UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

IBILCE

Gilberto Antonio de Oliveira

Números Irracionais e Transcendentes

São José do Rio Preto

2015

Gilberto Antonio de Oliveira

Números Irracionais e Transcendentes

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa

São José do Rio Preto

2015

Oliveira, Gilberto Antonio de.
Número Irracionais e transcendentes/ Gilberto Antonio de Oliveira – São José do Rio Preto, 2015
84 f.: Il., tabs
Orientador: João Carlos Ferreira Costa
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e Ensino. 2. Aritmética – Estudo e Ensino. 3. Números Irracionais. 4. Campos Algébricos. 5. Números transcendentes. 6. Matemática – Metodologia. I. Costa, João Carlos Ferreira. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III.Título.

CDU – 511(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Gilberto Antonio de Oliveira

Números Irracionais e Transcendentes

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof^{a}. Dr^{a}. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
UFSCAR – São Carlos

São José do Rio Preto
2015

Dedico este trabalho a meus familiares Fátima Aparecida de Oliveira, Tânia Cristina Oliveira, Antonio do Rosário Oliveira, Raphael Afonso Oliveira de Jesus e Odette Marano Oliveira (em memória pelo amor, carinho, educação e orientação no decorrer de minha vida.

Ofereço aos meus pais e irmãos de consideração, Neuza Florido Mir, Nazir Mir e Nazir Mir Jr e Michel Mir por todo incentivo e apoio durante toda a minha estada em São José do Rio Preto.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, sempre a Deus, que nos brindou com saúde para a realização deste. Por sempre estar presente, iluminando o nosso caminho.

Aos meus familiares, que sempre estiveram presentes na minha vida, educando, orientando, incentivando e torcendo pelo meu sucesso.

Aos meus familiares por consideração, pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis e por toda torcida durante esse período.

Ao Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa, pela tranquilidade e paciência e, acima de tudo, competência com que conduziu a orientação deste trabalho. Muito obrigado por todas as excelentes sugestões e ensinamentos, sem os quais seria impossível a conclusão deste trabalho.

À Coordenação do PROFMAT e a todos os docentes do Departamento de Matemática envolvidos neste importante projeto. Sem essa iniciativa provavelmente eu jamais seria incentivado a voltar aos estudos e me qualificar melhor como profissional.

Aos colegas de curso, pela amizade, incentivo, exemplo e determinação. Especialmente ao Michel Mir, pelo companheirismo nos incontáveis sábados e domingos de estudos e preparação para as avaliações e qualificação. Agradeço também as inúmeras correções em meus inúmeros erros de cálculos.

Ao meu grande amigo José Augusto Coelho por todo o incentivo dado para que eu voltasse aos estudos e por todo o interesse apresentado durante esse período. Agradeço também as valiosas sugestões dadas durante o processo de elaboração dessa dissertação.

A todos, que direta ou indiretamente, fizeram parte deste belíssimo momento de minha vida.

“O único lugar em que o sucesso aparece antes do trabalho é no dicionário.”

Albert Einstein

RESUMO

Números irracionais e transcendentes intrigam matemáticos desde os primórdios do desenvolvimento matemático. Demonstrar a irracionalidade ou transcendência de um número pode ser uma tarefa extremamente complicada e técnica, mas carrega consigo uma beleza ímpar que fascina muitos matemáticos.

No decorrer da história, a demonstração da irracionalidade ou transcendência de alguns números ajudou, por exemplo, na solução de importantes problemas matemáticos, alguns deles propostos desde a Grécia antiga.

Mas, apesar de todo o fascínio e importância dessas classes de números, eles quase não são abordados durante os Ensinos Fundamental e Médio. No entanto, acreditamos que tais classes podem ser, mesmo que superficialmente, tratadas com os alunos no sentido de despertar neles a curiosidade e o gosto pela matemática. Muitos conceitos (como o de infinito, cardinalidade, entre outros) e a própria história podem ser usados neste intuito. Assim, a proposta de nosso trabalho é, inicialmente, mostrar a evolução dos conjuntos numéricos apresentando também fatos históricos relacionados a alguns números ou classes de números. Na segunda parte do trabalho, aprofundamos nosso estudo sobre números algébricos e transcendentes. Apresentamos na parte final uma prova da irracionalidade e transcendência dos números e e π.

Palavras-chave: Números Irracionais. Números Algébricos. Números Transcendentes.

ABSTRACT

Irrational and transcendental numbers intrigued mathematicians since the beginning of mathematical development. Proving the irrationality or transcendence of a number can be a subject very complicated, however this is a task which have been fascinated many mathematicians.

In this work we present some historical information and properties of irrational, algebraic and transcendental numbers. The main part of this work are the proofs of irrationality and transcendence of the numbers *e* and π. We have noticed these two numbers are known by students in high school, but they are never shown as transcendental numbers. We believe that it is possible to present the notion of transcendental and algebraic numbers for the students, at least superficially. For instance, it is possible to explore the notions of infinite, cardinality, among others and also the rich history of these kind of numbers.

Key words: Irracional numbers. Algebraic numbers. Transcendental numbers.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

“O número é a alma das coisas” (Pitágoras, data desconhecida). A frase anterior, proferida por um dos mais conhecidos matemáticos de todos os tempos, sintetiza de maneira brilhante uma importante área do conhecimento matemático: a teoria dos números. A matemática é conhecida como a ciência das formas e, é claro, dos números. O desenvolvimento das teorias matemáticas sempre esteve atrelado ao desenvolvimento do conceito de número. Assim, não podemos menosprezar a importância desse conceito para a matemática. Mas é claro que também não se pode afirmar que a matemática trata apenas de números, como muitos chegam a pensar.

É importante ressaltar que tal desenvolvimento mencionado ocorreu de forma extremamente lenta e muitas vezes polêmica. Foram milhares de anos para se desenvolver ideias que muitas vezes são tratadas hoje como triviais, e existe um grande perigo nisso, principalmente quando se trabalha com educação matemática.

Muitas vezes podemos achar estranho que um aluno tenha dificuldades em entender como funcionam as “regras de sinais” quando operamos com números negativos, ou então, o que significa um número ser racional ou irracional, mas quando pensamos dessa forma acabamos nos esquecendo do quão lento foi o desenvolvimento e também a aceitação de determinadas propriedades e classes de números. Devemos sempre nos perguntar: “será que os grandes matemáticos, das mais variadas épocas, não tiveram dificuldades em aceitar e compreender as operações com determinados tipos de números? Será que não é natural que nossos alunos também apresentem algumas dificuldades com isso? Alguns conceitos que levaram milhares de anos para serem desenvolvidos acabam sendo trabalhados em apenas alguns meses em sala de aula e esse tempo muitas vezes não é suficiente para que o aluno compreenda alguns detalhes mais abstratos da teoria.

Dessa maneira, este trabalho tem por objetivo trazer algumas informações que podem ser de grande utilidade para alunos e também para profissionais que lidam com a educação matemática em nível básico. Tentamos trazer algumas informações interessantes a respeito das mais variadas classes numéricas com ênfase especial a duas delas, que são pouco abordadas ao longo da educação básica: os números irracionais e transcendentes. Nosso objetivo não é, de maneira alguma que provas como, por exemplo, da irracionalidade ou transcendência dos números π e *e*, sejam ensinadas aos alunos, mas julgamos ser útil o conhecimento dessas duas classes numéricas, para fomentar o interesse e a curiosidade dos alunos, o que pode levar a despertar talentos para a matemática. Aliás, dois dos mais famosos números que conhecemos, o π e o *e* fazem parte dessas classes e, no entanto, sabemos muito pouco sobre eles. Veremos aqui que alguns dos mais famosos problemas da matemática, como os três grandes problemas da Grécia Antiga, podem ser abordados com o intuito de se observar que a impossibilidade de suas resoluções pode ser verificada com o auxílio dos conceitos de números algébricos e transcendentes. Acreditamos que, conhecer estes problemas e o motivo pelo qual eles não podem ser resolvidos podem enriquecer substancialmente uma aula de geometria.

Ainda na geometria, muito se fala a respeito dos números π e $\sqrt{2}$ por exemplo, mas pouco é contado a respeito de suas histórias. Este é outro ponto importante que gostaríamos de abordar. Uma das partes do trabalho se ocupa da demonstração, de várias maneiras diferentes, da irracionalidade do número $\sqrt{2}$ e algumas delas poderiam ser reproduzidas em sala de aula sem grandes dificuldades. Saindo da geometria e indo para o estudo das funções, temos, no estudo dos logaritmos, o importante logaritmo neperiano, ou logaritmo de base *e*. Mas o que é esse misterioso número e o que pode ser dito a respeito dele? Também teremos uma parte do trabalho dedicada à definição, história e aplicações (baseadas em problemas da matemática financeira – que é um assunto que geralmente cativa os alunos do Ensino Básico por suas aplicações no cotidiano) desse número importante, mas pouco conhecido dos alunos.

No Capítulo 1, será apresentado um breve histórico a respeito do desenvolvimento da ideia de número, além de informações sobre os conjuntos numéricos, e algumas das motivações históricas para que fosse desenvolvido seu estudo. Neste capítulo poderemos observar os principais objetivos dos números em geral: contagem, medição e resolução de equações.

O segundo capítulo traz alguns pré-requisitos para a leitura do texto. O Capítulo 3 trabalhará com a ideia de irracionalidade, dando uma abordagem sobre frações contínuas. Todos os teoremas, princípios e proposições que serão utilizados ao longo do trabalho foram compilados nesses dois capítulos. Ainda no Capítulo 3 será feito um comentário a respeito da cardinalidade do conjunto dos números irracionais e será mostrado que os números irracionais são em número muito maior que os racionais e este fato pode servir de motivação para se estudar esse curioso conjunto dos números irracionais. O final do capítulo será dedicado às mais variadas formas de se demonstrar a irracionalidade do número $\sqrt{2}$. As demonstrações da irracionalidade dos números π e *e* serão feitas em um capítulo à parte.

O quarto capítulo trará algumas noções a respeito da transcendência dos números reais, demonstrando que tais números existem e apresentando alguns exemplos de números que são sempre transcendentes (os chamados números de Liouville). Uma importante parte do capítulo será dedicada aos números π e *e*, ressaltando um pouco de suas interessantes histórias e mostrando um pouco de suas aplicações na geometria (no caso do π) e na matemática financeira (no caso do *e*). O final do capítulo será dedicado à demonstração da impossibilidade de se resolver os três problemas da Grécia Antiga, usando régua e compasso: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. Todas as demonstrações serão feitas usando-se propriedades de números algébricos e transcendentes. Apresentar a história relacionada a estes três problemas, bem como dar aos alunos ideias do porquê esses problemas não podem ser resolvidos com régua e compasso, pode ser uma boa ferramenta para se trabalhar em sala de aula com os alunos.

O quinto capítulo é o mais técnico e trata das demonstrações da irracionalidade e transcendência dos números π e *e.* Tais demonstrações são extremamente técnicas e exigem um grau de conhecimento matemático que vai muito além dos conceitos que são trabalhados durante o Ensino Básico. Não esperamos que os profissionais de Educação Básica façam essas demonstrações para seus alunos, mas consideramos importante formalizar as provas de irracionalidade e transcendência desses dois números. Este capítulo é dedicado àqueles que têm interesse em aprofundar um pouco mais seus conhecimentos. Afinal é sempre importante dominarmos a fundo um assunto que desejamos lecionar e, quanto mais conhecemos esse assunto, mais apaixonados ficamos com seu fascínio.

O último capítulo trata de um relato sobre uma atividade em sala de aula.

CAPÍTULO 1

NÚMEROS E CONJUNTOS NUMÉRICOS

1. A IDEIA DE NÚMERO

Segundo Lima ([9] 2006, p.25) “os números são um dos dois objetos principais de que se ocupa a matemática, o outro é o espaço, junto com as figuras nele contidas”. A frase anterior nos dá uma noção do quão importante é a noção de número para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Em primeira instância podemos dizer que números são usados na matemática com dois objetivos principais: contagens e medidas. Quando trabalhamos com contagens, estamos usando grandezas que são chamadas discretas e o o resultado é um número inteiro. Caso trabalhemos com uma medição, a grandeza é chamada contínua e o número é chamado de número real.

Para entender melhor essas ideias e as diferenças que existem entre os diferentes tipos de números devemos ter condições de classificar e agrupar os números de acordo com características comuns a eles. Este tipo de classificação pode ser obtido estudando-se os conjuntos numéricos.

“Deus fez os números naturais, o resto é criação do homem”. Esta frase, proferida por Leopold Kronecker, matemático alemão que viveu entre 1823 e 1891, tem a capacidade de sintetizar de maneira simples e objetiva a história da aparição dos conjuntos numéricos. Números naturais vieram pela primitiva e simples necessidade de organização e contagem. Os outros “tipos” de números surgiram da necessidade de se resolver problemas do dia-a-dia. Alguns desses problemas intrigaram matemáticos por centenas ou até mesmo milhares de anos e outros problemas parecem ainda não ter solução. Entretanto, engana-se aquele que imagina que números estão apenas relacionados à resolução de problemas cotidianos. Muitos números estão associados a problemas algébricos. É o caso, por exemplo, da unidade imaginária “i” que é uma solução da equação $x^2 = -1$.

Desde os primórdios do desenvolvimento da humanidade encontramos a noção de número e de suas generalizações. Muitas vezes o desenvolvimento do conceito de número esteve diretamente ligado ao desenvolvimento da própria humanidade. Por exemplo, a noção do conceito de número permitiu aos homens primitivos reconhecer que algo muda em um pequeno agrupamento de objetos (por exemplo, seus animais, seus pertences, etc).

Devemos, entretanto, tomar certo cuidado para não confundir o sentido de número, em sua significação primitiva e em seu papel intuitivo, com a capacidade de contar. As quantidades estão à nossa volta no dia-a-dia, mas a capacidade de contar exige um fenômeno um pouco mais complexo <disponível em: HTTP://www.somatematica.com.br/numeros.ph. acesso em 21/04/2014>.

Os estudos a respeito de povos primitivos das mais variadas civilizações servem para nos fornecer uma comprovação de que embora os números estejam à nossa volta, a capacidade de contar ou de estabelecer relações entre quantidades é um processo um pouco mais complexo. Alguns habitantes da selva e alguns indígenas não possuem palavras numéricas além de um, dois e muitos e ainda assim, existe uma grande dificuldade nesse caso de se estabelecer uma contagem com valores maiores que dois. Podemos observar alguns resquícios dessa limitação com relação à contagem na própria estrutura de muitas línguas [2]. Por exemplo, a palavra inglesa *thrice* ou a palavra latina *ter,* possuem dois sentidos, um deles significa três vezes e outro significa muitos. Outro exemplo que podemos citar é uma evidente conexão entre as palavras latinas *tres* (três) e *trans* (mais além); ou então as palavras francesas *trois (três) e três* (muito) <disponível em: HTTP: // www.somatematica.com.br/numeros.ph. acesso em 21/04/2014>.

Esses são alguns exemplos que procuram mostrar o quão lento foi o processo de desenvolvimento do conceito de número e de suas aplicações iniciais em processos de contagem. Todavia, por meio de diversas circunstâncias ao longo de nossa história, o homem aprendeu a completar aquela percepção limitada de número com um artifício que estava destinado a exercer influência extraordinária em sua vida futura. Esse artifício é a operação de contar, e é a ele que devemos o progresso da humanidade <disponível em: HTTP://www.somatematica.com.br/numeros.ph. acesso em 21/04/2014>.

Como já fora mencionado, não devemos confundir o conceito de número com o processo de contagem. Podemos ter números sem contagem e contagem sem números. Por exemplo, se uma pessoa entra em uma sala de aula podemos identificar dois conjuntos, o das carteiras que estão na sala e dos alunos que assistirão a uma determinada aula. Sem efetuar nenhum tipo de contagem podemos dizer com certeza se estes dois conjuntos possuem ou não a mesma quantidade de elementos e, se possuírem quantidades diferentes de elementos, podemos também determinar facilmente qual dos conjuntos possui maior quantidade. Se todas as carteiras estiverem ocupadas e não houver alunos em pé, o número de carteiras e alunos é igual; se houverem carteiras vazias sem alunos em pé, existem mais carteiras que alunos e, finalmente, se todas as carteiras estiverem ocupadas e existirem alunos em pé, existem mais alunos que carteiras. Este procedimento é possível graças à correspondência biunívoca, a qual faz corresponder a cada elemento do primeiro conjunto um único elemento do segundo. Uma prova deste tipo de procedimento está na origem da palavra cálculo. Tal palavra se origina da palavra latina *calculus,* que significa pedra. A pedra era o objeto usado para se estabelecer essa correspondência biunívoca entre quantidades para saber se eram iguais ou qual delas era maior.

Pode parecer, à primeira vista, que o processo de correspondência biunívoca fornece apenas um meio de relacionar, por comparação, dois conjuntos distintos, isto é, dizer se os conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos ou qual deles possui a maior quantidade de elementos, sedo incapaz de criar o número no sentido absoluto da palavra. Contudo, a transição do relativo ao absoluto não é difícil. O processo utilizado foi a criação de *conjuntos modelos*, tomados do mundo que nos rodeia, e fazendo cada um deles caracterizar um agrupamento possível. A avaliação de um dado conjunto fica reduzida à seleção, entre os conjuntos modelos, daquele que possa ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dado.

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1 NÚMEROS NATURAIS

Como já foi mencionado anteriormente, os números naturais vieram pela primitiva e simples necessidade de organização e de contagem. Conforme a humanidade evoluía, as necessidades também evoluíam, já que os sistemas sociais tornavam-se cada vez mais complexos. Mas, com o progresso, também foi possível disponibilizar mais tempo para reflexões mais elaboradas. Isso ajudou a descrever o conjunto dos números naturais de forma concisa e precisa. Para isso vamos nos valer dos axiomas de Peano, matemático italiano dos séculos XIX e XX.

Denotaremos por N o conjunto cujos elementos são chamados de números naturais. A essência da caracterização de N reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando n e n' são números naturais, dizer que n' é o sucessor de n significa que n' vem logo depois de n. Em outras palavras, não existem outros números naturais entre n e n'.

Abaixo estão os axiomas de Peano, que são a base do estudo dos números naturais.

a) Todo número natural tem um único sucessor.
b) Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
c) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum número natural.
d) Se m e n são números naturais tais que o sucessor de m é igual ao sucessor de n temos que m = n.
e) Seja X um subconjunto de N. Se $1 \epsilon X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então X = N.

Podemos observar que o conjunto N é uma sequência de objetos abstratos, que de maneira inicial parecem vazios de significado. No entanto, com esses axiomas podemos utilizar símbolos para descrever o sucessor de 1 (denotado por 2); o sucessor do sucessor de 1 (denotado por 3), e assim por diante. Em linguagem moderna, representamos o conjunto N dos números naturais por:

$$N = \{1,2,3,...\}$$

Observação: Há uma razão histórica aqui para não iniciarmos o conjunto N com o número zero, como fazem muitos textos matemáticos.

2.2 NÚMEROS INTEIROS

Os números naturais sempre estiveram à nossa volta e sua aceitação sempre ocorreu de maneira rápida, tanto pelos matemáticos, quanto pela população em geral. Isso ocorre porque esses números são bastante “intuitivos”. Entretanto, o mesmo não pode ser dito com relação aos números inteiros. A aceitação de números negativos ocorreu de forma muito lenta, mesmo entre os matemáticos.

Acredita-se que a primeira aparição dos números negativos na história da matemática tenha ocorrido na China Antiga, aproximadamente há 4000 anos. Os chineses efetuavam seus cálculos de uma maneira bem peculiar. Usavam dois conjuntos de barras, uma vermelha e a outra preta. O conjunto de barras vermelhas representava os números negativos e o de barras pretas os positivos. <disponível em HTTP://mateeduc.blogspot.com.br/2010/04/historia-dos-numeros-inteiros.html acesso em 28/04/2014>. Também os matemáticos indianos se depararam com números negativos, mas nesse caso tais números apareceram quando eles tentavam estabelecer um algoritmo para a resolução de equações quadráticas <disponível em HTTP://mateeduc.blogspot.com.br/2010/04/historia-dos-numeros-inteiros.html acesso em 28/04/2014>. Muitos matemáticos apresentaram grande resistência quando se deparavam com números negativos. Era o caso de Diofanto de Alexandria, matemático grego do século III a.C. Diofanto operava de maneira magistral com números, mas quando se deparava com soluções negativas em seus problemas, as classificava como absurdas.

Toda essa resistência fez com que os números negativos levassem milhares de anos para serem reconhecidos como números, tendo aceitas suas operações e propriedades.

Com o Renascimento veio a expansão comercial e a circulação de dinheiro aumentou, obrigando os comerciantes a utilizar símbolos para expressar situações de lucro e prejuízo, ou seja, precisavam representar números positivos e negativos. Dessa maneira os matemáticos da época desenvolveram técnicas operatórias para problemas que envolvessem números negativos e positivos. Surgia então um novo conjunto numérico, representado pela letra Z (inicial da palavra Zahlen, que significa número em alemão), sendo formado pelos números positivos e seus opostos, podendo ser escrito da seguinte forma:

$$Z = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

Tal conjunto recebeu o nome de conjunto dos números inteiros.

2.3 NÚMEROS RACIONAS

Números naturais surgiram da necessidade de contagem, números inteiros da necessidade de se operar com valores que eram negativos. Já os números racionais estão associados a problemas de medidas.

Considere um segmento de reta AB que desejamos conhecer a medida. Para que essa medida possa ser efetuada, devemos tomar um segmento padrão que será denominado de segmento unitário ou unidade de medida e o denotaremos por u. Por definição devemos ter que a medida do segmento u é sempre igual a 1. Também estipularemos que segmentos congruentes tenham a mesma medida e que, se n – 1 pontos interiores decompuserem AB em n segmentos justapostos, então a medida de AB será igual à soma das medidas desses segmentos. No caso em que esses n segmentos são congruentes ao segmento unitário, podemos dizer que o segmento unitário cabe n vezes no segmento AB e a medida de AB, que será representada por m(AB) será igual a n.1 (já que 1 é a medida do segmento unitário), ou seja, m(AB) = n.

Uma situação que pode ocorrer é a de o segmento u não caber um número inteiro de vezes em AB. Nesse caso, a medida de AB não será um número inteiro, ou mais precisamente, um número natural. Para resolver este problema é necessário utilizar um raciocínio um pouco mais elaborado.

Vamos agora tomar um segmento de reta t, que caiba n vezes no segmento unitário e m vezes em AB. Observe que a medida de t será uma fração igual a 1/n da medida de de u e, além disso, sua medida será m vezes 1/n, ou seja, a medida de t será igual a m/n. Surgem então os números racionais, que são os números que podem ser escritos na forma m/n, com m e n inteiros e n não nulo.

Na Grécia antiga, os números da forma m/n não eram tratados como números, pois os gregos tinham dificuldades em admitir números que não pertencessem ao conjunto {2,3,4,5,...} (observe que nem mesmo o número 1 era considerado como número, pois para os gregos ele era usado para representar um segmento unitário que era tomado como referência em uma medida). Esses valores eram tratados como uma razão entre as medidas de dois segmentos, e não como números propriamente ditos, mas o importante não era o nome que era dado aos objetos que tinham a forma m/n, com m e n inteiros e n não nulo; o importante era saber raciocinar com esses objetos e aplicar esses conceitos na resolução de problemas.

Além de problemas de cunho geométrico, os números racionais estão também ligados a problemas algébricos, como a solução de equações. À medida que temos uma evolução das equações algébricas, torna-se cada vez mais importante saber em que conjuntos tais equações fazem sentido ou possam ser resolvidas. Isso será visto na subseção 2.7.

O conjunto dos números racionais é denotado pela letra Q (do inglês quotient) e é definido da seguinte forma:

$$Q = \left\{\frac{a}{b}; a, b \in Z, b \neq 0\right\}.$$

2.4 NÚMEROS IRRACIONAIS

Assim como os números racionais, os irracionais também estão relacionados a problemas que envolvem medidas. Durante muito tempo se pensou que quaisquer dois segmentos eram sempre comensuráveis, isto é, a razão entre suas medidas sempre resultaria em uma fração com numerador e denominador inteiros. Ou seja, a noção de comensurabilidades está relacionada ao conjunto Q. Esta crença pode ter se originado da aritmética, onde dois números naturais sempre têm um divisor em comum (o número 1). Entretanto, com segmentos de reta esses conceitos mudam um pouco.

Essa crença de que dois segmentos de reta sempre fossem comensuráveis durou até cerca de quatro séculos antes de Cristo. Nessa época, um dos discípulos de Pitágoras fez uma observação que abalou toda a estrutura da matemática grega. Esse discípulo descobriu que as medidas do lado e da diagonal de um quadrado não são segmentos comensuráveis. Em linguagem moderna, tomando um quadrado de lado unitário, temos que sua medida será igual a $\sqrt{2}$ e o número $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma m/n, com m e n naturais (a prova deste fato será apresentada posteriormente). Observando-se a existência de segmentos incomensuráveis, pode-se chegar à conclusão que os números naturais mais as frações obtidas a partir de números naturais (ou seja os números racionais positivos) eram insuficientes para medir todos os segmentos de reta.

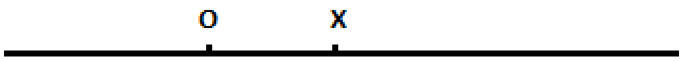
A solução encontrada e que, com certa relutância foi finalmente adotada, foi a de ampliar o conceito de número, e nesse momento foram introduzidos os chamados números irracionais. Com isso, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, qualquer que fosse o segmento de reta que tivéssemos, poderíamos atribuir ao segmento uma medida numérica. No caso em que a medida do segmento é comensurável com a unidade escolhida, sua medida é um número racional (que poderá ser natural ou fracionário) e no caso do comprimento do segmento ser incomensurável com a unidade estabelecida, sua medida é um número irracional.

Números irracionais também podem estar relacionados a problemas algébricos, assim como os racionais, conforme veremos na subseção 2.7. Existem muitos números irracionais que possuem significativa importância para a matemática. Ao longo deste trabalho citaremos alguns deles, contando um pouco de suas histórias e aplicações.

Geralmente denotaremos o conjunto dos números irracionais por R – Q.

2.5 NÚMEROS REAIS

Com o objetivo de ter uma ideia mais clara a respeito dos novos números que haviam surgido (os números irracionais) e, principalmente, para situar esses números em relação aos racionais, podemos imaginar uma reta, na qual foi fixada um ponto O, que será chamado de origem, e um ponto arbitrário X, à direita de O e diferente de O. Vamos tomar o segmento OX como o segmento unitário, ou seja, como unidade de comprimento. A reta OX receberá o nome de reta real (Figura 1).



(Figura 1)

A origem O divide a reta real em duas semirretas: a que contém o ponto X é a semirreta chamada positiva, e a outra semirreta é a negativa.

Considere agora um ponto P na reta real. Se o segmento OX couber um número inteiro de vezes em OP diremos que a abscissa de P é um número natural, se P estiver à direita de O, ou um número inteiro negativo caso P esteja à esquerda de O.

De maneira mais geral, se um ponto P pertencente à reta real for tal que, o segmento OP é comensurável com o segmento OX, diremos que a abscissa de P representa um número racional, podendo ser positivo ou negativo conforme P esteja à direita ou à esquerda do ponto O.

Por último, se o ponto P for tal que o segmento OP é incomensurável com OX, diremos que p é a abscissa de P. O número p será considerado positivo se P estiver à direita de O e considerado negativo se P estiver à esquerda de O.

Observe que dado um ponto P sobre a reta real só existem duas possibilidades para o segmento OP (ser comensurável ou incomensurável com o segmento OX). Assim temos que todas as medidas possíveis de segmentos são dados por números reais, o qual será representado por R, como o conjunto cujos elementos são números racionais ou irracionais. Isto é,

$$R = Q \cup (R - Q).$$

Existe uma correspondência biunívoca entre a reta OX e o conjunto dos números reais. Em outras palavras, cada ponto da reta real está associado a um número real e cada número real possui uma posição específica na reta real. Dessa maneira, o conjunto dos números reais pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta e a reta, pode ser vista como o modelo geométrico dos números reais. Essa representação dos números reais como abscissas de pontos de uma reta foi de fundamental importância para grandes avanços ocorridos na matemática.

Podemos agora avançar no estudo dos números reais e observar que, além de serem divididos em racionais e irracionais, os números reais podem ser dados pela união de dois outros tipos de conjuntos: o conjunto dos números algébricos e o conjunto dos números transcendentes. O estudo deste último conjunto é uma das partes principais que se ocupará o presente trabalho.

Observação: Existe uma maneira formal de construir os números reais por meio dos cortes de Dedekind ou sequências de Cauchy. Mais informações a esse respeito podem ser encontradas em [7], por exemplo.

2.6 NÚMEROS COMPLEXOS

De todos os conjuntos numéricos, o conjunto dos números complexos com certeza, é aquele que possui a denominação mais "infeliz". Tal denominação é herdada de épocas em que a abstração matemática exigida para compreensão desses números era considerada muito elevada. Atualmente sabemos que o próprio conceito de número real envolve uma elevada abstração.

Os números complexos, diferentemente dos demais números, não estão associados a processos de contagem ou medidas de segmentos, áreas, volumes. Tais números estão relacionados com problemas algébricos, principalmente a resolução de equações polinomiais. Um dos resultados mais importantes relacionado aos números complexos é o Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrado por Carl Friedrich Gauss, em 1799, o qual afirma que toda equação polinomial tem solução no conjunto dos números complexos. Esse teorema teve importantes conseqüências para a matemática, a partir do século XIX. Além disso, os números complexos ampliaram a noção que temos a respeito de números, que eram enxergados como pontos de uma reta e passaram a ser vistos como coordenadas de vetores num plano ou identificados com pontos do plano cartesiano.

Sabemos que, em R, a equação $x^2 + 1 = 0$ não admite solução. Dessa maneira, somos forçados a definir um número "n" satisfazendo $n^2 = -1$, que resolva a equação.

Temos duas opções para definir tal número. Podemos postular a sua existência ou então usamos um pouco de álgebra linear elementar e saímos em busca de um ente de natureza geométrica que seja a solução do nosso problema. Optaremos pela segunda forma. Vamos olhar a equação $x^2 + 1 = 0$ da seguinte forma: $X^2 + I = 0$, ou $X.X = -I$, onde X é uma matriz quadrada de ordem 2 com coeficientes reais, I é a matriz identidade de ordem 2 e "." é a operação de multiplicação de matrizes. Sendo X uma matriz quadrada de ordem 2, vamos definir $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Assim nosso problema se resume a resolver a equação $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando igualdade de matrizes chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 \\ ab + bd = 0 \\ ac + dc = 0 \\ d^2 + bc = -1 \end{cases} \qquad (1.1)$$

Resolvendo o sistema (1.1) encontramos a solução a = 0, b = -1, c = 1 e d = 0. A solução $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ geometricamente representa a rotação de um ângulo igual a $\frac{\pi}{2}$ radianos no plano R², no sentido anti-horário.

A partir desta motivação definimos o conjunto dos números complexos da seguinte forma:

$$C = \{x + yi; x, y \in R\}$$

onde i é a constante imaginária tal que $i^2 = -1$.

2.7 CONJUNTOS NUMÉRICOS X SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES

A evolução dos conjuntos numéricos também pode ser pensada em termos da resolução de problemas que envolvem soluções para equações algébricas.

Por exemplo, para resolver a equação x – 4 = 3 é fácil ver que sua solução é um número natural. Já no caso da equação x + 4 = 3 não temos uma solução natural, apenas uma solução inteira. Pensando agora na equação 2x + 3 = 4 não encontramos uma solução natural e nem uma solução inteira. Sua solução é um número racional. Vamos agora considerar as equações $x^2 - 2 = 0$ e $x^2 + 1 = 0$. Para a primeira equação temos que sua solução não pode ser representada por um número racional, apenas irracional e a última não apresenta nenhuma solução real, apenas complexa.

Podemos assim estabelecer uma relação entre o conceito de número e a resolução de equações algébricas. Conforme as equações exigiam soluções mais sofisticadas, os conjuntos numéricos evoluíam e iam se adaptando a essas necessidades. Nosso objetivo nesse trabalho será estudar duas classes especiais de números reais, que são pouco abordados durante o Ensino Básico, que estão relacionados a problemas geométricos e também à soluções de equações algébricas: os números irracionais e os números transcendentes.

CAPÍTULO 2

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados que serão de fundamental importância para algumas demonstrações feitas ao longo deste trabalho.

Princípio da Boa Ordenação (PBO): *Todo subconjunto não vazio S, dos números naturais, possui um elemento mínimo, isto é, existe $n_0 \in S$, tal que $n_0 \leq n$, para todo $n \in S$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos supor que $1 \notin S$ já que caso isso ocorresse, 1 seria o menor elemento de S. Dessa maneira, o menor elemento de S, cuja existência desejamos provar, será da forma $n + 1$. Devemos então encontrar um número natural n tal que $n + 1 \in S$ e, além disso, todos os elementos de S devem ser maiores que n, e assim maiores que $1,2,3, \ldots, n$. Ou seja, procuramos um número natural n tal que $\mathrm{I_n} = \{1,2,3, \ldots, \mathrm{n}\} \subset \mathrm{N} - \mathrm{S}$ e $n + 1 \in S$. Com esse objetivo vamos considerar o conjunto $X = \{n \in N;\ \mathrm{I_n} \subset \mathrm{N} - S\}$.

Dessa forma, X é o conjunto dos números naturais n tais que todos os elementos de X são maiores que n. Estamos supondo que $1 \notin \mathrm{S}$ e com isso temos que $1 \in \mathrm{X}$. Em contrapartida, como S é um conjunto não vazio, nem todos os números naturais pertencem a X, ou seja, $\mathrm{X} \neq \mathrm{N}$. Dessa forma deve existir algum $n \in \mathrm{X}$ tal que $n + 1 \notin \mathrm{X}$. Em outras palavras, todos os elementos de S são maiores que n, mas nem todos os elementos de S são maiores que $n + 1$. Como não existem números naturais entre n e $n + 1$, concluímos que $n + 1 \in S$ e é o menor elemento de S. ■

É importante ressaltar que o Princípio da Boa Ordenação é válido exclusivamente para números naturais. Além disso, vários resultados podem ser obtidos a partir desse princípio. Por exemplo, uma das formas de se mostrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ se baseia no PBO, como veremos.

Princípio de Indução Finita (PIF): *Seja P(n) uma propriedade relativa ao número natural n. Vamos supor que:*

i) P(1) é verdadeira.

ii) Para todo natural n, a validez de P(n) implica a validez de P(n+1).

Então P(n) é válida, qualquer que seja o número natural n.

O PIF decore dos axiomas de Peano e serve para mostrarmos propriedades que valem para todos os números naturais, sem ter que testar a propriedade para cada número natural, o que seria impossível.

Exemplo 2.1: Vamos usar o princípio de Indução Finita para mostrar que a soma dos quadrados dos números naturais é dada por:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1) De fato, primeiramente observe que a fórmula vale para n = 1 pois:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = 1$$

2) Suponha que a propriedade vale para certo número natural k, ou seja:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

3) Vamos mostrar que a propriedade vale para $n = k + 1$. De fato:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1).[k(2k+1) + 6k+6]}{6}$$

$$= \frac{(k+1).(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1).(k+2).(2k+3)}{6}$$

Assim a propriedade é válida para $n = k + 1$.

Por 1), 2) e 3) segue, do PIF, que a propriedade é válida para todos os números naturais. ■

Forma Alternativa do Princípio de Indução Finita: *Seja P uma propriedade referente a números naturais cumprindo as seguintes condições*

1) *O número natural x satisfaz a propriedade P;*

2) *Se um número natural n satisfaz a propriedade P então seu sucessor n + 1 também satisfaz a propriedade P.*

Então todos os números naturais maiores ou iguais a x satisfazem a propriedade P.

Principio Fundamental da Teoria dos Números: *Dado $m \in N$, não existe $n \in N$ tal que $m < n < m + 1$.*

Demonstração: Vamos usar o PBO para mostrar esse resultado.

Primeiramente observe que como $m < n < m + 1$, podemos escrever $0 < n - m < 1$.

Dessa maneira, nosso objetivo é mostrar que não existe um número natural entre 0 e 1 (observe que, como $m < n$, temos que $n - m$ é inteiro e positivo).

Vamos supor o contrário, ou seja, que existe um número natural entre 0 e 1. Defina o conjunto $A = \{n \in N; 0 < n < 1\}$. Como, por hipótese, existe um número natural entre 0 e 1, temos que A é não vazio. Dessa forma, pelo PBO, existe um número $n_0 \in A$ o qual é mínimo. Com isso $0 < n_0 < 1$. Agora multiplicando essa desigualdade por n_0 obtemos $0 < n_0^2 < n_0 < 1$ (observe que como $0 < \mathrm{n}_0 < 1$ temos $n_0^2 < n_0$) e dessa maneira $n_0^2 \in A$, mas isso contraria a minimalidade de n_0. Dessa maneira não existe um número natural entre 0 e 1. ■

Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) *Todo número natural maior que 1 pode ser escrito como produto de potências de números primos e, além disso, essa decomposição é única, a menos de uma reordenação.*

Demonstração: Usaremos a forma alternativa do PIF para fazer a demonstração do TFA.

Observe que se n = 2 temos que o número já está escrito na forma de potência de números primos, já que $2 = 2^1$.

Agora suponha que tal resultado é válido para todo número natural menor que n e vamos provar que o resultado vale para n. No caso de o número n ser primo, nada temos a demonstrar. Vamos então supor que n seja composto. Dessa maneira, existem número naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. De acordo com a hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$, $q_1, q_2, \ldots, q_s$ e números naturais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ tais que $\mathrm{n}_1 = \mathrm{p}_1^{\alpha_1} \mathrm{p}_2^{\alpha_2} \ldots \mathrm{p}_r^{\alpha_r}$ e

$\mathrm{n}_2 = \mathrm{q}_1^{\beta_1}\mathrm{q}_2^{\beta_2} \dots \mathrm{q}_s^{\beta_s}$. Com isso temos que $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$, mostrando assim que n pode ser escrito como produto de potências de números primos.

Agora vamos mostrar a unicidade. Suponha que possamos escrever n em duas representações do tipo $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$ onde os $\mathrm{p_i}$ e os $\mathrm{q_j}$ são números primos, α_i, β_j são números naturais, $i = 1,2,\dots,r \; e \; j = 1,2,\dots,s$. Logo $p_1|\mathrm{q}_1^{\beta_1}\mathrm{q}_2^{\beta_2} \dots \mathrm{q}_s^{\beta_s}$. Daí temos que $p_1 = q_j$ para algum j. Como o produto não depende da ordem, podemos reordenar os fatores $q_1, q_2, \dots, . q_s$ e supor que q_j seja q_1. Daí segue também que $\alpha_1 = \beta_1$, pois estamos em duas decomposições em números primos.

Procedendo de maneira análoga para $p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$ concluímos também que $p_i = q_i$ e $\alpha_i = \beta_i$, $\forall \, i = 2, \dots, r$.

Como $p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s} < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e o resultado segue. ■

Os teoremas a seguir envolvem números reais e complexos e são dados em cursos universitários de Cálculo e Funções de Variável Complexa.

Teorema de Rolle *Seja $f\colon [a,b] \to R$ contínua tal que:*

i) *f é diferenciável no intervalo aberto (a,b);*

ii) $f(a) = f(b) = d$.

Então existe um número c, no intervalo (a,b) tal que $f'(c) = 0$ (aqui $f'(c)$ representa a derivada da função f avaliada em c).

Teorema do Valor Médio *Seja $f\colon [a,b] \to R$ contínua tal que f é diferenciável no intervalo (a,b). Então existe um número c, no intervalo aberto (a,b) tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

As demonstrações desses dois teoremas podem ser encontradas em [8].

No Capítulo 5, para a demonstração da transcendência do número π, será necessário algum conhecimento a respeito de variáveis complexas. Abaixo apresentamos esses conceitos e, para não tornar o texto excessivamente longo partiremos do pressuposto de que as propriedades elementares a respeito de números complexos são conhecidas.

Uma função $f: C \to C$ tem derivada no ponto z_0 se o limite abaixo existe:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$f'(z_0)$ é chamada de derivada de f em z_0.

Definição 2.1: Se uma função f tiver derivada em todos os pontos de C então dizemos que f é analítica em C.

Além disso, se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ onde $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são as partes real e imaginária de $f(z)$ e f é analítica em C então vale que

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y), \tag{1}$$

onde u_x e v_x representam a derivada com relação à variável x.

É possível mostrar também que

$$f'(z) = -iu_y + v_y. \tag{2}$$

Identificando (1) e (2) temos as chamadas equações de Cauchy-Riemann.

No Cálculo real de uma variável, temos o famoso Teorema do Valor Médio, como já vimos. No entanto, para $f: C \to C$ analítica conseguimos apenas uma desigualdade do valor médio como no teorema a seguir.

Teorema 2.1 *Seja $f: C \to C$ uma função analítica em U e sejam z_1 e z_2 números complexos quaisquer. Então:*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1|\, sup\{|f'(z_1 + cz_2)|\}\ para\ 0 \leq c \leq 1.$$

Aqui |z| representa o módulo do número complexo $z = x + yi$, ou seja, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e sup é o supremo.

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [21].

No estudo dos números algébricos e transcendentes necessitamos trabalhar com polinômios. O Teorema Fundamental da Álgebra nos diz que todo polinômio admite raízes complexas.

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Todo polinômio p(z) em C, de grau maior ou igual a 1, tem uma raiz em C.*

Podemos encontrar a demonstração desse teorema em [21].

Na demonstração da transcendência do número π será usada a ideia de relações entre os coeficientes e as raízes de um polinômio, que serão definidos e exemplificados a seguir.

Definição 2.2 Se $t_1, t_2, \dots, t_n \in C$ são as raízes de um polinômio $P(x)$, então esse polinômio é da forma

$$P(x) = (x - t_1)(x - t_2) \dots (x - t_n) \tag{2.1}$$

(podemos supor sem perda de generalidade que o coeficiente líder de $P(x)$ é 1). Se desenvolvermos o produto indicado em (2.1) obtemos:

$$P(x) = x^n - s_1 x^{n-1} + s_2 x^{n-2} - s_3 x^{n-3} + \cdots + (-1)^n s_n \tag{2.2}$$

onde

$$s_1 = \sum_{j=1}^{n} t_j \tag{2.3.1}$$

$$s_2 = \sum_{i<j}^{n} t_i t_j \tag{2.3.2}$$

$$s_3 = \sum_{i<j<k}^{n} t_i t_j t_k \tag{2.3.3}$$

.

.

.

$$s_n = t_1 t_2 \dots t_n \tag{2.3.n}$$

As relações (2.3.1), (2.3.2), ... (2.3.n) são chamadas relações entre os coeficientes e as raízes de P(x).

Exemplos 2.2

i) (n = 1). Nesse caso há uma única relação entre os coeficientes e as raízes, $s_1 = t_1$.

ii) (n = 2). As relações entre os coeficientes e as raízes, nesse caso, são:

$$s_1 = t_1 + t_2, \qquad s_2 = t_1 t_2$$

iii) (n = 3). As relações entre os coeficientes e as raízes, nesse caso, são:

$$s_1 = t_1 + t_2 + t_3 \qquad s_1 = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 \qquad s_3 = t_1 t_2 t_3$$

Definição 2.3 Um polinômio $p(t_1, \dots, t_n)$ e dito simétrico quando podemos permutar as variáveis $t_1, \dots, t_n$ entre si, sem que isso altere a sua expressão.

Exemplo 2.3 Um polinômio p, nas variáveis x e y é dito simétrico quando $p(x,y) = p(y,x)$

Teorema 2.3 Seja $f(t_1, \dots, t_n)$ um polinômio simétrico de grau d com coeficientes em R. Então, existe um polinômio $g(s_1, \dots, s_n)$ de grau menor ou igual a d, com coeficientes em R, onde

$$s_1 = \sum_{j=1}^{n} t_j$$

$$s_2 = \sum_{i<j}^{n} t_i t_j$$

$$s_3 = \sum_{i<j<k}^{n} t_i t_j t_k$$

$$\vdots$$

$$s_n = t_1 t_2 \dots t_n$$

são os polinômios simétricos elementares em $t_{1,} t_2, \dots, t_n$, tal que

$$f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_n).$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [5].

CAPÍTULO 3

NÚMEROS IRRACIONAIS: UMA ABORDAGEM

1. FRAÇÕES CONTÍNUAS E IRRACIONALIDADE

Seja $n = \frac{b_0}{b_1}$ um número racional irredutível, ou seja, $mdc(b_0, b_1) = 1$ e suponha que $b_1 > 0$. Utilizando o algoritmo da divisão de Euclides podemos obter as seguintes equações:

$$b_0 = b_1 a_0 + b_2, 0 < b_2 < b_1$$
$$b_1 = b_2 a_1 + b_3, 0 < b_3 < b_2$$
$$b_2 = b_3 a_2 + b_4, 0 < b_4 < b_3$$
$$\vdots$$
$$b_{j-1} = b_j a_{j-1} + b_{j+1}, 0 < b_{j+1} < b_j \qquad (3.1)$$

Escrevendo $\zeta_i = \frac{b_i}{b_{i+1}}$ para $0 \leq i \leq j$, então das equações acima tiramos

$$\zeta_i = a_i + \frac{1}{\zeta_{i+1}} \; 0 \leq i \leq j-1 \; e \; \zeta_j = \mathrm{a_j} \qquad (3.2)$$

Quando i = 0 e i = 1, temos $\zeta_0 = a_0 + \frac{1}{\zeta_1}$ e $\zeta_1 = a_1 + \frac{1}{\zeta_2}$. Substituindo $\zeta_0 = a_0 + \frac{1}{\zeta_1}$ temos:

$$\zeta_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\zeta_2}}$$

Se continuarmos esse processo chegamos a:

$$\zeta_0 = \frac{b_0}{b_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_j}}}$$

Essa é a expressão, em fração contínua de $n = \frac{b_0}{b_1}$. Assumimos, no início, que n tem denominador positivo, mas essa suposição não pode ser feita sobre b_0 e portanto a_0 pode ser positivo, negativo ou zero. Entretanto, sendo $0 < b_2 < b_1 \; e \; 0 <$

$b_3 < b_2$ podemos observar que $0 < b_3 < b_1$ e como $a_1 = \frac{b_1 - b_3}{b_2}$ podemos dizer que a_1 é positivo bem como os outros termos $a_2, a_3, \ldots a_j$.

De maneira geral, para quaisquer $a_0, a_1, \ldots, a_j$ onde $a_1, \ldots, a_j$ são números positivos e a_0 pode ser positivo, negativo ou nulo, denotaremos:

$$\langle a_0; a_1, \ldots, a_j \rangle = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_j}}}$$

Essa fração contínua será chamada simples caso todos os a_i sejam inteiros e é chamada finita se tiver uma quantidade limitada de termos.

Temos ainda a seguinte relação:

$$\langle a_0; a_1, \ldots, a_j \rangle = a_0 + \frac{1}{\langle a_1; a_2, \ldots, a_j \rangle}. \tag{3.3}$$

Exemplos 3.1: i) $\frac{34}{11} = 3 + \frac{1}{11} = \langle 3; 11 \rangle$.

ii) $\frac{63}{5} = \langle 12; 1,1,2 \rangle$.

A seguir apresentamos um importante teorema que relaciona os números racionais com as frações contínuas:

Teorema 3.1 *Qualquer fração contínua simples e finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser expresso como uma fração contínua simples e finita.*

Demonstração: Podemos provar a condição necessária usando indução finita sobre a quantidade de termos que forma a fração contínua $\langle a_0; a_1, \ldots, a_j \rangle$ onde $a_i \in Z$. De fato, para o caso em que j = 0, temos $\langle a_0 \rangle = a_0 \in Z$. Vamos supor agora que o resultado seja válido para uma fração contínua com k termos em sua representação decimal. Queremos provar que o resultado é válido para $k + 1$ termos em sua representação.

De acordo com a igualdade (3.3) podemos garantir que $\langle a_0; a_1, \ldots, a_k \rangle$ é um número racional. Para isto basta observar que a_0 é um número inteiro e $\langle a_1; a_2, \ldots, a_k \rangle$ é um número racional. Assim o número $a_0 + \frac{1}{\langle a_1; a_2, \ldots, a_k \rangle} = \langle a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ é racional.

Para a demonstração da recíproca basta usar a construção das frações contínuas que foi feita no início desta Seção. ■

Vamos definir agora o que é uma fração contínua simples e infinita.

Definição 3.1 A sequência infinita de inteiros $a_0, a_1, a_2, \ldots$, onde $a_1, a_2, \ldots$ são números positivos e a_0 pode ser positivo, negativo ou nulo, determinam uma fração contínua simples e infinita $\langle a_0; a_1, a_2, \ldots \rangle$. O valor de $\langle a_0; a_1, a_2, \ldots \rangle$ é definido como

$$\lim_{n\to\infty} \langle a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle.$$

A seguir apresentamos alguns resultados envolvendo frações contínuas que serão usados para demonstrar que toda fração contínua simples e infinita representa um número irracional. A demonstração desses fatos foi omitida, pois foge ao objetivo deste trabalho. Uma referência para estes resultados é [13].

Dados $a_0, a_1, \ldots$ uma sequência infinita de inteiros, todos positivos, exceto possivelmente a_0, definimos duas sequências de inteiros h_n e k_n recursivamente do seguinte modo:

$$h_{-2} = 0, h_{-1} = 1, h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}, \forall\, i \geq 0;$$
$$k_{-2} = 1, k_{-1} = 0, k_i = a_i k_{i-1} + k_{i-2}, \forall\, i \geq 0.$$

Proposição 3.1 *Para qualquer número real x, $x > 0$ vale que:*

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x \rangle = \frac{x h_{n-1} + h_{n-2}}{x k_{n-1} + k_{n-2}}.$$

Proposição 3.2 *Se $r_n := \langle a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ para todo $n \geq 0$, então $r_n = \frac{h_n}{k_n}$.*

Proposição 3.3 *As equações*

$$h_i k_{i-1} - h_{i-1} k_i = (-1)^{i-1} \qquad e \qquad r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}}$$

são válidas para $i \geq 1$ e as identidades

$$h_i k_{i-2} - h_{i-2} k_i = (-1)^i a_i \qquad e \qquad r_i - r_{i-2} = \frac{(-1)^i a_i}{k_i k_{i-2}}$$

são válidas para $i \geq 2$.

Teorema 3.2 *A sequência* r_n *definida na Proposição 3.2 satisfaz*

$$r_0 < r_2 < r_4 < r_6 < \cdots < r_7 < r_5 < r_3 < r_1.$$

O teorema a seguir relaciona frações contínuas simples e infinitas e os números irracionais.

Teorema 3.3 *O valor de qualquer fração contínua simples e infinita é um número irracional.*

Demonstração: Seja $\theta = \langle a_0; a_1, a_2, \dots \rangle$. De acordo com a Definição 3.1 temos que:

$$\theta = \lim_{n\to\infty} \langle a_0; a_1, a_2, \dots, a_n \rangle.$$

Contudo, de acordo com o Teorema 3.2, $r_n < \theta < r_{n+1}$. Assim

$$0 < |\theta - r_n| < |r_{n+1} - r_n|.$$

De acordo com a identidade $r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}}$ podemos escrever $r_{n+1} - r_n = \frac{(-1)^n}{k_n k_{n+1}}$.

E assim temos $0 < |\theta - r_n| < \frac{1}{k_n k_{n+1}}$.

Multiplicando a identidade acima por k_n, obtemos,

$$0 < |k_n\theta - k_n r_n| < \frac{1}{k_{n+1}} \Rightarrow 0 < |k_n\theta - h_n| < \frac{1}{k_{n+1}}.$$

Vamos supor agora que θ seja um número racional, ou seja, $\theta = \frac{a}{b}$, com $a, b \epsilon Z \ e \ b > 0$. Então,

$$0 < \left|k_n \frac{a}{b} - h_n\right| < \frac{1}{k_{n+1}}.$$

Multiplicando a identidade acima por b, obtemos,

$$0 < |k_n a - h_n b| < \frac{b}{k_{n+1}}.$$

Como $k_{n+1} \to \infty$ quando $n \to \infty$, temos que existe um n_0 natural e suficientemente grande tal que $b < k_{n_0+1}$ e assim $0 < |k_n a - h_n b| < 1$.

Entretanto, isso é uma contradição, já que $k_{n_0} a - h_{n_0} b$ é um número inteiro. Portanto, θ é um número irracional. ■

2. EXISTEM MUITO MAIS NÚMEROS IRRACIONAIS QUE RACIONAIS

Já vimos que podemos representar os números reais por meio da reta real. Nessa reta os inteiros são marcados facilmente usando-se a unidade como referência e marcando os números como múltiplos dessa unidade. Os números racionais podem ser obtidos por meio de subdivisões adequadas do segmento unitário. Imaginando os números racionais sobre a reta podemos observar que é possível obter racionais tão perto um do outro quanto se queira. Para isto basta tomar subdivisões cada vez menores da unidade. Em outras palavras, podemos dizer o conjunto dos números racionais é um conjunto denso espalhado por toda a reta. Uma análise menos cuidadosa nos levaria a acreditar que os números racionais teriam a capacidade de preencher toda a reta. Mas isto seria um absurdo visto que já sabemos da existência de números irracionais. A questão que queremos abordar no momento é: existem mais números racionais ou irracionais na reta?

George Cantor, matemático russo dos séculos XIX e XX fez uma importante descoberta a respeito da distribuição dos números irracionais ao longo da reta real.

Cantor foi o primeiro matemático a conseguir provar que existem conjuntos infinitos com cardinais diferentes. De fato, Cantor mostrou que o conjunto dos números naturais e o dos reais eram ambos infinitos, mas possuíam cardinais diferentes.

Aqui necessitamos introduzir a noção de enumerabilidade.

Definição 3.2 Um conjunto A é dito enumerável se seus elementos puderem ser colocado em correspondência biunívoca com os números naturais. Mais precisamente, A é enumerável se existir uma função bijetiva $f: N \rightarrow A$.

Exemplos 1) O conjunto dos números naturais é enumerável.
2) O conjunto dos números inteiros é enumerável.

O teorema a seguir descreve algumas propriedades de conjuntos enumeráveis:

Teorema 3.4 *i) A união de um conjunto finito com um conjunto enumerável é enumerável.*

ii) A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

iii) A união de um conjunto finito de conjuntos enumeráveis é enumerável.

iv) A união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável.

v) A união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Essas demonstrações podem ser encontradas em [5].

Observações: 1) Se A é enumerável e $B \subset A$ é um conjunto infinito, então B também é enumerável.

2) É fácil ver que N e Z são enumeráveis. O conjunto Q também é enumerável. Isso foi provado por Cantor.

Teorema 3.5 *O conjunto R dos números reais não é enumerável.*

Demonstração: Vamos mostrar que o subconjunto $[0,1)$ dos números reais é não enumerável. Em virtude da observação acima teremos que R será não enumerável. Dado $x \epsilon [0,1)$, podemos escrevê-lo da seguinte forma:

$$0, a_1 a_2 a_3 a_{4.} \ldots, \tag{3.4}$$

onde a_i é um dos algarismos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Existem alguns números que possuem duas representações da forma (3.4). Um exemplo é o número $\frac{5}{10}$ que pode ser representado por 0,5000000... ou 0,49999999...

Quando for este o caso sempre optaremos pela representação decimal que "termina". Em outras palavras, eliminaremos as decimais da forma (3.4) que a partir de certa ordem os elementos são iguais a 9. Vamos supor que os número reais do intervalo $[0,1)$ formam um conjunto enumerável.

$$\begin{array}{c} 0, a_{11} a_{12} a_{13} \ldots \\ 0, a_{21} a_{22} a_{23} \ldots \\ 0, a_{31} a_{32} a_{33} \ldots \\ . \\ . \\ . \end{array} \tag{3.5}$$

Agora construiremos o número:

$$0, b_1b_2b_3b_{4.} \dots$$

da seguinte maneira: todos os b_i são diferentes de 0 e de 9 e $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}$ e assim por diante.

Dessa maneira temos que $0, b_1b_2b_3b_{4.} \dots \neq 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots$ para todo n, já que $b_n \neq a_{nn}$. Com isso temos que $0, b_1b_2b_3b_{4.} \dots$ não está na lista (3.5) mas está no intervalo $[0,1)$, o que é um absurdo. Dessa maneira, os números reais do intervalo $[0,1)$ não formam um conjunto enumerável e, consequentemente, R não é enumerável. ■

Vamos introduzir aqui a noção de cardinalidade.

A importância dos números naturais provém do fato de que eles constituem o modelo matemático que torna possível o processo de contagem. Noutras palavras, eles respondem perguntas do tipo “Quantos elementos têm esse conjunto”? [9].

Para contar os elementos de um conjunto é necessário usar a noção de correspondência biunívoca ou bijeção, como já dissemos no Capítulo 1.

Uma função $f: X \to Y$ chama-se uma bijeção entre X e Y quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

Seja X um conjunto. Diz-se que X é finito e que X possui n elementos quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca $f: \{1,2, \dots, n\} \to X$. O número natural n é chamado número cardinal de X. Por último, diz-se que X é infinito quando ele não é finito, ou seja, não existe correspondência biunívoca $f: \{1,2, \dots, n\} \to X$. Neste caso, se X é infinito podemos usar a ideia de bijeção (correspondência de um para um) para definir a noção de cardinal de X. Por exemplo, todos os conjuntos que tenham uma correspondência com N são ditos ter a mesma cardinalidade de N (são chamados enumeráveis).

Observações: 1) A cardinalidade de N é estritamente menor que a de R.

2) Observe que R é não enumerável, enquanto Q é enumerável e $R = Q \cup (R - Q)$. Dessa maneira, se $R - Q$ fosse um conjunto enumerável, teríamos que $Q \cup (R - Q) = R$ seria enumerável, o que é um absurdo e dessa forma temos que $R - Q$ é não enumerável. Sendo $R - Q$ não enumerável temos que $R - Q$ não é finito e não possui o mesmo cardinal de N. Isso indica que não podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre N e $R - Q$. Disso concluímos que a cardinalidade

de N (ou então a de Q já que Q e N possuem mesma cardinalidade) é estritamente menor que a de $R - Q$ o que mostra que existem mais números irracionais que racionais.

3. O NÚMERO $\sqrt{2}$ É IRRACIONAL

Dentre os números irracionais, os números π, *e* e $\sqrt{2}$ são os que provavelmente possuem as histórias mais ricas. Uma parte deste trabalho será dedicada a tratar dos números π e *e,* mas no momento nos concentremos na irracionalidade de $\sqrt{2}$.

A definição do número $\sqrt{2}$ vem da geometria (a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de comprimento igual a 1) e também da álgebra (um número positivo x que satisfaz a equação $x^2 - 2 = 0$).

Uma das demonstrações mais conhecidas da irracionalidade de $\sqrt{2}$ é atribuída a Hipassus de Metapontum (cerca de 500 a.C.), que pertencia à escola Pitagórica. Uma lenda interessante a respeito do surgimento do número $\sqrt{2}$ afirma que a demonstração da irracionalidade do número custou a Hipassus a vida, pois os pitagóricos não admitiam a existência de segmentos incomensuráveis.

Abaixo apresentamos algumas demonstrações interessantes da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

3.1 USANDO FRAÇÕES IRREDUTÍVEIS

Vamos supor que $\sqrt{2}$ seja racional. Assim $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b não nulo. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, isto é, $mdc(a, b) = 1$.

Como $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ temos que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ou então $a^2 = 2b^2$.

Logo a^2 é par e isso implica que a é par, isto é, $a = 2k$, para algum k inteiro. Dessa maneira

$$2b^2 = (2k)^2 \Longrightarrow b^2 = 2k^2.$$

Assim b^2 é par e portanto b é par. Mas isso contraria o fato de a e b serem primos entre si.

3.2 USANDO O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Vamos supor que o número $\sqrt{2}$ seja racional, digamos $\frac{a}{b}$. Dessa maneira temos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow a^2 = 2b^2$. Observe que, se decompusermos o número b^2 em fatores primos, teremos que todo fator primo desse número tem expoente par e assim o expoente de 2 em $2b^2$ é necessariamente ímpar.

Mas, se decompusermos o número a^2 em fatores primos teremos que qualquer fator primo terá expoente par. Isso significa que o expoente de 2 na decomposição de a^2 será par.

Agora como $a^2 = 2b^2$ conseguimos obter duas decomposições diferentes para um mesmo número e isso contraria a fatoração única demonstrada pelo Teorema Fundamental da Aritmética.

3.3 USANDO FRAÇÕES CONTÍNUAS

Primeiramente devemos observar que o número $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ é uma raiz da equação $x^2 = 2x + 1$, ou seja, $\alpha^2 = 2\alpha + 1$. Como $\alpha \neq 0$ vamos dividir os dois membros da igualdade anterior por α, obtendo $\alpha = 2 + \frac{1}{\alpha}$.

Agora $\alpha = 2 + \frac{1}{\alpha} = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{\alpha}} = \langle 2; 2,2,2, \dots \rangle$.

Com isso temos que o número $\alpha - 1 = \sqrt{2} = \langle 1; 2,2,2, \dots \rangle$, o qual é irracional, pelo Teorema 3.3.

3.4 A PROVA GEOMÉTRICA

Para esta demonstração faremos uso de uma importante ferramenta, que é o coração do método da descida infinita de Fermat: *não existe subsequência decrescente e infinita de números naturais.*

Vamos começar com um retângulo R_1 com lados medindo $L_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $l_1 = 1$. Observe que $L_1 > 2$ e assim podemos subdividir R_1 em dois quadrados de lado 1 e um retângulo R_2 com lados medindo $L_2 = 1$ e $l_2 = \sqrt{2} - 1$ (Figura 2).

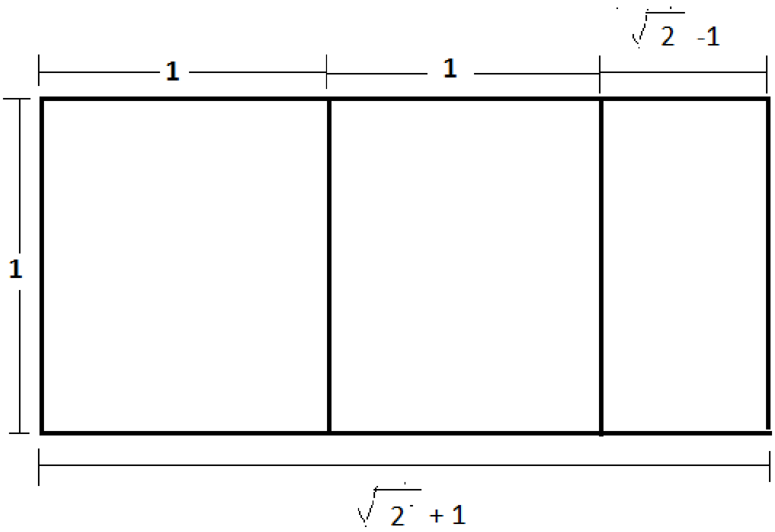


Figura 2

Observe ainda que $\frac{L_1}{l_1} = \frac{L_2}{l_2} = \sqrt{2} + 1$. Intuitivamente, vamos continuar construindo retângulos R_n, $n = 3,4,5,\ldots$, com lado maior L_n (igual a l_{n-1}) e lado menor l_n (igual a $L_{n-1} - 2l_{n-1}$).

Afirmação: $\frac{L_n}{l_n} = \sqrt{2} + 1, \forall\, n \geq 1.$

A prova será feita por indução sobre n. Já vimos que para n = 1 e n = 2 a fórmula vale.

Supondo, por hipótese de indução, que $\frac{L_{n-1}}{l_{n-1}} = \sqrt{2} + 1$, podemos escrever:

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{l_{n-1}}{L_{n-1} - 2l_{n-1}} = \frac{1}{\frac{L_{n-1}}{l_{n-1}} - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1,$$

como queríamos.

Dessa forma, a proporção entre os lados maior e menor desses retângulos é constante e com isso temos que existem infinitos retângulos R_n. Repare agora que a sequência (l_n) é decrescente e infinita. Tal fato segue da relação

$$1 < \sqrt{2} + 1 = \frac{l_{n-1}}{l_n} \Longrightarrow l_{n-1} > l_n.$$

Vamos agora supor que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, com a e b naturais. Definamos o retângulo R’$_1$ com lados $L'_1 = a + b$ e $l'_1 = b$. Com isso

$$\frac{L'_1}{l'_1} = \frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1 = \sqrt{2} + 1.$$

De modo análogo ao argumento anterior, construímos infinitos retângulos R’$_n$ com lados medindo L'_n e l'_n. No entanto, a construção dos lados dos retângulos menores envolve apenas a subtração a partir dos lados $a + b$ e b. Por esse motivo temos que l'_n é um número inteiro para todo n. Na realidade vamos provar que l'_n é natural para todo n.

De fato como $\frac{L'_n}{l'_n} = \sqrt{2} + 1 > 0$ para todo n, então l'_n é sempre não nulo. Vamos supor por absurdo que $l'_n < 0$, para algum n. Então o PBO garante a existência de um n_0 mínimo com essa propriedade. Mas $\frac{L'_{n0}}{l'_{n_0}} > 0$ e daí L'_{n_0}também é negativo, derivando um absurdo com a minimalidade de n_0 já que $l'_{n_0-1} = L'_{n_0} < 0$.

Em conclusão, a sequência (l'_n) de números naturais é infinita e estritamente decrescente o que é um absurdo.

3.5 USANDO O PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

Vamos supor que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Tomando esse fato como verdadeiro temos que o conjunto $S = \{n \in N; n\sqrt{2} \in Z\}$ é não vazio e com isso admite um elemento mínimo b, de acordo com o PBO. Dessa maneira existe $a \in Z$, tal que $b\sqrt{2} = a$. Daí, temos que:

$$\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}-1} = \frac{2b-a}{a-b}.$$

Lembrando que $1 < \sqrt{2} < 2$, podemos escrever $0 < b - a < b$ e com isso concluímos que $b - a \in S$. Mas esse fato contraria a minimalidade de b.

CAPÍTULO 4

NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

As definições de números algébricos e transcendentes são feitas através de conceitos algébricos, mas as aplicações desses números vão muito além de questões algébricas. Números algébricos e transcendentes aparecem nas mais variadas áreas da matemática, como geometria, análise, matemática financeira, entre outros.

Definição 4.1 Um número real α será dito algébrico se existir um polinômio não nulo, com coeficientes inteiros, tal que α seja raiz desse polinômio.

Exemplos 4.1: 1) Todos os números racionais são algébricos, pois todo número racional da forma $\frac{a}{b}$ é raiz da equação $bx - a = 0$, a e b inteiros e $b \neq 0$.

2) As raízes enésimas de números racionais também são números algébricos. De fato, se $\alpha = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, temos que α é raiz da equação $bx^n - a = 0$, com a e b inteiros e b não nulo.

3) O número $\sqrt{2}$ é algébrico, pois é solução da equação $x^2 - 2 = 0$.

A grande pergunta que fica é: será que as equações algébricas com coeficientes inteiros conseguem representar todos os números reais? Em outras palavras, todo número real é solução de uma equação algébrica com coeficientes inteiros? A resposta é não. Existem números que não são soluções de equações algébricas com coeficientes inteiros. Veremos isso mais adiante.

Abaixo estão relacionadas algumas propriedades dos números algébricos.

(i) A soma de dois números algébricos é algébrico.

(ii) O produto de dois números algébricos é algébrico.

(iii) O simétrico $-\alpha$ de um número algébrico α é algébrico.

(iv) O inverso α^{-1} de um número algébrico $(\alpha \neq 0)$ é algébrico.

As demonstrações de tais propriedades podem ser encontradas em [5].

Definição 4.2 Todo número real que não for algébrico, será dito transcendente.

A palavra transcendente associada a essa classe de números serve para indicar que esses números transcendem às equações algébricas. Em outras palavras, nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros consegue “alcançar” esses números.

Como poderá ser observado ao longo deste trabalho, mostrar que um número é transcendente é algo difícil. Uma das dificuldades reside no fato de que esses números não são definidos a partir do que eles são e sim a partir do que eles não são. No entanto, veremos que algumas classes de números possuem a característica da transcendência. O estudo dos números transcendentes provém de diversos problemas, alguns deles associados à geometria (como a quadratura do círculo); outros são de cunho teórico e avançado, como as investigações de Hermite sobre a função exponencial ou o sétimo problema de Hilbert, de sua famosa lista de 23 problemas (muitos deles ainda sem solução).

Dois dos números transcendentes mais importantes da matemática são o π e o *e*. Ao longo deste trabalho será dada uma atenção especial a estes dois números.

Alguns outros exemplos de números transcendentes são: $2^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{3}}$.

A teoria dos números transcendentes foi originada por Joseph Liouville, matemático francês do século XIX o qual obteve, pela primeira vez uma classe de números que não satisfaziam a nenhuma equação algébrica de coeficientes inteiros.

No Capítulo 3 foi mencionada a ideia de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis para mostrar que existiam mais números irracionais que racionais. Abaixo trabalhamos com essa ideia de maneira mais consistente, apresentando algumas definições, propriedades e teoremas importantes.

Teorema 4.1 *O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.*

Demonstração: Considere um polinômio de coeficientes inteiros

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{4.1}$$

Vamos definir a sua altura como sendo o número natural

$$|P| = |a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0| + n. \qquad (4.2)$$

O Teorema Fundamental da Álgebra garante que $P(x)$ dado em (4.1), tem exatamente n raízes complexas. Todas elas, algumas ou nenhuma delas podem ser reais. Temos que o número de polinômios da forma (4.1) com uma dada altura é certamente um número finito. Sendo assim as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito. Feito isso podemos observar que o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas formam um conjunto enumerável. De acordo com o item iv) do Teorema 3.4 temos que a união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável e com isso garantimos que o conjuntos de todos os números algébricos é enumerável. ■

Teorema 4.2 *O conjunto dos números transcendentes é não enumerável*

Demonstração: De acordo com o Teorema 4.1 temos que o conjuntos dos números algébricos é enumerável. Agora, de acordo com o Teorema 3.5 o conjunto R dos números reais é não enumerável e com isso concluímos que o conjunto dos números transcendentes deve ser não enumerável uma vez que R se escreve como a união desses dois conjuntos. ■

1. OS NÚMEROS DE LIOUVILLE

O Teorema 4.2 nos garante a existência de números transcendentes. Tais números existem e em profusão, mas o teorema não nos dá explicitamente nenhum número transcendente. Foi o matemático francês Joseph Liouville, em 1851, que nos apresentou um critério para que um número seja transcendente. Usando esse critério será possível escrever explicitamente alguns números transcendentes.

Antes de apresentar tais números necessitamos de algumas definições e resultados importantes.

Definição 4.3 Diz-se que um número algébrico α é de grau n se ele for raiz de uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros, e se não existir uma equação polinomial, de menor grau, da qual α seja raiz.

Dessa maneira, os números racionais coincidem com os números algébricos de grau 1.

Definição 4.4 Um número real é aproximável na ordem n por racionais se existirem uma constante $c > 0$ e uma sequência $\left(\frac{a_j}{b_j}\right)$ de racionais diferentes, com $b_j > 0$ e $mdc(a_j, b_j) = 1$ tais que $\left|\alpha - \frac{a_j}{b_j}\right| < \frac{c}{b_j^n}$.

Podemos dizer que um número irracional é bem aproximado por racionais se é aproximável na ordem n por racionais. Em particular, um importante resultado associado a este tipo de aproximação é o Teorema da Aproximação de Dirichlet, o qual afirma que:

Teorema 4.3 *Se $\alpha \in R$ é um número irracional, então existem infinitos racionais $\frac{a}{b}$ com $b \geq 1$, tais que $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}$.*

Mais detalhes a respeito deste teorema podem ser encontrados em [6].

Este resultado é fundamental para se fazer as chamadas aproximações diofantinas (aproximação de números reais por racionais).

Em síntese, Liouville construiu uma classe de números que são muito bem aproximadas por racionais.

Teorema de Liouville *Seja α uma raiz real de um polinômio irredutível $P(t)$ de coeficientes inteiros de grau $n \geq 2$. Então existe uma constante positiva $c(\alpha)$ tal que* $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{b^n}, onde\ b > 0$ para todo racional $\frac{a}{b}$. Uma escolha para esta constante que pode facilitar os cálculos é $c(\alpha) := \frac{1}{1+máx_{|t-\alpha|\leq 1}|P'(t)|}$, onde $P'(t)$ é a derivada de $P(t)$.

Demonstração: Com a escolha de $c(\alpha)$ sugerida acima, se tivermos $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq 1$, o teorema é válido, pois $1 \geq \frac{c(\alpha)}{b^n}$. Para o caso em que $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < 1$, vamos observar que, como $P(t)$ é irredutível sobre os inteiros, ele também é irredutível sobre os racionais e com isso $P\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$, o que implica $|b^n|.P\left(\frac{a}{b}\right) \geq 1$, já que $b^n.P\left(\frac{a}{b}\right)$ é um número inteiro não nulo. De acordo com o Teorema do Valor Médio, existe um número real t, entre α e $\frac{a}{b}$ tal que:

$$\left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|P(\alpha) - P\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| |P'(t)|.$$

Dessa maneira

$$b^n |P'(t)| \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = b^n \left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| \geq 1.$$

E com isso

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{\mathrm{b^n}(1 + |\mathrm{P}'(\mathrm{t})|)} \geq \frac{1}{b^n(1 + máx_{|t-\alpha|\leq 1}|P'(t)|)} = \frac{\mathrm{c}(\alpha)}{\mathrm{b^n}}$$

onde usamos que $|t-\alpha| \leq \left|\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} - \alpha\right| \leq 1$. ■

Definição 4.5 Um número real **α** é chamado de número de Liouville se existir uma sequência $\left(\frac{a_j}{b_j}\right)_{j\geq 1}$, com $b_j > 1$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{a_j}{b_j}\right| < \frac{1}{b_j^j}$$

para todo $j \geq 1$.

O conjunto dos números de Liouville será denotado por L.

Exemplo O número $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0{,}110001000000000000000001000000000$ ... é um número de Liouville. Este número é conhecido como constante de Liouville.

Para mostrar que este número é de Liouville vamos considerar a sequência de racionais definida por

$$\frac{a_j}{b_j} = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{j}} \frac{1}{10^{\mathrm{n}!}}.$$

Assim temos

$$\left|\alpha - \frac{a_j}{b_j}\right| = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{10^{\mathrm{n}!}} = \frac{1}{10^{(\mathrm{j}+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(\mathrm{j}+2)!-(\mathrm{j}+1)!}} + \cdots\right). \tag{4.3}$$

A expressão em parênteses é majorado por

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots = \frac{10}{9}.$$

Assim, o último membro de (4.3) é majorado por:

$$\frac{1}{(10^{j!})10^{j!}}\cdot\frac{10}{9} < \frac{1}{(10^{j!})^{j}}$$

e com isso

$$\left|\alpha - \frac{a_j}{b_j}\right| < \frac{1}{(10^{j!})^{j!}}$$

e como $a_j = 10^{j!}$, segue que o número α definido no início do exemplo é um número de Liouville.

Proposição 4.1 *A sequência (b_j) descrita anteriormente, não é limitada.*

Demonstração: Vamos supor que a sequência (b_j) seja limitada. Se isto ocorrer, então existe $M > 0$, tal que $b_j \leq M$, para todo $j \geq 1$. Agora como $\left|\alpha - \frac{a_j}{b_j}\right| < 1$ temos que $\left|\frac{\alpha b_j - a_j}{b_j}\right| < 1$ e com isso obtemos $|a_j| - |b_j\alpha| < |b_j\alpha - a_j| < b_j$.

Esta última desigualdade implica em uma limitação para a sequência (a_j), já que $|a_j| < (|\alpha| + 1)M$. Entretanto, isso contraria o fato de a sequência $\left(\frac{a_j}{b_j}\right)$ ser infinita.

Com isso concluímos que a sequência (b_j) não é limitada. ■

Corolário 4.1 Todo *número de Liouville é irracional.*

Demonstração: Vamos supor, por absurdo, que um número de Liouville seja racional da forma $\frac{a}{b}$. Se isto ocorrer, então existem infinitos $\left(\frac{a_j}{b_j}\right)$, diferentes de $\frac{a}{b}$ tais que:

$$\frac{1}{b_j^{j}} > \left|\frac{a}{b} - \frac{a_j}{b_j}\right| = \left|\frac{a b_j - a_j b}{b b_j}\right| \geq \frac{1}{|b| b_j}. \quad (4.4)$$

De acordo com a desigualdade (3.4) temos que $b_j^{j-1} < |b|$, o que contraria o fato de (b_j) não ser limitada (Proposição 3.1). Portanto, todo número de Liouville é irracional. ■

Teorema 4.2 *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração: De acordo com o Corolário 4.1 temos que um número de Liouville não pode ser racional. Vamos supor que α seja um número de Liouville algébrico não racional, ou seja, que α seja um número algébrico de grau $n > 1$. De acordo com o Teroema de Liouville temos que $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{b^n}$ será válida para todo número racional. Em particular para os $\left(\frac{a_j}{b_j}\right)$ da Definição 4.5. Dessa maneira teríamos:

$$\frac{c(\alpha)}{b_j^n} < \left|\alpha - \frac{a_j}{b_j}\right| < \frac{1}{b_j^j}.$$

Com isso $b_j^{j-n} < \frac{1}{c(\alpha)}$, para todo $j \geq 1$, mas isso contraria o fato de a sequência $\left(b_j^{j-n}\right)$ ser não limitada. Dessa maneira o número α não pode ser algébrico. ■

2. UM POUCO DE HISTÓRIA

Durante toda a história da matemática temos diversos números que assumiram grande importância no desenvolvimento de conceitos e da própria história da matemática. Temos exemplos de tais números em todos os conjuntos sejam eles naturais, inteiros, racionais, irracionais, complexos e, é claro, nos transcendentes. Os números transcendentes de maneira geral não são abordados durante o Ensino Básico, mas os alunos aprendem a trabalhar com alguns deles, mesmo sem saber que são transcendentes. É o caso, por exemplo, dos números π e *e.* O primeiro, associado a importantes problemas geométricos; e o segundo associado à função exponencial e logaritmos, assuntos muito explorados durante o Ensino Médio. Por este fato, não existe motivo para não se comentar, mesmo que brevemente, um pouco mais a respeito desses números, de sua rica e interessante história e também um pouco sobre a interessante classe de números à qual pertencem.

Neste sentido, vamos abordar algumas informações interessantes a respeito dos números π e *e.*

Desde que os humanos começaram a comercializar bens e a trabalhar com o conceito de dinheiro, as questões financeiras passaram a ocupar uma preocupação constante dentro da matemática. Uma ideia que se encontra no centro das atenções quando o assunto é Matemática Financeira são os juros. “Nenhum outro aspecto da vida tem característica mais comum do que o impulso para acumular riqueza e conseguir a independência financeira. Assim, não deve surpreender a ninguém que algum matemático anônimo, no início do século XVII, tenha notado uma ligação curiosa entre o modo como o dinheiro se acumula e o comportamento de certa expressão matemática no infinito” ([12] Maor, 2008).

Vamos analisar um interessante problema de Matemática Financeira.

Suponha que uma pessoa faz uma aplicação de um capital C, por um período t, a uma taxa de juros igual a i (o valor da taxa sempre será dado em decimal e não em porcentagem) e na modalidade de juros compostos. Sabemos que o valor do montante M acumulado nessa aplicação é dado por:

$$M = C.(1+i)^t. \tag{4.5}$$

Em alguns casos podemos calcular o juro acumulado não uma vez, mas várias vezes ao período. Por exemplo, numa aplicação de R$ 1000,00 à uma taxa de 10% a.a (ao ano), podemos fazer uma capitalização semestral. Nesse caso usaríamos metade da taxa de juros (5%) como taxa por período (nesse caso um período passa a ser um semestre). Agora teríamos uma taxa de 5% a.s (ao semestre) composta duas vezes (já que um ano corresponde a dois semestres). Repare que no primeiro caso, com taxa de 10% ao ano e capitalização anual, os juros da aplicação seriam de R$ 100,00. Já no segundo caso, seria R$ 102,50 (basta substituir C = 1000, n = 2 e i = 0,05 na equação (3.5)). Assim, o juro obtido é R$ 2,50 maior que no primeiro caso. Generalizando um pouco essa ideia, se um capital C for aplicado a uma taxa de juros igual a i por um período t e com n capitalizações periódicas iguais durante esse período t, o valor do montante M acumulado ao final da aplicação será igual a:

$$M = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}. \tag{4.6}$$

Vamos analisar um exemplo para verificar se, conforme aumentamos o número de capitalizações em um período, o Montante, e consequentemente os juros, também aumentam. Tomemos uma situação em que um capital C = R$ 1000,00 aplicado a uma taxa i = 10%, com diversos tipos de capitalização. Vamos resumir as informações na tabela abaixo.

Período de conversão	n	i/n	M
Anual	1	0,1	R$ 1100,00
Semestral	2	0,05	R$ 1102,50
Trimestral	4	0,025	R$ 1103,81
Mensal	12	0,008333333	R$ 1104,71

Semanal	52	0,0019230769	R$ 1105,06
Diário	365	0,0002739726	R$ 1105,15

Tabela 1: Montantes acumulados em aplicações com diferentes capitalizações

Podemos observar que, conforme aumentamos o número de capitalizações, o montante aumenta e isso nos leva a seguinte pergunta. Será que esse crescimento ocorre indefinidamente, ou seja, conforme aumentamos o número de capitalizações, o montante poderia se tornar infinito? A resposta claramente é não, mas essa pergunta levou a importantes descobertas matemáticas.

Para explorar um pouco mais essa situação, vamos considerar uma situação na qual a taxa de juros aplicada seja igual a 100%. Claramente nenhum banco teria oferta tão generosa, mas nossa preocupação é estudar um caso hipotético com importantes consequências matemáticas. Tomando uma aplicação de um capital C = R$ 1,00, com t = 1 ano e i = 100%, a equação (4.6) se torna

$$M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \qquad (4.7)$$

Vamos agora investigar como essa fórmula se comporta para valores crescentes de n.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815
100000	2,71827
1000000	2,71828
10000000	2,71828

Tabela 2: Valores aproximados de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Podemos observar que, conforme os valores de n aumentam, o valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ parece se tornar próximo de 2,71828. Mas será que este padrão continua? Em outras palavras, independente do quão grande for o valor de n, os valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tendem a se estacionar em um valor fixo? A resposta é sim, e o número que possui essa notável propriedade foi denotado por *e*. Podemos escrever então $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. É interessante observar como um simples problema relacionado a taxa de juros teve implicações tão significativas na matemática.

Outra importante característica do número *e* é estar relacionado a um problema geométrico: a área sob a hipérbole $xy = 1$.

Desde os primórdios, uma das questões que mais intrigou os matemáticos de diversas épocas foi o cálculo de áreas que não podiam ser decompostas em figuras básicas, como polígonos ou setores circulares. O cálculo da área de uma parábola já havia sido feito com sucesso por Arquimedes, usando o método da exaustão.

No século XVII Pierre de Fermat conseguiu estabelecer fórmulas que calculavam as áreas de figuras cuja equação geral era $y = x^n$. Repare que a hipérbole $xy = 1$ é um caso particular da equação anterior, quando $n = -1$. A fórmula obtida por Pierre de Fermat para a área da curva $y = x^n$ no intervalo $[0, a]$ foi:

$$A = \frac{a^{n+1}}{n+1}. \qquad (4.8)$$

O único problema é que tal fórmula não poderia ser aplicada justamente no caso da hipérbole (quando $n = -1$) que nos interessa.

Coube a um contemporâneo de Fermat, Grégoire de Saint-Vicent fazer uma importante observação. Ele observou que á área sob a hipérbole $xy = 1$, a partir de um ponto de referência fixo $x > 0$ (geralmente por, conveniência, tomamos $x = 1$) até um ponto variável $x = t$ é dada por $A(t) = \log_a t$ (é importante observar que ainda não sabemos o valor de a e se ele é fixo ou não).

Dessa maneira o problema da quadratura da hipérbole estava resolvido, cerca de dois mil anos depois de os gregos se depararem com esse problema pela primeira vez. Mas uma questão ainda ficara sem resposta: a fórmula $A(t) = \log_a t$ realmente nos fornece a área sob a hipérbole como uma função da variável t, entretanto essa fórmula ainda não é adequada para efetuar cálculos, pois ainda não foi estabelecida a base que deveríamos adotar. Para que se possa efetuar qualquer tipo de cálculo, é necessário que se estabeleça uma base para esse logaritmo. A grande questão é: será que qualquer base (dentro das condições de existência dos logaritmos) pode ser usada? A resposta claramente é não. Não estamos livres para escolher o valor de a aleatoriamente. Logo, deve existir um valor de a que determine a área que estamos procurando numericamente e é possível mostrar que esse valor é o número *e.* Uma referência para este estudo é o livro [9].

Veremos mais adiante a prova da irracionalidade e transcendência do número *e.*

Trabalhando agora com um pouco de geometria, encontramos interessantes e intrigantes problemas associados ao número π, outro famoso número transcendente. Durante o Ensino Básico aprendemos a calcular o perímetro de um triângulo e, a partir dessa ideia, podemos calcular o perímetro de qualquer polígono. Entretanto, quando se trata de formas curvas, essa ideia já não pode mais ser aplicada. Durante os ensinos Fundamental e Médio, aprendemos fórmulas que determinam o comprimento e a área de um círculo. Tais fórmulas são, respectivamente, $C = 2\pi R$ e $A = \pi R^2$ onde R é o raio do círculo. Geralmente vemos essas fórmulas de forma simples e natural, sem nos perguntar o porquê dessa constante que aparece nessas fórmulas (o número π) ou como esse número foi obtido.

Valores relativamente precisos de π eram conhecidos desde a época dos antigos egípcios. Um texto contido no Papiro Rhind, datado de 1650 a.C, traz a declaração de que a área de um círculo tem o mesmo valor que a área de um quadrado cujo lado tenha medida igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Calculando o valor de π por meio dessa aproximação obtemos $\pi \approx 3{,}16049$ e esse valor corresponde a um erro de apenas 0,6% com relação ao valor verdadeiro de π, um feito realmente impressionante para um texto com cerca de três mil e quinhentos anos (ver [12]).

Conforme os conceitos matemáticos foram evoluindo, muitos valores foram atribuídos a π. Valores estes cada vez mais precisos, mas sempre obtidos de maneira empírica: calculava-se o comprimento da circunferência e dividia-se esse valor pela medida do diâmetro. O primeiro matemático a propor um método capaz de fornecer o valor de π por meio de um procedimento matemático, ou seja, um algoritmo, em vez de uma medição, foi Arquimedes.

A ideia de Arquimedes era inscrever e circunscrever polígonos regulares a um círculo. Quanto maior o número de lados do polígono inscrito, mais próximo do comprimento da circunferência estava o perímetro do polígono e, nesse caso, seu perímetro era sempre um pouco menor que o comprimento da circunferência.

Analogamente, os perímetros dos polígonos circunscritos, também se aproximavam do comprimento da circunferência à medida que o número de lados aumenta só que nesse caso os perímetros dos polígonos são maiores que o comprimento da circunferência. Usando esse processo, Arquimedes obteve uma série de valores que aproximavam π por falta e outra série de valores que aproximavam π por excesso. Sabia-se então que o valor de π devia estar "espremido" entre os valores obtidos pelas aproximações e, quanto maior o número de lados do polígono usado melhor seria a aproximação para o número π. Quando se usa polígonos de noventa e seis lados para se inscrever e circunscrever o círculo (esse polígono pode ser obtido partindo-se de um hexágono regular e dobrando-se o número de lados) pode-se estimar que o valor de π encontra-se entre 3,1403 e 3,14271. Tal aproximação, ainda hoje é suficiente para a maioria das aplicações práticas envolvendo comprimentos ou áreas de círculos.

Muitos séculos depois do processo proposto por Arquimedes, muitos matemáticos se dedicaram a determinar o valor de π por meio de fórmulas ou séries.

Cera de 1800 anos depois de Arquimedes, François Viète, no curso de seu trabalho de trigonometria, encontrou uma fórmula notável envolvendo o número π (ver [1]):

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} . \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots \qquad (4.9)$$

A descoberta de tal produto infinito foi um marco na história da matemática. A característica mais importante dessa fórmula são os três pontos no final, que indicam que ela continua indefinidamente, seguindo o mesmo padrão. Por meio da fórmula (3.9) podemos, pelo menos em princípio, determinar o valor de π por meio de operações elementares (soma, multiplicação, divisão e radiciação). Além disso, essa fórmula quebrou uma barreira psicológica, já que escrever os três pontos no final sinalizava a aceitação de processos infinitos em matemática, os mesmos processos que praticamente levaram os gregos à loucura. Outros produtos infinitos envolvendo o π foram descobertos por Newton e James Gregory (ver [1]):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}... \text{ e } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

A característica mais notável de tais fórmulas é que por meio delas o número π, originalmente definido em termos do comprimento e do raio do círculo, pode ser expresso em termos somente de números inteiros e operações elementares, ainda que através de um processo infinito. Apesar de inúmeras tentativas de se aproximar o número π para valores cada vez mais precisos, na esperança de que a expressão decimal de π finalmente chegasse ao fim, ou começasse a se repetir periodicamente, tais práticas mostraram-se infrutíferas. Entre os muitos matemáticos que tentaram alcançar tal objetivo, um nome é particularmente notável: Ludolph Van Ceulen, que dedicou boa parte de sua vida à tarefa de calcular o valor exato de π. Em seu último ano de vida chegou ao valor correto para as trinta e cinco primeiras casas decimais. Tal feito foi tão impressionante para a época (início do século XVII), que o número foi gravado em sua tumba. Durante muitos anos os livros alemães se referiam ao π como o "número ludolfino" (ver [12]). Veremos mais adiante que o número π é irracional e além disso, é também transcendente.

3. TRÊS PROBLEMAS INSOLÚVEIS

É interessante observar como conceitos que, a primeira vista parecem desprovidos de qualquer tipo de aplicação, acabam resolvendo problemas importantes dentro e fora da matemática. Esse é o caso da teoria dos números algébricos e transcendentes, que possibilitou a resolução, ou melhor, mostrou a impossibilidade de resolução de alguns importantes problemas de geometria.

Durante milhares de anos, três problemas geométricos assombraram matemáticos do mundo todo: a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Muitos matemáticos tentaram provar a possibilidade ou a impossibilidade de se resolver tais problemas usando régua e compasso, mas apenas com o surgimento da teoria dos números algébricos e transcendentes é que ficou provada a impossibilidade de se resolver estes problemas usando-se apenas régua e compasso.

Os teoremas abaixo trazem importantes consequências para a demonstração da impossibilidade de resolução dos três problemas citados acima.

Teorema 4.5 *Começando com um segmento de comprimento unitário, qualquer comprimento que possa ser construído com régua e compasso é um número algébrico de grau 1, 2, 4, 8,... isto é, um número algébrico de grau igual a uma potência de 2.*

Teorema 4.6 *A condição necessária e suficiente para que três raízes de uma equação de grau 3, de coeficientes inteiros sejam construtíveis por régua e compasso é que uma delas seja racional.*

As demonstrações desses teoremas podem ser encontradas em [3].

3.1 A DUPLICAÇÃO DO CUBO

Reza a lenda que em um período de grande dificuldade na agricultura, os sábios da antiga Grécia consultaram os Oráculos para saber o que podiam fazer para que esse período de dificuldade passasse. Os Oráculos disseram então que os Deuses desejavam que um altar na forma de um cubo fosse duplicado. Erroneamente os gregos duplicaram o lado do cubo e isso acabou por não resolver o problema, pois a vontade dos Deuses não havia sido satisfeita.

Duplicar um cubo significa construir um cubo cujo volume seja igual ao dobro do volume de um cubo dado. Nesse caso, o erro cometido pelos gregos foi duplicar o lado do cubo, o que fez com que o seu volume fosse multiplicado por oito. Assim, na realidade, os gregos octuplicaram o cubo!

Mas qual deve ser então o processo a ser usado para se conseguir a duplicação do cubo, isto é, qual deve ser o lado do cubo que deveria ser construído?

Considere um cubo de aresta igual a a. Temos que o volume desse cubo será dado por $V = a^3$, para duplicar esse cubo devemos encontrar um segundo cubo, de aresta b e tal que seu volume seja $2a^3$, assim teremos $b = \sqrt[3]{2a^3}$ ou $b = a\sqrt[3]{2}$.

Se considerarmos um cubo de lado unitário, o valor do lado do cubo duplicado será igual a $\sqrt[3]{2}$. Vamos mostrar que um segmento de medida igual a $\sqrt[3]{2}$ não pode ser construído usando-se apenas régua e compasso.

Vamos mostrar que o número $\sqrt[3]{2}$ é irracional e algébrico de grau 3. De fato:

i) Vamos supor que o número $\sqrt[3]{2}$ seja racional, digamos $\frac{a}{b}$. Dessa maneira temos que $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow a^3 = 2b^3$. Observe que, se decompusermos o número b^3 em fatores primos, teremos que todo fator primo desse número tem expoente da forma $3k$, onde k é um número inteiro e assim o expoente de 2 em $2b^3$ é da forma $3k+1$.

Mas, se decompusermos o número a^3 em fatores primos teremos que qualquer fator primo terá expoente da forma $3k$. Isso significa que o expoente de 2 na decomposição de a^2 será da forma $3k$.

Agora como $a^3 = 2b^3$, conseguimos obter duas decomposições diferentes para um mesmo número e isso contraria a fatoração única demonstrada pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Assim $\sqrt[3]{2}$ é um número irracional

ii) Observe agora que que $\sqrt[3]{2}$ é algébrico, pois é raiz da equação $x^3 - 2 = 0$.

iii) Devemos mostrar agora que $\sqrt[3]{2}$ não é solução de nenhuma equação algébrica de grau menor que três, com coeficientes inteiros.

Para mostrar que $\sqrt[3]{2}$ não é um número algébrico de grau 1, basta mostrar que esse número não é raiz de nenhuma equação algébrica de grau 1 com coeficientes inteiros. Em outras palavras, vamos mostrar que não existem inteiros a e b tais que $a\sqrt[3]{2} + b = 0$.

Vamos supor que tais inteiros existam. Nesse caso teríamos $\sqrt[3]{2} = \frac{-b}{a}$ e com isso teríamos que $\sqrt[3]{2}$ é um número racional. Entretanto sabemos que $\sqrt[3]{2}$ é irracional, o que gera uma contradição. Dessa maneira $\sqrt[3]{2}$ não é solução de nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros, de grau 1.

Agora devemos mostrar que $\sqrt[3]{2}$ não é solução de nenhuma equação algébrica de grau 2, com coeficientes inteiros.

Vamos supor que $\sqrt[3]{2}$ seja solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c inteiros. Se isso ocorrer teremos

$$a\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + b\sqrt[3]{2} + c = 0 \text{ ou } a\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 + b\sqrt[3]{2} = -c. \qquad (4.10)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa equação e simplificando-a chegamos a:

$$b^2\sqrt[3]{4} + 2a^2\sqrt[3]{2} = c^2 - 4ab. \qquad (4.11)$$

Montamos agora um sistema com as equações (3.10) e (3.11) e chegamos ao seguinte sistema nas quantidades $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{4}$.

$$\begin{cases} a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} = -c \\ b^2\sqrt[3]{4} + 2a^2\sqrt[3]{2} = c^2 - 4ab \end{cases} \tag{4.12}$$

Pensando em $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{4}$ como variáveis, o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b^2 & 2a^2 \end{vmatrix} = 2a^3 - b^3,$$

o qual é diferente de zero, pois caso $2a^3 - b^3 = 0$, teríamos $b = a\sqrt[3]{2}$, mas isso não é possível, pois a e b são inteiros por hipótese. Isso significa que o sistema (4.12) possui solução única.

Vamos agora resolver esse sistema. Eliminando, por exemplo, $\sqrt[3]{4}$, determinamos o valor de $\sqrt[3]{2}$, que será dado por $\sqrt[3]{2} = \frac{c^2a - 4a^2c + b^2c}{2a^3 - b^3}$.

Agora devemos lembrar que $\sqrt[3]{2}$ é um número irracional e como a, b e c são inteiros temos que $\frac{c^2 - 4a^2c + b^2c}{2a^3 - b^3}$ é um número racional, o que gera uma contradição.

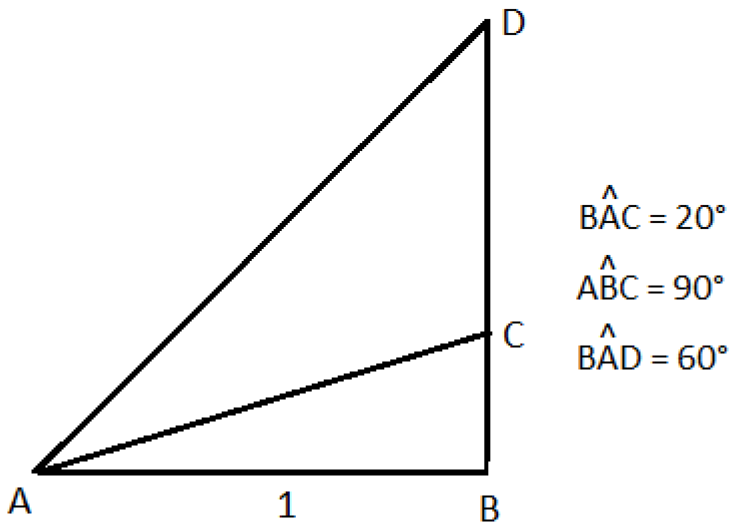
Dessa maneira temos que $\sqrt[3]{2}$ não é solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Com isso concluímos que $\sqrt[3]{2}$ é um número algébrico de grau 3. Assim, de acordo com o Teorema 4.5 temos que, um segmento de medida igual a $\sqrt[3]{2}$ não pode ser construído com régua e compasso, tornando assim impossível a duplicação do cubo usando-se apenas régua e compasso.

3.2 A TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

A trissecção de um ângulo consiste em, apenas com régua e compasso, dividir qualquer ângulo em três partes iguais.

Para mostrar que tal procedimento não é possível, basta exibir um ângulo que não pode ser trisseccionado com o uso apenas de régua e compasso. No caso vamos usar o ângulo de 60°. Para trissectar o ângulo de 60° devemos construir um ângulo de 20°, o que, por sua vez, consiste em construir, a partir de um segmento unitário, um segmento de comprimento igual a $\frac{1}{cos\,20°}$ (figura 3).



(figura 3)

De acordo com a figura 3 temos que:

$$cos20° = \frac{1}{AC} \rightarrow AC = \frac{1}{cos20°}$$

Devemos lembrar que, se um segmento for construtível, o segmento de comprimento recíproco, também o será. Assim vamos trabalhar apenas com cos20°.

Vamos provar que cos20° é um número irracional e algébrico de grau 3. Primeiramente, da trigonometria, temos que:

$$\cos 3a = \cos(2a + a) = cos2a.cosa - sen2asena$$
$$cos3a = (cos^2a - sen^2a).cosa - 2(senacosa).sena$$
$$cos3a = cos^3a - sen^2a.cosa - 2sen^2a.cosa$$
$$cos3a = cos^3a - (1 - cos^2a).cosa - 2(1 - cos^2a).cosa$$
$$cos3a = cos^3a - cosa + cos^3a + 2cos^3a - 2cosa = 4cos^3a - 3cosa$$

Agora fazendo $a = 20°$ temos:

$$cos60° = 4cos^3 20° - 3cos20°.$$

Fazendo a mudança de variável $x = cos20°$ e lembrando que cos60° = ½ temos:

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \; ou \; 8x^3 - 6x - 1 = 0. \qquad (4.13)$$

Agora, de acordo com o critério para pesquisa de raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros temos que as possíveis raízes racionais para o polinômio da equação (4.13) são $\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{1}{8}$. Uma simples substituição desses valores mostra que nenhum deles é solução de (4.13), o que garante que 4.13 não admite raízes racionais. Assim , de acordo com o Teorema 4.6, temos que cos20° não pode ser construído com régua e compasso.

3.3 A QUADRATURA DO CÍRCULO

O último dos grandes problemas da geometria grega consiste em efetuar a quadratura do círculo, ou seja, construir, usando apenas régua e compasso, um quadrado cuja área seja igual à área de um círculo dado ou, de modo equivalente, construir um círculo de área igual à área de um quadrado dado.

Vamos considerar um círculo de raio igual a uma unidade de comprimento. Assim a área desse círculo será igual a π unidades de área e um quadrado que possui a mesma área desse círculo deve ter lado de comprimento igual a $\sqrt{\pi}$.

Dessa maneira, nosso problema fica reduzido a construir um segmento de comprimento igual a $\sqrt{\pi}$, a partir de um comprimento unitário dado.

Primeiramente, segue da teoria de construções geométricas que podemos construir um segmento de medida igual a a^2, a partir de segmentos de comprimento 1 e a, respectivamente

Dessa maneira, vamos supor que seja possível construir, com régua e compasso, um segmento de medida igual a $\sqrt{\pi}$. Se isso for possível, então também será possível construir um segmento de medida igual a π. Entretanto, sabemos que o número π é transcendente (a prova da transcendência do número π será dada no próximo capítulo). Sendo transcendente, o número π não satisfaz a condição proposta no Teorema 4.5 e com isso torna-se impossível a construção com régua e compasso de um segmento de medida igual a $\sqrt{\pi}$. Portanto o problema da quadratura do círculo não pode ser resolvido usando apenas régua e compasso.

CAPÍTULO 5

IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA DOS NÚMEROS π E *e*

1. A IRRACIONLIDADE DO NÚMERO *e*

O número *e* está associado à função logarítmica e à área da hipérbole. Podemos definir o *e* da seguinte forma: considere o ramo positivo da hipérbole $xy = 1$. Seja k um número real tal que a área sob a hipérbole no intervalo $x = 1$ até x igual a k seja igual a 1. Nesse caso o número real k é o número *e.*

Nos textos de Cálculo encontramos demonstrações que provam que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \tag{5.1}$$

Abaixo vamos fazer a demonstração da irracionalidade do número *e.* Para isso vamos utilizar a expressão (5.1).

Teorema 5.1 *O número e é irracional.*

Demonstração: Vamos supor que o número e seja racional. Se isso ocorrer podemos escrever $e = \frac{a}{b}$, onde a e b são números primos entre si e $b \neq 0$.

Da expressão (5.1) segue que

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{b!}\right) = \sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{k!}. \quad (5.2)$$

Como $e = \frac{a}{b}$ podemos escrever

$$\frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{b!}\right) = \sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{k!}. \quad (5.3)$$

Vamos fazer agora uma estimativa para o valor do segundo membro da expressão (5.3).

$$\sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{b!}\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots\right) < \frac{1}{b!}\left(\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \cdots\right). \quad (5.4)$$

Observe que a expressão entre parênteses do último membro da expressão (5.4), corresponde a uma série geométrica com primeiro termo igual a $\frac{1}{b+1}$ e razão igual a $\frac{1}{b+1}$. Logo, o limite dessa soma infinita é dado por:

$$\frac{\frac{1}{b+1}}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b}.$$

Daí

$$\sum_{k=b+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{b!} \cdot \frac{1}{b}. \quad (5.5)$$

Voltemos agora à expressão (5.3), usando a estimativa (5.5). Temos então

$$0 < \frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{b!}\right) < \frac{1}{b!} \cdot \frac{1}{b}.$$

Multiplicando os membros da desigualdade por $b!$ obtemos:

$$0 < b!\left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{b!}\right) < \frac{1}{b}. \quad (5.6)$$

De acordo com (5.6) temos que o termo do meio é um número inteiro, pois $b!$ acabaria cancelando todos os denominadores presentes na expressão. Entretanto, como b é um número natural, temos que $\frac{1}{b} \leq 1$. Com isso temos um absurdo. Portanto o temos que *e* é irracional. ■

2. IRRACIONALIDADE DO NÚMERO π

No primeiro livro dos Reis, Capítulo 7, que trata da construção do palácio de Salomão, está dito”: ([5] Figueiredo, 2002)

Versículos 13 e 14: O rei Salomão convocou Hirão de Tiro; ele era filho de uma viúva da tribo Naftali, mas seu pai era um artesão de trabalhos em bronze, na cidade de Tiro. Hirão era um artesão muito inteligente, especialista em todos os tipos de trabalho em bronze. Atendendo o chamado do rei fez o trabalho seguinte:

Versículo 23: “Fez o “Mar de Bronze” de metal fundido, dez cúbitos de borda a borda, de forma circular, e com cem cúbitos de altura. Uma corda com 30 cúbitos de comprimento dava a medida de sua periferia”. (Um cúbito era uma medida de comprimento que equivalia a aproximadamente 52,5 cm).

Do versículo citado acima podemos chegar à conclusão que o comprimento da circunferência da figura era de 30 cúbitos e seu diâmetro era igual a 10 cúbitos, assim seu raio seria de 5 cúbitos. Usando a fórmula do comprimento da circunferência chegaríamos a $2\pi 5 = 30$ e com isso chegaríamos a $\pi = 3$. Entretanto sabemos que essa informação não é verdadeira já que π é um número irracional. Este é o fato que será provado nessa seção.

Acredita-se que a primeira prova da irracionalidade de π foi dada pelo matemático francês J.H.Lambert, usando frações contínuas.

Antes de seguir com a demonstração da irracionalidade do número π, precisamos enunciar dois lemas que serão de grande utilidade em nossa demonstração. Nos lemas e teoremas a seguir vamos usar a notação de derivada por Df.

Lema 5.1 Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$, então $D^k f(0)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0,1,2, \ldots$, onde $D^k f$ representa a k-ésima derivada de f e $D^0 f = f$.

Demonstração: Para demonstrar o lema precisamos usar a fórmula para a derivada de um produto de duas funções h e g, isto é,

$$D^k(hg) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j h D^{k-j} g. \quad (5.7)$$

A demonstração da fórmula (5.7) pode ser feita por indução sobre k. Nessa fórmula, $\binom{k}{j}$ representa um coeficiente do binômio de Newton, ou seja: $\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)!j!}$.

Aplicando a fórmula (5.7) para $h = x^n$ e $g = (1-x)^n$ chegamos a:

$$D^k f = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} D^j x^n D^{k-j}(1-x)^n.$$

Segue, do Cálculo Diferencial, que:

$$D^j x^n(0) = \begin{cases} 0 \; se \; j < n \\ n! \; se \; j = n. \\ 0 \; se \; j > n \end{cases}$$

Daí,

$$D^k f(0) = 0 \; se \; k < n. \quad (5.8)$$

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!}\binom{k}{n} n!\, D^{k-n}(1-x)^n(0), se \; k \geq n \quad (5.9)$$

Lembrando que os coeficientes binomiais são sempre números inteiros, podemos concluir que a expressão do segundo membro de (5.9) é um número inteiro. Dessa maneira, de (5.8) e (5.9) a demonstração está completa. ■

Lema 5.2 *Seja $f: R \to R$ dada por $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$, então $D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0,1,2,\ldots$, onde $D^k f$ representa a k-ésima derivada de f, $D^0 f = f$.*

Demonstração: A prova segue imediatamente do Lema 5.1. Basta observar que para a função f em questão, temos $f(x) = f(1-x)$ e com isso temos que $f(0) = f(1)$. ■

Teorema 5.2 *O número π é irracional*

Demonstração: Vamos supor que π^2 seja racional, isto é, $\pi^2 = \frac{a}{b}$ com $mdc(a,b) = 1$. Com essa suposição queremos chegar a um absurdo. Daí se π^2 não é racional então π não é racional (já que o quadrado de um número racional é racional) e concluímos nossa prova.

Para isso, defina a função $F: R \to R$ dada por:

$$F(x) = b^n[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2}D^2 f(x) + \pi^{2n-4}D^4 f(x) - \cdots + (-1)^n D^{2n} f(x)]. \quad (5.10)$$

onde $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

Em conseqüência dos Lemas 5.1 e 5.2 e da hipótese $\pi^2 = \frac{a}{b}$ podemos afirmar que $F(0)$ e$F(1)$ são números inteiros.

Além disso, usando propriedades de derivação podemos provar que:

$$\left(F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x\right)' = F''(x)se\pi x + \pi^2 F(x)sen\pi x.$$

Efetuando o cálculo direto da derivada segunda F” de F teremos:

$$\left(F^{'}(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x\right)^{'} = a^n\pi^2 f(x)sen\pi x. \qquad (5.11)$$

Nesse momento devemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo à função $g(x) = F^{'}(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x$. Combinando esse teorema com a equação (5.11) obtemos:

$$a^n\pi^2 \int_0^1 f(x)sen\pi x dx = \pi F(1) + \pi F(0).$$

Ou então podemos escrever

$$a^n\pi \int_0^1 f(x)sen\pi x dx = F(1) + F(0). \qquad (5.12)$$

Observe que, pelo fato de $F(0)$ e $F(1)$ serem inteiros, o lado direito de (5.12) é um número inteiro positivo. Dessa maneira, se conseguirmos exibir um número natural n tal que o lado esquerdo de (5.12) seja um número positivo estritamente menor que 1, vamos chegar a um absurdo.

Agora, é claro que para $0 < x < 1$, temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}. \qquad (5.13)$$

Substituindo a desigualdade (5.13) em (5.12) temos:

$$0 < a^n\pi \int_0^1 f(x)sen\pi x dx < \pi \frac{a^n}{n!} \int_0^1 sen\pi x dx = \frac{2a^n}{n!}. \qquad (5.14)$$

Para obter a última desigualdade foi feita a integral indicada. Lembrando que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ observamos que podemos tomar um natural n tal que $\frac{2a^n}{n!} < 1$ e, com isso, exibimos um número natural n tal que o lado esquerdo de (5.12) seja positivo e estritamente menor que 1, gerando um absurdo. Portanto π é irracional. ■

3. A TRANSCENDÊNCIA DO NÚMERO π

A demonstração da transcendência de um número é, em geral, uma tarefa muito complicada e técnica e é justamente devido a estas complicações que estas demonstrações encantam e intrigam matemáticos e não matemáticos de diversas épocas. Geralmente, essas demonstrações são feitas por reduções ao absurdo, ou seja, supõe-se que o número em questão seja algébrico e procura-se cair em uma contradição. Mas esta não é uma tarefa simples, tanto que até hoje não se sabe mostrar se muitos números são algébricos ou transcendentes. Com relação aos números π e *e* conseguiu-se mostrar que ambos são transcendentes e as demonstrações serão feitas abaixo.

A demonstração da transcendência do número π, que será dada abaixo, baseia-se na demonstração feita por R. Moritz, em Annals of Mathematics, vol. 2 (1901), páginas 57-59 e que foi inspirada na prova de Hurwitz para a transcendência de *e.*

Teorema 5.3 *O número π é transcendente*.

Demonstração: Vamos supor, por absurdo, que π seja um número algébrico. Seja $i = \sqrt{-1}$. De acordo com o item ii) (página 43) das propriedades dos números algébricos, podemos afirmar que $i.\pi$ é algébrico, já que i é algébrico (pois é solução da equação $x^2 + 1 = 0$). Com isso $i.\pi$ seria solução de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, digamos

$$P_1(x) = 0. \tag{5.15}$$

Vamos representar as raízes de (5.15) por $\alpha_1 = i.\pi$, $\alpha_{2,\dots,}\alpha_n$. Como $e^{i\pi} = -1$ (Identidade de Euler) segue que:

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + e^{\alpha_j}) = 0. \tag{5.16}$$

Desenvolvendo (5.16) vamos chegar a uma expressão da forma $1 + \sum e^I$, onde os expoentes I aparecerão na forma:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n. \tag{5.16.1}$$

$$\alpha_i + \alpha_j \text{, para todos } i < j. \tag{5.16.2}$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k \text{, para todos } i < j < k. \tag{5.16.3}$$

.

.

.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \dots + \alpha_n. \tag{5.16.n}$$

Devemos observar que o número de termos que aparece em (5.16.1) é igual a n; já em (5.16.2) é igual a $\binom{n}{2}$; em (5.16.3) é $\binom{n}{3}$, e assim por diante, até que em (5.16.n) é igual a $\binom{n}{n} = 1$.

Como $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ satisfazem uma equação polinomial de grau n, com coeficientes inteiros, pode-se mostrar que: (a demonstração desses fatos pode ser encontrada em [3])

i) Os números em (5.16.2) satisfazem uma equação polinomial de grau $\binom{n}{2}$ com coeficientes inteiros $P_2(x) = 0$; (5.17)

ii) Os números em (5.16.3) satisfazem uma equação polinomial de grau $\binom{n}{3}$ com coeficientes inteiros $P_3(x) = 0$; (5.18)

E assim, sucessivamente. Resumindo, podemos dizer que os números em (5.16.1),..., (5.16.n) satisfazem à seguinte equação polinomial com coeficientes inteiros:

$$P_1(x)P_2(x) \dots P_n(x) = 0. \tag{5.19}$$

O grau do polinômio formado em (5.19) será igual a $n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$.

Como alguns dos números em (5.16.1),..., (5.16.n) podem se anular, podemos supor que m deles sejam diferentes de zero e vamos representar esses números por $\beta_1, \dots, \beta_m$. Dessa maneira, simplificando a equação (5.19) os fatores da forma x^q, para $q > 0$, caso existam (e estes números existirão caso $2^n - 1 > m$), vemos que $\beta_1, \dots, \beta_m$ serão raízes de uma equação com coeficientes inteiros do tipo

$$R(x) = cx^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0. \tag{5.20}$$

Assim, efetuando o produto de (5.16) vamos obter:

$$k + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_m} = 0. \tag{5.21}$$

Considere o polinômio

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} (R(x))^p, \tag{5.22}$$

onde $s = mp - 1$ e p é um número primo que será escolhido posteriormente. O grau de P será $r = s + p$. Considere agora

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(s+p)}(x).$$

Então, derivando $e^{-x}F(x)$ com respeito a x temos

$$\left(e^{-x}F(x)\right)' = -e^{-x}P(x). \tag{5.23}$$

Agora aplicando o Teorema 2.1 à função $f(z) = e^{-z}F(z)$, temos

$$\left|e^{-\beta_j}F(\beta_j) - F(0)\right| \leq 2|\beta_j| \sup\{\left|e^{-\lambda\beta_j}P(\lambda\beta_j)\right| : 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{5.24}$$

para $j = 1,2, \dots, m$. Fazendo

$$\varepsilon_j = 2|\beta_j| \sup\{\left|e^{(1-\lambda)\beta_j}P(\lambda\beta_j)\right| : 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{5.25}$$

segue de (5.24) que

$$\left|F(\beta_j) - e^{\beta_j}F(0)\right| \leq \varepsilon_j. \tag{5.26}$$

Usando a igualdade (5.21) e a expressão (5.26) para $j = 1,2,\dots,m$ obtemos

$$|kF(0) + \sum_{j=1}^{m} F(\beta_j)| \le \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j. \quad (5.27)$$

Nosso objetivo a partir desse momento é mostrar que o lado esquerdo de (5.27) é um inteiro não nulo, e que o lado direito, para um valor conveniente de p, é menor que 1.

Devemos então calcular as várias derivadas de $P(x)$ nos pontos $0, \beta_1, \dots, \beta_m$.

Para as derivadas de ordem $i < p$, vamos usar o seguinte raciocínio. O polinômio $P(x)$ definido em (5.19) é da forma

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}(c_0 x^{p-1} + bx^p + \cdots).$$

Assim a derivada de ordem i,

$$P^{(i)}(0) = 0, \text{ para } i < p-1 \text{ e } P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p. \quad (5.28)$$

Por outro lado, de (5.22) temos que:

$$P^{(i)}(\beta_j) = 0, i < p, j = 1,2,\dots,m. \quad (5.29)$$

uma vez que nas derivadas $P^{(i)}(x)$ para $i < p$, a expressão $R(x)$ é fator comum e $R(\beta_j) = 0$.

Para as derivadas de ordem $i \ge p$, usamos, primeiramente, o fato de que: sendo $Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j$ um polinômio com coeficientes inteiros, e sendo $p < r$, temos que:

$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{i-j}, i \le r$ e além disso, $\frac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x)$, para $i \ge p$, é um polinômio de coeficientes inteiros divisíveis por p. De posse desses fatos, concluímos que: os coeficientes de $P^{(i)}(x), i \ge p$, são inteiros divisíveis por pc^s. (5.30)

Dessa análise e de (5.28) obtemos

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0, \quad (5.31)$$

onde k_0 é um número inteiro, mas seu valor não é importante para nossa demonstração. Para os demais $F(\beta_j)$ podemos observar que

$$\sum_{j=1}^{m} F(\beta_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \ge p} P^{(i)}(\beta_j) = \sum_{i \ge p} \sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j). \quad (5.32)$$

Vamos agora observar a expressão

$$\sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j). \quad (5.33)$$

para cada i fixado, com $p \le i \le s+p$. Já vimos que, neste caso o polinômio $P^{(i)}(x)$ tem coeficientes inteiros divisíveis por pc^s. Temos ainda que o grau de P é $s+p$ e com isso segue que $P^{(i)}$ tem grau $s + p - i \leq s$. Dessa maneira, a expressão (5.33) poderá ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j) = pc^s Q(\beta_1, \dots, \beta_m), \tag{5.34}$$

onde $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio de grau menor ou igual a s, com coeficientes inteiros. Veja ainda que $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio simétrico nos $\beta_i's$ com coeficientes inteiros. Logo, pelo Teorema 2.3, existe um polinômio $G(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ de grau menor ou igual a s, com coeficientes inteiros onde $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ são polinômios simétricos elementares em $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ (assim como apresentados nas expressões 2.3.1, ..., 2.3.n), tal que

$$Q(\beta_1, \dots, \beta_m) = G(\gamma_1, \dots, \gamma_m). \tag{5.35}$$

Por outro lado, observe que:

$$\gamma_1 = c^{-1}c_{m-1}, \gamma_2 = c^{-1}c_{m-2}, \dots, \gamma_m = c^{-1}c_0. \tag{5.36}$$

Assim, de (5.34), (5.35) e (5.36) segue-se que a expressão (5.33) é um inteiro divisível por p. Agora, voltando à expressão (5.32) concluímos que:

$$\sum_{j=1}^{m} F(\beta_j) = pK_1 \tag{5.37}$$

onde K_1 é um número inteiro cujo valor também não nos é interessante. Usando (5.31) e (5.37) vamos ter que o lado esquerdo de (5.27) é um inteiro que possui a forma:

$$\left|kc^s\, c_o^p + pK\right|. \tag{5.38}$$

onde $K = c^s k_0 + K_1$. Agora vamos escolher o número primo p de modo que ele seja maior que k, c e c_o. Assim, o inteiro (5.38) não é divisível por p, e consequentemente, é um inteiro não nulo.

Para concluir a demonstração, precisamos fazer a estimativa do lado direito de (5.27). Seja

$$M = m\acute{a}x\{||\beta_1|, \dots, |\beta_m||\}.$$

Logo

$$\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} \sup\left\{\left|\lambda\beta_j\right|^{p-1}\left|R(\lambda\beta_j)\right|^p\right\}, \tag{5.39}$$

onde $0 \leq \lambda \leq 1$. Seja

$$N = m\acute{a}x\{|R(x)|: |z| < m\},$$

a qual usada em (5.39) nos fornecerá $\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1}N^p$.

Sabemos que o fatorial supera qualquer exponencial, em outras palavras,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A^n}{n!}=0,$$

para qualquer $A>0$. Segue então que para p suficientemente grande, podemos fazer $\varepsilon_j<\frac{1}{m+1}$. Com isso chegamos a:

$$\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j\leq\frac{m}{m+1}<1. \tag{5.40}$$

A expressão (5.40) juntamente com o fato que o lado esquerdo (5.27) é um inteiro não nulo nos dá um absurdo. Esse absurdo provém do fato de termos suposto que π era um número algébrico. Dessa maneira temos que π é um número transcendente. ■

4. A TRANSCENDÊNCIA DO NÚMERO e

Como pudemos observar na seção anterior a demonstração da transcendência de um número é uma tarefa complexa e trabalhosa, mas também de uma beleza ímpar. O fato da demonstração apresentar um elevado grau de dificuldade a torna muito atrativa e desafiou muitos matemáticos durante um bom tempo. No caso da demonstração da transcendência do número *e* também temos um longo caminho a percorrer e dependemos de uma série de resultados a respeito de polinômios, entretanto, para não tornar a demonstração mais longa e cansativa do que se deve, trabalharemos com resultados omitindo parte de suas demonstrações. Tais demonstrações podem ser obtidas em livros de Cálculo e Análise (por exemplo, [7], [8]). Nosso objetivo nesse trabalho é apenas apresentar a sequência de fatos que compõe a prova da transcendência do *e*.

O desafio de demonstrar a transcendência do número *e* intrigou diversos matemáticos do século XIX. No ano de 1873, o matemático francês C. Hermite marcou seu nome na história da matemática ao demonstrar a transcendência do *e*, em uma série de notas publicadas no Comptes Rendus de l'Acadèmie de Sciences de Paris. A demonstração apresentada por Hermite foi, aos poucos e sucessivamente, sendo simplificada por matemáticos famosos como Jordan (1882), Markhoff (1883), Rouché (1883), Weiestrass (1885), Hilbert (1893), Hurwitz (1893) e

Veblen (1904), entre outros. A demonstração que será feita abaixo é baseada na que foi feita por Hurwitz.

Seja $P(x)$ um polinômio de grau r. Vamos definir a função

$$F(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + \cdots + P^{(r)}(x), \quad (5.41)$$

onde $P^{(r)}(x)$ representa a derivada de ordem r de P. Para a função $F(x)$ definida em (5.41) temos que:

$$\left(e^{-x}F(x)\right)' = -e^{-x}P(x). \quad (5.42)$$

Agora, aplicando o Teorema do Valor Médio à função $e^{-x}F(x)$ temos que:

$$F(k) - e^{k}F(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k). \quad (5.43)$$

para todo $k > 0$, onde θ_k é um número real entre 0 e 1.

Vamos considerar agora

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k). \quad (5.44)$$

Teorema 5.4 *O número e é transcendente*

Demonstração: Vamos supor que *e* seja um número algébrico, ou seja, que *e* é solução de uma equação algébrica de grau n com coeficientes inteiros, como a seguir

$$c_n e^n + \cdots + c_1 e + c_0 = 0. \quad (5.45)$$

Sem perda de generalidade podemos supor $c_0 > 0$.

Podemos mostrar que

$$c_0F(0) + c_1F(1) + \ldots + c_nF(n) = c_1\varepsilon_1 + \cdots + c_n\varepsilon_n. \quad (5.46)$$

Consideremos agora o polinômio

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p \ldots (n-x)^p, \quad (5.47)$$

onde p é um número primo que satisfaz às condições $p > n$ e $p > c_0$ onde n e c_0 são como em (5.45).

O objetivo é mostrar que o lado esquerdo de (5.46) é um número inteiro não nulo e não divisível por p e o lado direito da igualdade é menor que 1 em valor absoluto

Considere o polinômio $Q(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j x^j$, com a_j inteiros. Calculando as derivadas de $Q(x)$ até a ordem i temos que

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, i \le r. \quad (5.48)$$

Usando (5.48) podemos verificar que $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$ para $i \geq p$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.

Observe que o polinômio $P(x)$ definido em (5.47) pode ser reescrito na forma

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!}x^p + \cdots . \quad (5.49)$$

E, além disso, calculando as derivadas de $P(x)$ podemos mostrar que

$$P^{(i)}(k) = 0, \text{ para } k = 1, \dots, n; i < p, \quad (5.50)$$

e

$$P^{(p-1)}(0) = (n!)^p \ e \ P^{(i)}(0) = 0, i < p - 1. \quad (5.51)$$

Agora, usando as expressões (5.48) e o resultado obtido em (5.50) e (5.51) podemos concluir que $F(k)$ para $k = 1, \dots, n$, é um inteiro divisível por p. Além disso, temos que $F(0)$ é um inteiro não divisível por p, já que se o fosse teríamos que $(n!)^p$ também o seria, o que é um absurdo pois $p > n$ e p é primo.

Lema *Se $d_i, i = 0,1, \dots, r$ são inteiros tais que os d_i, para $i \geq 1$, são divisíveis por p, e d_0 não é divisível por p, então $\sum_{i=0}^{d} d_i$ não é divisível por p.*

Usando o lema e o fato de $0 < c_0 < p$ segue que

$$c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$$

é um número inteiro não divisível por p.

Devemos observar que os ε_k, definidos em (5.47), e calculados para o polinômio $P(x)$ definido em (5.47), têm a forma

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)} \frac{1}{(p-1)!}(k\theta_k)^{p-1}(1 - k\theta_k)^p \dots (n - k\theta_k)^p. \quad (5.52)$$

Usando (5.52) e também o fato que $0 < \theta_k < 1$, temos que

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}, \text{ para } k \leq n. \quad (5.53)$$

Se p for um número primo suficientemente grande, então

$$|c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n| < 1.$$

Assim concluímos que fato que $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$ é um número que não é divisível por p e que $|c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \cdots + c_n\varepsilon_n| < 1$, logo pela igualdade (5.46) podemos concluir que$c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$ é um número inteiro e não divisível por p. Como esse inteiro é menor que 1 temos que ele deve ser igual a zero (já que não existem números inteiros entre 0 e 1). Entretanto tal fato não é possível. Esse absurdo provém da hipótese feita no início da demonstração de que o número *e* era algébrico. Portanto *e* é transcendente. ■

CAPÍTULO 6

ATIVIDADE EM SALA DE AULA

Com o objetivo de analisar quais conhecimentos a respeito de números e conjuntos numéricos os alunos das mais variadas séries do Ensino Básico possuíam, elaboramos uma atividade que foi feita em sala de aula com alunos pertencentes a salas de sexto ano do Ensino Fundamental até o terceiro ano do Ensino Médio.

A atividade foi dividida em duas etapas (para os alunos do Ensino Fundamental apenas a primeira etapa foi aplicada). Na primeira parte da atividade os alunos foram divididos em pequenos grupos (de três a quatro alunos) com a restrição de que todos os alunos de cada grupo fossem de uma mesma série, pois o objetivo era analisar a evolução do estudo do conceito de número em cada uma das séries do Ensino Básico. Uma vez formado os grupos, foi passado aos alunos um questionário a respeito de números e conjuntos numéricos. Cada uma das questões foi apresentada de maneira individual, ou seja, os alunos responderam à segunda questão após terem respondido a primeira e ter sido feita uma discussão a respeito das respostas. Uma vez recebida a questão, os alunos receberam alguns minutos para discutir e elaborar uma resposta escrita. Depois que os alunos entregaram esta questão respondida, era aberta uma discussão sobre o que havia sido respondido e, depois dessa discussão, foi feita uma pequena explicação do professor a respeito daquela questão: quais eram os objetivos daquela pergunta e quais informações importantes poderiam ser obtidas naquele contexto. O questionário continha oito perguntas que estão indicadas abaixo e logo depois de cada pergunta será feito um pequeno comentário sobre as respostas dadas pelos alunos.

Questão 1: *"O número é a alma das coisas" (Pitágoras, data desconhecida). A frase anterior proferida por um dos mais conhecidos matemáticos de todos os tempos sintetiza de maneira brilhante uma importante área do conhecimento matemático: a teoria dos números. A matemática é conhecida como a ciência das formas e, é claro, dos números. O desenvolvimento das teorias matemáticas sempre esteve atrelado ao desenvolvimento do conceito de número. Podemos observar que o conceito de número é algo muito valorizado dento da matemática. Você seria capaz de citar algumas importâncias dos números na matemática (ou fora dela). Em outras palavras, em sua opinião, para que servem os números?*

O objetivo dessa pergunta era saber a noção que os alunos têm a respeito da importância que os números, de maneira geral, possuem. O interessante aqui é que a maioria dos grupos citou que números são muito importantes, mas não foram capazes de citar, efetivamente, para que eles são usados de maneira objetiva. Alguns
grupos conseguiram citar importâncias como contagens e medições, mas nenhum grupo citou a resolução de equações. Na discussão e explicação foram mencionadas as utilidades de um número e discutidas as possíveis dificuldades em se enxergar de maneira mais objetiva a sua utilidade.

Questão 2: *É importante ressaltar que o desenvolvimento do conceito de número ocorreu de forma extremamente lenta e muitas vezes polêmica. Foram milhares de anos para se desenvolver ideias que muitas vezes são tratadas hoje como triviais, e existe um grande perigo nisso, principalmente quando se trabalha com educação matemática.*

Para entender melhor essas ideias e as diferenças que existem entre os diferentes tipos de números devemos ter condições de classificar e agrupar os números de acordo com características comuns a eles. Este tipo de classificação pode ser obtido estudando-se os conjuntos numéricos.

Durante o Ensino Básico você aprendeu a classificar os conjuntos de acordo com os conjuntos numéricos. Quais são os conjuntos numéricos que você consegue lembrar?

Aqui se pode observar, nitidamente, a evolução dos alunos das mais variadas séries com relação aos conhecimentos sobre os conjuntos numéricos. Alunos de sexto e sétimo anos só conseguiram citar números inteiros e naturais, no oitavo já citavam os racionais e no nono ano do Ensino Fundamental, primeiro e segundo anos do Ensino Médio, os irracionais e reais e apenas os alunos do terceiro ano do Ensino Médio citaram os números complexos. Isso já era esperado pela própria estrutura do ensino dos conjuntos numéricos. Mas uma coisa interessante que ocorreu foi que alguns alunos confundiram conjuntos numéricos com alguns de seus subconjuntos. Por exemplo, alguns grupos citaram par e ímpar como conjuntos numéricos. Na discussão foi explicada a diferença existente entre estes conceitos.

Questão 3: *Desde os primórdios do desenvolvimento da humanidade encontramos a noção de número e de suas generalizações. Muitas vezes o desenvolvimento do conceito de número esteve diretamente ligado ao desenvolvimento da própria humanidade. Por exemplo, a noção do conceito de número permitiu aos homens primitivos reconhecer que algo muda em um pequeno agrupamento de objetos (por exemplo, seus animais, seus pertences, etc).*
Aprendemos a classificar os números em conjuntos. Cite abaixo um exemplo de número que se encaixa em cada um dos conjuntos existentes: dos naturais; inteiros; racionais, irracionais, reais e complexos. Não esqueça de justificar sua resposta.

Nessa pergunta as respostas também variaram de acordo com a série, da mesma forma que na questão anterior. O interessante é que alguns alunos ao citarem números racionais, por exemplo, colocaram números que também são inteiros. Questionados sobre o porquê da resposta dessa forma responderam que os números inteiros também são racionais. Agora em outros grupos essa justificativa não foi dada.

Questão 4: *Os números naturais sempre estiveram à nossa volta e sua aceitação sempre ocorreu de maneira rápida, tanto pelos matemáticos, quanto pela população em geral. Isso ocorre porque esses números são bastante "intuitivos". Entretanto, o mesmo não pode ser dito com relação aos números inteiros. A aceitação de números negativos ocorreu de forma muito lenta, mesmo entre os matemáticos.*

Quando você aprendeu a trabalhar com números inteiros, você apresentou alguma dificuldade em entender algum conceito relativo a este tipo de número? Em caso afirmativo, quais dificuldades foram encontradas?

Nessa pergunta muitos grupos mencionaram que duas das principais dificuldades encontradas foram as operações de multiplicação e divisão e também a relação de ordem nos inteiros que, segundo os alunos era "o contrário dos números naturais" (observa-se aqui que os alunos pensam nos números sempre em valor absoluto, o conceito de negativo algumas vezes não está muito claro para eles). Muitos grupos responderam que não tiveram dificuldades e questionados sobre isso disseram que a pergunta era se eles tiveram dificuldades em entender o conceito e o conceito eles tinham entendido, mas a questão não falava das operações (realmente a questão talvez devesse ser um pouco mais clara).

Questão 5: *Números naturais surgiram da necessidade de contagem, números inteiros da necessidade de se operar com valores que eram negativos. Já os números racionais estão associados a problemas de medidas.*

Podemos representar os números reais por meio da reta real. Nessa reta, os inteiros são marcados facilmente usando-se a unidade como referência e marcando os números como múltiplos dessa unidade. Os números racionais podem ser obtidos por meio de subdivisões adequadas do segmento unitário. Imaginando os números racionais sobre a reta podemos observar que é possível obter racionais tão perto um do outro quanto se queira.

Baseando-se no texto acima e em seus conhecimentos de matemática responda a seguinte pergunta: os números racionais conseguem preencher toda a reta real?

Os alunos até o oitavo ano do Ensino Fundamental tiveram dificuldades em responder essa pergunta pois ainda não conheciam os números reais. No Ensino Médio todos os alunos responderam que não, mas muitos não sabiam justificar. Apenas dois ou três grupos citaram a existência de números irracionais.

Questão 6: *Sabemos que os números racionais não são suficientes para preencher toda a reta real. Isso significa que existem números que não são racionais. A esses números damos o nome de números irracionais. Você seria capaz de citar alguns exemplos de números que são irracionais? Além disso, você seria capaz de citar alguma característica que os números irracionais possuem? O que diferencia um número irracional de um número racional?*

Os alunos até o sétimo ano não responderam essa questão por não conhecerem os números racionais. No oitavo ano, a maioria citou números racionais e do nono ano para frente a maioria dos grupos citou corretamente números racionais e irracionais, mas na hora de citar as diferenças muitos grupos citaram que os números irracionais não podem ser escritos como frações (conceito matematicamente impreciso) ou não conseguiram citar diferenças. O interessante é que nenhum grupo citou a diferença na representação decimal.

Questão 7: *A evolução dos conjuntos numéricos também pode ser pensada em termos da resolução de problemas que envolvem soluções para equações algébricas.*

Por exemplo, para resolver a equação $x - 4 = 3$ é fácil ver que sua solução é um número natural. Já no caso da equação $x + 4 = 3$ não temos uma solução natural, apenas uma solução inteira.

Procure encontrar um exemplo de equação cuja solução seja um número:

a) Natural
b) Inteiro
c) Racional
d) Irracional
e) Complexo

As respostas aqui foram as mais variadas, mas de acordo com os conjuntos que as diferentes salas conheciam, a pergunta foi respondida corretamente. O interessante aqui é que todas as equações citadas eram algébricas de coeficientes inteiros. Questionado sobre isso os alunos disseram que não sabiam que os coeficientes podiam ser irracionais por exemplo. Na discussão e explicação foi dito o que era uma equação algébrica (pois algumas salas não conheciam o conceito), e foi ensinado o que significa resolver uma equação algébrica.

Questão 8: *As definições de números algébricos e transcendentes são feitas através de conceitos algébricos, mas as aplicações desses números vão muito além de questões algébricas. Números algébricos e transcendentes aparecem nas mais variadas áreas da matemática, como geometria, análise, matemática financeira, entre outros.*

Você sabe o que significa a palavra transcendente? O que seria um número transcendente? E um número algébrico? Você seria capaz de citar um ou mais números que são transcendentes?

Nessa última pergunta, alguns grupos conseguiram apenas responder o significado da palavra transcendente, mas não conseguiram explicar o que significava um número transcendente. O interessante é que alguns alunos do Ensino Fundamental disseram já ter ouvido falar nesse tipo de número, pois o professor auxiliar havia comentado a respeito de sua existência em uma aula extra. Na hora da discussão foi explicado o conceito de número transcendente e também de número algébrico e foi explicado que eles conheciam alguns desses números, mesmo que não soubesse de sua classificação.

A segunda etapa da atividade consistiu na apresentação de uma pequena palestra abordando os temas discutidos na atividade feita na sala de aula. Nessa palestra foram abordados os temas que apareceram nas perguntas do questionário do dia anterior e uma série de informações complementares foram apresentadas, como, a classificação dos números em conjuntos, por que eles são agrupados dessa forma e para que servem cada um dos "tipos de números" que eles aprenderam. Também foi apresentada uma das demonstrações da irracionalidade do número $\sqrt{2}$. Foi explicada a definição de número algébrico e transcendente novamente e uma boa parte da apresentação foi dedicada a contar um pouco mais a respeito da história dos números π e *e*, com a mesma abordagem que foi feita no trabalho.

CONCLUSÃO

Trabalhar com educação matemática é uma tarefa que demanda muito esforço, dedicação e cuidado. Cuidado na hora de selecionar os temas que serão abordados e, principalmente, a forma como eles serão abordados. Nunca podemos ensinar um conceito matemático da mesma forma que aprendemos na faculdade, por exemplo, pois muitas vezes seriam necessários pré-requisitos que o aluno do Ensino Básico não teria. Entretanto, isso não significa que um Educador da área de matemática não deva conhecer a teoria que irá ensinar de maneira profunda. Muitas vezes vemos algumas pessoas afirmando que os conceitos matemáticos são dessa de uma determinada forma sem mostrar o porquê de certo resultado ser válido ou quais raciocínios estão por trás de determinado conceito, indicando que tais conceitos foram e sempre serão daquela forma e passando a impressão de que o conhecimento matemático é estático e também que tudo o que havia para se descobrir em matemática já foi descoberto e que não ocorrerá mais nenhuma evolução. Quando desvinculamos o conhecimento matemático de sua evolução histórica e das motivações para seu surgimento, acabamos passando a impressão que as coisas são assim porque quiseram que assim elas fossem e nesse momento corremos um grande risco de desmotivar um aluno de aprender matemática.

Atualmente, trabalhamos a matemática dentro de dois grandes contextos: a resolução de problemas e o desenvolvimento de raciocínio lógico. É muito importante trabalhar esses dois contextos, mas também podemos, sempre que for possível, apresentar uma abordagem que envolva a história e o desenvolvimento de determinados conceitos matemáticos. Isso pode tornar o desenvolvimento de determinados conceitos mais estimulante para os alunos, além de nos ajudar a entender melhor porque um conceito acaba sendo abstrato demais para alguns alunos e isso pode ajudar a desenvolver estratégias que visam “driblar” essas dificuldades.

Esse trabalho foi elaborado neste espírito. Alguns dos temas são abordados de maneira bem superficial (no caso dos números irracionais) ou às vezes até mesmo nem são abordados (no caso dos números transcendentes) durante os ensinos Fundamental e Médio. A grande questão é, por que não abordar de maneira um pouco mais consistente essas classes de números sendo que alguns dos mais importantes números com os quais trabalhamos são irracionais e/ou transcendentes? Vale a pena ressaltar que o objetivo não é que essa teoria seja desenvolvida com a mesma formalidade que é feita dentro de um curso de graduação ou pós-graduação em matemática, mas apresentar um pouco mais sobre a teoria e, principalmente, sobre a história associada a estes números.

Por exemplo, no caso dos números transcendentes pode-se comentar a sua existência e a classificação dos números reais em algébricos e transcendentes quando se trabalha com a ideia de polinômio e de equações algébricas. Quando se fala em raiz de uma equação algébrica (como no caso da equação do segundo ou primeiro grau) pode-se dar uma ideia a respeito desses números.

Outra abordagem que pode ser trabalhada é aproveitar momentos em que introduzimos números irracionais para fazer comentários a respeito desses números. Por exemplo, em geometria, trigonometria, ou em resolução de equações, quando nos deparamos com o número $\sqrt{2}$ podemos fazer alguns comentários a respeito de sua rica história, relembrando que este se trata de um número irracional e até mesmo provando que isso é verdade (no próprio texto, algumas das demonstrações feitas podem ser apresentadas para alunos do Ensino Básico). O mesmo pode ser feito com relação ao número π: a história associada ao seu desenvolvimento é muitíssimo interessante e, como vimos, passa por vários campos da matemática.

Com relação ao número *e* podemos aproveitar pelo menos dois momentos para sua abordagem. Uma delas no estudo das funções quando trabalhamos com funções exponenciais e logarítmicas. Temos muitos problemas que trabalham com o chamado logaritmo natural ou logaritmo na base *e*, mas muito pouco é dito a respeito desse número. Apenas seu valor aproximado e o fato que $\log_e e = 1$. Acreditamos que algumas coisas interessantes a respeito de sua definição e suas aplicações podem ser mencionadas (para outras informações aconselhamos a leitura de [12]). Outra forma de se abordar esse número, e que talvez seja até mais atrativa para os alunos, é trabalhar com problemas de matemática financeira e que envolvam a ideia de juros compostos com capitalizações contínuas. No texto, fizemos o desenvolvimento dessa ideia e isso pode servir de motivação para definir o número *e* como o limite da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e nesse momento podemos até aproveitar para dar uma pequena noção do conceito de limite. Mais uma vez, o processo histórico pode ser aliado no processo pedagógico.

Como podemos observar, temos várias opções que podemos usar para tentar desenvolver de maneira um pouco mais interessante alguns conceitos que são pouco ou nada abordados durante o Ensino Básico. Os conceitos matemáticos ensinados no Ensino Básico pararam no século XVII ou XVIII e, desde essa época, muita coisa foi desenvolvida. Devemos, mesmo que de maneira superficial, comentar esse desenvolvimento para que não se tenha a impressão de que a matemática é uma ciência estática e que tudo que se podia desenvolver já foi desenvolvido. A realidade é justamente o contrário: a matemática, assim como qualquer outra ciência, possui um desenvolvimento contínuo e muitas vezes está aliado (ou até mesmo interfere) no desenvolvimento da história. Essa é uma importante característica da matemática e que merece ser passada aos nossos alunos, com o objetivo de incentivá-los a estudar e também se apaixonar pela disciplina. Foi nisso que nos baseamos para escrever esta dissertação.

REFERÊNCIAS

[1] AABOE, A. – Episódios da História Antiga da Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1984.

[2] BARKER, S.F. – Filosofia da Matemática, Zahar Editor, Rio de Janeiro, 1987.

[3] CURANT R., ROBBINS H. - O que é Matemática?Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2002.

[4] EVES H. - Números racionais e irracionais, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1984.

[5] FIGUEIREDO D.G. - Números Irracionais e Transcendentes, Editora SBM, 3ª Edição, 2002.

[6] FIGUEIREDO D. G. - Números Irracionais e Transcendentes. 3ª Edição Rio de Janeiro, Coleção de iniciação Científica 2011.

[7] GUIDORIZZI H.L. - Um curso de Cálculo Volume 1, LTC Editora 5ª Edição, 2006.

[8] LEITHOLD L. - Cálculo com Geometria Analítica Volume 1, Editora Harper Row do Brasil, 1997.

[9] LIMA. E.L., CARVALHO P.C.P., WAGNER E. MORGADO A.C.O. - A matemática do Ensino Médio, volume 1, Editora SBM, 9ª Edição 2006.

[10] LIMA E.L. - Espaços Métricos, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[11] MAGALHÃES DE FREITAS – Evolução do Pensamento Matemático, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Departamento de Matemática, Campo Grande, 1989.

[12] MAOR E. - *e*: a história de um número Editora Record, 4ª Edição 2008.

[13] MARQUES D. - Teoria dos Números Transcendentes, Editora SBM, 1ª Edição, 2013

[14] MARQUES D. - Alguns Resultados que Geram Números Transcendentes, Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Ceará, Brasil, 2007.

[15] NACHIBIN L. - Conjuntos e Funções, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1967.

[16] NIVEN I. - Números Racionais e Irracionais, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1984

[17] NIVEN I. ZUCKERMAN, H.S. and MONTGOMERY, H.L.R - An Introduction to the theory of numbers, 5 th Ed. New York, 1991.

[18] PEDROSO H.A. - A História da Matemática, Notas de Aula, 3ª Edição, 1995

[19] POLLARD. H. - The Theory of Algebraic Numbers. Baltimore: The Mathematical Association of America, The Carus Mathematical Monographs; v. 9, 1950

[20] RONAN C.A. - História Ilustrada da Ciência da Universidade de Cambrige – 4 volumes, Zahar Editor, Rio de Janeiro, 1987

[21] SOARES M.G. - Cálculo em uma Variável Complexa 2ª Edição. Istituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001

[22] http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/TFA_RBTA.pdf.

[23] http://mateeduc.blogspot.com.br/2010/04/historia-dos-numeros-inteiros.html

[24] http://www.somatematica.com.br/numeros.php

[25] http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/vc/vc06.htm