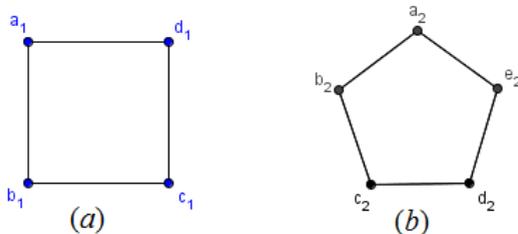


Figura 22 – (a) Grafo C_4 ; (b) Grafo C_5 .

No grafo C_4 , como os vértices a_1 e c_1 são não adjacentes e desse modo podem ser coloridos com uma única cor (diremos cor 1). Da mesma forma, os vértices b_1 e d_1 podem ser coloridos com uma mesma cor (cor 2). Logo $\chi(C_4) = 2$.

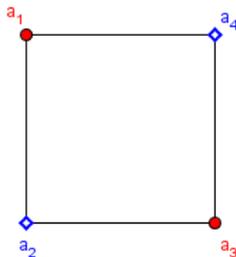


Figura 23 – Coloração de vértices do grafo C_4 .

Para um grafo ciclo de n vértices ($n > 3$ inteiro positivo par), temos que $\chi(C_n) = 2$. De fato, seja $n = 2k$ e a ordenação dos vértices dada por v_1, v_2, \dots, v_n , sendo vértices consecutivos no grafo ciclo par, como representado na Figura 24 (a) abaixo.

Temos que um vértice de índice ímpar é sempre adjacente a um vértice de índice par, e vice versa. Desse modo, podemos colorir os vértices v_i , com i ímpar, todos com uma cor 1 e os vértices v_j , com j par, podem ser coloridos todos com uma cor 2, o que esta representado na Figura 24 (b).

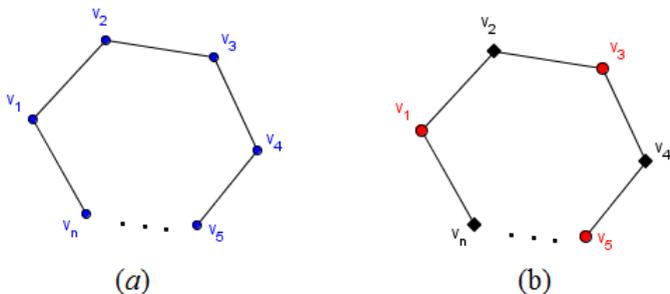


Figura 24 – Grafo ciclo par, C_n .

Para o caso do grafo C_5 , temos que os vértices a_2 e c_2 podem ser coloridos com uma mesma cor (cor 1), os vértices b_2 e d_2 também podem ser coloridos com uma mesma cor (cor 2) e ainda, como o vértice e_2 é adjacente tanto ao vértice a_2 quanto ao vértice d_2 , necessitamos de uma terceira cor para completar sua coloração, definida como cor 3. Portanto $\chi(C_5) = 3$.

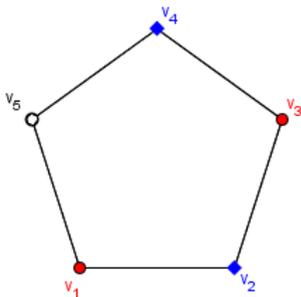
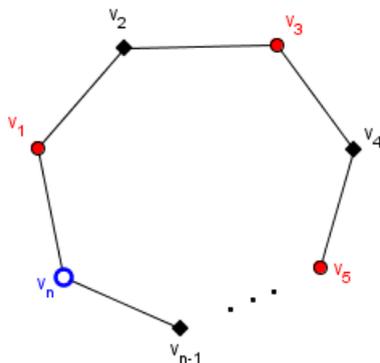


Figura 25 – Coloração de vértices do grafo C_5 .

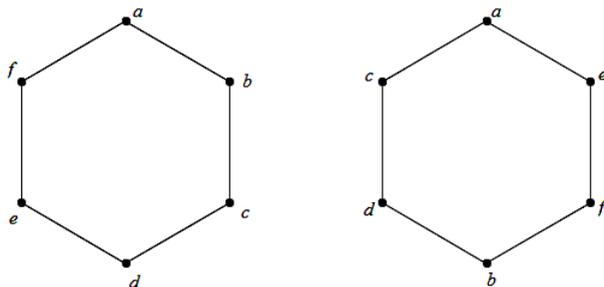
De modo geral, para n ímpar, a coloração dos vértices do grafo ciclo C_n ocorrerá do mesmo modo descrito no caso anterior, para grafos ciclo pares, até o vértice de índice $n - 1$, diferindo apenas no vértice v_n , em que n é ímpar e é adjacente a v_1 (ver Figura 26). Neste caso, obtemos que sempre serão necessárias três cores para obter uma coloração própria do grafo ciclo ímpar.

Figura 26 – Grafo ciclo ímpar, C_n .

Portanto, concluímos que:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ é par} \\ 3, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}. \quad (2.1)$$

Exemplo 2.3. Observe que os grafos G e H , na figura abaixo, possuem o mesmo número de arestas mas em ordens diferentes. Vamos determinar o número de independência aplicando o algoritmo guloso acima.

Figura 27 – Grafo G e grafo H , respectivamente.

No caso do grafo G , temos:

a	Entra no conjunto
b	Conflito
c	Entra no conjunto
d	Conflito
e	Entra no conjunto
f	Conflito
Conjunto	$\{a, c, e\}$

E conseguimos de fato um conjunto independente **máximo**. Neste caso, o grafo possui seis vértices e representa um grafo ciclo par, logo, não existe nenhum subconjunto independente com cardinalidade maior que 3 (visto que $\chi(C_6) = 2$).

a	Entra no conjunto
b	Entra no conjunto
c	Conflito
d	Conflito
e	Conflito
f	Conflito
Conjunto	$\{a, b\}$

No caso do grafo H , o conjunto é maximal, mas não é máximo.

Conforme destacado em [12], ainda hoje não há um algoritmo eficiente que analise os vértices de um grafo G e determine o número $\alpha(G)$, pois o método torna-se computacionalmente inviável, quando se aumenta o número de vértices do grafo em questão, devido ao grande aumento no número de ordenações possíveis dos vértices.

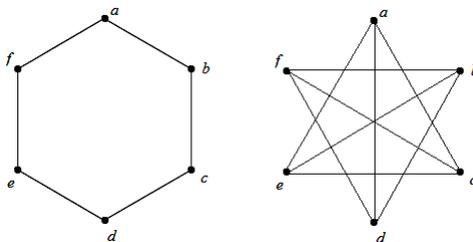


Figura 28 – Grafo G e grafo \overline{G} , respectivamente.

O processo realizado no Exemplo 2.3 acima trata-se de um método razoável para achar um conjunto independente maximal em um grafo G . Verifica-se que podemos iniciar com qualquer vértice de G (pode ser feito escolhendo uma ordenação não decrescente de acordo com o grau de cada vértice, o que não faria mudanças em nosso exemplo, pois todos os vértices possuem grau 2) e então adicionar mais vértices ao conjunto, desde que os vértices adicionados não sejam adjacentes a qualquer outro dos vértices já escolhidos. Porém, esse método não garante que o conjunto independente maximal seja máximo, como verificado no exemplo anterior.

Em [12], há um outro processo descrito que utiliza aritmética booleana como um possível método para determinar conjuntos independentes maximais. No caso de [4], discute-se como utilizar a programação linear inteira para este tipo de problema.

O número cromático não fornece essencialmente nenhuma informação sobre quantos vértices de cada cor existem. Vale observar que, no caso dos grafos bipartidos, todos eles são grafos 2-coloríveis, (isto é, $\chi(G) = 2$). (Esse resultado é apresentado e demonstrado no Teorema 2.3.)

Para o grafo nulo N é imediato que $\chi(N) = 1$, já que o mesmo não possui arestas. Por outro lado, cada vértice de um grafo completo K_n é adjacente a todos os outros vértices do grafo, e portanto necessitamos de n cores, ou seja, $\chi(K_n) = n$. Quando G é um grafo completo ou um ciclo ímpar temos que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Note que, quando G é um grafo completo com n vértices, temos que $\Delta(G) = n - 1$, visto que cada vértice de G está ligado aos demais $n - 1$ vértices do grafo e são necessárias n cores distintas para colorir o grafo; no caso em que G é um ciclo ímpar, temos que $\Delta(G) = 2$ e, como discutido anteriormente, $\chi(G) = 3$. O Teorema a seguir, conhecido como Teorema de Brooks, mostra que tal igualdade é válida somente para grafos completos ou ciclos ímpares, mais precisamente, se G não for um destes dois grafos, temos $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Antes de apresentarmos o Teorema de Brooks, definiremos e exemplificaremos a noção de “cadeia de Kempe”, além de um resultado sobre grafos bipartidos.

Definição 2.2. Dados G um grafo qualquer e K uma coloração própria de G , uma **cadeia de Kempe** de G correspondente a duas cores i, j de K é o subgrafo formado exatamente pelos vértices de cores i ou j .

Exemplo 2.4. Na Figura 29 abaixo temos o exemplo de um grafo G (representado com linhas tracejadas) com uma coloração própria utilizando 3 cores (visto que nenhum vértice adjacente possui a mesma cor) e a sua cadeia de Kempe G_{23} (representada com linhas contínuas). Observe pela figura que a coloração de vértices influencia diretamente sobre a Cadeia de Kempe, sendo que as arestas em questão dependem de vértices coloridos com a mesma cor em uma possível coloração de vértices.

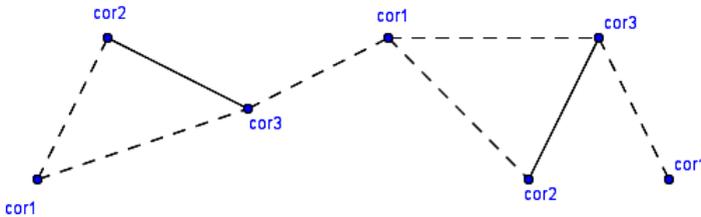


Figura 29 – Grafo G e sua cadeia de Kempe G_{23} .

Um resultado simples e útil é dado pelo teorema a seguir:

Teorema 2.2. Um grafo G é bipartido se, e somente se, $\chi(G) = 2$.

Demonstração. (\Rightarrow) Se G é um grafo bipartido, basta fazer cada conjunto independente corresponder a uma das duas cores, logo $\chi(G) = 2$. (\Leftarrow) Se um grafo possuir $\chi(G) = 2$, podemos separar um subconjunto do outro, de modo que os vértices de mesma cor permaneçam juntos. Pela definição de número cromático (Definição 2.1), não pode haver um

vértice adjacente com a mesma cor, ou seja, não há arestas entre dois vértices da mesma cor. Logo, só poderá haver arestas entre um vértice de um subconjunto para um vértice do outro, o que corresponde à definição de grafo bipartido (Definição 1.14). \square

Corolário: Grafos que correspondem a ciclos pares ou que são caminhos são bipartidos, e portanto tem $\chi = 2$.

Demonstração. Para o caso de grafos ciclos pares, podemos particionar os vértices do grafo de modo que vértices ímpares e pares sejam agrupados em dois conjuntos distintos, ou seja, trata-se de um grafo bipartido e, pelo teorema anterior, $\chi = 2$. Se o grafo em questão for um caminho, podemos realizar a partição de modo análogo ao grafo ciclo par, sendo que o grafo também será bipartido e, portanto, $\chi = 2$. \square

Um grafo é **bicolorido** se for possível atribuir uma de duas cores a cada vértice de tal forma que as pontas de cada aresta tenham cores diferentes. Essa atribuição de cores é uma bicoloração do grafo. Tomemos um exemplo de aplicação para este teorema.

Exemplo 2.5. Dados os grafos bipartidos G e H :

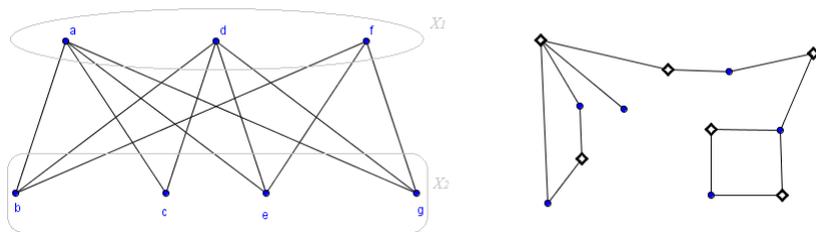


Figura 30 – Grafos bipartidos G e H , respectivamente.

Observe que $\{X_1, X_2\}$ representa uma partição de G e que para H também é possível obter a bipartição, visto que seus vértices estão representados em dois grupos (duas cores) distintos.

A demonstração do Teorema de Brooks, a seguir, é baseada na demonstração apresentada em [7].

Teorema 2.3. (Brooks): *Se G é um grafo conexo que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Demonstração. Sejam G um grafo conexo de ordem n que não é um ciclo ímpar e nem um grafo completo.

Observemos inicialmente que:

1. $\Delta \neq 0$ (pois, para $\Delta = 0$, G não possui arestas ligando seus vértices e, portanto, G é um grafo desconexo ou um grafo completo com apenas um vértice - K_1 - o que não faz parte das hipóteses do teorema);
2. $\Delta \neq 1$ (pois, para $\Delta = 1$, temos que G é um grafo desconexo ou um grafo completo com dois vértices - K_2 - o que também não consta nas hipóteses do teorema).

Utilizaremos o processo de indução finita sobre o número de vértices n . Para simplificar a notação, utilizaremos $\Delta(G) = \Delta$.

Se $\Delta = 2$, o grafo G deve ser um ciclo par ou um caminho (pois, pelas hipóteses do teorema, G é conexo e não pode ser um ciclo ímpar), e em ambos os casos temos $\chi(G) = 2 = \Delta$ (pelo **Corolário do Teorema 2.2**). Deste modo, vamos supor que $\Delta \geq 3$.

Hipótese de Indução) Suponhamos que o resultado é válido para todos os grafos com menos que n vértices.

Primeiramente, analisaremos os casos em que G é um grafo não regular. Podemos selecionar um vértice v tal que $d(v) < \Delta$. Desse modo, o grafo obtido excluindo-se o vértice v e todas as arestas incidentes a v , denotado por $G - v$, tem menos que n vértices e, pela hipótese de indução, pode ser colorido com $\Delta(G - v) \leq \Delta$ cores, ou seja, $G - v$ é Δ -colorível. Como $d(v) < \Delta$, haverá pelo menos uma entre as Δ cores

utilizadas nos vértices adjacentes a v em G que não foi utilizada em nenhum vértice adjacente a v . Logo, basta aplicarmos tal cor ao vértice v para obtermos uma coloração adequada de G que utiliza Δ cores, concluindo que G é Δ -colorível.

Em seguida, analisaremos o caso em que G é **um grafo Δ -regular**. Suponhamos que G não pode ser colorido com Δ cores. Pela hipótese de indução, como $G - v$ possui menos que n vértices, representa um grafo Δ -colorível. Além disso, todos os vértices vizinhos de v recebem exatamente Δ cores, pois caso contrário, G não seria um grafo regular com n vértices e poderíamos repetir o processo utilizado no parágrafo anterior para colorir adequadamente o vértice v .

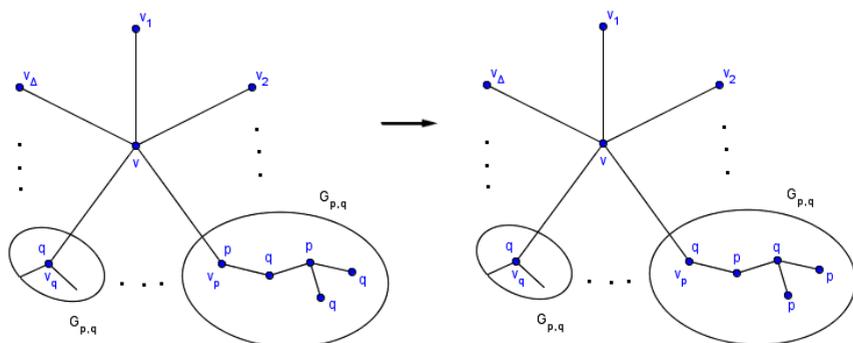


Figura 31 – Recoloração dos vértices da componente conexa G_{pq} que contém o vértice v_p .

Não sendo possível repetir o processo, analisemos do seguinte modo: sejam v_1, v_2, \dots, v_n os vértices vizinhos de v (como representado na Figura 31) e p a cor utilizada para colorir o vértice v_p . Escolhendo dois destes vértices vizinhos a v , os quais denotaremos por v_p e v_q , consideremos a cadeia de Kempe G_{pq} . Se v_p e v_q são vértices que estão em diferentes componentes conexas de G_{pq} (não há aresta ligando v_p e v_q), podemos permutar as cores p e q em todos os vértices da componente que contém v_p e ainda assim teremos uma coloração própria para

o grafo (o que está representado pela Figura 31). Na nova coloração obtida, o vértice v_p está colorido com a cor q e, desse modo, nenhum dos vértices adjacentes a v utiliza a cor p . Portanto, o vértice v pode ser colorido adequadamente com a cor p e G é um grafo Δ -colorível, o que é um absurdo, pois estamos considerando que G não pode ser colorido com Δ cores.

Desse modo, admitiremos que para todos p e q os vértices v_p e v_q pertencem a uma mesma componente conexa de G_{pq} (o que equivale a dizer que para todo par de vizinhos v_p e v_q de v , existe um caminho P_{pq} de v_p a v_q em que todos os vértices deste caminho estão coloridos adequadamente utilizando apenas com as cores p ou q). Mostraremos que $G_{pq} = P_{pq}$. Suponha $d(v_p) \geq 2$ em G_{pq} , ou seja, v_p não é o vértice inicial nem final do caminho P_{pq} . Então v_p possui pelo menos dois vizinhos de cor q e, como $d(v_p) = \Delta$ (pela hipótese de que G é um grafo Δ -regular), certamente que pelo menos uma cor r não será utilizada nos vértices vizinhos a v_p (pois a cor q foi utilizada em, no mínimo, dois vértices distintos, ambos vizinhos a v_p). Logo, podemos recolorir v_p com r , restando a cor p para colorir o vértice v , obtendo que G é um grafo Δ -colorível, o que contradiz a hipótese de G não poder ser colorido com Δ cores. Assim, temos que v_p possui grau 1 em G_{pq} . De modo análogo, concluí-se o mesmo para v_q .

Com base na afirmação obtida anteriormente, consideremos que o vértice v_p tem apenas o vizinho v_{p_1} em G_{pq} . Assim, temos as seguintes possibilidades: **1)** o vértice v_{p_1} coincide com o vértice v_q ; **2)** v_{p_1} tem um único vizinho (o vértice v_{p_2}) em G_{pq} diferente do vértice v_p ou **3)** $d(v_{p_1}) > 2$. Para a primeira possibilidade, concluímos de imediato que $G_{pq} = P_{pq}$ (como o desejado) e, para as duas últimas possibilidades, seguimos fazendo o mesmo raciocínio sucessivamente, obtendo uma coleção de vértices da forma v_{p_k} em G_{pq} . Como $d(v_q) = 1$ algum dos vértices da coleção v_{p_k} obtida será seu único vizinho.

Se G_{pq} não é um caminho, existe pelo menos um vértice de grau maior ou igual a 3, obtido pelo processo acima. Seja x , dentre estes vértices, o primeiro deles (caso exista mais que um) obtido pelo processo descrito anteriormente em G_{pq} partindo-se do vértice v_p . Se a cor utilizada em x é p , então x é adjacente a três vértices com cor q e assim deve existir pelo menos uma cor, digamos c , que não foi utilizada para colorir os vértices vizinhos de x . Assim, podemos recolorir o vértice v_p com a cor q , v_{p_1} com a cor p , v_{p_2} com a cor q , ..., x com a cor c e v com a cor p (o que está representado pela Figura 32), tornando o grafo G Δ -colorível, o que é contrária nossa hipótese de que G não pode ser colorido com Δ cores. Para o caso em que o vértice x é colorido com a cor q o raciocínio é análogo. Portanto G_{pq} deve ser um caminho de v_p a v_q .

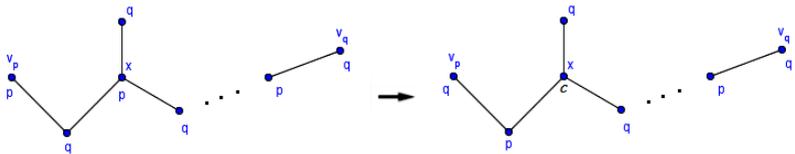


Figura 32 – Recoloração dos vértices da componente G_{pq} que não é um caminho.

Mostraremos agora que duas cadeias G_{pq} e G_{pr} com uma cor p em comum e $r \neq q$ interceptam-se apenas em v_p . Suponha que z é um vértice que pertença a ambas as cadeias, G_{pq} e G_{pr} . Então a cor utilizada no vértice z é p (pois trata-se da única cor comum a ambas cadeias de Kempre em questão). Desse modo, a menos que o vértice z coincida com o vértice v_p , z tem dois vizinhos coloridos com a cor q e outros dois coloridos com a cor r (como representado pela Figura 33). Logo, existe uma cor não utilizada nos vértices adjacentes à z , e, portanto, é possível recolorir o grafo G como no processo realizado anteriormente, gerando um absurdo.

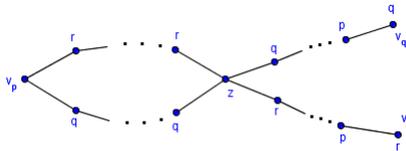


Figura 33 – Cadeias de Kempe G_{pq} e G_{pr} .

Agora suponhamos que dois vértices vizinhos de v , v_p e v_q , são não adjacentes em G . Então eles também são não adjacentes em $G - v$ (visto que $G - v$ apenas exclui o vértice v e todas as arestas adjacentes a ele, não incluindo nenhuma aresta que possa ligar v_p e v_q) e o caminho G_{pq} contém um vértice diferente de v_q , digamos y , adjacente a v_p com a cor utilizada em y sendo q . Selecione alguma cor r (diferente das cores p e q) e troque as cores dos vértices da cadeia G_{pr} de modo que v_p receba a cor r . Consideremos então a cadeia de Kempe para essa nova coloração própria de $G - v$. Assim, G_{pq} é a nova cadeia G'_{rq} e teremos uma outra cadeia G'_{pq} que vai do vértice v_r ao vértice v_q . Desse modo, concluímos que $y \in G'_{rq}$, pois é adjacente ao vértice v_p e $y \in G'_{pq}$, pois possui está colorido com a cor q , o que contraria o parágrafo anterior, pois temos duas cadeias de Kempe interceptando-se em um vértice diferente dos extremos.

Finalmente, concluímos que os vizinhos do vértice v são adjacentes entre si e como v é um vértice qualquer e G é um grafo conexo, G deve ser um grafo completo, o que contraria a hipótese de que G não pode ser colorido adequadamente com Δ cores. Portanto G é Δ -colorível. \square

O Teorema de Brooks pode ser enunciado também do seguinte modo: “Se G é um grafo conexo, excluindo os casos em que G é um clique ou um ciclo ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.” Como observamos no Exemplo 22, no caso de um ciclo ímpar $\chi(G) = 3$ e $\Delta(G) = 2$.

Analisemos um exemplo de coloração em que o grafo que representa a situação problema não é um grafo bipartido.

Exemplo 2.6. *O dono de uma loja de animais comprou certa quantidade de peixes ornamentais de diversas espécies, sendo apenas um exemplar de cada espécie. Alguns destes peixes não podem ficar no mesmo aquário. A compatibilidade entre as espécies está retratada na tabela a seguir (um X nessa tabela significa que as espécies representadas nas respectivas linhas e colunas não devem ficar no mesmo aquário):*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A						X	X		X
B			X					X	
C		X			X			X	
D					X	X		X	
E			X	X			X		
F	X			X			X		X
G	X				X	X		X	X
H		X	X	X			X		
I	X					X	X		

Desse modo, com base nas compatibilidades entre as espécies representadas na tabela, vamos elaborar um grafo em que os vértices são as espécies de peixes

$$\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\};$$

de modo que dois vértices estarão ligados por uma aresta sempre que representarem duas espécies que não podem estar no mesmo aquário.

Com base nessas informações, aplicaremos o método sequencial e em seguida faremos uma representação por meio de um grafo.

- Para a Cor 1, temos:

A	Entra no conjunto
B	Entra no conjunto
C	Conflito
D	Entra no conjunto
E	Conflito
F	Conflito
G	Conflito
H	Conflito
I	Conflito
Conjunto	$\{A, B, D\}$

- Para as Cores 2 e 3, obtemos respectivamente:

A	-
B	-
C	Entra no conjunto
D	-
E	Conflito
F	Entra no conjunto
G	Conflito
H	Conflito
I	Conflito
Conjunto	$\{C, F\}$

A	-
B	-
C	-
D	-
E	Entra no conjunto
F	-
G	Conflito
H	Entra no conjunto
I	Entra no conjunto
Conjunto	$\{E, H, I\}$

- Para a Cor 4, restou apenas o vértice G .

A representação da coloração dos vértices desse grafo é dada pela Figura 34 abaixo.

Fica visível que há uma partição em quatro conjuntos independentes disjuntos, sendo $\{A, B, D\}$, $\{C, F\}$, $\{E, H, I\}$ e $\{G\}$. Logo, são necessários quatro aquários distintos para distribuir os peixes da forma desejada.

Como no grafo que representa esta situação (ver figura 34) temos $\Delta = 5$, o Teorema de Brooks nos garante uma coloração com no máximo 5 cores.

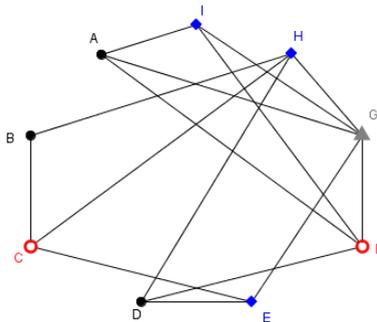


Figura 34 – Coloração do grafo representando uma compatibilidade entre as espécies.

O processo pode ser realizado alterando a ordenação dos vértices. Aplicando um algoritmo “guloso” (que será descrito em detalhes posteriormente), com base em uma nova ordenação de acordo com o grau de cada vértice, em ordem não crescente, obtemos a Figura 35. Em seguida, repetindo o processo utilizado na ordenação anterior, obtemos:

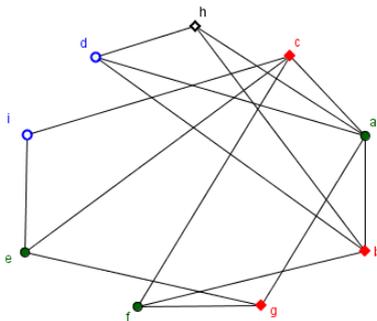


Figura 35 – Coloração do grafo representando a compatibilidade entre as espécies com base em uma nova ordenação de vértices.

Os conjuntos obtidos: $\{a, e, f\}$, $\{b, c, g\}$, $\{d, i\}$ e $\{h\}$ (equivalentemente a $\{G, C, D\}$, $\{F, H, E\}$, $\{A, B\}$ e $\{I\}$). Desse modo, são necessários também quatro aquários.

2.2 Coloração de arestas

Para ilustrar esse tipo de coloração de grafos, suponhamos que em uma sala de aula devemos formar várias duplas para realizar determinadas atividades, sendo que as duplas não devem ser as mesmas em atividades distintas. Note que, neste tipo de problema, eventualmente cada pessoa deve fazer parte de mais de uma dupla. Representando por meio de um grafo, as arestas representam as duplas e, como cada indivíduo só pode trabalhar em uma tarefa de cada vez, tarefas executadas simultaneamente não são possíveis sempre que uma mesma pessoa tiver que estar em dois grupos distintos no mesmo instante. Podemos fazer corresponder uma cor a cada horário de execução da atividade e, desse modo, nossa pergunta passa a ser:

“Qual o número mínimo de cores necessárias para colorir adequadamente as arestas do grafo?”

Lembrando que *colorir adequadamente* corresponde a efetuar uma coloração de modo que arestas incidentes a um mesmo vértice recebam cores diferentes.

Com base nisso, definimos:

Definição 2.3. *O menor número usado para colorir as arestas de um grafo de modo que arestas incidentes a um mesmo vértice recebam cores diferentes é chamado **índice cromático** do grafo, o qual denotaremos por $\chi'(G)$.*

Analogamente ao caso do número cromático, o índice cromático de um grafo G com m arestas está bem definido, uma vez que sempre podemos colorir as arestas de G utilizando m cores. Além disso, como arestas incidentes a um vértice v devem ter cores distintas, claramente temos $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Uma estimativa mais precisa para $\chi'(G)$ é apresentada abaixo. Para simplificar a notação, utilizaremos $\Delta(G) = \Delta$.

Teorema 2.4. (Vizing-1964): Para qualquer grafo G , $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$.

Omitimos a demonstração desse teorema, a qual não é trivial e envolve elementos que estão fora do escopo desse trabalho. Para o leitor interessado, a demonstração do teorema de Vizing pode ser obtida em [10].

Para grafos bipartidos, entretanto, o valor de $\chi'(G)$ é conhecido, o que será demonstrado no teorema a seguir.

Teorema 2.5. Para um grafo bipartido G , $\chi'(G) = \Delta$.

Demonstração. Suponha que estamos colorindo as arestas do grafo G , uma por uma, dispondo de Δ cores representadas pelo conjunto $\{c_1, c_2, \dots, c_\Delta\}$. Analisaremos dois casos:

1º caso: Ao colorir a aresta uv tentamos encontrar uma cor que não esteja presente em arestas incidentes ao vértice u e nem em arestas incidentes ao vértice v . Caso isto seja possível, não teremos problema algum até o momento e tal coloração pode ser realizada (sendo uv arestas quaisquer do grafo bipartido G).

2º caso: Se ao tentarmos colorir a aresta uv do grafo G não for possível determinar tal cor, como descrito no primeiro caso, observemos que as arestas incidentes ao vértice u ocupam no máximo $\Delta - 1$ cores (pois uv não está colorida e Δ é o grau máximo do grafo G) e o mesmo acontece com o vértice v . Isto nos garante que há uma aresta incidente ao vértice u que está colorida com a cor c_k , ausente nas arestas incidentes no vértice v (caso contrário, estaríamos novamente no primeiro caso e seria possível colorir a aresta uv); além disso, pelo mesmo motivo, existe uma cor c_l presente nas arestas incidentes em v e ausente nas arestas incidentes a u . Sejam V_1 e V_2 as partições dos vértices de G que contém os vértices u e v , respectivamente. Formemos uma cadeia de arestas começando em u e alternando arestas de cor c_k e c_l (esta cadeia pode até, eventualmente, só possuir uma aresta). Como o grafo

G é bipartido, as arestas de cor c_k vão de V_1 para V_2 e as arestas de cor c_l retornam de V_2 para V_1 (pois vértices de uma mesma partição não possuem uma aresta entre si, lembrando que G é um grafo bipartido). Como c_k é uma cor que está ausente nas arestas incidentes a v , esta cadeia não passa pelo vértice v , pois c_k leva os vértices de V_1 para V_2 desde que o vértice presente em V_2 possua uma aresta incidente a ele com a cor c_k , o que não ocorre, pela hipótese, com o vértice v . Podemos então recolorir a cadeia obtida permutando as cores c_k e c_l , sem afetar a propriedade da coloração de que duas arestas incidentes em um mesmo vértice sejam coloridas com cores diferentes. Depois desta permutação a cor c_k estará ausente em u (pois o vértice u teve sua aresta incidente de cor c_k recolorida com a cor c_l) e v (pois pela hipótese a cor c_k não incide no vértice v) e podemos utilizá-la para colorir a aresta uv . Portanto, todas as arestas podem ser coloridas utilizando apenas Δ cores.

□

Um algoritmo para coloração de arestas, que colore G com no máximo $\Delta(G) + 1$ cores, é baseado na prova do Teorema de Vizing.

Inicia-se com um grafo não colorido. A cada iteração uma aresta de G é escolhida, dentre aquelas que ainda não foram coloridas. O procedimento tenta encontrar uma cor c_1 não incidente nos vértices v_0 e u para colorir a aresta $e_1(u; v_0)$. São três casos possíveis a serem analisados.

O *Caso 1* ocorre quando o procedimento consegue determinar uma cor para a aresta e_1 . Encontra-se uma cor c_1 não incidente no vértice v_0 e uma cor c_2 não incidente no vértice u , respectivamente. Uma vez que esta etapa é realizada, pode-se garantir que uma aresta de cor c_1 incide em u e que alguma aresta de cor c_2 incide em v_0 .

No *Caso 2*, após determinar um caminho P partindo do vértice v_0 , se P não termina em u , as cores c_1 e c_2 podem ser alternadas neste caminho, e a aresta $e_1(u; v_0)$ pode ser colorida com a cor c_2 .

O *Caso 3* ocorre quando o caminho P termina no vértice u . Neste caso, a cor c_1 é removida da aresta $e_2(u; v_1)$ e então a aresta $e_1(u; v_0)$ é colorida com a cor c_1 . Na próxima iteração a aresta $e_2(v_1; u)$ será colorida com uma cor diferente.

Exemplo 2.7. *Utilizaremos o grafo abaixo (Figura 36) para discutir um exemplo referente a coloração das arestas.*

Suponhamos a seguinte situação:

“Um grupo de estudantes de mestrado deve dividir-se em duplas para realizar atividades de pesquisa. O mesmo estudante deve cumprir atividades com mais de uma dupla. Se cada atividade de pesquisa necessita de um mês até sua conclusão, qual o número mínimo de meses para que todas sejam realizadas de modo que nenhuma delas ocorra simultaneamente?”

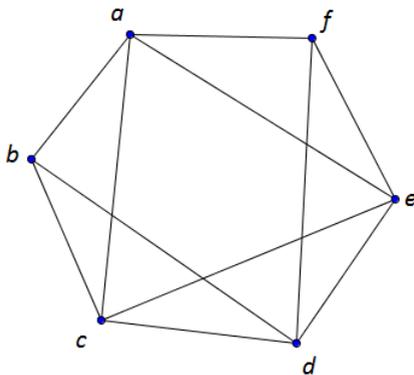


Figura 36 – Grafo para efetuarmos uma coloração de arestas.

Inicialmente, observamos que o tempo mínimo será de quatro meses, pois os estudantes **a**, **c**, **d** e **e** estão em quatro duplas distintas e nenhuma atividade pode ser realizada simultaneamente.

Uma ordenação não crescente dos vértices em relação ao grau que possuem é dada por: $\{a, c, d, e, b, f\}$. Além disso, temos que as possibilidades para o estudante **a** são representadas na coloração abaixo:

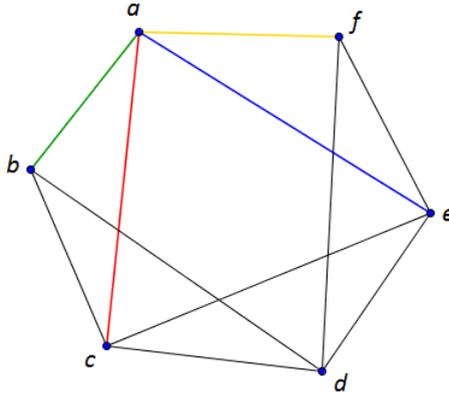


Figura 37 – Grafo após efetuarmos a primeira etapa de coloração de arestas.

Em seguida, verificamos as possibilidades para o estudante **c**, representadas na coloração abaixo:

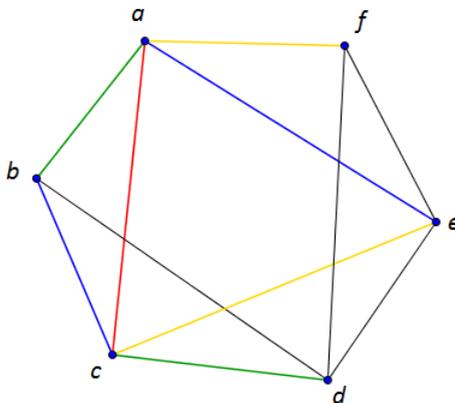


Figura 38 – Grafo após efetuarmos a segunda etapa de coloração de arestas.

Para o estudante **d**, obtemos:

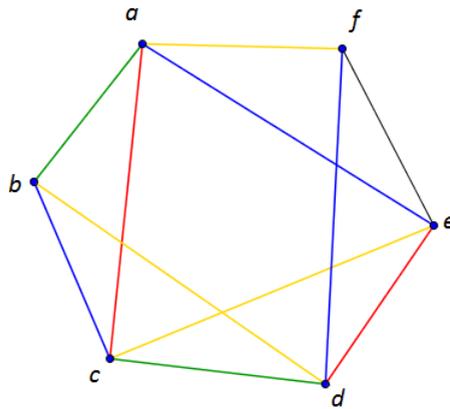


Figura 39 – Grafo após efetuarmos a terceira etapa de coloração de arestas.

Por fim, efetuando a coloração para o estudante **e**, os demais estão coloridos adequadamente e terminamos o processo obtendo:

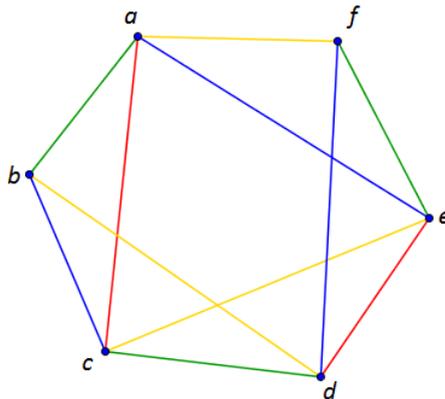


Figura 40 – Grafo após efetuarmos uma possível coloração de arestas.

Portanto, serão necessárias no mínimo quatro meses, sendo que as possíveis duplas para realização da pesquisa são dadas por:

Mês 1: af, bd, ce.

Mês 2: bc, df, ae.

Mês 3: ab, cd, ef.

Mês 4: ac, de.

Observe que, pelo Teorema de Vizing, temos $4 \leq \chi'(G) \leq 5$ e, neste exemplo, obtivemos $\chi'(G) = 4$.

2.3 O Teorema das Quatro Cores

Definição 2.4. Um **grafo planar** é um grafo que admite uma representação gráfica de modo que as arestas só se encontram nos vértices incidentes, ou seja, de tal forma que suas arestas não se cruzem.

Exemplos clássicos de grafos planares são dados pelos grafos que representam os poliedros. Utilizaremos este conceito para analisar o exemplo a seguir.

Exemplo 2.8. Analisemos três dos sólidos de Platão (o Tetraedro, o Octaedro e o Cubo), representados na figura abaixo.



Figura 41 – O Tetraedro, o Octaedro e o Cubo, respectivamente.

Para compreender a representação gráfica do grafo vamos utilizar noções intuitivas de geometria descritiva: imagine que os sólidos sejam flexíveis e que você pode esticar uma de suas faces, com suas arestas, sobre um plano. Deste modo, todas as demais faces e arestas

formarão uma figura dentro desta primeira face, esticada inicialmente. Os grafos obtidos estão respectivamente representados na figura abaixo:

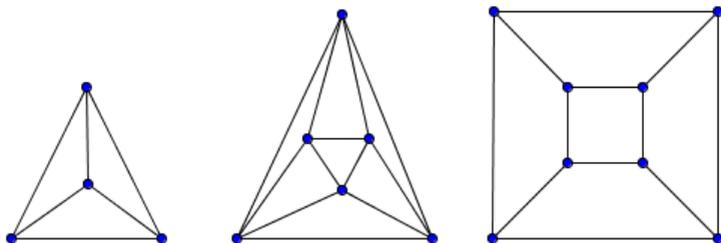


Figura 42 – Representação como grafo planar para o Tetraedro, o Octaedro e o Cubo.

Intuitivamente podemos notar que os grafos abaixo (Figura 43) não são planares pois é impossível traçar todas as arestas de modo que nenhuma delas se cruze. Uma prova desse fato é apresentada mais adiante.

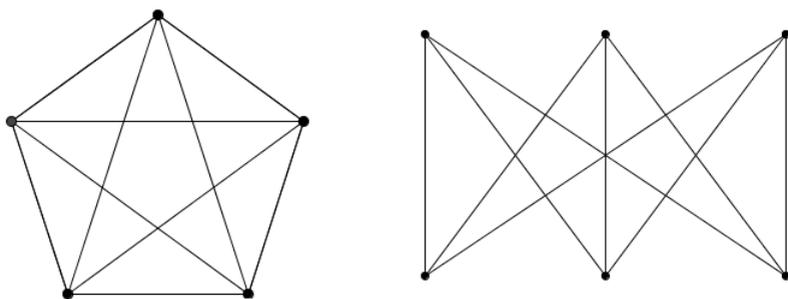


Figura 43 – Grafo K_5 e grafo bipartido $K_{3,3}$.

Para o estudo de grafos planares o seguinte resultado é fundamental:

Teorema 2.6. (da Curva de Jordan) *Qualquer curva simples fechada C no plano particiona-o em duas partes (uma das quais é limitada a outra ilimitada).*

Segundo [6], este teorema é intuitivamente óbvio, porém uma prova formal torna-se bastante complexa. Os dois conjuntos abertos para os quais uma curva simples fechada C particiona o plano são chamados o *interior* e o *exterior* de C . Denotaremos por $int(C)$ e $ext(C)$, os seus fechos por $Int(C)$ e $Ext(C)$, respectivamente (assim $Int(C) \cap Ext(C) = C$). O teorema da curva de Jordan implica que cada arco que liga um ponto de $int(C)$ a um outro ponto de $ext(C)$ intercepta C em pelo menos um ponto, o que podemos observar na figura abaixo.

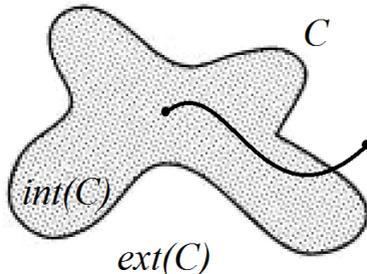


Figura 44 – Curva ligando o interior e o exterior de uma curva simples fechada.

Uma das consequências do Teorema da Curva de Jordan é o fato de que um grafo planar divide o plano em regiões, à custa das suas arestas. Cada uma destas divisões é denominada por *face* do grafo (de modo que as faces são obtidas por curvas simples fechadas, formadas por arestas do grafo). Dois pontos do plano estão na mesma face se existir uma curva do plano que os une sem intersectar nenhuma das arestas do grafo. O **número de faces** de um grafo será designado por f .

Exemplo 2.9. *No grafo apresentado abaixo, existem 6 faces (a face “exterior” é contabilizada - esta é denominada por face infinita, ou face exterior).*

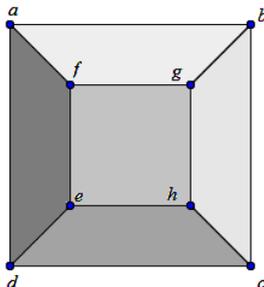


Figura 45 – Grafo e suas faces.

Lema 2.1. *Seja G um grafo com n vértices. Se G é uma árvore, então o número de arestas de G é igual a $n - 1$.*

Demonstração. Seja G uma árvore; provamos por indução no número de vértices n que G tem $n - 1$ arestas. Os casos $n = 1$ e $n = 2$ são evidentes; suponhamos portanto que a propriedade vale para os casos em que G é uma árvore com menos que n arestas. Se eliminarmos uma aresta uv de G ficamos com um grafo G_0 sem ciclos e com duas componentes conexas (se houvesse um caminho em G_0 de u para v , então em G esse caminho adicionado da aresta uv seria um ciclo). A hipótese de indução aplica-se a cada uma das componentes: se elas têm, respectivamente, p e q vértices, terão $p - 1$ e $q - 1$ arestas; mas G tem os mesmos vértices e mais uma aresta que G_0 , logo o número de arestas de G é $p - 1 + q - 1 + 1 = n - 1$, como queríamos demonstrar. \square

Lema 2.2. *Toda árvore não trivial (com mais de um vértice) tem pelo menos dois vértices com grau 1.*

Demonstração. Sabemos que uma árvore tem que ter exatamente $n - 1$ arestas, sendo n o número de vértices da árvore. Portanto, a soma dos graus dos vértices da árvore tem que ser igual ao dobro do número de arestas, ou seja, $2n - 2$. Além disso, o grau de todo vértice é pelo menos 1 porque uma árvore é um grafo conexo. Se a árvore tiver no máximo

um vértice com grau 1, então a soma dos graus dos vértices será pelo menos $2(n-1)+1 > 2n-2$, o que não é possível. Portanto, toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos dois vértices com grau 1. \square

Teorema 2.7. (Euler) *Seja G um grafo conexo planar com f faces, n vértices e m arestas. Temos que $f + n = m + 2$.*

Demonstração. A demonstração é feita por indução sobre o número de arestas.

Se um grafo não tem arestas e é conexo, então só tem um vértice e uma face e a fórmula fica $1 - 0 + 1 = 2$.

Hipótese de indução: Suponha que a fórmula é válida para qualquer grafo com m ou menos arestas.

Seja G um grafo com $m + 1$ arestas, n vértices e f faces. Se G tiver um vértice com grau 1, tira-se esse vértice e a aresta nele incidente. Obtém-se um grafo G' com menos uma aresta e menos um vértice e o mesmo número de faces, uma vez que a retirada de uma aresta incidente num vértice de grau 1 não faz desaparecer nenhuma face. Para o grafo G' é válida a fórmula de Euler e pela hipótese de indução, temos $(n - 1) - m + f = 2$. Ou seja, $n - (m + 1) + f = 2$. Se G não tiver nenhum vértice de grau 1, então G não é uma árvore e, por isso, deve ter pelo menos um ciclo. Identifica-se um ciclo e retira-se uma das suas arestas. Obtém-se um grafo G' que continua a ser conexo, tem o mesmo número de vértices de G , menos uma aresta e menos uma face, pois ao desfazer o ciclo houve duas faces que se juntaram numa só. Para G' é válida a fórmula de Euler e pela hipótese de indução, temos $n - m + (f - 1) = 2$. Então é válido $n - (m + 1) + f = 2$. \square

A partir deste momento, para um grafo G , utilizaremos f para o número de faces, n para o número de vértices e m para o número de arestas do grafo.

Definição 2.5. O *grau* (ou comprimento) de uma face f de um grafo planar G é igual ao número de arestas da fronteira de F .

Observando a Figura 45, temos que cada uma das 6 faces possui grau 4 e que somando todos esses graus obtemos $6 \cdot 4 = 24$, o que corresponde ao dobro do número de arestas (12 arestas). Isto ocorre pelo fato de que todas as arestas são contabilizadas duas vezes, pois são adjacentes a duas faces distintas no grafo planar. Desse modo, podemos dizer que em grafos planares a soma dos graus de suas faces é $2m$.

Teorema 2.8. *Seja G um grafo conexo e planar. Então, $f \leq \frac{2}{3}m$.*

Demonstração. Temos que a soma dos graus das faces é $2m$. Mas, por outro lado, cada face é limitada pelo menos por 3 arestas (pois G é conexo), sendo que uma ou duas arestas não formam uma face. Então a soma dos graus das faces é, no mínimo, o triplo do número de faces, dado por $3f$. Assim, temos que $2m \geq 3f$ e, finalmente, $f \leq \frac{2}{3}m$. \square

Teorema 2.9. *Em um grafo planar conexo G com $n \geq 3$ vale que $m \leq 3n - 6$.*

Demonstração. Temos, por um lado a fórmula de Euler $n - m + f = 2$ e, por outro lado o resultado $f \leq \frac{2}{3}m$. Combinando os dois resultados, segue que:

$$n - m + \frac{2}{3}m \geq 2.$$

Ou seja,

$$m \leq 3n - 6.$$

\square

Com este resultado podemos concluir que K_5 não é planar. Com efeito neste grafo temos $n = 5$ e $m = 10$, donde $3n - m = 3 \times 5 - 10 = 5 < 6$.

Vejam os para quais valores de n temos K_n planar. Pelo **Teorema 2.9**, temos que:

$$3n - m \geq 6.$$

Desse modo, segue que:

$$3n - m = 3n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{-n^2 + 7n}{2} = \frac{n(7-n)}{2} \geq 6.$$

O que resulta, finalmente, em:

$$n(7-n) \geq 12.$$

Observe que, nesta relação, verifica-se a igualdade ($n^2 - 7n + 12 = 0$) para $n = 3$ e $n = 4$ e não se verifica para mais nenhum valor de n inteiro. Portanto todos os grafos completos K_n com $n \geq 5$ não são planares.

Teorema 2.10. *Seja G um grafo conexo e planar com $n \geq 3$ e sem triângulos (isto é, sem ciclos de comprimento 3). Então $m \leq 2n - 4$.*

Demonstração. Como não há ciclos de comprimento 3, todos os ciclos têm 4 ou mais arestas, ou seja, cada face tem pelo menos 4 arestas e, portanto, a soma das arestas das faces é, no mínimo, $4f$. Logo, $4f \leq 2m$.

Utilizando a fórmula de Euler, obtemos:

$$4f - 4m + 4n = 8.$$

Pelo fato de que $4f \leq 2m$, segue que:

$$2m - 4m + 4n \geq 8,$$

$$m \leq 2n - 4.$$

□

Observação importante:

Para o grafo $K_{3,3}$, temos $n = 6$, $m = 9$ e, portanto,

$$2n - 4 = 2 \times 6 - 4 = 12 - 4 = 8 < 9.$$

Logo, o grafo não é planar.

Definição 2.6. Uma **subdivisão elementar** de um grafo G é a retirada ou o acréscimo de um vértice de grau 2 entre dois outros vértices.

Isto é se, sendo w um vértice de grau 2 adjacente aos vértices u e a v , retira-se o vértice w unindo diretamente os vértices u e v . De outro modo, podemos inserir um vértice w a uma aresta entre u e v , o que representamos na Figura 46.

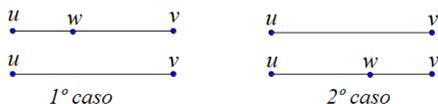


Figura 46 – Subdivisões elementares.

Definição 2.7. Dizemos que dois grafos G e G' são **homeomorfos** se ambos podem ser obtidos a partir de um mesmo grafo por uma sucessão de subdivisões elementares de arestas.

Analogamente, podemos dizer que os grafos G e G' são homeomorfos se um deles pode ser obtido pela inserção de vértices de grau 2 em pontos intermediários de suas arestas. Geometricamente, pode ser observado no exemplo abaixo:

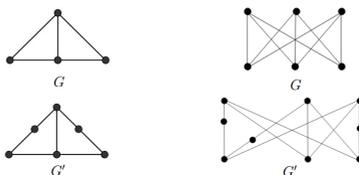


Figura 47 – Grafos homeomorfos.

O teorema a seguir nos mostra que quando um grafo for não planar devem estar sempre presentes os subgrafos homeomorfos a K_5 ou $K_{3,3}$.

Teorema 2.11. (Kuratowski) *Um grafo é planar se, e somente se, não contiver subgrafo homeomorfo a K_5 e $K_{3,3}$.*

Em [6] pode ser obtida uma demonstração do teorema. Como citado em [4], a verificação das condições do teorema pode ser feita de forma computacional (com uma complexidade elevada) e, portanto, será omitida aqui.

2.4 Coloração de Mapas

Relacionaremos a coloração de vértices com a coloração de mapas. Assim como uma coloração de vértices para um grafo G é uma atribuição de cores para cada vértice de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes, o mesmo deverá ocorrer na coloração de mapas, sendo que cada região do mapa irá corresponder a um vértice do grafo. Observa-se que cada mapa corresponde a um grafo planar, desde que cada região do mapa corresponda a um vértice e que há uma aresta ligando estes vértices sempre que houver uma fronteira entre as duas regiões. A seguir, analisaremos alguns exemplos sobre a coloração de mapas.

Exemplo 2.10. *Observemos o mapa de Portugal, sua representação por meio de um grafo e uma possível coloração, representados pela Figura 48 abaixo.*

De forma muito semelhante ao método sequencial, utilizaremos um algoritmo “guloso”, em que os vértices do grafo G serão ordenados de acordo com o grau, de modo a formar uma sequência não crescente. Escolher tal ordenação para os vértices possibilita-nos colorir primeiro os vértices com mais restrições, ou seja, com mais vértices adjacentes, o que agiliza o processo de coloração, tornando-o mais rápido e eficiente

que o método sequencial. Trata-se de um procedimento heurístico, que pode achar uma boa aproximação para o número cromático do grafo, porém não é garantido que seja este o valor obtido.

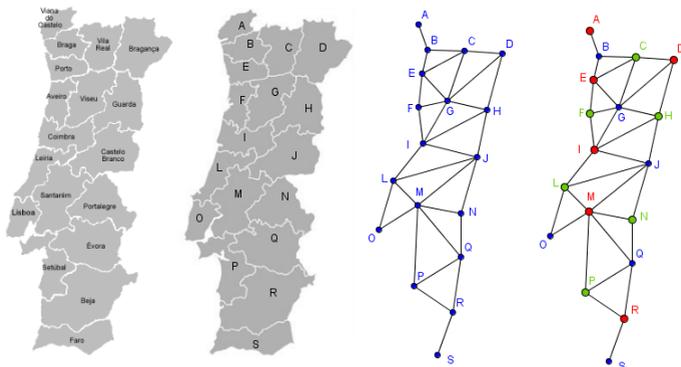


Figura 48 – Mapa de Portugal, representação por meio de um grafo e uma possível coloração.

Algoritmo “guloso” para colorir os vértices de um grafo:

ENTRADA: Lista dos vértices do grafo G em ordem não crescente (de acordo com o grau de cada vértice).

SAÍDA: Conjuntos T_1, T_2, \dots, T_k , sendo que cada conjunto representa os vértices que devem ser coloridos com uma mesma cor e k que representa o número de cores utilizadas para uma possível coloração do grafo G .

1. Faça uma lista V com os vértices do grafo G que representa o mapa, em ordem não crescente de grau. Em caso de empate escolha-os de modo arbitrário.
2. $i = 0$.
3. Se $V \neq \emptyset$ vá ao passo 4 senão vá ao passo 8.
4. $i = i + 1$.

5. Crie um conjunto T_i contendo somente o primeiro vértice v_j de V .
6. Enquanto existir na fila algum vértice v_k não adjacente a qualquer vértice pertencente a T_i faça:
7. Coloque v_k em T_i .
8. Retire v_k de V .
9. Volte ao passo 3.
10. Fim. A saída são os conjuntos T_1, T_2, \dots, T_k , que devem ser coloridos com cores distintas. Note que k representa o número de cores utilizadas na coloração obtida para o grafo G .

Outro algoritmo para o mesmo caso, porém, fazendo uso de conceitos de clique, pode ser encontrado em [5].

Para fazer a aplicação do algoritmo (em coloração de mapas) devemos fazer uma representação do mapa por meio de um grafo (ver Figura 49). Esta pode ser feita através de um “grafo” dual, onde os vértices vão ser as regiões e existe uma aresta entre dois vértices se, e somente se, as duas regiões têm fronteiras comuns.

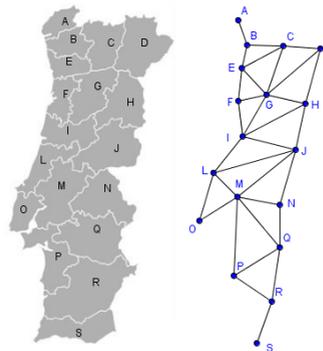


Figura 49 – Mapa de Portugal e sua representação por um grafo dual.

Agora o problema de coloração do mapa de Portugal é equivalente a colorir cada vértice do grafo, de forma que dois vértices adjacentes tenham cores diferentes.

Aplicando o algoritmo acima para coloração de vértices, observe que:

- Os vértices A e S têm grau 1;
- O vértice O tem grau 2;
- Os vértices B, D, F, N, P e R têm grau 3;
- Os vértices C, E, H, L e Q têm grau 4;
- Os vértices I e J têm grau 5; e,
- Os vértices G e M têm grau 6.

Logo, temos a lista de vértices em ordem não crescente de grau representada no conjunto V :

$$V = \{G, M, I, J, C, E, H, L, Q, B, D, F, N, P, R, O, A, S\}.$$

Em seguida, $i = 0$. Como $V \neq \emptyset$, segue que $i = 1$. Assim, criamos o conjunto $T_1 = \{G\}$.

Pelos passos 6, 7 e 8, vamos acrescentar os vértices de V não adjacentes a qualquer vértice de T_1 retirando-o de V . Desse modo, obtemos o conjunto:

$$T_1 = \{G, M, B, R\}.$$

O que pode ser representado pela figura [50](#) abaixo:

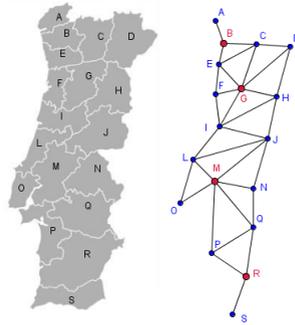


Figura 50 – Primeira etapa após aplicação do algoritmo “guloso” para colorir os vértices do grafo representando o mapa de Portugal.

Voltando ao passo 3 e repetindo o processo, obtemos:

$$T_2 = \{I, C, Q, A, S\}; T_3 = \{J, E, D, P, O\} \text{ e } T_4 = \{H, L, F, N\}.$$

Potanto, os conjuntos T_1 , T_2 , T_3 e T_4 devem ser coloridos com cores distintas, o que está representado pelo grafo abaixo (ver figura 51).

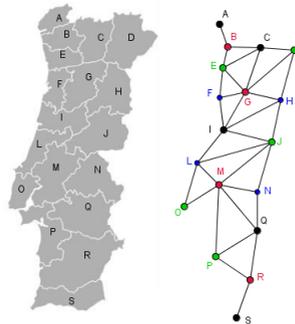


Figura 51 – Possível coloração para o mapa de Portugal obtida após a aplicação do algoritmo “guloso”.

No algoritmo apresentado, o número i representa quantas cores são utilizadas para efetuar uma possível coloração dos vértices do grafo

e, os conjuntos obtidos em T_i , para cada i , representam conjuntos de vértices em que não há conflito para que se utilize uma mesma cor na coloração.

Observação: Para visualizar os vértices adjacentes entre si durante a aplicação do algoritmo, podemos elaborar a matriz de adjacência.

No caso do exemplo desenvolvido acima (mapa de Portugal, Figura 49), temos a representação da matriz de adjacência pela tabela abaixo, melhorando a visualização dos vértices adjacentes entre si.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S
A	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
J	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
Q	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

A tabela nos auxilia durante a aplicação do algoritmo, tornando mais fácil a verificação se dois vértices são, ou não, adjacentes.

Teorema 2.12. *(das 4 cores) Todo mapa pode ser colorido com 4 cores de modo que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor.*

O teorema das quatro cores pode ser reescrito, por: *Seja G um grafo planar e conexo. Então $\chi(G) \leq 4$.*

Pretendemos determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa de forma que quaisquer regiões vizinhas (com pelo menos uma fronteira comum) tenham cores diferentes. O problema das quatro cores trata da determinação do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa, de países reais ou imaginários. Como citado em [13], registros na história mostram que o problema das quatro cores começou em 1852, quando Francis Guthrie tentava colorir os vários distritos do mapa da Inglaterra, sendo que dois distritos vizinhos não tivessem a mesma cor. Após refletir sobre o problema, conjecturou que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas quatro cores. Francis Guthrie (advogado, botânico e, sobretudo, matemático), tinha um irmão mais novo, Frederick Guthrie, aluno de Augustus De Morgan (das conhecidas leis de Morgan, na Lógica). Em 23 de Outubro de 1852, Frederick apresentou a conjectura do seu irmão mais velho ao professor De Morgan. Este ficou muito entusiasmado e, no mesmo dia, escreveu uma carta a Sr. William Rowan Hamilton na qual explicava o problema. A carta referida foi conservada e encontra-se hoje nos arquivos do Trinity College em Dublin. Ao contrário do que pensou Morgan, Hamilton não achou o problema interessante. Respondeu quatro dias mais tarde dizendo que tão cedo não pretendia analisar a questão.

Em [8] há uma panorâmica do muito que se produziu em Teoria de Grafos até o ano de sua publicação, 1969. Durante mais de 100 anos, muitos métodos foram desenvolvidos para atacar o Problema das Quatro Cores. Em 1879, Alfred Bray Kempe, que era também um advogado e que tinha estudado no Trinity College de Cambridge publicou uma demonstração completa do Teorema das Quatro Cores em [16]. A demonstração de Kempe foi estudada por vários matemáticos de renome, alguns deles tendo feito sugestões para melhorar a demonstração. Portanto, em 1879, considerava-se definitivamente estabelecido o Teorema das Quatro Cores. Porém, como dito em [13], a demonstração

de Kempe do Teorema das Quatro Cores apresentava um erro, como foi descoberto e publicado em [9], mas que, no entanto, continha algumas das ideias base que haviam de servir à demonstração de Appel e Haken. Mas a demonstração de Appel e Haken não foi aceita por todos os matemáticos. Foram levantadas várias dúvidas, principalmente por duas razões:

A) Parte da demonstração apresentada em [1] utiliza um computador e não pode ser verificada à mão;

B) Mesmo a parte dos cálculos da demonstração feitos à mão é muito complicada, portanto é de crer que nunca ninguém fez uma verificação completa e independente dos autores destes cálculos.

Perante tanta controvérsia, um grupo de matemáticos, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas, decidiram em 1993 estudar a demonstração de [1], visando analisar mais a fundo a sua validade, mas acabaram por desistir. Em vez de verificar a demonstração de Appel e Haken, decidiram então tentar provar o Teorema de outro modo, por si próprios, e acabaram por obter uma demonstração mais simples, porém ainda envolvendo muitos cálculos, como citado em [13]. A ideia base da prova é a mesma que a de Appel e Haken. Mas, em vez de 1478, conseguiram reduzir a resolução do problema a dimensões consideravelmente mais manejáveis do que as de [1], determinando, com a ajuda de um computador, um conjunto inevitável de 633 configurações redutíveis. No entanto, permanece em aberto a questão: “*Será possível encontrar uma demonstração do Teorema das Quatro Cores mais simples? Mais precisamente, será possível encontrar uma demonstração cujos cálculos subjacentes tenham uma dimensão humanamente atingível sem ajuda de computadores?*”

Na demonstração do Teorema das Cinco Cores utilizaremos o seguinte Lema:

Lema 2.3. *Em um grafo conexo e planar com n vértices e m arestas há pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.*

Demonstração. Sabemos que num grafo planar é válida a desigualdade $3n - m \geq 6$ (**Teorema 2.9**), ou seja $m \leq 3n - 6$. Suponha que todos os vértices tivessem grau 6 (ou mais), assim, teríamos $2m \geq 6n$ (pois $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$, então a soma dos graus deve ser no mínimo $6n$), ou seja $m \geq 3n$ (absurdo). Portanto, pelo menos um vértice tem que ter grau menor ou igual a 5. \square

Teorema 2.13. (das 5 cores) *Em um grafo conexo planar G temos $\chi(G) \leq 5$.*

Demonstração. Utilizaremos o processo indução finita sobre o número de vértices do grafo G .

- O caso $n = 1$ é evidente (assim como os casos de 2 a 5, pois basta utilizar uma cor para cada vértice para que o grafo G seja 5-colorível).
- (Hipótese de indução) Suponhamos que todo grafo planar G com menos de n vértices é 5-colorível.
- Seja G um grafo planar com n vértices. Pelo **Lema 2.3** acima, temos que o grafo G possui pelo menos um vértice v tal que $d(v) \leq 5$. Tomemos o grafo $G' = G - \{v\}$. Como G possui n vértices, segue que G' tem $n - 1$ vértices e, pela hipótese de indução, pode ser colorido com 5 cores. Analisaremos a coloração do grafo G com base na coloração já obtida para G' , ou seja, mostraremos que é possível colorir o vértice v utilizando uma das 5 cores utilizadas em G' .

Se $d(v) \leq 5$ e os vértices adjacentes a v não utilizam cinco cores na coloração dos vértices de G , podemos utilizar uma 5ª cor para colorir o vértice v e, portanto, o grafo G é 5-colorível.

Desse modo, analisemos o caso em que os vértices adjacentes a v utilizam 5 cores. Sem perda de generalidade, vamos supor que as cores de 1 a 5 estão dispostas como na Figura 52.

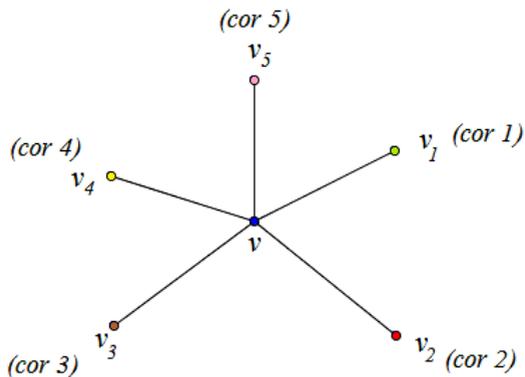


Figura 52 – Possível coloração para os vértices adjacentes a v .

Consideremos agora a cadeia de Kempe G_{13} . Se os vértices v_1 e v_3 , adjacentes a v e coloridos, respectivamente, com as cores 1 e 3, estão em componentes conexas diferentes deste subgrafo, podemos trocar as cores 1 e 3 em qualquer uma dessas componentes de modo que continuaremos com uma coloração cujos vértices adjacentes entre si não estão coloridos com uma mesma cor. Nesse caso, por exemplo, o vértice v_3 passa a ter a cor 1 e a cor 3 fica disponível para colorirmos o vértice v , o que prova que G é um grafo 5-colorível.

Por fim, analisemos o caso em que não é possível efetuar a troca entre as cores 1 e 3 como descrito anteriormente; concluímos que existe um caminho em G , com início em v_1 e fim em v_3 (que não passa por v), com cores 1 e 3 alternadas, ou seja, os vértices estão em uma mesma componente conexa. Na representação planar do grafo, tal caminho limita uma união de faces, arestas e vértices do grafo G , contendo por exemplo o vértice v_2 , colorido com a cor 2; mas então podemos, neste caso, trocar a cor 2 com a cor

4 nos vértices que ficam no interior daquele caminho (pois não existirá nenhum caminho de Kempe G_{24} com uma componente conexa iniciando em v_2 e terminando em v_4 em que as cores 2 e 4 estejam alternadas, visto que o grafo G é planar), deixando a cor 2 disponível para v . Portanto, $\chi(G) \leq 5$.

□

3 Aplicações

Neste capítulo, abordaremos aplicações sobre os conceitos de grafos considerados nos capítulos anteriores, especialmente sobre coloração de vértices. Além disso, serão propostos jogos e desafios, sendo que todos os exemplos desenvolvidos neste capítulo podem ser adaptados e aplicados em sala de aula no Ensino Fundamental e Médio. Uma das aplicações mais interessantes para o ensino básico será a resolução de um SUDOKU utilizando o algoritmo guloso para coloração de vértices, apresentado no capítulo anterior.

Observação: Para exemplificar com os alunos de forma interessante e prática alguns dos conceitos definidos nesta dissertação, há disponível um aplicativo para Android (Grafos, produzido por “Big M Games”) em que o objetivo do jogo é, em dois minutos, percorrer todas as arestas do grafo sem que nenhuma delas seja repetida, em que o vértice de início coincida com o vértice de partida.

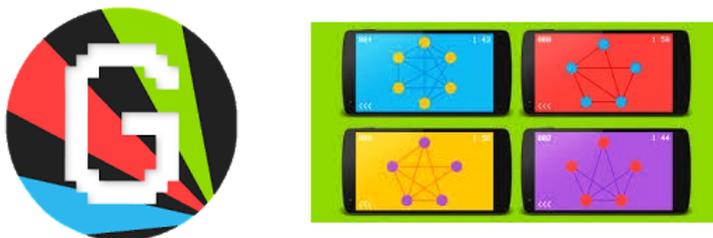


Figura 53 – Aplicativo GRAFO para Android

O aplicativo está disponível para download em (acesso em 22/11/2014):

<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.BigM.Games.Grafos>.

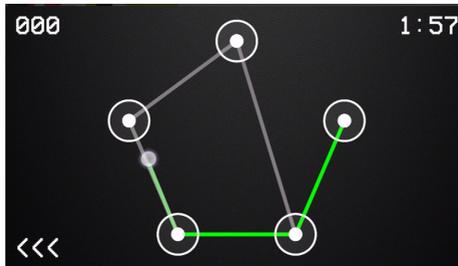


Figura 54 – Primeiro desafio sendo realizado, observando que são dois minutos de tempo máximo.

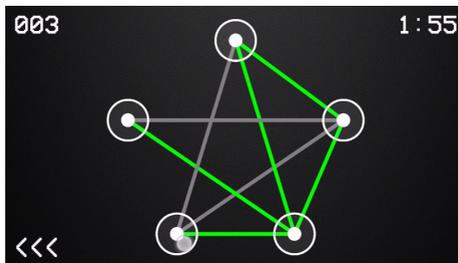


Figura 55 – Segundo desafio sendo realizado, observando a pontuação obtida até o momento no canto superior esquerdo e o tempo disponível no canto superior direito.



Figura 56 – Tela após o término do jogo, com resultado individual e opção de envio para comparar com demais jogadores on line.

Infelizmente, nem todos os alunos possuem a ferramenta necessária para a atividade, que seria um tablet ou um celular com Andoid,

porém, analisando as possibilidades de equipamentos disponíveis, podemos pensar em torneios entre os alunos de uma turma (o que é possível pela pontuação emitida ao final de cada período de dois minutos) ou como atividade de recreação em períodos de tempo ociosos, como intervalos de aula.

3.1 Grafos Planares

Nesta seção, os jogos e contextos históricos são baseados nas publicações disponíveis em [17].

Jogo 1: O estudo dos grafos planares originou-se de dois problemas de recreação envolvendo o grafo completo K_5 e o grafo bipartido $K_{3,3}$.

O primeiro problema foi apresentado por A. F. Mobius por volta do ano 1840 como segue:

“Era um vez um Rei com 5 filhos. Em seu testamento ele desejou que, após sua morte, os seus filhos dividissem seu Reino em 5 províncias de forma que o limite de cada província tivesse uma linha fronteira comum com cada uma das outras quatro.”

Problema: É possível desenhar 5 regiões mutuamente vizinhas no plano?



Figura 57 – Tentativa de solução para o problema das 5 regiões vizinhas.

Depois, o Rei pediu que todos os cinco irmãos unissem as capitais de cada uma de suas províncias através de estradas e que estas não

deveriam se cruzar. Com o tempo verificou-se não ser possível resolver tais problemas. Estes problemas não admitem solução pelo fato de que o grafo K_5 é um grafo não planar.

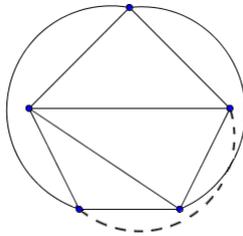


Figura 58 – Tentativa de solução para o problema da união entre as 5 capitais das províncias.

Jogo 2: A origem do segundo problema é desconhecida mas foi primeiramente mencionada por H. Dudeney em 1913, semelhante a: “Você tem que levar água, eletricidade e gás para 3 casas de uma cidade. As fornecedoras de água (A), eletricidade (E) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos (são canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar). Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assumo no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano.”

Este problema não admite solução pelo fato de que o grafo $K_{3,3}$ é não planar, logo, não é possível ligar todas as casas à água, luz e gás sem que alguma dessas ligações se cruzem. É claro que para uma turma de ensino fundamental não abordaremos o teorema que diz isso, mas podemos falar sem problemas sobre a sua existência após a percepção pelos alunos de que o problema é impossível de ser resolvido.



Figura 59 – Ilustração para o problema da água, luz e gás.

3.2 Coloração de vértices

Pretendemos determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa de forma que quaisquer dois países que possuam divisa tenham cores diferentes. Analisaremos alguns casos, admitindo conhecido o Teorema das 4 cores.

Consideremos, por exemplo, os dois mapas da figura abaixo. É fácil ver que bastam duas cores para colorir cada um deles.

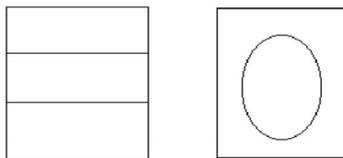


Figura 60 – Figuras bicoloríveis.

Representando por grafos, temos:

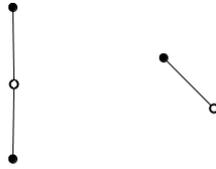


Figura 61 – Representação por meio de grafos da Figura 60.

Apesar de hoje sabermos que quatro cores bastam, nem sempre é imediato encontrar um processo de colorir um dado mapa com apenas quatro cores.

Esta dificuldade inspira alguns jogos sobre coloração de mapas. A seguir, temos um exemplo para isto.

Jogo 3: Dois jogadores, A e B têm quatro lápis de cores diferentes e um mapa não colorido (como sugestão, o mapa do Brasil). Cada um dos jogadores pinta sucessivamente uma região do mapa. Perde o primeiro que não consiga colorir adequadamente (no caso do mapa do Brasil, estados que possuem divisa comum não podem ter a mesma cor) nenhuma das regiões ainda sem cor.



Figura 62 – Mapa do Brasil.

Seguem dois exemplos possíveis de colorações distintas utili-

zando quatro cores:

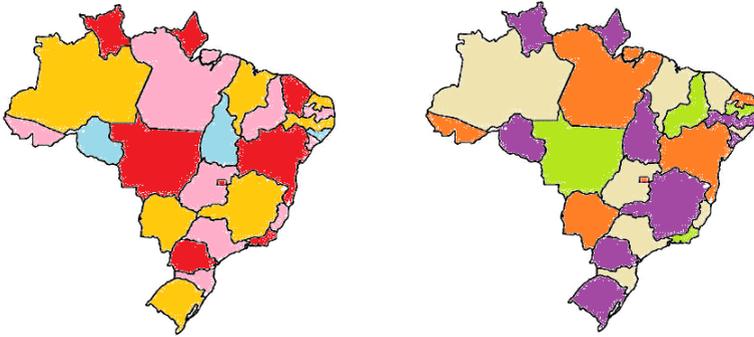


Figura 63 – Duas possíveis colorações distintas para o mapa do Brasil.

Aplicação 01: Elaboração de horários de provas escolares.

Uma determinada escola de ensino fundamental pretende realizar suas provas finais de forma que não ocorra conflito de horários entre elas. A escola também deseja utilizar a menor quantidade de períodos (cada período corresponde a 2 horas de prova) possível para a realização destas provas. Sob essas condições, como a escola poderia organizar os horários das provas?

Solução: Representaremos pelo grafo $G = (V, E)$ abaixo. Neste caso, os vértices correspondem às disciplinas que compõem o quadro de provas e cada aresta entre dois vértices indica que há alunos que devem realizar as provas correspondentes à aquelas disciplinas. Para representação por meio de um grafo, utilizaremos a legenda:

- v_1 - Matemática
- v_2 - Português
- v_3 - Ciências
- v_4 - Língua estrangeira: inglês
- v_5 - História

- v_6 - Geografia
- v_7 - Artes
- v_8 - Educação Física

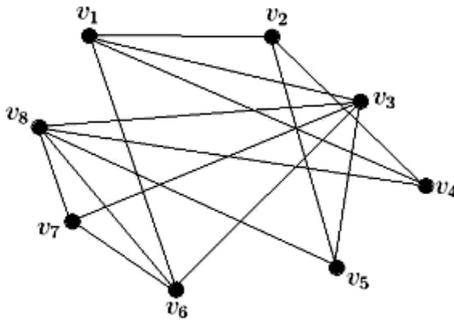


Figura 64 – Grafo representando as disciplinas para realização de exames.

Usando o algoritmo guloso para coloração de grafos, tem-se:

1. Sejam $v_1; v_2; \dots; v_8$ os vértices do grafo G_1 . De acordo com o grau de cada vértice, obtemos a fila $V = \{v_3; v_8; v_1; v_6; v_2; v_4; v_5; v_7\}$;
2. $i = 0$;
3. Como $V \neq \emptyset$, seguimos para o passo 4;
4. $i = 0 + 1$;
5. $v_3 \in T_1$;
6. Temos o vértice v_2 não adjacente a v_3 . Obtemos $T_1 = \{v_3; v_2\}$ e $V_1 = \{v_8; v_1; v_6; v_4; v_5; v_7\}$;
7. Voltamos ao passo 3 e repetimos o processo. Logo, obtemos:

$$v_8 \in T_2, T_2 = \{v_8; v_1\} \text{ e } V_2 = \{v_6; v_4; v_5; v_7\};$$

$v_6 \in T_3$, $T_3 = \{v_6; v_4; v_5\}$ e $V_3 = \{v_7\}$;

$v_7 \in T_4$, $T_4 = \{v_7\}$ e $V_4 = \emptyset$.

8. Como $V_4 = \emptyset$ terminamos o processo.

Desse modo, a escola pode organizar os horários, em quatro períodos, do seguinte modo:

Período 1 - Exames: Português e Ciências; **Período 2 - Exames:** Matemática e Educação Física; **Período 3 - Exames:** Inglês, História e Geografia; **Período 4 - Exames:** Artes.

A subdivisão fica representada por:

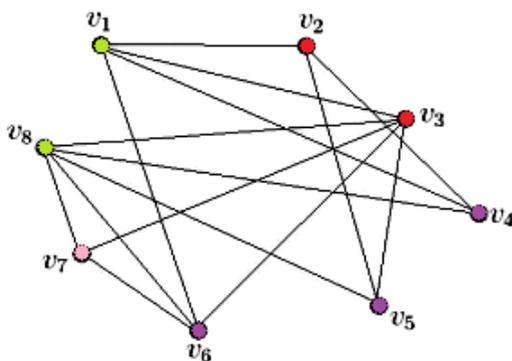


Figura 65 – Subdivisão das disciplinas para aplicação dos exames.

Aplicação 02: Coloração de mapas.

Utilizaremos o mapa da América do Sul para aplicar a coloração. Seus países são: Brasil (B), Argentina (A), Uruguai (U), Paraguai (P), Bolívia (Bo), Peru (Pe), Chile (C), Colômbia (Co), Equador (E), Venezuela (V), Guiana (G), Suriname (S) e Guiana Francesa (Gf).

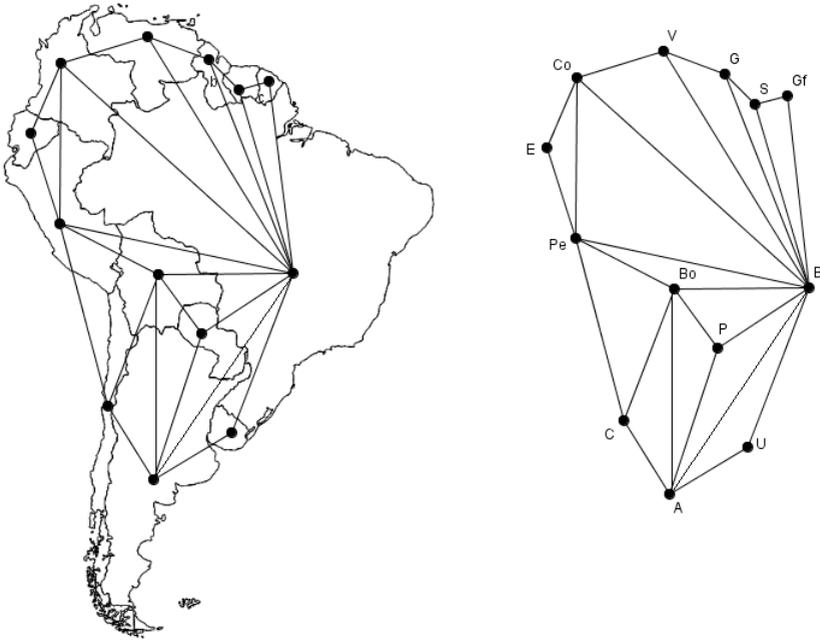


Figura 66 – Mapa da América do Sul e sua representação por um grafo.

Utilizando o algoritmo para colorir vértices de grafos, obtém-se:

1. Sejam $B, A, U, P, Bo, Pe, C, Co, E, V, G, S, Gf$ os vértices do grafo G_2 . De acordo com o grau de cada vértice, obtemos a fila $V = \{B, Bo, Pe, A, Co, P, C, V, G, S, U, E, Gf\}$;
2. $i = 0$;
3. Como $V \neq \emptyset$, seguimos para o passo 4;
4. $i = 0 + 1$;
5. $B \in T_1$;

6. Temos os vértices E, C, A não adjacentes a B , porém C e A são adjacentes entre si e B e A também o são. Obtemos $T_1 = \{B, E, C\}$ e $V_1 = \{Bo, Pe, A, Co, P, V, G, S, U, Gf\}$;
7. Voltamos ao passo 3 e repetimos o processo. Logo, obtemos:
 $Bo \in T_2, T_2 = \{Bo, Co, G, Gf, U\}$ e $V_2 = \{A, Pe, P, V, S\}$;
 $A \in T_3, T_3 = \{A, Pe, V, S\}$ e $V_3 = \{P\}$;
 $P \in T_4, T_4 = \{P\}$ e $V_4 = \emptyset$.
8. Como $V_4 = \emptyset$ terminamos o processo.

Desse modo, o número cromático é 4 e obtemos uma possível coloração:

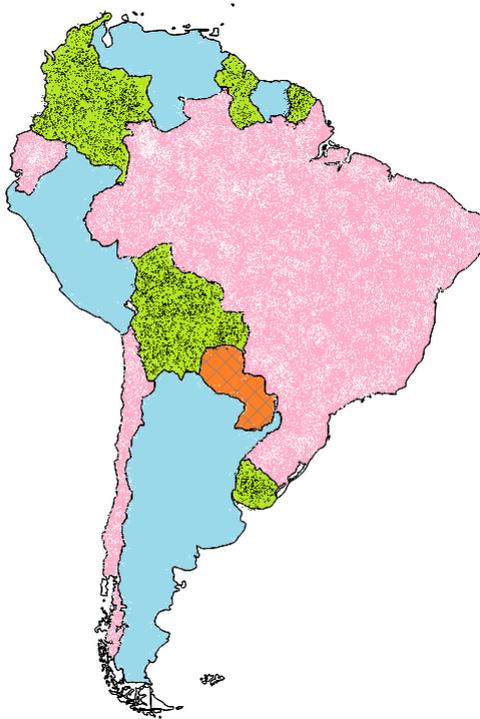


Figura 67 – Possível coloração para o mapa da América do Sul.

Aplicação 03: Coloração de mapas.

Dado o mapa dos Estados Unidos da América (EUA), temos sua representação:

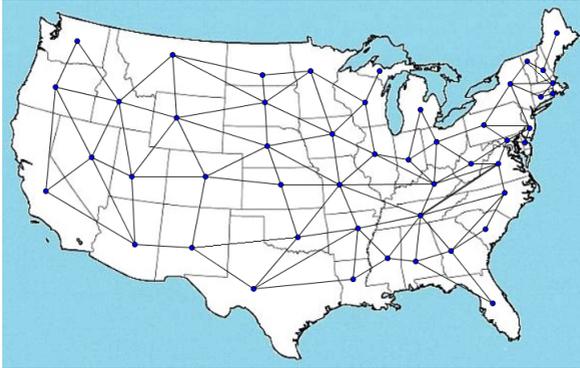


Figura 68 – Mapa dos Estados Unidos da América (EUA).

Não consideraremos o Alaska, pois o mesmo não faz fronteira com nenhum outro estado e, deste modo, pode ser colorido com qualquer cor. Assim, efetuemos uma possível coloração. Tomemos a representação do mapa dos EUA por meio do grafo abaixo:

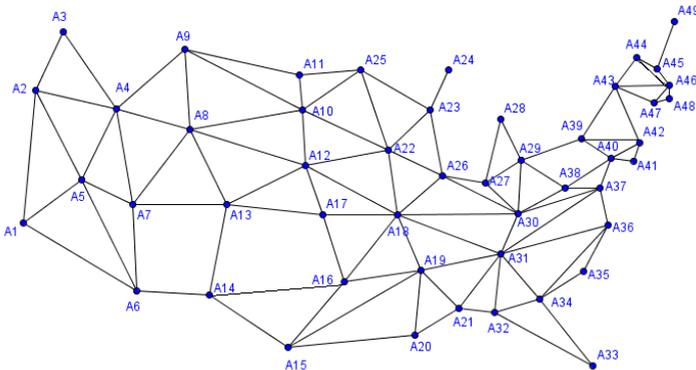


Figura 69 – Grafo representando o mapa dos Estados Unidos da América (EUA).

A lista de adjacência é dada por:

A_1 é adjacente a A_2, A_5, A_6 ;

A_2 é adjacente a A_1, A_3, A_4, A_5 ;

A_3 é adjacente a A_2, A_4 ;

A_4 é adjacente a $A_2, A_3, A_5, A_7, A_8, A_9$;

A_5 é adjacente a A_1, A_2, A_4, A_6, A_7 ;

A_6 é adjacente a A_1, A_5, A_7, A_{14} ;

A_7 é adjacente a $A_4, A_5, A_6, A_8, A_{13}$;

A_8 é adjacente a $A_4, A_7, A_9, A_{10}, A_{12}, A_{13}$;

A_9 é adjacente a A_4, A_8, A_{10}, A_{11} ;

A_{10} é adjacente a $A_8, A_9, A_{11}, A_{11}, A_{22}, A_{25}$;

A_{11} é adjacente a A_9, A_{10}, A_{25} ;

A_{12} é adjacente a $A_8, A_{10}, A_{13}, A_{17}, A_{18}, A_{22}$;

A_{13} é adjacente a $A_7, A_8, A_{12}, A_{14}, A_{17}$;

A_{14} é adjacente a $A_6, A_{13}, A_{15}, A_{16}$;

A_{15} é adjacente a $A_{14}, A_{16}, A_{19}, A_{20}$;

A_{16} é adjacente a $A_{14}, A_{15}, A_{17}, A_{18}, A_{19}$;

A_{17} é adjacente a $A_{12}, A_{13}, A_{16}, A_{18}$;

A_{18} é adjacente a $A_{12}, A_{16}, A_{17}, A_{19}, A_{22}, A_{26}, A_{30}, A_{31}$;

A_{19} é adjacente a $A_{15}, A_{16}, A_{18}, A_{20}, A_{21}, A_{31}$;

A_{20} é adjacente a A_{15}, A_{19}, A_{21} ;

A_{21} é adjacente a $A_{19}, A_{20}, A_{31}, A_{32}$;

A_{22} é adjacente a $A_{10}, A_{12}, A_{18}, A_{23}, A_{25}, A_{26}$;

A_{23} é adjacente a $A_{22}, A_{24}, A_{25}, A_{26}$;

A_{24} é adjacente a A_{23} ;

A_{25} é adjacente a $A_{10}, A_{11}, A_{22}, A_{23}$;

A_{26} é adjacente a $A_{18}, A_{22}, A_{23}, A_{27}, A_{30}$;

A_{27} é adjacente a $A_{26}, A_{28}, A_{29}, A_{30}$;

A_{28} é adjacente a A_{27}, A_{29} ;

A_{29} é adjacente a $A_{27}, A_{28}, A_{30}, A_{38}, A_{39}$;

A_{30} é adjacente a $A_{18}, A_{26}, A_{27}, A_{29}, A_{31}, A_{37}, A_{38}$;

A_{31} é adjacente a $A_{18}, A_{19}, A_{21}, A_{30}, A_{32}, A_{34}, A_{36}, A_{37}$;

A_{32} é adjacente a $A_{21}, A_{31}, A_{33}, A_{34}$;

A_{33} é adjacente a A_{32}, A_{34} ;

A_{34} é adjacente a $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{35}, A_{36}$;

A_{35} é adjacente a A_{34}, A_{36} ;

A_{36} é adjacente a $A_{31}, A_{34}, A_{35}, A_{37}$;

A_{37} é adjacente a $A_{30}, A_{31}, A_{36}, A_{38}, A_{40}$;

A_{38} é adjacente a $A_{29}, A_{30}, A_{37}, A_{40}$;

A_{39} é adjacente a $A_{29}, A_{40}, A_{42}, A_{43}$;

A_{40} é adjacente a $A_{37}, A_{38}, A_{39}, A_{41}, A_{42}$;

A_{41} é adjacente a A_{40}, A_{42} ;

A_{42} é adjacente a $A_{39}, A_{40}, A_{41}, A_{43}$;

A_{43} é adjacente a $A_{39}, A_{42}, A_{44}, A_{46}, A_{47}$;

A_{44} é adjacente a A_{43}, A_{45}, A_{46} ;

A_{45} é adjacente a A_{44}, A_{46}, A_{49} ;

A_{46} é adjacente a $A_{43}, A_{44}, A_{45}, A_{47}, A_{48}$;

A_{47} é adjacente a A_{43}, A_{46}, A_{48} ;

A_{48} é adjacente a A_{46}, A_{47} ;

A_{49} é adjacente a A_{45} .

Além disso, temos que os vértices estão distribuídos do seguinte modo:

- **Grau 1:** $A_{24}; A_{49}$;
- **Grau 2:** $A_3; A_{28}; A_{33}; A_{35}; A_{41}; A_{48}$;
- **Grau 3:** $A_1; A_{11}; A_{20}; A_{44}; A_{45}; A_{47}$;
- **Grau 4:** $A_2; A_6; A_9; A_{14}; A_{15}; A_{17}; A_{21}; A_{23}; A_{25}; A_{27}; A_{32}; A_{36}; A_{38}; A_{42}$
- **Grau 5:** $A_5; A_7; A_{13}; A_{16}; A_{26}; A_{29}; A_{34}; A_{37}; A_{39}; A_{40}; A_{43}; A_{46}$;
- **Grau 6:** $A_4; A_8; A_{10}; A_{12}; A_{19}; A_{22}$;
- **Grau 7:** A_{30} ;
- **Grau 8:** $A_{18}; A_{31}$.

Aplicando o algoritmo guloso para coloração de vértices, temos que:

1. Sejam $A_1; A_2; \dots; A_{49}$ os vértices do grafo representando o mapa dos EUA. De acordo com o grau de cada vértice, obtemos a fila, em ordem não crescente:

$$V = \{A_{18}; A_{31}; A_{30}; A_4; A_8; A_{10}; A_{12}; A_{19}; A_{22}; A_5; A_7; A_{13}; A_{16}; A_{26}; A_{29}; A_{34}; A_{37}; A_{39}; A_{40}; A_{42}; A_{43}; A_{46}; A_2; A_6; A_9; A_{14}; A_{15}; A_{17}; A_{21}; A_{23}; A_{25}; A_{27}; A_{32}; A_{36}; A_{38}; A_1; A_{11}; A_{20}; A_{44}; A_{45}; A_{47}; A_3; A_{28}; A_{33}; A_{35}; A_{41}; A_{48}; A_{24}; A_{49}\};$$

2. $i = 0$;
3. Como $V \neq \emptyset$, seguimos para o passo 4;

4. $i = 0 + 1$;
5. $A_{18} \in T_1$;
6. Temos os vértices $A_4; A_8; A_{10}; A_5; A_7; A_{13}; A_{16}; A_{29}; A_{34}; A_{37}; A_{40}; A_{43}; A_2; A_6; A_9; A_{15}; A_{21}; A_{23}; A_{25}; A_{27}; A_{32}; A_{36}; A_{38}; A_{46}; A_1; A_{11}; A_{14}; A_{20}; A_{39}; A_{42}; A_{45}; A_{47}; A_3; A_{28}; A_{33}; A_{35}; A_{41}; A_{44}; A_{48}; A_{24}; A_{49}$ não adjacentes a A_{18} , porém $A_2, A_3, A_5, A_7, A_8, A_9$ são adjacentes a A_4 , os vértices $A_4, A_7, A_9, A_{10}, A_{12}, A_{13}$ são adjacentes a A_8 e assim por diante. Ao final da análise entre as possibilidades de não-adjacência entre os vértices, na ordem estabelecida, obtemos que:

$$T_1 = \{A_{18}, A_4, A_{10}, A_{13}, A_{29}, A_{34}, A_{37}, A_{43}, A_6, A_{15}, A_{21}, A_{23}, A_{41}, A_{49}\} \text{ e}$$

$$V_1 = \{A_{31}; A_{30}; A_8; A_{12}; A_{19}; A_{22}; A_5; A_7; A_{26}; A_{39}; A_{40}; A_{42}; A_2; A_9; A_{16}; A_{17}; A_{25}; A_{27}; A_{32}; A_{36}; A_{38}; A_{46}; A_1; A_{11}; A_{14}; A_{20}; A_{45}; A_{47}; A_3; A_{28}; A_{33}; A_{35}; A_{44}; A_{48}; A_{24}\};$$

Obtemos, até o momento, a seguinte coloração:



Figura 70 – Primeira etapa da aplicação do algoritmo guloso para coloração do mapa dos Estados Unidos da América (EUA).

7. Voltamos ao passo 3 e repetimos o processo. Logo, obtemos:

$$A_{31} \in T_2, T_2 = \{A_{31}; A_8; A_{22}; A_5; A_{40}; A_{16}; A_{27}; A_{11}; A_{20}; A_{46}; A_3; A_{33}; A_{35}; A_{24}\} \text{ e } V_2 = \{A_{19}; A_{30}; A_{32}; A_{36}; A_7; A_9; A_{12}; A_{25}; A_{26}; A_1; A_2; A_{38}; A_{46}; A_{14}; A_{39}; A_{45}; A_{17}; A_{47}; A_{28}; A_{44}; A_{48}\};$$

Desse modo, obtemos até o momento a seguinte coloração:

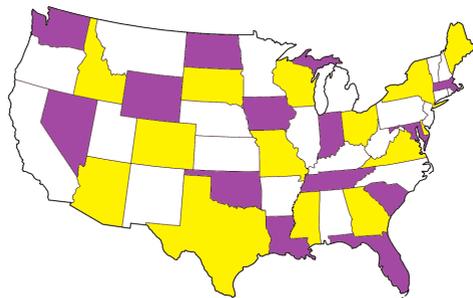


Figura 71 – Segunda etapa da aplicação do algoritmo guloso para coloração do mapa dos Estados Unidos da América (EUA).

Repetindo o processo, segue que:

$$A_{19} \in T_3, T_3 = \{A_{19}; A_{30}; A_{32}; A_{36}; A_7; A_9; A_{12}; A_{25}; A_1; A_{14}; A_{39}; A_{45}; A_{28}; A_{48}\} \text{ e } V_3 = \{A_{26}; A_{42}; A_{38}; A_2; A_{17}; A_{47}; A_{44}\};$$

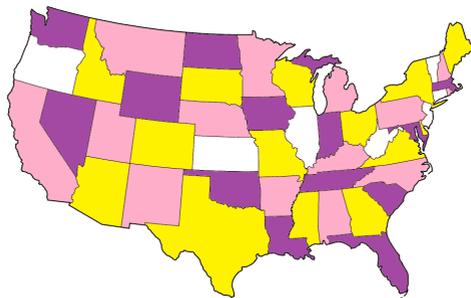


Figura 72 – Terceira etapa da aplicação do algoritmo guloso para coloração do mapa dos Estados Unidos da América (EUA).

$$A_{26} \in T_4, T_4 = \{A_{26}; A_{42}; A_{38}; A_2; A_{17}; A_{47}; A_{44}\} \text{ e } V_4 = \emptyset.$$

8. Como $V_4 = \emptyset$ terminamos o processo.

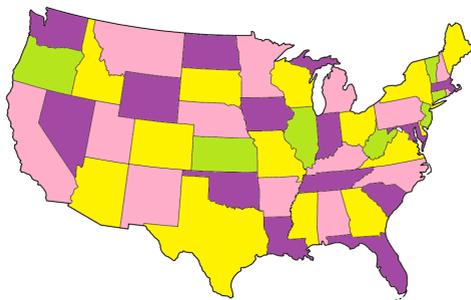


Figura 73 – Uma coloração do mapa dos Estados Unidos da América (EUA) após a aplicação do algoritmo guloso.

Aplicação 04: Transporte de produtos químicos.

Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F, X usando o menor número de containers. Alguns produtos não podem ser colocados num mesmo container porque reagem. Quaisquer dos dois produtos entre A, B, C, X reagem e A reage com F, D e E também reage com F, D . Vamos descrever o grafo que modela essa situação e usar esse grafo para descobrir o menor número de containers necessários para embarcar os produtos com segurança.

O grafo abaixo representa os produtos A, B, C, D, E, F, X ligados por uma aresta nos casos em que os produtos reagem entre si.

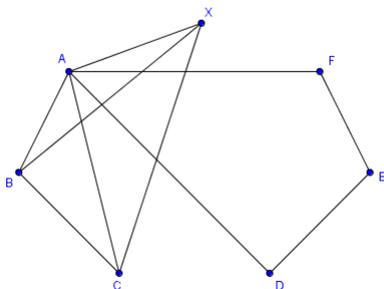


Figura 74 – Grafo representando os produtos reagentes entre si.

Observe que:

- O produto A pode estar no mesmo container que o produto E apenas;
- O produto B pode estar no mesmo container que os produtos D, E, F ;
- O produto C pode estar no mesmo container que os produtos D, E, F ;
- O produto D pode estar no mesmo container que os produtos B, C, F, X ;
- O produto E pode estar no mesmo container que os produtos A, B, C, X ;
- O produto F pode estar no mesmo container que os produtos B, C, D, X ;
- O produto X pode estar no mesmo container que os produtos D, E, F .

Utilizando o algoritmo guloso, obtém-se:

1. Sejam A, B, C, D, E, F, X os vértices do grafo apresentado. De acordo com o grau de cada vértice em ordem não crescente, obtemos a fila $V = \{A, B, C, X, D, E, F\}$;
2. $i = 0$;
3. Como $V \neq \emptyset$, seguimos para o passo 4;
4. $i = 0 + 1$;
5. $A \in T_1$;
6. Temos o vértice E não adjacente a A . Logo, obtemos $T_1 = \{E, A\}$ e $V_1 = \{B, C, X, D, F\}$;

7. Voltamos ao passo 3 e repetimos o processo. Segue que:

$$B \in T_2, T_2 = \{B, D, F\} \text{ e } V_2 = \{C, X\};$$

$$C \in T_3, T_3 = \{C\} \text{ e } V_3 = \{X\};$$

$$X \in T_4, T_4 = \{X\} \text{ e } V_4 = \emptyset.$$

8. Como $V_4 = \emptyset$ terminamos o processo.

Desse modos, obtemos a seguinte coloração:

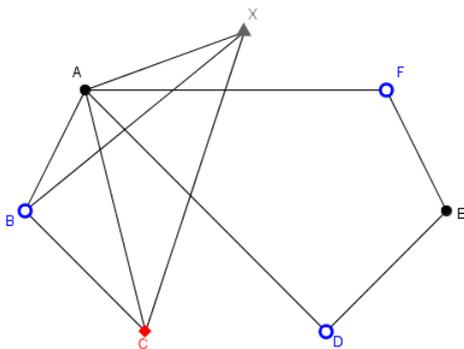


Figura 75 – Possível coloração representando os produtos que devem estar separados nos containers.

Assim, conclui-se que serão necessários quatro containers para embarcar os produtos com segurança.

Aplicação 05: Resolução de um SUDOKU.

Normalmente o jogo é composto por uma grade 9×9 constituída de subgrades 3×3 denominadas de regiões. Certas células já contêm números, chamados de dados. A finalidade do jogo é preencher as células vazias, com um número em cada célula, de forma que cada coluna, linha e região contenham os números 1 a 9 apenas uma vez.

Nesta aplicação, detalharemos o processo exemplificando com um SUDOKU 4×4 .

Na figura abaixo, temos um SUDOKU a ser resolvido e sua representação por meio de um grafo:

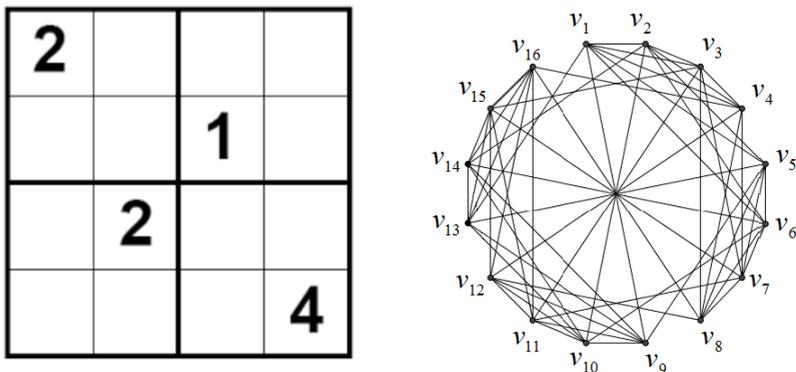


Figura 76 – SUDOKU 4×4 e sua representação por meio de um grafo.

Observe que os vértices v_1, \dots, v_{16} correspondem às células, sendo v_1 a célula na linha 1 e coluna 1, v_2 a célula na linha 1 e coluna 2 até v_{16} a célula na linha 4 e coluna 4. Além disso, existe uma aresta ligando os vértices relacionados de algum dos três modos:

- 1 - Estão na mesma linha;
- 2 - Estão na mesma coluna;
- 3 - Estão na mesma subgrade 2×2 .

Durante o processo de coloração, cada vértice deverá corresponder a uma cor. Como são utilizados os números de 1 a 4, serão quatro cores necessárias na coloração deste grafo.

Com os dados fornecidos no início do jogo, temos a seguinte representação:

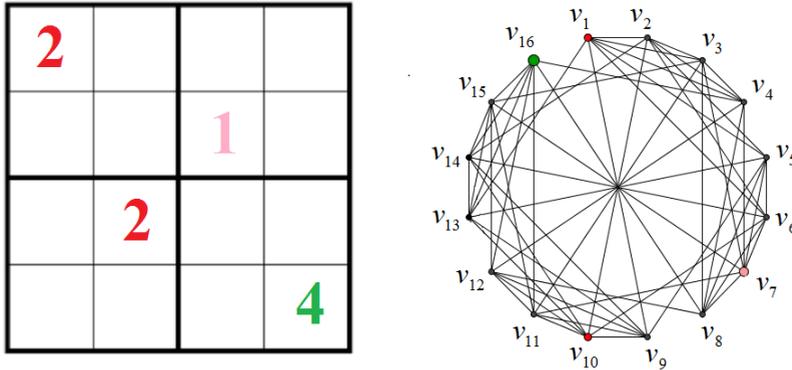


Figura 77 – SUDOKU 4×4 e sua representação por meio de um grafo com as condições iniciais fornecidas.

Listando os vértices, temos que todos possuem grau 7. Logo,

$$v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8; v_9; v_{10}; v_{11}; v_{12}; v_{13}; v_{14}; v_{15}; v_{16}$$

é uma ordenação não crescente, assim como qualquer outra permutação entre eles.

Em seguida, aplicaremos o algoritmo para coloração de vértices, respeitando as condições iniciais do jogo.

1. Sejam $v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8; v_9; v_{10}; v_{11}; v_{12}; v_{13}; v_{14}; v_{15}; v_{16}$ OS vértices do grafo que representa o SUDOKU. De acordo com o grau de cada vértice, obtemos a fila:

$$V = \{v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8; v_9; v_{10}; v_{11}; v_{12}; v_{13}; v_{14}; v_{15}; v_{16}\};$$

2. $i = 0$;
3. Como $V \neq \emptyset$, seguimos para o passo 4;
4. $i = 0 + 1$;

5. $v_1 \in T_1$;
6. Temos os vértices $v_7; v_{10}; v_{16}$ não adjacentes a v_1 , porém v_7 e v_{16} já possuem informações iniciais distintas da informação dada em v_1 . Desconsiderando o primeiro vértice possível, v_7 , os vértices que satisfazem as condições passam a ser $v_8; v_9; v_{15}$, porém, neste caso, não foi englobado o vértice v_{10} que possui a mesma condição inicial que v_1 . Uma terceira coloração possível seria $v_8; v_{10}; v_{15}$, satisfazendo todas as condições iniciais. Logo, $T_1 = \{v_1; v_8; v_{10}; v_{15}\}$ e $V_1 = \{v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_9; v_{11}; v_{12}; v_{13}; v_{14}; v_{16}\}$;

Geometricamente, representado por:

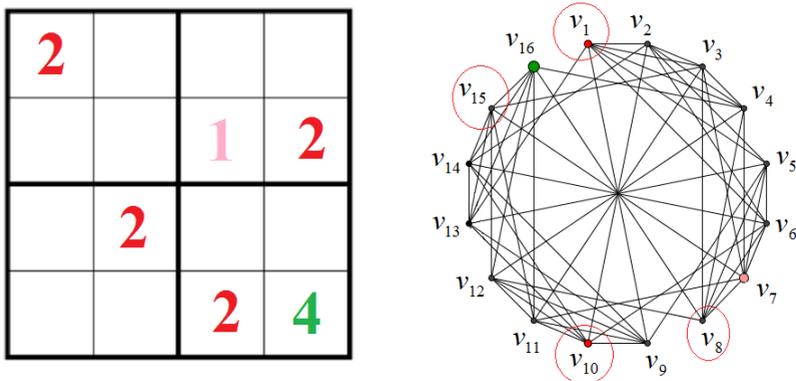


Figura 78 – SUDOKU 4×4 e sua representação após a determinação do conjunto T_1 através do algoritmo “guloso” para coloração de vértices.

7. Voltamos ao passo 3 e repetimos o processo. Logo, obtemos:

$$v_2 \in T_2, T_2 = \{v_2; v_7; v_{12}; v_{13}\} \text{ e } V_2 = \{v_3; v_4; v_5; v_6; v_9; v_{11}; v_{14}; v_{16}\};$$

Representado por:

$$v_3 \in T_3, T_3 = \{v_3; v_6; v_9; v_{16}\} \text{ e } V_3 = \{v_4; v_5; v_{11}; v_{14}\};$$

Geometricamente, dado por:

Por fim, obtemos:

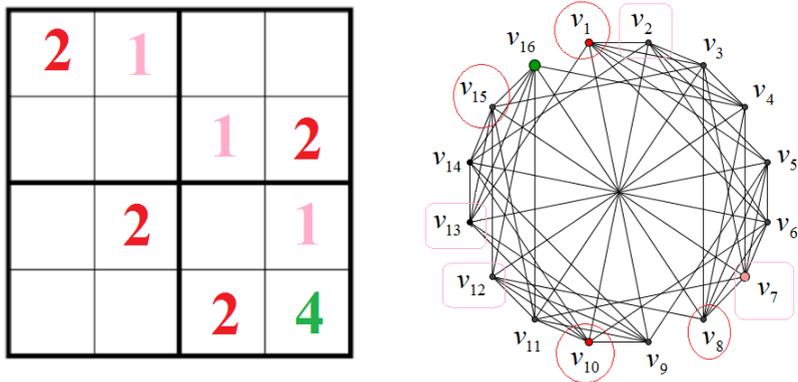


Figura 79 – SUDOKU 4×4 e sua representação após a determinação do conjunto T_2 através do algoritmo “guloso” para coloração de vértices.

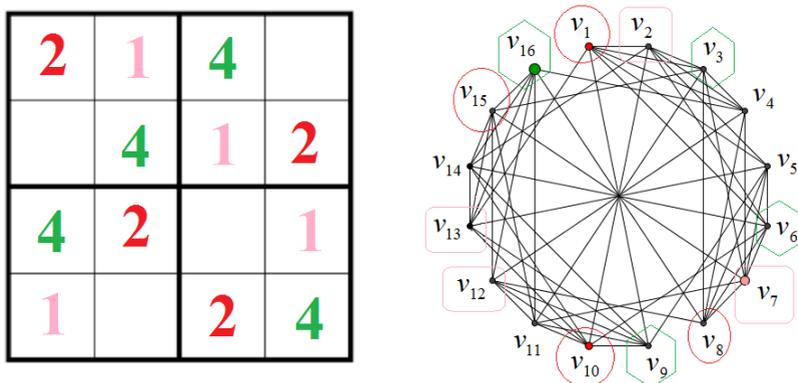


Figura 80 – SUDOKU 4×4 e sua representação após a determinação do conjunto T_3 através do algoritmo “guloso” para coloração de vértices.

$$v_4 \in T_4, T_4 = \{v_4; v_5; v_{11}, v_{14}\} \text{ e } V_4 = \emptyset.$$

8. Como $V_4 = \emptyset$ terminamos o processo.

Portanto, o resultado obtido é o SUDOKU resolvido, como na

figura abaixo:

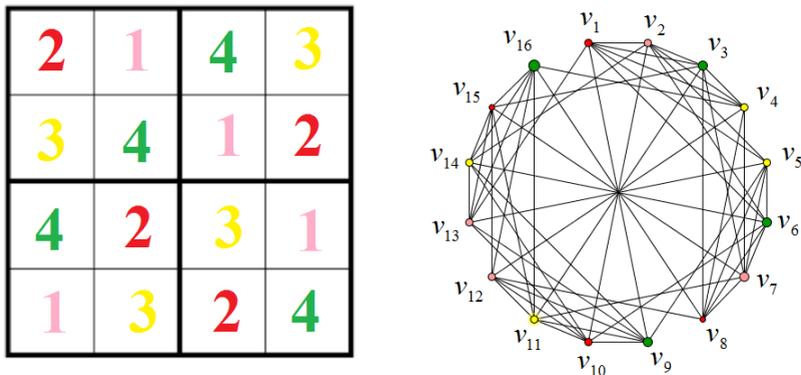


Figura 81 – SUDOKU 4×4 resolvido após a aplicação do algoritmo “guloso” para coloração de vértices.

No caso de um SUDOKU 9×9 , podemos utilizar o mesmo processo, porém serão necessárias nove cores distintas.

Aplicação 06: Uma companhia industrial deseja armazenar sete diferentes produtos farmacêuticos F_1, F_2, \dots, F_7 , de modo que alguns destes produtos não podem ser armazenados em um mesmo ambiente, por motivos de segurança. Determinar o número mínimo de localizações necessárias para armazenar tais produtos, sabendo que:

- F_1 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_2, F_6 e F_7 ;
- F_2 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_1, F_3 e F_4 ;
- F_3 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_2, F_4 e F_5 ;
- F_4 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_2, F_3, F_5 e F_6 ;
- F_5 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_3, F_4, F_6 e F_7 ;

- F_6 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_1, F_4, F_5 e F_7 ;
- F_7 não pode ser armazenado no mesmo ambiente que F_1, F_5 e F_6 .

Nessas condições, obtemos o grafo abaixo:

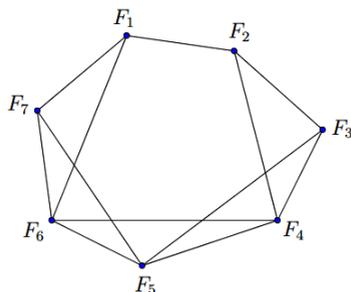


Figura 82 – Representação como um grafo para os produtos F_1, F_2, \dots, F_7 e seus reagentes.

Nesta representação, a existência de uma aresta entre dois vértices do grafo representa produtos que são reagentes e não podem ser armazenados juntos.

Utilizando o algoritmo guloso para coloração de vértices, uma possível solução é dada por:

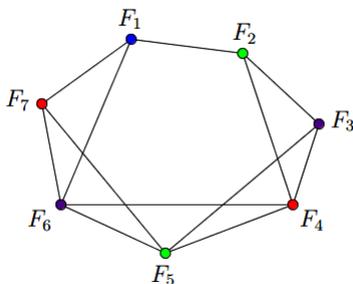


Figura 83 – Possível solução para o problema utilizando coloração de vértices.

Portanto, concluímos que os produtos podem ser agrupados do seguinte modo: $\{F_1\}$, $\{F_2, F_5\}$, $\{F_3, F_6\}$ e $\{F_4, F_7\}$.

Utilizaremos este mesmo exemplo para uma nova solução, utilizando uma possível coloração de arestas. Para isso, tomemos o grafo complementar, de modo que há uma aresta entre dois vértices sempre que os produtos podem ser armazenados no mesmo local, ou seja, sempre que os produtos representados nos vértices não reagem entre si. A representação do grafo complementar em questão segue na Figura 84:

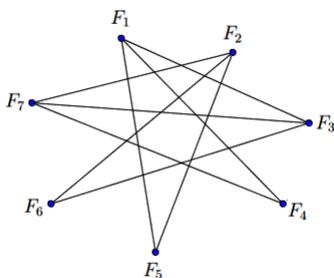


Figura 84 – Grafo complementar ao grafo da Figura 82

Construindo a cadeia de Kempe, F_1F_3 , obtemos a seguinte representação (na cor vermelha em linhas contínuas):

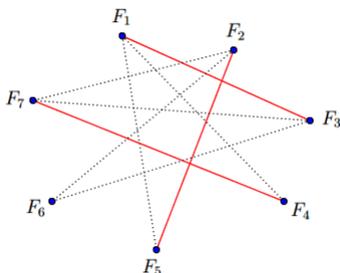


Figura 85 – Cadeia de Kempe F_1F_3 .

Em seguida, construindo a cadeia de Kempe, F_1F_4 (com linhas contínuas na cor azul), obtemos:

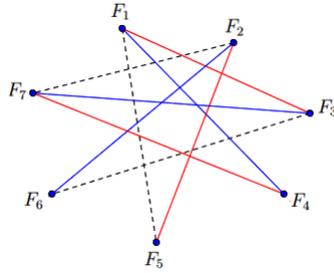


Figura 86 – Cadeia de Kempe F_1F_4 .

Desse modo, restam 3 arestas que podem ser coloridas com uma mesma cor. Obtemos, portanto, a seguinte coloração de arestas:

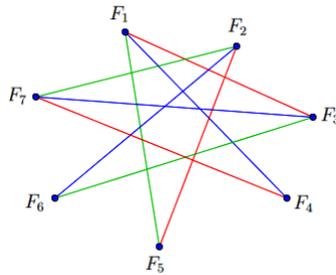


Figura 87 – Possível coloração de arestas para o grafo.

Analisando o grafo após realizada sua coloração de arestas, algumas das soluções possíveis são dadas por:

- **Solução 01:** $\{F_1, F_5\}$, $\{F_2, F_7\}$, $\{F_3, F_6\}$ e $\{F_4\}$.
- **Solução 02:** $\{F_1, F_3\}$, $\{F_2, F_5\}$, $\{F_4, F_7\}$ e $\{F_6\}$.
- **Solução 03:** $\{F_1, F_4\}$, $\{F_2, F_6\}$, $\{F_3, F_7\}$ e $\{F_5\}$.

Note que neste exemplo foram utilizadas 3 cores, ou seja, Δ cores.

Considerações Finais

A coloração de grafos ainda é um campo de pesquisa muito ativo, sendo um conteúdo um tanto atual se comparado a outros da matemática e que tem grande auxílio do uso de computadores. A coloração de grafos goza de muitas aplicações práticas, assim como de desafios teóricos.

Neste trabalho elaboramos um texto que possa ser utilizado por professores que trabalham com alunos da educação básica, relativo aos problemas e aplicações de coloração de grafos. Para tanto, o trabalho vem a elaborar um texto que formaliza alguns conceitos teóricos utilizados para o desenvolvimento da teoria apresentada, com uma atenção especial voltada para a coloração de grafos.

Entre todos os resultados discutidos, destacamos alguns problemas considerados clássicos na Teoria de Grafos, como *O Problema das Quatro Cores* e a *Coloração de Mapas*. Consideramos ainda algumas aplicações adicionais, interessantes de ser discutidas, como por exemplo, o problema da água, luz e gás (que não possui solução); problemas de grade de horários; problemas de jogos (mais especificamente, o SUDOKU); dentre outros.

Para a realização desta dissertação, necessitamos pesquisar desde a teoria básica sobre grafos até os problemas teóricos e aplicações. Contudo, foi possível obter novos olhares sobre conteúdos da matemática aplicada antes não conhecidos, sendo de grande motivação para continuidade dos estudos e utilidade na carreira docente.

Referências

- [1] APPEL, K.; HAKEN, W. Every planar map is four colorable. Illinois Journal of Mathematics 21:429-490; 1977.
- [2] BERGE, C. Graphs and Hypergraphs. Amsterdam: North-Holland, 1973.
- [3] BERGE, C. The Theory of Graphs. New York: Dover Publications, 2001.
- [4] BOAVENTURA NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. Grafos: Introdução e prática. São Paulo: Editora Blucher, 2009.
- [5] BOAVENTURA NETTO, P. O.. Grafos: Teoria, modelos e algoritmos. São Paulo: Editora Blucher, 2006.
- [6] BONDY, J. A. ; MURTY, U. S. R.. Graph Theory. Editora: Springer, 2008.
- [7] COSTA, P. P. Teoria de Grafos e suas Aplicações. Dissertação - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Câmpus de Rio Claro, 2011.
- [8] HARARY, F. Graph theory. Canada: Addison-wesley, 1969.
- [9] HEAWOOD, P. J. Map-Colour Theorem, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford 24: 332–338; 1890.
- [10] JANUARIO, T. O. Implementação e Análise de Algoritmos para Coloração de Arestas. Dissertação - Universidade Federal de Minas Gerais, Campus Belo Horizonte, 2011.
- [11] ORE, O. The four-color problem, New York: Academic Press, 1967.

- [12] RABUSKE, M. A. Introdução à teoria dos grafos. Florianópolis: Editora UFSC, 1992.
- [13] SOUSA, L. O Teorema das Quatro Cores, Revista do ISPV, n. 24. Millenium, 2001. Disponível eletronicamente em <http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf>.
- [14] WEST, D. Introduction to graph theory. Upper Saddle River: Prentice-hall International, 1996.
- [15] <http://networkx.github.io/documentation/latest/reference/index.html>. Acesso em 12 de Fevereiro de 2015.
- [16] http://www.press.jhu.edu/journals/american_journal_of_mathematics/. Acesso em 20 de Fevereiro de 2015.
- [17] <http://www.land.ufrj.br/~daniel/grafos/>. Acesso em 23 de Fevereiro de 2015.

Anexos

ANEXO A – Plano de aula

UNIDADE CURRICULAR: Matemática

TURMA: 9º ano do ensino fundamental II

PROFESSOR: Robson Piacente Alves

TEMA CENTRAL: Conjuntos e Funções

TEMA DA AULA: Utilização de grafos para resolução de problemas

INTRODUÇÃO:

Serão apresentadas algumas atividades sobre aplicações de grafos voltadas para o ensino fundamental II para que sirvam como outras opções metodológicas de aplicações dos conceitos matemáticos referentes ao conteúdo programático de teoria dos conjuntos, que antecede a noção de função apresentada no 9º ano. As atividades serão desenvolvidas com alunos do 9º ano em uma escola pública, buscando-se valorizar e enriquecer a resolução de problemas cotidianos e os conceitos da teoria de conjuntos, destacando o potencial de enriquecimento para o ensino de matemática.

Outras aplicações serão abordadas em forma de jogos e desafios que incentivam os alunos a encontrarem a solução dos problemas propostos. Constatamos que o estudo sobre grafos está assumindo o uso de atividades diferenciadas, as quais enriquecem significativamente a exposição dos conteúdos. Espera-se proporcionar alternativa de mudanças na prática docente incentivando-os na utilização de novas metodologias

de ensino.

OBJETIVO GERAL:

A partir do uso de atividades relacionadas ao conhecimento de grafos, objetivamos divulgar a criação de novas estratégias para resolver situações problemas do ensino de matemática que podem ser tratadas em nível do ensino fundamental, diferentes daquelas tradicionalmente conhecidas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Introduzir conceitos elementares da Teoria dos Grafos através de atividades realizadas por meio de jogos matemáticos;

Aplicar de forma elementar a Teoria dos Grafos, utilizando material manipulativo;

Apresentar estratégias metodológicas para a introdução da Teoria dos Grafos no Ensino Fundamental.

CONTEÚDOS:

Introdução à Teoria dos Grafos;

Resolução de problemas;

Situações de desafios matemáticos.

ESTRATÉGIA DE ENSINO:

A atividade está estruturada de modo que os conceitos teóricos e o desenvolvimento de atividades práticas serão abordados mutuamente, englobando: aspectos históricos, introdução ao conhecimento de grafos, atividades lúdicas e resolução problemas.

Os recursos didáticos utilizados são: espaço suficiente para trinta participantes que possua: retroprojeter, quadro branco, pincel e apagador para quadro branco, mesa para reunir os materiais e papel branco.

METODOLOGIA:

Inicialmente, a turma será dividida em grupos (por sorteio). Após formados os grupos, utilizaremos problemas (alguns deles clássicos) referentes aos conceitos básicos de grafos. Com base na solução destes problemas, ou na falta de solução dos mesmos, introduziremos conceitos teóricos sobre grafos e algoritmos que possam auxiliar em suas resoluções.

Para os problemas iniciais, introduziremos uma pequena estória, propondo problemas ao longo dela. Para cada um dos problemas os grupos terão cerca de 3 minutos para discutir e apresentar a opinião do grupo.

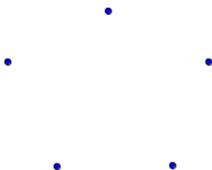
“Era um vez um Rei com 5 filhos. Em seu testamento ele desejou que, após sua morte, os seus filhos dividissem seu Reino em 5 províncias de forma que o limite de cada província tivesse uma linha

fronteira comum com cada uma das outras quatro.”

Problema 01: É possível desenhar 5 regiões mutuamente vizinhas no plano?

“Depois, o Rei pediu que todos os cinco irmãos unissem as capitais de cada uma de suas províncias através de estradas e que estas não deveriam se cruzar.”

Problema 02: É possível unir 5 pontos de modo que as linhas não se interceptem?



“Você tem que levar água, eletricidade e gás para 3 casas de uma cidade. As fornecedoras de água (A), eletricidade (E) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos (são canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar). Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assumo no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano.”

Problema 03: É possível unir água, luz e gás a três casas obedecendo as condições descritas anteriormente?

A figura ilustrando tal situação problema está disponível no

Capítulo 3 (ver figura 59).

Após a discussão desses três problemas, introduziremos os conceitos de: *grafo simples* e *grafo planar*, além de algumas definições básicas que serão utilizadas posteriormente, como por exemplo, adjacência, grau de um vértice, dentre outros. Com base nestes conceitos, relacionaremos os problemas anteriores com os grafo K_5 e $K_{3,3}$. Deste modo, concluiremos que tais grafos são não planares.

Em seguida, será lançada a afirmação de que “todo grafo planar e conexo pode ser colorido com 4 cores distintas de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor”. Com base nisso, verificaremos que regiões mapas podem ser relacionados a grafos planares e conexos, de modo que cada vértice represente uma região do mapa e que há uma aresta entre dois vértices sempre que as regiões que eles representam tiverem uma fronteira em comum.

Com base nisso, vamos propor mais um problema:

Problema 04: Dois jogadores, A e B têm quatro lápis de cores diferentes e um mapa não colorido (como sugestão, o mapa do Brasil). Cada um dos jogadores pinta sucessivamente uma região do mapa. Perde o primeiro que não consiga colorir adequadamente (no caso do mapa do Brasil, estados que possuem divisão comum não podem ter a mesma cor) nenhuma das regiões ainda sem cor.

Duas possíveis colorações para o mapa do Brasil estão disponíveis no Capítulo 3 (ver figura 63).

Os problemas envolvendo coloração de mapas podem ser trabalhados de forma interdisciplinar, por exemplo, com a disciplina de Geografia. Em Matemática, os alunos estarão envolvidos com a aplicação do algoritmo para coloração de vértices e a teoria dos conjuntos. Em Geografia, podem analisar os estados, suas capitais, o clima de cada região, etc.

Para que os alunos consigam determinar possíveis colorações para grafos conexos e planares, será disponibilizado o seguinte algoritmo “guloso” para coloração de vértices:

ENTRADA: Lista dos vértices do grafo G em ordem não crescente (de acordo com o grau de cada vértice).

SAÍDA: Conjuntos T_1, T_2, \dots, T_k , sendo que cada conjunto representa os vértices que devem ser coloridos com uma mesma cor e k que representa o número de cores utilizadas para uma possível coloração do grafo G .

Como objetivo principal para esta aula, utilizaremos a coloração de vértices para a resolução de um SUDOKU. Resolveremos um exemplo com um SUDOKU 4×4 .

Normalmente o jogo é composto por uma grade 9×9 constituída de subgrades 3×3 denominadas de regiões. Certas células já contêm números, chamados de dados. A finalidade do jogo é preencher as células vazias, com um número em cada célula, de forma que cada coluna, linha e região contenham os números 1 a 9 apenas uma vez.

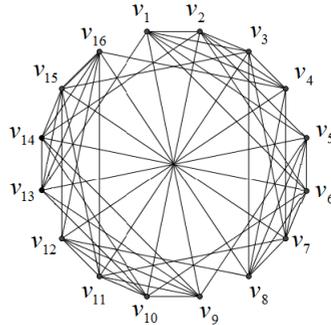
Para este problema, detalharemos o processo exemplificando com um SUDOKU 4×4 .

Problema 05: Resolver o seguinte SUDOKU 4×4 utilizando o processo de coloração de vértices (de grafos).

2			
		1	
	2		
			4

Faremos, em conjunto, a representação do SUDOKU a ser resolvido por meio de um grafo. O processo completo será apresentado com auxílio de um computador e um retro projetor, em PowerPoint, porém durante sua exemplificação utilizaremos o quadro branco para representar cada etapa da resolução e esclarecer possíveis dúvidas no processo.

2			
		1	
	2		
			4



Observaremos que os vértices v_1, \dots, v_{16} correspondem às células, sendo v_1 a célula na linha 1 e coluna 1, v_2 a célula na linha 1 e coluna 2 até v_{16} a célula na linha 4 e coluna 4. Além disso, existe uma aresta ligando os vértices relacionados de algum dos três modos:

- 1 - Estão na mesma linha;
- 2 - Estão na mesma coluna;
- 3 - Estão na mesma subgrade 2×2 .

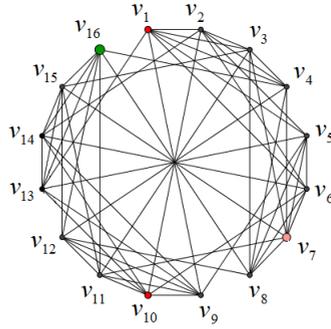
Durante o processo de coloração, cada vértice deverá corresponder a uma cor. Como são utilizados os números de 1 a 4, serão quatro cores necessárias na coloração deste grafo.

Com os dados fornecidos no início do jogo, temos a seguinte representação:

Listando os vértices, temos que todos possuem grau 7. Logo,

$v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8; v_9; v_{10}; v_{11}; v_{12}; v_{13}; v_{14}; v_{15}; v_{16}$

2			
		1	
	2		
			4



é uma ordenação não crescente, assim como qualquer outra permutação entre eles.

Em seguida, aplicaremos o algoritmo para coloração de vértices, respeitando as condições iniciais do jogo.

1. Sejam $v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8; v_9; v_{10}; v_{11}; v_{12}; v_{13}; v_{14}; v_{15}; v_{16}$ OS vértices do grafo que representa o SUDOKU. De acordo com o grau de cada vértice, obtemos a fila

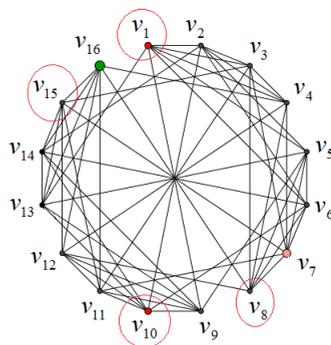
$$V = \{v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8; v_9; v_{10}; v_{11}; v_{12}; v_{13}; v_{14}; v_{15}; v_{16}\};$$

2. $i = 0;$
3. Como $V \neq \emptyset$, seguimos para o passo 4;
4. $i = 0 + 1;$
5. $v_1 \in T_1;$
6. Temos os vértices $v_7; v_{10}; v_{16}$ não adjacentes a v_1 , porém v_7 e v_{16} já possuem informações iniciais distintas da informação dada em v_1 . Desconsiderando o primeiro vértice possível, v_7 , os vértices que satisfazem as condições passam a ser $v_8; v_9; v_{15}$, porém, neste caso, não foi englobado o vértice v_{10} que possui a mesma condição

inicial que v_1 . Uma terceira coloração possível seria $v_8; v_{10}, v_{15}$, satisfazendo todas as condições iniciais. Logo, $T_1 = \{v_1; v_8; v_{10}, v_{15}\}$ e $V_1 = \{v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_9; v_{11}, v_{12}; v_{13}; v_{14}; v_{16}\}$;

Geometricamente, representado por:

2			
		1	2
	2		
		2	4

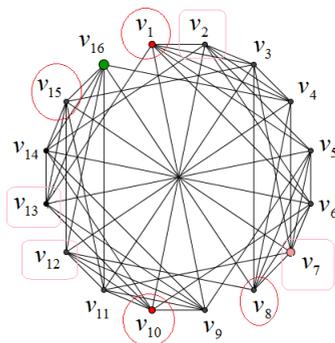


7. Voltamos ao passo 3 e repetimos o processo. Logo, obtemos:

$v_2 \in T_2, T_2 = \{v_2; v_7; v_{12}; v_{13}\}$ e $V_2 = \{v_3; v_4; v_5; v_6; v_9; v_{11}, v_{14}; v_{16}\}$;

Representado por:

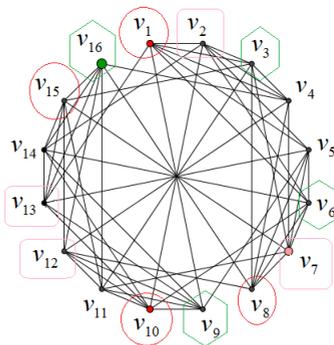
2	1		
		1	2
	2		1
		2	4



$v_3 \in T_3, T_3 = \{v_3; v_6; v_9; v_{16}\}$ e $V_3 = \{v_4; v_5; v_{11}, v_{14}\}$;

Geometricamente, dado por:

2	1	4	
	4	1	2
4	2		1
1		2	4



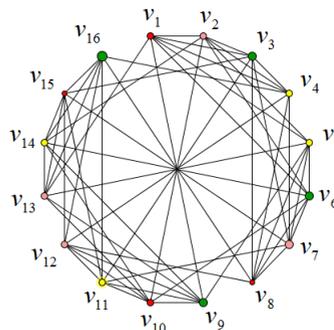
Por fim, obtemos:

$$v_4 \in T_4, T_4 = \{v_4; v_5; v_{11}, v_{14}\} \text{ e } V_4 = \emptyset.$$

8. Como $V_4 = \emptyset$ terminamos o processo.

Portanto, o resultado obtido é o SUDOKU resolvido, como na figura abaixo:

2	1	4	3
3	4	1	2
4	2	3	1
1	3	2	4



Ao final, deixararemos claro que no caso de um SUDOKU 9×9 podemos utilizar o mesmo processo, porém, serão necessárias nove cores

distintas.

PRÓXIMA AULA:

Para os alunos que possuem tablet ou smartphone com Android, será recomendada a instalação e a utilização do aplicativo Grafos (produzido por “Big M Games”) em que o objetivo do jogo é, em dois minutos, percorrer todas as arestas do grafo sem que nenhuma delas seja repetida, em que o vértice de início coincida com o vértice de partida (disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.BigMGames.Grafos>).

Além disso, com base em um dos problemas propostos, individualmente, cada aluno deverá aplicar o algoritmo “guloso” para coloração de vértices apresentado e determinar uma possível coloração para o mapa do Brasil.

Também será disponibilizado um novo SUDOKU para que apliquem o procedimento utilizado para sua resolução.

	4		1
3			
			4

AVALIAÇÃO:

A avaliação será feita de modo contínuo e sistematizado, analisando a participação e empenho dos alunos para a resolução dos problemas propostos, tanto na cooperação com o grupo quanto individu-

almente.

BIBLIOGRAFIA:

Material - estilo OBMEP:

JURKIEWICZ, Samuel. Grafos - Uma introdução. Escola de Engenharia/UFRJ. Rio de Janeiro, 2009.

Professor: Robson Piacente Alves

Data: 29/06/15