UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Reinaldo Gomes

Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra

Maringá-PR

2013

REINALDO GOMES

Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Dra. Marcela D. Silva

Maringá

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR., Brasil)

Gomes, Reinaldo
G633n Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra / Reinaldo Gomes. -- Maringá, 2013.
84 f.: il., figs.

Orientador: Prof[a]. Dr[a]. Marcela Duarte da Silva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2013.

1. Números complexos. 2. Polinômios. 3. GeoGebra. 4. Investigação matemática. I. Silva, Marcela Duarte da, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

CDD 21.ed. 510.72

AHS-001521

REINALDO GOMES

NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS: ESTRATÉGIAS DE ENSINO PARA APLICAÇÃO POR MEIO DO GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Marcela

Profa. Dra. Marcela Duarte da Silva
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Jamil V. P.

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Rio Claro - SP

Josiane Faria

Profa. Dra. Josiane Cristina de Oliveira Faria
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 11 de março de 2013.
Local de defesa: Auditório do Departamento de Matemática, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

À toda minha família

e a todos os professores

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram para o êxito deste trabalho:

- À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro ao longo do curso.

- Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, envolvidos com o PROFMAT, dispostos a promover uma melhoria na qualidade do ensino.

- À minha orientadora, Profª Drª Marcela D. Silva, pelo incentivo e direcionamento dos estudos.

- À Profª Ginaldi, pelas lições de vida e de superação, obrigado mãe!

- À Rosemeire, Luísa e Edilson, pelo apoio, paciência e auxílio nas horas difíceis.

- Aos colegas do PROFMAT, pela troca de experiências e pela amizade.

- E à minha esposa Zulmira e aos filhos Carlos, Cássia e Cassiano pelo amor, respeito e compreensão durante esses anos de estudo.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre números complexos e polinômios, considerando sua relevância para o ensino da Matemática na educação básica, tendo como objetivo final apresentar uma proposta educacional que contribua para a melhoria do ensino dessa disciplina. É apresentado um resumo sobre a história dos números complexos e dos polinômios. Em seguida, a parte teórica é constituída pelo estudo tanto do conjunto dos números complexos quanto dos polinômios como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Ao final, é apresentado um roteiro de atividades para ser aplicado com alunos do terceiro ano do ensino médio utilizando como recurso didático o programa computacional GeoGebra, numa perspectiva da investigação matemática. O roteiro de atividades apresenta sugestões para aplicação do conteúdo com duração de quatorze aulas. Houve a preocupação de unir teoria e prática a fim de promover um aprendizado significativo, mobilizando professores e alunos em ações que procuram despertar o interesse e, dessa forma, contribuir para o enriquecimento do ensino da Matemática.

Palavras chave: Números complexos; Polinômios; GeoGebra, Investigação Matemática.

Abstract

This work presents a study on complex numbers and polynomials, considering their relevance to the teaching of mathematics in basic education, with the main goal of presenting an educational proposal that contributes to improving the teaching of this discipline. It is presented a summary of the history of complex numbers and polynomials. Then, the theoretical study is constituted by both the set of complex numbers as polynomials seen as vector space over $\mathbb{R}$. At the end, we present a guide of activities to be used with students of the third year of high school as a resource by using the computer program GeoGebra, as a perspective of mathematical research. This guide suggests activities for fourteen classes. There was a concern about join practice and theory in order to promote a meaningful learning, mobilizing teachers and students in activities which increases interest in math and thereby contribute to the enrichment of mathematics teaching.

Key words: Complex numbers, polynomials, GeoGebra, Math Research.

Descrição de modalidade - Banco Indutor de TCC

Título: Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra

Modalidade: Modalidade 1: Elaboração de proposta de atividades educacionais.

Objetivos: Ampliar a ideia de conjuntos numéricos, identificando a unidade imaginária como elemento do conjunto dos números complexos e reconhecer as formas algébricas, gráficas e trigonométricas desses números. Para atingir esses objetivos, o roteiro de atividades será desenvolvido com a utilização do programa GeoGebra, numa perspectiva metodológica das investigações matemáticas.

Público alvo: alunos do Terceiro Ano do Ensino Médio.

Materiais e tecnologias: Utilização do programa GeoGebra para realização das atividades propostas nos quatro módulos sobre números complexos. O uso do computador terá como função facilitar a verificação das ideias apontadas pelos alunos, auxiliando na construção de modelos e facilitando sua comprovação. Também serão utilizados cadernos para anotações pontuais da aula e para elaboração de relatórios, assim como a utilização de projetor multimídia para visualização de todos os alunos dos comandos e ferramentas do programa, bem como, a apresentação oral dos alunos para a classe.

Recomendações metodológicas: O trabalho com o roteiro de atividades será embasado nas investigações matemáticas. Dessa maneira, procura-se direcionar as atividades de forma que o professor não dê respostas prontas aos alunos ou utilize extensamente as terminologias e fórmulas específicas. Assim, para que se conclua com êxito os passos desse material, sugere-se que o professor aplique de forma preliminar todo o roteiro, apresentando posteriormente as definições e conceitos. É necessário que haja interação entre os estudantes e destes com os conteúdos. O professor poderá, então, trabalhar com pequenos grupos, favorecendo o caráter investigativo e de pesquisa. Dessa forma, ao final das atividades, o professor deverá disponibilizar um tempo suficiente para que os alunos apresentem suas conjecturas, possam discutir e elaborar ideias sobre o assunto estudado, concretizando o aprendizado.

Dificuldades previstas: Espera-se que os alunos: consigam utilizar a ferramenta tecnológica envolvida nas atividades do roteiro; estejam familiarizados com o trabalho em grupos na elaboração de ideias, no desenvolvimento e verificação das mesmas e, também, com relação à exposição das estratégias utilizadas para o desenvolvimento das atividades aos demais colegas.

Descrição geral: A descrição detalhada, incluindo o tempo previsto para aplicação em sala de aula e outros aspectos relevantes, estão disponíveis em cada módulo.

Possíveis continuações ou desdobramentos: Este roteiro sugere algumas atividades para que o professor possa organizar suas aulas. Ele poderá alterá-las, enriquecê-las ou explorar outros conteúdos matemáticos, de acordo com os avanços na turma de aplicação. Também ficará livre para contemplar outros assuntos que não estão em destaque neste material.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho apresenta um estudo sobre números complexos e polinômios, considerando sua relevância para o ensino de matemática, principalmente na educação básica, em especial nas séries finais do ensino médio.

Tanto o estudo dos números complexos quanto o dos polinômios estão contemplados nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática (DCE) em [11], sendo conteúdos básicos que constam no conteúdo estruturante "números e álgebra". Apesar de contemplados nas DCE do estado do Paraná, nem sempre nas salas de aula esses conteúdos são abordados com a devida importância. Geralmente, dentre o rol de assuntos abordados, é dada maior ênfase ao estudo dos polinômios e uma menor ou quase nenhuma importância aos números complexos.

Para que haja uma mudança nesse quadro, promovendo um maior interesse tanto do aluno quanto do professor, é apresentado ao final deste trabalho um roteiro para a aplicação desses conteúdos, considerando a utilização de ferramentas tecnológicas, no caso, o computador. Para isto, este trabalho está pautado nas teorias sobre tecnologias educacionais de Borba e Penteado em [3], e também nas Diretrizes para o uso de Tecnologias Educacionais, da Secretaria de Estado de Educação do Paraná em [10].

O acesso às tecnologias educacionais amplia as mudanças na construção do conhecimento. Sendo assim, a escola deve considerar esse instrumento como ferramenta para transformação social. As DCE incentivam a utilização das tecnologias de informação e comunicação (TIC), pois entendem que com seu uso as práticas educacionais apresentam novas maneiras de promover o conhecimento acadêmico em [10].

Conforme [3], o aprendizado com as TIC é diferente do aprendizado com papel e lápis, tão comum em nossas escolas. A utilização de ferramentas computacionais permitem que os alunos experimentem bastante a construção de diferentes representações gráficas.

Dentro dessa perspectiva, conforme os estudos de Borba em [2], Borba e Penteado em [3], Barros e D'Ambrosio em [1], a utilização das TIC pode facilitar, dinamizar e potencializar os trabalhos com matemática. Dessa forma, o uso dessas tecnologias pode favorecer o trabalho de atividades com investigações matemáticas, pois permite a manipulação de dados e diminui o tempo de trabalho mecânico permitindo que o aluno tenha tempo para desenvolver a atividade intelectual.

Nesse contexto, o encaminhamento metodológico das atividades práticas foi baseado nas investigações matemáticas, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira em [13]. Consoante a essa metodologia, os alunos serão levados a formular conjecturas, representá-las, testá-las e verificar sua validade.

Assim, as investigações matemáticas promovem a mobilização dos alunos na realização das tarefas, quer em grupos quer individualmente. Estimulam o aluno a participar da resolução de tarefas e, ao final do processo, promove a discussão e o debate com os demais estudantes, a fim de estabelecer quais são as melhores conjecturas para a realização de tarefas semelhantes. É um trabalho que se aproxima muito do que faz um matemático. Pode-se afirmar que "investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades" ([13], p.13).

Ainda cabe ressaltar que as atividades investigativas envolvem quatro momentos: formulação e exploração de questões, organização dos dados, realização dos testes e a justificação e avaliação do trabalho. Esses momentos podem aparecer simultaneamente ou não, podendo incluir várias atividades, inclusive a exposição e divulgação de ideias e resultados. Também é muito importante "que o professor procure levar os alunos a compreender o caráter provisório das conjecturas" ([13], p.38). Isso quer dizer que ele deve estimular o teste das conjecturas para que os alunos não se convençam de que estas são as conclusões em absoluto.

Desse modo, este trabalho é constituído por quatro capítulos, sendo que o primeiro apresenta uma breve história envolvendo os motivos pelos quais de optou pelo estudo dos polinômios e dos números complexos, inclusive relacionando os dois temas.

O segundo capítulo é dedicado ao conjunto dos números complexos visto como $\mathbb{R}$-espaço vetorial. São apresentadas as definições, suas operações usuais, propriedades e algumas demonstrações. Procurou-se determinar o subespaço vetorial, a base, a dimensão, assim como o produto interno em $\mathbb{C}$. Para concluir esse estudo, também foi trabalhado o conjugado, a norma, o módulo, a distância, o argumento. Além disso, também abordamos a estrutura geométrica com o plano de Argand-Gauss e a forma trigonométrica dos números complexos.

O terceiro capítulo, sobre polinômios, inicia-se com as definições de polinômios, de polinômios nulo e de polinômios idênticos. Da mesma forma que estudou-se os números complexos, também são determinados o conjunto dos polinômios como $\mathbb{R}$-espaço vetorial, as definições, as operações usuais, as propriedades com coeficientes reais e algumas demonstrações, assim como o subespaço vetorial, a base e a dimensão. Também foi considerado o grau de polinômios, algumas formas para a divisão de polinômios e o estudo de suas raízes.

O quarto e último capítulo apresenta um roteiro para aplicação de atividades envolvendo números complexos. Estas atividades foram produzidas para serem utilizadas com o GeoGebra[1]. Elas apresentam uma metodologia de investigação matemática baseada em [13]. Por essa razão, há algumas recomendações para o professor a respeito de sua utilização.

Considerando os aspectos acima citados, neste trabalho, além de apresentar com rigor as definições e propriedades dos conteúdos sobre números complexos e polinômios, é também apresentado ao final um roteiro de atividades para que o professor do ensino médio possa utilizar em sua prática educacional e, dessa forma, tornar suas aulas mais atrativas pelo uso de programa computacional GeoGebra.

Finalmente, podemos considerar esse trabalho como um roteiro completo desde a teoria até a prática dos números complexos e polinômios contribuindo para o enriquecimento do ensino da Matemática na educação básica.

[1]Disponível para download em: `http://www.geogebra.org`. A versão 4.2.23 de em Fevereiro de 2013 é a mais atual.

Capítulo 2

História dos números complexos e dos polinômios

Desde a Antiguidade, existem referências sobre a raiz quadrada de números negativos, como por exemplo, $\sqrt{81-144}$, que aparece na obra de Heron de Alexandria. Assim como Diofanto, que na tentativa de resolver uma equação do segundo grau, encontrou $\sqrt{1849-2016}$. Os números com essa particularidade, apesar de serem conhecidos há tempos pelos matemáticos, só foram considerados como números "verdadeiros" a partir de Girolamo Cardano (1501-1576), [5].

Cardano encontrou como solução para a equação de segundo grau $x^2-10x+40=0$ as raízes, $a=5+\sqrt{-15}$ e $b=5-\sqrt{-15}$. Como em sua época os matemáticos tinham dificuldades de operar até mesmo com números negativos, raízes quadradas com esses números eram consideradas um absurdo. Desse modo, não conseguiu avançar seus estudos com números complexos, sendo superado por Rafael Bombelli (1530-1579), [6].

Bombelli atribui um tratamento mais elaborado para a teoria dos números complexos, assim como para sua notação que se assemelha com a notação utilizada atualmente. Com base em seus estudos estabeleceu as regras de adição e multiplicação:

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$$

$$(a+b\sqrt{-1})\cdot(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}$$

Entretanto seu trabalho foi recebido com desconfiança, inclusive do próprio Cardano, pois nessa época os matemáticos ainda se opunham a resultados que não tivessem significado geométrico, [6].

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) propôs, em 1777 a utilização do símbolo i para representar $\sqrt{-1}$, além de avançar nos estudos iniciados por Bombelli. A partir de então, diminui não só grande parte da desconfiança em relação a esses números, como também a confusão que gerava quando aplicada às propriedades referentes ao números reais, [7].

A partir do século XVIII, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nomeou os "novos" números de *números complexos* e utilizou a representação por meio de pontos de um plano. Jean Robert Argand (1786-1822) e Caspar Wessel (1745-1818), utilizaram a representação dos números complexos como segmentos orientados, numa abordagem geométrica, conquistando maior aceitação no meio matemático. Tanto Wessel quanto Argand, perceberam que os números complexos podem ser operados algebricamente, como no caso de vetores, [8].

Argand publicou de forma anônima, numa monografia de 1806, a representação geométrica de um número complexo, dando-lhe grandeza e direção no plano, ou seja, passou a tratar os complexos como vetores. Além disso, a multiplicação por i denota uma rotação de 90°. Desse modo, é possível estabelecer uma relação entre o conjunto $\mathbb{C}$ e o R^2, [6].

Por sua vez, Euler propôs a representação de complexos não nulos na chamada *forma trigonométrica* ou *forma polar*. Essa nomenclatura associa os números complexos com as funções trigonométricas. Essa representação facilita o trabalho quando da multiplicação, da potenciação e da extração de raízes de números complexos, [6].

Na forma polar de um número complexo não nulo $z = a + bi$, consideramos seu módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ que é o comprimento de um segmento de reta orientado e um ângulo θ chamado de *argumento principal*, cuja medida em radianos, determina um ângulo com o eixo x. Assim, o complexo $z = a + bi$ assume, na forma trigonométrica, a representação $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$, [6].

Essa representação foi utilizada por Abraham de Moivre (1667-1754), na elaboração de uma expressão que representasse a potenciação de expoente inteiro n para um complexo não nulo. E assim, a expressão $z^n = |z|^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$ recebeu o nome de *fórmula de* *de Moivre*, [6].

William Rowan Hamilton (1805-1865), apontou a solução para operar a soma $a+bi$ que, até então, causava problemas por serem entidades diferentes. Para tanto, introduziu a álgebra formal aos complexos considerando-os pares ordenados de números reais. Hamilton utilizava as seguintes definições para operar com os pares ordenados (a,b):

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d)\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd,ad+bc)\end{aligned}$$

De suas ideias, um número real a pode ser escrito como $(a,0)$; em particular, $i=(0,-1)$, logo $i^2=(0,-1)(0,-1)=(-1,0)=-1$. Desse modo, ele obteve uma explicação para o símbolo $\sqrt{-1}$, [8].

Até o final do século XV, a álgebra não teve grandes avanços em relação aos conhecimentos egípcios e babilônios. Em 1494, o frade italiano Luca Pacioli (1445-1515), publicou seu livro *Summa* versando sobre equações do primeiro e segundo graus, utilizando ainda as regras verbais. No final de seu trabalho, acrescenta que seria impossível a solução da equação $x^3+mx=n$, [8].

Por volta de 1510, é que Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, conseguiu resolver esse problema. Porém, não publicou seu método confidenciando, como de costume na época, para Antonio Maria Fiore; e a seu genro, Annibale della Nave.

Fiore queria obter prestígio às custas do mestre, por isso propôs um desafio para um matemático notável a fim de conseguir fama. O matemático escolhido para o embate foi outro italiano, Niccolo Fontana (1499(?)-1557), mais tarde conhecido como *Tartaglia.* Fiore propôs uma disputa na qual haveria trinta questões para cada um resolver. Tartaglia soube que o desafiante conhecia os métodos do mestre del Ferro e com isso, em 1535, encontrou uma regra para a equação $x^3+px+q=0$ e para a equação $x^3+px^2+q=0$. O resultado do desafio culminou em Tartaglia resolvendo corretamente todas as questões propostas por Fiore, enquanto este não conseguiu resolver nenhuma das propostas por Tartaglia, [8].

Tartaglia, por sua vez, confidenciou seus métodos para Cardano, depois da grande insistência deste, que fez um juramento para não publicá-los. O que não cumpriu, pois acabou publicando os métodos em sua *Ars magna* e embora tenha referenciado Tartaglia, acabou gerando um grande conflito entre os dois. Além disso, no mesmo livro, Cardano incluiu um método para reduzir equações de quarto grau em equações cúbicas, descoberto por seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565), [8].

Novamente Tartaglia se vê em um embate, agora convocando Cardano para o desafio. No entanto, no dia do confronto quem apareceu no lugar de Cardano foi seu discípulo Ferrari. Isso fez com que o combate não ocorresse. Assim, cada lado saiu considerando-se vitorioso. Por fim, a fórmula descoberta por Tartaglia foi injustamente batizada de fórmula de Cardano, [7].

Apesar disso, o trabalho de Cardano na resolução das equações cúbicas destacou-se por apresentar raízes de números negativos. Mesmo tendo trabalhado com raízes quadradas de números negativos, nem ele próprio conseguiu entender exatamente seu trabalho, promovendo a discussão por outros matemáticos, [5].

Finalizamos, desse modo, essa parte da história da matemática que contempla os números complexos e as equações polinomiais. Procurou-se destacar os matemáticos e suas principais contribuições, algumas originais, outras nem tanto, mas todas proporcionaram avanços para a Matemática.

Capítulo 3

Os números complexos

3.1 Os números complexos ($\mathbb{C}$) como $\mathbb{R}$-espaço vetorial

O conjunto dos números complexos, denominado por $\mathbb{C}$, contém o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Munido com operações de adição e multiplicação obtidas através de uma extensão das operações dos números reais, o conjunto adquire uma estrutura algébrica de $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

Primeiramente, recordaremos algumas propriedades sobre pares ordenados. Considerando o produto cartesiano de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$, tomando dois elementos quaisquer (a, b) e (c, d), podemos estabelecer três propriedades:

3.1.1 Propriedades dos pares ordenados

a) igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$

b) adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

c) multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Exemplo 3.1.1 *Tomando $z_1 = (1, 2)$ e $z_2 = (2, 5)$, temos:*

a) $z_1 + z_2 = (1, 2) + (2, 5) = (1 + 2, 2 + 5) = (3, 7)$

b) $z_1 \cdot z_2 = (1, 2) \cdot (2, 5) = (1 \cdot 2 - 2 \cdot 5, 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2) = (2 - 10, 5 + 4) = (-8, 9)$

Chamaremos de conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais, no qual estão definidas as operações de adição e multiplicação (Propriedades 3.1.1). O primeiro termo do par ordenado representa a parte real; e o segundo, a parte imaginária.

Dessa forma, quando um número complexo apresentar somente a parte real, ele será chamado de *real puro*, e quando apresentar somente a parte imaginária, será chamado de *imaginário puro*, isto é, se $(x, y) \in \mathbb{C}$ quando $y = 0$, $(x, 0)$ é um número real puro e, quando $x = 0$, $(0, y)$ é um número imaginário puro, [9].

É usual representar cada elemento $(x, y) \in \mathbb{C}$ com o símbolo z,

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ sendo } x, y \in \mathbb{R}$$

Além disso, os números complexos podem ser representados nas formas algébrica, geométrica e trigonométrica.

Na maior parte do texto, utilizaremos a forma algébrica que é representada por $a+bi$, logo $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$. Nessa forma, o número complexo $z = a+bi$ é formado por duas parcelas: a representa a parte real, $\mathrm{Re}(z)$, e bi representa a parte imaginária, $\mathrm{Im}(z)$. Temos assim:

$$a = \mathrm{Re}(z); \quad b = \mathrm{Im}(z)$$

Exemplo 3.1.2 *Considerando o par ordenado $(2, 3)$, podemos representá-lo na forma algébrica por $2 + 3i$, onde $a = 2$ constitui a parte real; e $b = 3$, a parte imaginária desse complexo.*

O par ordenado $(0, 0)$ é o mesmo que $0 + 0i$, que representa o 0 (zero) dos números complexos e é o mesmo elemento neutro da adição dos reais. O par $(1, 0)$ também representado por $1+0i = 1$, representa a unidade dos números complexos, que também é o mesmo elemento neutro da multiplicação dos reais. Sendo assim, o par ordenado $(0, 1) = 0+1i = i$, representa a unidade imaginária.

Exemplo 3.1.3

a) $z + 0 = z$.

Pois, $z + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = z$.

b) $z \cdot 1 = z$.

Pois, $z \cdot 1 = (a + bi)(1 + 0i) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = a + bi = z$.

Observemos que, dado um $x \in \mathbb{R}$, podemos escrever $x = x + 0i \in \mathbb{C}$. Desse modo, podemos concluir que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

A seguir, definimos duas operações em $\mathbb{C}$ da seguinte forma:

Definição 3.1.4 Adição*:*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((a + bi), (c + di)) &\longmapsto (a + c) + (b + d)i \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definição 3.1.5 Multiplicação por escalar*:*

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha, a + bi) &\longmapsto \alpha a + \alpha bi \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1.2 Propriedade da unidade imaginária

Podemos estabelecer uma propriedade básica da unidade imaginária:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,\ 0) = -1$$

ou seja,

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

Dando continuidade a esse raciocínio

- $i^3 = -i$;
- $i^4 = 1$.

No exemplo (3.1.1), teríamos os seguintes procedimentos:

Exemplo 3.1.6

a) $z_1 + z_2 = (1+2i) + (2+5i) = (1+2) + (2+5)i = 3+7i$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação dos reais e a propriedade (3.1.2), temos:

b) $z_1 \cdot z_2 = (1+2i) \cdot (2+5i) = 2+5i+4i+10i^2 = 2+9i+10i^2 = 2+9i-10 = -8+9i$

Observamos que a multiplicação na forma algébrica ocorre naturalmente, não sendo necessário a memorização da multiplicação utilizada com pares ordenados.

3.1.3 Propriedades da adição

A1 - **Propriedade associativa**

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= [(a+bi) + (c+di)] + (e+fi) \\
&= [a+c+bi+di] + (e+fi) \\
&= [a+c+(b+d)i] + (e+fi) \\
&= [(a+c)+e] + [(b+d)+f]i \\
&= [a+(c+e)] + [b+(d+f)]i \\
&= a+(c+e)+bi+(d+f)i \\
&= (a+bi) + [(c+e)+(d+f)i] \\
&= (a+bi) + [(c+di)+(e+fi)] \\
&= z_1 + (z_2 + z_3)
\end{aligned}$$

□

A2 - **Propriedade comutativa**

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a+bi)+(c+di) \\ &= (a+c)+(b+d)i \\ &= (c+a)+(d+b)i \\ &= (c+di)+(a+bi) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

□

A3 - **Existência do elemento neutro**

Existe um número complexo e_n tal que $z + e_n = z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Tomando um complexo $z = a + bi$, vamos encontrar $e_n = c + di$, tal que $z + e_n = z$:

$$\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) = (a+bi) &\Rightarrow (a+c)+(b+d)i = a+bi \\ &\Rightarrow a+c = a \quad \text{e} \quad b+d = b \\ &\Rightarrow c = 0 \quad \text{e} \quad d = 0 \end{aligned}$$

□

O número complexo $e_n = 0 + 0i$ é denominado *elemento neutro* para a adição.

Proposição 3.1.7 *O número complexo $e_n \in \mathbb{C}$ é único.*

Demonstração: Há um único número $a + bi = 0$ que satisfaz (A3), pois se $c + di$ possui a mesma propriedade, então $0 = 0 + (c + di) = (c + di) + 0 = c + di$. □

A4 - **Existência do elemento simétrico**

Para cada número complexo z existe um número complexo z', tal que $z + z' = e_n$.

Demonstração: Tomando um complexo $z = a + bi$, provemos que existe $z' = c + di$, tal que $z + z' = e_n$:

$$(a+bi)+(c+di) = (0+0i) \quad \Rightarrow \quad (a+c)+(b+d)i = 0+0i$$

$$\Rightarrow \quad a + c = 0 \quad \text{e} \quad b + d = 0$$
$$\Rightarrow \quad c = -a \quad \text{e} \quad d = -b$$

□

Portanto, $z' = -a + (-b)i = -a - bi$, chamado *elemento simétrico* de $z = a + bi$. Em geral, z' é denotado por $-z$.

Proposição 3.1.8 *Para cada número complexo existe um único número complexo* $-(a+bi)$*, oposto de* $a + bi$.

Demonstração: Pela propriedade (A4), consideramos $c + di$ tal que $(a + bi) + (c + di) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} -(a + bi) &= -(a + bi) + 0 \\ &= -(a + bi) + ((a + bi) + (c + di)) \\ &= (-(a + bi) + (a + bi)) + (c + di) \\ &= 0 + (c + di) = c + di \\ &= c + di \end{aligned}$$

□

Subtração

Decorre da propriedade (A4) que, dados dois números complexos $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c + di$, existe um único número complexo z tal que, $z_1 + z = z_2$.

Fazendo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ e $z = e + fi$, teremos a igualdade $(a+bi)+(e+fi) = (c+di)$. Adicionando o simétrico de $z_1' = -a-bi$ em ambos os membros da igualdade:

$$(-a - bi) + [(a + bi) + (e + fi)] = (c + di) + (-a - bi)$$
$$\Rightarrow \quad [(-a - bi) + (a + bi)] + (e + fi) = (c + di) + (-a - bi)$$
$$\Rightarrow \quad [(-a + a) + (-b + b)i] + (e + fi) = (c + di) + (-a - bi)$$

$$\Rightarrow \quad (0+0i)+(e+fi)=(c+di)+(-a-bi)$$
$$\Rightarrow \quad (e+fi)=(c+di)+(-a-bi)$$

Encontramos $z = z_2 + z_1'$.

A fim de mostrar a unicidade, seja $w \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 + w = z_2$. Então,

$$\begin{aligned} z_1 + z &= z_1 + w \\ z_1' + z_1 + z &= z_1' + z_1 + w \\ 0 + z &= 0 + w \\ z &= w \end{aligned}$$

Esse número z é chamado *diferença* entre z_2 e z_1 e é indicado por $z_2 - z_1$:

$$z_2 - z_1 = z_2 + z_1' = (c+di) + (-a-bi) = (c-a) + (d-b)i$$

3.2 Multiplicação por escalar

A multiplicação de números complexos por escalar definida em (3.1.5), apresenta as seguintes propriedades:

3.2.1 Propriedades da multiplicação por escalar

Para todo $\alpha, \beta, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, temos:

ME1 - $\alpha(\beta(a+bi)) = (\alpha\beta)(a+bi)$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta(a+bi)) &= \alpha(\beta a + \beta bi) \\ &= \alpha\beta a + \alpha\beta bi \\ &= \alpha\beta(a+bi) \end{aligned}$$

□

Notemos que se $\alpha = 0$, pela Propriedade (3.1.1c) temos $\alpha(a+bi) = (0+0i)(a+bi) = (0a-0b)+(0b+0a)i = 0$

ME2 - $(\alpha+\beta)(a+bi) = \alpha(a+bi)+\beta(a+bi)$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(a+bi) &= (\alpha+\beta)a+(\alpha+\beta)bi\\ &= \alpha a+\beta a+\alpha bi+\beta bi\\ &= \alpha(a+bi)+\beta(a+bi)\end{aligned}$$

□

ME3 - $\alpha\left[(a+bi)+(c+di)\right] = \alpha\left[(a+c)+(b+d)i\right] = \alpha(a+bi)+\alpha(c+di)$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\alpha\left[(a+bi)+(c+di)\right] &= \alpha\left[(a+c)+(b+d)i\right]\\ &= \alpha(a+c)+\alpha(b+d)i\\ &= \alpha a+\alpha c+\alpha bi+\alpha di\\ &= (\alpha a+\alpha bi)+(\alpha c+\alpha di)\\ &= \alpha(a+bi)+\alpha(c+di)\end{aligned}$$

□

ME4 - $1(a+bi) = (a+bi)$

Demonstração: Pela Propriedade (ME2), temos:

$$\begin{aligned}(1+0i)(a+bi) &= 1(a+bi)+0(a+bi)\\ &= a+bi\end{aligned}$$

□

Observamos que o conjunto dos números complexos satisfaz as propriedades da adição (3.1.3) e as propriedades da multiplicação por escalar (3.2.1). Desse modo, podemos afirmar que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3.2.2 Propriedades do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{C}$

Acabamos de verificar que o conjunto $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dessa forma, apresenta algumas propriedades que são consequências imediatas da definição de espaço vetorial.

P1 - Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha 0 = 0$, onde $0 \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Pela definição de multiplicação por escalar (3.1.5):

$$\alpha(0+0i) = \alpha 0 + \alpha 0 i = 0 + 0i$$

pois, $\alpha 0 = 0$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

P2 - Para todo $a + bi \in \mathbb{C}$, $0(a+bi) = 0$.

Demonstração: Utilizando as propriedades (ME3) e (A3):

$0(a+bi) = (0+0)(a+bi) = 0(a+bi)+0(a+bi)$, somando o número complexo $-[0(a+bi)]$ em cada membro, temos:

$$\begin{aligned}
0(a+bi) + \{-[0(a+bi)]\} &= 0(a+bi) + 0(a+bi) + \{-[0(a+bi)]\} \\
0(a+bi) - 0(a+bi) &= 0(a+bi) + [0(a+bi) - 0(a+bi)] \\
0 &= 0(a+bi) + 0 \\
0 &= 0(a+bi)
\end{aligned}$$

$\square$

P3 - A igualdade $\alpha(a+bi) = 0$, $0 \in \mathbb{C}$ com α, a e $b \in \mathbb{R}$, só é possível se $\alpha = 0$ ou $a+bi = 0$.

Demonstração: Se $\alpha = 0$, procedemos de forma análoga à demonstração de (P2). Caso contrário, considerando que $\alpha \neq 0$, então existe um número real α^{-1}, tal que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$. Multiplicando ambos os membros por α^{-1}, temos:

$$\begin{aligned}
\alpha^{-1}[\alpha(a+bi)] &= \alpha^{-1} \cdot 0 \\
(\alpha^{-1} \cdot \alpha)(a+bi) &= 0 \qquad \text{(ME1)} \\
1 \cdot (a+bi) &= 0 \qquad \text{(ME4)} \\
a + bi &= 0
\end{aligned}$$

$\square$

P4 - Para todo $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, $(-\alpha)(a+bi) = \alpha[-(a+bi)] = -[\alpha(a+bi)]$.

Demonstração: Usando as propriedades (ME2) e (P2), temos que:

$$\begin{aligned}
\alpha(a+bi)+(-\alpha)(a+bi) &= [\alpha+(-\alpha)](a+bi) && \text{(ME2)}\\
&= 0(a+bi) && \text{(P2)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Mas, $\alpha(a+bi)+[-\alpha(a+bi)]=0$. Então $\alpha(a+bi)+(-\alpha)(a+bi)=\alpha(a+bi)+[-\alpha(a+bi)]$. Somando $-\alpha(a+bi)$ aos dois membros, teremos:

$$\begin{aligned}
-\alpha(a+bi)+\alpha(a+bi)+(-\alpha)(a+bi) &= \alpha(a+bi)+[-\alpha(a+bi)]+[-\alpha(a+bi)]\\
(-\alpha+\alpha)(a+bi)+(-\alpha)(a+bi) &= [\alpha+(-\alpha)](a+bi)+[-\alpha(a+bi)]\\
(-\alpha)(a+bi) &= -\alpha(a+bi)
\end{aligned}$$

□

Uma outra forma seria:

$$\begin{aligned}
\alpha[-(a+bi)]+\alpha(a+bi) &= \alpha\{[-(a+bi)+(a+bi)]\}\\
&= \alpha 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

Então,

$$\alpha[-(a+bi)]=-\alpha(a+bi)=(-\alpha)(a+bi)$$

P5 - $(\alpha-\beta)(a+bi)=\alpha(a+bi)-\beta(a+bi),\ \forall\ \alpha,\ \beta,\ a$ e $b\in\mathbb{R}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(\alpha-\beta)(a+bi) &= [\alpha+(-\beta)](a+bi)\\
&= [\alpha+(-\beta)]a+[\alpha+(-\beta)]bi\\
&= \alpha a+(-\beta)a+\alpha bi+(-\beta)bi\\
&= \alpha a+\alpha bi+(-\beta)a+(-\beta)bi\\
&= \alpha(a+bi)-\beta(a+bi)
\end{aligned}$$

□

P6 - $\alpha\,[(a+bi)-(c+di)] = \alpha(a+bi)-\alpha(c+di),\ \forall\ \alpha, a, b, c \text{ e } d\ \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\alpha\,[(a+bi)-(c+di)] &= \alpha\{(a+bi)+[-(c+di)]\}\\
&= \alpha(a+bi)+\alpha[-(c+di)]\\
&= \alpha(a+bi)+[-\alpha(c+di)]\\
&= \alpha(a+bi)-\alpha(c+di)
\end{aligned}$$

□

P7 - Dados $\beta; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n\ \in \mathbb{R}$, então:

$$\beta\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(a_j+b_ji)\right) = \sum_{j=1}^{n}(\beta\alpha_j)(a_j+b_ji)$$

Demonstração: Aplicando as propriedades (ME1) e (ME3):

$$\begin{aligned}
\beta\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(a_j+b_ji)\right) &= \beta\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_ja_j+\alpha_jb_ji\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\beta\left(\alpha_ja_j+\alpha_jb_ji\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\beta\alpha_ja_j+\beta\alpha_jb_ji\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\beta\alpha_j\right)\left(a_j+b_ji\right)
\end{aligned}$$

□

P8 - O número complexo nulo de um espaço vetorial $\mathbb{C}$ é único.

Demonstração: Ver (3.1.7).

P9 - Para cada número complexo de um espaço vetorial $\mathbb{C}$ existe um único número complexo $-(a+bi)$, oposto de $a+bi$.

Demonstração: Ver (3.1.8).

P10 - Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $-[-(a+bi)] = a+bi$.

Demonstração: Pela propriedade (A1) temos que $[-(a+bi)] + (a+bi) = (a+bi) + [-(a+bi)] = 0$. Então, $a+bi$ é o oposto de $-(a+bi)$. □

P11 - (Lei do cancelamento da adição) Se $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e $(a+bi)+(c+di) = (a+bi)+(e+fi)$, então $c+di = e+fi$.

Demonstração: Somando $-(a+bi)$ à igualdade da hipótese:

$$\begin{aligned}
[-(a+bi)] + [(a+bi)+(c+di)] &= [-(a+bi)] + [(a+bi)+(e+fi)] \\
[-(a+bi)+(a+bi)] + (c+di) &= [-(a+bi)] + (a+bi) + (e+fi) \\
\{[-(a+bi)] + (a+bi)\} + (c+di) &= \{[-(a+bi)] + (a+bi)\} + (e+fi) \\
0 + (c+di) &= 0 + (e+fi) \\
c+di &= e+fi
\end{aligned}$$

□

3.3 Multiplicação de números complexos

A multiplicação de dois números complexos pode ser realizada empregando a propriedade distributiva da multiplicação, análoga para os números reais.

Tomando como exemplo dois complexos $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$, temos:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)\cdot(c+di) \\
&= ac + adi + bci + bdi^2 && \text{Prop (3.1.2)} \\
&= ac + adi + bci - bd \\
&= (ac-bd) + (ad+bc)i
\end{aligned}$$

Dessa forma, a definição de multiplicação de dois números complexos pode ser representada da seguinte forma:

Definição 3.3.1

$$\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
[(a+bi),(c+di)] &\longmapsto (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i
\end{aligned}$$

3.3.1 Propriedades da multiplicação de números complexos

M1 - **Propriedade associativa**

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(a+bi)(c+di)](e+fi) \\
&= [(ac-bd)+(ad+bc)i](e+fi) \\
&= [(ac-bd)e-(ad+bc)f]+[(ac-bd)f+(ad+bc)e]i \\
&= [ace-bde-adf-bcf]+[acf-bdf+ade+bce]i \\
&= [a(ce-df)-b(cf+de)]+[a(cf+de)+b(ce-df)]i \\
&= (a+bi)[(ce-df)+(cf+de)]i \\
&= (a+bi)[(c+di)(e+fi)] \\
&= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)
\end{aligned}$$

□

M2 - **Propriedade comutativa**

$$z_1 \cdot z_2 = z_z \cdot z_1, \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)\cdot(c+di) \\
&= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
&= (ca-db)+(da+cb)i \\
&= (c+di)\cdot(a+bi) \\
&= z_2 \cdot z_1
\end{aligned}$$

□

M3 - **Existência do elemento neutro**

Existe um número complexo e_m, tal que $z \cdot e_m = z, \forall\, z \in \mathbb{C}$

Demonstração: Fazendo $z = a+bi$, provemos que existe $e_m = c+di$, tal que $z \cdot e_m = z$:

$$\begin{aligned}
(a+bi)\cdot(c+di) = (a+bi) \quad &\Leftrightarrow \quad (ac-bd)+(ad+bc)i = (a+bi)\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ac - bd = a \\ ad + bc = b \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\square$

Portanto, existe $e_m = (1+0i)$ chamado *elemento neutro* para a multiplicação. Esse valor indica a unidade para os números complexos e é o elemento neutro para a multiplicação na estrutura algébrica dos números reais e dos números complexos.

M4 - **Existência do elemento inverso**

Para cada número complexo $z \in \mathbb{C} - \{(0,0)\}$, existe um número complexo $z" \in \mathbb{C}$, tal que $z \cdot z" = e_m$.

Demonstração: Fazendo $z = (a+bi)$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, provemos que existe $z" = (c+di)$ tal que $z \cdot z" = e_m$.

$$\begin{aligned}
(a+bi)\cdot(c+di) = (1+0i) \quad &\Leftrightarrow \quad (ac-bd)+(ad+bc)i = (1+0i)\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad c = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{e} \quad d = \frac{-b}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

$\square$

Portanto, existe $z" = \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right)$ chamado *inverso* ou *inverso multiplicativo* de z, que multiplicado por $z = (a+bi)$, resulta em $e_m = (1+0i)$. Observemos que a condição $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, equivale a $a^2+b^2 \neq 0$ e isso garante a existência de $z"$.

Divisão

Decorre da propriedade (M4), que dados os complexos $z_1 = (a+bi) \neq (0+0i)$ e $z_2 = (c+di)$, existe um único $z \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 \cdot z = z_2$. Sendo assim, $z = z_2 \cdot z_1^{"}$.

Demonstração: Tomando $z = (a+bi),\ z_1 = (c+di) \neq (0+0i)$ e $z_2 = (e+fi)$:

$$z_1 \cdot z = z_2 \quad \Rightarrow \quad (c+di)\cdot(a+bi) = (e+fi)$$

Multiplicando ambos os membros da equação pelo inverso multiplicativo de z_1, representado por $z_1^{"} = \dfrac{c}{c^2+d^2} - \dfrac{d}{c^2+d^2}i$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right)\cdot(c+di)\cdot(a+bi) &= (e+fi)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) \\
\left[\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right)\cdot(c+di)\right]\cdot(a+bi) &= (e+fi)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) \qquad (M4) \\
(1+0i)\cdot(a+bi) &= (e+fi)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) \\
(a+bi) &= (e+fi)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right)
\end{aligned}$$

Esse número z é chamado *quociente* entre z_2 e z_1 e é indicado por $\dfrac{z_2}{z_1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{z_2}{z_1} = z_2 \cdot z_1^{"} &= (e+fi)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) \\
&= \frac{ec}{c^2+d^2} - \frac{ed}{c^2+d^2}i + \frac{fc}{c^2+d^2}i - \frac{fd}{c^2+d^2}i^2 \\
&= \frac{ec}{c^2+d^2} + \frac{fd}{c^2+d^2} - \frac{ed}{c^2+d^2}i + \frac{fc}{c^2+d^2}i \\
&= \left(\frac{ec+fd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{fc-ed}{c^2+d^2}\right)i
\end{aligned}$$

Propriedade distributiva

No conjunto $\mathbb{C}$, a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$z_1\cdot(z_2+z_3) = z_1\cdot z_2 + z_1\cdot z_3\,, \quad \forall\ z_1, z_2, z_3\ \in \mathbb{C}$$

Demonstração: Tomando $z_1 = (a+bi),\ z_2 = (c+di)$ e $z_3 = (e+fi)$:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a+bi)[(c+di)+(e+fi)] \\
&= (a+bi)[(c+e)+(d+f)i] \\
&= [a(c+e)-b(d+f)] + [a(d+f)+b(c+e)]\,i \\
&= [ac+ae-bd-bf] + [ad+af+bc+be]\,i \\
&= [(ac-bd)+(ae-bf)] + [(ad+bc)+(af+be)]i \\
&= [(ac-bd)+(ad+bc)i] + [(ae-bf)+(af+be)]i \\
&= (a+bi)(c+di) + (a+bi)(e+fi) \\
&= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3
\end{aligned}$$

□

3.4 Subespaço vetorial dos números complexos

Definição 3.4.1 *Um subespaço vetorial de $\mathbb{C}$ é um subconjunto $A \subset \mathbb{C}$, tal que:*

a) $0 \in A$;

b) $\forall\, a+bi,\ c+di \in A,\ (a+bi)+(c+di) \in A$; *e*

c) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\, a+bi \in A,\ \alpha(a+bi) \in A$.

Proposição 3.4.2 *Se A é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}$, então A também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demonstração: O subconjunto A deve satisfazer às oito condições sobre espaço vetorial. Contudo, temos que $a+bi \in A \Rightarrow -(a+bi) \in A$, e de c), temos $\alpha = -1$. □

Observação: Para todo espaço vetorial 0 e $\mathbb{C}$ são subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{C}$ e são chamados de subespaços vetoriais triviais. [4]

Exemplo 3.4.3 *O conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}$, isto é $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.*

a) $0 + 0i = 0$, *nesse caso* $a = b = 0 \in \mathbb{R}$*;*

b) $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R},\ a + b \in \mathbb{R}$*; e*

c) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \alpha a \in \mathbb{R}$*.*

A condição a) da Definição (3.4.1), nos mostra que $0 \in A$ é elemento de $\mathbb{C}$. Percebe-se ainda que são satisfeitas todas as propriedades em relação a multiplicação por escalar, assim como as de associatividade e de comutatividade da adição. Desse modo, concluímos que o conjunto $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exemplo 3.4.4 *O conjunto dos números imaginários puros,* $\mathbb{I} = \{\alpha i \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ *é um subespaço de* $\mathbb{C}$*, no qual* $\mathbb{I} \subset \mathbb{C}$*.*
a) $0 \in \mathbb{I}$*. Pois,* $\alpha i = 0$ *para* $\alpha = 0$
b) $\forall\ \alpha i,\ \beta i \in \mathbb{I},\ \alpha i + \beta i \in \mathbb{I}$*;*
c) $\forall\ \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\ \alpha i \in \mathbb{I},\ \beta\alpha i \in \mathbb{I}$*.*

3.5 Base dos números complexos

Definição 3.5.1 *Uma combinação linear dos números complexos* $z_1, ..., z_k \in \mathbb{C}$ *é uma expressão da forma* $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 +\ \ldots,\ \lambda_k z_k$*, onde* $\lambda_k \in \mathbb{R}$*.*

Exemplo 3.5.2 *Observe que* $6 + i$ *é uma combinação linear dos números* $(1 + 4i)$ *e* $2 - i$*, pois* $6 + i = 2(1 + 4i) + 3(2 - i)$*.*

Definição 3.5.3 *Dado um conjunto* $A \subset \mathbb{C}$*, o subespaço gerado por* A*, denotado por* $[A]$ *é o conjunto de todas as combinações lineares dos números complexos de* A*.* $[A]$ *é chamado subespaço de* $\mathbb{C}$ *gerado por* A *.*

Exemplo 3.5.4 $[\{1, i\}] = \mathbb{C}$*.*

De fato, como qualquer combinação linear de número complexo é um número complexo, segue que $[\{1, i\}] \subset \mathbb{C}$*.*

Seja $(a + bi) \in \mathbb{C}$*, então* $(a + bi) = a(1 + 0i) + b(0 + 1i)$*, assim* $(a + bi) \in [\{1, i\}]$*.*

Portanto, $[\{1, i\}] = \mathbb{C}$*.*

Exemplo 3.5.5 *$A = \{i\}$, então $[A] = \{\alpha i,\ \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{I}$.*

Definição 3.5.6 *Um conjunto de números complexos $A = \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ é dito linearmente independente (LI) se $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ \ldots,\ \lambda_k z_k = 0$, se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$. Caso contrário, A é chamado de linearmente dependente (LD).*

Exemplo 3.5.7 *Considere o conjunto $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$. Mostremos que é LI.*

Se,

$$\begin{aligned} \alpha(1+0i) + \beta(0+1i) &= (0+0i) \\ \alpha + \alpha 0i + \beta 0 + \beta 1i &= 0+0i \\ \alpha + \beta i &= 0+0i \end{aligned}$$

então, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Portanto, o conjunto $\{1, i\}$ é linearmente independente.

Definição 3.5.8 *Uma base de $\mathbb{C}$ é um subconjunto finito $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes condições:*
a) $[A] = \mathbb{C}$.
b) A é linearmente independente.

Teorema 3.5.9 (Teorema da invariância) *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Então, duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de vetores.*

Definição 3.5.10 *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Denomina-se* dimensão de V *o número de vetores de uma qualquer de suas bases. Neste caso, diz-se que é um* espaço de dimensão finita *.*

De acordo com os exemplos anteriores, o subconjunto $\{1, i\}$ é uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. Portanto, os números complexos tem dimensão 2, que é o número de elementos de sua base.

3.6 Produto interno em $\mathbb{C}$

Definição 3.6.1 *Um* produto interno *sobre $\mathbb{C}$ é uma aplicação que transforma cada par ordenado de números complexos $(a+bi, c+di) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ em um número real $\langle (a+bi), (c+di) \rangle$ que satisfaz as seguintes condições:*

a) $\langle (a+bi)+(c+di),(e+fi)\rangle = \langle (a+bi),(e+fi)\rangle + \langle (c+di),(e+fi)\rangle$,
$\forall\ a+bi,\ c+di,\ e+fi \in \mathbb{C}$;

b) $\langle \alpha(a+bi),(c+di)\rangle = \alpha \langle (a+bi),(c+di)\rangle$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\ a+bi,\ c+di \in \mathbb{C}$;

c) $\langle (a+bi),(c+di)\rangle = \langle (c+di),(a+bi)\rangle$, $\forall\ a+bi,\ c+di \in \mathbb{C}$; e

d) $\langle (a+bi),(a+bi)\rangle \geq 0$ e $\langle (a+bi),(a+bi)\rangle = 0$ se, e somente se $a+bi=0$. [4]

Demonstração:

a) $\langle (a+bi)+(c+di),(e+fi)\rangle = ((a+c)e+(b+d)f) =$
$(ae+bf)+(ce+df) = \langle (a+bi),(e+fi)\rangle + \langle (c+di),(e+fi)\rangle$.

b) $\langle \alpha(a+bi),(c+di)\rangle = \alpha a(c)+\alpha b(d) = \alpha(ac+bd) = \alpha \langle (a+bi),(c+di)\rangle$.

c) $\langle (a+bi),(c+di)\rangle = (ac+bd) = (ca+db) = \langle (c+di),(a+bi)\rangle$.

d) $\langle (a+bi),(a+bi)\rangle = a.a+b.b = a^2+b^2 \geq 0$ e $\langle (a+bi),(a+bi)\rangle = a^2+b^2 = 0$ se, e somente se $a+bi=0$. □

Proposição 3.6.2 $\langle (a+bi),(c+di)\rangle = (ac)+(bd)$, *define um produto interno em* $\mathbb{C}$.

Desse ponto em diante, usaremos o produto interno definido na proposição (3.6.2).

Definição 3.6.3 *Um espaço vetorial real munido de um produto interno é chamado de espaço euclidiano.*

3.6.1 Propriedade dos produtos internos

PI1 - $\langle 0,(a+bi)\rangle = \langle (a+bi),0\rangle = 0,\ \forall\ a,b \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sabemos que $0(a+bi)=0,\ \forall\ a,b\in\mathbb{R}$. Logo:

$$\langle 0,(a+bi)\rangle = 0a+0b = 0+0 = 0$$

□

PI2 - $\langle (a+bi), \alpha(c+di)\rangle = \alpha \left\langle (a+bi), (c+di)\right\rangle, \ \forall\ \alpha, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Demonstração:
$$\begin{aligned}\langle (a+bi), \alpha(c+di)\rangle &= \langle (a+bi), \alpha c + \alpha d i\rangle \\ &= a(\alpha c) + b(\alpha d) \\ &= \alpha\,(ac+bd) \\ &= \alpha \left\langle (a+bi), (c+di)\right\rangle\end{aligned}$$

□

PI3 - $\langle (a+bi), (c+di)+(e+fi)\rangle = \langle (a+bi), (c+di)\rangle + \langle (a+bi), (e+fi)\rangle, \ \forall\ a,\ b,\ c,\ d,$ $e,\ f \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}\langle (a+bi), (c+di)+(e+fi)\rangle &= \langle (a+bi), (c+e)+(d+f)i\rangle \\ &= a(c+e)+b(d+f) \\ &= ac+ae+bd+bf \\ &= (ac+bd)+(ae+bf) \\ &= \langle (a+bi), (c+di)\rangle + \langle (a+bi), (e+fi)\rangle\end{aligned}$$

□

PI4 - Dado um número inteiro $n \geq 1$,

$$\left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (a_k + b_k i), (c+di) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left\langle (a_k+b_k i), (c+di)\right\rangle$$

Demonstração: Utilizando as propriedades (PI2) e (PI3).

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (a_k + b_k i), (c+di) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \alpha_k b_k i), (c+di) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k i), (c+di) \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k c + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k d \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (a_k c + b_k d)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle a_k + b_k i, (c + di) \rangle$$

□

PI5 - $\left\langle (a+bi), \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (c_k + d_k i) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle (a+bi), (c_k + d_k i) \rangle \quad (n \geq 1).$

Demonstração: Utilizando as propriedades (PI2) e (PI3).

$$\begin{aligned} \left\langle (a+bi), \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (c_k + d_k i) \right\rangle &= \left\langle (a+bi), \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k d_k i \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k a + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k d_k b \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (c_k a + d_k b) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle (a+bi), (c_k + d_k i) \rangle \end{aligned}$$

□

PI6 - $\left\langle \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (a_j + b_j i), \sum_{k=1}^{n} \beta_k (c_k + d_k i) \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \beta_k \langle (a_j + b_j i), (c_k + d_k i) \rangle.$

Demonstração: Utilizando as propriedades (PI4) e (PI5).

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (a_j + b_j i), \sum_{k=1}^{n} \beta_k (c_k + d_k i) \right\rangle &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \left\langle (a_j + b_j i), \sum_{k=1}^{n} \beta_k (c_k + d_k i) \right\rangle && \text{(P4)} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j \beta_k \langle (a_j + b_j i), (c_k + +d_k i) \rangle && \text{(P5)} \end{aligned}$$

□

3.7 Conjugado

Chama-se *conjugado* do número complexo $z = a + bi$ ao número complexo $\overline{z} = a - bi$, isto é:

$$z = a + bi \Longleftrightarrow \overline{z} = a - bi \qquad (1.7)$$

O complexo conjugado de $\overline{z}$ é z: $\overline{(\overline{z})} = \overline{(a - b \cdot i)} = a + bi = z$

Diz-se, então, que z e $\overline{z}$ são números *complexos conjugados*.

3.7.1 Propriedades do conjugado

Para todo $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos:

C1 - $z + \overline{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$

Demonstração: $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a + 0i = 2 \cdot \text{Re}(z)$

C2 - $z - \overline{z} = 2 \cdot \text{Im}(z) \cdot i$

Demonstração: $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = (a - a) + [b - (-b)]i = 0 + 2bi = 2 \cdot \text{Im}(z)i$

C3 - $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Demonstração: $z = \overline{z} \Longleftrightarrow (a + bi) = (a - bi) \Leftrightarrow a = a$ ou $b = -b$. A segunda igualdade só será satisfeita para $b = 0$. Nesse caso, o complexo não terá a parte imaginária, restando apenas a parte real.

C4 - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$:

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} \\
&= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\
&= (a + c) - (b + d)i \\
&= (a - bi) + (c - di) \\
&= \overline{(a + bi)} + \overline{(c + di)} \\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}
\end{aligned}$$

De maneira análoga, pode-se mostrar que $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

C5 - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a+bi)(c+di)} \\
&= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} \\
&= (ac-bd)-(ad+bc)i \\
&= (ac-bd)+(-ad-bc)i \\
&= (a-bi)(c-di) \\
&= \overline{(a+bi)} \cdot \overline{(c+di)} \\
&= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}
\end{aligned}$$

□

C6 - $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
z \cdot \bar{z} &= (a+bi)(a-bi) \\
&= [a^2 - (-b^2)] + (-ab+ab)i \\
&= [a^2 + b^2] + 0i \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

Observação: Pela definição de produto interno e pela propriedade (C6) segue que, $z \cdot \bar{z} = \langle z, z \rangle$.

Conjugado na divisão

Dados $z_1 = a + bi \neq 0$ e $z_2 = c + di$, temos: $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{c+di}{a+bi}$. Aplicando o conjugado de z_1 de maneira idêntica a racionalização dos números reais e aplicando (C6) ao denominador, temos

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(ca+db)+(-cb+da)i}{a^2+b^2} = \frac{ca+db}{a^2+b^2} + \frac{da-cb}{a^2+b^2}i$$

Isto é, para calcular $\dfrac{z_2}{z_1}$ basta multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

Proposição 3.7.1 *Se $z_2 \neq 0$, então* $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Demonstração: Seja $z_2 = c + di$, então

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1 \cdot \left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{c - di}{c^2 + d^2}\right)} =$$

$$\overline{z_1} \cdot \left(\frac{c + di}{c^2 + d^2}\right) = \overline{z_1} \cdot \left(\frac{z_2}{z_2 \cdot \overline{z_2}}\right) = \overline{z_1} \cdot \left(\frac{1}{\overline{z_2}}\right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

□

3.8 Norma

Definição 3.8.1 *Seja* V *um espaço euclidiano com o produto interno $(u, v) \to \langle u, v \rangle$. Dado um vetor $u \in V$ indica-se por $\|u\|$ e chama-se* norma de u *o número real positivo dado por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$*

Em particular, o produto interno em $\mathbb{C}$ dado por

$$((a + bi), (c + di)) \mapsto \langle (a + bi), (c + di) \rangle = ac + bd$$

temos que

$$\|(a + bi)\| = \sqrt{\langle (a + bi), (a + bi) \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Definição 3.8.2 *Denomina-se* módulo *do número complexo $a + bi$, o número real $\sqrt{a^2 + b^2}$ denotado por $|a + bi|$.*

Observe que $|a + bi|^2 = a^2 + b^2 = \langle (a + bi), (a + bi) \rangle$.

Se z é um número real, então o módulo de z, por definição, coincide com o módulo de z como elemento de $\mathbb{R}$, pois

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = x + 0 \cdot i \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

3.8.1 Propriedades do módulo

Seja $z = a + bi$, $z_1 = c + di$, $z_2 = e + fi$, então

a) $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|\alpha z| = |\alpha||z|$

c) $|z| = |\overline{z}|$

d) $\text{Re}(z) \leq |\text{Re}(z)| \leq |z|$

e) $\text{Im}(z) \leq |\text{Im}(z)| \leq |z|$

f) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

g) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$

Demonstração:

a) $|(a + bi)| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |(a+bi)| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a = b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a + bi = 0 \end{aligned}$$

b) $|\alpha(a + bi)| = |\alpha||(a + bi)|, \ \forall\ \alpha, \ a$ e $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\alpha(a+bi)| &= |(\alpha a) + (\alpha b)i| \\ &= \sqrt{(\alpha a)^2 + (\alpha b)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2(a^2+b^2)} \\ &= |\alpha|\sqrt{(a^2+b^2)} \\ &= |\alpha||(a+bi)| \end{aligned}$$

c) $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b^2)} = |a - bi| = |\overline{z}|$

d) Temos que, $\text{Re}(z) = a \leq |a| = |\text{Re}(z)|$. Como $a^2 \leq a^2 + b^2$, então, $|\text{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Portanto, $\text{Re}(z) \leq |\text{Re}(z)| \leq |z|$.

e) Observe que, $\text{Im}(z) = b \leq |b| = |\text{Im}(z)|$. Como $b^2 \leq a^2 + b^2$, então, $|\text{Im}(z)| = |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. Portanto, $\text{Im}(z) \leq |\text{Im}(z)| \leq |z|$.

f)
$$\begin{aligned} |(a+bi)(c+di)|^2 &= |(ac-bd)+(ad+bc)i|^2 \\ &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 \\ &= (ac)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2) \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \end{aligned}$$

Então, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

g) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \left|\dfrac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \left|\dfrac{\overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}\right| = |z_1| \cdot \left|\dfrac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|^2} \cdot |\overline{z_2}| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|^2} \cdot |z_2| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

□

Proposição 3.8.3 (Desigualdade de Cauchy-Shwarz) *No espaço euclidiano $\mathbb{C}$, temos*

$$|\langle (a+bi), (c+di) \rangle| \leq |(a+bi)||(c+di)|, \ \forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Demonstração: Se $(c+di) = 0$, então $\langle (a+bi), (c+di) \rangle = 0$ e $|(a+bi)||(c+di)| = 0$. Logo, tem-se uma igualdade neste caso. Suponhamos $(c+di) \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, vale a desigualdade $|(a+bi) + \alpha(c+di)|^2 \geq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 \leq |(a+bi)+\alpha(c+di)|^2 &= \langle (a+bi)+\alpha(c+di), (a+bi)+\alpha(c+di) \rangle \\ &= \langle (a+bi), (a+bi) \rangle + \langle (a+bi), \alpha(c+di) \rangle + \\ &\quad\ \langle \alpha(c+di), (a+bi) \rangle + \langle \alpha(c+di), \alpha(c+di) \rangle \\ &= |(a+bi)|^2 + \alpha \langle (a+bi), (c+di) \rangle + \\ &\quad\ \alpha \langle (c+di), (a+bi) \rangle + \alpha^2 |(c+di)|^2 \\ &= |(c+di)|^2 \alpha^2 + 2 \langle (a+bi), (c+di) \rangle \alpha + |(a+bi)|^2 \end{aligned}$$

Obtemos, assim, um trinômio do segundo grau em α (pois $|(c+di)|^2 \neq 0$), o qual é sempre positivo. Logo, seu discriminante deve ser negativo ou nulo:

$$4\,\langle (a+bi),(c+di)\rangle^2 - 4|(c+di)|^2|(a+bi)|^2 \leq 0$$

Portanto,

$$\langle (a+bi),(c+di)\rangle^2 \leq |(a+bi)|^2|(c+di)|^2$$

Finalmente, considerando a raiz positiva de cada um dos membros desta última igualdade,

$$\langle (a+bi),(c+di)\rangle \leq |(a+bi)||(c+di)|$$

□

Corolário 3.8.4 (Desigualdade triangular) *No espaço euclidiano $\mathbb{C}$, vale a seguinte desigualdade*

$$|(a+bi)+(c+di)| \leq |(a+bi)| + |(c+di)|,\ \forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
|(a+bi)+(c+di)|^2 &= \langle (a+bi)+(c+di),(a+bi)+(c+di)\rangle \\
&= \langle (a+bi),(a+bi)\rangle + \langle (a+bi),(c+di)\rangle + \\
&\quad \langle (c+di),(a+bi)\rangle + \langle (c+di),(c+di)\rangle \\
&= |(a+bi)|^2 + 2\,\langle (a+bi),(c+di)\rangle + |(c+di)|^2 \\
&\leq |(a+bi)|^2 + |(c+di)|^2 + 2|(a+bi),(c+di)| \\
&= (|(a+bi)| + |(c+di)|)^2
\end{aligned}$$

Desta desigualdade, decorre que

$$|(a+bi)+(c+di)| \leq (|(a+bi)| + |(c+di|),\ \forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

□

3.9 Distância

Definição 3.9.1 *A aplicação* $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *definida como a distância de* $(a+bi)$ *até* $(c+di)$ *é dada por* $d(a+bi, c+di) = |(a+bi)-(c+di)|$, $\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Notemos que valem as seguintes propriedades:

D1 - $d(a+bi, c+di) \geq 0$ e $d(a+bi, c+di) = 0 \Leftrightarrow a+bi = c+di, \;\; \forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$

Demonstração: Aplicando a) da propriedade (3.8.1), segue que $d(a+bi, c+di) = |(a+bi)-(c+di)| = |(a-c)+(b-d)i| \geq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} d(a+bi, c+di) = 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; |(a+bi)-(c+di)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \;\; (a+bi)-(c+di) = 0 \\ &\Leftrightarrow \;\; a+bi = c+di \end{aligned}$$

$\square$

D2 - $d(a+bi, c+di) = d(c+di, a+bi)$, $\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$:

Demonstração: $d(a+bi, c+di) = |(a+bi)-(c+di)| = |(-1)[(c+di)-(a+bi)]| = |-1||(c+di)-(a+bi)| = d(c+di, a+bi)$ $\square$

D3 - $d(a+bi, c+di) \leq d(a+bi, e+fi) + d(e+fi, c+di)$, $\forall\, a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$:

Demonstração:

$$\begin{aligned} d(a+bi, c+di) \;\; &= \;\; |(a+bi)-(c+di)| \\ &= \;\; |(a+bi)-(e+fi)+(e+fi)-(c+di)| \\ &\leq \;\; |(a+bi)-(e+fi)| + |(e+fi)-(c+di)| \\ &= \;\; d(a+bi, e+fi) + d(e+fi, c+di) \end{aligned}$$

$\square$

3.10 Argumento

Definição 3.10.1 *Chama-se* argumento *de um número complexo $z = a + bi$, não nulo, ao ângulo θ tal que*

$$a = |z|cos\theta \quad e \quad b = |z|sen\theta \tag{3.3}$$

Podemos observar que:

1. Quando o número complexo $z \neq 0$ temos $|z| \neq 0$.

2. Há ao menos um ângulo θ correspondendo à definição, pois

$$cos^2\theta + sen^2\theta = \left(\frac{a}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{b}{|z|}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{|z|^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

3. Estabelecendo $z \neq 0$, ficam fixados $cos\theta$ e $sen\theta$, com o ângulo θ assumindo infinitos valores, congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Desse modo, o número complexo $z \neq 0$ indicado por

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k \in Z,$$

em que θ_0, chamado *argumento principal* de z, é tal que $a = |z|cos\theta_0,\ b = |z|sen\theta_0$ e $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. [8]

Para exemplos veja ([8], p.20).

3.11 Plano de Argand-Gauss

Quando trabalhamos com módulo e argumento a representação dos números complexos $z = a+bi = (a, b)$ fica mais evidente ao utilizarmos o plano cartesiano xOy, marcando sobre o eixo Ox a parte real; e sobre o eixo Oy, a parte imaginária. Dessa forma, a cada número complexo $z = (a, b)$ é associado a um único ponto P do plano xOy.

Observe na figura abaixo que o plano xOy é o *plano de Argand-Gauss*, enquanto que Ox corresponde ao eixo real, Oy ao eixo imaginário, assim como P, ao afixo de z.

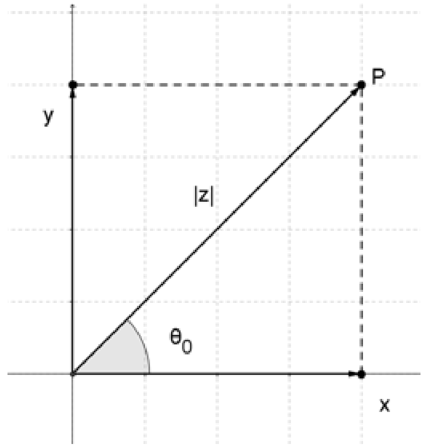

Figura 3.1: Plano de Argand-Gauss.

Podemos ver que a distância entre O e P corresponde ao módulo de z, ou seja, $OP = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$; e o ângulo θ_0 formado por este segmento e pelo eixo real, corresponde ao argumento principal de z, tal que $a = |z|cos\theta_0,\ b = |z|sen\theta_0$. [8]

3.12 Forma trigonométrica

A partir de um número complexo $z = a + bi$ não nulo, podemos observar que

$$z = a + bi = |z| \cdot \left(\frac{a}{|z|} + i \cdot \frac{b}{|z|} \right)$$

e, aplicando (3.3), temos

$$z = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

que é chamada *forma trigonométrica* ou *polar* de z.

Para exemplo consulte ([6], p.27).

A forma trigonométrica é mais prática que a forma algébrica para as operações de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$.

Proposição 3.12.1 *Se θ é o argumento do número complexo $a+bi$, então, $-\theta$ é o argumento do seu conjugado.*

Demonstração: Seja $a = |z|cos\theta$ e $b = |z|sen\theta$. Então,

$$\overline{z} = a - bi = |z|cos\theta - |z|sen\theta i = |z|(cos\theta - sen\theta i) = |\overline{z}|(cos(-\theta) + sen(-\theta)i$$

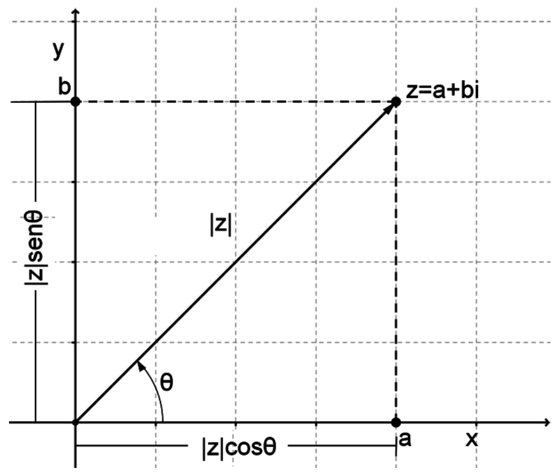

Figura 3.2: Argumento principal θ de $z = a + bi \neq 0$.

Portanto, $arg(\overline{z}) = -\theta$ □

Proposição 3.12.2 *A soma (e a diferença) de dois números complexos pode ser obtida somando-se (e subtraindo-se) os vetores que os representam.*

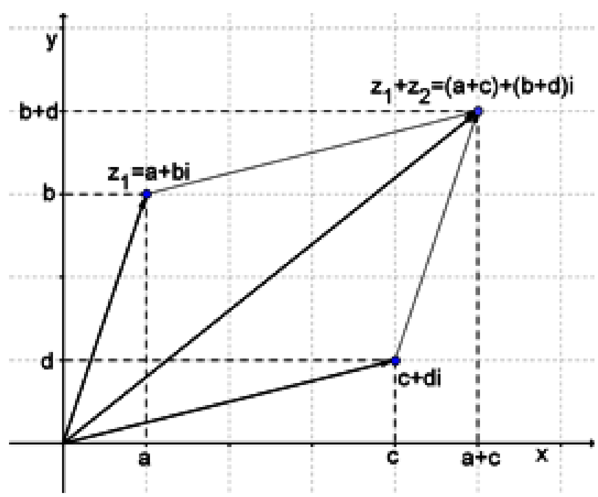

Figura 3.3: Soma de dois números complexos.

Com efeito, se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\, i$, representado pelo vetor $(a + c\ ,\ b + d) = (a, b) + (c, d)$ sendo a soma dos vetores que representam z_1 e z_2.

Do exposto acima decorrem dois fatos:

1. Para números complexos vale a desigualdade triangular,
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$
Realmente, se os vetores que representam z_1 e z_2 não têm a mesma direção, para somá-los formamos um triângulo com lados $|z_1|$, $|z_2|$ e $|z_1 + z_2|$. Como em um triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois, e maior que a diferença dos outros dois,
$$||z_1| - |z_2|| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$$
Se os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido, ocorre que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Se têm a mesma direção e sentido opostos, ocorre $||z_1| - |z_2|| = |z_1 + z_2|$. Portanto, em qualquer caso,
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$
2. Se z_1 e z_2 são números complexos, a distância entre eles é igual a $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$. A distância entre dois números complexos é igual ao módulo de sua diferença, [9].

Teorema 3.12.3 *Se $z_1 = |z_1|(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, então*
a) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left[cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + isen\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right]$
b) Se $|z_2| \neq 0$, então $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\left[cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + isen\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right]$

Demonstração:

a)
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot |z_2|(cos\theta_2 + isen\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|\left[(cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2) + (cos\theta_1 sen\theta_2 + cos\theta_2 sen\theta_1)i\right] \\ &= |z_1||z_2|\left[cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + sen\left(\theta_1 + \theta_2\right)i\right] \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \\ &= \frac{|z_1||\overline{z_2}|}{|z_2|^2}\left[cos(\theta_1 - \theta_2) + sen(\theta_1 - \theta_2)i\right] \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + sen\left(\theta_1 - \theta_2\right)i\right] \end{aligned}$$

Observe que:
$$arg(z_1 \cdot z_2) = argz_1 + argz_2 \quad \text{e}$$
$$arg\frac{z_1}{z_2} = argz_1 - argz_2.$$
Para maiores detalhes ver [9].

Capítulo 4

Polinômios

4.1 Função polinomial ou polinômio

Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$, consideremos a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. A função f é denominada *função polinomial* ou *polinômio* associado à sequência dada, ([8],p.54).

Uma função polinomial com um único termo é denominada *função monomial* ou *monômio*.

Um polinômio $f(x)$ com coeficientes em $\mathbb{R}$ apresenta a seguinte expressão:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ ... \ + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

no qual $n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n$.

Os elementos $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n)$ são denominados *coeficientes* e as parcelas $a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ ...,\ a_nx^n$ são chamadas *termos* do polinômio $f(x)$, e cada termo $a_ix^i,\ a_i \neq 0$ é um *monômio de grau i* do polinômio *f(x)*. O coeficiente a_0 é chamado de *termo constante*, [6].

4.1.1 Polinômio nulo

Dizemos que um polinômio $f(x)$ é nulo (ou *identicamente nulo*) quando $f(x)$ assume o valor numérico zero para todo x complexo. Em símbolos, indicamos:

$$f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{C}$$

Teorema 4.1.1 *Um polinômio $f(x)$ é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de $f(x)$ forem nulos. Sendo $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, temos:*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 ... = a_n = 0$$

Ver demonstração em ([8], p.48).

4.1.2 Polinômios idênticos

Dizemos que dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ são *iguais* (ou *idênticos*) quando assumem valores numéricos iguais para todo x complexo. Em símbolos, indicamos:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x),\ \forall\, x \in \mathbb{C}$$

Teorema 4.1.2 *Dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ são iguais se, e somente se, os coeficientes de* f *e* g *forem ordenadamente iguais. Sendo*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \quad e$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

temos:

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Demonstração: Para todo $x \in \mathbb{C}$, temos:

$$a_i = b_i \Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i - \sum_{i=0}^{n} b_ix^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$\square$

4.2 Raízes

Dados o número complexo a e o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, chama-se *valor numérico de f em a* a imagem de a pela função f, isto é:

$$f(a) = a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_na_n$$

Em particular, se a é um número complexo e f é um polinômio tal que $f(a) = 0$, dizemos que a é uma *raiz* ou um zero de f.

Exemplo 4.2.1 *Verificar se os números* $-2, -1$ *e* 1*, são raízes de* $f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$.

$$\begin{array}{rcccl} f(-2) & = & 2(-2)3(-2)^2 + (-2)^3 & = & 0 \\ f(-1) & = & 2(-1) + 3(-1)^2 + (-1)^3 & = & 0 \\ f(1) & = & 2(1) + 3(1)^2 + (1)^3 & = & 6 \end{array}$$

Portanto, os números $-2, -1$ *são raízes de* $f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$.

4.3 Os polinômios ($\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$) como $\mathbb{R}$-espaço vetorial

Definimos $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ como sendo o conjunto de todos os polinômios com grau menor ou igual a n.

4.3.1 Adição de polinômios

Sejam dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \quad \text{e}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$$

Suponhamos que $m \geq n$, então, $a_i = 0$ para $i > n$.

Chama-se *soma* de $f(x)$ com $g(x)$ o polinômio $(f+g)(x)$, tal que

$$(f+g)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + ... + (a_n+b_n)x^n,$$

isto é:

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i+b_i)x^i \; = f(x)+g(x)$$

onde, $a_j = 0$ para $j > n$.

Exemplo 4.3.1 *Sejam os polinômios* $f(x) = 5+3x-5x^2+2x^3$ *e* $g(x) = 4-2x+2x^2$. *Então,*

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= (5+3x-5x^2+2x^3)+(4-2x+2x^2) \\ &= (5+4)+(3+(-2))x+(-5+2)x^2+2x^3 \\ &= 9+x-3x^2+2x^3 \end{aligned}$$

4.3.2 Propriedades da adição

A operação de adição define em $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, conjunto dos polinômios de coeficientes *reais* as seguintes propriedades:

A1 - **Propriedade associativa**

$[(f+g)+h](x) = [f+(g+h)](x)$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \left[(f+g)+h\right](x) &= (f+g)(x)+h(x) \\ &= [f(x)+g(x)]+h(x) \\ &= f(x)+[g(x)+h(x)] \\ &= \left[f+(g+h)\right](x) \end{aligned}$$

□

A2 - **Propriedade comutativa**

$(f+g)(x) = (g+f)(x)$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= g(x)+f(x)\\ &= (g+f)(x)\end{aligned}$$

□

A3 - **Existência do elemento neutro**

Existe um polinômio e_n tal que $f(x)+e_n = f(x)$, $\forall\ f(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Demonstração: Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ e $e_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x_i$, temos que: $f(x)+e_n \equiv f(x) \Leftrightarrow a_i + b_i = a_i$, $\forall\ i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, então $b_i = 0$, $\forall\ i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Portanto, o elemento neutro para a adição é o polinômio nulo.

A4 - **Existência do elemento simétrico aditivo**

Existe um polinômio $f'(x)$, tal que $f(x)+f'(x) = e_n$, $\forall\ f(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Demonstração: Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ e $f'(x) = \sum_{i=0}^{n} a'_i x_i$, temos que: $f(x)+f'(x) \equiv e_n \Leftrightarrow a_i + a'_i = a_i$, $\forall\ i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, então $a'_i = -a_i$, $\forall\ i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Portanto, $f'(x) = (-a_0)+(-a_1)x+...+(-a_n)x^n = -f(x)$.

4.4 Produto de polinômios por escalar

Dado o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se *produto* $(\alpha f)(x)$ o polinômio

$$(\alpha f)(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + ... + (\alpha a_n)x^n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$$

4.4.1 Propriedades do produto de polinômios por escalar

Dados $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ e $g(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_nx^n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. A operação de multiplicação por escalar satisfaz as seguintes propriedades:

ME1 - $\alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta)f(x)$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta f(x)) &= \alpha(\beta a_0 + \beta a_1 x + ... + \beta a_n x^n) \\ &= (\alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1 x + ... + \alpha\beta a_n x^n) \\ &= (\alpha\beta)f(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

□

ME2 - $(\alpha+\beta)(f(x)) = \alpha f(x) + \beta f(x)$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)f(x) &= (\alpha+\beta)(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) \\ &= (\alpha+\beta)a_0 + (\alpha+\beta)a_1 x + ... + (\alpha+\beta)a_n x^n \\ &= (\alpha a_0 + \beta a_0) + (\alpha a_1 + \beta a_1)x + ... + (\alpha a_n + \beta a_n)x^n \\ &= \alpha f(x) + \beta f(x) \end{aligned} \tag{4.2}$$

□

ME3 - $\alpha\left[f(x) + g(x)\right] = \alpha f(x) + \alpha g(x)$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \alpha\left[f(x)+g(x)\right] &= \alpha\left[(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + ... + (a_n+b_n)x^n\right] \\ &= \left[\alpha(a_0+b_0) + \alpha(a_1+b_1)x + ... + \alpha(a_n+b_n)x^n\right] \\ &= \left[(\alpha a_0+\alpha b_0) + (\alpha a_1+\alpha b_1)x + ... + (\alpha a_n+\alpha b_n)x^n\right] \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

□

ME4 - $1(f(x)) = f(x)$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(1)(f(x)) &= 1(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n) \\ &= 1a_0 + 1a_1x + ... + 1a_nx^n = f(x)\end{aligned} \tag{4.4}$$

□

Como a operação de adição satisfaz as propriedades (4.3.2) e a multiplicação por escalar satisfaz as propriedades (4.4.1), então, o conjunto dos polinômios $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ com estas operações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

4.5 Subespaço vetorial dos polinômios

Definição 4.5.1 *Um subespaço vetorial de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ é um subconjunto $A \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, tal que*

a) $0 \in A$;

b) $\forall\ f(x),\ g(x) \in A,\ (f+g)(x) \in A$;

c) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\ f(x) \in A,\ \alpha f(x) \in A$.

Proposição 4.5.2 *Se A é um subespaço vetorial de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, então A também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Para cada $f(x) \in A$ segue que $-f(x) \in A$, pois c) é válida para $\alpha = -1$. Além disso, as condições a), b) e c) da definição (4.5.1) garantem que o conjunto A é fechado para a soma e multiplicação por escalar. As outras condições da definição de espaço vetorial são satisfeitas pelo fato que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Observação: Para todo espaço vetorial 0 e $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ são subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ e são chamados de subespaços vetoriais triviais, [4].

Exemplo 4.5.3 *O conjunto B dos polinômios constantes é um subespaço vetorial de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$:*

a) $0 \in B$;

b) $\forall\ a,\ b \in B,\ a+b \in B$; *e*

c) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall\ a \in B,\ \alpha a \in B$.

4.6 Base de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

Definição 4.6.1 *Uma combinação linear dos polinômios* $p_1, ..., p_k \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*, é uma expressão da forma* $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ \ldots,\ \lambda_k p_k$*, onde* $\lambda_k \in \mathbb{R}$*.*

Exemplo 4.6.2 *Observe que* $4 + 2x + 3x^5$ *é uma combinação linear dos polinômios* $2 + x$ *e* x^5*, pois* $4 + 2x + 3x^5 = 2(2 + x) + 3(x^5)$*.*

Definição 4.6.3 *Dado um conjunto* $A \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*, denotamos por* $[A]$ *o conjunto de todas as combinações lineares dos polinômios de* A*. O conjunto* $[A]$ *é chamado subespaço de* $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *gerado por* A *.*

Exemplo 4.6.4 $[\{1, x, x^2, ..., x^n\}] = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*.*

De fato, como qualquer combinação linear de polinômios em $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *é um polinômio em* $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*, segue que* $[\{1, x, x^2, ..., x^n\}] \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*. Seja* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*, então* $f(x) = (a_0)1 + (a_1)x + (a_2)x^2 + ... + (a_n)x^n$*, assim* $f(x) \in [\{1, x, x^2, ..., x^n\}]$*. Portanto,* $[\{1, x, x^2, ..., x^n\}] = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*.*

Definição 4.6.5 *Um conjunto de polinômios em* $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*,* $A = \{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\}$ *é dito linearmente independente (LI) se* $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ \ldots,\ \lambda_k f_k(x) = 0$*, então* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k = 0$*. Caso contrário A é chamado de linearmente dependente (LD).*

Exemplo 4.6.6 *O conjunto* $\{1, x, x^2, ..., x^n\} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *é LI. De fato*

$$1\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_n x^n = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n \tag{4.5}$$

então $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$*. Portanto, o conjunto* $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *é linearmente independente.*

Definição 4.6.7 *Uma base de* $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *é um subconjunto finito* $\mathbb{A} \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *que satisfaz as seguintes condições:*

a) $[A] = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*.*

b) A é linearmente independente.

Então, o subconjunto $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ é uma base de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$. Portanto, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tem dimensão $n + 1$, que é o número de elementos da base.

4.7 Multiplicação de polinômios

Dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$$

chama-se *produto* $(fg)(x)$ o polinômio

$$(fg)(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + ... + (a_mb_n)x^{m+n} = f(x)g(x)$$

Notemos que o produto $(fg)(x)$ é o polinômio

$$(h)(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{m+n}x^{m+n}$$

cujo coeficiente c_k pode ser assim obtido:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$$

Notemos ainda que $(fg)(x)$ pode ser obtido multiplicando-se cada termo a_ix^i de $f(x)$ por cada termo b_jx^j de $g(x)$, segundo a regra $(a_ix^i) \cdot (b_jx^j) = a_ib_jx^{i+j}$, e somando os resultados obtidos.

Exemplo 4.7.1 *Sejam os polinômios* $f(x) = 5 + 3x - 5x^2 + 2x^3$ *e* $g(x) = 4 - 2x + 2x^2$. *Utilizando a propriedade distributiva da multiplicação de polinômios,*

$$\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) &= (5 + 3x - 5x^2 + 2x^3) \cdot (4 - 2x + 2x^2) \\
&= 5(4 - 2x + 2x^2) + 3x(4 - 2x + 2x^2) - 5x^2(4 - 2x + 2x^2) + \\
&\quad 2x^3(4 - 2x + 2x^2) \\
&= (20 - 10x + 10x^2) + (12x - 6x^2 + 6x^3) + (-20x^2 + 10x^3 - 10x^4) + \\
&\quad (8x^3 - 4x^4 + 4x^5) \\
&= 20 + (-10 + 12)x + (10 - 6 - 20)x^2 + 4x^5 + (6 + 10 + 8)x^3 + (-10 - 4)x^4 \\
&= 20 + 2x - 16x^2 + 24x^3 - 14x^4 + 4x^5
\end{aligned}$$

4.7.1 Propriedades da multiplicação de polinômios

A operação de multiplicação em $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, conjunto dos polinômios de coeficientes reais, verifica as seguintes propriedades:

M1 - **Propriedade associativa**

$[f \cdot (g \cdot h)](x) = [(f \cdot g) \cdot h](x),\ \forall\ f(x),\ g(x),\ h(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

Demonstração:

$$\begin{aligned} [f(gh)](x) &= f(x)(gh)(x) \\ &= f(x)g(x)h(x) \\ &= (fg)(x)h(x) \\ &= [(fg)h](x) \end{aligned}$$

$\square$

M2 - **Propriedade comutativa**

$(f \cdot g)(x) = (g \cdot f)(x),\ \forall\ f(x),\ g(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= f(x)(g)(x) \\ &= g(x)f(x) \\ &= (gf)(x) \end{aligned}$$

$\square$

M3 - **Existência do elemento neutro**

Existe um $e_n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tal que $f(x) \cdot e_n = f(x),\ \forall\ f(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

Demonstração: Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$ e $e_n(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

$$f(x) \cdot e_n = f(x)\alpha = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \ldots + \alpha a_n x^n$$

em particular, se $\alpha = 1$, temos $1 \cdot f(x) = f(x), \forall\ f(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Portanto, o polinômio constante 1 é o elemento neutro da multiplicação de polinômios. $\square$

M4 - **Propriedade distributiva**

$[f \cdot (g + h)](x) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x),\ \forall\ f(x),\ g(x),\ h(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

Demonstração:

$$\begin{aligned} [f(g+h)](x) &= f(x)(g+h)(x) \\ &= f(x)[g(x)+h(x)] \\ &= f(x)g(x)+f(x)h(x) \end{aligned}$$

□

4.8 Grau do polinômio

Definição 4.8.1 *Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo, existe um maior índice n, de forma que esse número representa o* grau *de* f(x). *Chama-se* grau *de* f(x) *e representa-se por $gr(f(x))$ o número natural* n *tal que $a_n \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > n$.*

$$gr(f(x)) = n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_n \neq 0 \\ a_i = 0, \quad \forall \;\; i > n \end{cases}$$

Assim, o grau de um polinômio *f(x)* é o índice do coeficiente de maior grau não nulo de *f(x)*.

Se o grau do polinômio *f(x)* é *n*, então a_n é chamado *coeficiente dominante* ou *coeficiente líder* de $f(x)$. No caso do coeficiente dominante a_n ser igual a 1, $f(x)$ é chamado *polinômio unitário.* Para o polinômio nulo não existe a definição de grau, [6].

4.8.1 Grau da soma

Definição 4.8.2 *Se $f(x)$, $g(x)$ e $(f+g)(x)$ são polinômios não nulos, então, o grau de $(f+g)(x)$ é menor ou igual ao maior dos números $gr(f(x))$ e $gr(g(x))$.*

$$gr((f(x)+g(x))) \leq \;\; máx\,\{gr(f(x)), gr(g(x))\}$$

Demonstração: Se $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $\;g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, $gr(f(x)) = m$ e $gr(g(x)) = n$, com $m \neq n$, admitamos por exemplo, $m > n$. Assim, sendo $c_i = a_i + b_i$, temos:

$$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 = a_m \neq 0, \quad \text{e}$$

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \ \forall \ i > m.$$

Portanto, $gr((f+g)(x)) = \ m \ = \ \text{máx} \ \{gr(f(x)), \ gr(g(x))\}$.

Se admitirmos $m = n$, temos:

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \ \ \forall \, i > m$$

$$c_m = a_m + b_m \ \ \text{, pode ser nulo, então:}$$

$$(f+g)(x) \leq \ \ \text{máx} \ \{gr(f(x)), gr(g(x))\}.$$

□

Exemplo 4.8.3 *Sejam os polinômios $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ e $g(x) = 2 + 3x^2$, encontrar o grau da soma, $(f+g)(x)$.*

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \Rightarrow gr(f(x)) = 3$$

$$g(x) = 2 + 3x^2 \Rightarrow gr(g(x)) = 2$$

$$(f+g)(x) = 3 + x + 4x^2 + x^3 \Rightarrow gr[(f+g)(x)] = 3$$

que é o máx $\{gr(f(x)), \ gr(g(x))\}$.

4.8.2 Grau do produto

Definição 4.8.4 *Se $f(x)$ e $g(x)$ são dois polinômios não nulos, então, o grau de $(fg)(x)$ é igual à soma dos graus de $f(x)$ e $g(x)$.*

$$gr((fg)(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x))$$

Demonstração: Se $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \ g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j, \ gr(f(x)) = m$ e $gr(g(x)) = n$, seja

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

um coeficiente qualquer de $(fg)(x)$.

Temos:

$$c_{m+n} = a_m \cdot b_n \neq 0$$

$$c_k = 0, \ \forall \ k > m+n \ \text{ e então:}$$

$$gr((fg)(x)) = m+n = gr(f(x)) + gr(g(x))$$

$\square$

Exemplo 4.8.5 *Sejam os polinômios $f(x) = 2+3x$ e $g(x) = 2x - x^2 + x^3$, encontrar o grau da soma, $(fg)(x)$.*

$$f(x) = 2+3x \Rightarrow gr(f(x)) = 1$$

$$g(x) = 2x - x^2 + x^3 \Rightarrow gr(g(x)) = 3$$

$$(f+g)(x) = 4x + 4x^2 - x^3 + 3x^4 \Rightarrow gr[(fg)(x)] = 4$$

que é $gr(f(x)) + gr(g(x))$, ou seja, $gr[(fg)(x)] = 1+3 = 4$.

4.9 Divisão de polinômios

Definição 4.9.1 *Dados dois polinômios, onde $f(x)$ é chamado* dividendo *e $g(x) \neq 0$ o* divisor, *dividir $f(x)$ por $g(x)$ é determinar dois outros polinômios, sendo $q(x)$ o quociente e $r(x)$ o resto, de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:*
a) $q(x) \cdot g(x) + r(x) = f(x)$

b) $gr(r(x)) < gr(g(x))$ (ou $r(x) = 0$, caso em que a divisão é chamada exata)

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & = & q(x) & \cdot & g(x) & + & r(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \textit{dividendo} & & \textit{quociente} & & \textit{divisor} & & \textit{resto} \end{array}$$

Proposição 4.9.2 *Sejam $f(x), g(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Se $g(x)$ tem coeficiente dominante não nulo e divide $f(x)$, então $gr(g(x)) \leq gr(f(x))$.*

Demonstração: Como $g(x)$ divide $f(x)$ e ambos são não nulos, então existe $h(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tal que $f(x) = g(x)h(x)$. Pela propriedade multiplicativa do grau temos:

$$\begin{aligned} gr(f(x)) &= gr(g(x)h(x)) \\ &= gr(g(x)) + gr(h(x)) \geq gr(g(x)) \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 4.9.3 *Sejam os polinômios* $f(x) = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ *e* $g(x) = 1 - x + 2x^2$*, na divisão de* $f(x)$ *por* $g(x)$ *obtemos* $q(x) = x$ *e* $r(x) = 2 + 2x$*, que satisfazem as condições:*

a) $q(x) \cdot g(x) + r(x) = x(1 - x + 2x^2) + (2 + 2x) = 2 + 3x - x^2 + 2x^3 = f(x)$

b) $gr(r(x)) = 1$ *e* $gr(g(x)) = 2$*, então* $gr(r(x)) < gr(g(x))$

4.9.1 Divisões imediatas

A divisão de $f(x)$ por $g(x)$ é imediata em duas situações:

1. o dividendo $f(x)$ é o polinômio nulo ($f(x) = 0$).

   Nesta situação, os polinômios $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$ satisfazem as condições a) e b) da definição (4.9.1), pois $(qg)(x) + r(x) = 0 \cdot g(x) + 0 = 0 = f(x)$ e $r(x) = 0$.

   $$f(x) = 0 \Rightarrow q(x) = 0 \text{ e } r(x) = 0$$

2. o dividendo $f(x)$ não é polinômio nulo, mas tem grau menor que o divisor $g(x)$.

   Dessa forma, os polinômios $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$ satisfazem as condições a) e b) da definição (4.9.1), pois $(qg)(x) + r(x) = 0 \cdot g(x) + f(x) = f(x)$ e $gr(r(x)) = gr(f(x)) < gr(g(x))$.

   $$gr(f(x)) < gr(g(x)) \Rightarrow q(x) = 0 \text{ e } r(x) = f(x)$$

Exemplo 4.9.4 *Sejam os polinômios* $f(x) = 3 + 4x$ *e* $g(x) = 1 + x + x^2$*, na divisão de* $f(x)$ *por* $g(x)$ *obtemos* $q(x) = 0$ *e* $r(x) = 3 + 4x = f(x)$*.*

4.9.2 Método de Descartes

Este método, também conhecido com o nome de *método dos coeficientes a determinar*, baseia-se nos seguintes fatos:

1. $gr(q(x)) = gr(f(x)) - gr(g(x))$, o que é consequência da definição, pois: $(qg)(x) + r(x) = f(x) \Rightarrow gr((qg)(x) + r(x)) = gr(f(x))$ e, então, $gr(q(x)) + gr(g(x)) = gr(f(x))$.

2. $gr(r(x)) < gr(g(x))$ (ou $r(x) = 0$).

O método de Descartes é aplicado da seguinte forma:

1. calculam-se $gr(q(x))$ e $gr(r(x))$;

2. constroem-se os polinômios $q(x)$ e $r(x)$, deixando incógnitos os seus coeficientes;

3. determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $(qg)(x) + r(x) = f(x)$.

Exemplo 4.9.5 *Dividir os polinômios $f(x) = 3 + 4x + x^2$ e $g(x) = 1 + x$.*
Primeiramente encontramos, $gr(f(x)) = 2$ e $gr(g(x)) = 1$, assim $gr(q(x)) = 2 - 1 = 1$, logo, $q(x) = a_0 + a_1x$. Temos que, $gr(r(x)) < 1$ e supondo $gr(r(x)) = 0$, então, $r(x) = a_2$. Desse modo,

$$\begin{aligned} (qg)(x) + r(x) &= f(x) \\ (a_0 + a_1x)(x+1) + a_2 &= 3 + 4x + x^2 \\ (a_0 + a_2) + (a_0 + a_1)x + a_1x^2 &= 3 + 4x + x^2 \end{aligned}$$

Aplicando a identidade de polinômios:

$$\begin{cases} a_0 + a_2 = 3 \\ a_0 + a_1 = 4 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 + a_1 = 4 \\ a_0 + a_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_0 + 1 = 4 \Rightarrow a_0 = 3 \\ 3 + a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 0 \end{cases}$$

Obtendo assim, $q(x) = 3 + x$ e $r(x) = 0$, indicando uma divisão exata.

4.9.3 Existência e unicidade do quociente e do resto

Teorema 4.9.6 (Divisão euclidiana) *Dados os polinômios*

$$f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + ... + a_1x + a_0 \quad (a_m \neq 0)$$

$$g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 \quad (b_n \neq 0)$$

existe um único polinômio $q(x)$ e um único polinômio $r(x)$, tais que $(qg)(x) + r(x) = f(x)$ e $gr(r(x)) < gr(g(x))$ (ou $r(x) = 0$).

Para demonstração consulte ([6], p.113).

4.9.4 Método da chave

A prova da existência de $q(x)$ e $r(x)$ vista no teorema (4.9.6), nos ensina como construir esses dois polinômios a partir de $f(x)$ e $g(x)$. Vejamos por exemplo como proceder se $f(x) = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

1. Formamos o primeiro termo de $q(x)$ pela operação $\dfrac{3x^5}{x^2} = 3x^3$ e construímos o primeiro resto parcial $r_1(x) = f(x) - (3x^3)g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1$, que tem grau maior que $gr(g(x))$.

2. Formamos o segundo termo de $q(x)$ pela operação $\dfrac{4x^3}{x^2} = 4x$ e construímos o segundo resto parcial $r_2(x) = r_1(x) - (4x)g(x) = -x^2 - x - 1$, que tem grau igual a $gr(g(x))$.

3. Formamos o terceiro termo de $q(x)$ pela operação $\dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ e construímos o terceiro resto parcial $r_3(x) = r_2(x) - (-1)g(x) = -3x + 2$, que tem grau menor que $gr(g(x))$, encerrando, portanto, a divisão.

Resposta: $q(x) = 3x^3 + 4x - 1$ e $r(x) = -3x + 2$.

4.9.5 Divisão por binômios do 1º grau

Divisão por binômios do 1º grau unitários

Trataremos neste item das divisões em que o dividendo é um polinômio $f(x)$, com $gr(f(x)) \geq 1$, e o divisor é um polinômio $g(x)$, com $gr(g(x)) = 1$ e coeficiente dominante também igual a 1.

Observemos o que ocorre quando dividimos $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ por $g(x) = x - 4$, temos $q(x) = 2x^2 + x + 8$ e $r(x) = 31$.

Como já sabemos, neste tipo de divisão $r(x)$ é um polinômio constante, pois:

$$gr(g(x)) = 1 \Rightarrow gr(r(x)) = 0 \text{ ou } r(x) = 0$$

Vemos que o valor numérico de $r(x)$ não depende do número a, substituído no lugar de x, isto é, $r(a) = r(x),\ \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Notemos, finalmente, que $f(4) = 2\cdot 4^3 - 7\cdot 4^2 + 4\cdot 4 - 1 = 128 - 112 + 16 - 1 = 31 = r(4)$

Teorema 4.9.7 (Teorema do resto) *O resto da divisão de um polinômio* f(x) *por* $(x-a)$ *é igual ao valor numérico de* f(x) *em* a*.*

Demonstração: De acordo com a definição (4.9.1), temos: $q(x)\cdot(x-a)+r(x)=f(x)$ em que $q(x)$ e $r(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto. Como $(x-a)$ tem grau 1, o resto $r(x)$ ou é nulo ou tem grau zero; portanto, $r(x)$ é um polinômio constante. □

Calculemos os valores dos polinômios da igualdade acima em a:

$$q(a)\cdot\underbrace{(a-a)}_{0}+\underbrace{r(a)}_{r}=f(a)$$

então, $r(a)=f(a)$.

Teorema 4.9.8 (Teorema de D'Alembert) *Um polinômio* f(x) *é divisível por* $(x-a)$ *se, e somente se,* a *é raiz de* f(x)*.*

Demonstração: De acordo com o teorema do resto (4.9.7), temos $r(a)=f(a)$. Então,

$$\begin{array}{ccc} r(a)=0 & \Rightarrow & f(a)=0 \\ \text{(divisão exata)} & & (a \text{ é raiz de } f(x)) \end{array}$$

Algoritmo de Briot-Ruffini

Dados os polinômios $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$ e $g(x)=x-a$, vamos determinar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $g(x)$.

Façamos $q(x)=q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+...+q_{n-1}$ e multiplicamos por $g(x)$, obtendo, assim, $q_0x^n+(q_1-aq_0)x^{n-1}+(q_2-aq_1)x^{n-2}+...+(q_{n-1}-aq_{n-2})x-aq_{n-1}$.

Impondo a condição $q(x)\cdot(x-a)+r(x)=f(x)$, onde $gr(r(x))=0$, ou seja, $r(x)=r$, resultam as igualdades:

$q_0=a_0$

$q_1-aq_0=a_1\Rightarrow q_1=aq_0+a_1$

$q_2-aq_1=a_2\Rightarrow q_2=aq_1+a_2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$q_{n-1}-aq_{n-2}=a_{n-1}\Rightarrow q_{n-1}=aq_{n-2}+a_{n-1}$

$r(x)-aq_{n-1}=a_n\Rightarrow r(x)=aq_{n-1}+a_n$

Os cálculos de $q(x)$ e $r(x)$, tornam-se mais rápidos o dispositivo prático de Briot-Ruffini. Esse dispositivo permite determinar o quociente e o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ de $gr(n), (n \geq 1)$ por um binômio do tipo $x-a$. Dessa forma, o quociente terá $gr(n-1)$ e devido ao divisor ser um polinômio de grau 1, o resto sempre será uma constante, [6].

O mecanismo do algoritmo é o seguinte:

1. na primeira linha, à esquerda, colocamos os coeficientes dos termos do dividendo, em ordem decrescente de expoente. À direita, ficará a raiz do binômio divisor.

2. baixamos o primeiro coeficiente do dividendo; multiplicamos esse coeficiente pela raiz e somamos o produto ao segundo coeficiente do dividendo, o resultado é escrito abaixo deste.

3. o resultado obtido é multiplicado pela raiz. Em seguida, adicionamos o produto ao terceiro coeficiente.

4. repete-se esse processo até o último coeficiente.

Os primeiros coeficientes obtidos são os do quociente e o último é o resto da divisão.

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & a \\
\hline
\underbrace{a_0}_{q_0} & \underbrace{aq_0 + a_1}_{q_1} & \underbrace{aq_1 + a_2}_{q_2} & \ldots & \underbrace{aq_{n-2} + a_{n-1}}_{q_{n-1}} & \underbrace{aq_{n-1} + a_n}_{r} &
\end{array}$$

Exemplo 4.9.9 *Dividir o polinômio $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 8$ por $x + 1$.*

$$\begin{array}{ccccc|c}
4 & -3 & 0 & 8 & & -1 \\
\hline
4 & \underbrace{4(-1) - 3}_{-7} & \underbrace{(-7)(-1) + 0}_{7} & \underbrace{7(-1) + 8}_{1} & & \\
4 & & & & &
\end{array}$$

Portanto, $q(x) = 4x^2 - 7x + 7$ e $r(x) = 1$.

Teorema 4.9.10 (Teorema do fator) *Um polinômio $f(x)$ é divisível por $(x-a)$ e por $(x-b)$, com $a \neq b$, se, e somente se, $f(x)$ for divisível por $(x-a)(x-b)$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $f(x)$ um polinômio divisível por $(x-a)$ e por $(x-b)$, com $a \neq b$. Pelo Teorema 4.9.5 (teorema de D'Alembert), $f(a)=0$ e $f(b)=0$. Pelo Teorema 4.9.3, existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$, tais que $f(x)=(x-a)(x-b)q(x)+r(x)$, onde $gr(r(x)) < gr((x-a)(x-b)) \leq 2$ ou $r(x)=0$. Temos que,

$$\begin{array}{rcccl} 0 & = & f(a) & = & r(a) \\ 0 & = & f(b) & = & r(b) \end{array}$$

Desse modo, $r(x)=cx+d$, assim,

$$\begin{array}{rcccl} 0 & = & r(a) & = & ca+d \\ 0 & = & r(b) & = & cb+d \end{array}$$

Então, $c(a-b)=0 \Rightarrow c=0$ e $d=0$, então, $r(x)=0$. Portanto, $f(x)$ é divisível por $(x-a)(x-b)$.

($\Leftarrow$) $f(x)=(x-a)(x-b)g(x)$, então, $f(a)=0$ e $f(b)=0$. Pelo Teorema 4.9.5, $f(x)$ é divisível por $(x-a)(x-b)$. $\square$

Divisão por binômios do 1º grau quaisquer

Para obtermos rapidamente o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de um polinômio *f(x)*, com $gr(f(x)) \geq 1$, por $g(x)=bx-a$, em que $b \neq 0$, notemos que:

$$(bx-a)\cdot q(x)+r(x)=f(x) \quad \text{então} \quad \left(x-\frac{a}{b}\right)\underbrace{(bq)(x)}_{q'(x)}+r(x)=f(x)$$

do que decorre a seguinte regra prática:

1. divide-se *f(x)* por $x-\dfrac{a}{b}$ empregando o algoritmo de Briot-Ruffini;
2. divide-se o quociente $q'(x)$ encontrado pelo número b, obtendo $q(x)$.

4.10 Multiplicidade de uma raiz

Na decomposição de um polinômio $f(x)=0$ de grau $n>0$ em um produto de n fatores do primeiro grau, podemos encontrar dois ou mais fatores idênticos.

Então, em uma equação algébrica de grau n, obtemos n raízes, das quais algumas podem ser iguais, ou seja, toda equação algébrica de grau $n > 0$ tem, no máximo, n raízes distintas.

O número de vezes que uma mesma raiz aparece indica a multiplicidade da raiz, [5].

Exemplo 4.10.1 *Consideremos a equação polinomial* $(x-3)(x-1)^2(x-4)^3 = 0$.

Essa equação polinomial apresenta seis raízes, sendo uma raiz a 3, duas raízes iguais a 1 e três raízes iguais a 4. Dizemos que 3 é raiz simples, 1 é raiz dupla e 4 é raiz tripla da equação dada.

4.10.1 Multiplicidade

Dizemos que r é raiz de *multiplicidade* m $(m \geq 1)$ da equação $p(x) = 0$ se, e somente se,

$$p = (x-r)^m \cdot q(x) \text{ e } q(r) \neq 0$$

isto é, r é raiz de multiplicidade m de $p(x) = 0$ quando o polinômio p é divisível por $(x-r)^m$ e não divisível por $(x-r)^{m+1}$, ou seja, a decomposição de p apresenta exatamente m fatores iguais a $x - r$.

Quando $m = 1$, dizemos que r é raiz simples; quando $m = 2$, dizemos que r é raiz dupla; quando $m = 3$, dizemos que r é raiz tripla, e, assim, sucessivamente.

4.11 Relações entre coeficientes e raízes - Relações de Girard

Equação do segundo grau

Consideremos a equação: (1) $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ cujas raízes são r_1 e r_2.

Vimos que essa equação pode ser escrita sob a forma: (2) $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$

Temos a identidade: $ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$, $\forall$ x, isto é,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2, \ \forall \ x$$

portanto,

$$\boxed{r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } r_1 r_2 = \frac{c}{a}}$$

são as relações entre coeficientes e raízes da equação do segundo grau.

Equação do grau n qualquer

Consideremos uma equação polinomial de grau n $(n \geq 1)$.

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_n \neq 0)$ cujas raízes são $r_1, \ r_2, \ r_3, \ ..., \ r_n$ temos a identidade:

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n) \\
&= a_n x^n - a_n \underbrace{(r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n)x^{n-1}}_{S_1} + \\
&+ a_n \underbrace{(r_1 r_2 + r_1 r_3 + ... + r_{n-1} r_n)x^{n-2}}_{S_2} - \\
&- a_n \underbrace{(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + ... + r_{n-2} r_{n-1} r_n)x^{n-3}}_{S_3} + \ldots + \\
&+ (-1)^h a_n S_h x^{n-h} + \ldots + (-1)^n a_n \underbrace{(r_1 r_2 r_3 + ... + r_n)}_{S_n}, \ \forall \ x
\end{aligned}$$

portanto, aplicando a condição de identidade:

$$\begin{aligned}
S_1 &= r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
S_2 &= r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + \ldots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
S_3 &= r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
&\ldots \\
S_h &= \begin{array}{c}\text{(soma de todos os } C_{n,h} \text{ produtos} \\ \text{de } h \text{ raízes da equação)}\end{array} = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n}
\end{aligned}$$

$$\ldots$$
$$S_n = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

são as *relações entre coeficientes e raízes* da equação $p(x) = 0$, também chamadas *relações de Girard*.

Observação: As n relações de Girard para uma equação polinomial de grau n, não são suficientes para obter $r_1, \ r_2, \ r_3, \ ..., \ r_n$. Se tentarmos o cálculo de r_1, por exemplo, após várias substituições, obteremos a equação equivalente à equação dada:

$$\underbrace{a_n r_1^n + a_{n-1} r_1^{n-1} + a_{n-2} r_1^{n-2} + \ldots + a_1 r_1 + a_0}_{P(r_1)} = 0$$

4.12 Raízes complexas

4.12.1 Raízes conjugadas

Teorema 4.12.1 *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = \alpha + \beta i \quad (\beta \neq 0)$, então essa equação também admite como raiz o número $\overline{z} = \alpha - \beta i$, conjugado de* z.

Demonstração: Seja a equação $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes reais que admite a raiz z, isto é, $p(z) = 0$.

Provemos que $\overline{z}$ também é raiz dessa equação, isto é, $P(\overline{z}) = 0$:

$$\begin{aligned}
p(\overline{z}) &= a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + a_{n-2}(\overline{z})^{n-2} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 = \\
&= a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 = \\
&= \overline{a}_n\overline{z^n} + \overline{a}_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \overline{a}_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \ldots + \overline{a}_1\overline{z} + \overline{a}_0 = \\
&= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \overline{a_{n-2} z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a}_0 = \\
&= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0.
\end{aligned}$$

□

Multiplicidade da raiz conjugada

Teorema 4.12.2 *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz* $z = \alpha + \beta i \ \ (\beta \neq 0)$ *com multiplicidade* p*, então essa equação admite a raiz* $\overline{z} = \alpha - \beta i$ *com multiplicidade* p*.*

Ver demonstração em ([8], p.130).

Observações:

1. Os dois teoremas anteriores só se aplicam a equações polinomiais de coeficientes *reais*. Por exemplo, a equação $x^2 - ix = 0$ tem como raízes *0* e i, entretanto não admite a raiz -i, conjugada de i.

2. Como a toda raiz complexa $z = \alpha + \beta i \ \ (\beta \neq 0)$ de uma equação com coeficientes reais $p(x) = 0$ corresponde uma outra raiz $\overline{z} = \alpha - \beta i$, com igual multiplicidade, decorre que o número de raízes complexas não reais de $p(x) = 0$, é necessariamente par.

3. Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então ela admite um número ímpar de raízes reais. Assim, por exemplo, toda equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (com a, b, c, d reais) tem uma ou três raízes reais, pois o número de raízes complexas e não reais é par.

4.12.2 Raízes reais

Dada uma equação polinomial $p(x) = 0$ com coeficientes reais, vamos desenvolver uma teoria que permite determinar o número de raízes reais que a equação admite num certo intervalo dado (a, b).

Seja $p(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais. Indiquemos por $r_1, r_2, r_3, ..., r_p$ suas raízes reais e por $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, ..., z_q, \overline{z_q}$ suas raízes complexas e não reais.

Pelo teorema da decomposição, temos:

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_p) \cdot [(x - z_1)(x - \overline{z}_1)(x - z_2)(x - \overline{z}_2) \ldots (x - z_q)(x - \overline{z}q)] \quad (1)$$

Vamos efetuar o produto correspondente a duas raízes complexas conjugadas $z = \alpha + \beta i$ e $\overline{z} = \alpha - \beta i$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} (x - z_1)(x - \overline{z}_1) &= x^2 - (z_1 + \overline{z}_1)x + z_1\overline{z}_1 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = \\ &= (x - \alpha)^2 + \beta^2 > 0, \quad \forall \ x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Verificamos que o produto é positivo para todo valor real dado a x. Como o polinômio

$$q(x) = (x - z_1)(x - \overline{z}_1)(x - z_2)(x - \overline{z}_2) \ldots (x - z_q)(x - \overline{z}q)]$$

é o produto de q fatores do tipo que acabamos de analisar, concluímos que $q(x)$ assume valor numérico positivo para todo x real e a expressão (1) fica:

$$p(x) = a_n \cdot q(x) \cdot (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_p) \text{ com } q(x) > 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Ver exemplos em ([8], p.135).

Capítulo 5

Roteiro de atividades

5.1 Apresentação

Neste capítulo apresentaremos um roteiro de atividades sobre números complexos que serão desenvolvidos com o auxílio do programa GeoGebra, adotado nos laboratórios de informática das escolas públicas do estado do Paraná. Além disso, é um *software livre*, o que permite sua instalação sem a necessidade de se comprar uma licença. Essas atividades foram produzidas para serem desenvolvidas com turmas do Terceiro Ano do Ensino Médio.

Sua estrutura é constituída por quatro módulos, totalizando quatorze aulas, distribuídas em atividades de construção, de resolução e de experimentação, utilizando o GeoGebra. Dessa forma, procura-se fazer uso do programa computacional como ferramenta para exploração geométrica e algébrica. Para o desenvolvimento das atividades ao longo do trabalho, procurou-se estabelecer como metodologia a investigação matemática proposta por [13], e a exploração do conteúdo por meio de práticas realizadas com o auxílio dos computadores, bem como da produção escrita e atividades de exposição oral.

A escolha do conteúdo sobre números complexos está embasada nas Diretrizes Curriculares Educacionais em [11], assim como a utilização de ferramentas tecnológicas é subsidiada pelas Diretrizes para o uso de Tecnologias Educacionais em [10]. Além disso, conforme [3], esse recurso didático permite que os estudantes utilizem um ambiente diferente de aprendizado.

Esse material não se constitui em um manual de utilização do GeoGebra, apenas apresenta um roteiro de atividades para que o professor possa organizar suas aulas. Os professores poderão ainda alterá-las, enriquecê-las ou explorar outros conteúdos matemáticos. Ao utilizarem esse recurso, poderão acrescentar nos estudos assuntos que não foram contemplados. Para ter acesso aos manuais e tutoriais sobre o programa sugerimos a página oficial do programa `http://www.geogebra.org`, e, também [12] e [14].

Cabe ressaltar que um trabalho sob a ótica das investigações matemáticas [13], procura direcionar as atividades de forma que o professor não dê respostas prontas aos alunos ou utilize extensamente as terminologias e fórmulas específicas. Assim, para que se conclua com êxito os passos desse material, sugere-se que o professor aplique de forma preliminar todo o roteiro, apresentando posteriormente as definições e conceitos.

É necessário que haja a interação entre os estudantes, e destes com os conteúdos, em busca do caráter investigativo e de pesquisa. Dessa forma, ao final das atividades, o professor deverá disponibilizar um tempo suficiente para que os alunos apresentem suas conjecturas, possam discutir e elaborar ideias sobre o assunto estudado, concretizando o aprendizado.

5.2 Roteiro básico das atividades

Este roteiro de atividades consiste em quatro planos de aula com encaminhamento metodológico aplicado no estudo de números complexos utilizando o GeoGebra. Cada plano segue a estrutura geral descrita abaixo, em que o professor pode realizar as adaptações necessárias nos campos de identificação, recursos didáticos e bibliografia. O professor também poderá adaptar os itens específicos das seções, como por exemplo, os objetivos específicos, a duração e até mesmo retirar ou acrescentar alguma atividade.

Dados de Identificação

Estabelecimento:

Professor(a):

Série: Turma: Turno:

Data:

Tema

- Números e álgebra: números complexos

Objetivo geral

- Ampliar a ideia de conjuntos numéricos, identificando a unidade imaginária como elemento do conjunto dos números complexos e reconhecer as formas algébricas, gráficas e trigonométricas desses números.

Recursos didáticos

Computador com o programa GeoGebra, caderno, quadro, projetor multimídia.

Avaliação

A avaliação será um processo contínuo, promovido durante as atividades, ao longo dos quatro módulos. Os critérios de avaliação levarão em conta a capacidade dos alunos em desenvolver as atividades, propor soluções aos problemas e expressar suas experiências através da linguagem escrita e oral.

Dessa forma, a avaliação será realizada conforme os seguintes critérios:

- Acompanhamento do processo de aprendizagem dos alunos, com registro em tabelas, listas de controles, diário de classe e outros;

- Consideração da variedade de produções realizadas pelos alunos, para que se possa ter um quadro real das aprendizagens conquistadas.

- Os alunos devem ter objetividade ao expor sobre um tema e ao responder questionamentos.

Concomitantemente, os alunos produzirão arquivos digitais (GeoGebra), anotações no caderno, relatórios e atividades de expressão oral. Estes serão os materiais para a análise e considerações do professor.

Bibliografia

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes curriculares da educação básica**: matemática. Curitiba: SEED/Pr., 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio: volume 1.** 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

5.2.1 O GeoGebra e os números complexos

O primeiro módulo explora a associação de pares ordenados e sua relação com os números complexos. Consiste também no aprendizado de ferramentas e comandos que serão utilizados com maior frequência em nossos estudos.

Objetivos específicos

- Associar par ordenado e número complexo;
- Reconhecer graficamente um número complexo.

Duração: 2 aulas

Recomendações ao professor

Utilizaremos a associação de pares ordenados e números complexos, e, devido às restrições do GeoGebra, em alguns casos, faremos uso de vetores.

Atividade 1: Pares ordenados

Antes de iniciar a atividade, habilite a malha quadriculada: *Menu: Exibir* > *Malha*. Sugestão: *Menu: Opções* > *pontos sobre a malha* > *Fixar à Malha*.

1. Crie dois pontos livres, A e B. Faça a leitura da *Janela de Álgebra*.

2. (*Opcional*) Construa um vetor a partir da origem do plano, até o ponto A utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos*. Repita o mesmo procedimento para o ponto B.

3. Utilizando o comando *Mover*, movimente livremente os pontos observando o que acontece com seus valores.

4. Posicione o ponto A na coordenada $(1, 3)$; posicione o ponto B na coordenada $(5, 1)$.

5. Selecione com o botão direito do *mouse* o ponto A. Selecione *Propriedades > Exibir Rótulo > Valor*.

6. Selecione com o botão direito do *mouse* o ponto B. Selecione *Propriedades > Exibir Rótulo > Valor*.

7. Movimente livremente os pontos observando o que acontece com seus valores.

   Salve o arquivo como *aula1_atv1*.

Atividade 2: Números complexos

Crie um novo arquivo, por exemplo, *aula1_atv2*. Antes de iniciar a atividade, habilite a malha quadriculada: *Menu: Exibir > Malha*. Sugestão: *Menu: Opções > pontos sobre a malha > Fixar à Malha*.

1. Utilizando a ferramenta *Número Complexo* construa dois números (pontos). Faça a leitura da *Janela de Álgebra*.

2. (*Opcional*) Construa um vetor a partir da origem do plano até o número z_1, utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos*. Repita o mesmo procedimento para o número z_2.

3. Selecione com o botão direito do *mouse* o número z_1. Selecione *Propriedades > Exibir Rótulo > Valor*.

4. Selecione com o botão direito do *mouse* o número z_2. Selecione *Propriedades > Exibir Rótulo > Valor*.

5. Utilizando o comando *Mover*, movimente livremente os números observando o que acontece com seus valores na *Janela de Álgebra*.

6. Posicione z_1 na coordenada $(1, 3)$; posicione z_2 na coordenada $(5, 1)$.

7. Construa mais dois pontos sobre o plano e exiba seus valores. Compare as leituras dos valores dos pontos e dos números complexos.

8. Escolha um dos pontos construídos anteriormente e arraste até sobrepor z_1 ou z_2. Compare as duas leituras.

   Lembre-se de salvar seu arquivo!

9. Compare os valores obtidos na *Janela de Álgebra* nas atividades 1 e 2.

   a) Há alguma relação entre par ordenado e número complexo? Escreva seu comentário no caderno.

   b) É possível reconhecer a parte real e a parte imaginária utilizando pares ordenados?

   c) O que está acontecendo sobre os eixos x e y?

   d) Quais são os vetores associados aos números complexos desta atividade?

Sugestão: Ao final da aula, o professor poderá orientar a discussão das respostas dos alunos para que estes façam seus apontamentos, descubram seus erros ou mesmo apontem alternativas e sugestões aos colegas.

5.2.2 Operações com números complexos

Este segundo módulo explora as operações de adição e de multiplicação por escalar. Há questionamentos sobre como resolver, no GeoGebra, a subtração e a multiplicação de dois números complexos. No final do módulo, encontram-se alguns exercícios de revisão e fixação do conteúdo.

Objetivos específicos

- Reconhecer a adição de dois números complexos;
- Reconhecer a multiplicação de número complexo por um escalar;
- Realizar cálculos com números complexos.

Duração: 4 aulas

Recomendações ao professor

Utilizaremos a associação de pares ordenados e números complexos, e, devido às restrições do GeoGebra, em alguns casos, faremos uso de vetores.

Atividade 1: Soma de dois números complexos

Crie um novo arquivo, por exemplo, *aula2_atv1*. Antes de iniciar a atividade, habilite a malha quadriculada: *Menu: Exibir > Malha*. Sugestão: *Menu: Opções > pontos sobre a malha > Fixar à Malha*.

Para esta atividade continuaremos utilizando o arquivo da **Atividade 2:** *aula1_atv2*.

1. Utilizando a ferramenta *Número Complexo*, construa dois números complexos. Faça a leitura da *Janela de Álgebra*.

2. Construa um vetor a partir da origem do plano até o número z_1, utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos*. Repita o mesmo procedimento para o número z_2.

3. Utilizando a ferramenta *Vetor a Partir de um Ponto*, construa, a partir do vetor w, o vetor semelhante a u. Para isso, selecione a ferramenta, clique sobre w e, a seguir, sobre o vetor u.

4. Repita o procedimento para o vetor v. Temos então, a origem A e a interseção de z_3 e z_4.

5. Desabilite o *Rótulo* dos novos pontos.

6. Observe a figura geométrica formada pela união desses vetores.

7. Utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos*, construa um novo vetor de origem A e extremidade z_3. Adicione o número complexo com a ferramenta própria. Selecione com o botão direito do *mouse* o número B a opção *Propriedades* > *Álgebra* > *coordenadas: Número Complexo*. Em seguida, habilite o *Rótulo*. (Você pode renomear B, se achar necessário).

   Para ressaltar a operação que acabamos de realizar, pode-se mudar o estilo dos vetores utilizando as *Propriedades*.

8. Observe e anote em seu caderno os valores mostrados na tela.

   a) É possível estabelecer uma relação entre o valor obtido pelo número B e os outros dois números complexos?

9. Arraste z_1 até que fique sobre o eixo x. Faça o mesmo para z_2. Anote em seu caderno os novos valores. Movimente os pontos e observe o que acontece com a soma.

10. Arraste z_1 para que fique sobre o eixo y. Repita o processo para z_2. Anote em seu caderno os novos valores. Movimente os pontos e observe o que acontece com a soma.

11. Movimente z e observe o que acontece com os valores dos demais números complexos. Vá anotando os novos valores obtidos com este procedimento.

    a) É possível estabelecer uma relação entre o valor de z com os valores de w e de B?

    b) De que maneira poderíamos estabelecer a subtração de números complexos utilizando os conceitos elaborados nesta atividade? Elabore uma ideia, teste com diversos valores, e discuta os resultados obtidos com seus colegas.

Observação: Neste último item, o professor deverá verificar a associação entre o valor do número complexo e o do vetor.

Sugestão: Ao final da aula, o professor poderá orientar a discussão das respostas dos alunos, para que façam seus apontamentos, descubram erros ou mesmo apontem alternativas e sugestões aos colegas.

Atividade 2: Multiplicação por escalar

Crie um novo arquivo, por exemplo, *aula2_atv2*. Antes de iniciar a atividade, habilite a malha quadriculada: *Menu: Exibir > Malha*.

1. Construa um número complexo z_1. Para melhor visualização, associe um vetor a esse número utilizando a ferramenta *Vetor Definido por Dois Pontos*, com uma extremidade na origem do plano.

2. Utilizando a ferramenta *Vetor a Partir de um Ponto*, construa um novo vetor com origem em z_1. Logo, as coordenadas de z_2 indicarão o valor de duas vezes o número complexo z_1, ou seja, $z_2 = 2z_1$. Registre os valores em seu caderno.

3. Experimente multiplicar z_1, por 3 e por -5.

Atividade 3: Exercícios

1) Considere os números complexos $z = 2 + 3i$, $w = 4 + 2i$,$k = -3 + i$ e $j = 2$. Utilize o GeoGebra para calcular:

a) $z + w$

b) $z + k$

c) $z + j$

d) $z + w + j$

e) $w - k$

f) $w - j$

g) $2z$

h) $4w$

i) $2w + 3k$

j) $z - w + k - j$

Salve esta atividade em um novo arquivo, por exemplo, *aula3_atv3*.

Após a relização desta atividade, confira suas respostas utilizando o *Campo de Entrada*.

2) Experimente multiplicar o número imaginário i por ele mesmo, ou seja, quanto é i^2?

Observação: Experimente multiplicar os números complexos do exercício 1 utilizando o *Campo de Entrada*.

Salve esta atividade como *aula3_atv4*.

Professor, encerradas as tarefas dessa seção, é importante que os grupos socializem seus resultados. Para isso, poderá ser realizada a plenária na qual cada grupo irá expor seus resultados, ideias, conjecturas, demonstrações e modos de realizar a atividade.

5.2.3 Conjugado

O terceiro módulo explora a noção de conjugado de um número complexo sobre o plano cartesiano.

Objetivos específicos

- Reconhecer o conjugado de um número complexo sobre plano cartesiano;
- Associar as partes real e imaginária em relação aos eixos coordenados;
- Ler, representar e interpretar números complexos sobre o plano.

Duração: 4 aulas

Recomendações ao professor

Em algumas situações, será necessário utilizar vetores para melhor visualização da construção. Não deixe de contextualizar os diversos conceitos que surgirem durante a realização da atividade.

Atividade 1

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra e certifique-se que a janela de visualização esteja exibindo os eixos coordenados e a malha quadriculada, caso contrário, habilite-a (*Menu: Exibir* > *Eixos* ou *Exibir* > *Malha*). Sugestão: *Menu: Opções* > *pontos sobre a malha* > *Fixar à Malha*. (Este procedimento facilita o deslocamento sobre a malha).

2. Construa um complexo z sobre o plano. Anote em seu caderno os valores que você visualiza na *Janela de Álgebra*.

3. Para facilitar a visualização, construa um vetor que tenha início na origem e vá até o número complexo z que você acabou de construir.

4. De que maneira você construiria o conjugado desse número complexo?

5. Construa mais dois números complexos e encontre seu conjugado.

   Lembre-se de salvar seu arquivo!

6. Abra um novo arquivo e construa o número complexo z.

7. Utilizando a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, encontre seu conjugado.

8. O que aconteceu quando você utilizou esta ferramenta do GeoGebra?

9. Movimente z e vá anotando os novos valores obtidos.

Nomeie e salve o arquivo em sua pasta, por exemplo, $aula3\_atv1$.

Atividade 2

1. Seja $z = 2 + 3i$, calcule a soma de z e seu conjugado. Faça o mesmo para o número complexo $w = -1 - 3i$. Anote suas conclusões no caderno.

2. Utilizando z e w da atividade anterior, encontre a diferença do número complexo e seu conjugado.

   a) O que acontece quando realizamos a soma de número complexo com seu conjugado?

   b) O que acontece quando fazemos $z - \overline{z}$?

   c) Em que situação $z = \overline{z}$? Faça a construção no GeoGebra.

Nomeie e salve seu arquivo em sua pasta, por exemplo, $aula3\_atv2$.

Atividade 3

1) Considere os números complexos $z = 2 + 3i$, $w = 4 + 2i$, verifique se $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

Professor, encerradas as atividades dessa seção é importante que os grupos socializem seus resultados. Para isso, poderá ser realizada a plenária na qual cada grupo irá expor seus resultados, ideias, conjecturas, demonstrações e modos de realizar a atividade. Dessa maneira, o papel do professor é o de conduzir o trabalho dos grupos nessas explorações, podendo, ao final do módulo, mostrar como essas atividades de investigação se aproximam dos conceitos ou fórmulas apresentados nos livros didáticos.

5.2.4 A forma trigonométrica

Este último módulo explora a relação entre as coordenadas cartesianas em termos de coordenadas polares.

Objetivos específicos

- Introduzir a relação entre as coordenadas cartesianas e polares;
- Ler, representar e interpretar pares ordenados sobre o plano coordenado;
- Reconhecer o módulo de um número complexo;
- Reconhecer o argumento de um número complexo.

Duração: 4 aulas

Atividade 1: Módulo

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra e certifique-se que a janela de visualização esteja exibindo os eixos e a malha quadriculada, caso contrário, habilite-a (*Menu: Exibir > Eixos ou Exibir > Malha*). Sugestão: *Menu: Opções > pontos sobre a malha > Fixar à Malha.*

2. Construa o número complexo z_1 e observe sua posição sobre o plano.

3. Utilize a ferramenta *Vetor definido por Dois Pontos* para criar o vetor que parte da origem até z_1.

4. Construa o conjugado do número complexo em questão.

5. Movimento o número complexo z_1 e verifique o que acontece com seu conjugado.

6. No *Campo de Entrada*, insira a multiplicação z_1 por $\overline{z_1}$. Observe o que acontece no plano.

   a) Qual o valor da norma do complexo z_1?

   b) Qual o valor do módulo do número complexo que você construiu? E qual o valor do módulo do conjugado desse número complexo?

   c) Quais relações podemos estabelecer entre os itens 3 e 4?

7. Movimente o número complexo sobre o eixo dos números reais positivos, observando o valor da norma. Agora, movimente sobre os reais negativos. O que acontece com a norma nas duas situações?

8. Movimente z_1 sobre o eixo dos números imaginários. Observe o que acontece.

   a) Qual o valor da norma quando $z_1 = 0$?

9. Usando o *Campo de Entrada*, vamos inserir um ponto ao qual será atribuído o valor numérico do módulo de z_1, para isso, digitamos $c = sqrt(z\_3)$. Movimente o número complexo e verifique o que acontece com a norma e o valor do módulo.

Atividade 2

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra e certifique-se que a janela de visualização esteja exibindo os eixos e a malha quadriculada, caso contrário, habilite-a (*Menu: Exibir* > *Eixos* ou *Exibir* > *Malha*). Sugestão: *Menu: Opções* > *Pontos Sobre a Malha* > *Fixar à Malha*.

2. Construa o número complexo z_1 e observe sua posição sobre o plano.

3. Utilize a ferramenta *Vetor definido por Dois Pontos* para criar o vetor que parte da origem até z_1.

   a) Qual o valor do módulo do número complexo que você construiu?

   b) É possível encontrar o valor do argumento desse número complexo?

4. Construa um ponto qualquer sobre o eixo das abscissas.

5. Utilizando a ferramenta *Ângulo* construa o ângulo entre o eixo das abscissas e o vetor. A ferramenta *Ângulo* necessita de três pontos, por essa razão, construímos o ponto no item 4.

6. Podemos aumentar a área de visualização selecionando com o botão direito do mouse sobre o ângulo, em seguida, *Propriedades* > *Estilo* > *Tamanho* > *Fechar*.

7. Movimento o número complexo e verifique os valores do argumento. Escolha dois valores de z_1 e faça os cálculos em seu caderno para confrontar com o programa.

Atividade 3

Utilizando o GeoGebra, determine o módulo e o argumento principal, represente na forma trigonométrica e dê a representação gráfica dos seguintes números complexos:

a) 3 b) $1+\sqrt{3}i$ c) $2i$ d) $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

Considerações finais

Ao final deste trabalho, procurou-se estabelecer uma proposta inovadora de aplicação de conteúdos matemáticos para a educação básica, tanto pelo aprofundamento teórico quanto pela utilização de recursos tecnológicos. Para isso, houve uma preocupação na escolha do tema, seu tratamento teórico e a busca por uma metodologia diferenciada.

A elaboração do roteiro de atividades servirá de ferramenta auxiliar para o professor, sendo que o mesmo poderá utilizá-lo para explorar outros conteúdos matemáticos distintos dos que foram apresentados.

Espera-se que as atividades investigativas incentivem os alunos, para que eles tenham uma nova expectativa em relação à disciplina, por meio da elaboração de ideias, da construção e da discussão dos exercícios de forma autônoma.

Do outro lado do processo de ensino, espera-se que com o PROFMAT, outros professores possam ter a oportunidade de aprofundar seus conhecimento, de pesquisar, de propor melhorias e de contribuir para o enriquecimento do ensino da Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] BARROS, Jorge Pedro Dalledonne de; D'AMBROSIO, Ubiratan. **Computadores, escola e sociedade**. Rio de Janeiro: Scipione, 1988.

[2] BORBA, Marcelo de Carvalho. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (org.). **Pesquisas em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

[3] BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 3. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

[4] CALLIOLI, Carlos A; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra linear e aplicações**. 6. ed. rev/17. tir. São Paulo: Atual, 2010.

[5] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

[6] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lucia Torres. **Polinômios e equações algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

[8] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**: volume 6. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

[9] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do ensino médio: volume 1.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Diretoria de Tecnologias Educacionais. **Diretrizes para o uso de tecnologias educacionais**. Curitiba: SEED/Pr., 2010. (Cadernos temáticos).

[11] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes curriculares da educação básica**: matemática. Curitiba: SEED/Pr., 2008.

[12] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **GeoGebra**. Disponível em: `http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1786-6.pdf`. Acesso em: 25/02/2013.

[13] PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

[14] UFPR. Universidade Federal do Paraná. Departamento de Matemática. Programa de Verão/2009. **Geogebra**: aplicações ao ensino da matemática. Curitiba: 2009. Disponível em: `http://cristianopalharini.files.wordpress.com/2009/11/apostila-de-geogebra-ufpr.pdf`. Acesso em: 25/02/2013.

Índice Remissivo