

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
RONALDO RODRIGUES DE MENEZES

Alguns modelos matemáticos envolvendo Equações Diferenciais  
Ordinárias

Maringá-PR

2013

RONALDO RODRIGUES DE MENEZES

## Alguns modelos matemáticos envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Luciene Parron Gimes Arantes

Maringá

2013

# Alguns modelos matemáticos envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias

**Ronaldo Rodrigues de Menezes**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

COMISSÃO JULGADORA

---

Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes - Orientadora  
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

---

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira  
Universidade Estadual Paulista- Julio Mesquita Filho (UNESP)

---

Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin  
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Aprovada em: xx de março de 2013.

Local de defesa: Anfiteatro xxxxxx, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial a minha namorada, pelo companheirismo e pela compreensão.

# Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço principalmente a Deus pela força e perseverança.

A minha família meus pais e meus irmãos pelo apoio e compreensão.

A minha namorada Esmeralda por me apoiar, incentivar e por estar sempre junto comigo.

A todos os colegas do mestrado pelo companheirismo, e principalmente aos meus colegas e amigos de viagem: Amarildo, Cleonice, Priscila e Roberto.

A todos os professores pela sua dedicação e empenho, especialmente a minha orientadora Professora Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes, pela orientação deste trabalho.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

“Os grandes feitos são conseguidos não pela força,  
mas pela perseverança.”

Samuel Johnson.

# Resumo

Neste trabalho, discutimos resultados sobre existência e unicidade de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Além disso, apresentamos alguns exemplos de equações diferenciais lineares e modelos físicos, biológicos e químicos que podem ser descritos através de uma EDO e suas respectivas soluções.

**Palavras chave:** Equação Diferencial Ordinária, solução, modelos matemáticos.

# Abstract

This work deals with the existence and uniqueness of solutions to initial value problems for the Ordinary Differential Equations (ODEs). Some examples of linear equations are presented, as well as physical, chemical and biological models which can be described by ODEs and their respective solutions.

**key words:** Ordinary Differential Equation, solution, mathematical models.

---

---

# SUMÁRIO

---

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Espaços Métricos . . . . .	12
1.2 Espaços Métricos Completos . . . . .	16
1.3 Teorema do Ponto Fixo de Banach . . . . .	22
<b>2 Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>27</b>
2.1 Existência e unicidade de solução . . . . .	28
2.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem . . . . .	31
2.2.1 Equações Separáveis . . . . .	36
<b>3 Aplicações</b>	<b>42</b>
3.1 Problemas Analíticos . . . . .	42
3.2 Problemas Geométricos, Físicos, Biológicos e Químicos . . . . .	43
3.2.1 Trajetória . . . . .	43
3.2.2 Dinâmica Populacional: Modelo Malthusiano . . . . .	46
3.3 Problemas de Mistura . . . . .	53
3.4 Transferência de Calor . . . . .	54
3.4.1 Considerações preliminares . . . . .	54
3.4.2 Transferência de Calor: Caso unidimensional . . . . .	56
3.4.3 Modelo de Resfriamento em EDOs: Algumas questões . . . . .	65



---

---

# INTRODUÇÃO

---

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são uma importante ferramenta na modelagem de problemas naturais. Vários problemas físicos, químicos, estatísticos e biológicos podem ser modelados por EDOs, por exemplo, apontamos algumas aplicações nas referências [1], [2] e [3].

Os objetivos deste trabalho são: familiarizar-se com um modelo matemático, promover um estudo introdutório sobre a teoria das Equações Diferenciais Ordinárias e apresentar alguns modelos envolvendo este tipo de equação.

Para estudarmos a teoria sobre existência e unicidade de soluções para EDOs é necessário o conhecimento de algumas técnicas e resultados da análise matemática e de topologia. Nesta direção, no Capítulo 1, apresentamos alguns resultados fundamentais sobre espaços métricos, bem como, definição de sequência de Cauchy, exemplos de espaços métricos completos e a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

No Capítulo 2, apresentamos a teoria básica de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. Tratamos as questões da existência e unicidade de soluções de um Problema de Valor Inicial (PVI). Exibimos alguns exemplos e apresentamos o método de resolução para equações separáveis.

Finalmente, no Capítulo 3, destacamos diversas aplicações de EDOs, focando, principalmente, nos modelos de dinâmica populacional, misturas e transferência de calor.

---

# Preliminares

---

Neste capítulo, iremos abordar alguns conceitos acerca de espaços métricos, sequências em espaços métricos, sequências de Cauchy, espaços métricos completos, ponto fixo e contração.

## 1.1 Espaços Métricos

**Definição 1.1.** Sejam  $X$  um conjunto e  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação que associa a cada par ordenado  $(x, y) \in X \times X$  um número real  $d(x, y)$ . Esta aplicação será chamada *métrica* se satisfaz, para quaisquer  $x, y, z \in X$ , as seguintes propriedades:

- (M1)  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ;
- (M2)  $d(x, y)$  é um valor real, finito e positivo;
- (M3)  $d(x, y) = d(y, x)$  (simétrica);
- (M4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (Desigualdade triangular).

**Exemplo 1.2.** (Métrica usual da reta) Sejam  $X = \mathbb{R}$  e  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $d(x, y) = |x - y|$ , para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ . Vamos verificar que  $d$  satisfaz a Definição 1.1. Para tanto, sejam  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Notemos que

(M1)  $d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$ .

(M2) Se  $x \neq y$ , então,

$$x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0 \Rightarrow |x - y| > 0.$$

Logo,  $d(x, y) = |x - y| > 0$ .

(M3) Sabemos que

$$d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y, x).$$

Assim,  $d(x, y) = d(y, x)$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ .

(M4)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , para todos  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , pois

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| \\ \Rightarrow |x - y| &\leq |x - z| + |z - y|. \end{aligned}$$

Portanto,  $d$  define uma métrica sobre  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.3.** (Métrica em  $\mathbb{R}^n$ ) Consideremos  $\mathbb{R}^n = \{x; x = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$ ,  $d$ ,  $d_S$  e  $d_M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  métricas definidas por

- $d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ . (Métrica euclidiana)
- $d_S(x, y) := |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$ . (Métrica da soma)
- $d_M(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$ . (Métrica do máximo)

Provaremos que  $d$  satisfaz a Definição 1.1.

Sejam  $x, y, z \in \mathbb{R}$ . Então

$$(M1) \quad d(x, x) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \dots + (x_n - x_n)^2} = \sqrt{0^2 + \dots + 0^2} = \sqrt{0} = 0.$$

(M2) Se  $x \neq y$ , então  $d(x, y) > 0$ . De fato,

$$x \neq y \Rightarrow x_i \neq y_i, \text{ para algum } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Assim,  $x_i - y_i \neq 0$ , para qualquer  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  o que resulta em  $(x_i - y_i)^2 > 0$ .

Logo,

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i - y_i)^2} > 0.$$

Portanto,  $d(x, y) > 0$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $x \neq y$ .

(M3) Sabemos que  $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Assim,

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2,$$

o que implica

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

Logo,  $d(x, y) = d(y, x)$ , para todos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

(M4) Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $\mathbb{R}^n$  (por exemplo, veja [8]), vale

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq \left( \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \right) \left( \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2} \right), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n.$$

Então,

$$\begin{aligned} [d(x, y)]^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(x_i - z_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) + (z_i - y_i)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \\ &= [d(x, z)]^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)(z_i - y_i) + [d(z, y)]^2 \\ &\leq [d(x, z)]^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2} + [d(z, y)]^2 \\ &= [d(x, z)]^2 + 2[d(x, z)][d(z, y)] + [d(z, y)]^2 \\ &= [d(x, z) + d(z, y)]^2. \end{aligned}$$

Logo,  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , para todos  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ . Portanto,  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.4.** Um espaço métrico é um par  $(X, d)$ , onde  $X$  é um conjunto não vazio munido de uma métrica  $d$ . Para  $x$  e  $y$  fixos chamamos o número positivo  $d(x, y)$  de distância de  $x$  a  $y$ .

Alguns exemplos de espaços métricos são dados a seguir.

**Exemplo 1.5** (Reta real  $\mathbb{R}$ ). O conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , com a métrica usual, definida por

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

é um espaço métrico.

**Exemplo 1.6** (Plano Euclidiano  $\mathbb{R}^2$ ). O espaço métrico  $\mathbb{R}^2$ , chamado de plano euclidiano, consiste do conjunto de pares ordenados de números reais  $x = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2)$ , etc.... A métrica euclidiana é definida por

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}.$$

Podemos atribuir ao espaço  $\mathbb{R}^2$  a métrica  $d_1$  definida por

$$d_1(x, y) = |\xi_1 - \eta_1| + |\xi_2 - \eta_2|.$$

Então,  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  também será um espaço métrico.

**Exemplo 1.7** (Espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$ ). Este espaço consiste do conjunto de triplas ordenadas de números reais  $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ,  $y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , e a métrica euclidiana é definida por

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}.$$

É fácil provar que  $(\mathbb{R}^3, d)$  é um espaço métrico.

**Exemplo 1.8** (Espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ). O espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  consiste do conjunto de todas as n-uplas ordenadas de números reais

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad y = (\eta_1, \dots, \eta_n),$$

e a métrica euclidiana é definida por

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2}.$$

**Exemplo 1.9.** (Espaço das funções  $C([a, b], \mathbb{R})$ ). Consideremos o conjunto de todas as funções de valores reais contínuas sobre um dado intervalo fechado  $J = [a, b]$ , denotado por  $C([a, b], \mathbb{R})$ , munido da métrica

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|, \quad \text{para } x, y \in C([a, b], \mathbb{R}).$$

Então,  $C([a, b], \mathbb{R})$  é um espaço métrico.

**Exemplo 1.10** (Espaço métrico discreto). Tomamos um conjunto  $X$  e sobre ele a métrica discreta de  $X$ , definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} d(x, y) = 0 & \text{se } x = y; \\ d(x, y) = 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Este espaço é chamado de espaço métrico discreto.

## 1.2 Espaços Métricos Completos

Sabemos que as sequências de números reais desempenham um papel importante no cálculo, e é a métrica em  $\mathbb{R}$  que nos permite definir o conceito básico de convergência de uma tal sequência.

**Definição 1.11** (Convergência e um limite de sequência). Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $X = (X, d)$  é dita convergente para um  $x \in X$ , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Neste caso,  $x$  é chamado o limite de  $(x_n)$  e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

ou, simplesmente,

$$x_n \rightarrow x.$$

Também dizemos que  $(x_n)$  converge para  $x$  ou tem limite  $x$ . Caso contrário, se  $(x_n)$  não é convergente, dizemos que a sequência é divergente.

**Definição 1.12** (Sequência de Cauchy). Uma sequência  $(x_n)$  em um espaço métrico  $(X, d)$  é dita de Cauchy, se para todo  $\varepsilon > 0$ , existir um  $N = N(\varepsilon)$  tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \tag{1.1}$$

para todo  $m, n > N$ .

**Definição 1.13** (Definição de bola e esfera). Dado um ponto  $x_0 \in X$  e um número real  $r > 0$ , definimos três tipos de conjuntos

- (a)  $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$  Bola aberta;
- (b)  $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$  Bola fechada;
- (c)  $S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}$  Esfera.

Em todos os casos,  $x_0$  é chamado de centro e  $r$  de raio. Notemos que a bola aberta de raio  $r$  é o conjunto de todos os pontos em  $X$  cuja distância do centro da bola é menor que  $r$ . Além disso, segue direto da Definição 1.13 que

$$S(x_0, r) = \bar{B}(x_0, r) \setminus B(x_0, r).$$

Nesta seção, denotaremos apenas por  $X$  o espaço métrico  $(X, d)$

**Lema 1.14.** *Seja  $X$  um espaço métrico. Então,*

(a) *toda sequência convergente em  $X$  é limitada e seu limite é único;*

(b) *se  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$  em  $X$ , então  $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ .*

*Demonstração.* (a) Sejam  $(x_n)$  uma sequência em  $X$ ,  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Escolhendo  $\varepsilon = 1$ , podemos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, a) < 1$ , para todo  $n > n_0$ . Assim, o conjunto dos valores da sequência  $(x_n)$  está contido na união  $\{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup B(a; 1)$  de conjuntos limitados. Portanto,  $(x_n)$  é limitada. Agora devemos mostrar a unicidade do limite de  $(x_n)$ . Para isto, suponhamos sejam  $a, b \in X$ , tais que  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  e  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $d(x_n, a) < \varepsilon$ , para todo  $n > n_0$ . Existe também  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, b) < \varepsilon$ , para todo  $n > n_1$ . Escolhemos  $n \in \mathbb{N}$  e maior que  $n_0$  e  $n_1$ . Então,

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon \Rightarrow 0 \leq d(a, b) < 2\varepsilon,$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Isto acarreta  $d(a, b) = 0$  e, portanto,  $a = b$ .

(b) Da Desigualdade triangular, temos

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n).$$

Logo,

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

Portanto,

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty.$$

Consequentemente,

$$d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y).$$

□

**Definição 1.15.** Um espaço métrico  $X$  é dito completo se toda sequência de Cauchy em  $X$  converge para um elemento de  $X$ .

**Teorema 1.16.** *Toda sequência de Cauchy no espaço métrico  $X$  é limitada.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $X$ . Então, para  $\epsilon = 1$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que  $d(x_n, x_m) < 1$ , sempre que  $m, n \geq n_0$ . Em particular,  $n \geq n_0$   $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ , ou seja,

$$x_n \in B(x_{n_0}, 1), \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo, fazendo  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}\}$ , temos

$$\begin{aligned} x(\mathbb{N}) &= M \cup \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\} \\ &\subset M \cup B(x_{n_0}; 1) \end{aligned}$$

Como  $M$  é limitado por ser finito, temos  $M \cup B(x_{n_0}; 1)$  limitado e, assim,  $x(\mathbb{N})$  é limitado, ou seja,  $(x_n)$  é limitada.  $\square$

**Teorema 1.17.** *Toda sequência de Cauchy em  $X$  com uma subsequência convergente em  $X$  é convergente (e tem o mesmo limite que esta subsequência).*

*Demonstração.* Seja  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $(X, d)$  e  $(x_{n_k})$  uma subsequência que converge para o ponto  $a \in X$ . Afirmamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Com efeito, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que

$$n_k > p \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Existe também  $q \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja  $n_0 = \max\{p, q\}$ . Para todo  $n > n_0$  existe  $n_k > n_0$  e, então,

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .  $\square$

**Teorema 1.18.** *Toda sequência convergente em um espaço métrico  $X$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ .*

*Demonstração.* Sejam  $X$  um espaço métrico e  $(x_n)$  uma sequência convergente em  $X$ . Digamos que  $x_n \rightarrow x \in X$ . Então, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N = N(\epsilon)$  tal que

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo  $n > N$ . Portanto, pela Desigualdade triangular, obtemos, para  $n, m > N$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo,  $(x_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $X$ . □

**Teorema 1.19.** *Seja  $M$  um subconjunto não vazio de um espaço métrico  $X$  e  $\overline{M}$  seu fecho. Então,*

(a)  $x \in \overline{M}$  se, e somente se, há uma sequência  $(x_n)$  em  $M$  tal que  $x_n \rightarrow x$ ;

(b)  $M$  é fechado se, e somente se,  $(x_n) \in M, x_n \rightarrow x$  implicam que  $x \in M$ .

*Demonstração.* (a) Seja  $x \in \overline{M}$ . Se  $x \in M$ , a sequência  $(x_n) = (x, x, \dots)$  pertence ao conjunto dos pontos de acumulação de  $X$ , está em  $M$  e  $x_n \rightarrow x$ . No entanto, se  $x \notin M$ , ele é um ponto de acumulação de  $M$ . Portanto, para cada  $n = 1, 2, \dots$ , a bola  $B(x, 1/n)$  contém uma sequência  $(x_n) \in M$ , com  $x_n \rightarrow x$ , pois  $1/n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Reciprocamente, se  $(x_n)$  está em  $M$  e  $x_n \rightarrow x$ , então  $x \in M$  e, assim,  $x$  é um ponto de acumulação de  $M$ . Portanto,  $x \in \overline{M}$ , pela definição de fecho. Logo  $\overline{M} \subset M$ .

(b)  $M$  é fechado se, e somente se,  $M = \overline{M}$ , de modo que (b) segue imediatamente de (a). Resta provar que  $M \subset \overline{M}$ . Se  $(x_n) \in M$ , de tal forma  $x_n \rightarrow x$  então  $x \in M$ , por (a). Como  $\overline{M}$  é o menor conjunto que contém  $M$ , segue que  $M \subset \overline{M}$ . □

**Teorema 1.20.** *Um subespaço  $M$  de um espaço métrico completo  $X$  é completo se, e somente se, o conjunto  $M$  é fechado em  $X$ .*

*Demonstração.* Seja  $M$  um subespaço de um espaço métrico completo  $X$  completo. Pelo item (a) do Teorema 1.19, para todo  $x \in \overline{M}$ , existe uma sequência  $(x_n)$  em  $M$  que converge para  $x$ . Segue do Teorema 1.18 que  $(x_n)$  é de Cauchy. Como  $M$  é completo,  $(x_n)$  converge em  $M$  e o limite é único pelo Lema 1.14. Logo,  $x \in M$  provando que  $M$  é fechado. Reciprocamente, seja  $M \subset X$  fechado e  $(x_n)$  uma sequência de Cauchy em  $M$ . Então, existe  $x \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x$ , o que implica que  $x \in \overline{M}$ , pelo item (a) do Teorema 1.19 e do fato de que  $x \in M$ , pois  $M = \overline{M}$  por hipótese. Logo,  $M$  é completo. □

**Teorema 1.21.** *Uma função  $T : X \rightarrow Y$  de um espaço métrico  $(X, d)$  em um espaço métrico  $(Y, \bar{d})$  é contínua em um ponto  $x_0 \in X$  se, e somente se,*

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \text{implica} \quad Tx_n \rightarrow Tx_0,$$

onde  $(x_n) \subset X$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $T$  é contínua em  $x_0$ . Então dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies \bar{d}(T(x), T(x_0)) < \varepsilon.$$

Seja  $x_n \rightarrow x_0$ . Então há  $N \in \mathbb{N}$  tal que para  $n > N$ , temos  $d(x_n, x_0) < \delta$ . Assim,

$$\bar{d}(T(x_n), T(x_0)) < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > N.$$

Portanto,  $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$ . Agora suponhamos que  $(x_n) \subset X$  e que

$$x_n \rightarrow x_0 \implies T(x_n) \rightarrow T(x_0).$$

Provaremos que  $T$  é contínua em  $x_0$ . Suponhamos, por absurdo, que exista  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $\delta > 0$ ,

$$d(x, x_0) < \delta \quad \text{com} \quad \bar{d}(T(x), T(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Em particular, para  $\delta = \frac{1}{n}$ , há uma sequência  $(x_n)$  satisfazendo

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{com} \quad \bar{d}(T(x_n), T(x_0)) \geq \varepsilon.$$

Logo,  $x_n \rightarrow x_0$  mas  $T(x_n)$  não converge para  $T(x_0)$  o que é uma contradição. Portanto,  $T$  é contínua.  $\square$

**Teorema 1.22.** *A reta real  $\mathbb{R}$  e o plano complexo  $\mathbb{C}$  são espaços métricos completos.*

*Demonstração.* Para a prova, veja [8].  $\square$

**Exemplo 1.23.** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e o espaço unitário  $\mathbb{C}^n$  são completos. A métrica em  $\mathbb{R}^n$  é definida por

$$d(x, y) = \left( \sum_{j=1}^n (\xi_j - \eta_j)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2},$$

onde  $x = (\xi_j)$  e  $y = (\eta_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Consideremos uma sequência de Cauchy  $(x_m)$  em  $\mathbb{R}^n$ , escrevendo  $(x_m) = (\xi_1^m, \dots, \xi_n^m)$ . Visto que  $(x_m)$  é de Cauchy, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que

$$d(x_m, x_r) = \left( \sum_{j=1}^n (\xi_j^m - \xi_j^r)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon, \quad m, r > N. \quad (1.2)$$

Elevando ao quadrado, temos, para  $m, r > N$  e  $j = 1, \dots, n$ ,

$$(\xi_j^m - \xi_j^r) < \varepsilon^2 \quad \text{e} \quad |\xi_j^m - \xi_j^r| < \varepsilon.$$

Fixemos um índice  $j$ . A sequência  $(x_m)$  é uma sequência de Cauchy em  $\mathbb{R}$  e converge para um número real pelo Teorema 1.22. Assim,  $\xi_j^m \rightarrow \xi_j$ , uma vez que  $x = (\xi_1, \dots, \xi_j)$  e  $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_j^m = \xi_j$ , segue de (1.2), que

$$d(x_m, x) \leq \varepsilon, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Isto mostra que  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  e concluímos que  $\mathbb{R}^n$  é completo.

**Exemplo 1.24.** O espaço de função  $(C[a, b], \mathbb{R})$  é completo, onde  $[a, b]$  é algum intervalo fechado em  $\mathbb{R}$ .

De fato, seja  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $(C[a, b], \mathbb{R})$ . Queremos mostrar que  $f_n \rightarrow f$  para algum  $f \in C[a, b]$ .

Pela Definição 1.12, dado  $\varepsilon > 0$  há um  $n \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n, m > N$ , temos

$$d(f_m, f_n) = \max_{t \in J} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon, \quad (1.3)$$

onde  $J = [a, b]$ . Então, para algum  $t = t_0 \in [a, b]$  fixo,

$$|f_n(t_0) - f_m(t_0)| < \varepsilon, \quad m, n > N.$$

Dessa forma,  $(f_n) = (f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_n(t_0), \dots)$  é de Cauchy em  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  é completo, a sequência converge para um número e  $f_n(t_0) \rightarrow f(t_0)$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Dessa forma, podemos associar a cada  $t \in j$  um único número real  $f(t)$ . Logo  $f_n \rightarrow f$ .

Resta-nos mostrar que  $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ , ou seja,  $f$  é contínua em  $[a, b]$ . Por hipótese,  $f_n$  é contínua. Então, dado  $\varepsilon > 0$  há  $\delta > 0$ , tal que  $n > N_1$ ,

$$|f_n(t_0) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

sempre que  $|t - t_0| < \delta$ . Como

$$f_n(t_0) \rightarrow f(t_0)$$

há um  $N_2$  tal que, para todo  $n > N_2$

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para mostrar que  $f$  é contínua, basta verificar que se  $|t - t_0| \leq \delta$ , então  $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ .

Notemos que

$$\begin{aligned} |f(t_0) - f(t)| &= |f(t_0) - f_n(t) - f_n(t_0) + f_n(t) + f_n(t_0) - f(t)| \\ &\leq |f_n(t_0) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| + |f(t_0) - f_n(t_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é contínua em  $t \in [a, b]$ .

A noção de convergência no espaço  $C([a, b], \mathbb{R})$  é entendida como a convergência uniforme, isto é, se  $x_n \rightarrow x$ , então  $(x_n)$  converge uniformemente para  $[a, b]$ .

**Definição 1.25.** Dizemos que uma sequência de funções  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ , converge uniformemente para uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  quando, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ , para todo  $x \in X$  e para todo  $n > n_0$ .

Observemos que a métrica em  $(C[a, b], \mathbb{R})$  descreve uma convergência uniforme em  $[a, b]$  e, por esta razão, é algumas vezes chamada de métrica uniforme.

### 1.3 Teorema do Ponto Fixo de Banach

**Definição 1.26.** Sejam  $T : X \rightarrow X$  e  $x \in X$ . Dizemos que  $x$  é um ponto fixo de  $T$  quando ele é levado em si mesmo ( $x$  é mantido fixo) por  $T$ , ou seja,  $Tx = x$ .

**Definição 1.27.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma aplicação  $T : X \rightarrow X$  é chamada de contração sobre  $X$  se existe um número real  $0 < \alpha < 1$  tal que, para todos  $x, y \in X$ , ocorre

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y). \quad (1.4)$$

**Observação 1.28.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $x, y \in X$  com  $x \neq y$ . Se  $T$  é uma contração em  $X$ , então

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} \leq \alpha < 1.$$

**Lema 1.29** (Unicidade de Ponto Fixo). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $T : X \rightarrow X$  uma contração com um ponto fixo em  $X$ . Então esse ponto fixo é único.*

*Demonstração.* Sejam  $x, x' \in X$  pontos fixos de  $T$ . Assim,

$$d(x, x') = d(Tx, Tx') \leq \alpha d(x, x') \quad (\alpha < 1).$$

Isto implica que

$$(1 - \alpha)d(x, x') \leq 0 \Rightarrow d(x, x') = 0.$$

Logo  $x = x'$ . Portanto, a unicidade de um ponto fixo de uma contração está provada.  $\square$

**Exemplo 1.30.** Consideremos em  $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  as métricas  $d$  e  $\bar{d}$ , sendo  $d$  a métrica usual e  $\bar{d}$  a métrica definida por  $\bar{d}(x, y) = |x^2 - y^2|$ . Mostraremos que as duas métricas são equivalentes. Sejam  $U$  um aberto associado a  $d$  e  $x \in U$ . Então, existe  $\delta > 0$  tal que

$$B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}_0^+; d(x, y) < \delta\} \subset U,$$

isto é,  $|x - y| < \delta$  implica  $y \in U$ . Pretendemos encontrar  $\varepsilon > 0$  tal que  $|x^2 - y^2| < \varepsilon$  implique que  $y \in U$ . Basta então encontrar  $\varepsilon > 0$  de modo que

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \Rightarrow |x - y| < \delta.$$

Vamos fazer o estudo em dois casos:

*1º Caso:*  $x = 0$ .

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \Rightarrow y^2 < \varepsilon.$$

Consideremos, então,  $\varepsilon = \delta^2 > 0$ . Logo,

$$y^2 < \delta^2 \Leftrightarrow y < \delta \Leftrightarrow |x - y| < \delta.$$

*2º Caso:*  $x \neq 0$ . Neste caso,

$$|x^2 - y^2| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x^2 - y^2 < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 - \varepsilon < y^2 < x^2 + \varepsilon.$$

Portanto,

$$y^2 > x^2 - \varepsilon.$$

Escolhendo  $\varepsilon > 0$  de modo que  $x^2 - \varepsilon > 0$ , obtemos

$$y > \sqrt{x^2 - \varepsilon}.$$

Uma vez que

$$|x - y| = \frac{|x^2 - y^2|}{x + y} < \frac{\varepsilon}{x + \sqrt{x^2 - \varepsilon}},$$

basta escolher  $\varepsilon > 0$  de modo que  $\varepsilon < x^2$  e  $\frac{\varepsilon}{x + \sqrt{x^2 - \varepsilon}} < \delta$ .

De modo análogo, provamos que, se  $U$  é um aberto associado a  $\bar{d}$ , então  $U$  é também um aberto associado a  $d$ .

Agora, consideremos

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto \frac{x}{2} + 1. \end{aligned}$$

Relativamente à métrica  $d$ , é obvio que  $T$  é contração com  $\alpha$  igual a  $\frac{1}{2}$ . Contudo, como

$$\frac{\bar{d}\left(T\left(\frac{1}{2}\right), T(0)\right)}{\bar{d}\left(\frac{1}{2}, 0\right)} = \frac{\bar{d}\left(\frac{3}{4}, 1\right)}{\bar{d}\left(\frac{1}{2}, 0\right)} = \frac{7}{4} > 1,$$

pela Observação 1.28,  $T$  não é uma contração relativamente à métrica  $\bar{d}$ .

Nos exemplos a seguir, suponhamos que  $X$  é um espaço métrico não vazio.

**Exemplo 1.31.** Uma translação  $T : X \rightarrow X$  definida por  $Tx = x + 1$  não possui pontos fixos.

**Exemplo 1.32.** Uma rotação  $F : X \rightarrow X$  definida por  $Fx = x^2$  tem dois pontos fixos: 0 e 1.

**Exemplo 1.33.** A aplicação identidade  $I : X \rightarrow X$  definida por  $Ix = x$  possui infinitos pontos fixos.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach nos garante que toda contração em um espaço métrico completo possui um único ponto fixo. A ideia da prova é construir uma sequência de Cauchy  $(x_n)$  em  $X$  e provar que ela converge para um único ponto fixo  $x \in X$  por meio de uma contração  $T$ .

**Teorema 1.34** (Ponto Fixo de Banach). *Consideremos  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $X \neq \emptyset$ . Seja  $T : X \rightarrow X$  uma contração sobre  $X$ . Então,  $T$  tem um único ponto fixo em  $X$ .*

*Demonstração.* Construiremos uma sequência  $(x_n)$  em  $X$  e mostraremos que ela é de Cauchy, assim ela convergirá para algum elemento  $x \in X$  no espaço completo  $X$ . Em seguida, mostraremos que seu limite  $x$  é um ponto fixo de  $T$ , e que  $T$  não possuirá mais pontos fixos.

Escolhemos  $x_0 \in X$  e consideremos a sequência iterativa  $(x_n)$  por

$$x_0, x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = Tx_{n-1} = T^2x_0, \dots \quad (1.5)$$

Mostraremos que  $(x_n)$  é de Cauchy em  $X$ . Por (1.4) e (1.5), temos

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\ &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Desta forma, pela Desigualdade triangular e, usando a fórmula para a soma de uma progressão geométrica, obtemos para  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $n > m$ ,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \alpha^m d(x_1, x_0) + \alpha^{m+1} d(x_1, x_0) + \dots + \alpha^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &= (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1}) d(x_1, x_0) \\ &= \alpha^m \frac{(1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0). \end{aligned} \quad (1.7)$$

De  $0 < \alpha < 1$ , temos  $1 - \alpha^{n-m} < 1$ . Consequentemente,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \quad (n > m). \quad (1.8)$$

À direita,  $0 < \alpha < 1$  e  $d(x_1, x_0)$  é fixo, assim, podemos fazer o lado direito tão pequeno quanto desejarmos, tomando  $m$  suficientemente grande e  $n > m$ . Logo,

$$0 \leq d(x_m, x_n) < \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

Portanto,

$$d(x_m, x_n) \rightarrow 0 \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

Isto prova que  $(x_m)$  é de Cauchy em  $X$ , que por sua vez é completo. Então, existe  $x \in X$ , tal que  $x_m \rightarrow x$ . Mostremos que este limite  $x$  é um ponto fixo de  $T$ . Pela Desigualdade triangular e, por (1.4),

$$\begin{aligned}d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x).\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}d(x, Tx) &= \lim_{m \rightarrow \infty} d(x, Tx) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} d(x, x_m) + \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha d(x_{m-1}, x) \\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que  $d(x, Tx) = 0$ , o que resulta em  $Tx = x$ . A unicidade de  $x$  é garantida pelo Lema 1.29. □

---

# Equações Diferenciais Ordinárias

---

**Definição 2.1.** Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação que envolve uma função desconhecida,  $x(t)$ , suas derivadas até uma ordem  $n$  e a variável independente  $t$ , ou seja, é uma equação da forma

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^n) = 0, \quad (2.1)$$

onde  $F$  é uma função. Aqui  $x'$  denota a derivada de  $x$  com relação a  $t$ , ou seja,  $x' = \frac{dx}{dt}$ .

**Definição 2.2.** A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais alta que aparece na mesma.

Neste capítulo, consideremos  $D$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua.

**Definição 2.3.** Uma solução de

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (2.2)$$

em um intervalo  $I$  contido em  $\mathbb{R}$  é uma função  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $(t, x(t)) \in D$ , para todo  $t \in I$ ,  $x$  é uma função diferenciável em  $I$  e satisfaz (2.2), para todo  $t \in I$ .

Seja  $(t_0, x_0) \in D$ . Um Problema de Valor Inicial (PVI) para a equação (2.2) consiste em encontrar um intervalo  $I$  contendo  $t_0$  e uma solução  $x(t)$  da equação (2.2) em  $I$  tal que  $x(t_0) = x_0$ . Abreviadamente, escrevemos o PVI

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Estamos interessados em responder as seguintes questões:

- Em quais condições podemos garantir que existência de que uma solução de (2.3)?
- Em quais condições esta solução é única?

Essas questões serão respondidas na próxima seção, através do Teorema de Existência e Unicidade de solução do PVI em (2.3).

## 2.1 Existência e unicidade de solução

Nesta seção, iremos apresentar o Teorema de Existência e Unicidade de solução para o PVI em (2.3). Para isto, nos baseamos em [1], [2], [4] e [6].

As questões teóricas fundamentais são existência e unicidade de soluções e o domínio de existência das mesmas, bem como a construção de expressões úteis para o cálculo. Quando as equações forem lineares essas questões podem ser respondidas diretamente, resolvendo-se o problema e exibindo uma fórmula para a solução. Mas, em geral, esse procedimento não é tão simples, devido a inexistência de um método geral para a solução do PVI. Assim, no caso geral, essas questões tem que ser investigadas indiretamente.

**Lema 2.4.** *Seja  $x : [t_0, t_0 + \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Esta função é uma solução de (2.3) se, e somente se,*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \gamma]. \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Seja  $x(t)$  uma solução de (2.3) definida em  $[t_0, t_0 + \gamma]$ . Então, integrando (2.2) ambos os membros, obtemos

$$\int_{t_0}^t x'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \gamma].$$

Assim,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \gamma].$$

Reciprocamente, seja  $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ . Derivando com relação a  $t$ , obtemos

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)).$$

Como  $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s))ds = x_0$ , segue que  $x$  é solução de (2.3).  $\square$

O resultado fundamental nesta direção é o teorema seguinte, que estabelece, localmente, a existência e unicidade de soluções para o PVI, sob algumas hipóteses sobre a função  $f(t, x(t))$ . Antes precisaremos da seguinte definição.

**Definição 2.5.** Dizemos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é localmente Lipschitziana com relação à segunda variável se, para cada compacto  $U \subset D$  existir constante real  $k = k(U) > 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|,$$

para todos  $(t, x), (t, y) \in U$ .

**Teorema 2.6.** *Sejam  $D$  um subconjunto aberto e convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Suponhamos que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  são contínuas. Então,  $f$  é localmente Lipschitziana com relação à segunda variável.*

*Demonstração.* Seja  $U \subset D$ . Como  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua em  $U$ , segue que  $\frac{\partial f}{\partial x} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é limitada. Notemos que

$$\begin{aligned} f(t, x) - f(t, y) &= \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(t, y + \theta(x - y)) d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + \theta(x - y))(x - y) d\theta \\ &= \left[ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + \theta(x - y)) d\theta \right] (x - y). \end{aligned}$$

Desta forma, usando a hipótese de que  $U$  é convexo,

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + \theta(x - y)) d\theta \right| |(x - y)| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + \theta(x - y)) \right| |(x - y)| \\ &\leq \sup_{0 < \theta < 1} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, y + \theta(x - y)) \right| |(x - y)| \\ &= k |x - y|, \end{aligned}$$

para todos  $(t, x), (t, y) \in U$ . Logo,  $f$  é localmente lipschitziana com relação à segunda variável.  $\square$

A seguir, mostraremos a existência e unicidade de uma solução local de (2.5). Para tanto, usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, para mostrar que o PVI em (2.5). Motivados pelo Lema 2.4, definimos uma aplicação  $T$  e percebemos que  $x(t)$  será uma solução de (2.5) se, e somente se,  $x(t)$  é um ponto fixo de  $T$ .

**Teorema 2.7** (Teorema de Picard). *Seja  $f$  uma função contínua no retângulo fechado*

$$R = \{(t, x); |t - t_0| \leq a, \quad |x - x_0| \leq b\}.$$

*Suponhamos que  $f$  é Lipschitziana na segunda variável com constante de Lipschitz  $k$ . Então, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

*tem uma única solução em  $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ , onde*

$$\beta < \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}.$$

*Demonstração.* Como  $f$  é uma função contínua em  $R$  (fechado), então  $f$  é limitada em  $R$ . Assim, seja  $c > 0$  tal que

$$|f(t, x)| \leq c, \quad \text{para todo } (t, x) \in R.$$

Consideremos  $C(J)$  o espaço das funções contínuas em  $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$  a valores reais, munido da métrica

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|, \quad x, y \in C(J).$$

Como vimos no Exemplo 1.24,  $C(J)$  é um espaço métrico completo. Agora, seja

$$\tilde{C} = \{x \in C(J); |x(t) - x_0| \leq c\beta\}.$$

Então,  $\tilde{C}$  é um subespaço de  $C(J)$  e fechado em  $C(J)$ . Pelo Teorema 1.20,  $\tilde{C}$  é completo.

Seja  $T : \tilde{C} \rightarrow \tilde{C}$ , dada por

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Primeiramente, observemos que a aplicação  $T$  está bem definida. De fato,  $f$  é contínua, então  $\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$  existe e também é contínua em  $J$ , ou seja,  $Tx \in C(J)$ . Agora, para todo  $x \in \tilde{C}$ , temos

$$|Tx(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \leq |t - t_0|c \leq \beta c.$$

Deste modo  $T(x) \in \tilde{C}$  e, portanto,  $T(\tilde{C}) \subset \tilde{C}$ .

O próximo passo é mostrar que  $T$  é uma contração em  $\tilde{C}$ . Sejam  $x, v \in \tilde{C}$ . Então,

$$\begin{aligned} d(Tx, Tv) &= \max_{t \in J} |Tx(t) - Tv(t)| = \max_{t \in J} \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, v(s))) ds \right| \\ &\leq \max_{t \in J} \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq k \max_{t \in J} \int_{t_0}^t |x(s) - v(s)| ds \leq k \max_{t \in J} |x(t) - v(t)| \int_{t_0}^t ds \\ &\leq k|t - t_0| d(x, v) < k\beta d(x, v). \end{aligned}$$

Logo,

$$d(Tx, Tv) \leq \alpha d(x, v),$$

onde  $\alpha = \beta k < 1$ . Portanto,  $T$  é uma contração em  $\tilde{C}$ . Pelo Teorema 1.34, a aplicação  $T$  tem um único ponto fixo  $x \in \tilde{C}$ , isto é, existe uma única função  $x$  contínua em  $J$ , satisfazendo  $Tx = x$ . Consequentemente, pelo Lema 2.4, o problema de valor inicial (2.5) possui uma única solução em  $J$ .  $\square$

## 2.2 Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Nesta seção trataremos de um certo tipo de EDOs. Elas constituem as Equações Diferenciais Ordinárias lineares de primeira ordem cuja forma geral é dada por

$$x' = p(t)x + q(t), \quad (2.6)$$

onde  $p, q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas.

Uma função  $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução de (2.6) se ela for diferenciável em  $(a, b)$  e satisfaz (2.6).

No estudo da equação (2.6) surgem duas questões elementares.

- (i) Obtenção da solução geral da equação (2.6);
- (ii) Obtenção de uma solução de Problema de Valor Inicial (PVI).

$$\begin{cases} x' = p(t)x + q(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

onde  $t_0 \in (a, b)$  e  $t_0, x_0$  são conhecidos (dados iniciais).

Notemos que, agora, em particular,  $f(t, x) = p(t)x + q(t)$ , a qual é uma função contínua. Neste caso, podemos garantir que existe pelo uma solução do PVI em (2.7).

**Exemplo 2.8.** Vejamos um exemplo mais simples da equação (2.6). Para mais detalhes, veja [11]. Consideremos

$$x' = kx, \quad (2.8)$$

onde  $k$  é uma constante. Esta equação é conhecida como equação do crescimento exponencial,

Obteremos uma solução da equação geral (2.8), utilizando um método, que faz uso de um fator integrante o qual estudaremos mais adiante e detalhadamente.

Reescrevendo (2.8), vem

$$x' - kx = 0.$$

Multiplicando ambos os membros pelo fator  $e^{-kt}$ , segue

$$x' e^{-kt} - kx e^{-kt} = 0.$$

Isto implica que

$$\frac{d}{dt}(x(t)e^{-kt}) = 0.$$

Por integração, temos

$$x(t)e^{-kt} = c$$

e, portanto,

$$x(t) = ce^{kt}, t \geq t_0 \quad (2.9)$$

que é a solução geral da equação (2.8), onde  $c$  é uma constante arbitrária.

Para resolvermos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = kx, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

onde  $t_0 \in (a, b)$  e  $x_0 \in I \subset \mathbb{R}$ , substituimos na solução geral da equação (2.8) dada por (2.9) e obtemos

$$x(t_0) = ce^{kt_0} = x_0,$$

logo

$$c = x_0 e^{-kt_0}.$$

Substituímos  $c$  na solução geral (2.8) em (2.9) e, obtemos a solução do PVI em (2.10), ou seja,

$$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Equações do tipo

$$x' = p(t)x$$

são chamadas de *equações lineares homogêneas* e o problema de valor inicial correspondente é dado por

$$\begin{cases} x' = p(t)x \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

A solução do problema de valor inicial homogêneo é obtida da seguinte maneira. Temos

$$x' - p(t)x = 0,$$

multiplicando ambos os lados pelo fator integrante  $\lambda(t)$ , obtemos

$$\lambda(t)(x' - p(t)x) = 0.$$

Queremos encontrar  $\lambda(t)$  de tal maneira que o primeiro membro da equação corresponda a derivada do produto de  $\lambda$  por  $x$ , isto é,

$$\lambda(x' - p(t)x) = \frac{d}{dt}(\lambda x) = \lambda'x + \lambda x', \quad (2.12)$$

ou seja,

$$\lambda'x = -\lambda p(t)x.$$

Supondo  $\lambda > 0$ , segue que

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -p(t),$$

logo

$$\frac{d}{dt}(\ln \lambda) = -p(t).$$

Agora, por integração, obtemos

$$\ln \lambda = - \int p(s) ds,$$

isto é,

$$\lambda(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s) ds} = e^{\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

Assim, através da equação (2.12), chegamos que

$$\frac{d}{dt}(e^{\int_t^{t_0} p(s)ds} x(t)) = 0,$$

integrando de  $t_0$  à  $t$

$$e^{\int_t^{t_0} p(s)ds} x(t) - e^{\int_{t_0}^{t_0} p(s)ds} x(t_0) = e^{\int_t^{t_0} p(s)ds} x(t) - x(t_0) = 0.$$

Portanto

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}, \quad t \geq t_0$$

que é uma solução do problema de valor inicial homogêneo (2.11).

Alguns autores, com o objetivo de facilitar os cálculos, utilizam a seguinte notação  $T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds}$ . É fácil ver que a função  $T$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} (i) & T(t_0, t_0) = 1; \\ (ii) & T(t, t_0) = [T(t_0, t)]^{-1}; \\ (iii) & T(t, t_0)T(t_0, s) = T(t, s). \end{cases} \quad (2.13)$$

A resolução do PVI em (2.7), no caso geral, é obtida através do uso de um fator integrante  $u(t)$ . Para determiná-lo, multipliquemos a equação por  $u(t)$

$$u(t)(x' - p(t)x) = u(t)q(t)$$

e busquemos  $u(t) > 0$  de tal forma que o primeiro membro seja a derivada do produto  $u$  por  $x$ , isto é,

$$u(t)(x' - p(t)x) = \frac{d(ux)}{dt} = u'x + ux',$$

ou seja,

$$u'x = -up(t)x.$$

Logo

$$\frac{u'}{u} = -p(t),$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}(\ln u) = -p(t).$$

Integrando obtemos

$$\ln u = - \int p(s)ds.$$

Portanto, determinamos um fator integrante  $u(t)$ , tomado uma particular primitiva de  $p$ :

$$u(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} = e^{\int_t^{t_0} p(s)ds} = T(t_0, t).$$

Logo

$$\frac{d}{dt}(T(t_0, t)x(t)) = T(t_0, t)q(t).$$

Agora, integrando de  $t_0$  a  $t$ , obtemos

$$T(t_0, t)x(t) - T(t_0, t_0)x(t_0) = \int_{t_0}^t T(t_0, s)q(s)ds.$$

$$T(t_0, t)x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t T(t_0, s)q(s)ds.$$

Multipliquemos ambos os lados por  $T(t, t_0)$  e utilizando as propriedades (2.13), obtemos a solução do problema de valor inicial (2.7):

$$x(t) = T(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t T(t, s)q(s)ds, \quad t \geq t_0. \quad (2.14)$$

Essa expressão é chamada de *fórmula da variação das constantes*.

Acabamos de obter uma forma geral das soluções de (2.7). Agora, verificaremos que a expressão obtida é de fato uma solução da equação diferencial (2.6).

Em particular, quando

$$x' = p(t)x + q(t) = kx + q(t),$$

ou seja,  $q(t)$  igual a uma constante  $k$ , temos

$$T(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t kds} = e^{k \int_{t_0}^t ds} = e^{k(t-t_0)}$$

e, portanto, a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = kx + q(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

é dada pela fórmula de variação das constantes (2.14):

$$x(t) = e^{k(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{k(t-t_0)}q(s)ds, \quad t \geq t_0.$$

Agora, dadas duas soluções quaisquer  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  da equação (2.6), então

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

é uma solução da equação homogênea associada  $x' = p(t)$ , pois

$$x'_1 - x'_2 = p(t)x_1 + q(t) - p(t)x_2 - q(t) = p(t)(x_1 - x_2) = p(t)x = x'.$$

Logo, todas as soluções da equação linear não homogênea (2.6), são obtidas somando uma solução particular dessa equação com a solução geral da equação homogênea associada. Na fórmula de variação das constantes, onde  $p(t) \equiv k$ , o termo integral

$$\int_{t_0}^t e^{k(t-s)} q(s) ds$$

é uma solução particular da equação (2.6). Assim, podemos evitar o cálculo dessa integral se pudermos determinar uma solução particular por algum outro método.

Por exemplo, quando  $q(t) \equiv q_0$  é uma constante, temos que  $x_p(t) = -\frac{q_0}{k}$  é uma solução particular da equação

$$x' = kx + q_0. \quad (2.15)$$

Portanto,

$$x(t) = ce^{kt} - \frac{q_0}{k}, \quad t \geq t_0$$

é a solução geral da equação (2.15), onde  $c$  é uma constante arbitrária.

## 2.2.1 Equações Separáveis

Sejam  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ . Equações diferenciais da forma

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad (2.16)$$

onde  $g(y) \neq 0$ , são chamadas de *equações separáveis*. Podemos escrever a equação (2.16) da seguinte forma

$$g(y)y' = f(x), \quad (2.17)$$

ou, ainda,

$$g(y)dy = f(x)dx.$$

Esta última equação justifica a nomenclatura de equações separáveis.

Uma função diferenciável  $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução da equação (2.16) se  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ ,  $y((\alpha, \beta)) \subset (c, d)$ ,  $g(y(x)) \neq 0$  e se  $y(x)$  satisfaz (2.16), para todo  $x \in (a, b)$ .

Agora, sejam  $y$  é uma solução de (2.16) e  $G$  é uma primitiva de  $g$ . Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = f(x).$$

Logo,

$$G(y(x)) = F(x) + C, \quad (2.18)$$

onde  $F$  é a primitiva de  $f$ . Assim, dado  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $y(x_0) = y_0 \in (c, d)$ , então

$$C = G(y(x_0)) - F(x_0).$$

Substituindo em (2.18), obtemos

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0),$$

ou ainda,

$$\int_{y_0}^{y(x)} g(y)dy = \int_{x_0}^x f(x)dx, \text{ para todo } x \geq x_0.$$

O que fizemos aqui, foi supor conhecida uma solução da equação (2.16) e mostrar que ela satisfaz a equação (2.18). O raciocínio usado seria considerado precipitado, porém possui uma certa lógica: sendo  $G' = g \neq 0$ , logo  $G$  é monótona e possui inversa, assim obteríamos soluções na forma  $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$ , porém o correto é que, dada a relação

$$G(y) = F(x) + C$$

e  $(x_0, y_0)$  satisfazendo essa relação, com  $G'(y_0) = g(y_0) \neq 0$ , o Teorema das Funções Implícitas (veja [9]) nos garante a existência de um intervalo  $(\alpha, \beta)$  contendo  $x_0$  e uma função  $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  que satisfaz a relação (2.18) e, portanto solução da equação (2.17).

Vejamos agora, uma variedade de equações particulares da EDO em (2.16) e suas respectivas soluções.

**Exemplo 2.9.**  $y' = \frac{x}{y}$ .

**Solução:** Usando o método de separação de variáveis obtemos

$$yy' = x,$$

logo

$$y^2 = x^2 + C.$$

Assim, se  $C = 0$ , temos quatro soluções:

$$y_1 = +x, x > 0;$$

$$y_2 = -x, x > 0;$$

$$y_3 = +x, x < 0;$$

$$y_4 = -x, x < 0.$$

Para  $C = 1$ , temos duas soluções:

$$y_1 = +(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$y_2 = -(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Já para  $C = -1$ , obtemos quatro soluções:

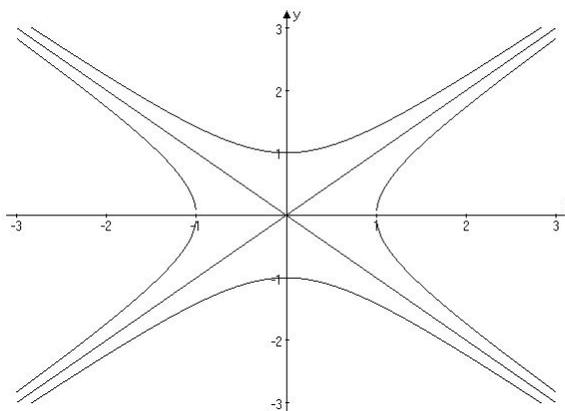
$$y_1 = +(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, x > 1;$$

$$y_2 = -(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, x > 1;$$

$$y_3 = +(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, x < -1;$$

$$y_4 = -(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, x < -1.$$

As soluções obtidas acima estão representadas graficamente



**Exemplo 2.10.**  $y' = \frac{x^2}{y^2}$ .

**Solução:** A solução geral de

$$y' = \frac{x^2}{y^2},$$

é dada por

$$y^3 = x^3 + C.$$

Para  $C = 0$ , obtemos duas soluções:

$$y_1(x) = x, x > 0;$$

$$y_2(x) = x, x < 0.$$

Para  $C = 1$ , temos duas soluções:

$$y_1(x) = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}, x < -1;$$

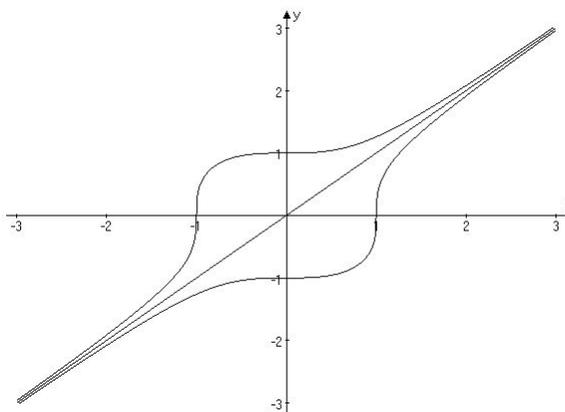
$$y_2(x) = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}}, x > -1.$$

Para  $C = -1$ , temos também duas soluções:

$$y_1(x) = (x^3 - 1)^{\frac{1}{3}}, x < 1;$$

$$y_2(x) = (x^3 - 1)^{\frac{1}{3}}, x > 1.$$

As soluções obtidas acima estão representadas graficamente abaixo



**Exemplo 2.11.**  $y' = -2xy$ .

**Solução:** Podemos reescrever

$$y' = -2xy,$$

como

$$y' = -\frac{2x}{\frac{1}{y}}, \text{ com } y(x) \neq 0.$$

Então

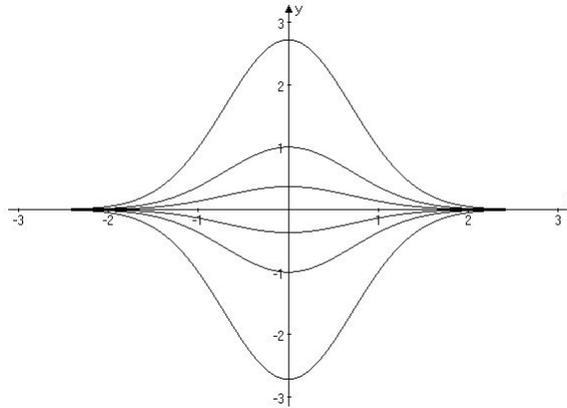
$$\frac{y'}{y} = -2x, \text{ integrando } \ln |y| = -x^2 + C.$$

Portanto, para cada  $C \in \mathbb{R}$ , obtemos duas soluções

$$y_1 = e^{-x^2+C}, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$y_2 = -e^{-x^2+C}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vejam os gráficos das soluções quando  $C > 0$ ,  $C = 0$  e  $C < 0$ .



**Exemplo 2.12.**  $y' = 2e^{-y}x$ .

**Solução:** Reescrevendo

$$y' = 2e^{-y}x,$$

temos

$$y'e^y = 2x$$

e ainda

$$e^y = x^2 + C,$$

ou seja,

$$y = \ln|x^2 + C|.$$

Assim, para  $C = 0$ , temos duas soluções

$$y_1(x) = 2 \ln x, x > 0;$$

$$y_2(x) = 2 \ln |x|, x < 0.$$

Para  $C > 0$  existe uma única solução

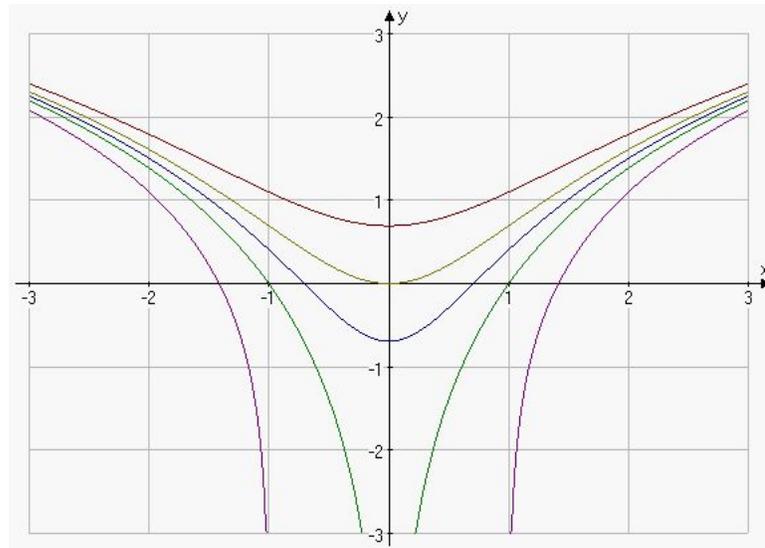
$$y(x) = \ln(x^2 + C), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para  $C < 0$  obtemos duas soluções

$$y_1(x) = \ln(x + C), x > |C|^{\frac{1}{2}};$$

$$y_2(x) = \ln(x + C), x < -|C|^{\frac{1}{2}}.$$

Veja o gráfico das soluções a seguir.



---

# Aplicações

---

A modelagem matemática empregando EDOs pode decorrer da Análise Matemática, ou de propriedades Geométricas, ou Físicas ou Químicas, ou Biológicas, ou Estatísticas, etc. A seguir, apresentamos alguns modelos interessantes.

## 3.1 Problemas Analíticos

Na Definição 2.1, consideremos a função  $F = F(x, c_1, \dots, c_n)$  contendo  $n$  constantes arbitrárias  $c_1, \dots, c_n$ . O processo de obtenção de uma solução destes tipos de EDOs é conhecido como o método de eliminação de constantes ou eliminação de parâmetros arbitrários. Vejamos o funcionamento deste método através do seguinte exemplo.

**Exemplo 3.1.**  $y = ax^2 + b$ , derivando até segunda ordem obtém-se

$$\underbrace{y' = 2ax}_{(I)} \quad \text{e} \quad \underbrace{y'' = 2a}_{(II)}$$

comparando (I) com (II) tem-se

$$\frac{y'}{x} = y'',$$

isto é,

$$y''x = y'. \tag{3.1}$$

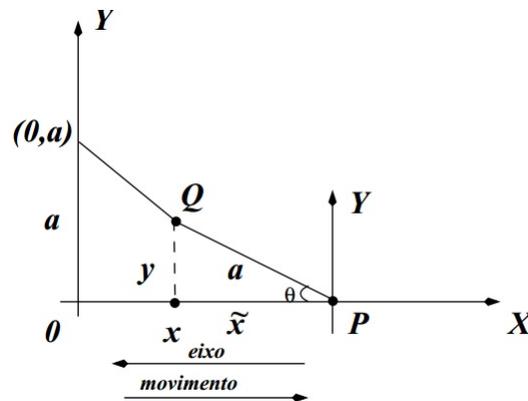
A determinação da função que satisfaz (3.1) constitui um problema de integração de uma EDO.

## 3.2 Problemas Geométricos, Físicos, Biológicos e Químicos

Esses problemas constituem as principais motivações e interesse na aplicação de EDOs deste trabalho. Vamos, então, ao desenvolvimento e dedução de certos modelos clássicos presentes nas áreas de geometria, física, biologia e química.

### 3.2.1 Trajetória

A tractriz é uma curva no plano  $XY$  que tem a propriedade de que o segmento da tangente delimitado pelo ponto de tangência e pelo eixo  $X$  é constante. Supondo que uma partícula  $Q$  com certa massa é arrastada ao longo de um plano horizontal áspero por meio de uma corda  $\overline{QP}$  mantida tensa, e com extremidade  $P$  sobre o eixo  $X$ , então a curva descrita pela partícula  $Q$  é a tractriz. Denotando por  $a$  o comprimento do segmento  $\overline{QP}$ , então a função  $y = y(x)$  é a curva descrita por  $Q$ . Vamos deduzir a EDO que modela tal problema.



Pela figura acima, observamos que

$$\operatorname{tg}\theta \approx \frac{dy}{dx}$$

$$\overline{Qx} \approx y$$

$$\overline{Px} \approx \tilde{x},$$

onde

$$\tilde{x} = \sqrt{a^2 - y^2}, \quad a^2 = y^2 + \tilde{x}^2, \quad \operatorname{tg}\theta = -\frac{y}{\tilde{x}}$$

e o sinal  $-$  é justificado considerando-se a origem em  $P$ . Logo, encontramos a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (3.2)$$

Queremos encontrar a solução de (3.2). Como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{y} \sqrt{a^2 - y^2} = -dx,$$

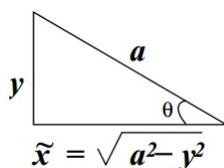
integrando

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = - \int dx,$$

isto é,

$$\underbrace{\int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy}_I = -x + c.$$

Consideremos, inicialmente, a figura abaixo.



Então,  $\text{sen}(\theta) = \frac{y}{a}$ , isto é,  $y = a \cdot \text{sen}(\theta)$  e  $dy = a \cdot \text{cos}(\theta)d\theta$ . Essas relações serão usadas para avaliarmos a integral (I). Daí:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy &= \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \text{sen}^2(\theta)}}{a \cdot \text{sen}(\theta)} a \cdot \text{cos}(\theta) d\theta = \int \frac{\sqrt{a^2(1 - \text{sen}^2(\theta))}}{\text{sen}(\theta)} \text{cos}(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{\sqrt{a^2 \text{cos}^2(\theta)}}{\text{sen}(\theta)} \text{cos}(\theta) d\theta = \int \frac{a \cdot \text{cos}(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \text{cos}(\theta) d\theta \\ &= a \int \frac{\text{cos}^2(\theta)}{\text{sen}(\theta)} d\theta = a \int \frac{(1 - \text{sen}^2(\theta))}{\text{sen}(\theta)} d\theta \\ &= a \int \frac{d\theta}{\text{sen}(\theta)} - a \int \frac{\text{sen}^2(\theta)}{\text{sen}(\theta)} d\theta = a \int \frac{d\theta}{\text{sen}(\theta)} - a \int \text{sen}(\theta) d\theta \\ &= \underbrace{a \int \frac{d\theta}{\text{sen}(\theta)}}_{II} + a \cdot \text{cos}(\theta). \end{aligned}$$

Devemos, agora, avaliar a integral (II). Como:

$$\begin{aligned} a \int \frac{1}{\text{sen}(\theta)} d\theta &= a \int \text{cosec}(\theta) = a(\ln |\text{cosec}(\theta) - \text{cotg}(\theta)|) \\ &= a \cdot \ln \left| \frac{1}{\text{sen}(\theta)} - \frac{\text{cos}(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \right| = a \cdot \ln \left| \frac{1 - \text{cos}(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \right| \end{aligned}$$

queremos manipular

$$\underbrace{a \cdot \ln \left| \frac{1 - \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)} \right|}_{III}.$$

Como (III) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} a \cdot \ln \left| \frac{1 - \sqrt{\cos^2(\theta)}}{\text{sen}(\theta)} \right| &= a \cdot \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)}}{\text{sen}(\theta)} \right| = a \cdot \ln \left| \frac{a(1 - \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)})}{a \cdot \text{sen}(\theta)} \right| \\ &= a \cdot \ln \left| \frac{a\sqrt{a^2 - a^2 \text{sen}^2(\theta)}}{a \cdot \text{sen}(\theta)} \right| \end{aligned}$$

e  $y = a \cdot \text{sen}(\theta)$ . Daí,  $y^2 = a^2 \cdot \text{sen}^2(\theta)$ , então

$$III = a \cdot \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right|.$$

Além disso, como  $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)}$ , tem-se

$$a \cdot \cos(\theta) = a\sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)} = \sqrt{a^2 - a^2 \text{sen}^2(\theta)} = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Portanto, a solução da EDO é dada por:

$$a \cdot \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right| + \sqrt{a^2 - y^2} = -x + c.$$

A constante  $c$  pode ser calculada notando que para  $x = 0$ , vale  $y = a$  (na origem). Assim, para  $x = 0$  tem-se na solução acima

$$a \cdot \ln \left| \frac{a - 0}{a} \right| + 0 = c.$$

Logo  $c = 0$ . Notemos, além disso, que  $y = a \cdot \text{sen}(\theta) > 0$  e, portanto, tem-se que:

$$x = -a \cdot \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right| - \sqrt{a^2 - y^2}$$

é a equação da tractriz  $x(y)$  na forma explícita. Ou, ainda,

$$x = -\tilde{x} - a \cdot \ln \left( \frac{a - \tilde{x}}{y} \right), \quad a - \tilde{x} > 0, \quad y > 0.$$

### 3.2.2 Dinâmica Populacional: Modelo Malthusiano

Nos parece razoável esperar que a taxa de crescimento de uma população seja proporcional à população presente naquele instante. A partir dessas ideias pode-se desenvolver modelos, simples e sofisticados, para a dinâmica populacional.

**Observação 3.2.** Notemos, inicialmente, quando duas quantidades  $u$  e  $v$  forem proporcionais, existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $u = k.v$ .

(a) Um processo de nascimento:

Seja  $N$  o número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. É claro que este número depende do tempo, de modo que podemos escrever  $N = N(t)$ . Assim,  $N(t)$  é o total da população em um instante  $t$ .

Também  $N(t)$  assume somente valores inteiros e é uma função descontínua em  $t$ . Porém,  $N(t)$  pode ser aproximado por uma função contínua e diferenciável desde que o número de indivíduos seja suficientemente grande.

Admite-se, por hipótese, que a proporção de indivíduos reprodutores permanece constante durante o crescimento da população. Também admite-se que a fertilidade é constante. Então, a taxa de nascimento é proporcional ao número  $N(t)$  de indivíduos, ou seja, excluindo a morte, a emigração e a imigração, a taxa de crescimento coincide com a taxa de nascimento.

Seja, então o *número de nascimentos* definido por  $\alpha.N(t).\Delta t$ , onde  $\alpha$  é o coeficiente de natalidade e  $\Delta t$  é a variação do tempo. Tem-se, portanto, que a variação no número de indivíduos da população, em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , é dado por:

$$\begin{aligned}\Delta N(t) &\equiv N(t + \Delta t) - N(t) \\ &= \alpha.N(t).\Delta t,\end{aligned}$$

onde  $\Delta N(t)$  é a variação do número de indivíduos no tempo  $t$ , ou seja,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta T} = \alpha.N(t).$$

Tomando o limite na igualdade acima, quando  $\Delta t \rightarrow 0$  tem-se

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\alpha.N(t)).$$

Logo,

$$\frac{dN}{dt} = \alpha.N; \quad N = N(t).$$

(b) Um processo de nascimento e morte:

Consideremos uma população animal ou vegetal sob as condições delineadas em (a). Estenderemos, agora, o modelo permitindo a morte dos indivíduos da população.

Seja o *número de mortes* definido por  $\beta.N(t).\Delta t$ , onde  $\beta$  é o coeficiente de mortalidade no intervalo de tempo  $\Delta t$ . Então, a variação no tamanho da população neste intervalo de tempo  $\Delta t$  é dada por

$$\begin{aligned} N(t + \Delta t) - N(t) &= \alpha.N(t).\Delta t - \beta.N(t).\Delta t \\ &= (\alpha - \beta).N(t).\Delta t, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (\alpha - \beta).N(t).$$

Tomando o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  tem-se, por definição, que:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta).N = \gamma N; \quad N = N(t); \quad \gamma = \alpha - \beta.$$

**Observação 3.3.** Neste modelo tem-se que a taxa de variação de uma população é proporcional à população em cada instante, isto é, Variação resultante é igual ao número de nascimento menos o número de mortes. Poderíamos escrever

$$\Delta P = \Delta N - \Delta M,$$

onde  $P = P(t)$  é a população  $N = N(t)$  é (agora) o número de nascimentos e  $M = M(t)$  é o número de mortes. Logo a taxa média de variação, em um intervalo  $\Delta t$  de tempo, é dado por:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} - \frac{\Delta M}{\Delta t}.$$

Tomando o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  tem-se

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dN}{dt} - \frac{dM}{dt},$$

isto é, a taxa de variação da população é igual à taxa de nascimento menos a taxa de mortalidade.

A taxa  $\frac{dP}{dt}$  pode ser positiva ou negativa, dependendo se prevalecem as ocorrências de nascimento ou de morte. Considerando, como anteriormente, que  $\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot N$  e  $\frac{dM}{dt} = \beta \cdot N$ , e fazendo  $N = P$  tem-se

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \alpha \cdot P - \beta \cdot P \\ &= (\alpha - \beta) \cdot P,\end{aligned}$$

que é exatamente o resultado obtido anteriormente.

**Observação 3.4.** O modelo  $\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta) \cdot P$  é chamado de “**Lei de Malthus**”, que pressupõe que os nascimentos e as mortes sejam proporcionais ao tamanho da população  $N$  e o tamanho do intervalo de tempo, sendo o *número de nascimento* é dado por  $\alpha \cdot N \cdot \Delta t$  e o *número de mortes* é dado por  $\beta \cdot N \cdot \Delta t$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são respectivamente, os coeficientes de natalidade e de mortalidade.

Sabemos que a solução (única) de  $\frac{dN}{dt} = \gamma \cdot N$  é dada por  $N = N_0 \cdot e^{\gamma(t-t_0)}$ , onde  $N_0$  representa o tamanho da população em  $t_0$ , sendo,  $\gamma = \alpha - \beta$ . Escolhendo  $t_0 = 0$ , temos que a solução do PVI:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \gamma \cdot N \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

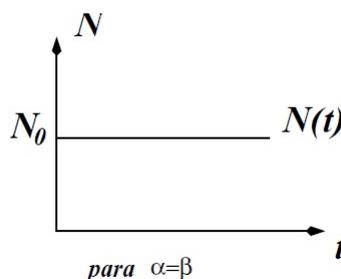
é dada por  $N(t) = N_0 \cdot e^{(\alpha-\beta)t}$ ,  $t > 0$ .

Vamos analisar, agora, como se comporta o crescimento de população:

(i) Se  $\alpha = \beta$ : os índices de natalidade e de mortalidade coincidem e a população permanece estável nessa situação

$$N(t) = N_0 \cdot e^{0 \cdot t} = N_0$$

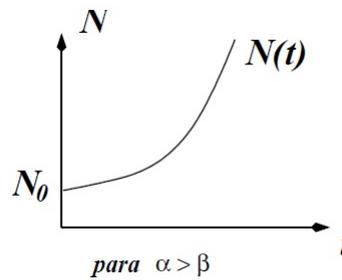
e o gráfico dessa função é dado por



- (ii) Se  $\alpha > \beta$ : o índice de natalidade é maior que o de mortalidade e a população cresce exponencialmente com o tempo  $t$ .

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\gamma t}, \quad \gamma = \alpha - \beta > 0$$

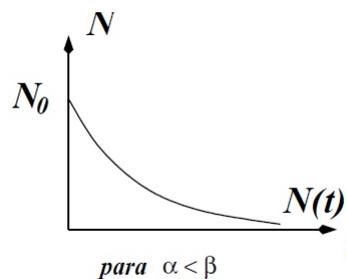
e o gráfico dessa função é dado por



- (iii) Se  $\alpha < \beta$ : o índice de natalidade é menor que o de mortalidade. A população decresce (diminui) exponencialmente e tende à extinção à medida que  $t$  cresce. Neste caso,

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\gamma t}, \quad \gamma = \alpha - \beta < 0$$

e o gráfico dessa função é dado por:



O parâmetro  $\gamma$  pode ser obtida a partir de condições dadas:

- (a) Sejam  $\alpha - \beta = \gamma > 0$  e  $t_2$  o tempo necessário para a população duplicar (que é conhecido, se  $N_0$  é dado). Então,  $N(t_2) = 2N_0$ , donde

$$N(t_2) = N_0 \cdot e^{\gamma t_2} \Leftrightarrow 2N_0 = N_0 \cdot e^{\gamma t_2} \Rightarrow 2 = e^{\gamma t_2} \Rightarrow \ln 2 = \gamma t_2,$$

$$\text{logo } \gamma = \frac{\ln 2}{t_2}.$$

(b) Sejam  $\alpha - \beta = \gamma < 0$  e  $t_{\frac{1}{2}}$  o tempo necessário para a população ser reduzida à metade.

Então,

$$\begin{aligned} N(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{N_0}{2} &\Rightarrow N(t_{\frac{1}{2}}) = N_0 \cdot e^{\gamma t_{\frac{1}{2}}} \\ &\Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{\gamma t_{\frac{1}{2}}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{\gamma t_{\frac{1}{2}}} \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \gamma t_{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

logo,

$$\gamma = \frac{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{t_{\frac{1}{2}}}.$$

Este modelo de Malthus, que não leva em consideração flutuações aleatórias e outras mais, depende apenas do crescimento vegetativo (a diferença entre sua taxa de nascimento e sua taxa de morte), porém, não é apropriado para estimativas populacionais de regiões desenvolvidas. Não obstante, Malthus influenciou o pensamento econômico durante muito tempo (ele era economista e demógrafo inglês). Ainda ele sustentava que a população cresceria até um limite de subsistência e, então, devido à fome, à guerra, às condições sanitárias, a miséria, não mais aumentaria. Ele afirmava que a população crescia em razão geométrica enquanto os meios de sobrevivência cresciam em razão aritmética.

De fato, estes fatores, além de condições de moradia, poluição ambiental, etc, afetam de modo sistemático e o crescimento populacional. Este modelo é apropriado para algumas estimativas populacionais a curto prazo em países do terceiro mundo, além de se mostrar apropriado para certas populações de microorganismos em períodos limitados de tempo, no entanto, este modelo deve se aperfeiçoado. Vamos comprovar isto através dos exemplos seguintes

**Exemplo 3.5.** Seja  $P(t)$  a população terrestre no instante  $t$ . Estimou-se que a população da terra, em 1961, era de 3.060.000.000 e durante a década de 70 a população aumentou à razão de 2% ao ano. Portanto,

$$t_0 = 1961, \quad P_0 = 3,06 \cdot 10^9, \quad \gamma = \alpha - \beta = 0,02,$$

pois  $\gamma = \frac{2}{100} = 0,02$  de modo que se tem

$$P(t) = 3,06 \cdot 10^9 e^{0,02(t-1961)}.$$

Os resultados com a aplicação dessa expressão refletem com precisão a população estimada para o período de 1700 - 1961. Além disso, os dados mostram que a população da Terra duplica em cada 35 anos, e a expressão prediz a duplicação da população da Terra a cada 34,6 anos.

De fato, observando que a população da Terra dobra em um intervalo de tempo  $T = t - t_0$ , tem-se:

$$6,12 \cdot 10^9 = 3,06 \cdot 10^9 e^{0,02 \cdot T},$$

isto é,

$$2 = e^{0,02 \cdot T},$$

de onde:

$$\ln 2 = \ln(e^{0,02 \cdot T}) = 0,02 \cdot T,$$

isto é,  $T \approx 34,65$  anos.

Fazendo uma análise do ano de 1995, 2000 e 2010 temos que pelo modelo teríamos:

$$P(1996) = 3,06 \cdot 10^9 e^{0,02(1996-1961)} \approx 6,16 \cdot 10^9,$$

$$P(2000) = 3,06 \cdot 10^9 e^{0,02(2000-1961)} \approx 6,68 \cdot 10^9,$$

$$P(2000) = 3,06 \cdot 10^9 e^{0,02(2010-1961)} \approx 8,15 \cdot 10^9,$$

e a população mundial nestes anos era de aproximadamente de  $5,81 \cdot 10^9$ ,  $6,12 \cdot 10^9$  e  $6,9 \cdot 10^9$  de pessoas.

Entretanto, mostra-se que para 2510, 2635 e 2670 teria-se, respectivamente, 200 trilhões, 1.800 trilhões e 3.600 trilhões de pessoas. Estes números mostram que o modelo de Malthus não deve se tratado com fidelidade e realidade, pois a superfície terrestre é de aproximadamente  $510.101.000 \text{ km}^2$  e 80% dessa superfície é coberta por água. Admitindo que se queira viver tanto em barcos como na terra, então pode-se mostrar que em 2510 existiria  $0,86 \text{ m}^2$  por pessoa, em 2635 existiria  $0,09 \text{ m}^2$ , em 2670 estaremos empilhados.

Na verdade, esses resultados, que parecem não fazer sentido, apenas resultam das hipóteses consideradas na elaboração do modelo. Não obstante, modela razoavelmente bem algumas populações, sob certas condições, como podemos constatar nos exemplos a seguir.

**Exemplo 3.6.** Consideremos o pequeno roedor *Microtus Arvallis* Pall, que se reproduz muito rapidamente. Tomamos como unidade de tempo como sendo 1 mês e, como mostram as

experiências, considera-se que a população cresce à razão de 40% por mês. Se existem dois roedores no instante  $t = 0$ , então  $P(t)$ , que é o número de roedores no instante  $t$ , satisfaz o PVI.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = 0,4P \\ P(0) = 2 \end{cases} \quad (\text{um casal})$$

e, portanto, sua solução (única) é dada por  $P(t) = 2 \cdot e^{0,4t}$ .

A tabela abaixo compara a população observada com a população calculada.

Meses	0	2	6	10
$P$ observado	2	5	20	109
$P$ calculado	2	4,5	22	109,1

que, como se pode notar, há uma excelente concordância entre os valores da tabela.

Note-se que no caso da *Microtus Arvallis* Pall, o  $P(t)$  observado é preciso, pois o período de gestação é de três semanas e o tempo requerido para o censo é bem menor. Se o tempo de gestação fosse muito curto, então o  $P(t)$  observado poderia não ser preciso, pois muitos roedores em gestação, poderiam ter os filhotes antes que o censo terminasse.

**Exemplo 3.7.** Em uma cultura de bactérias tem-se inicialmente  $P_0$  bactérias. Em  $t = 1h$  o número medido de bactérias é de  $\frac{3}{2}P_0$ . Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias  $P(t)$  presentes no instante  $t$ , determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

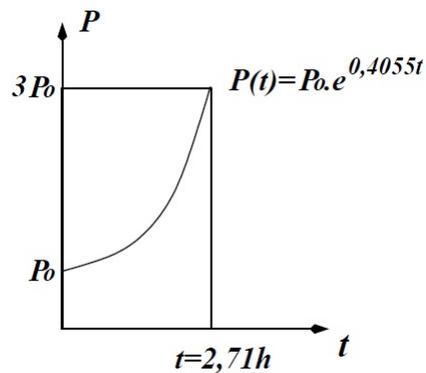
Este é, também, um modelo que pode ser descrito pelo PVI,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = P_0. \end{cases}$$

A solução geral para esse problema é dado por  $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$ .

Para determinarmos  $k$ , fazemos  $\frac{3}{2}P_0 = P_0 \cdot e^{k \cdot 1}$ , isto é,  $e^k = \frac{3}{2}$ . Então de  $\ln(e^k) = \ln(\frac{3}{2})$ , tem-se  $k \approx 0,4055$  e, assim,  $P(t) = P_0 \cdot e^{0,4055t}$ . Para determinarmos o instante no qual o número de bactérias triplicou, façamos:  $3P_0 = P_0 \cdot e^{0,4055t}$  e, assim  $0,4055t = \ln 3$ , isto é,  $t = \frac{\ln 3}{0,4055} \approx 2,71 h$ .

Observemos que o número de bactérias presentes em  $t = 0$ ,  $P_0$ , não desempenha nenhum papel na determinação do tempo necessário para a população inicial de bactérias triplicar (pode ser 100 ou 1.000.000).



### 3.3 Problemas de Mistura

Muitos problemas que envolvem mistura de substâncias podem ser encontrados na Biologia, Engenharia e Química e podem ser resolvidos dentro do contexto das EDOs. Supomos que uma substância  $\rho$  com certa vazão para um tanque, que contém tal substância e outras. A mistura rapidamente se torna homogênea e depois sai do recipiente a uma vazão determinada. Desejamos encontrar a concentração da substância  $\rho$  no tanque no tempo  $t$ . Esse problema é denominado problema de mistura ou análise de compartimento.

**Exemplo 3.8.** Uma substância decai exponencialmente, e depois de dois anos ela decai de  $Q_0$  para a metade da sua quantidade inicial,  $\frac{Q_0}{2}$ . Vamos determinar quanto tempo leva para uma substância decair de  $5lb$  para  $1lb$ . Para isso, tomamos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = \lambda Q \\ Q(t_0) = Q_0 \end{cases}.$$

Assim, a solução deste problema de valor inicial é

$$Q(t) = Q_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Como  $(t - t_0) = 2$  e  $Q(t) = \frac{Q_0}{2}$ , temos

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{\lambda 2} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{\lambda 2} \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln 2}{2}.$$

Podemos, assim, reescrever  $Q(t)$  como

$$Q(t) = Q_0 e^{-t \frac{\ln 2}{2}} \Rightarrow Q(t) = Q_0 \sqrt{2^{-t}}, t \geq t_0.$$

Supomos a densidade da substância constante. Assim, dizemos que a densidade final é igual a densidade inicial, ou seja,

$$\frac{5}{Q_0} = \frac{1}{Q(t)} \Rightarrow \frac{5}{Q_0} = \frac{1}{Q_0 \sqrt{2^{-t}}} \Rightarrow t = 2 \frac{\ln 5}{\ln 2} \text{ anos} \approx 4.644 \text{ anos.}$$

**Exemplo 3.9.** Consideremos um tanque que no tempo  $t = 0$ , contém  $Q_0$  lb de sal dissolvidos em 150 gal de água. Supomos que a uma vazão de 3 gal/min entra água no tanque contendo 1/2 lb de sal por galão e com a mesma rapidez sai água com a mistura bem homogeneizada do tanque. Dentro destas condições encontramos uma expressão que representa a concentração de sal no tanque, no tempo  $t$ .

Podemos avaliar que a quantidade de sal por minuto que entra no tanque é de

$$Q_e = \left(\frac{1}{2} \text{ lb/gal}\right) \cdot (3 \text{ gal/min}) = \frac{3}{2} \text{ lb/min.}$$

A quantidade de sal por minuto que sai do tanque é de

$$Q_s = (Q \text{ lb}/150 \text{ gal}) \cdot (3 \text{ gal/min}) = 0.02Q \text{ lb/min,}$$

onde  $Q$  é a quantidade de sal no tanque no momento da mistura. Temos, então, a EDO

$$\frac{dQ}{dt} = 1.5 - 0.02Q \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + 0.02Q = 1.5$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem equivalente a

$$\frac{d}{dt}[e^{0.02t}]Q = 1.5e^{0.02t}.$$

Aplicando a antiderivada em ambos os lados, obtemos

$$Q(t)e^{0.02t} - Q_0 = 75(e^{0.02t} - 1) \Rightarrow Q(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-0.02t}) + \frac{Q_0 e^{-0.02t}}{150}$$

que é a expressão que representa a concentração de sal no tempo  $t$ .

## 3.4 Transferência de Calor

### 3.4.1 Considerações preliminares

A seguir, apontamos alguns objetivos para calcularmos ou simularmos a transferência de calor entre determinados corpos:

1. Quantificar o calor que cruza a superfície de um sistema térmico.
2. Determinar a distribuição de temperatura em um sistema térmico em relação ao ambiente que o cerca.

Podemos listar algumas possíveis aplicações para calcular ou simular a transferência de calor, entre outros exemplos, são:

1. *Equipamentos industriais;*
2. *Equipamentos para energia solar;*
3. *Processos de fabricação;*
4. *Indústria alimentícia;*
5. *Conforto ambiental;*
6. *Resfriamento de componentes elétricos e eletrônicos;*
7. *Termografia.*

Para bem introduzirmos a modelagem matemática para certo tipo de transferência de calor, alguns conceitos precisam ser revisados:

1. **Calor:** é a energia por unidade de tempo (taxa) trocada entre dois sistemas à diferentes temperaturas.
2. **Temperatura:** é a estimativa da energia térmica contida em um corpo que é proporcional à energia de vibração das moléculas.
3. **Fluxo de calor:** é a taxa de calor por unidade de área ou de volume.
4. **Transmissão ou Transferência de Calor:** é a energia em trânsito devido a uma diferença de temperatura. Sempre que existir uma diferença de temperatura em um meio ou entre meios diferentes haverá, necessariamente, transferência de calor, que pode ocorrer por condução, convecção ou radiação.
  - **Condução:** é a transferência de energia de partículas mais energéticas para partículas de menor energia de um meio devido às interações que ocorrem entre elas.

- **Convecção:** o modo de transferência de calor por convecção abrange dois mecanismos: o movimento molecular aleatório (difusão) e o movimento global ou macroscópico do fluido (advecção).
- **Radiação:** a radiação térmica é a energia emitida por toda a matéria que se encontra a uma temperatura não nula, atribuída às mudanças na configuração eletrônica dos átomos ou moléculas que constituem a matéria. A energia é transportada por meio de ondas eletromagnéticas (fótons). A radiação não necessita da presença de um meio material.

Enfim, **calor** é uma forma de energia que se transfere de um sistema para outro em virtude de uma diferença de temperatura entre eles. É importante destacarmos que essa propagação se dá naturalmente dos corpos de maior temperatura para os de menor temperatura, até atingir (se for o caso) o equilíbrio térmico.

Quando se coloca dois corpos a diferentes temperaturas em contato, verifica-se que estes corpos trocam energia na forma de calor, tendendo sempre a um estado final caracterizado pela igualdade de temperatura entre ambos. Este estado é denominado estado de **equilíbrio térmico**. Dessa forma sempre que dois ou mais corpos que encontram-se à mesma temperatura diz-se que estão em equilíbrio térmico.

### 3.4.2 Transferência de Calor: Caso unidimensional

Veremos que o problema da **condução ou convecção** do calor é modelado matematicamente através de um modelo simples, que trata da troca de calor de um corpo com o meio ambiente. Para a obtenção do modelo matemático unidimensional (1D) são consideradas as seguintes hipóteses:

1. A temperatura  $T$  do corpo depende apenas do tempo, isto é,  $T = T(t)$ , e é a mesma em todos os pontos do corpo.
2. A temperatura do meio ambiente  $T_a$  é constante ao longo do tempo.
3. O fluxo de calor obedece a **Lei de Resfriamento de Newton** que atesta que a taxa de variação da temperatura  $T(t)$  com relação ao tempo  $t$  é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo  $T$  e a temperatura  $T_a$  do meio ambiente.

4. O corpo é homogêneo e isotrópico, ou seja, tem massa específica constante e tem mesmas propriedades físicas em todas as direções.

A partir dessas considerações pode-se deduzir o Modelo Matemático na forma de uma equação diferencial ordinária (EDO), que representa matematicamente o fenômeno.

A variação na temperatura  $\Delta T$  do corpo é proporcional ao produto da diferença entre as temperaturas do corpo e do meio, pela variação do tempo, então  $\Delta T = k(T - T_a) \cdot \Delta t$ , onde  $k$  é uma constante positiva que pode ser determinada experimentalmente, e que depende das propriedades físicas do corpo e do meio ambiente.

Dividindo essa expressão por  $\Delta t$  e tomando o limite quanto  $\Delta t \rightarrow 0$  (ou seja,  $t - t_a \rightarrow 0$ , onde  $t$  e  $t_a$  denotam os tempos os quais as respectivas temperaturas foram “tomadas”) tem-se:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ k(T - T_a) \right].$$

Como  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} \right) = \frac{dT}{dt}$  e  $k(T - T_a) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ k(T - T_a) \right]$ , considerando que  $T > T_a$ , a taxa de variação instantânea da temperatura é dada pela equação diferencial ordinária

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \quad , \quad k > 0. \quad (3.3)$$

A Figura 3.1 fornece uma “interpretação geométrica” parcial para essas considerações iniciais.

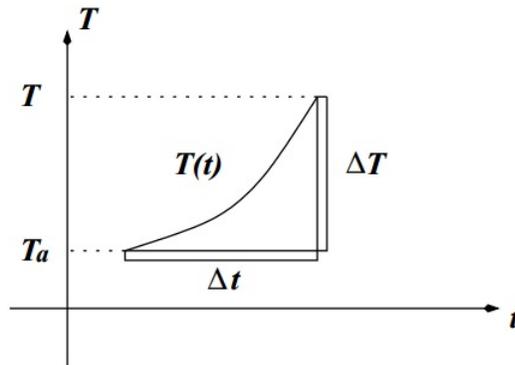


Figura 3.1: Representação para uma direção do fluxo de calor

Fisicamente o calor se propaga da região mais quente para a região mais fria e, então, temos que analisar a transferência da temperatura:

- (i) Se  $T > T_a$ , então a temperatura  $T(t)$  do corpo decresce com o tempo  $t$ , isto é, o corpo esfria;
- (ii) Se  $T < T_a$ , então a temperatura  $T(t)$  do corpo cresce com o tempo  $t$ , isto é, o corpo esquenta.

Consideremos agora os seguintes resultados do Cálculo Diferencial e Integral, que podem ser encontrados em qualquer livro texto de cálculo, por exemplo, veja [7] e [12]:

- (iii) Se  $\frac{dT}{dt} > 0$ , então  $T(t)$  é uma função crescente, do tempo  $t$ ;
- (iv) Se  $\frac{dT}{dt} < 0$ , então  $T(t)$  é uma função decrescente, do tempo  $t$ .

Usando (3.3) e empregando (i), (ii) e (iii), (iv), as seguintes situações acontecem:

- (a)  $k(T - T_a) = \frac{dT}{dt} > 0$  se e somente se  $T > T_a$ . Assim, por (iii),  $T$  é crescente, o que contradiz (i), pois fisicamente o corpo esfria;
- (b)  $k(T - T_a) = \frac{dT}{dt} < 0$ , se e somente se  $T < T_a$ . Assim, por (iv),  $T$  é decrescente, o que contradiz (ii) pois fisicamente o corpo aquece.

Uma solução para essa inconsistência é considerar o sinal de  $-$  no lado direito da igualdade da expressão (3.3), isto é, escrever o modelo de resfriamento, para  $k > 0$ , como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a).$$

Nestes casos:

- (i) Se  $T > T_a$ , então  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) < 0$  e a temperatura  $T(t)$  decresce com o tempo  $t$ ;
- (ii) Se  $T < T_a$ , então  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) > 0$  e a temperatura  $T(t)$  cresce com o tempo  $t$ ;
- (iii) Se  $T = T_a$ , então  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) = 0$  e  $T(t) = \text{constante}$ , significando que se a temperatura  $T(t)$  de um corpo for igual a temperatura ambiente então ela não mais varia.

Essas análises mostram a consistência entre o fenômeno físico e o seu modelo matemático, o que de fato deve ocorrer. Assim, o problema de valor inicial (PVI) é dado, considerando-se que  $T(t_0) \equiv T_0$  é a temperatura do corpo no tempo inicial, por:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) ; T = T(t) \\ T(t_0) \equiv T_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Agora, se  $T < T_a$ , em particular  $T_0 < T_a$ . Se  $T_0$  é a temperatura inicial tal que  $T_0 > T_a$ , então essa é a maior temperatura do sistema “corpo - meio ambiente” (na ausência de fontes e sorvedouros). Se  $T_0 < T_a$  essa é a menor temperatura do sistema. Essas conclusões são válidas para  $T_a =$  constante maior que 0.

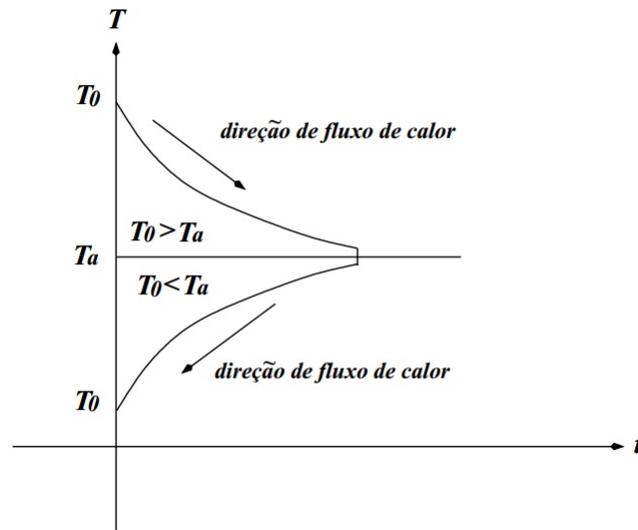


Figura 3.2: Representação para as direções do fluxo de calor.

Sendo  $k > 0$ , se  $T_0 - T_a > 0$  então  $-k(T - T_a) = dT/dt < 0$  e o corpo esfria. Do contrário, se  $T_0 - T_a < 0$ , então  $-k(T - T_a) = dT/dt > 0$  e o corpo esquenta. A Figura 3.2 ilustra essas situações, considerando-se as direções dos fluxos de calor para os casos em que  $T_0 > T_a$  e em que  $T_0 < T_a$ .

A EDO dada por  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$  acompanhada de uma condição inicial (temperatura inicial)  $T(t_0) \equiv T_0$ , terá solução, via método de separação de variáveis, a saber,

$$\frac{dT}{T - T_a} = -k dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dT}{T - T_a} = -k \int dt,$$

e, então,

$$\ln |T - T_a| = -kt + c_1.$$

**Observação 3.10.** Observemos que o procedimento acima efetuado para resolver a equação diferencial ordinária por separação de variáveis não é, a rigor, válido, já que  $dT$  e  $dt$  não são números reais, e sim termos integrantes de uma taxa. O método é puramente formal (uma abordagem prática) mas, felizmente, o procedimento pode ser efetuado corretamente através de adequadas especificações e manipulações algébricas como vimos na seção (2.2.1)

Antes de resolvermos tal equação diferencial, notemos que  $\ln|T - T_a| = \ln(T - T_a)$  se  $T - T_a > 0$ , isto é, se  $T > T_a$  e que  $\ln|T - T_a| = \ln[-(T - T_a)]$  se  $T - T_a < 0$ , isto é, se  $T < T_a$ . Assim, temos as seguintes situações a serem analisadas.

- (i) Se  $T_0 > T_a$ , então  $T > T_a$  e se tem que  $\ln(T - T_a) = -kt + c_1$ , ou seja,  $(T - T_a) = e^{-kt}c$ , para  $c = e^{c_1}$ . De  $T(t_0) \equiv T_0$ , tem-se  $(T_0 - T_a) = e^{-kt_0}c$ , isto é,  $c = e^{kt_0}(T_0 - T_a)$ . Assim:

$$\begin{aligned} T - T_a &= e^{kt_0} \cdot e^{-kt}(T_0 - T_a) \\ &= e^{-k(t-t_0)}(T_0 - T_a), \end{aligned}$$

donde

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-k(t-t_0)}.$$

- (ii) Se  $T_0 < T_a$  então  $T < T_a$  e  $\ln[-(T - T_a)] = -kt + c_1$ , donde  $\ln(T_a - T) = -kt + c_1$ , isto é  $(T_a - T) = e^{-kt}c$ , ou seja,  $c = e^{+kt_0}(T_a - T_0)$ . Assim,  $(T_a - T) = e^{kt_0}e^{-kt} \cdot (T_a - T_0)$  e,

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-k(t-t_0)}.$$

Pelas suposições anteriores, a solução do Problema de Valor Inicial (PVI) pode ser escrita, como:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-k(t-t_0)}, \quad t \geq t_0. \quad (3.5)$$

Algumas outras análises pertinentes a respeito do modelo matemático e de sua solução são:

- (a) Se  $T_0 = T_a$ , então

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-k(t-t_0)} = T_a$$

que é a temperatura de equilíbrio, ou seja, quando as temperaturas inicial  $T_0$  e a do meio ambiente  $T_a$  são iguais, não há qualquer variação.

(b) Para  $T_0 \neq T_a$ , tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-k(t-t_0)} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} T_a + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ (T_0 - T_a) \cdot e^{-k(t-t_0)} \right] = T_a\end{aligned}$$

que é a temperatura de equilíbrio, ou seja, para  $t$  suficientemente grande se tem que a temperatura do corpo é tal que  $T(t) = T_a$ .

Por fim, outra análise pertinente a respeito da solução é que a expressão  $T(t) - T_a = (T_0 - T_a)e^{-k(t-t_0)}$  mostra que variação de temperatura entre o corpo e o meio  $T(t) - T_a$  depende apenas da diferença entre as temperatura inicial do corpo e do meio  $T_0 - T_a$  por um termo de decaimento exponencial  $e^{-k(t-t_0)}$ . A “fenômenologia” da transmissão do calor impõe um comportamento assintótico da solução, isto é, um decaimento exponencial da solução com o tempo  $t$ , independentemente da temperatura inicial  $T_0$ , de modo que a solução sempre convirja para a temperatura do meio ambiente  $T_a$ .

Sendo  $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-k(t-t_0)}$  a solução do PVI, restamos calcular a constante  $k$ . Isso pode ser feito considerando-se um tempo  $t_1 > t_0$  e fazendo manipulações na expressão da solução. Seja  $T(t_1) = T_1$ , então podemos escrever, em particular, que:  $T_1 - T_a = (T_0 - T_a)e^{-k(t_1-t_0)}$ , isto é,

$$\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} = e^{-k(t_1-t_0)} \Rightarrow -k(t_1 - t_0) = \ln \left( \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \right) \Rightarrow -k = \frac{1}{(t_1 - t_0)} \ln \left( \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \right),$$

logo

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{\left\{ \frac{1}{(t_1 - t_0)} \left[ \ln \left( \frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a} \right) \right] \cdot (t-t_0) \right\}}. \quad (3.6)$$

Fisicamente, a constante  $k$  é um parâmetro positivo que depende das propriedades físicas do corpo e pode ser especificada como sendo a razão entre a condutividade térmica do corpo e o produto da sua massa específica pelo seu calor específico que por sua vez é designada por difusibilidade térmica do corpo. Isso é válido para corpos homogêneos e isotrópicos (corpos com massa específica constante e com as mesmas propriedades físicas em todas as direções) e não para sistemas complexos como aqueles obtidos pela complicada interação entre um corpo qualquer com o meio ambiente. Mas nesses casos, a relação (3.6) também pode ser obtida com determinada aproximação.

**Exemplo 3.11.** Consideremos, por exemplo, que  $T_0 = 4$ ,  $T_a = 3$ ,  $k = 0,1$ ,  $t = 10$  e  $t_0 = 0$ . Também,  $T_0 = 2$ ,  $T_a = 3$ ,  $k = 0,1$ ,  $t = 10$  e  $t_0 = 0$ . Usando a expressão  $T(t) = T_a + (T_0 - T_a).e^{-k(t-t_0)}$ , calculamos  $T(t)$  para as situações dadas.

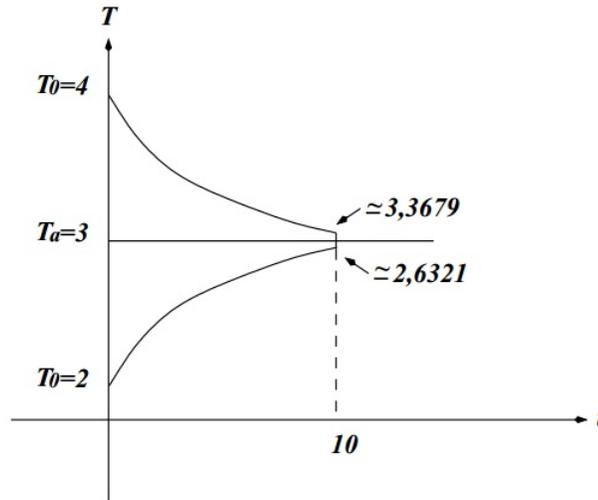


Figura 3.3: Resfriamento de corpos

Para os dados fornecidos temos:  $T(10) = 3 + (4 - 3).e^{-0.1.(10-0)}$ , onde a solução pode ser obtida a partir da expressão  $T(t) = T_a + (T_0 - T_a).e^{-k(t-t_0)}$  e  $T(10) = 3 + (2 - 3).e^{-0.1.(10-0)}$ , ou seja,  $T(10) = 3 + e^{-1}$  e  $T(10) = 3 - e^{-1}$ , respectivamente, de onde  $T(10) \approx 3,3679$  e  $T(10) \approx 2,6321$ , respectivamente. A Figura 3.3 fornece uma interpretação geométrica do ocorrido.

**Exemplo 3.12.** A experiência mostra que, sob certas condições, a taxa de variação da temperatura de um corpo obedece a Lei de resfriamento de Newton. Suponhamos que uma esfera de cobre é aquecida a uma temperatura de  $100^\circ\text{C}$ . No instante  $t_0 = 0$  a esfera é imersa em água que é mantida a uma temperatura de  $30^\circ\text{C}$ . Após 3 minutos a temperatura da esfera está reduzida a  $70^\circ\text{C}$ . Queremos determinar o instante em que a temperatura atinge  $31^\circ\text{C}$ .

Seja  $T(t)$  a temperatura da esfera de cobre, e seja  $T_a$  a temperatura (constante) do meio ambiente que nesse exemplo é a água. Se  $T(0) \equiv T_0$  denota a temperatura inicial da esfera, então o problema de valor inicial para este exemplo é escrito matematicamente como

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = -k(T - 30) ; T = T(t) \\ T(0) = 100. \end{cases} \quad (3.7)$$

Usando o método de separação de variáveis, temos

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30) \Rightarrow \frac{dT}{T - 30} = -k dt \Rightarrow \int \frac{dT}{T - 30} = -k \int dt \Rightarrow \ln |T - 30| = -kt + c_1.$$

Sendo  $T - 30 > 0$ , então usando certa propriedade das exponenciais, tem-se que  $T - 30 = e^{-kt}c$ , onde  $c = e^{c_1}$ . Portanto, a solução de (3.7) é dada por:

$$T(t) = 30 + ce^{-kt}. \quad (3.8)$$

Usando agora a condição inicial dada em (3.7), isto é, o fato que em  $t = 0$  tem-se  $T(0) = 100$ , obtemos por substituição em (3.8), que  $100 = 30 + ce^{-k \cdot 0}$ , isto é, que  $70 = c$ . Encontrada a constante  $c$ , a expressão  $T(t)$  em (3.8) é, então, escrita como

$$T(t) = 30 + 70e^{-kt}. \quad (3.9)$$

Para determinarmos a constante  $k > 0$  utilizamos o fato de que  $T(3) = 70$ . De (3.9) podemos escrever

$$70 = 30 + 70e^{-3k} \Rightarrow 40 = 70e^{-3k} \Rightarrow \frac{40}{70} = e^{-3k} \Rightarrow \ln\left(\frac{40}{70}\right) = -3k \Rightarrow k \approx 0,186539.$$

Portanto, a temperatura da esfera de cobre, em função do tempo, é dada pela expressão:

$$T(t) = 30 + 70e^{-0,186539t}. \quad (3.10)$$

Quando  $T(t) = 31$ , a expressão (3.10) fornece o tempo necessário para atingir tal temperatura, pois esse instante é calculado diretamente como

$$31 = 30 + 70e^{-0,186539t} \Rightarrow 1 = 70e^{-0,186539t} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{70}\right) = (-0,186539t),$$

ou seja,  $t = \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{70}\right)}{(-0,186539)}\right) \approx 22,78$ . Logo, o tempo necessário para que a esfera de cobre atinga  $31^\circ\text{C}$  é de aproximadamente 22,78 minutos.

Supondo atendidas as hipóteses necessárias ao desenvolvimento do método de separação de variáveis, ele pode ser empregado para resolver equações diferenciais quando as equações podem ser escritas na forma:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (3.11)$$

Seja  $h(y) = \int g(y)dy$ , então pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se  $\frac{dh}{dy} = g(y)$ . Substituindo  $g(y)$  por  $\frac{dh}{dy}$  na equação (3.11), obtemos a expressão

$$\frac{dh}{dy} \frac{dy}{dx} = f(x). \quad (3.12)$$

Sendo  $y \equiv y(x)$  e  $h \equiv h(y(x))$  e, lembrando que pela regra da cadeia, temos  $\frac{d}{dx}(h(y(x))) = \frac{dh}{dy} \frac{dy}{dx}$ , então a expressão (3.12) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dx}(h(y(x))) = f(x). \quad (3.13)$$

A equação (3.13) é do tipo  $\frac{dY}{dx} = f(x)$  onde  $Y(x) = h(y(x))$ , que pode ser resolvida implicitamente através de integração, ou seja, integrando-se (3.13) em ambos lados da igualdade obtemos a solução geral de (3.11) dada implicitamente por:

$$h(y(x)) = \int f(x)dx + c.$$

O uso formal do método de separação de variáveis para resolver o problema de valor inicial (3.4), pode ser adequadamente justificado, pois sendo  $T \equiv T(t)$  e  $y \equiv y(x)$  nas expressões anteriores, onde agora  $x$  é substituído por  $t$ . Assim, supondo que  $T - T_a \neq 0$ , a EDO  $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ , pode ser escrita como:

$$\frac{1}{T - T_a} \frac{dT}{dt} = -k.$$

Daí  $\frac{d}{dT}(\ln(T - T_a)) = \frac{1}{T - T_a} \left( \frac{d}{dT}(T - T_a) \right) = \frac{1}{T - T_a}$ . Assim,

$$\frac{d}{dT}(\ln(T - T_a)) \frac{dT}{dt} = -k.$$

Comparando a Regra da cadeia  $\frac{dh}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(h(y(x)))$  com  $\frac{d}{dT}(\ln(T - T_a)) \frac{dT}{dt}$ , temos  $\frac{d}{dt}(\ln(T - T_a)) = -k$ , cuja expressão pode ser resolvida por integração direta, pois

$$\int \frac{d}{dt}(\ln(T - T_a)) dt = -k \int dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, pelas propriedades de integração e considerando-se os casos em que  $T - T_a > 0$  ou  $T - T_a < 0$ , encontramos

$$\ln |T - T_a| = -kt + c_1.$$

Este resultado foi empregando o método de separação de variáveis de modo puramente formal. Então, para efeitos práticos, quando possível e as hipóteses estiverem satisfeitas, a *abordagem prática* pode ser empregada sem maiores problemas.

### 3.4.3 Modelo de Resfriamento em EDOs: Algumas questões

Temos que  $T_a$  é constante e isotrópica (homogênea) e o fluxo de calor obedece a Lei de Resfriamento de Newton. Porém, existem “problemas” com as hipóteses consideradas. Uma primeira objeção poderia ser o fato plausível de que a temperatura do meio ambiente varia com o tempo ao receber ou ceder calor ao corpo. Mostra-se, nesse caso, e supondo que as demais hipóteses são válidas, que o modelo matemático é dado por:

$$\frac{dT}{dt} = -k(1+A)T(t) + k(AT_0 + T_{a,0}),$$

onde  $A = \frac{mc}{m_a c_a}$ , com  $m$  e  $c$ , respectivamente, sendo a massa e o calor específico do corpo, e  $m_a$  e  $c_a$  são, respectivamente, a massa e o calor específico do meio ambiente. Além disso,  $T(t)$  e  $T_a$  são, respectivamente, as temperaturas do corpo e do meio ambiente e  $T_0$  e  $T_{a,0}$  denotam, respectivamente, as temperaturas iniciais do corpo e do meio ambiente. Mostra-se que a solução desta EDO é dada por:

$$T(t) = \left( \frac{T_0 + T_{a,0}}{1+A} \right) e^{-k(1+A)t} + \left( \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A} \right).$$

Agora, também podemos ter situações onde são válidas as seguintes, e mais realísticas, hipóteses:

1. A temperatura  $T(t)$  pode não ser a mesma em todo o corpo (região);
2. A temperatura  $T_a$  do meio ambiente pode ser uma função do tempo, isto é,  $T_a \equiv T_a(t)$ ;
3. O fluxo de calor obedece, não a *Lei de Newton*, mas sim a **Lei de Fourier**, que atesta que “*A quantidade de calor por unidade de tempo transferido de um corpo para outro é proporcional à diferença de temperatura entre os corpos e a área dos mesmos, e é inversamente proporcional a distância que os separa*”.

Nessas condições, a equação diferencial que modela o fenômeno do fluxo (difusão) de calor em um corpo unidimensional é uma equação diferencial parcial (EDP) dada por  $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , onde  $T \equiv T(t)$  e  $k > 0$  é a difusibilidade térmica, que depende das propriedades físicas do corpo.

---

---

## CONCLUSÃO

---

Esperamos que este trabalho possa ser usado como notas de aulas em um curso de introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. Também, acreditamos que os modelos aqui discutidos contribuem para que alunos do ensino médio se interessem pelo Cálculo Diferencial e Integral. Neste sentido, utilizamos o conceito de taxas de variação, o qual é um conceito relativamente simples e fácil de ser aplicado. Com certeza, alunos dos anos finais da educação básica possuem condições de entender o conceito de EDO e compreender alguns modelos envolvendo este tipo de equações.

---

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] R. C. Bassanezi e W. C. Ferreira Jr. *Equações Diferenciais com aplicações*. Editora Harbra LTDA, São Paulo, 1988.
- [2] W. E. Boyce e R. C. Diprima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 7ª edição, Rio de Janeiro, 2002.
- [3] M. Braun. *Equações Diferenciais e suas aplicações*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 1979.
- [4] E. Coddington e N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, 1984.
- [5] C. I. Doering e A. O. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 4ª Edição, Rio de Janeiro, IMPA, 2010.
- [6] D. G. de Figueiredo e A. F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1997.
- [7] H. L. Guidorizi. *Um Curso de Cálculo*. Volume 1, LTC, Rio de Janeiro, 2002.
- [8] E. Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. Estados Unidos, 1978.
- [9] E. L. Lima. *Análise no Espaço  $R^n$* . Rio de Janeiro, SBM, 2004.
- [10] E. L. Lima. *Espaços Métricos. Projeto Euclides*. SBM, 1977.
- [11] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro, IMPA, 1979.
- [12] J. Stewart. *Cálculo*. Volume 1, Cengage Learning, São Paulo (2009).
- [13] D. G. Zill. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2003.