RENATA DA COSTA ABREU

TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

MAIO DE 2015

RENATA DA COSTA ABREU

TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
MAIO DE 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **48/2015**

Abreu, Renata da Costa
Teorema de Pick: uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples / Renata da Costa Abreu. – Campos dos Goytacazes, 2015.
68 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2015.
Orientador: Oscar Alfredo Paz La Torre.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 66-67.
1. ÁREAS DE POLÍGONOS 2. TEOREMA DE PICK 3. GEOMETRIA – NOVA ABORDAGEM I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáicas II. Título

CDD 516

RENATA DA COSTA ABREU

TEOREMA DE PICK: UMA ABORDAGEM PARA O CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS SIMPLES

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 29 de maio de 2015.

Profª. Liliana Angelina Leon Mescua
D.Sc. - UENF

Prof. Paulo Sérgio Dias da Silva
D.Sc. - UENF

Mônica Souto da Silva

Prof. Mônica Souto da Silva Dias
D.Sc. - IFF Campus Campos Centro

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho a vocês, que sempre me fizeram acreditar na realização dos meus sonhos e trabalharam muito para que eu pudesse realizá-los.

Agradecimentos

Que vitória chegar até aqui. Da decisão de realizar o Exame Nacional de Acesso e aprovação, conclusão de inúmeras disciplinas, enfrentamento do doloroso Exame de Qualificação até a conclusão do Mestrado, foi um longo caminho percorrido. Nada foi fácil, muito menos tranquilo e, tenho certeza, só foi possível devido ao apoio e a ajuda de muita gente.

Quero agradecer a todos aqueles que sempre confiaram em mim, me apoiaram e me incentivaram incondicionalmente.

A Deus, Este que dispensa qualquer comentário.

À minha família e aos meus verdadeiros amigos.

Aos meus pais, por terem me dado educação, princípios e por terem me ensinado a buscar meus sonhos confiando em Deus e no Seu infinito poder. Pelo amor e apoio incondicional. A vocês que, muitas vezes, renunciaram aos seus sonhos para que eu e meus irmãos pudéssemos realizar os nossos, ofereço a grande satisfação desta conquista.

Aos irmãos que Deus colocou em minha vida: Fernando e Roberta. Amor verdadeiro. A distância não significa tanto quando a certeza de nosso amor, companheirismo e sinceridade é presente em nossa relação, mesmo distantes nossos corações estão unidos.

Ao meu esposo, pelo apoio e companheirismo.

Aos meus amigos, que estiveram presentes desde a realização do exame de acesso até a conclusão desta etapa. Amigos estes, que me incentivaram, que torceram por mim, que estavam sempre ouvidos diante das minhas lamentações e dificuldades. Amigos que me compreendem mesmo em silêncio.

A todos os meus familiares, a estes incluo meus cunhados, pessoas especiais, que direta ou indiretamente me incentivaram.

Ao professor Oscar, meu orientador, por ter permitido que concluísse esse trabalho.

Aos professores deste curso pelas aulas e incansáveis explicações, por desvelarem novos horizontes diante de minhas dificuldades.

Aos professores que aceitaram compor minha banca de defesa.

Aos alunos da turma do Mestrado, pela paciência e companheirismo, por tudo o que com eles aprendi, por partilharem a construção do meu estudo e, principalmente, pelo estímulo em continuar, mesmo quando o cansaço parecia nos abater. Agradeço também, as companhias nas idas e vindas pelas distantes estradas.

À Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo, por ter concedido o Afastamento para Estudo, pois sem este, não seria possível prosseguir.

Deixei por último o meu agradecimento especial, à pessoa mais importante de minha vida: meu filho Bruno. Apesar de tão pequenino é merecedor de toda a minha gratidão, por ter, até mesmo sem saber, permitido que eu chegasse até aqui; por ter suportado minha ausência, quando na verdade, necessitava de minha presença; por ter sido meu principal motivador, uma vez que tudo que sou e tudo que faço, é dedicado a você.

Com todos vocês divido a alegria desta conquista.

"Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem
foram conquistadas do que parecia impossível."

Charles Chaplin

Resumo

Ao se falar em Geometria Plana e, mais especificamente, área de polígonos, o que se percebe é um enorme receio na apresentação, demonstração e aplicação de inúmeras fórmulas. Emerge então daí a necessidade de criar novas possibilidades para o estudo desta parte da Geometria. Nesse contexto, o objetivo do estudo foi destacar a importância de se criar novas abordagens que facilitem o processo ensino-aprendizagem da Geometria, com foco no cálculo de áreas de polígonos simples. Para tanto, a metodologia utilizada foi a pesquisa qualitativa, na modalidade investigação-ação, desenvolvida em novembro de 2014, em três turmas de primeiro ano do ensino médio de uma escola pública no município de Bom Jesus do Itabapoana – RJ, com média de 35 alunos/turma. Os resultados demonstraram que a inserção de materiais concretos e diferenciados, além do uso de recursos tecnológicos tornam as aulas interessantes e interativas, permitindo a melhor compreensão dos conteúdos, dando grande destaque para a Geometria, considerada complicada por grande parte dos alunos e até mesmo por alguns professores. Concluiu-se que, por meio das atividades propostas, foi possível aos estudantes aprenderem uma forma inovadora de solucionar problemas envolvendo áreas utilizando o Teorema de Pick, especialmente quando os polígonos não são regulares, onde este se mostra mais eficiente, pois nesses casos não há fórmulas específicas.

Palavras-chaves: Áreas de polígonos; Teorema de Pick; Geometria - Novas Abordagens.

Abstract

Once observing Plane Geometry, and more specifically the area of polygons, what is observed is a huge fear on the presentation, the demonstration and the application of countless formulas. It emerges from this point the necessity of creating new possibilities to study this section of Geometry. In such a context, the study objective was to point out the importance of making new approaches which are able to ease the teaching-learning process on Geometry, focusing on the area calculation of simple polygons. For this, the methodology used was the qualitative research in the research-action mode, developed in November of 2014 with three First Grade high school classes (each around 35 students per class) from a public school in the city of Bom Jesus do Itabapoana – RJ. The results showed that the insertion of concrete and differentiated materials, besides the use of technology resources, make the classes interesting and interactive, allowing a better content comprehension and so detaching Geometry, which is considered complicate by a great portion of students and even some teachers. It is concluded that through the proposed activities, it becomes possible to the students understand an innovative form of solving problems involving areas according to the use of Pick's Theorem, especially when the polygons are not regular, which is shown more efficient, once there are no specific formulas for these cases.

Key-words: Areas of Polygons; Pick's Theorem; Geometry - New Approaches.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

B	Número de pontos do contorno (borda)
I	Número de pontos interiores
S	Área
S_p	Área de polígono
V	Número de vértices
F	Número de faces
A	Número de arestas
A_i	Número de arestas internas
A_e	Número de arestas externas
m^2	Metro quadrado
cm^2	Centímetro quadrado
km^2	Quilômetro quadrado
ha	Hectare
hm^2	Hectômetro quadrado

Lista de símbolos

$\in$	Pertence
$\cup$	União
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
π	Letra grega pi
$\cong$	Aproximadamente
$<$	Menor que
$>$	Maior que
$\leq$	Menor ou igual que
$\geq$	Maior ou igual que

Sumário

Introdução

Considerar as motivações de produção do trabalho dissertativo é sempre relevante frente ao que foi produzido. Ao iniciar a busca por algum tema para desenvolver na dissertação, deparei-me com alguns que despertaram meu interesse. Havia temas amplos, complexos, incomuns, mas também temas simples e comuns no contexto da educação matemática. Surgiram muitas dúvidas quanto à escolha.

Quando comecei a ler o livro *Meu professor de Matemática e outras histórias*, de autoria de Elon Lages Lima, o sumário já me chamou atenção devido ao item *Como calcular a área de um polígono, se você sabe contar*. Fiquei curiosa, pois parecia uma grande contradição: simplicidade versus enorme possibilidade. A partir dessa leitura fiquei conhecendo o Teorema de Pick, que apesar da simplicidade, é encantador, pois permite calcular a área de um polígono simples a partir da contagem dos pontos da malha quadriculada.

Realizei várias buscas sobre o teorema, mas o que pude perceber é que não teria muito referencial teórico para realizar minha pesquisa, pois poucas são as publicações a respeito do tema, o que dificultaria a realização da mesma. Apostei no desafio.

Ao se falar em área de polígonos, o que se percebe é um enorme receio na apresentação, demonstração e aplicação de inúmeras fórmulas. Emerge daí a necessidade de criar novas possibilidades para o estudo desta parte da Geometria, foi então que achei válido apresentar o Teorema de Pick como uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos, pois, além de ser uma forma de calcular a área de diferentes polígonos simples com uma única fórmula, é de fácil aplicabilidade em outras áreas do conhecimento.

Satisfazendo a hipótese de que o polígono deve estar fixado em uma malha quadriculada, cujos vértices coincidem com os encontros das retas dessa malha, para que tenha validade, o teorema permite o cálculo de áreas de polígonos simples não regulares, em que não há fórmulas pré-definidas. Isso permite um trabalho contextualizado, pois se pode propor cálculo de áreas geográficas, estudos de danos ambientais ou quaisquer outros em que se obtém um polígono simples que pode ser sobreposto a uma malha quadriculada.

A apresentação, demonstração e aplicação do Teorema de Pick podem ser consideradas de grande importância, quando abordado em uma perspectiva que poderá contribuir para a realização dos objetivos a que a moderna educação matemática propõe-se, como um estudo paralelo ao da geometria tradicional, possibilitando um trabalho contextualizado e interdisciplinar. Afinal, o teorema possibilita utilizar e explorar atividades em situações do cotidiano, com potencialidades formativas. Essa contextualização deve ser prioridade no ensino.

O que se pretende, então, é discutir a importância, a função e a necessidade de apresentar outras abordagens no ensino da Geometria, com destaque para o Teorema de Pick. Mediante o exposto, tomou-se como **objeto** desse estudo o Teorema de Pick, apresentado como uma abordagem no cálculo de áreas de polígonos simples. Essa perspectiva encaminhou à seguinte **questão-problema**: de que forma o Teorema de Pick pode auxiliar no cálculo de áreas de polígonos simples?

Para desvelar o objeto deste estudo e dar veracidade ao tema, primou-se como **objetivo geral**, a importância de se criar novas abordagens que facilitem o processo ensino-aprendizagem da Geometria, com foco no cálculo de áreas de polígonos simples. E como desdobramentos, apresentam-se como **objetivos específicos**: analisar questões de cálculo de área de polígonos simples com diferentes tipos de resolução; investigar a aceitação do Teorema de Pick como auxiliar no cálculo de áreas de diferentes polígonos simples; mostrar o sentido de se apresentar materiais manipuláveis, mais especificamente o Geoplano, que tornam o ensino mais prazeroso e conduz o aluno do concreto para a abstração.

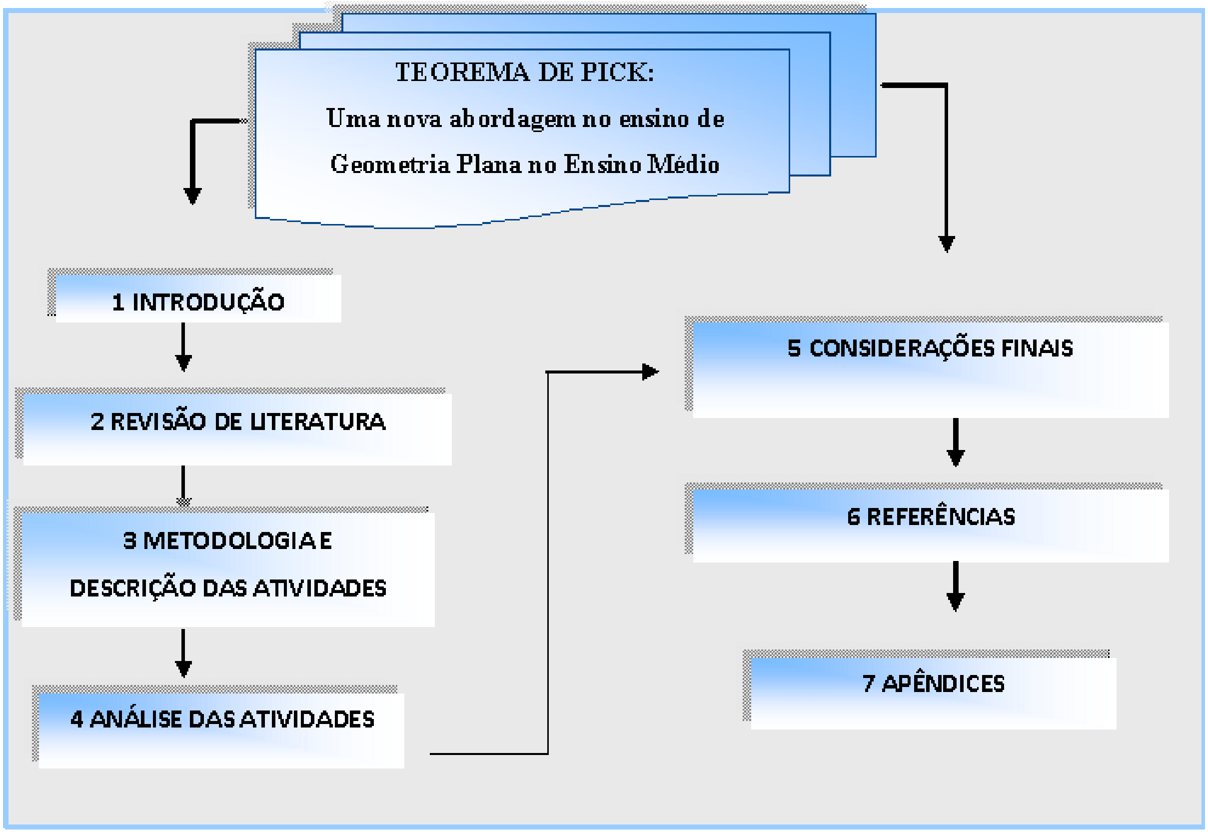
Sendo assim, esta investigação se **justifica** na medida em que busca desvelar a importância da apresentação de novas abordagens que visem facilitar o ensino-aprendizagem de conteúdos geométricos e que conduzam o aluno a uma aprendizagem significativa.

O estudo está dividido em capítulos, dispostos da seguinte forma: a Introdução, em que, após a contextualização do tema da pesquisa, são descritos os objetivos, situação problema e a contribuição científica. A seguir, é desenvolvida a revisão de literatura, detalhando toda a pesquisa bibliográfica realizada, essencial para o entendimento da posterior análise das atividades desenvolvidas. Depois, são apresentados os aspectos metodológicos pertinentes ao estudo, dando destaque para as demonstrações da Fórmula de Pick.

> A ideia de que a importância da Matemática reside no raciocínio lógico dedutivo que ela emprega é uma noção bastante generalizada; e não apenas os leigos pensam assim, pois muitos professores de Matemática também, acreditam ser o encadeamento lógico das demonstrações a essência do pensamento matemático.
>
> Isto todavia, é uma visão parcial, já que o pensamento matemático vai muito além do raciocínio lógico dedutivo. Em seus aspectos mais criativos, ele repousa sobretudo na intuição, no raciocínio plausível e nos recursos heurísticos, na imaginação e na visualização geométrica. Muito frequentemente, o raciocínio demonstrativo apenas legitima o conhecimento já adquirido através desses outros recursos – os mais férteis da criatividade intelectual (Geraldo Ávila, apud (HELLMEISTER, 2013, p. 69)).

Em seguida, são explicitadas e analisadas as atividades aplicadas com a população do estudo. Por fim, são apresentadas as considerações finais, elaboradas ao término do estudo.

Figura 1 – Organização do Trabalho



Fonte: Elaboração própria

Espera-se que este estudo venha servir de subsídio aos profissionais da área, preocupados com as práticas cotidianas no ensino da Geometria, permitindo-lhes apresentação de outras abordagens no processo educativo.

Capítulo 1

Apresentação histórica, Aprendizagem significativa, Definições e Áreas de polígonos simples

1.1 Breve histórico da Geometria

Para que se entenda o foco desse estudo, faz-se necessário abordar a Geometria Plana, seus principais conceitos e um breve panorama histórico. Não há dúvidas quanto à importância da geometria no cotidiano da vida humana e o quanto o saber matemático foi revolucionário proporcionando, principalmente, grandes efeitos no setor de construção e medição de terras/áreas. Basta analisar a raiz a palavra geometria: geo (terra), metria (medida).

Assim como todos os ramos do conhecimento, a geometria surgiu da necessidade e observação humana. Com um olhar ao redor, temos o sol, os picos, os animais, a natureza em geral, os desenhos feitos pelo homem no processo da escrita, as esculturas, construção de templos, altares, casas, medição de terras, enfim, uma diversidade de formas inerentes ao ser.

> O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar (BOYER, 1974, p. 4).

Além dessa gama presente no dia-a-dia, desde aquela época, a necessidade de medição e cálculos presentes em tantos contextos da vida humana fez com que os conhecimentos da geometria se tornassem emergentes, indispensáveis.

Com as frequentes cheias do Rio Nilo, a remarcação das terras era necessária e, para o cálculo das áreas, o uso da Geometria já se dava, de forma ainda subconsciente, intuitiva. A origem da geometria apresenta incógnitas,

> Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de por seus registros e pensamentos em forma escrita. Para informações sobre a pré-história dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidência fornecida pela moderna antropologia e de extrapolação retroativa, conjetural a partir dos documentos que sobreviveram (BOYER, 1974, p. 4).

Os principais registros históricos obtidos destacam o conceito de área ligado à mensuração realizada pelas antigas civilizações do Egito e Mesopotâmia, região da Babilônia, que relatam já existir, à época, sociedades avançadas, ao longo do Rio Nilo, e territórios circundantes, conhecidas por habilidades de irrigação e drenagem, técnicas agrícolas, práticas voltadas à construção civil. Tais sociedades, mesmo não sabendo, já desenvolviam conhecimentos matemáticos, a destacar: os desenhos; cálculos; desenvolvimento de peso e medida; medição de reservatórios, canais e área para mensurar terrenos, hoje conhecida como agrimensura, que se aprimoraram ao longo dos tempos. Hoje, esses conceitos são essenciais à arquitetura e construção e ficaram conhecidos como geometria babilônica, conforme afirma

> A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônicos [...] deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo, e do triangulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente do volume de um prisma reto de base trapezoidal... (EVES, 2011, p. 61).

Foi em 300 a.C. que o 'pai da geometria' Euclides de Alexandria organizou vários trabalhos de extrema importância sobre Geometria e, com a intenção de dar uma estrutura lógica, os compilou na obra intitulada *Os Elementos*. Obra esta que foi e continua sendo a maior, nesse ramo, já publicada. *Os Elementos* são organizados em treze livros e, mesmo após tantos anos, a Geometria que se vê hoje nas escolas provém dessa extraordinária obra. O que se percebe é que os textos utilizados atualmente sofreram muitas modificações e se apresentam mais atuais, mas a forma como a Geometria é trabalhada na sala de aula ainda segue modelos tradicionais. Vale elucidar que

> Devemos ter em mente a teoria da origem da geometria numa secularização de práticas rituais não está de modo nenhum provada. O desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem. Podemos fazer conjunturas sobre o que levou os homens da idade da Pedra a contar, medir, e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações

> é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjetura com história. É melhor suspender o julgamento nessa questão e ir adiante, ao terreno mais firme da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram até nós (BOYER, 1974, p. 5).

E, em se tratando de terreno mais alicerçado, os Parâmetros Curriculares Nacionais definem a matemática como:

> Matemática é uma linguagem que busca dar conta de aspectos do real e que é instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências. É importante considerar que as ciências, assim como as tecnologias, são construções humanas situadas historicamente e que os objetos de estudo por elas construídos e os discursos por elas elaborados não se confundem com o mundo físico e natural, embora este seja referido nesses discursos. Importa ainda compreender que, apesar de o mundo ser o mesmo, os objetos de estudo são diferentes, enquanto constructos do conhecimento gerado pelas ciências através de leis próprias, as quais devem ser apropriadas e situadas em uma gramática interna a cada ciência. E, ainda, cabe compreender os princípios científicos presentes nas tecnologias, associá-las aos problemas que se propõe solucionar e resolver os problemas de forma contextualizada, aplicando aqueles princípios científicos a situações reais ou simuladas. Enfim, a aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2000, p. 20).

Vale ressaltar que no decorrer dos anos, ocorreram certos déficits no quesito algébrico, uma vez elucidado uma série de problemas quanto à arte de calcular. Apesar deste ponto, a história foi essencial para que hoje a Matemática esteja bem fundamentada e ainda venha sendo desenvolvida, de forma mais sistematizada. Assim, parte-se dessa história, observa-se sua evolução e destaca-se a importância de priorizar conteúdos de fácil aplicabilidade, como é o caso do Teorema de Pick, foco em questão.

1.2 Breve Biografia de Georg Pick

Esta seção foi escrita baseada em Wikipedia (2014).

Georg Alexander Pick nasceu em Viena, no ano de 1859, advindo de uma família judia. Entrou para a Universidade de Viena em 1875, com apenas dezesseis anos. No ano seguinte, publicou seu primeiro artigo matemático. Graduou-se em 1879, com qualificação em Matemática e Física, podendo lecionar ambas as disciplinas. Na mesma Universidade, defendeu seu Doutorado em 1880. Atuou nas universidades alemãs de Praga e de Leipzig. Participou da comissão que indicou Albert Einstein para a cadeira de Física na Universidade de Praga e, a partir de então, os dois se tornaram grandes amigos. Havia uma troca de conhecimentos científicos, mas ainda despertaram o interesse pela música, formando com outros dois amigos, também professores da universidade, um quarteto musical.

Focando seu trabalho no campo da matemática, escreveu 67 artigos, dentre eles o Teorema de Pick. Apesar de simples, porém bastante útil, a fórmula de Pick ficou obscura por vários anos. Acredita-se que o autor não a considerou uma grande descoberta, tendo-a publicado na Sitzungsber, uma seção de matemática pouco conceituada de Praga. O teorema de Pick recebeu mais atenção ao ser publicado pelo matemático polonês H. Steinhaus, que o incluiu em um de seus livros, em 1969, setenta anos depois de Pick o ter publicado.

Pick retornou para Viena em 1927, após ter aposentado. Como reconhecimento de uma vida dedicada a grandes estudos, foi eleito membro da Academia das Ciências e das Artes da República Tcheca. Após os nazistas assumirem o poder, Pick foi expulso da Academia, preso e enviado para o campo de concentração de Theresienstadt, em 1942, morrendo duas semanas depois.

1.3 Aprendizagem Significativa segundo David Ausubel

David Ausubel foi um psicólogo e pedagogo norte-americano que ganhou notoriedade por seu estudo sobre os processos de aprendizagem, investigando os diversos tipos de aprendizagem e defendendo que a motivação e a possibilidade de escolha dos estudantes desempenham um papel fundamental.

Nesse contexto, cabe ao professor, antes de apresentar um tema, informar os objetivos a serem atingidos, relacionando-os com os saberes já adquiridos, ou seja, a aprendizagem significativa, o qual o que será aprendido deve integrar-se ao que o sujeito já conhece.

De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. 137), para se reduzir a psicologia educacional em um único princípio este seria que "o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece".

> Quando o novo material se relaciona, de forma não arbitrária, com o conhecimento já adquirido, a aprendizagem é mais eficiente do que quando esse material deva simplesmente ser armazenado, pelo aprendiz, de forma arbitrária. A esse tipo de aprendizagem, em que o novo conteúdo se associa, de forma não arbitrária, a estrutura cognitiva pré-existente, Ausubel chama de aprendizagem significativa *(meaningful learning)*, em contraposição a aprendizagem de materiais sem sentido, de associações arbitrárias, de simples memorização de pares ou séries de palavras *(rote learning)* (AUSUBEL, 2000, p.1).

Para que ocorra uma aprendizagem significativa, é necessário que existam duas condições: o aluno deve estar predisposto a aprender e o conteúdo a ser trabalhado deve ser potencialmente significativo, ou seja, deve ter significado lógico, que depende somente da natureza do conteúdo, e significado psicológico, que é a experiência de cada indivíduo (PELIZZARI et al., 2001).

A aprendizagem mecânica, ao contrário, é aquela que apresenta novas informações isoladamente, não havendo interação com conceitos já aprendidos, tornando o conhecimento estático, fixo e imutável e não como uma construção, o qual o sujeito adquire conhecimentos relevantes, compreende as informações e as analisa criteriosamente.

1.4 Definições utilizadas

No decorrer do estudo serão citados alguns termos, sendo, portanto, necessário defini-los.

Hellmeister (2013, p. 292) afirma que polígono se constitui em uma linha poligonal fechada sem autointersecções, ou seja, cada lado possui somente um ponto comum com o lado anterior e seguinte, não com os demais. Por vezes, pode designar a região do plano limitada por essa linha poligonal fechada sem autointersecções.

A malha quadriculada é uma base formada por retas horizontais e verticais distantes uniformemente. As malhas quadriculadas podem ser utilizadas nos diferentes segmentos da educação, pois proporciona aos alunos a familiarização com diferentes desenhos, incluindo as formas geométricas, além disso, facilita a introdução de conceitos como área, simetria e proporcionalidade. É comum usar outros termos para definir malha quadriculada, tais como: plano reticulado ou rede no plano.

> Rede no plano é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1. Tomando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem em um ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na vertical, a rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas (m, n) são números inteiros (positivos, negativos ou zero)(LIMA, 2012, p. 117).

Nesse trabalho será mencionado o termo malha quadriculada.

Triângulo e paralelogramo fundamental são bem definidos:

> Um triângulo chama-se fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou do interior) sobre a rede.
>
> Analogamente, um paralelogramo diz-se fundamental quando os quatro vértices são os únicos dos seus pontos que pertencem à rede.
>
> Evidentemente, qualquer das duas diagonais de um paralelogramo fundamental o decompõe em dois triângulos fundamentais com uma base comum.
>
> Reciprocamente, partindo de um triângulo fundamental ABC, podemos obter um paralelogramo ABCD, traçando pelo ponto C uma paralela ao lado AB e pelo ponto B uma paralela ao lado AC, que se encontram no ponto D (LIMA, 2012, p. 119).

Tais definições poderão ser utilizadas para melhor compreensão do tema em questão.

1.5 Área das figuras planas

Na matemática escolar, conceitua-se área como grandeza, a partir desse pressuposto pode-se dizer que área é a medida de uma parte do plano ocupada por uma figura específica. Para determinar a área de uma região do plano faz-se necessário comparar sua superfície com a de outra considerada como padrão. Lima (2006, p. 246) afirma que: "medir uma grandeza significa compará-la com uma outra de mesma espécie tomada como unidade".

> Um número (real) é o resultado da comparação de uma grandeza com a unidade, que é uma grandeza da mesma espécie, fixada como padrão. Há basicamente dois tipos de grandeza: as *discretas* (como um rebanho) e as *contínuas* (como o tempo, o peso e a distância). Comparar uma grandeza discreta com a unidade significa efetuar uma *contagem*; o resultado é sempre um número inteiro. Se, entretanto, a grandeza é contínua, compará-la com a unidade é *medi-la*; o resultado da comparação (medida) é um número real. Se a grandeza (contínua) que se quer medir é comensurável com a unidade escolhida, a medida é um número racional; se é incomensurável, sua medida é um número irracional (LIMA, 2006, p. 8).

Para realizar essas comparações, faz-se necessário utilizar uma grandeza predefinida como referência, grandeza essa chamada de unidade padrão. A unidade de medida padrão utilizada com maior frequência é o metro, definido a partir da necessidade de se estabelecer uma unidade natural, ou seja, que fosse buscada na natureza e pudesse ser facilmente copiada e estabelecida como padrão. Sendo assim, escolheu-se a Terra como referência para definir essa unidade e adotou-se o metro, que é a décima milionésima parte de um quarto do meridiano terrestre.

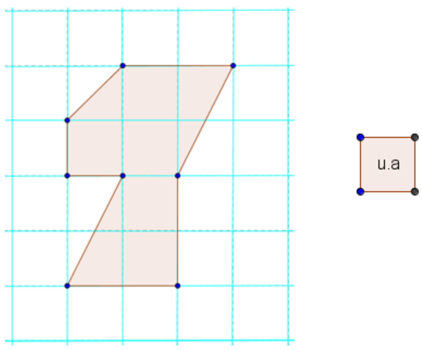
O metro quadrado, representado por m^2, é a unidade padrão de área, derivada do metro, pois corresponde à área ocupada por um quadrado com um metro de lado. Existem diversas outras unidades de medida de área usadas, de acordo com o contexto ou tomados como unidades específicas para cada caso, baseado no tamanho da área a ser medida. O centímetro quadrado (cm^2) corresponde a um quadrado de $1cm$ de lado, geralmente empregado para medir regiões pequenas, menores que o metro. O quilômetro quadrado (km^2) é muito usado para medir territórios ou outras superfícies consideradas maiores que o metro. O hectare (ha) corresponde a área ocupada por um quadrado de lado equivalente a $100m$, um hectare equivale a um hectômetro quadrado (hm^2), é utilizado na medição de áreas rurais, áreas de reflorestamento e desmatamento, entre outras.

Sendo assim, pode-se afirmar que área é a medida de uma superfície tomada com a finalidade de se estabelecer uma comparação e definir qual é maior ou menor, baseado em uma unidade de medida adotada.

Em alguns casos é comum não utilizar unidades de medida padrão, definindo-a apenas por unidade de área $(u.a.)$ ou unidade de medida $(u.m.)$.

Suponha que se queira medir a região hachurada do plano que está em destaque na figura 2, Área da região hachurada. Faz-se necessário comparar essa região com uma unidade de área, o resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a região hachurada contém a unidade de área. Essa medida assim obtida é a área hachurada.

Figura 2 – Área da região hachurada



Fonte: Elaboração própria

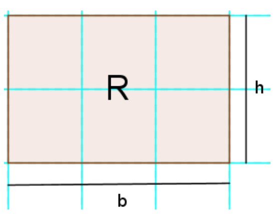
$$S = 7,5u.a$$

1.5.1 Área do retângulo

Retângulo é todo quadrilátero que tem os quatro ângulos retos e, consequentemente, os lados opostos são paralelos. Dada uma região retangular, para obter a área basta multiplicar a medida da base (b) pela medida da altura (h):

$$S_{(R)} = b.h$$

Figura 3 – Área do retângulo



Fonte: Elaboração própria

Se $b = 3$ e $h = 2$, então:

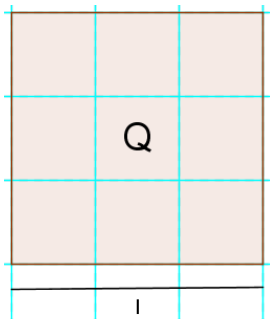
$$S = 3.2 = 6u.a$$

1.5.2 Área do quadrado

Quadrado é todo quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos, pode-se dizer que o quadrado é um retângulo que possui todos os lados iguais. Dada uma região quadrada, cujo lado mede l, sendo l um número real positivo qualquer. Essa região pode ser decomposta em l^2 regiões quadradas justapostas, assim, a área do quadrado é dada por:

$$S_{(Q)} = l^2$$

Figura 4 – Área do quadrado



Fonte: Elaboração própria

Se $l = 3$, então:

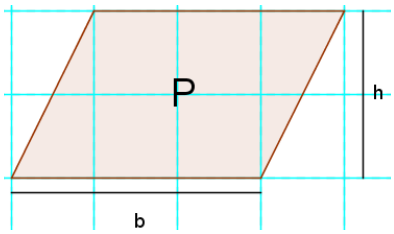
$$S = 3^2 = 9u.a$$

1.5.3 Área do paralelogramo

Paralelogramo é todo quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos. A área da região limitada por um paralelogramo equivale ao produto da medida de uma de suas bases (b) pela medida da altura correspondente a base escolhida (h):

$$S_{(P)} = b.h$$

Figura 5 – Área do paralelogramo



Fonte: Elaboração própria

Se $b = 3$ e $h = 2$, então:

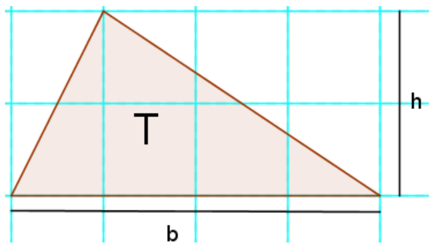
$$S = 3.2 = 6u.a$$

1.5.4 Área do triângulo

Triângulo é o polígono que possui três lados e três ângulos. A condição de existência de um triângulo é que qualquer um de seus lados seja menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença entre eles. A área de uma região triangular é a metade do produto da medida da base (b) pela medida da altura (h):

$$S_{(T)} = \frac{b.h}{2}$$

Figura 6 – Área do triângulo



Fonte: Elaboração própria

Se $b = 4$ e $h = 2$, então:

$$S = \frac{4.2}{2} = 4u.a$$

No caso do triângulo equilátero, ou seja, o triângulo que possui os três lados e os três ângulos iguais, a área, cujo lado mede l, pode ser obtida pela fórmula:

$$S_{(T_e)} = \frac{l^2.\sqrt{3}}{4}$$

1.5.5 Área do trapézio

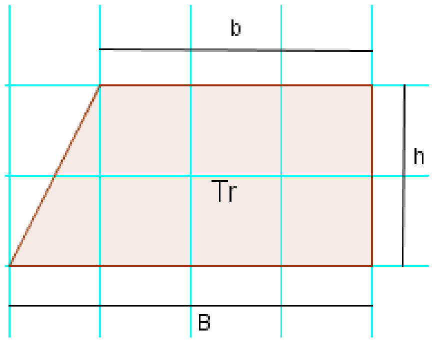
Trapézio é todo quadrilátero que possui um só par de lados paralelos, ou seja, suas bases são paralelas. A área de uma região trapezoidal é semissoma das medidas das bases (B: base maior; b: base menor) multiplicada pela medida da altura (h).

$$S_{(T_r)} = \frac{(B + b).h}{2}$$

Se $B = 4$, $b = 3$ e $h = 2$, então:

$$S = \frac{(4 + 3).2}{2} = 7u.a$$

Figura 7 – Área do trapézio



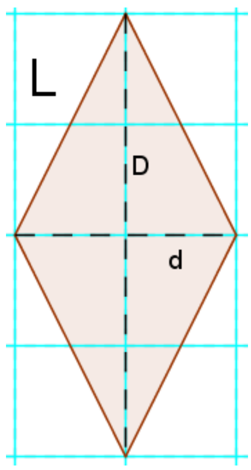
Fonte: Elaboração própria

1.5.6 Área do losango

Losango é todo quadrilátero que tem os quatro lados com medidas iguais. A área de uma região limitada por um losango é dada pela metade do produto da medida de suas diagonais (D: diagonal maior; d: diagonal menor).

$$S_{(L)} = \frac{D.d}{2}$$

Figura 8 – Área do losango



Fonte: Elaboração própria

Se $D = 4$ e $d = 2$, então:

$$S = \frac{4.2}{2} = 4u.a$$

Capítulo 2

O Teorema de Pick

2.1 A Fórmula de Pick

Utilizada para calcular a área de um polígono simples, cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada, é uma fórmula simples, porém bastante interessante, pois possibilita o cálculo da área através da simples contagem de pontos, minimizando as dificuldades encontradas na resolução de problemas geométricos devido ao uso de inúmeras fórmulas.

Teorema 2.1 ***(Teorema de Pick)*** *A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada é dada pela fórmula*

$$S = \frac{1}{2}B + I - 1 \tag{2.1}$$

em que B é o número de pontos da malha quadriculada, situados sobre o contorno (borda) do polígono e I é o número de pontos da malha quadriculada, situados no interior do polígono.

A seguir seguem alguns exemplos e posteriormente serão apresentadas as demonstrações da fórmula de Pick.

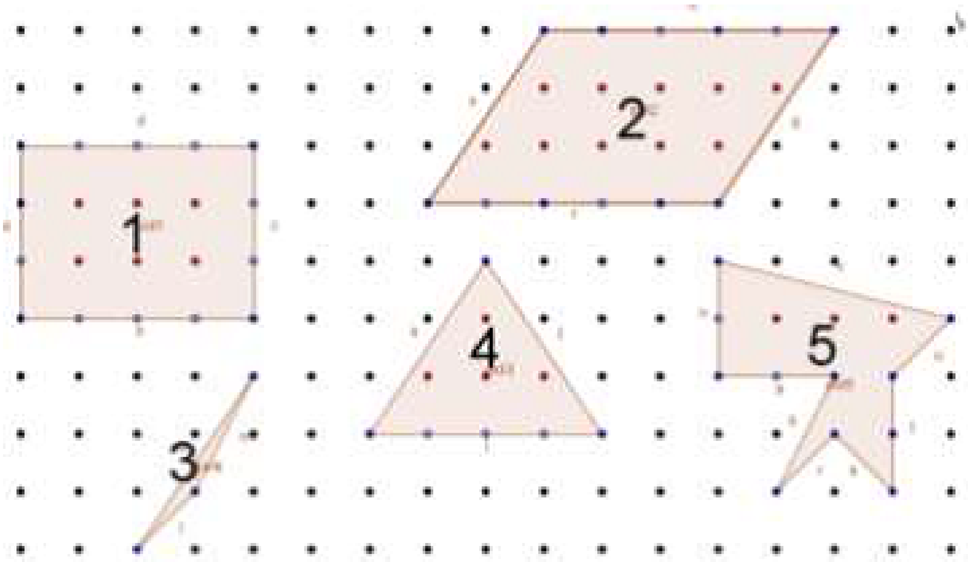
A Figura 9, Polígonos simples, mostra alguns polígonos que podem ter suas áreas calculadas utilizando a fórmula de Pick.

$$S_{(Pol_1)} = \frac{14}{2} + 6 - 1 = 12$$

$$S_{(Pol_2)} = \frac{12}{2} + 10 - 1 = 15$$

$$S_{(Pol_3)} = \frac{3}{2} + 0 - 1 = \frac{1}{2}$$

Figura 9 – Polígonos simples



Fonte: Elaboração própria

$$S_{(Pol_4)} = \frac{6}{2} + 4 - 1 = 6$$

$$S_{(Pol_5)} = \frac{11}{2} + 3 - 1 = \frac{15}{2}$$

Observe que os polígonos são simples e, por esse motivo, podem ter suas áreas facilmente calculadas, utilizando a fórmula de Pick. A grande vantagem no uso desta fórmula está na facilidade de calcular a área do polígono 5, por exemplo, que não é um polígono regular e não tem nenhuma fórmula pré-definida pela geometria convencional, sem fazer a divisão em polígonos justapostos, que utilizariam diversas fórmulas e demandariam um tempo maior.

Vale ressaltar que há a necessidade de analisar os polígonos fixados em uma malha quadriculada, o que não mais será mencionado no que segue.

2.2 Demonstração do Teorema de Pick

Há diversas demonstrações desse teorema. Neste trabalho serão apresentadas três delas: a primeira baseada no livro *Meu professor de Matemática e outras histórias*, de autoria de Elon Lages Lima; a segunda por meio do processo de justaposição e a última que conduz a demonstração em um processo de indução infinita.

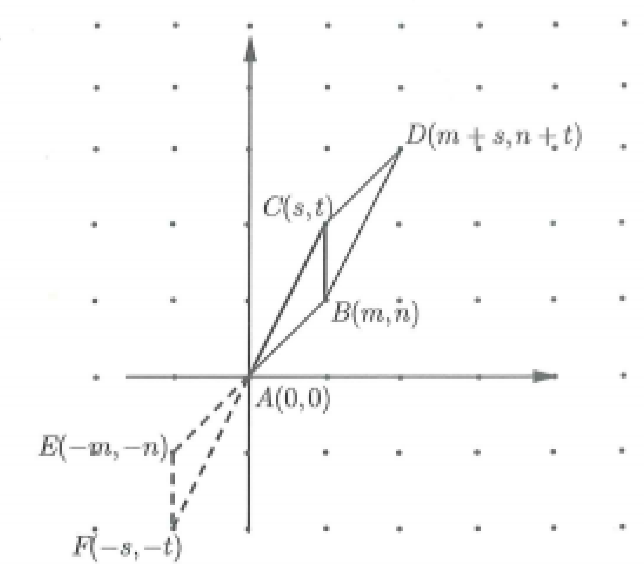
Em sua demonstração, Lima (2012, p. 119), utiliza alguns Teoremas e um Corolário que segue abaixo:

Teorema 2.2 *Se ABC é um triângulo fundamental então $ABCD$ é um paralelogramo fundamental.*

Demonstração:

> Tendo como origem o ponto $A(0,0)$, consideremos um sistema de coordenadas cartesianas no plano, em relação ao qual os pontos da rede têm coordenadas inteiras. Sejam $B(m,n)$ e $C(s,t)$ as coordenadas dos outros dois vértices do triângulo ABC. Então, o quarto vértice do paralelogramo terá coordenadas $D(m+s, n+t)$, sendo m e n primos entre si.
>
> O triângulo AEF, cujos vértices são
>
> $$A(0,0), E(-m,-n)eF(-s,-t)$$
>
> é obtido trocando-se os sinais de ambas as coordenadas de cada ponto do triângulo ABC. Logo AEF não contém outro ponto com coordenadas inteiras, além dos seus vértices, isto é, AEF é fundamental. O triângulo BCD é formado pelo pontos $P'(x+m+s, y+n+t)$, obtidos somando-se $m+s$ à abcissa e $n+t$ à ordenada de um ponto arbitrário $P(x,y)$ do triângulo AEF. Se P' tem coordenadas inteiras, P também tem. Como AEF é fundamental, o mesmo se dá com BCD. Assim, os únicos pontos com coordenadas inteiras no paralelogramo $ABCD$ são os vértices, ou seja, $ABCD$ é fundamental (LIMA, 2012, p. 119).

Figura 10 – Paralelogramo fundamental



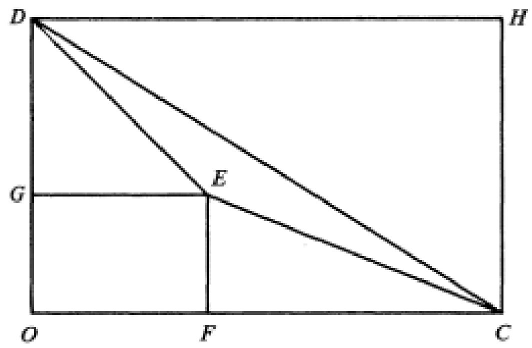
Fonte: (LIMA, 2012, p. 120)

Teorema 2.3 *A área de um triângulo fundamental é igual a $\frac{1}{2}$.*

Demonstração baseada em Liu (1979, p. 233):

Seja CDE um triângulo fundamental e seja $OCHD$ um paralelogramo que contém CDE. Podemos supor que CD é uma diagonal do retângulo, como mostra a Figura 11, Área do triângulo fundamental.

Figura 11 – Área do triângulo fundamental



Fonte: (LIU, 1979, p. 233)

Temos os segmentos EF e EG, perpendiculares a OC e OD, respectivamente; o ponto O como a origem; OC e OD os eixos cartesianos; $F = (p, 0)$ e $C = (q, 0)$ os pontos contidos na abscissa e $G = (0, r)$ e $D = (0, s)$ os pontos contidos na ordenada.

Se $I_{(P)}$ indica o número de pontos interiores de um polígono, então $I_{(OCHD)} = (q-1)(s-1)$. Se CD não contém outros pontos além de C e D então, $I_{(OCD)} = \frac{1}{2}I_{(OCHD)} = \frac{1}{2}(q-1)(s-1)$. De modo semelhante, $I_{(CEF)} = \frac{1}{2}(q-p-1)(r-1)$ e $I_{(DEG)} = \frac{1}{2}(p-1)(s-r-1)$. Se CDE não contém nenhum ponto interior, então $I_{(OCD)} - I_{(CEF)} - I_{(DEG)} = pr$, número de pontos em $OFEG$ excluindo os pontos dos segmentos OF e OG. Essa última equação resulta em:

$$\frac{1}{2}(q-1)(s-1) - \frac{1}{2}(q-p-1)(r-1) - \frac{1}{2}(p-1)(s-r-1) = p.r$$

Simplificada resulta em:

$$qs - ps - qr = 1.$$

Finalmente, se $S_{(P)}$ indica a área de um polígono,

$$S_{(CDE)} = S_{(OCD)} - S_{(CEF)} - S_{(DEG)} - S_{(OFEG)}$$

$$S_{(CDE)} = \frac{1}{2}qs - \frac{1}{2}(q-p)r - \frac{1}{2}(s-r)p - pr$$

$$S_{(CDE)} = \frac{1}{2}(qs - ps - qr)$$

$$S_{(CDE)} = \frac{1}{2}.$$

Isso completa a prova do Teorema 2.3.

Teorema 2.4 *Todo polígono de n lados pode ser decomposto como reunião de $n-2$ triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

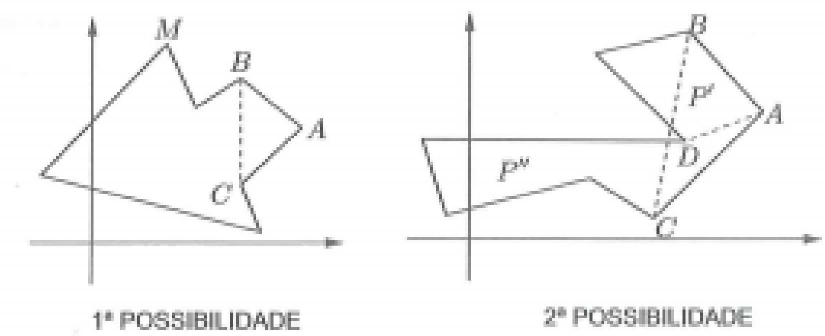
Demonstração:

Supondo, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, seja n o menor número natural tal que existe um polígono P, com n lados, que não pode ser decomposto conforme estipula o enunciado acima. Tomemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja A o ponto de maior abcissa no (bordo do) polígono P. Como nenhum lado de P é vertical, A deve ser um vértice. Sejam B e C os vértices adjacentes a A. Há 2 possibilidades.

Primeira: o triângulo ABC não contém outros vértices de P, além de A, B e C. Neste caso, o polígono P', obtido de P, quando se substituem os lados AB e AC por BC, tem $n-1$ lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema é falso, P' pode ser decomposto em $n-3$ triângulos na forma do enunciado. Juntando o triângulo ABC a essa decomposição, vemos que o teorema é verdadeiro para P, o que é uma contradição.

Segunda: O triângulo ABC contém, além de A, B e C, algum outro vértice do ponto P. Dentre esses, seja D o mais distante do lado BC. Então, o segmento de reta AD decompõe P em dois polígonos P' e P'', o primeiro com n' e o segundo com n'' lados, sendo $n'+n''=n+2$. Como $n'\geq 3$ e $n''\geq 3$, vemos que n' e n'' são ambos menores que n. O teorema, então, vale para P' e P'', que podem ser decompostos, respectivamente, em $n'-2$ e $n''-2$ triângulos, na forma do enunciado. Justapondo essas decomposições, ao longo de AD, obtemos uma decomposição de P em $(n'-2)+(n''-2)=n-2$ triângulos, o que é uma contradição. Isto completa a demonstração do teorema (LIMA, 2012, p. 123).

Figura 12 – Prova por absurdo do Teorema 2.4



Fonte: (LIMA, 2012, p. 124)

Corolário 1 *A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $(n-2).\pi$*

Teorema 2.5 *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decompostos numa reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração:

Em vista do Teorema 2.4, basta considerar o caso em que o polígono dado é um triângulo ABC, que contém n pontos da rede (no interior ou no

> bordo). Se existir realmente algum ponto P da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices A, B e C e, desse modo, decompomos ABC em três triângulos, cada um contendo um número $< n$ de pontos da rede. Se houver pontos da rede sobre os lados de ABC, escolhemos um deles, digamos sobre AB, e o ligamos ao vértice C. Assim, decompomos ABC em 2 triângulos, cada um contendo um número $< n$ de pontos da rede. Prosseguindo dessa maneira, com um número finito de etapas, chegaremos a uma decomposição de ABC em triângulos fundamentais (LIMA, 2012, p. 123).

Para provar que $\frac{1}{2}B + I - 1$ é a área do polígono P, basta mostrar que o número T de triângulos fundamentais da decomposição de P dada pelo Teorema é igual a $B + 2I - 2$, pois a área de P é igual a $\frac{T}{2}$, em virtude do Teorema 2.3.

Deve-se calcular a soma dos ângulos internos dos T triângulos fundamentais que compõem o polígono P, para isso há dois caminhos.

O primeiro é evidente: se há T triângulos, a soma dos seus ângulos internos é igual a $T.\pi$. O segundo consiste em calcular, separadamente, a soma Sb dos ângulos que têm vértice no bordo e a soma Si dos ângulos cujos vértices estão no interior de P.

Sejam B' o número de vértices de P e B'' o número de pontos da rede que estão sobre o bordo de P, mas não são vértices. Então $B = B' + B''$. Evidentemente, Sb é igual à soma $(B-2)\pi$ dos ângulos internos de P mais $B''.\pi$ (pois os ângulos dos triângulos fundamentais, com vértice em cada um dos B'' pontos do bordo de P que não são vértices de P, somam um ângulo raso, ou seja π). Logo $Sb = (B'-2)\pi + B''.\pi = (B-2)\pi$. Por outro lado, em cada ponto da rede interior a P, os ângulos que têm como vértice somam quatro retos, logo $Si = 2I.\pi$. Portanto $Sb + Si = (B - 2 + 2I).\pi$.

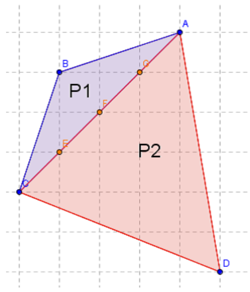
Lima (2012, p. 127) conclui comparando as duas contagens: $T.\pi = (B - 2 + 2I)\pi$, ou seja, $T = B + 2I - 2$, como queria demonstrar.

Na demonstração por justaposição é necessário perceber que a área deve ser aditiva, isto é, se P é um polígono simples, P pode ser obtido justapondo polígonos simples P_1 e P_2 ao longo de pelo menos uma aresta, assim

$$S_{(P)} = S_{(P_1)} + S_{(P_2)}$$

Utilizando a Fórmula de Pick para demonstrar a igualdade acima, tem-se $S(P_k) = \frac{1}{2}B_k + I_k - 1$, $k\{1,2\}$ a área de P_k obtida através da fórmula e v o número de vértices da fronteira comum aos polígonos P_1 e P_2, como esses polígonos têm uma aresta em comum, eles terão dois destes pontos (de acordo com a figura 13, Justaposição de P1 e P2, os pontos A e C), serão pontos de fronteira do polígono P e, assim, os vértices restantes, E, F e G, serão pontos interiores de P, ou seja, $v - 2$.

Figura 13 – Justaposição de P1 e P2



Fonte: Elaboração própria

Sendo assim, o número de pontos interiores do polígono P é dado por $I = I_1 + I_2 + v - 2$ e o número do contorno de P é dado por $B = B_1 + B_2 - 2(v-2)$. Então,

$$S_{(P)} = \frac{1}{2}B + I - 1$$

$$S_{(P)} = \frac{1}{2}[B_1 + B_2 - 2(v-2)] + [I_1 + I_2 + v - 2] - 1,$$

$$S_{(P)} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 - v + 1 + I_1 + I_2 + v - 2 - 1,$$

$$S_{(P)} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 + I_1 + I_2 - 2,$$

$$S_{(P)} = \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 + I_1 + I_2 - 2,$$

$$S_{(P)} = (\frac{1}{2}B_1 + I_1 - 1) + (\frac{1}{2}B_2 + I_2 - 1),$$

$S_{(P)} = S_{(P_1)} + S_{(P_2)}$, como queria demonstrar.

Demonstramos que, justapondo-se dois polígonos simples, as respectivas áreas adicionam-se. Sendo assim, por meio desta demonstração, um polígono P pode ser decomposto em polígonos justapostos mais simples, para os quais a Fórmula de Pick possa ser verificada. Como todo polígono pode ser formado por uma justaposição de triângulos, basta que se demonstre que a Fórmula de Pick seja válida para qualquer triângulo.

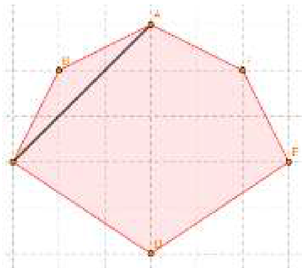
Segue, abaixo, algumas proposições que serão utilizadas para comprovar a validade da fórmula:

Proposição 1 ***(Propriedade aditiva da Fórmula de Pick)*** *Sejam P e Q polígonos simples no plano cuja intersecção é uma aresta comum. Então, se a Fórmula de Pick é válida para*

P *e* Q*, ela também é válida para o polígono* $P \cup Q$*.*

Lema 1 *Num polígono simples com mais de três vértices, existe um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta o polígono.*

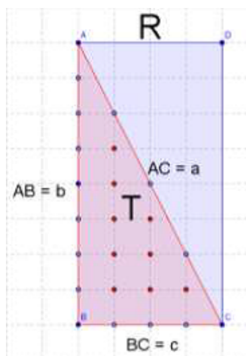
Figura 14 – Prova intuitiva do Lema 1



Fonte: Elaboração própria

Na figura 15, Fórmula de Pick para triângulo retângulo, está representado o retângulo R, em que dois de seus lados são catetos de comprimento b e c do triângulo retângulo T, catetos esses, paralelos aos eixos coordenados.

Figura 15 – Fórmula de Pick para triângulo retângulo



Fonte: Elaboração própria

Sendo B e I a quantidade de pontos do contorno e do interior do triângulo, respectivamente, sabendo que os pontos interiores do retângulo R são dados por $(b-1).(c-1)$ e chamando de p_h o número de pontos da hipotenusa, sem considerar os pontos que são vértices do triângulo, tem-se $I = \frac{1}{2}[(b-1).(c-1) - p_h]$ e $B = b + c + p_h + 1$.

Se a fórmula de Pick é dada por $S = \frac{1}{2}B + I - 1$, substituindo as duas igualdades anteriores obtém-se

$$S = \frac{1}{2}(b + c + p_h + 1) + \frac{1}{2}[(b-1).(c-1) - p_h] - 1$$

$$S = \frac{1}{2}(b + c + p_h + 1) + \frac{1}{2}(-b - c - p_h + 1 + bc) - 1$$

$$S = \frac{1}{2}(2 + bc) - 1$$

$$S = 1 + \frac{1}{2}bc - 1$$

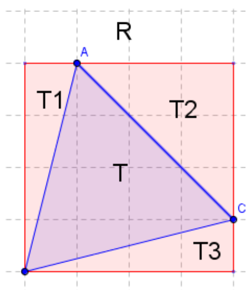
$$S = \frac{bc}{2}$$

O que comprova que a fórmula de Pick vale para triângulos retângulos, uma vez que foi obtida através dela a fórmula usual do cálculo da área do triângulo, afinal, pode-se tomar qualquer um dos catetos como base e outro com altura.

Como todo retângulo R pode ser formado por dois triângulos retângulos, a fórmula de Pick vale também para todo retângulo.

Agora, seja T um triângulo qualquer, pode-se formar um retângulo R, tal que $R = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$, onde T_1, T_2 e T_3 sejam triângulos retângulos paralelos aos eixos.

Figura 16 – Fórmula de Pick para triângulo qualquer



Fonte: Elaboração própria

Assim, se o teorema é válido para R, T_1, T_2 e T_3, ele vale também para o triângulo T, devido a Proposição 1 e pela justaposição de polígonos demonstrada acima.

Na demonstração por indução, tem-se:

- Para $n = 3$, ou seja, polígonos com três vértices. No caso de triângulos, é fato demonstrado, que a fórmula é válida.

- Suponha, então, que a fórmula de Pick seja válida para qualquer polígono simples com k vértices, onde $k \leq n$ e , k e $n \in \mathbb{N}$.

- Agora, considere um polígono P com $(n + 1)$ vértices $(V_1, V_2, ..., V_n, V_{n+1})$. Pelo Lema 1, P possui um par de vértices que são extremos de um segmento cujo interior não intersecta P. Considerando, sem perda de generalidade, V_1 e V_p este par de vértices, seja P_1 o polígono de vértices $V_1, V_2, ..., V_p$ e seja P_2 o polígono de vértices $V_1, V_p, V_{p+1}, ..., V_n, V_{n+1}$. A fórmula de Pick vale tanto para P_1 como para P_2, pois ambos têm, no máximo, n vértices, logo, pela Proposição 1, a fórmula vale também para P, o que prova que a Fórmula de Pick é válida para todo polígono simples com n vértices.

2.3 Aplicações do Teorema de Pick

É notório que o teorema de Pick permite a realização de atividades práticas que envolvem o conhecimento geométrico, mais precisamente os conceitos de área. O que se percebe no contexto escolar, com poucas exceções, são os conteúdos de geometria plana serem apresentados ao aluno de forma desmembrada e desvinculada de qualquer atividade contextualizada. Assim, os conceitos são introduzidos com suas respectivas fórmulas, sem usufruir da riqueza que os mesmos proporcionam.

Como o Teorema de Pick resume-se em uma fórmula simples para calcular a área de polígonos, muitas vezes não regulares, ele dá condição do professor e/ou aluno aplicá-lo em situações cotidianas, o que contribui para uma aprendizagem mais significativa, favorecendo a interdisciplinaridade.

> Aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, se define como conceito subsunçor, existe na estrutura cognitiva do indivíduo (Ausubel apud (MOREIRA, 1999, p. 153)).

A aprendizagem significativa desenvolve nos alunos a competência de argumentar, criativa e criticamente através do processo ensino-aprendizagem da matemática. Fica fácil perceber que não basta apenas saber muitos conceitos matemáticos, faz-se necessário que os alunos vejam o significado e o valor do que está sendo ensinado, efetivando-se assim uma real aprendizagem.

Essas aplicações são as mais variadas, dando destaque para as que seguem abaixo.

2.3.1 Cálculo da área de uma região irregular

Por permitir o cálculo de regiões poligonais irregulares, sem necessidade de medidas lineares dos lados que compõe esse polígono, o teorema de Pick pode ser aplicado no cálculo aproximado das áreas de regiões geográficas, auxiliando, assim, na investigação da dimensão de desmatamento e/ou queimada em determinada região, para análise da gravidade de um vazamento de óleo no oceano, para cálculo do número de manifestantes que ocupam uma localidade em passeatas ou protestos, entre outros.

Ainda focando no cálculo de uma região irregular, pode auxiliar na engenharia ambiental, sendo utilizado no cálculo da área de plantação de árvores distribuídas regularmente, utilizando a contagem das mesmas, considerando-as como valores de B (pontos da borda) e I (pontos interiores).

Pode, também, ser aplicado na medicina, definido a região do corpo lesionada por alguma doença, como por exemplo, erupções na pele, podendo ser investigada quanto a sua evolução ou até mesmo fazendo comparativos de resultados sobre efeitos do remédio usado.

2.3.2 Determinação do número π

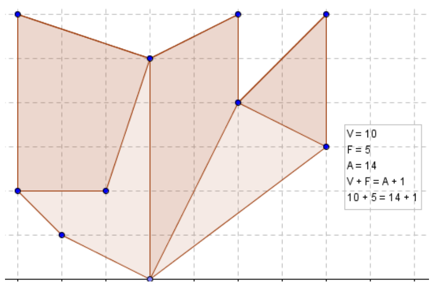
A fórmula de Pick pode ser usada para determinar o valor de π, para isso se faz necessário sobrepor o círculo em uma malha quadriculada e traçar polígonos que mais se aproximam do contorno do círculo. O valor de π se aproxima cada vez mais de seu valor real à medida que os polígonos apresentam uma quantidade de pontos cada vez maior. Ou seja, quando a quantidade de pontos tende ao infinito, o valor de π se aproxima de seu valor real.

2.3.3 Teorema de Pick e sua relação com o Teorema de Euler para poliedros planos

É denominado Poliedro plano, um polígono que pode ser decomposto como união de polígonos menores, desde que duas faces quaisquer da decomposição satisfaçam a pelo menos uma das condições, ou são disjuntas, ou têm um vértice em comum, ou têm uma ou mais arestas inteiras em comum.

Teorema 2.6 ***(Teorema de Euler para Poliedros planos)*** *Um poliedro plano com F faces, A arestas e V vértices satisfaz a condição: $V - A + F = 1$*

Figura 17 – Poliedro Plano e o Teorema de Euler para esse poliedro



Fonte: Elaboração própria

O Teorema de Pick e o Teorema de Euler para poliedros planos tem a seguinte relação:

Teorema 2.7 *O Teorema de Pick implica a Fórmula de Euler.*

Segue abaixo a demonstração desse teorema baseada na demonstração de Tavares (2015).

Demonstração:

Seja P uma figura poligonal simples, com V vértices (em pontos de coordenadas inteiras), A arestas e F faces. Dividindo essa figura poligonal em triângulos sem acrescentar novos vértices, apesar de alterar os valores de F e A, a relação $V + F = A + 1$ não será alterada, pois, quando se acrescenta uma aresta, acrescenta-se também uma face, sendo assim, essas alterações se cancelam. Se este polígono for decomposto em triângulos fundamentais, o número de vértice também é alterado, mas a relação de Euler se mantém.

No Capítulo 2, ao se demonstrar o Teorema de Pick, afirmou-se que o número de triângulos fundamentais em que um polígono foi decomposto equivale a $B + 2I - 2$, em que B é o número de pontos da fronteira e I o número de pontos interiores do polígono. Considerando o poliedro plano, o número de triângulos fundamentais é equivalente ao número de faces, ou seja, $F = B + 2I - 2$.

Além disso, o número de vértices do poliedro plano é equivalente ao número de pontos da borda (B) mais os pontos interiores (I), então, $V = B + I$.

Com relação às arestas, é possível perceber que cada aresta externa (A_e) é lado de apenas uma face e cada aresta interna (A_i) é lado de duas faces, assim, $3F = A_e + 2A_i$. Ainda em relação às arestas, tem-se que o número de arestas internas equivale ao número total de arestas A, subtraído do número de arestas externas: $3F = A_e + 2(A - A_e)$. Como o número de arestas externas é igual a B, então:

$$3F = B + 2(A - B)$$
$$3F = B + 2A - 2B$$
$$3F = 2A - B$$

Aplicando a relação $F = B + 2I - 2$, tem-se:

$$3(B + 2I - 2) = 2A - B$$
$$3B + 6I - 6 = 2A - B$$
$$4B + 6I - 6 = 2A$$
$$A = 2B + 3I - 3$$

Se $V = B + I$ e $F = B + 2I - 2$, então,

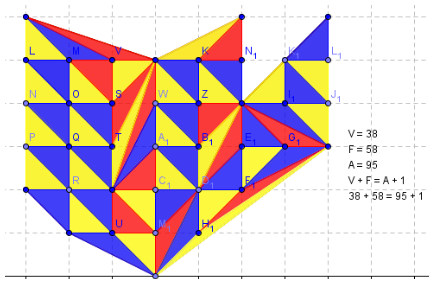
$$V + F = B + I + B + 2I - 2$$
$$V + F = 2B + 3I - 2$$
$$V + F = 2B + 3I - 3 + 1$$

Logo,

$$V + F = A + 1$$

O que demonstra que, mesmo decompondo o poliedro plano em triângulos fundamentais, a relação de Euler continua sendo válida. Tendo sido provado que o Teorema de Pick implica a Fórmula de Euler.

Figura 18 – Poliedro Plano dividido em triângulos fundamentais



Fonte: Elaboração própria

Teorema 2.8 *A Fórmula de Euler implica o Teorema de Pick.*

Demonstração:

Usando a relação $3F = 2A - B$ da demonstração anterior, tem-se

$$3F = 2A - B$$
$$3F + B = 2A$$
$$A = \frac{3F + B}{2}$$

Sabendo que $V = B + I$ e usando a fórmula de Euler, obtém-se a seguinte relação:

$$V + F = A + 1$$
$$B + I + F = A + 1$$
$$B + I + F = \frac{3F + B}{2} + 1$$
$$2B + 2I + 2F = 3F + B + 2$$
$$F = B + 2I - 2$$

Como o poliedro plano foi dividido em triângulos fundamentais, o número de faces F equivale ao número desses triângulos, logo a área desse polígono (S_P) é igual a:

$$S_P = \frac{1}{2}F$$

Então,

$$S_P = \frac{1}{2}(B + 2I - 2)$$

Ou seja,

$$S_P = \frac{1}{2}B + I - 1$$

E este, por sua vez, é o Teorema de Pick.

Capítulo 3

Aporte metodológico

A metodologia utilizada foi a pesquisa qualitativa, na modalidade investigação-ação, por esta incluir, ao mesmo tempo, a ação e a investigação, alternadamente, contribuindo para uma reflexão crítica e aperfeiçoamento dos métodos. Segundo Coutinho et al. (2009, p. 360), na investigação-ação, é essencial que o professor explore reflexivamente sua prática, "contribuindo dessa forma não só para a resolução de problemas como também (e principalmente) para a planificação e introdução de alterações nessa mesma prática".

> A dinâmica cíclica de ação-reflexão, própria da investigação-ação, faz com que os resultados da reflexão sejam transformados em praxis e esta, por sua vez, dê origem a novos objetos de reflexão que integram, não apenas a informação recolhida, mas também o sistema apreciativo do professor em formação. É neste vaivém contínuo entre ação e reflexão que reside o potencial da investigação-ação enquanto estratégia de formação reflexiva, pois o professor regula continuamente a sua ação, recolhendo e analisando informação que vai usar no processo de tomada de decisões e de intervenção pedagógica (SANCHES, 2005, p. 129).

No que se refere à abordagem, a pesquisa se classifica como qualitativa, que tem por objetivo a compreensão da lógica interna de grupos, instituições e atores quanto a: valores culturais e representações sobre sua história e temas específicos; relações entre indivíduos, instituições e movimentos sociais; processos históricos, sociais e de implementação de políticas públicas e sociais (MINAYO, 2007).

Uma pesquisa qualitativa possui como características seu caráter descritivo, considerando:

> O ambiente como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento chave; o processo é o foco principal de abordagem e não o resultado ou o produto; a análise dos dados é realizada de forma intuitiva e indutivamente pelo pesquisador; não requer o uso de técnicas e métodos estatísticos; e, por fim, tem como preocupação maior a interpretação de fenômenos e a atribuição de resultados (GODOY, 1995, p. 59).

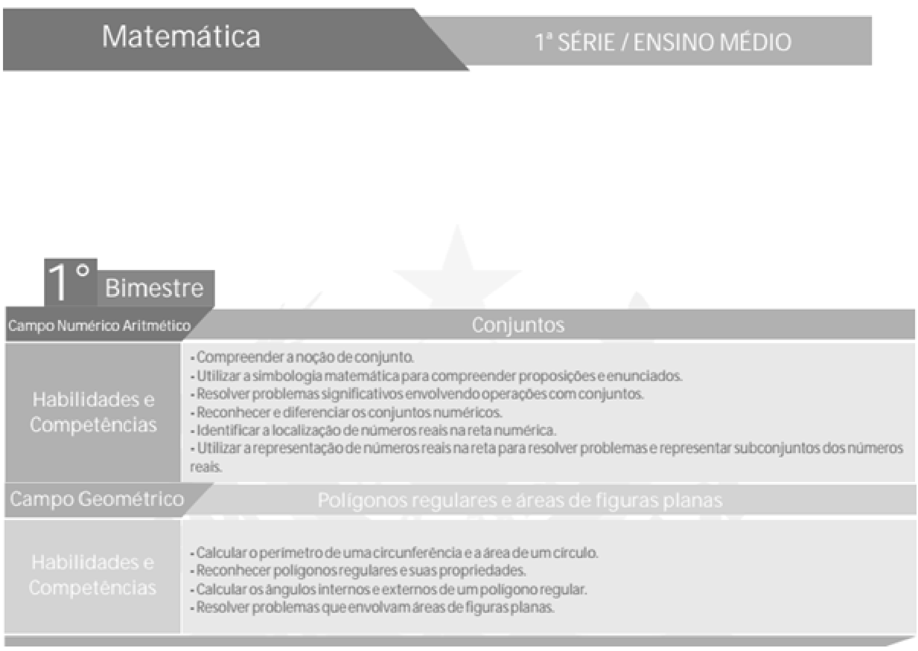
A pesquisa qualitativa, portanto, não procura a mensuração dos eventos estudados, assim como não utiliza instrumental estatístico na análise dos dados, mas envolve a aquisição de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos através do contato direto do pesquisador com a situação estudada, buscando a compreensão dos fenômenos segundo a perspectiva dos participantes da situação em estudo (GODOY, 1995).

O pesquisador, ao utilizar a abordagem qualitativa, busca o aprofundamento do fenômeno que estuda, interpretando-o segundo a visão do participante da situação analisada, não havendo preocupação com representatividade numérica e estatística, existindo uma necessidade do pesquisador estar em contato direto com o campo, a fim de captar os significados dos comportamentos observados (GOLDENBERG, 1999).

A pesquisa qualitativa é mais apropriada quando o pesquisador pretende interpretar dados, fatos e teorias; descrever a complexidade de determinada hipótese ou problema; quando deseja obter dados psicológicos de um indivíduo ou grupo; analisar a interação entre variáveis; situações em que se faz necessária a substituição de dados estatísticos por observações qualitativas; ou apresentar contribuições no processo de mudança, criação ou formulação de opiniões de determinado grupo (SOARES, 2002).

O presente estudo foi desenvolvido em novembro de 2014, em turmas de primeira série do Ensino Médio. A escolha desse ano de escolaridade deu-se por conta do conteúdo área de polígonos simples constar no Currículo Mínimo, documento que norteia a grade curricular de todas as disciplinas no estado do Rio de Janeiro e também no Currículo Básico - Escola Estadual, documento que norteia o ensino no estado do Espírito Santo na referida série.

Figura 19 – Currículo Mínimo (RJ), Matemática, 1ª série do Ensino Médio



Matemática

1ª SÉRIE / ENSINO MÉDIO

1° Bimestre

Campo Numérico Aritmético	Conjuntos
Habilidades e Competências	- Compreender a noção de conjunto. - Utilizar a simbologia matemática para compreender proposições e enunciados. - Resolver problemas significativos envolvendo operações com conjuntos. - Reconhecer e diferenciar os conjuntos numéricos. - Identificar a localização de números reais na reta numérica. - Utilizar a representação de números reais na reta para resolver problemas e representar subconjuntos dos números reais.
Campo Geométrico	**Polígonos regulares e áreas de figuras planas**
Habilidades e Competências	- Calcular o perimetro de uma circunferência e a área de um circulo. - Reconhecer poligonos regulares e suas propriedades. - Calcular os ângulos internos e externos de um poligono regular. - Resolver problemas que envolvam áreas de figuras planas.

Fonte: (JULIANELLI, 2012, p. 15)

Figura 20 – Conteúdo Básico Comum (ES), Matemática, 1ª série do Ensino Médio

GOVERNO DO ESTADO DO ESPÍRITO SANTO
Secretaria da Educação

6.4.4 Conteúdo Básico Comum - Matemática – Ensino Médio

1º Ano

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	CONTEÚDOS
• Visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, por meio da análise e comparação de figuras. • Fazer pequenas inferências e deduções em geometria, demonstrando teoremas simples da geometria plana.	• Realizar construções geométricas de polígonos, sólidos e lugares geométricos, por meio de régua e compasso e geometria dinâmica. • Reconhecer relações entre elementos de figuras semelhantes e homotéticas. • Resolver problemas geométricos utilizando construções, envolvendo lugares geométricos, congruência e semelhança de triângulos. • Saber justificar os processos utilizados nas construções geométricas. • Reconhecer os eixos cartesianos e usá-los para representar pontos no plano. • Saber calcular perímetro, áreas e volumes de figuras diversas, bem como reconhecer suas aplicações na resolução de problemas diversos.	**GEOMETRIA, GRANDEZAS E MEDIDAS** • Visualização e análise de figuras geométricas. • Os polígonos, suas características e semelhanças: demonstrações simples. • Construções geométricas. • Congruência, semelhança e homotetia. • Resolução de problemas envolvendo os conceitos de perímetro, área e volume. • Medidas de comprimento, área, volume, massa, tempo, etc. • Simetria: translação, rotação e reflexão. • Os eixos cartesianos: a representação de pontos por meio de coordenadas. • Introdução à geometria analítica: pontos, distâncias entre pontos, ponto médio, a reta como lugar geométrico.

Fonte: (ENSINO, 2009, p. 118)

Sou professora em ambos os estados. A escola em que trabalho no Espírito Santo tem apenas uma turma dessa série, portanto preferi propor as atividades para alunos da 1ª série do Ensino Médio em uma escola da rede pública estadual em Bom Jesus do Itabapoana – RJ. A escola escolhida é reconhecida por sua incessante busca pela qualidade de ensino, obtendo níveis de destaque em comparação a outras escolas da rede estadual. Possui uma equipe pedagógica disposta a colaborar com trabalhos que visem a melhoria e inovação da educação. A escolha por essa escola se deu por eu já trabalhar nela há sete anos e, por esse motivo, pude acreditar no apoio de toda essa equipe para se desenvolver o trabalho. Além disso, as turmas em que as atividades foram desenvolvidas eram próprias, sendo assim, havia a certeza da disponibilidade e interesse dos alunos em participar de um trabalho diferenciado, colaborando, então, para elaboração e execução do mesmo.

Primeiramente, foram utilizadas duas aulas, com 50 minutos cada, na qual foi apresentado o Teorema de Pick, com um breve histórico, a fórmula, sua demonstração e ideias de aplicabilidade, para que o aluno pudesse analisar o material com propriedade e tivesse os subsídios necessários para realizar as atividades propostas. Posteriormente, utilizou-se o mesmo tempo de aulas para a realização de cada atividade e discussão das mesmas.

As atividades com o Geoplano e Aproximando o valor de π foram realizadas em grupo de 4 a 5 alunos, assim como a atividade com o Applet, devido a falta de computadores. As demais atividades foram realizadas individualmente. Todas essas atividades foram realizadas em três turmas diferentes, chamadas de EM-1001, EM-1002 e EM-1003, com 32, 39 e 34 alunos, respectivamente, tendo presença quase integral em todos os momentos. Esses alunos possuem faixa etária entre 14 e 16 anos, são, em sua maioria, participativos e demonstraram interesse na realização das atividades propostas.

3.1 Descrição das atividades desenvolvidas

Propor atividades é interessante para desenvolver habilidades e competências sobre conteúdos discutidos e analisados com os alunos de maneira mais significativa. Eles se mostram mais interessados quando são desafiados a realizar atividades planejadas de forma lúdica, com materiais manipulativos, tecnológicos e, principalmente, quando estão correlacionadas com o cotidiano. Fica clara a importância de se contextualizar o ensino da Matemática, mais especificamente o da Geometria, com o cotidiano dos alunos. Também vale ressaltar que inserir a tecnologia no contexto escolar deve ser uma prática, pois além de ter um cunho motivador, é inegável que nos dias atuais a escola não pode ficar à margem de uma sociedade extremamente tecnológica.

Sendo assim, a proposta das atividades se justifica por tornar a aprendizagem mais significativa, fazendo com que os alunos participem efetivamente das mesmas, como personagens principais na construção de seu conhecimento. São atividades simples, que podem ser adaptadas para diferentes níveis de escolaridade.

3.1.1 Malha Quadriculada

Objetivo: Levar o aluno perceber que mesmo com diferentes tipos de resolução pode-se chegar a resultados similares.

Público-alvo: Alunos de séries que constam em seus currículos áreas de polígonos simples. Pode ser realizada individualmente ou em grupo.

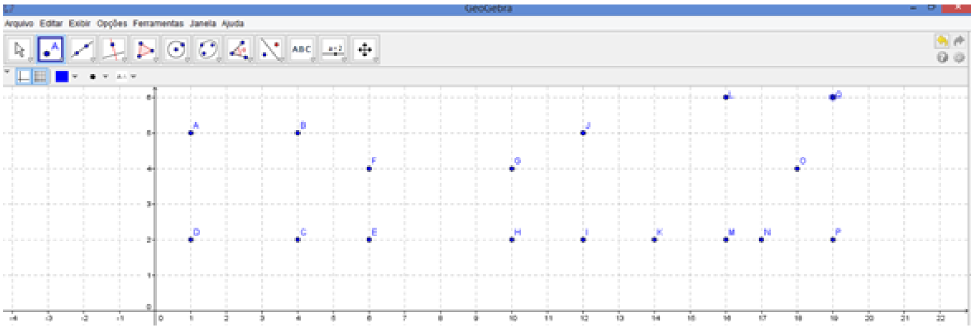
Materiais utilizados: Atividade impressa (Apêndice), lápis, régua, caneta azul e vermelha.

Tempo previsto: 02 horas/aula.

Descrição: Os alunos devem ligar os pontos predefinidos em uma malha quadriculada, formando polígonos simples, e calcular a área de cada polígono encontrado usando, se necessário, um banco de fórmulas dado.

Ainda nesta atividade, os alunos devem preencher uma tabela com a contagem dos pontos do contorno (B) e os pontos interiores (I), aplicando a Fórmula de Pick, encontrando assim, por outro método, a área dos polígonos.

Figura 21 – Passo 1 da atividade 1



Fonte: Elaboração Própria

Figura 22 – Passo 2 da atividade 1

Polígono	Pontos Azuis (B)	Pontos Vermelhos (I)	Fórmula de Pick $A = {}^{1}/_{2}\,B + I - 1$	Área
1				
2				
3				
4				

Fonte: Elaboração Própria

Esta atividade traz, ainda, dois questionamentos, primeiramente, pede-se para que se compare os resultados das áreas obtidas pelos dois métodos solicitados e, a seguir, pergunta-se qual o método seria escolhido para realizar o cálculo dessas áreas indagando o porquê.

3.1.2 Geoplano

Objetivo: Apresentar o Geoplano para auxiliar o cálculo de áreas de polígonos simples através da contagem dos pontos.

Público-alvo: Alunos de séries que constam em seus currículos áreas de polígonos simples. Realizada em grupo.

Materiais utilizados: Atividade impressa (Apêndice), geoplano, elásticos, lápis e régua.

Tempo previsto: 02 horas/aula.

Descrição: O primeiro passo foi apresentar o Geoplano para os alunos. Um minicurso apresentado na II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática conceitua e reforça a ideia da utilidade do geoplano:

> Geoplano: é um recurso didático-pedagógico dinâmico e manipulativo (construir, movimentar e desfazer). Contribui para explorar problemas geométricos e algébricos, possibilitando a aferição de conjecturas e podendo-se registrar o trabalho ou reproduzi-lo em papel quadriculado. Além disso, o geoplano facilita o desenvolvimento das habilidades de exploração espacial, comparação, relação, discriminação, sequência, envolvendo conceitos de frações e suas operações, simetria, reflexão, rotação e translação, perímetro, área. O geoplano é um meio, uma ajuda didática, que oferece um apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência geométrica e algébrica aos estudantes (MACHADO, 2014).

Figura 23 – Geoplano

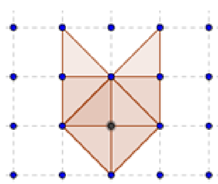
Fonte: Dados da pesquisa

O uso do Geoplano permite que haja interação entre os alunos, destacando-se a existência de desenvolvimento individual e, principalmente, coletivo, despertando interesse dos alunos em participar ativamente, havendo, sempre que necessário, intervenção do professor, estreitando a relação entre eles.

Os alunos recebem um geoplano e elásticos, que são usados para construir as figuras geométricas; além de material impresso, que contém malhas quadriculadas onde devem transcrever o desenho formado no geoplano.

A proposta era reproduzir hexágonos (podendo ser escolhida outra figura geométrica) com diferentes formas, utilizando números distintos de pontos de contorno (B) e interiores (I), dividindo-os em triângulos fundamentais, ou seja, triângulos cuja área mede o equivalente a $\frac{1}{2}u.a.$ A partir da contagem desses triângulos seria permitido o cálculo da área dos hexágonos.

Figura 24 – Hexágono subdivido em triângulos fundamentais



Fonte: Elaboração Própria

Os alunos são questionados se conseguem estabelecer alguma relação entre as áreas obtidas e os valores de B e I. A atividade segue com o preenchimento de novas tabelas para facilitar a resposta ao questionamento acima. Assim, ao analisarem hexágonos com apenas um ponto interior, devem observar que a área encontrada atende a regra $\frac{B}{2}$. Com dois pontos interiores, $\frac{B}{2}+1$. Com três pontos interiores, $\frac{B}{2}+2$.

Figura 25 – Hexágono com $I = 1$

I = 1	
B	**Área**
8	4
9	
10	

Descubra uma regra geral, que correlaciona o valor de B e sua respectiva área.

Exemplo:

Se B=8 e A=4, então A = $^{B}/_{2}$

Fonte: Elaboração Própria

Figura 26 – Hexágono com $I = 2$

I = 2	
B	**Área**
8	
9	
10	

Descubra uma regra geral, que correlaciona o valor de B e sua respectiva área.

Fonte: Elaboração Própria

Pede-se que se inclua o I na regra encontrada por experimentação, utilizando diferentes valores para I e B. Sendo assim, os alunos são induzidos a concluir que toda área pedida atendia a regra $\frac{B}{2}+I-1$, comprovando assim a Fórmula de Pick.

Figura 27 – Finalização da atividade 2

Incluindo o valor de I na regra geral obtida como ficaria?

Usando o exemplo, temos

Para I=1:

A = $^{B}/_{2}$

A = $^{B}/_{2}+0$

A = $^{B}/_{2}+1-1$

A = $^{B}/_{2}+I-1$

De forma análoga comprove se a Regra geral é válida para os demais casos:

Para I = 2:

Para I = 3:

Fonte: Elaboração Própria

3.1.3 Applet desenvolvido por W.T.Zenon

Objetivo: Calcular áreas de polígonos simples por meio da Fórmula de Pick, reproduzir os mesmos polígonos por meio do Applet e comparar os resultados.

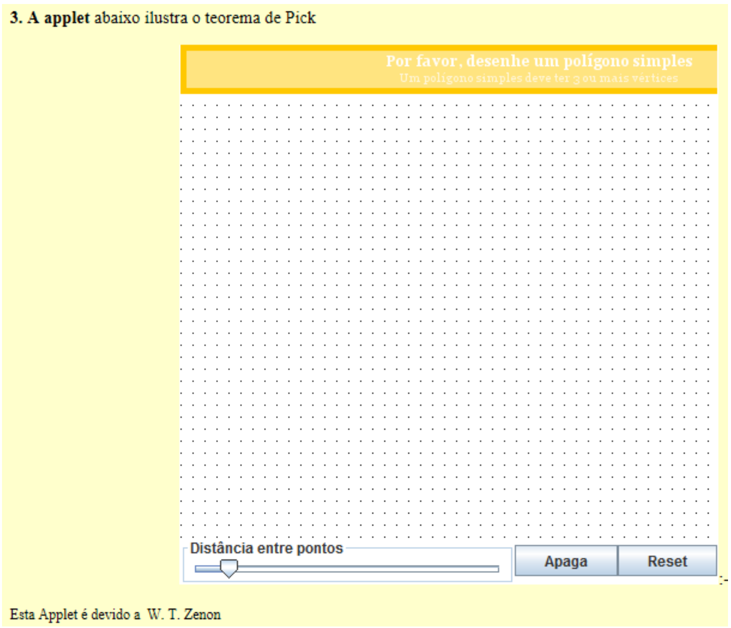
Público-alvo: Alunos de séries que constam em seus currículos áreas de polígonos simples. Realizada em grupo.

Tempo previsto: 02 horas/aula.

Materiais utilizados: Atividade impressa (Apêndice), lápis e computador.

Descrição: Faz-se necessário apresentar o Applet aos alunos dando uma breve explicação do funcionamento do programa. Vale ressaltar que para o Applet funcionar é preciso que o Java esteja instalado no computador.

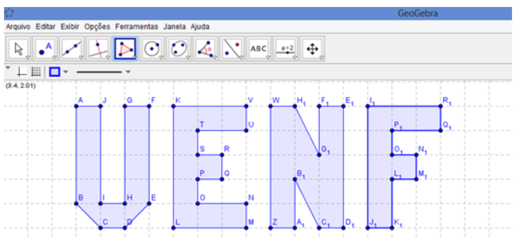
Figura 28 – Applet desenvolvido por W. T. Zenon



Fonte: (ANDRADE, 2014a)

Os alunos devem calcular, usando a fórmula de Pick, a área de cada letra da palavra UENF (podendo ser alterada conforme preferência do professor e/ou do aluno), lembrando que as hipóteses para a validade da fórmula devem ser satisfeitas.

Figura 29 – Polígonos da atividade 3



Fonte: Elaboração Própria

Em um segundo momento, os alunos são levados ao laboratório de informática da unidade escolar e desafiados a formarem as letras usando o Applet para comparar o valor das áreas encontradas. Cada letra da palavra em questão deve ser feita individualmente, pois o Applet calcula a área de apenas um polígono simples por vez. A construção dos polígonos no Applet é bem simples, sendo feita utilizando apenas o mouse.

A fórmula de Pick tornou-se objeto de estudo de diferentes pesquisadores. O professor Doherty Andrade, da Universidade Estadual de Maringá, iniciou seu Trabalho com o Teorema de Pick em 1985 e seu primeiro artigo continha apenas o teorema e algumas sugestões de como usá-los na sala de aula. O pesquisador produziu um software em linguagem computacional conhecida como Pascal, em que era possível desenhar com um mouse um polígono com vértices sobre uma malha quadriculada, depois o programa calculava a área. Esse software acabou ficando obsoleto devido à programação computacional que usava. Foi criado, então, o Applet em questão, que pode ser usado online. Esse, porém, necessita que o Java esteja instalado no computador. O Applet é fruto de um trabalho de iniciação científica de W. T. Zenon, em que Andrade é orientador (ANDRADE, 2014b).

É sabido que a informática tem adquirido grande importância no cenário educacional. Por esse motivo, sua utilização como instrumento da aprendizagem e sua intervenção no contexto social vem ocorrendo de forma brusca. Sendo assim, a prática educativa deve se adequar para introduzir atividades em que a informática esteja envolvida.

3.1.4 Calculando a área aproximada do Estado do Rio de Janeiro

Objetivo: Contextualizar o cálculo de áreas de polígonos simples não regulares.

Público-alvo: Alunos de séries que constam em seus currículos áreas de polígonos simples. Realizada individualmente ou em grupo.

Tempo previsto: 02 horas/aula.

Materiais utilizados: Mapa do Estado do Rio de Janeiro e malha quadriculada impressa em papel vegetal (Apêndice), lápis e régua.

Descrição: Esta atividade foi organizada para ser realizada após os alunos terem propriedade do uso da Fórmula de Pick, pois, para a realização da mesma, faz-se necessário conhecer e saber utilizá-la. Além disso, os alunos devem ter conhecimento das hipóteses que devem ser satisfeitas para a validade da fórmula.

Para que esta atividade seja realizada com êxito, além da Fórmula de Pick, conceitos como figuras semelhantes, proporção e escala devem ser levados em conta.

Quanto à noção de semelhança e escala de mapas:

> Há muitos séculos, a humanidade começou a desenvolver a arte de confeccionar mapas, com o objetivo de representar no plano, do modo mais

> perfeito possível, uma superfície arredondada. No entanto, os diferentes tipos de projeção cartográfica apresentam algum tipo de deformação, já que ou distâncias ou ângulos não podem ser preservados por elas. (...) Além de buscar as semelhanças entre a figura desenhada e a região real do globo, o leitor de um mapa talvez queira saber que distâncias estão representadas. Para isso, são usadas escalas, que estabelecem a relação entre o comprimento de uma linha no mapa e o comprimento daquela distância na realidade (BARROSO, 2010, p. 288).

A atividade foi desenvolvida utilizando um mapa do Estado do Rio de Janeiro contendo a escala (podendo o professor escolher qualquer outra região, seja ela cidade, outro estado, país ou até mesmo planta de uma casa ou escola) e a malha quadriculada impressa em papel vegetal devido à transparência. Sobrepondo a malha quadriculada ao mapa, o aluno deve desenhar um polígono que se aproxime ao contorno do Estado em questão, sendo que este polígono seja simples formado por segmentos de reta e tenha vértices com coordenadas inteiras, ou seja, coincidindo com os pontos de encontro da malha, respeitando assim as hipóteses do Teorema de Pick.

Sendo assim, a área do polígono desenhado pelo aluno é uma aproximação para a área do mapa apresentado. O aluno é desafiado, então, a fazer a contagem dos pontos de contorno e interior e calcular a área utilizando a Fórmula de Pick. O resultado encontrado será dado em u.a, referente ao tamanho da malha quadriculada. De posse da escala do mapa, os alunos fazem as conversões necessárias e chegam ao valor aproximado da área do Estado do Rio de Janeiro. Vale ressaltar que, ao diminuir o tamanho da unidade de medida da malha quadriculada utilizada, maior será a precisão da área encontrada, pois o desenho se aproximará ainda mais do contorno real do mapa em questão. Observa-se, também, que há uma pequena margem de erro visto que o processo é de aproximação.

Os alunos são levados a realizar comparações com os demais a respeito dos valores encontrados e possíveis divergências.

3.1.5 Estimando o valor de π

Objetivo: Relacionar o Teorema de Pick com o valor de π.

Público-alvo: Alunos de séries que constam em seus currículos áreas de polígonos simples. Realizada individualmente ou em grupo.

Tempo previsto: 02 horas/aula.

Materiais utilizados: Atividade impressa (Apêndice), lápis e régua.

Descrição: Essa atividade exige dos alunos o domínio na aplicação da fórmula de Pick, bem como o conceito de área do círculo, afinal o objetivo da mesma é encontrar valores aproximados de π.

A história do π começou há muitos anos. A Bíblia, em seu Velho Testamento, já fazia alusão ao número π, em Primeiro Livro dos Reis 7, 23 e também em II Crônicas 4, 2. Ambas as passagens contêm especificações para a construção do grande templo de Salomão, onde a circunferência era seis vezes o raio. Isso significa que os antigos Hebreus contentavam-se em atribuir a π o valor 3. Este valor foi possivelmente encontrado por medição e fora usado por muito tempo em certas civilizações.

> Provavelmente, os primeiros valores para π foram obtidos por meio de medidas. Por exemplo, no papiro Rhind (documento egípcio escrito por volta de 1650 a.C) a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro da circunferência apresenta o valor $3,1604$, que seria uma aproximação do número π.
>
> Mais tarde, o matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.) apresentou um cálculo teórico que resultou na aproximação $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Para isso, ele considerou um círculo de medida 1. Então, percebeu que o comprimento da circunferência do círculo estava entre o perímetro de qualquer polígono regular inscrito e o perímetro de qualquer polígono regular circunscrito (BARROSO, 2010, p.130).

Como é possível relacionar o Teorema de Pick com o valor de π? É sabido que o valor de π está relacionado com a área do círculo (S_c), afinal

$$S_c = \pi . r^2$$

Então,

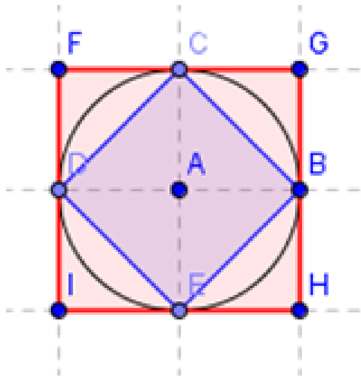
$$\pi = \frac{S_c}{r^2}$$

Sendo assim, é possível encontrar aproximações do valor de π encontrando polígonos que se aproximam melhor do círculo e aplicando o Teorema de Pick.

> A área da figura plana F deve ser um número real não-negativo, que indicaremos com $a(F)$. Ele ficará bem determinado se conhecermos seus valores aproximados, por falta ou por excesso.
>
> Os valores de $a(F)$ aproximados por falta são, por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F. Os valores de $a(F)$ aproximados por excesso são as áreas dos polígonos P' que contém F. Por conseguinte, quaisquer que sejam os polígonos P (contido em F) e P' (contendo F), o número $a(F)$ satisfaz às desigualdades $a(P) \leq a(F) \leq a(P')$ (LIMA, 2006, p. 26).

No primeiro momento, os alunos recebem o círculo de raio 1, com quadrados inscritos e circunscritos a ele, e baseando-se na citação acima, são levados a concluir que a área do quadrado inscrito é menor que a área do círculo que, por sua vez, é menor que a área do quadrado circunscrito. Usando a Fórmula de Pick, podem calcular a Área do quadrado inscrito (A_I) e a Área do quadrado circunscrito (A_{II}). Fazendo a média aritmética das duas áreas encontram o valor aproximado de π. Como o círculo tem raio 1, a aproximação é ainda distante.

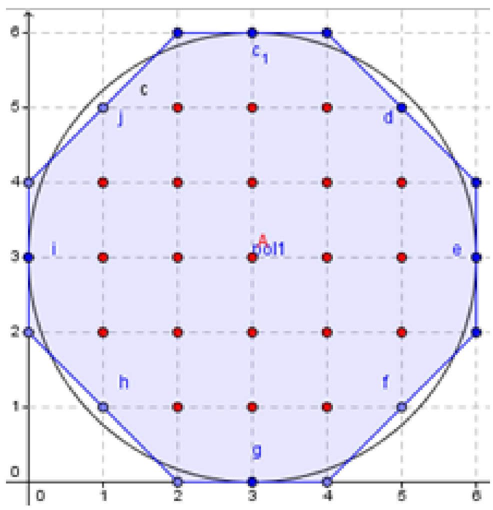
Figura 30 – Circunferência de raio 1



Fonte: Elaboração Própria

Em um segundo momento, os alunos recebem um círculo de raio 3 e são levados a observar que o octógono é o polígono que melhor se aproxima desse círculo. Como estes polígonos estão sobre uma malha quadriculada, podem utilizar a Fórmula de Pick e calcular a área deste octógono. Se $\pi = \dfrac{S_c}{r^2}$ e o octógono é o polígono que, neste caso, mais se aproxima do círculo e, considerando S_o como a área do octógono, então, $\pi \cong \dfrac{S_o}{r^2}$, podendo assim chegar a esse valor aproximado. Nessa etapa, o valor de π se aproxima mais do seu valor real.

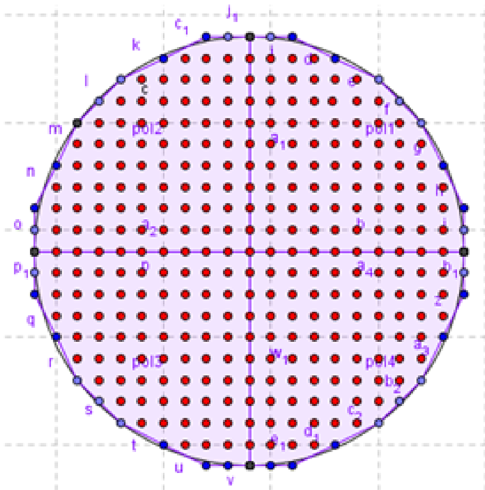
Figura 31 – Circunferência de raio 3



Fonte: Elaboração Própria

Para finalizar, os alunos recebem um círculo de raio 10. Para facilitar a resolução da atividade, os pontos da borda (B) e interiores (I) já estão contados. Utilizando a Fórmula de Pick, eles devem calcular a área deste polígono S_{pol}. Analogamente à etapa anterior, encontram o valor aproximado de π usando $\pi \cong \dfrac{S_{pol}}{r^2}$. Os alunos são levados a observar que o valor de π aproxima-se cada vez mais de seu valor real à medida que os polígonos apresentam uma quantidade de pontos cada vez maior. Ou seja, quando a quantidade de pontos tende ao infinito, o valor de π aproxima-se de seu valor real.

Figura 32 – Circunferência de raio 10



Fonte: Elaboração Própria

Capítulo 4

Análise da aplicação das atividades

Após aplicação dessas atividades, é possível perceber que prover a aprendizagem por métodos diferenciados são de extrema importância para a melhoria na qualidade do ensino. A inserção de materiais concretos e diferenciados, além do uso de recursos tecnológicos, tornam as aulas interessantes e interativas, permitindo a melhor compreensão dos conteúdos, dando grande destaque para a Geometria, considerada complicada por grande parte dos alunos e até mesmo por alguns professores.

A atividade **Malha Quadriculada** foi realizada individualmente, no período de duas aulas com cinquenta minutos cada. Os alunos fizeram os polígonos pedidos e calcularam a área utilizando as fórmulas específicas para cada um deles.

Figura 33 – Fragmento da atividade 1 feita pelo Aluno 32

Malha Quadriculada

Passo 1:

Ligue os pontos formando polígonos simples:

Polígono 1: ABCD

Polígono 2: EFGH

Polígono 3: IJK

Polígono 4: LMNOPQ

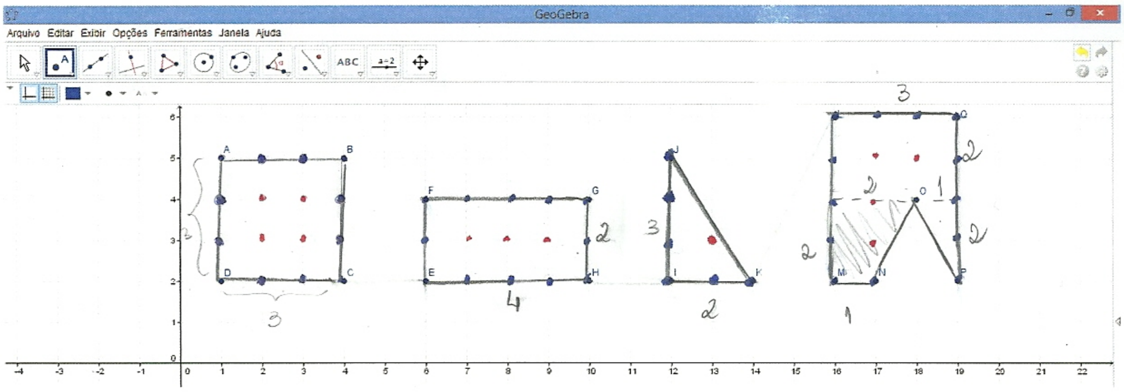


Figura 1: Imagem gerada pelo Geogebra

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 34 – Fragmento da atividade 1 feita pelo Aluno 19

Passo 2:

Calcule a área de cada polígono encontrado, considerando que cada quadradinho tem uma unidade de área. Se achar necessário utilize o banco de fórmulas abaixo

$A_{(quadrado)} = l^2$

$A_{(retângulo)} = b \cdot h$

$A_{(triângulo)} = \frac{b \cdot h}{2}$

$A_{(trapézio)} = \frac{B+b}{2} \cdot h$

$A(1) = l^2$; $A(1) = 3^2$; $A = 9$

$A(2) = b \cdot h$; $A(2) = 4 \cdot 2$; $A(2) = 8$

$A(3) = \frac{b \cdot h}{2}$; $A(3) = \frac{2 \cdot 3}{2}$; $A(3) = 6/2 = 3$

$A(4) = \frac{b \cdot h}{2}$; $A(4) = \frac{1 \cdot 2}{2}$; $A(4) = \frac{2}{2} = 1$

$A(5) = b \cdot h$; $A(5) = 3 \cdot 2$; $A(5) = 6$

$A(6) = \frac{B+b}{2} \cdot h$; $A(6) = \frac{2+1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}$; $A(6) = 3$

$1+6+3 = 10$

Fonte: Dados da pesquisa

Posteriormente, calcularam utilizando a fórmula de Pick. Foi possível perceber que não houve dificuldades em realizar as atividades propostas, mas o mais interessante foi a percepção de resultados similares, mesmo com a realização por métodos diferentes, e a surpresa dos alunos em resumir várias fórmulas em apenas uma, quando os polígonos são simples e estão com os vértices coincidindo com os pontos da malha quadriculada.

Figura 35 – Fragmento da atividade 1 feita pelo Aluno 11

Passo 4:

Complete a tabela:

Polígono	Pontos Azuis (B)	Pontos Vermelhos (I)	Fórmula de Pick $A = \frac{1}{2}B + I - 1$	Área
1	12	4	6 + 4 - 1	9
2	12	3	6 + 3 - 1	8
3	6	1	3 + 1 - 1	3
4	14	4	7 + 4 - 1	10

Fonte: Dados da pesquisa

Ao serem questionados, os alunos foram unânimes, dando destaque para a resposta do Aluno 17 “Considerando que na primeira forma usada para calcular a área dos polígonos encontrados há necessidade de se utilizar diferentes fórmulas, que na maioria das vezes é desconhecida ou até mesmo esquecida, utilizar a Fórmula de Pick se torna, portanto, mais prática e objetiva".

Figura 36 – Resposta do questionário da atividade 1 feita pelo Aluno 17

- Considerando que os polígonos estão sobre uma malha quadriculada, o que possibilita a utilização da Fórmula de Pick, qual passo você escolheria para realizar o cálculo das áreas destes polígonos? Por quê?

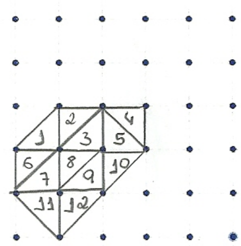
Considerando que na primeira forma para calcular a área dos polígonos encontrados há necessidade de se utilizar diferentes fórmulas, que na maioria das vezes é desconhecida ou até mesmo es-quecida, utilizar a Fórmula de Pick se torna, portanto, mais prática e objetiva.

Fonte: Dados da pesquisa

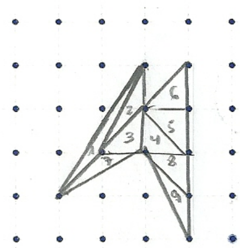
A atividade com o **Geoplano** foi realizada em duas aulas com cinquenta minutos cada, em grupo com 4 ou 5 alunos. Foi bem aceita por eles, acredito que isso ocorre por apresentar materiais concretos, que eles podem manipular, fugindo daquilo que se considera comum no contexto da sala de aula. Os alunos construíram os hexágonos com diferentes quantidades de B e I, utilizando o geoplano e elásticos, posteriormente, transferiram esses polígonos para a malha quadriculada, sem apresentarem dificuldades. Foi possível perceber que uns grupos faziam as construções com mais agilidade do que outros.

Figura 37 – Fragmento da atividade 2 feita pelo Grupo B-1

Hexágono 3	
B	8
I	3
Área	6



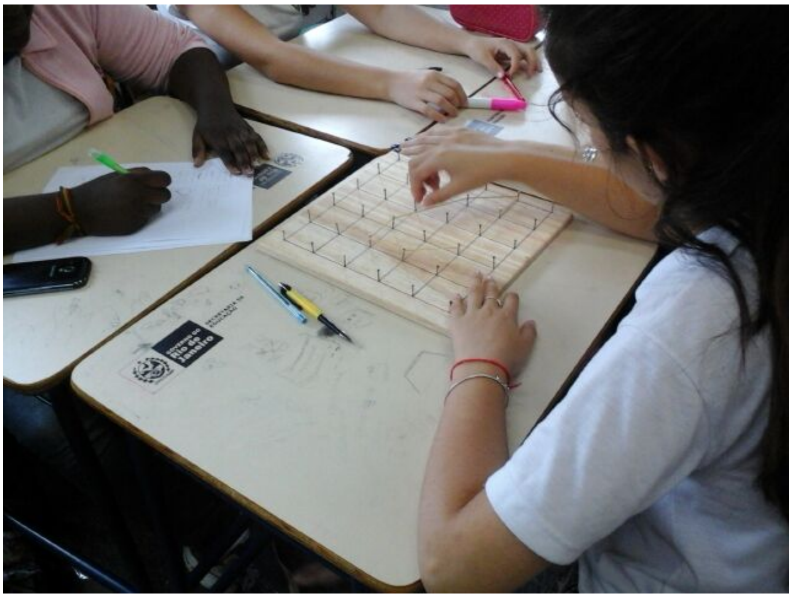
Hexágono 4	
B	9
I	1
Área	4,5



Fonte: Dados da pesquisa

Ao serem questionados, os alunos apresentaram dúvidas para estabelecer a relação entre as áreas obtidas e os valores de B e I, pois eles focaram os cálculos apenas na contagem dos triângulos fundamentais. Com o preenchimento das próximas tabelas que facilitariam a resposta ao questionamento acima, os alunos, após discussão em grupo, chegaram à conclusão de que toda área pedida atendia a regra $\frac{B}{2} + I - 1$, comprovando assim a Fórmula de Pick. O excesso de desenhos e cálculos tornou a atividade um pouco cansativa, porém não houve dificuldades para a efetivação da mesma em relação aos conhecimentos matemáticos.

Figura 38 – Alunos fazendo a atividade com o geoplano

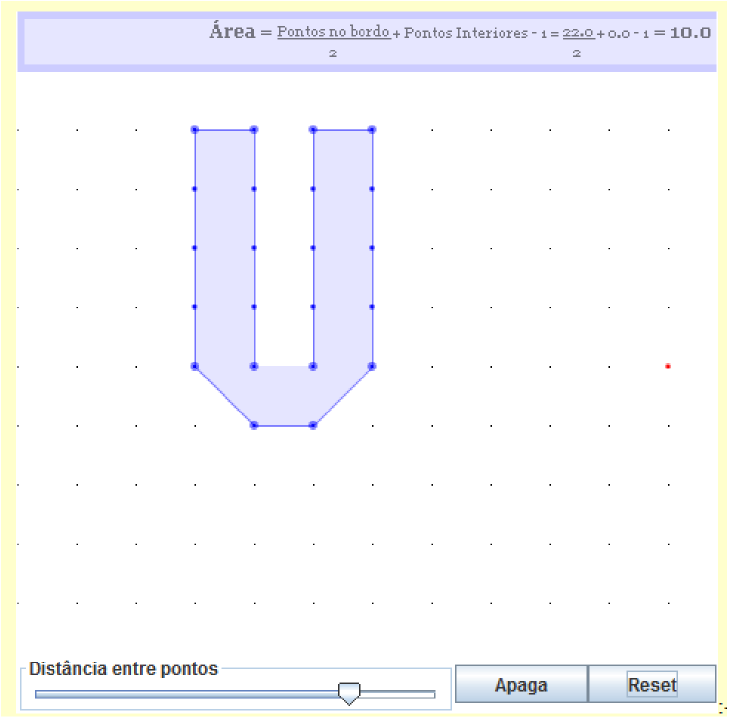


Fonte: Dados da pesquisa

A utilização do computador faz com que os alunos entrem em um ambiente interdisciplinar, no qual, além de receber informações, constroem seus conhecimentos. Para realizar a atividade com o **Applet desenvolvido por W.T.Zenon** foi necessário realizar uma ambientação ao espaço do laboratório de informática, bem como uma breve apresentação do Applet, auxiliando os alunos no manuseio do mesmo. Esta atividade utilizou duas aulas com cinquenta minutos cada e foi realizada em grupo de 3 ou 4 alunos. Foi possível observar a agilidade dos alunos em manusear o Applet, realizando bem os comandos e demonstrando interesse em concretizar a atividade.

A dificuldade encontrada na realização dessa atividade deu-se pelo fato de que as escolas públicas, em sua maioria, não possuem estrutura adequada, ainda mais quando a questão é informatização. O laboratório da unidade escolar em questão não está adequado a receber turma com mais de 30 alunos, o que acarreta certo desconforto. As máquinas são desatualizadas e não há um técnico, caso algum imprevisto ocorra. É fato que essa realidade não é isolada, os recursos tecnológicos são pouco utilizados nas escolas públicas de maneira geral, visto que as dificuldades apontadas é realidade nacional. Apesar de todos os pontos controversos, é importante que o professor supere essas barreiras e faça uso do laboratório, mesmo com todas as limitações, para que demostre aos alunos que as possibilidades de aprendizagem extrapolam a sala de aula.

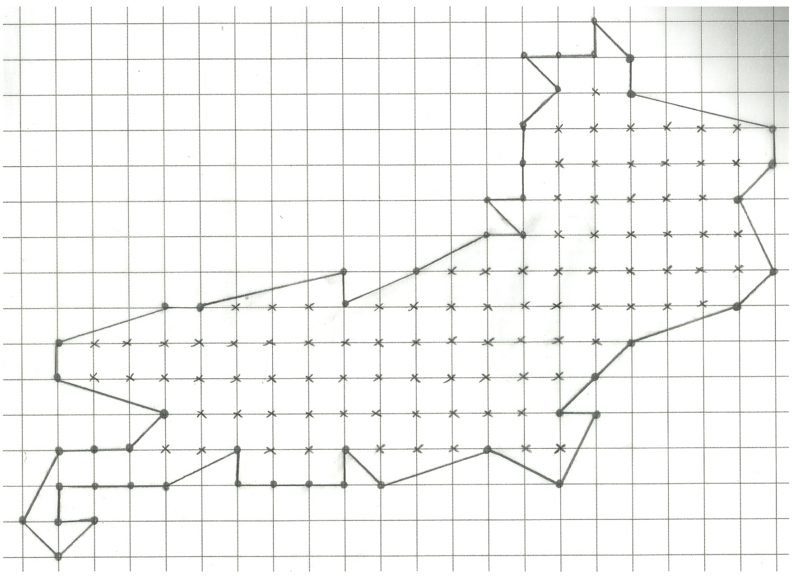
Figura 39 – Cálculo da área de um polígono feito pelo Aluno 77 usando o Applet



Fonte: Dados da pesquisa

A atividade **Calculando a área aproximada do Estado do Rio de Janeiro** foi realizada individualmente, tendo sido utilizadas duas aulas com cinquenta minutos cada. Ao realizar essa atividade os alunos encontraram dificuldade em construir um polígono que mais se aproximava do contorno do mapa, porém foi possível perceber o interesse dos alunos, pois nela ficou clara a aplicabilidade da Fórmula de Pick, tornando, assim, a aprendizagem mais significativa.

Figura 40 – Fragmento da atividade 4 feita pelo Aluno 57



Fonte: Dados da pesquisa

Ao serem questionados a respeito dos valores encontrados e as divergências ao comparar com resultados de outros alunos foram unânimes em responder que consideraram os resultados próximos, visto que é um processo totalmente manual. Observaram, também, que os resultados mais próximos da medida real ocorreram quando o polígono desenhado aproximou-se ao máximo do contorno do mapa. Pode ser considerada de fácil aplicação, pois não exige grandes recursos. Foi uma atividade bastante interessante, pois deixou clara a aplicabilidade da fórmula em situação cotidiana.

Para D'Ambrósio (2001, p. 15), “O grande desafio que nós educadores matemáticos encontramos é tornar a matemática interessante, isto é, atrativa; relevante, isto é, útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje”. Outro fato relevante dessa atividade foi o surgimento de ideias de aplicabilidade do teorema de Pick, dando destaque para a fala do Aluno 26: “Deve ser possível fazer uma atividade similar a essa usando a foto aérea feita por um drone (avião não tripulado) de uma propriedade rural para saber a área total da mesma”. Achei de extrema importância essa fala, visto que muitos alunos que participaram desse trabalho são residentes em áreas rurais e, dessa maneira, puderam perceber uma possibilidade de aplicação do teorema de Pick em algo próximo a realidade deles.

As atividades foram organizadas e ordenadas de acordo com o grau de dificuldade e, por esse motivo, a atividade **Estimando o valor de** π foi a última realizada. Utilizou duas aulas com cinquenta minutos cada e os alunos foram divididos em grupos de 4 ou 5 alunos que fizeram as aproximações pedidas com os círculos de raio um, três e dez respectivamente.

Figura 41 – Atividade 5, círculo de raio 1, feita pelo Grupo C-3

Passo 1:

Considere o círculo de raio 1 e os quadrados inscritos e circunscritos a ele. Como mostra a figura.

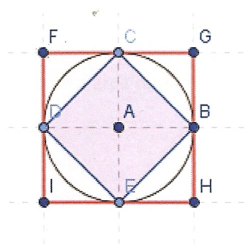


Figura 5: Círculo inscrito e circunscrito.

Baseado na citação acima, temos:

Área do quadrado inscrito ≤ Área do círculo ≤ Área do quadrado circunscrito

- Calcule usando a Fórmula de Pick a Área do quadrado inscrito (A_I) e a Área do quadrado circunscrito (A_{II}).

$B = 4$ e $I = 1$

$A = 4/2 + \cancel{1} - \cancel{1}$

$A = 2$

$B = 8$ e $I = 1$

$A = 8/2 + \cancel{1} - \cancel{1}$

$A = 4$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 42 – Atividade 5, média aritmética feita pelo Grupo C-3

- Faça a média aritmética das duas áreas encontradas.

$M = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$$\text{Média} = \frac{A_I + A_{II}}{2}$$

O valor encontrado é o valor aproximado de π.

Como o círculo tem raio 1, a aproximação é ainda distante.

$\pi \cong \frac{3}{1^2}$

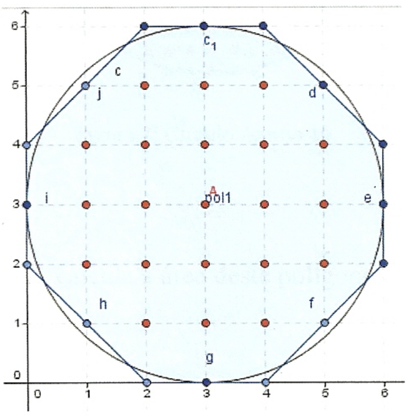
$\pi \cong 3$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 43 – Atividade 5, círculo de raio 3, feita pelo Grupo C-3

Passo 2:

Considere o círculo de raio 3. Observe através da figura abaixo que o octógono é o polígono que melhor se aproxima deste círculo.



B = 16

I = 21

Figura 6: Círculo de raio 3.

- Utilizando a Fórmula de Pick, calcule a área deste octógono.

$A = 16/2 + 21 - 1$

$A = 8 + 20$

$A = 28$

Se $\pi = \frac{\text{Área (círculo)}}{r^2}$ e o octógono é o polígono que, neste caso, mais se aproxima do círculo, então, $\pi \cong \frac{\text{Área (octógono)}}{r^2}$, calcule esse valor.

$\pi \cong \frac{A}{r^2} = \frac{28}{3^2} = \frac{28}{9} \cong 3,11$

Observe que no Passo 2 o valor de π se aproxima mais do seu valor real.

Fonte: Dados da pesquisa

As dificuldades na realização desta atividade foram bastante claras, os alunos apresentaram dúvidas na realização de alguns cálculos, exigindo do professor auxílio para a realização dos mesmos. Apesar disso, esta atividade foi considerada bastante proveitosa, pois demonstra que o Teorema de Pick, além de ser um método útil no estudo do cálculo de área de polígonos, mostra eficácia para estimar valores aproximados de π.

A aplicação dessas atividades proporcionou aos alunos a possibilidade de construir seu próprio conhecimento, de forma progressiva, desenvolvendo o raciocínio lógico e o seu pensar matemático. Houve grande interação entre os alunos, valorizando e ampliando o conhecimento prévio dos mesmos, contribuindo, assim, para uma aprendizagem matemática, viabilizando a interdisciplinaridade e a contextualização.

Resultado semelhante foi obtido por Rodrigues (2014). Ao apresentar a alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental uma abordagem diferenciada sobre o estudo de áreas de figuras planas e apresentar o Teorema de Pick como uma nova forma de realizar a medição de áreas, observou maior empenho e envolvimento dos alunos em realizar o que foi solicitado, colocando-se atentos às explicações e participativos quando solicitados a responderem perguntas ou a irem ao quadro resolver os cálculos. Os pontos comuns em nossos trabalhos são: apresentar o teorema como uma abordagem diferenciada; o histórico sobre cálculo de áreas, seguido de descrição e conceituação de áreas de diversos polígonos regulares; um capítulo com a biografia de Pick, a fórmula, suas demonstrações e algumas aplicações; apresentação das atividades propostas para alunos. Difere do meu trabalho nos seguintes pontos: a descrição e conceituação de áreas de diversos polígonos regulares é muito extensa, já o capítulo que descreve diretamente o Teorema de Pick é bem sucinto, não faz relação com o Teorema de Euler nem com o valor de π; apresenta apenas duas atividades.

Para Hermes e Cunha (2014), o Teorema de Pick apresenta uma série de relações com outros conteúdos da Matemática e sua simplicidade também permite que o tema seja trabalhado de forma lúdica, até mesmo nas séries iniciais. Os autores descrevem resumidamente o Teorema de Pick e têm como pontos comuns com o meu trabalho: apresentar o teorema como um método fascinante para realizar cálculos de áreas a partir da contagem de pontos; citar uma breve biografia de Georg Alexander Pick, o teorema e a demonstração baseada no livro Meu professor de Matemática e outras histórias. Apresenta como pontos distintos: a tentativa de encontrar uma generalização do teorema que possa ser usada para calcular a área de uma região poligonal reticulada com buracos, ou seja, calcular a área de polígonos com buracos, além de apresentar uma aplicação aritmética do Teorema de Pick, propondo seu uso para determinar a solução minimal de equação diofantina; não apresenta outras aplicações e não propõe nenhum tipo de atividade.

Não foi possível realizar outras revisões bibliográficas devido à carência de trabalhos publicados a respeito do tema em questão.

Ao analisar as atividades propostas e trabalhos com a mesma temática, percebemos que o Teorema de Pick permite realização de atividades contextualizadas, podendo ser aplicado nas aulas de Geometria, com diferentes abordagens, no intuito de enriquecer o processo de ensino-aprendizagem.

Considerações Finais

Ao final do presente estudo, que teve como objetivo avaliar a importância de se criar novas abordagens que facilitem o processo ensino-aprendizagem da Geometria, com foco no cálculo de áreas de polígonos, concluiu-se que os resultados foram positivos, tendo ocorrido um significativo envolvimento dos alunos nas atividades propostas, haja vista terem percebido sua aplicabilidade no dia a dia.

Através das atividades propostas, foi possível aos estudantes aprenderem uma forma inovadora de solucionar problemas envolvendo áreas de polígonos simples cujos vértices coincidem com os encontros das retas da malha quadriculada utilizando o Teorema de Pick, especialmente quando os polígonos não são regulares, onde este se mostra mais eficiente, pois nesses casos não há fórmulas específicas.

As dificuldades encontradas se relacionaram principalmente à falta de pré-requisitos dos estudantes, o que ocasionou algumas dificuldades na resolução das atividades, além da falta de infraestrutura das escolas no que se refere aos recursos tecnológicos disponíveis, com laboratórios que não oferecem computadores suficientes para atender a todos os alunos das turmas, em geral bastante numerosas.

Retornando à questão-problema, mencionada na Introdução, o Teorema de Pick pode ser apresentado aos alunos como uma abordagem para o cálculo de áreas de polígonos simples, juntamente com as fórmulas comumente usadas para esses cálculos, enriquecendo, assim, a aprendizagem desse conteúdo. Além disso, o Teorema de Pick pode auxiliar no cálculo de áreas de polígonos que não possuem fórmulas específicas, pois, quando isso ocorre, os alunos deparam-se com dificuldades para encontrar soluções. Vale ressaltar, ainda, que o Teorema de Pick facilita a realização de um trabalho contextualizado, possibilitando trazer a realidade do aluno para a sala de aula, através de cálculos de áreas de polígonos simples que sejam familiares a eles. O trabalho manipulativo e informatizado que Teorema de Pick possibilita também faz com que o ensino seja mais agradável favorecendo, assim, a aprendizagem.

Conclui-se que, no contexto educacional atual, faz-se necessário pensar em uma prática educativa atrativa, diferenciada, dinâmica e contextualizada, pois o grande desafio da educação matemática é disseminar saberes com inovação, de forma a contribuir para o desenvolvimento do educando de forma cognitiva e social. Acredita-se, então que tais atividades atingiram seus objetivos, pois permitiram a aprendizagem matemática correlacionada com o cotidiano dos alunos, proporcionando ao professor e aos alunos uma aprendizagem significativa.

Deixa-se como sugestão para futuras pesquisas a aplicação em um maior número de turmas, em outras unidades escolares, a fim de se obter uma amostra mais significativa.

Referências

ANDRADE, D. *Teorema de Pick*. http://www.dma.uem.br/kit/textos/pick/pick.html, 2014. Acesso em 10 de agosto de 2014. Citado na página 50.

ANDRADE, D. *Teorema de Pick*. http://www.dma.uem.br/pick/, 2014. Acesso em 08 de agosto de 2014. Citado na página 51.

AUSUBEL, D. *Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2000. Citado na página 22.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia Educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. Tradução Eva Nick. Citado na página 22.

BARROSO, J. M. *Conexões com a Matemática*. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010. (Ensino Médio, v. 1). Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 21.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio*. Brasília, DF, 2000. Citado na página 21.

COUTINHO, C. P. et al. Investigação - acção: metodologia preferencial nas práticas educativas. *Revista Psicologia, Educação e Cultura*, v. 13, n. 2, p. 355–379, 2009. Citado na página 43.

D'AMBRóSIO, U. Desafios da educação matemática no novo milênio. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, v. 8, n. 11, p. 14–17, Dezembro 2001. Citado na página 61.

ENSINO. *Currículo Básico Escola Estadual - Ensino Médio: área de Ciências da Natureza*. Vitória, 2009. Citado na página 45.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Citado na página 20.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*, v. 35, n. 2, p. 57–63, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record, 1999. Citado na página 44.

HELLMEISTER, A. C. P. *Geometria em Sala de Aula*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.

HERMES, J. D. V.; CUNHA, C. A. R. da. *O Teorema de Pick*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João Del Rei, 2014. Citado na página 63.

JULIANELLI, J. R. *Currículo Mínimo - Matemática*. Rio de Janeiro, 2012. Governo do Estado do Rio de Janeiro. Citado na página 44.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 53.

LIMA, E. L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 23, 30, 31, 33 e 34.

LIU, A. C. F. Lattice points and pick's theorem. *Mathematics Magazine*, v. 52, n. 4, p. 232–235, Setembro 1979. Published by Mathematical Association of America. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

MACHADO, R. M. *Minicurso: Explorando o Geoplano*. http://www.bienasbm.ufba.br/M11.pdf, 2014. Acesso em 12 de dezembro de 2014. Citado na página 48.

MINAYO, M. C. S. *O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde*. 10. ed. São Paulo: Hucitec, 2007. Citado na página 43.

MOREIRA, M. A. *Teoria da aprendizagem*. São Paulo: EPU, 1999. Citado na página 38.

PELIZZARI, A. et al. Teoria da aprendizagem significativa segundo ausubel. *Revista PEC*, v. 2, n. 1, p. 37–42, Jul 2001. Citado na página 23.

RODRIGUES, I. do M. *Área de figuras planas e teorema de Pick: uma abordagem diferenciada para alunos do 6 ano do Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amazonas, 2014. Citado na página 63.

SANCHES, I. Compreender, agir, mudar, incluir. da investigação - acção à educação inclusiva. *Revista Lusófona de Educação*, v. 5, p. 127–142, 2005. Citado na página 43.

SOARES, E. *Metodologia científica*. São Paulo: Atlas, 2002. Citado na página 44.

TAVARES, J. N. *Teorema de Pick*. http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/index.html, 2015. Acesso em 05 de janeiro de 2015. Citado na página 40.

WIKIPEDIA. *Teorema de Pick*. http://pt.wikipedia.org/wiki/TeoremadePick, 2014. Acesso em 10 de outubro de 2014. Citado na página 21.

APÊNDICE A

Atividades

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Prezado(a) aluno(a):

Sou aluna do Mestrado Profissional em Matemática e estou realizando o Trabalho de Conclusão de Curso. Com isso, solicito que realize as atividades propostas a seguir.

Suas respostas serão de grande importância para a realização desse Trabalho.

Desde já agradeço.

Renata da Costa Abreu

Teorema de Pick: uma nova abordagem no ensino da Geometria Plana no Ensino Médio

O Teorema de Pick foi publicado no final do século IXX pelo matemático Georg Alexander Pick, que nasceu em Viena de Áustria em 1859 e morreu durante a Segunda Guerra Mundial, num campo de concentração em 1943.

O Teorema de Pick é utilizado para calcular a área de polígonos simples com vértices sobre pontos de intersecção das retas de uma malha quadriculada a partir da contagem dos pontos do seu contorno, que chamaremos de B, e da contagem dos pontos interiores que chamaremos de I.

Teorema de Pick: Dado um polígono P cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada, sua área é dada pela fórmula

$$A = {}^{1}\!/_{2}\, B + I - 1$$

Atividade 1 – Malha quadriculada

Atividade 2 – Comprovando a Fórmula de Pick com o Geoplano

Atividade 3 – Applet desenvolvido por W. T. Zenon

Atividade 4 – Calculando a área aproximada do Estado do Rio de Janeiro

Atividade 5 – Estimando o valor de π

Atividade 1:

Malha Quadriculada

Passo 1:

Ligue os pontos formando polígonos simples:

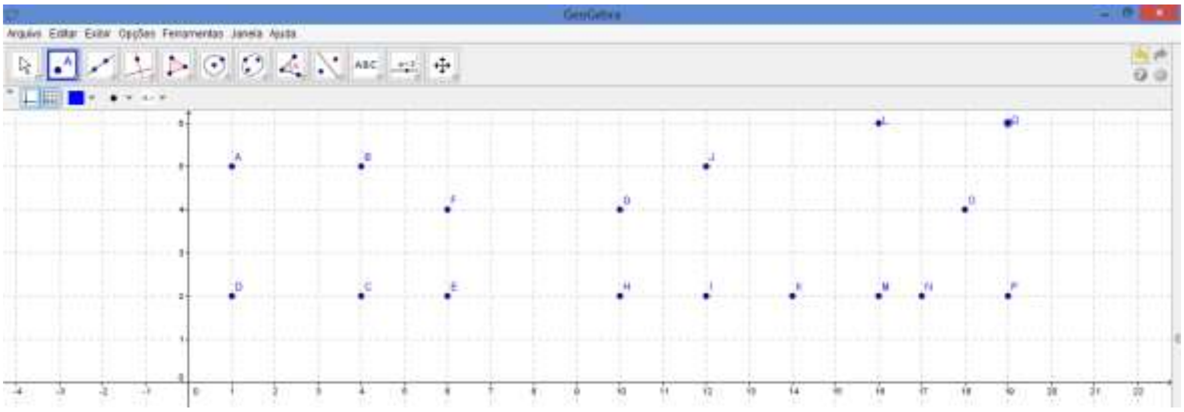
Polígono 1: ABCD

Polígono 2: EFGH

Polígono 3: IJK

Polígono 4: LMNOPQ

Figura 1: Construção de polígonos simples



Fonte: Dados da Pesquisa

Passo 2:

Calcule a área de cada polígono encontrado, considerando que cada quadradinho tem uma unidade de área. Se achar necessário utilize o banco de fórmulas abaixo

$A_{(quadrado)} = l^2$

$A_{(retângulo)} = b \cdot h$

$A_{(triângulo)} = \frac{b \cdot h}{2}$

$A_{(trapézio)} = \frac{B+b}{2} \cdot h$

Passo 3:

Marque de azul os pontos do contorno dos polígonos;

Marque de vermelho os pontos interiores de cada polígono.

Passo 4:

Complete a tabela:

Polígono	**Pontos Azuis (B)**	**Pontos Vermelhos (I)**	**Fórmula de Pick** $A = {}^{1}/_{2}\, B + I - 1$	**Área**
1				
2				
3				
4				

Passo 5:

Responda as questões abaixo:

- Faça uma comparação com os resultados obtidos nos passos 2 e 4. O que é possível perceber?

____

____

- Considerando que os polígonos estão sobre uma malha quadriculada, o que possibilita a utilização da Fórmula de Pick, qual passo você escolheria para realizar o cálculo das áreas destes polígonos? Por quê?

____

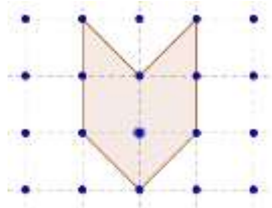
____

Atividade 2:

Comprovando a Fórmula de Pick com o Geoplano

Na malha quadriculada abaixo está representado um hexágono construído usando 8 pontos em sua borda (B = 8) e 1 ponto interior (I = 1).

Figura 2: Hexágono com B = 8 e I = 1

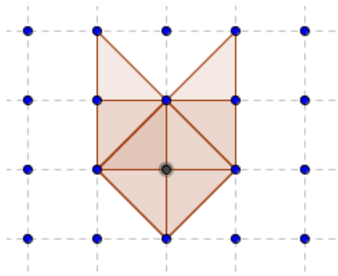


Fonte: Dados da Pesquisa

Observe que é possível dividir o polígono em triângulos fundamentais, e que cada triângulo fundamental tem área equivalente a $1/_2$ u.a.

Esse hexágono foi subdivido em 8 triângulos fundamentais de área igual a $1/_2$ u.a. Logo, esse hexágono tem área igual a 4 u.a.

Figura 3: Hexágono subdividido em triângulos fundamentais

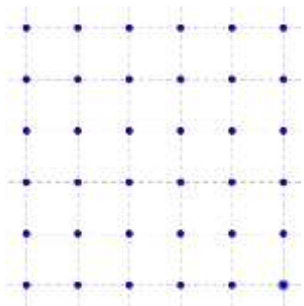


Fonte: Dados da Pesquisa

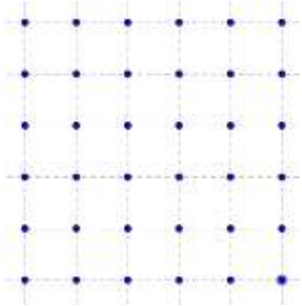
Passo 1:

Reproduza no Geoplano outros hexágonos com diferentes valores de B e de I como especificado abaixo. Transcreva o desenho do Geoplano para a malha quadriculada, subdivida-o em triângulos fundamentais e preencha as respectivas tabelas.

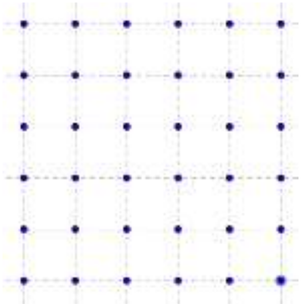
Hexágono 1	
B	8
I	1
Área	



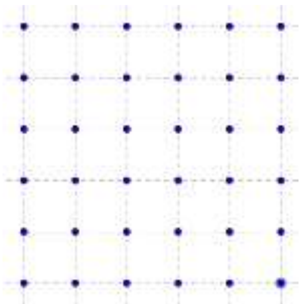
Hexágono 2	
B	8
I	2
Área	



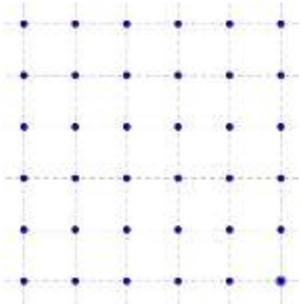
Hexágono 3	
B	8
I	3
Área	



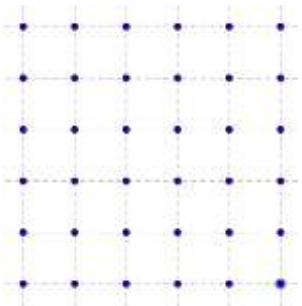
Hexágono 4	
B	9
I	1
Área	



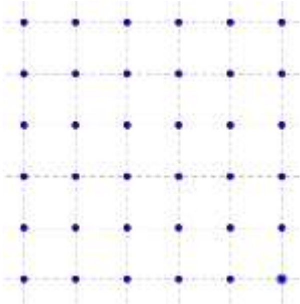
Hexágono 5	
B	9
I	2
Área	



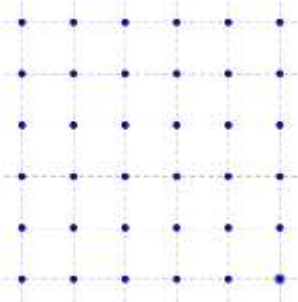
Hexágono 6	
B	9
I	3
Área	



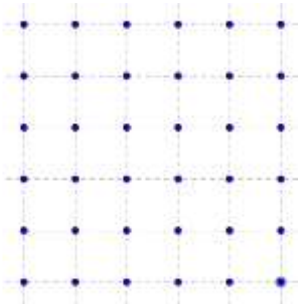
Hexágono 7	
B	10
I	1
Área	



Hexágono 8	
B	10
I	2
Área	



Hexágono 9	
B	10
I	3
Área	



É possível estabelecer alguma relação entre as áreas obtidas e os valores de B e I?

____

____

Para facilitar essa resposta preencha estas tabelas:

I = 1	
B	**Área**
8	4
9	
10	

Descubra uma regra geral, que correlaciona o valor de B e sua respectiva área.

Exemplo:

Se B=8 e A=4, então $A = B/2$

I = 2	
B	**Área**
8	
9	
10	

Descubra uma regra geral, que correlaciona o valor de B e sua respectiva área.

I = 3	
B	**Área**
8	
9	
10	

Descubra uma regra geral, que correlaciona o valor de B e sua respectiva área.

Incluindo o valor de I na regra geral obtida como ficaria?

Usando o exemplo, temos

Para I=1:

A = $^{B}/_{2}$

A = $^{B}/_{2}$ + 0

A = $^{B}/_{2}$ + 1 – 1

A = $^{B}/_{2}$ + I – 1

De forma análoga comprove se a Regra geral é válida para os demais casos:

Para I = 2:

____

____

Para I = 3:

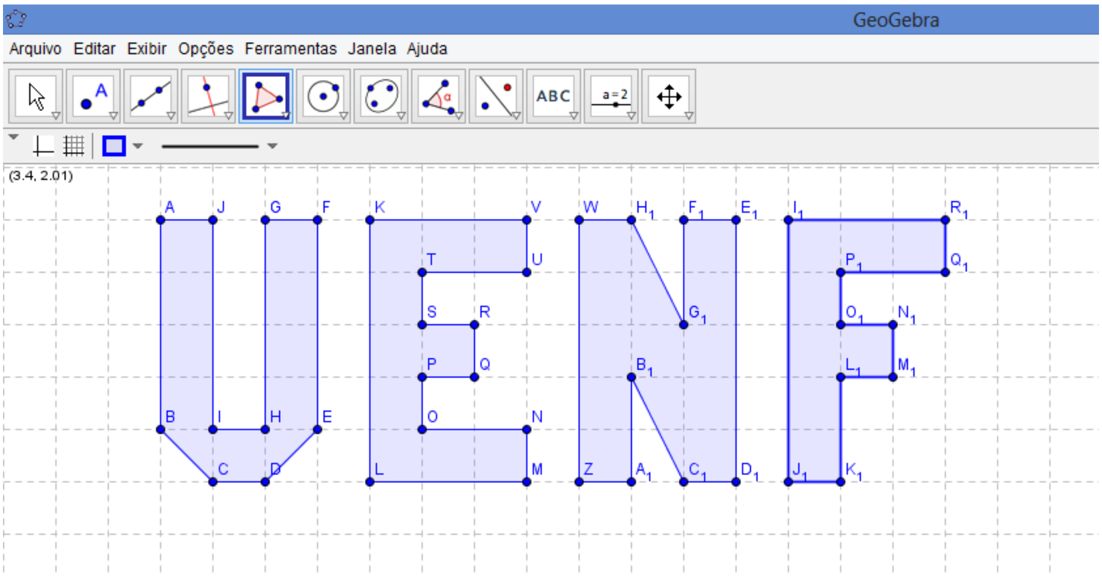
____

____

Atividade 3:

Applet desenvolvido por W. T. Zenon

Figura 4: Alusão ao nome da Universidade Estadual Norte Fluminense



Fonte: Dados da Pesquisa

Passo 1:

Cada letra acima pode ser considerada como um polígono simples. Para calcular as respectivas áreas através das fórmulas utilizadas convencionalmente, deve-se dividir a figura em polígonos justapostos. Para minimizar esse trabalho calcule a área de cada letra utilizando a Fórmula de Pick.

Passo 2:

Utilizando o Applet desenvolvido por W. T. Zenon reproduza esses desenhos separadamente e compare suas respostas.

Atividade 4:

Calculando a área aproximada do Estado do Rio de Janeiro

Para a realização desta atividade é necessário que os alunos conheçam e saibam utilizar a Fórmula de Pick.

Deverá ser escolhida uma determinada região do qual os alunos deverão calcular a área, neste caso, será escolhido o Estado do Rio de Janeiro.

Os alunos receberão o mapa do Estado do Rio de Janeiro e o papel milimetrado impresso em papel vegetal (devido à transparência).

Passo 1:

Desenhar no papel milimetrado, um polígono que melhor se aproxima ao contorno do mapa do Estado do Rio de Janeiro. Para facilitar sobreponha o papel vegetal ao mapa impresso.

Passo 2:

Fazer a contagem dos pontos interiores e dos pontos da borda do polígono desenhado.

Passo 3:

Aplicar a Fórmula de Pick.

Passo 4:

De acordo com a escala do mapa, fazer os cálculos necessários para estimar a área real do Estado do Rio de Janeiro.

Passo 5:

Comparar com os demais alunos se os valores encontrados em m^2 se aproximam da área real do Estado do Rio de Janeiro.

Passo 6:

Responda as questões abaixo:

- Sem conhecer o Teorema de Pick, como você faria para estimar a área do Estado do Rio de Janeiro?

____

____

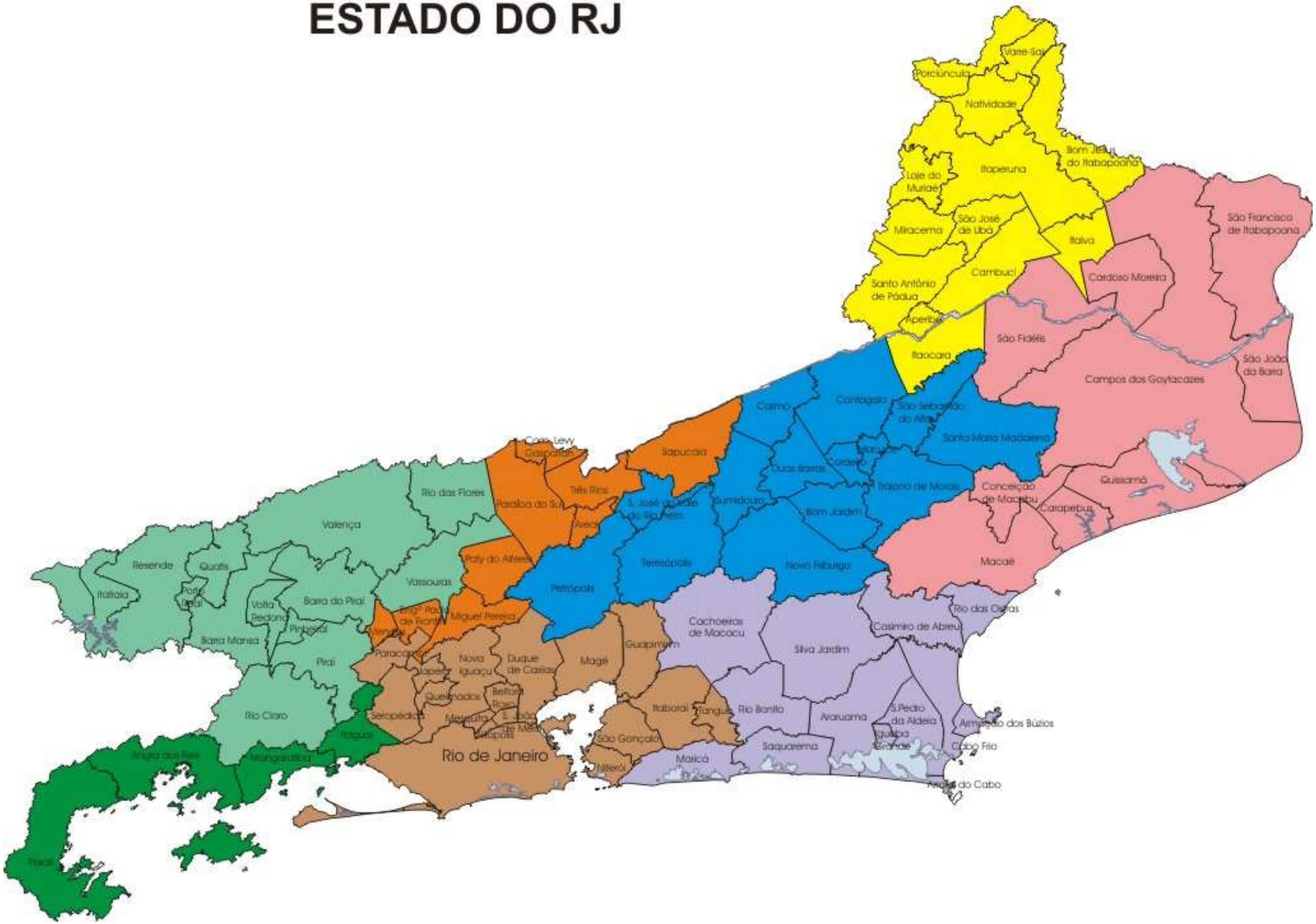
- Ocorreram divergências entre as respostas dos alunos? Em caso positivo, o que você percebeu no polígono do aluno que chegou ao valor da área que mais se aproximou da medida real do Estado do Rio de Janeiro?

____

____

Cada célula tem $1cm^2$ de área.

ESTADO DO RJ


Varre-Sai
Porciúncula
Natividade
Bom Jesus do Itabapoana
Itaperuna
Laje do Muriaé
São José de Ubá
Miracema
Italva
Cambuci
Santo Antônio de Pádua
Aperibé
Itaocara
São Francisco de Itabapoana
Cardoso Moreira
São Fidélis
São João da Barra
Campos dos Goytacazes
Quissamã
Conceição de Macabu
Carapebus
Macaé
Rio das Ostras
Casimiro de Abreu
Silva Jardim
Cachoeiras de Macacu
Rio Bonito
Araruama
S.Pedro da Aldeia
Iguaba Grande
Cabo Frio
Saquarema
Maricá
Armação dos Búzios
Carmo
Cantagalo
São Sebastião do Alto
Santa Maria Madalena
Cordeiro
Duas Barras
Trajano de Morais
Sumidouro
Bom Jardim
Nova Friburgo
Teresópolis
Petrópolis
Sapucaia
Três Rios
Paraíba do Sul
Paty do Alferes
Miguel Pereira
Rio das Flores
Valença
Vassouras
Resende
Quatis
Itatiaia
Barra do Piraí
Volta Redonda
Pinheiral
Barra Mansa
Piraí
Rio Claro
Itaguaí
Mangaratiba
Angra dos Reis
Paraty
Seropédica
Nova Iguaçu
Duque de Caxias
Magé
Guapimirim
Itaboraí
Tanguá
São Gonçalo
Niterói
Rio de Janeiro
Queimados
Belford Roxo
Japeri
Paracambi
Nilópolis

Atividade 5:

Estimando o valor de π

Como é possível relacionar o Teorema de Pick com o valor de π? É sabido que o valor de π está relacionado com a área do círculo, afinal

$$\text{Área}_{\text{(círculo)}} = \pi \, r^2$$

Então,

$$\pi = \frac{\text{Área (círculo)}}{r^2}$$

Sendo assim, é possível encontrar aproximações do valor de π encontrando polígonos que se aproximam melhor do círculo e aplicando o Teorema de Pick.

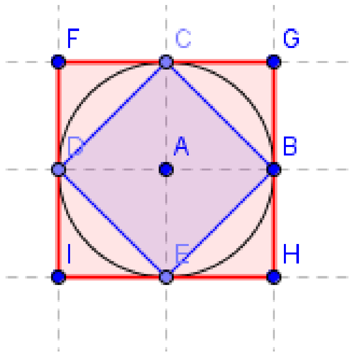
Segundo LIMA (2006, p.26),

> A área da figura plana F deve ser um número real não-negativo, que indicaremos com *a*(F). Ele ficará bem determinado se conhecermos seus valores aproximados, por falta ou por excesso.
>
> Os valores de *a*(F) aproximados por falta são, por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F. Os valores de *a*(F) aproximados por excesso são as áreas dos polígonos P' que contém F. Por conseguinte, quaisquer que sejam os polígonos P (contido em F) e P' (contendo F), o número *a*(F) satisfaz às desigualdades
>
> $$a(P) \leq a(F) \leq a(P')$$.

Passo 1:

Considere o círculo de raio 1 e os quadrados inscritos e circunscritos a ele. Como mostra a figura.

Figura 5: Círculo inscrito e circunscrito.



Fonte: Dados da Pesquisa

Baseado na citação acima, temos:

Área do quadrado inscrito $\leq$ Área do círculo $\leq$ Área do quadrado circunscrito

- Calcule usando a Fórmula de Pick a Área do quadrado inscrito (A_I) e a Área do quadrado circunscrito (A_{II}).

- Faça a média aritmética das duas áreas encontradas.

$$\boxed{\text{Média} = \frac{A_I + A_{II}}{2}}$$

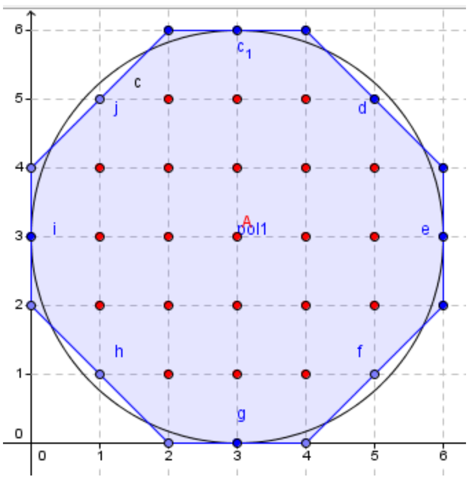
O valor encontrado é o valor aproximado de π.

Como o círculo tem raio 1, a aproximação é ainda distante.

Passo 2:

Considere o círculo de raio 3. Observe através da figura abaixo que o octógono é o polígono que melhor se aproxima deste círculo.

Figura 6: Círculo de raio 3.



Fonte: Dados da Pesquisa

- Utilizando a Fórmula de Pick, calcule a área deste octógono.

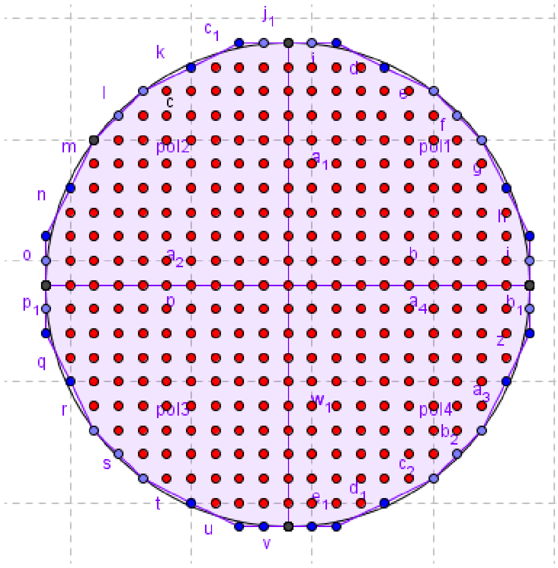
Se $\pi = \frac{\text{Área (círculo)}}{r^2}$ e o octógono é o polígono que, neste caso, mais se aproxima do círculo, então, $\pi \cong \frac{\text{Área (octógono)}}{r^2}$, calcule esse valor.

Observe que no Passo 2 o valor de π se aproxima mais do seu valor real.

Passo 3:

Considere, agora, o círculo de raio 10. Para facilitar a resolução da atividade, os pontos da borda (B) e interiores (I) já estão contados.

Figura 7: Círculo de raio 10.



Fonte: Dados da Pesquisa

B = 40

I = 293

- Utilizando a Fórmula de Pick, calcule a área deste polígono.

Analogamente ao Passo 2, encontre o valor aproximado de π usando:

$$\pi \cong \frac{\text{Área (polígono)}}{r^2}.$$

Observe que o valor de π se aproxima cada vez mais de seu valor real à medida que os polígonos apresentam uma quantidade de pontos cada vez maior. Ou seja, quando a quantidade de pontos tende ao infinito, o valor de π se aproxima de seu valor real.