



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE**  
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –**  
**PROFMAT**

**MARCOS ALVES DA SILVA**

**O TEOREMA DE MORLEY**

**FORTALEZA – CEARÁ**  
**2015**

**MARCOS ALVES DA SILVA**

**O TEOREMA DE MORLEY**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Marques Pereira

**FORTALEZA – CEARÁ  
2015**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Silva, Marcos Alves da.

O Teorema de Morley [recurso eletrônico] / Marcos Alves da Silva. - 2015.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 51 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.

Área de concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. João Marques Pereira.

1. Teorema de Morley. 2. Trissecção. I. Título.

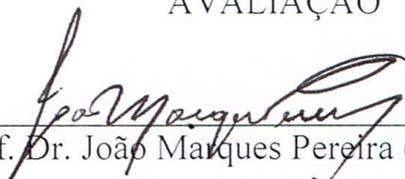
**MARCOS ALVES DA SILVA**

**O TEOREMA DE MORLEY**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 20 de julho de 2015.

AVALIAÇÃO



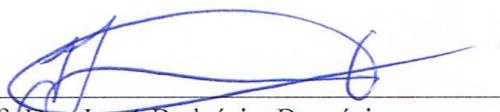
---

Prof. Dr. João Marques Pereira (Orientador)  
Universidade Estadual do Ceará – UECE



---

Prof. Dr. João Montenegro Miranda  
Universidade Estadual do Ceará – UECE



---

Prof. Dr. José Robério Rogério  
Universidade Federal do Ceará – UFC

Aos meus pais por todo o amor e incentivo.

Aos meus irmãos, que sempre tiveram orgulho  
de minhas conquistas.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pois minha vida, minhas conquistas e avanços são para a sua honra e glória.

Ao meu orientador, professor João Marques, por seus ensinamentos durante o curso e, por sua dedicação e contribuição no desenvolvimento deste TCC.

Aos demais professores do PROFMAT - UECE, pelas aulas ministradas, que propiciaram a ampliação dos meus conhecimentos.

Aos meus colegas de mestrado, pelo companheirismo, pela união, pela ajuda nos momentos difíceis e principalmente pela amizade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À SBM e a UECE, pela organização do curso.

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo divulgar o teorema de Morley e suas aplicações. O teorema afirma que os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes dos ângulos interno de um triângulo qualquer são vértices de um triângulo equilátero. Trissetrizes são semirretas que dividem um ângulo em três partes iguais. Em um triângulo duas trissetrizes são adjacentes quando partem de vértices opostos pertencente a um mesmo lado do triângulo e formam o menor ângulo possível com este lado. Inicialmente faremos considerações sobre a origem da geometria grega e o seu legado para a Matemática de ontem e de hoje. Destacaremos de forma pontual alguns conceitos geométricos elaborados pelos gregos. Estes conceitos foram organizados e publicado na obra, Os Elementos de Euclides. Abordaremos um dos três problemas clássicos da geometria grega: a trisseção de um ângulo. Apresentaremos uma solução para este problema usando a espiral de Arquimedes. Este problema motivou, ainda que tardiamente, a formulação do teorema de Morley. Faremos um resumo da biografia de Frank Morley, e em seguida apresentaremos algumas demonstrações de seu teorema. As demonstrações apresentadas são elementares e podem ser assimiladas por alunos do ensino médio. Ao final faremos outras considerações sobre o teorema, com a finalidade de mostrar a sua abrangência, e apresentaremos algumas questões olímpicas relacionadas com o teorema de Morley

Palavras chave: Teorema de Morley. Trisseção.

## **ABSTRACT**

The present work aims to unveil the Morley's theorem and its applications. The theorem states that in any triangle the three points of intersection of the adjacent angle trisections form an equilateral triangle. Trisections are semi straight lines that divide an arbitrary angle into three equal parts. In a triangle two trisections are adjacent when they start from opposite vertices belonging to a same side of the triangle and form the smallest possible angle with that side. Initially we will present considerations on the origin of Greek geometry and its legacy to past and present Mathematics. In a timely manner we will approach some geometric concepts developed by the Greeks. Such concepts were organized and published in the work Euclid's Elements. We will approach one of the three classical problems of Greek geometry: the trisection of an angle. We will introduce a solution to this problem using the Archimedean spiral. Although belatedly, this problem led to the formulation of Morley's theorem. We will summarize the biography of Frank Morley followed by some demonstrations of his theorem. The demonstrations are elementary and may be assimilated by middle school students. Finally we will introduce other considerations on the theorem in order to show its scope and introduce some Olympic-related issues related to Morley's theorem.

Keywords: Morley's theorem. Trisection.

## LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 1 – Templo de Edfu, no Egito.....	12
Figura 2 – Ângulo $C\hat{A}B$ .....	16
Figura 3 – Ângulos suplementares, $C\hat{O}A$ e $A\hat{O}B$ .....	17
Figura 4 – Triângulo $ABC$ .....	17
Figura 5 – Triângulos congruentes.....	18
Figura 6 – Demonstração do 2º caso de congruência.....	18
Figura 7 – Demonstração do 3º caso de congruência.....	19
Figura 8 – Triângulos semelhantes.....	20
Figura 9 – Círculo de raio, $\overline{AB} = r$ .....	20
Figura 10 – Ângulos inscritos em um círculo.....	21
Figura 11 – Semicírculos de diâmetro $\overline{AB}$ .....	22
Figura 12 – A espiral de Arquimedes.....	24
Figura 13 – Trissecção do ângulo $P\hat{O}Q$ .....	25
Figura 14 – Frank Morley.....	26
Figura 15 – O triângulo de Morley.....	27
Figura 16 – 1º etapa da demonstração de MT. Naraniengar.....	29
Figura 17 – 2º etapa da demonstração de MT. Naraniengar.....	29
Figura 18 – 3º etapa da demonstração de MT. Naraniengar.....	30
Figura 19 – 4º etapa da demonstração de MT. Naraniengar.....	30
Figura 20 – 5º etapa da demonstração de MT. Naraniengar.....	31
Figura 21 – 6º etapa da demonstração de MT. Naraniengar.....	32
Figura 22 – 1º etapa da demonstração de Taylor e Marr's.....	33
Figura 23 – 2º etapa da demonstração de Taylor e Marr's.....	33

Figura 24 – 3º etapa da demonstração de Taylor e Marr’s.....	34
Figura 25 – 4º etapa a da demonstração de Taylor e Marr’s.....	34
Figura 26 – 4º etapa b da demonstração de Taylor e Marr’s.....	35
Figura 27 – 5º etapa da demonstração de Taylor e Marr’s.....	36
Figura 28 – Demonstração de Constantin Cocea.....	36
Figura 29 – Os triângulos de Morley: interno e externo.....	39
Figura 30 – Os triângulos de Morley.....	40
Figura 31 – Trissecção dos ângulos do paralelogramo ABCD.....	41
Figura 32 – Trissecção dos ângulos do retângulo ABCD.....	42
Figura 33 – Trissecção dos ângulos do losango ABCD.....	42
Figura 34 – Trissecção dos ângulos do quadrado ABCD.....	43
Figura 35 – Figura da OBM – 2012.....	44
Figura 36 – Figura do gabarito da OBM – 2012.....	45
Figura 37 – Figura 1 da OPM – 2012.....	46
Figura 38 – Figura 2 da OPM – 2012.....	46
Figura 39 – Figura 3 da OPM – 2012.....	46
Figura 40 – Figura 4 da OPM – 2012.....	47
Figura 41 – Figura 5 da OPM – 2012.....	47
Figura 42 – Figura do gabarito da OPM – 2012.....	48
Quadro 1 – Autores e suas demonstrações.....	28

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2 A GEOMETRIA NA GRÉCIA ANTIGA .....</b>	<b>12</b>
<b>3 ALGUNS CONCEITOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA.....</b>	<b>16</b>
3.1 ALGUNS ELEMENTOS DA GEOMETRIA PLANA .....	16
3.2 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS .....	18
3.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS .....	20
3.4 O CÍRCULO E ARCOS .....	20
3.5 AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS .....	21
<b>4 A TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO .....</b>	<b>24</b>
4.1 A ESPIRAL DE ARQUIMEDES .....	24
<b>5 O TEOREMA DE MORLEY.....</b>	<b>26</b>
5.1 BIOGRAFIA DE FRANK MORLEY .....	26
5.2 ENUNCIADO DO TEOREMA DE MORLEY.....	27
5.3 DEMONSTRAÇÕES.....	28
5.3.1 Demonstração de M.T. Naraniengar .....	29
5.3.2 Demonstração de Taylor e Marr's.....	33
5.3.3 Demonstração de Constantin Cocea .....	36
<b>6 OUTRAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O TEOREMA DE MORLEY.....</b>	<b>39</b>
6.1 OS TRIÂNGULOS DE MORLEY .....	39
6.2 PARALELOGRAMOS.....	40
<b>7 . QUESTÕES OLÍMPICAS SOBRE O TEOREMA DE MORLEY.....</b>	<b>44</b>
7.1 QUESTÃO DA OLÍMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA.....	44
7.2 QUESTÃO DA OLÍMPIADA PAULISTA DE MATEMÁTICA .....	45
<b>8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>49</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>50</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A geometria é o ramo da matemática que estuda a forma, tamanho, posição relativa e propriedades de figuras, no plano e no espaço. A geometria surgiu independentemente em várias civilizações antigas de forma prática para resolver problemas do cotidiano. Sua formalização teórica foi concretizada na Grécia Antiga. Após a teorização da geometria na Grécia, foram raras as descobertas neste campo nos séculos seguintes. Entretanto se algo de novo fosse descoberto, e divulgado, mesmo com as limitações da época, o interesse dos matemáticos era imediato. Hoje, apesar da facilidade de acesso a qualquer informação, se não houver uma divulgação ampla e imediata, as descobertas recentes acabam esquecidas. É nesta linha que direcionamos este trabalho. Objetivamos divulgar um surpreendente resultado da geometria plana: O teorema de Morley. Discorreremos sobre sua origem, seu desenvolvimento, algumas de suas demonstrações e sua abrangência sobre outras figuras planas

No início do trabalho apresentaremos um pouco da História da geometria Grega, ressaltando a publicação dos Elementos de Euclides e sua importância para a matemática antiga e atual, Na segunda parte enfocaremos algumas definições e teoremas da geometria euclidiana, as quais servirão de base para as demonstrações do teorema de Morley.

Na terceira parte do trabalho trataremos de um dos problemas clássicos da geometria grega, a trisseção de um ângulo. Problema que tornou-se clássico pela impossibilidade de resolvê-lo usando apenas a régua e o compasso. Neste mesmo capítulo, iremos descrever um dos modelos que foram utilizados para solucioná-lo. A quarta parte será dedicada ao tema central do trabalho, o teorema de Morley. Relataremos a biografia de Frank Morley e faremos um detalhamento deste teorema, com enunciado e demonstrações geométrica e trigonométrica. A quinta e sexta parte do trabalho está destinada a apresentação da aplicação do teorema de Morley em questões olímpicas. Também serão discutida a unicidade, dos vários triângulos de Morley e a validade do teorema nos paralelogramos.

Esperamos que este trabalho, escrito de maneira simples, mas sem desprezar o rigor matemático, possa de alguma forma ampliar os conhecimentos do leitor.

## 2 A GEOMETRIA NA GRÉCIA ANTIGA

Heródoto foi um geógrafo e historiador grego, que viveu entre 485 a. C. e 425 a. C. Foi o primeiro a considerar o passado como uma fonte de pesquisa para estudos filosóficos do comportamento humano futuro. Segundo citações de Heródoto, as primeiras manifestações relacionadas ao surgimento da geometria ocorreram na Mesopotâmia e no Antigo Egito, com maior ênfase no Egito. Em sua obra, Heródoto enfatizou a necessidade da redistribuição de terras entre as pessoas que haviam sofrido prejuízos com as enchentes do rio Nilo. Outro fato que coloca o Antigo Egito como um dos locais do surgimento da geometria são as construções faraônicas bem elaboradas, como as pirâmides e os templos gigantescos construídos com uma certa precisão matemática.



**Figura 1:** Templo de Edfu.

A geometria desenvolvida na Mesopotâmia e no Antigo Egito tiveram grande influência na geometria grega, ocorrendo uma evolução da matemática concreta destas civilizações para uma matemática abstrata na Grécia, dando início a matemática teórica.

Um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que viveu nos séculos VII e VI a.C. Um de seus feitos foi calcular a altura de uma das pirâmides do Egito usando semelhança de triângulos. Ele relacionou as medidas de sua altura e de sua sombra com as medidas da altura e sombra da pirâmide. Acredita-se então que, por ele estar em contato com a civilização egípcia foi influenciado pela geometria do Antigo Egito.

Assim como Tales outros estudiosos da Grécia contribuíram para o desenvolvimento da geometria desta civilização. Temos Pitágoras, nascido em 570 a.C., que fundou uma escola de cunho filosófico e matemático. Ele e seus seguidores, chamados de pitagóricos, tiveram grande participação na evolução da matemática na Grécia Antiga. Um dos teoremas mais importantes da geometria plana, demonstrados pelos pitagóricos, o teorema de Pitágoras, estabelece que: em um triângulo retângulo o quadrado da medida do maior lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados.

Destacamos a publicação dos elementos de Euclides. Euclides foi um filósofo e matemático grego nascido no ano 330 a.C. Ele publicou uma obra composta por 13 livros, conhecida como Os Elementos de Euclides. Nesta obra, Euclides elaborou teoricamente, de maneira simples e organizada quase todo o conhecimento matemático de então. Esta teorização foi impulsionada pelo fato de que naquela época o abstrato e o universal era mais valorizado pelos filósofos, os quais possuíam grande influência nos rumos da matemática. Desta forma, o estudo da geometria passou então por mudanças radicais. Uma destas mudanças foi que passou-se a considerar figuras geométricas aceitáveis, apenas aquelas que poderiam ser construídas com régua e compasso. Isto em parte restringiu as construções geométricas, pois qualquer figura que não fosse possível construir com régua e compasso era considerada de segunda categoria. Alguns exemplos deste fato foram os problemas clássicos da Matemática grega: A duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo. Estes problemas foram resolvidos por matemáticos que não levaram em consideração esta restrição e utilizaram outros métodos, as vezes sofisticados. Posteriormente daremos uma atenção especial ao problema da trissecção do ângulo.

O problema da duplicação do cubo consistia em, dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro. As soluções para este problema exploravam uma vasta gama de métodos geométricos. Uma desta soluções foi apresentada por Hipócrates de Quios, que viveu em torno de 430 a.C., ele reduziu o problema da duplicação do cubo ao problema de encontrar dois meios proporcionais entre duas linhas dadas. Tal resolução consistia na construção das seguintes proporções:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2 \cdot a}$$

Onde “a” representa a medida da aresta de um cubo e “x” e “y” os meios proporcionais. Isto porque:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = a \cdot y$$

Multiplicando ambos membros por “x” teremos,

$$(1) \quad x^3 = a \cdot x \cdot y$$

Da proporção inicial, também podemos obter:

$$(2) \quad \frac{a}{x} = \frac{y}{2 \cdot a} \Rightarrow x \cdot y = 2 \cdot a^2$$

Substituindo o resultado de (2) em (1), concluiríamos que:

$$x^3 = a \cdot x \cdot y = a \cdot 2 \cdot a^2 = 2 \cdot a^3.$$

Provando que o meio proporcional “x” representaria a medida da aresta de cubo, cujo volume é o dobro do volume de um cubo de aresta “a”.

No contexto grego, determinar a quadratura, significava achar com o uso da régua e compasso, um quadrado cuja área fosse igual à área da figura dada. O problema de quadrar qualquer região poligonal estava descrito nos Elementos de Euclides, o que ocasionou o passo seguinte na Matemática, quadrar uma região curva. A escolha óbvia foi iniciar pelo círculo, daí o fato da quadratura do círculo tornasse um dos problemas clássicos desta época. As soluções vieram do uso de curvas e construções que não envolviam o uso da régua e compasso, sendo que a solução para quadrar qualquer região curva só foi possível com o uso das técnicas da Matemática recente.

Os resultados apresentados nos Elementos de Euclides foram todos construídos ou demonstrados com o uso da régua e compasso. Estes dois instrumentos tiveram grande importância no estudo da geometria daquela época. No livro, A História da Matemática, da autora Tatiana Roque são apresentados os conteúdos e organização dos livros que compõem os Elementos de Euclides. Isto evidencia a importância que esta obra tem na História da

matemática, principalmente na divulgação da geometria grega. Os Elementos de Euclides eram assim organizados:

- Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema “de Pitágoras”.
- Livro II: contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
- Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
- Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
- Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicações de áreas.
- Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
- Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.
- Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares.

A geometria da Grécia Antiga é caracterizada como sendo uma busca por resoluções de problemas reais. Isto era a parte essencial da atividade geométrica dos gregos. A apresentação dos fatos geométricos como um conjunto de teoremas, com enunciados e demonstrações, foi um dos maiores legados dos gregos para as civilizações do mundo moderno.

### 3 ALGUNS CONCEITOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Neste capítulo apresentaremos alguns tópicos da geometria euclidiana, que serão utilizados nos capítulos posteriores.

#### 3.1 ALGUNS ELEMENTOS DA GEOMETRIA PLANA

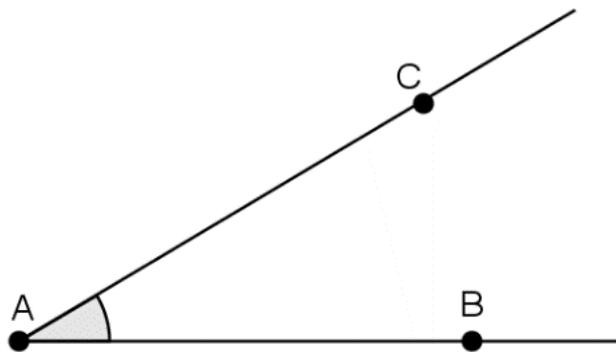
Como usual consideraremos o ponto, a reta e o plano, como noções primitivas, que são noções intuitivas decorrente de nossa experiência e observação as quais são adotadas sem definição.

**Definição 3.1.** Dados dois pontos distintos A e B em uma reta r, o segmento de reta com extremos A e B, é o conjunto formado pelos pontos A e B e por todos os pontos de r compreendidos entre A e B. Será denotado por  $\overline{AB}$ .

Dois segmentos,  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , serão congruentes, quando  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

**Definição 3.2.** Dado três pontos distintos A, B e C em uma reta r, com A entre B e C, o ponto A divide a reta em duas partes com origem em A. Estas partes são chamadas de semirretas: a parte que contém o ponto B é a semirreta  $\overrightarrow{AB}$  e a parte que contém o ponto C é a semirreta  $\overrightarrow{AC}$ .

**Definição 3.3.** Ângulo é a figura formada por duas semirretas que possuem a mesma origem.

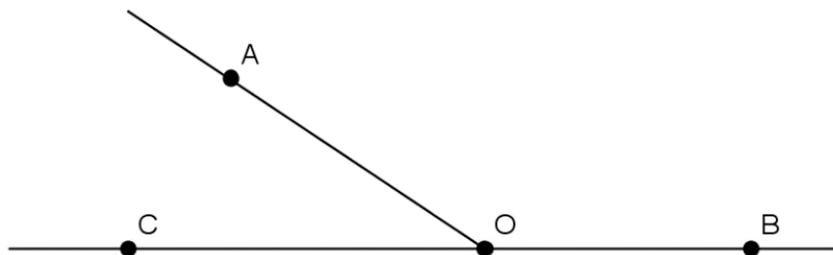


**Figura 2:** Ângulo  $\widehat{CAB}$ .

O ângulo da figura 2, tem vértice no ponto A e será representado por  $B\hat{A}C$  ou  $C\hat{A}B$ . As unidades de medidas mais utilizadas para medir um ângulo são o grau e o radiano. Um ângulo de  $360^\circ$  é equivalente a  $2\pi$  radianos.

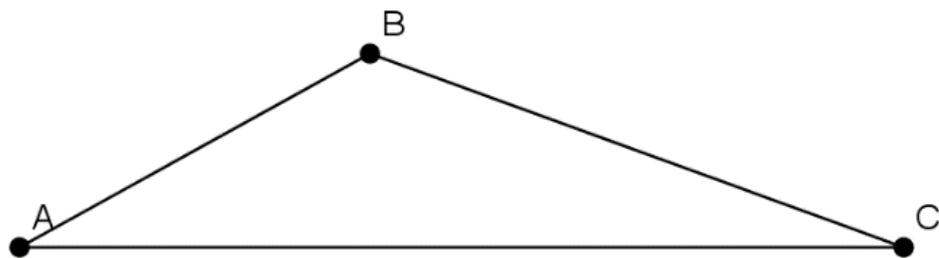
Diremos que dois ângulos  $\hat{A} = \hat{B}$  são congruentes se eles tiverem a mesma medida.

**Definição 3.4.** Dois ângulos são ditos suplementares quando a soma de suas medidas é igual a  $180^\circ$ .



**Figura 3:** Ângulos suplementares  $C\hat{O}A$  e  $A\hat{O}B$ .

**Definição 3.5.** Dados três pontos distintos e não colineares A, B e C, os segmentos de reta  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  formam um triângulo com vértices A, B e C. Os três segmentos são chamados de lados do triângulo.

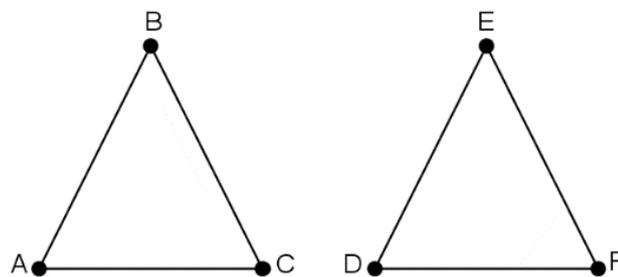


**Figura 4:** Triângulo ABC.

Na figura 4, o triângulo de vértices A, B e C será representado por  $\Delta ABC$ .

### 3.2 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

**Definição 3.6.** Dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro, isto é, quando existe uma correspondência entre os vértices de um e os vértices do outro, de modo que os ângulos internos de um vértice correspondente tenham a mesma medida e o mesmo ocorrendo com os lados opostos a vértices correspondentes. Se os triângulos ABC e DEF forem congruentes, usamos a notação,  $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ , Veja figura 5.

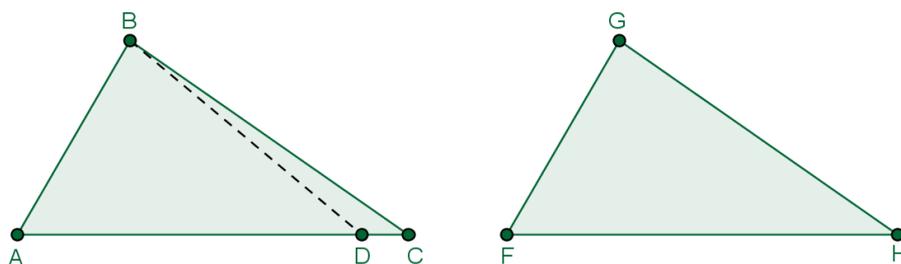


**Figura 5:** Triângulos congruentes

**Axioma 3.7.** Dados dois triângulos ABC e FGH, se  $\overline{AB} = \overline{FG}$ ,  $\overline{AC} = \overline{FH}$  e  $\hat{A} = \hat{F}$ , então,  $\Delta ABC \equiv \Delta FGH$ . Este é o primeiro caso de congruência de triângulo, conhecido como o caso LAL.

**Teorema 3.8.** Dados dois triângulos ABC e FGH, se  $\overline{AB} = \overline{FG}$ ,  $\hat{A} = \hat{F}$  e  $\hat{B} = \hat{G}$ , então,  $\Delta ABC \equiv \Delta FGH$ . Este é o segundo caso de congruência de triângulo, conhecido como o caso ALA.

**Prova:** Considere os triângulo ABC e FGH, onde  $\overline{AB} = \overline{FG}$ ,  $\hat{A} = \hat{F}$  e  $\hat{B} = \hat{G}$ . Marque o ponto D sobre o lado  $\overline{AC}$  de forma que  $\overline{AD} = \overline{FH}$ .

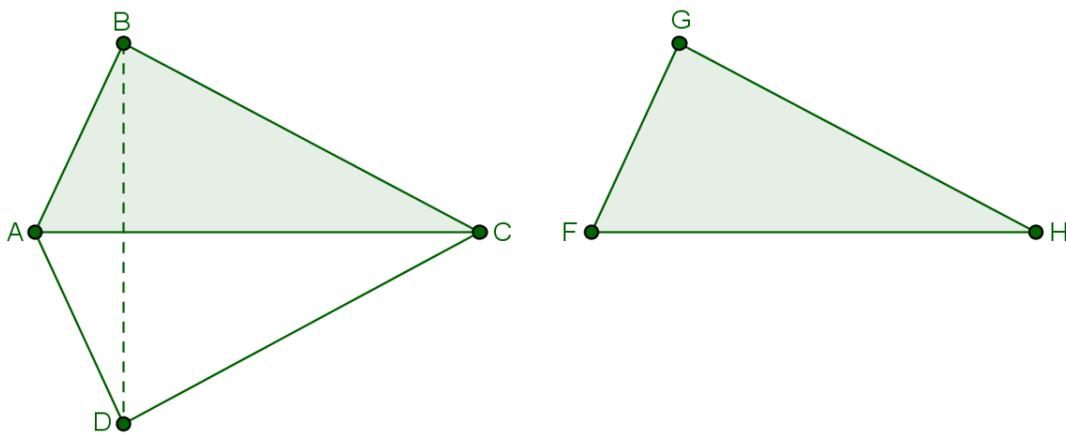


**Figura 6**

Desta forma teremos,  $\overline{AD} = \overline{FH}$ ,  $\overline{AB} = \overline{FG}$  e  $\hat{A} = \hat{F}$ , concluímos então pelo axioma 3.7 que  $\Delta ABD \equiv \Delta FGH$ , logo  $\hat{A}BD = \hat{G}$ . Mas, pela hipótese,  $\hat{G} = \hat{A}BC$ , portanto  $\hat{A}BD = \hat{A}BC$ , então os segmentos  $\overline{BD}$  e  $\overline{BC}$  são coincidentes, o que nos leva a afirmar que os pontos C e D também coincidem. Como  $\Delta ABD \equiv \Delta FGH$ , então  $\Delta ABC \equiv \Delta FGH$  finalizando a prova.

**Teorema 3.9.** Se dois triângulo têm os três lados correspondentes congruentes, então, eles são congruentes. Este é o terceiro caso de congruência de triângulos, conhecido como o caso LLL.

**Prova:** Considere os triângulo ABC e FGH, onde  $\overline{AB} = \overline{FG}$ ,  $\overline{BC} = \overline{GH}$  e  $\overline{AC} = \overline{FH}$ , marque o ponto D simétrico ao ponto B, em relação ao lado  $\overline{AC}$ , ligando-o aos pontos A e C, de modo que  $\hat{C}AD = \hat{F}$  e  $\overline{AD} = \overline{FG}$ .

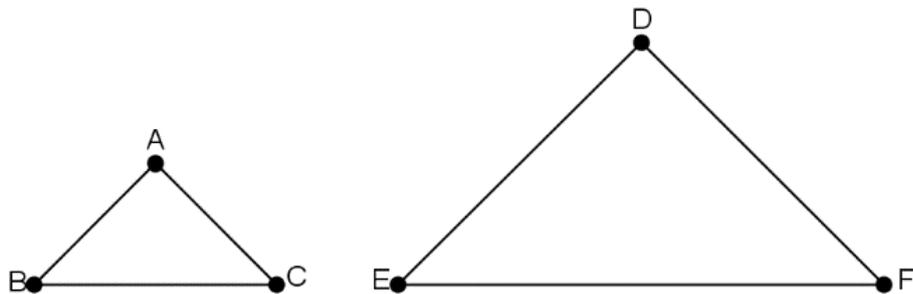


**Figura 7**

Teremos,  $\overline{AC} = \overline{FH}$ ,  $\overline{AD} = \overline{FG}$  e  $\hat{D}AC = \hat{F}$ , logo pelo axioma 3.7,  $\Delta ACD \equiv \Delta FGH$ . Temos também  $\overline{AD} = \overline{FG} = \overline{AB}$  e  $\overline{DC} = \overline{GH} = \overline{BC}$ , portanto os triângulos ABD e BCD são isósceles, tendo  $\hat{A}DB = \hat{A}BD$  e  $\hat{C}DB = \hat{C}BD$ , como consequência  $\hat{A}BC = \hat{A}DC$ . Obtemos então pelo axioma 3.7,  $\Delta ABC \equiv \Delta ACD$ , mas sendo  $\Delta ACD \equiv \Delta FGH$ , concluímos que  $\Delta ABC \equiv \Delta FGH$  finalizando a prova.

### 3.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

**Definição 3.10.** Diremos que dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e do outro triângulo de modo que os ângulos internos de vértices correspondentes tenham a mesma medida e a razão entre os lados correspondentes seja a mesma.



**Figura 8:** Triângulos semelhantes

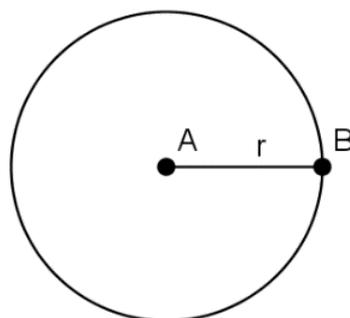
Na figura 8 temos triângulos semelhantes, desta forma:

$$\hat{A} = \hat{D}, \quad \hat{B} = \hat{E}, \quad \hat{C} = \hat{F} \text{ e}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

### 3.4 O CÍRCULO E ARCOS

**Definição 3.11.** Dado um número real  $r > 0$  e um ponto  $A$  no plano, o círculo de centro  $A$  e raio  $r$  é a figura geométrica formada por todos os pontos do plano que estão a uma distância  $r$  do ponto  $A$ .



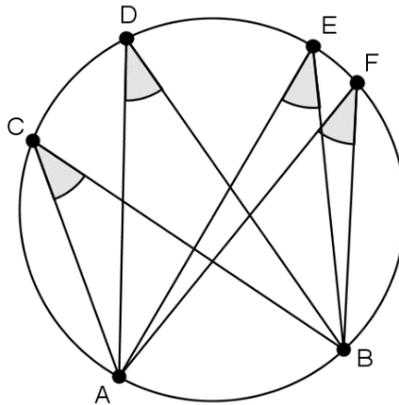
**Figura 9:** Círculo de raio,  $\overline{AB} = r$ .

**Definição 3.12.** Dados dois pontos distintos A e B em um círculo, o arco AB é o conjunto dos pontos no círculo entre A e B, juntamente com os pontos A e B.

Veja que os pontos A e B dividem o círculo em dois arcos, em geral considera-se o arco AB como o menor deles. Dado um arco AB e um ponto E no círculo distinto de A e B, o ângulo  $\widehat{AEB}$  é chamado de ângulo inscrito no círculo.

Sabe-se pelos Elementos de Euclides, que a medida de um ângulo inscrito num círculo é igual à metade da medida do arco por ele determinado. Temos então o seguinte fato (figura 10):

Todos os ângulos inscritos em um círculo, que determinam um mesmo arco, possuem a mesma medida.

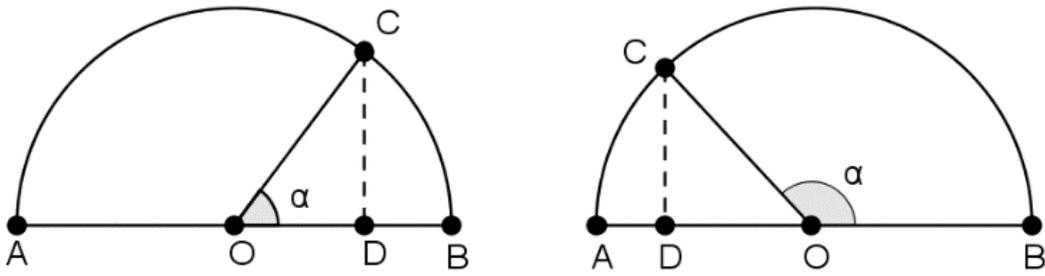


**Figura 10:** Ângulos inscritos em um círculo.

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{AEB} = \widehat{AFB} = \frac{\text{arco}(AB)}{2}$$

### 3.5 AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Seja um círculo de centro O e diâmetro  $\overline{AB}$ , consideremos um dos semicírculos determinados por  $\overline{AB}$  e seja C um ponto qualquer deste semicírculo. Se  $\alpha$  é o ângulo  $B\hat{O}C$  e D é a projeção ortogonal de C sobre  $\overline{AB}$ , temos as seguintes definições:



**Figura 11:** Semicírculos de diâmetro  $\overline{AB}$ .

**Definição 3.13.** O seno do ângulo  $\alpha$  será a razão  $\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}$ , representado por  $\text{sen}\alpha$ .

**Definição 3.14.** O cosseno do ângulo  $\alpha$  será a razão  $\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$ , para os casos em que  $\alpha$  é um ângulo agudo, se o ângulo for obtuso, o cosseno do ângulo  $\alpha$  será a mesma razão negativa, ambos representados por  $\text{cos}\alpha$ . Veja que o  $\text{cos}90^\circ = 0$ .

**Definição 3.15.** A tangente do ângulo  $\alpha$  ( $\text{tg}\alpha$ ) será a razão:  $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha}$ , não existindo seu valor para  $\alpha = 90^\circ$ .

Vale ressaltar que os valores do seno e do cosseno de um ângulo independem do semicírculo utilizado.

As razões trigonométricas são largamente utilizadas nas demonstrações de vários teoremas. A partir do teorema de Pitágoras temos o seguinte:

**Teorema 3.16.** A relação fundamental da trigonometria estabelece que para qualquer ângulo  $\alpha$ , temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$$

**Prova:** Para quaisquer valores de  $\alpha$ , podemos provar esta relação da seguinte forma: Considerando a figura 11, teremos:

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}\right)^2 = \frac{\overline{CD}^2 + \overline{OD}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OC}^2} = 1$$

**Lei dos cossenos 3.17.** Dado um triângulo ABC qualquer, sempre teremos a relação:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \hat{C}$$

Esta relação poderá ser aplicada para qualquer ângulo do triângulo, fazendo apenas os ajustes necessários na fórmula.

**Lei dos senos 3.18.** Em qualquer triângulo ABC, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen} \hat{A}} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen} \hat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen} \hat{C}} = 2R$$

Nesta relação, o valor de R representa a medida do raio do círculo circunscrito no triângulo ABC.

A seguir temos uma lista de outras relações entre as razões trigonométricas.

- $\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cosa}$
- $\text{cos}(90^\circ - \alpha) = \text{sena}$
- $\text{tg}(90^\circ - \alpha) = 1/\text{tga}$
- $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sena}$
- $\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cosa}$
- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sena} \cdot \text{cos}\beta + \text{sen}\beta \cdot \text{cosa}$
- $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sena} \cdot \text{cos}\beta - \text{sen}\beta \cdot \text{cosa}$
- $\text{cos}(\alpha + \beta) = \text{cosa} \cdot \text{cos}\beta - \text{sena} \cdot \text{sen}\beta$
- $\text{cos}(\alpha - \beta) = \text{cosa} \cdot \text{cos}\beta + \text{sena} \cdot \text{sen}\beta$
- $\frac{1}{2} \cdot (\text{cosa} + \text{cos}\beta) = \text{cos} \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \text{cos} \frac{\alpha-\beta}{2}$

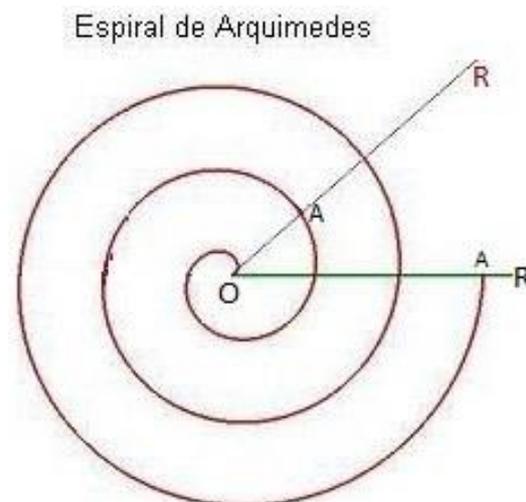
## 4 A TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO

Dividir um ângulo em três partes iguais foi um dos problemas clássicos mais importante da geometria grega. Os gregos não conseguiram com o uso de régua e compasso dividir um ângulo em três partes iguais.

Após inúmeras tentativas frustradas de resolver este problema usando régua e compasso, o problema foi resolvido usando outros métodos. Apresentaremos um método que utiliza a espiral de Arquimedes.

### 4.1 A ESPIRAL DE ARQUIMEDES

Arquimedes de Siracusa, nascido em 287 a.C. é por muitos considerado como o grande matemático e cientista da Antiguidade. Foi ele quem pela primeira vez discutiu a matemática existente em uma espiral. A definição da espiral proposta por Arquimedes consiste em uma semirreta em um plano, movendo-se uniformemente em torno da origem e retornando à sua posição de partida, ao mesmo tempo que um ponto partindo da origem, move-se uniformemente sobre esta semirreta. A trajetória desse ponto irá descrever no plano uma linha que foi chamada de espiral.



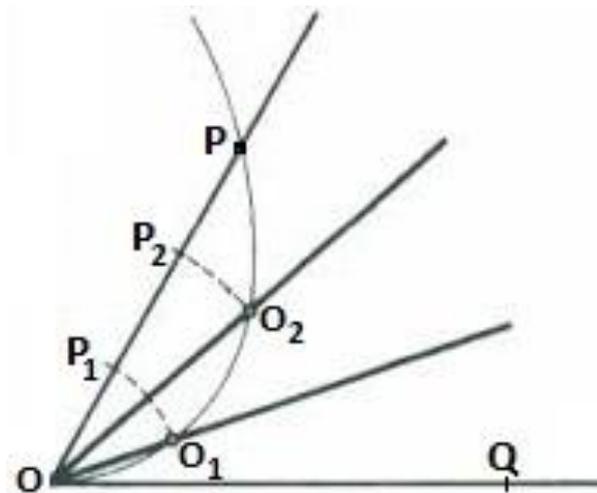
**Figura 12:** A espiral de Arquimedes.

Na figura 12 temos o segmento  $\overline{OR}$  girando uniformemente no sentido anti-horário em torno do ponto  $O$ , ao mesmo tempo que o ponto  $A$  partindo do ponto  $O$ , percorre

uniformemente o segmento  $\overline{OR}$  marcando sua trajetória sobre o plano, dando origem a uma parte da espiral de Arquimedes.

A partir desta definição foi possível associar uma razão entre arcos e segmentos, o que possibilitou a resolução do problema clássico da trisseção de um ângulo. Isto foi feito do seguinte modo. Suponhamos que queiramos trisseccionar o ângulo  $P\hat{O}Q$  (figura 13).

Inicialmente tracemos a espiral de Arquimedes, girando a semirreta  $\overline{OQ}$  uniformemente no sentido anti-horário em torno do ponto O, no mesmo instante que o ponto O desloca-se uniformemente sobre a semirreta. Considerando o ponto P sobre a espiral, dividimos o segmento  $\overline{OP}$  em três partes iguais,  $\overline{OP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P}$ . Tracemos dois círculos com centro em O, de raios  $\overline{OP_1}$  e  $\overline{OP_2}$ . Obteremos os pontos  $O_1$  e  $O_2$ , que são encontros destes círculos com a espiral. Desta forma, por proporção, os ângulos:  $Q\hat{O}O_1 = O_1\hat{O}O_2 = O_2\hat{O}P = \frac{P\hat{O}Q}{3}$ , determinam a trisseção do ângulo  $P\hat{O}Q$ .



**Figura 13:** Trisseção do ângulo  $P\hat{O}Q$ .

## 5 O TEOREMA DE MORLEY

### 5.1 BIOGRAFIA DE FRANK MORLEY



**Figura 14:** Frank Morley

Frank Morley foi um matemático nascido no dia 9 de setembro de 1860 em Woodbridge, Suffolk, Inglaterra. Faleceu no dia 17 de outubro de 1937 em Baltimore, Maryland, EUA.

Graduou-se na universidade de Cambridge em 1884 e seu desempenho acadêmico foi considerado relativamente fraco. Após a formatura aceitou o emprego de professor de matemática na Bath College até 1887. Neste mesmo ano estabeleceu-se nos EUA e foi selecionado para lecionar no Quaker College em Haverford, Pensilvânia. Casou-se em 1889 e teve três filhos.

Em 1900 foi nomeado professor de matemática na universidade John Hopkins, tornando-se influente nesta unidade e fortalecendo o curso de pós-graduação.

Frank Morley também foi considerado um excelente jogador de xadrez, jogando no mais alto nível, tanto que conseguiu em uma ocasião, vencer o campeão mundial de xadrez da época, o filósofo e também matemático Dr. Emanuel Lasker.

Nos EUA Morley deu grande contribuição para a Matemática. Foi editor por 30 anos do *American Journal Of Mathematics* e presidente do *American Mathematical Society* de 1919 a 1920 e em ambas as instituições realizou trabalhos editoriais.

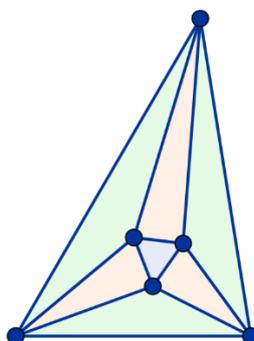
Algumas de suas realizações matemáticas foram:

- Publicação de artigos de teor principalmente geométrico, mas também sobre álgebra.
- Publicou em 1893 o texto, *Um tratado sobre a teoria das funções*, que foi revisado em 1899 como *Introdução à teoria das funções analíticas*.
- Em 1933 publicou a obra *Inverse geometry* (Geometria Inversa), escrita em conjunto com o seu filho, o matemático Frank V. Morley.
- Num período de 50 anos, desde a sua graduação, publicou mais de 60 artigos na *Times Educational*, a maioria de natureza geométrica.
- Sua publicação de maior destaque é o teorema que hoje leva o seu nome: o teorema de Morley, publicado no Japão somente em 1919.

## 5.2 ENUNCIADO DO TEOREMA DE MORLEY

O teorema Morley, apesar de amplamente divulgado no meio matemático, só foi publicado formalmente em 1919. O texto original apresentado por Morley não foi considerado, na sua totalidade, interessante. Apenas parte dele chamou a atenção dos matemáticos. A parte que fascinou os matemáticos da época foi resumida no seguinte teorema:

*“Para qualquer triângulo, os três pontos de interseção das trissetrizes adjacentes dos seus ângulos internos, são vértices de um triângulo equilátero.”*



**Figura 15**

Trissetrizes de um ângulo são semirretas que o dividem em três partes iguais. As trissetrizes adjacentes mencionadas no teorema correspondem aquelas que partem de vértices distintos, formando com o lado do triângulo em comum a estes vértices, o menor ângulo.

### 5.3 DEMONSTRAÇÕES

Desde a descoberta do teorema de Morley muitos matemáticos apresentaram demonstrações deste teorema. Alguns utilizaram a geometria plana, outros a trigonometria. Até a teoria de grupos foi usada em alguma destas demonstrações. No site: [cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml](http://cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml), encontramos diversas demonstrações do teorema de Morley.

No quadro 1 apresentamos os autores de algumas destas demonstrações e a parte da matemática que eles utilizaram para realizá-las.

AUTOR	DEMONSTRAÇÃO
ALAIN CONNES	ALGÉBRICA
CONSTANTIN COCEA	TRIGONOMÉTRICA
RJ WEBSTER	TRIGONOMÉTRICA
L. GIUGIUC	TRIGONOMÉTRICA
DIJKSTRA	TRIGONOMÉTRICA
M.T. NARANIENGAR	GEOMÉTRICA
TAYLOR E MARR'S	GEOMÉTRICA
HD GROSSMAN	GEOMÉTRICA
ROGER SMYTH	GEOMÉTRICA

**Quadro 1:** Autores e suas demonstrações.

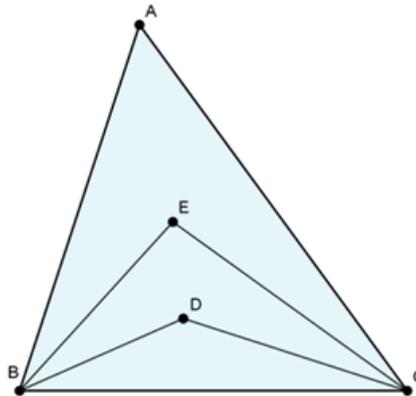
Algumas destas demonstrações usam basicamente geometria plana, o que nos leva a concluir que tal teorema poderia ter sido descoberto na época da Grécia antiga. O fato de os gregos procurarem sempre teoremas de construções possíveis com régua e compasso, possivelmente retardou a sua descoberta.

Apresentaremos três destas demonstrações.

### 5.3.1 Demonstração de M.T. Naraniengar

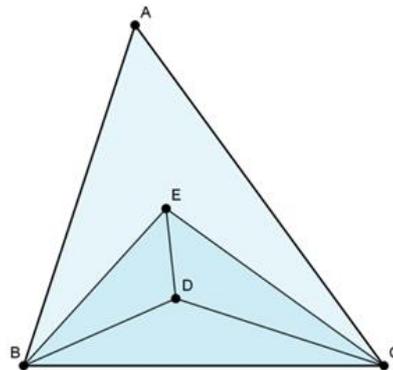
Mandyam Tondanur Naraniengar foi um matemático indiano. Ele demonstrou o teorema de Morley através de construções e usando apenas os conceitos da geometria plana. É uma prova considerada indireta, pois inverte o sentido das sucessões de passos desde a hipótese até a conclusão. Ele verificou que partindo da interseção entre as trissetrizes de dois ângulos de um triângulo qualquer e considerando alguns conceitos básicos da geometria plana é possível provar o teorema de Morley. Tal demonstração é feita seguindo as seguintes etapas:

**1ª Etapa:** Considere um triângulo qualquer com vértices A, B e C. Trace as trissetrizes dos vértices B e C. Sejam D como o ponto de interseção entre as trissetrizes adjacentes e E o ponto de interseção entre as outras duas.



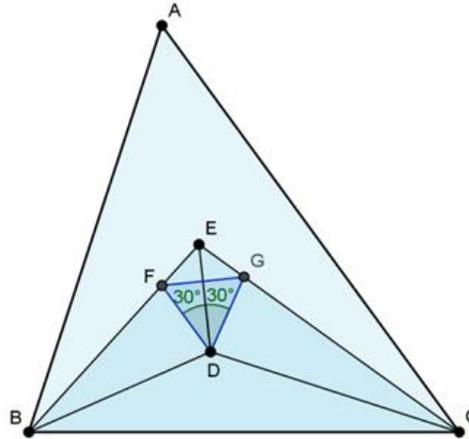
**Figura 16**

**2ª Etapa:** No triângulo BCE, podemos constatar que o ponto interno D representa o seu incentro (ponto de encontro das bissetrizes). As bissetrizes deste triângulo são BD, CD e ED.



**Figura 17**

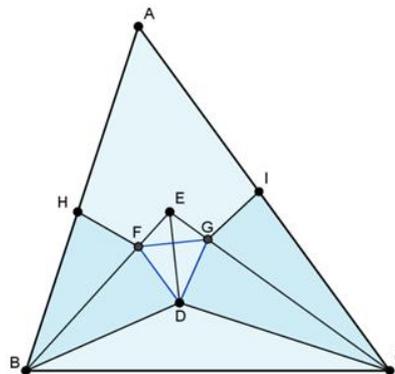
**3ª Etapa:** Sobre o segmento BE, marque o ponto F, tal que,  $\widehat{EDF} = 30^\circ$  e sobre o segmento CE, marque o ponto G, tal que,  $\widehat{EDG} = 30^\circ$ . Desta forma teremos os triângulos EDF e EDG congruentes pelo caso ALA, pois  $\widehat{DEF} = \widehat{DEG}$ ,  $\widehat{EDF} = \widehat{EDG}$  e ED segmento comum aos dois triângulos, resultando em  $\overline{FD} = \overline{DG}$ , como  $\widehat{FDG} = \widehat{EDF} + \widehat{EDG} = 60^\circ$ , então o triângulo FDG é equilátero.



**Figura 18**

Para concluir a demonstração deve-se provar que as semirretas AF e AG são as trissetrizes do vértice A.

**4ª Etapa:** Construa os pontos H e I sobre os lados AB e AC respectivamente, de modo que  $\overline{BH} = \overline{BD}$  e  $\overline{CI} = \overline{CD}$ . Os triângulos DBF e HBF são congruentes pelo caso LAL, pois  $\overline{BH} = \overline{BD}$ ,  $\widehat{HBF} = \widehat{FBD}$  e BF segmento comum aos dois triângulos, obtemos então  $\overline{HF} = \overline{FD}$ . Analogamente os triângulos DCG e ICG também são congruentes e obtemos  $\overline{DG} = \overline{GI}$ . Pelo fato do triângulo FDG ser equilátero, temos a igualdade  $\overline{HF} = \overline{FG} = \overline{GI}$ .



**Figura 19**

**5ª Etapa:** Construa o ponto J, de forma que ele seja a interseção das bissetrizes dos ângulos  $H\hat{F}G$  e  $F\hat{G}I$ , tal construção é possível, pois  $H\hat{F}G$  e  $F\hat{G}I$  não são ângulos rasos e estas bissetrizes encontram-se no semiplano determinado pela reta FG, que contém o ponto A.

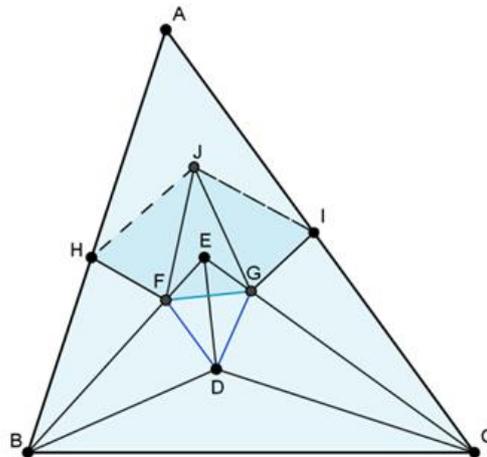
Podemos mostrar este fato da seguinte forma:

- I.  $H\hat{F}E = 180^\circ - H\hat{F}B = 180^\circ - D\hat{F}B = D\hat{F}E = 60^\circ + E\hat{F}G.$
- II.  $G\hat{E}F = C\hat{E}B = 180^\circ - E\hat{B}C - B\hat{C}E = 180^\circ - \frac{2}{3} \cdot A\hat{B}C - \frac{2}{3} \cdot B\hat{C}A =$   
 $180^\circ - \frac{2}{3} \cdot (A\hat{B}C + B\hat{C}A) = 180^\circ - \frac{2}{3} \cdot (180^\circ - B\hat{A}C) = 60^\circ + \frac{2}{3} \cdot B\hat{A}C.$

Substituindo (I) e (II) na expressão abaixo teremos,

$$\begin{aligned}
 H\hat{F}G &= H\hat{F}E + E\hat{F}G \\
 &= (60^\circ + E\hat{F}G) + E\hat{F}G \\
 &= 60^\circ + (E\hat{F}G + E\hat{F}G) \\
 &= 60^\circ + (E\hat{F}G + E\hat{G}F) \\
 &= 60^\circ + (180^\circ - G\hat{E}F) \\
 &= 60^\circ + \left[ 180^\circ - \left( 60^\circ + \frac{2}{3} \cdot B\hat{A}C \right) \right] \\
 &= 60^\circ + \left( 120^\circ - \frac{2}{3} \cdot B\hat{A}C \right) \\
 &= 180^\circ - \frac{2}{3} \cdot B\hat{A}C < 180^\circ.
 \end{aligned}$$

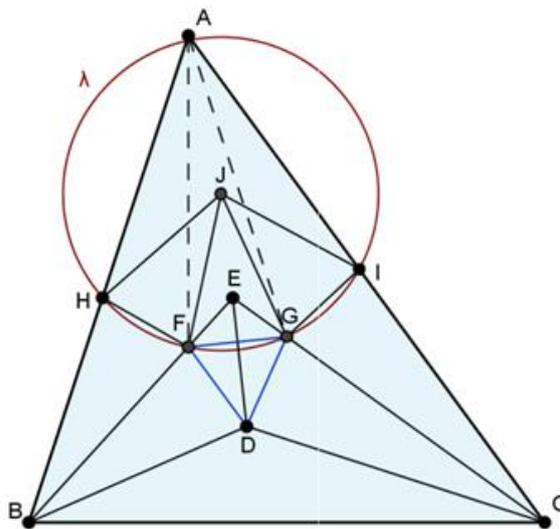
Da mesma forma, podemos mostrar que  $F\hat{G}I = 180^\circ - \frac{2}{3} \cdot B\hat{A}C < 180^\circ.$



**Figura 20**

Os triângulos HFJ e GFJ são congruentes pelo caso LAL, pois  $\overline{HF} = \overline{FG}$ ,  $H\hat{F}J = J\hat{F}G$  e FJ segmento comum aos dois, seguem que  $\overline{HJ} = \overline{GJ}$ . Pelo mesmo caso, LAL, os triângulos GFJ e GIJ são congruentes e obtemos  $\overline{FJ} = \overline{IJ}$ . Como  $J\hat{F}G = \frac{1}{2} \cdot H\hat{F}G = \frac{1}{2} \cdot F\hat{G}I = J\hat{G}F$ , segue que o triângulo FJG é isóscele, com  $\overline{FJ} = \overline{GJ}$ . Temos então  $\overline{HJ} = \overline{FJ} = \overline{GJ} = \overline{IJ}$ , logo o ponto J é equidistante dos pontos H, G, F e I.

**6ª Etapa:** Construa a circunferência  $\lambda$  de centro J, passando pelos pontos H, F, G e I. Tal construção é possível pois,  $\overline{HJ} = \overline{FJ} = \overline{GJ} = \overline{IJ}$ .



**Figura 21**

Sabemos que os triângulos HFJ, GFJ e GIJ são congruentes entre si, temos então  $H\hat{J}F = F\hat{J}G = G\hat{J}I$ . Daí terá:

$$\begin{aligned} F\hat{J}G &= 180^\circ - (J\hat{G}F + J\hat{F}G) = 180^\circ - (H\hat{F}J + J\hat{F}G) = 180^\circ - H\hat{F}G \\ &= 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{2}{3} \cdot B\hat{A}C\right) = \frac{2}{3} \cdot B\hat{A}C = \frac{2}{3} \cdot H\hat{A}I. \end{aligned}$$

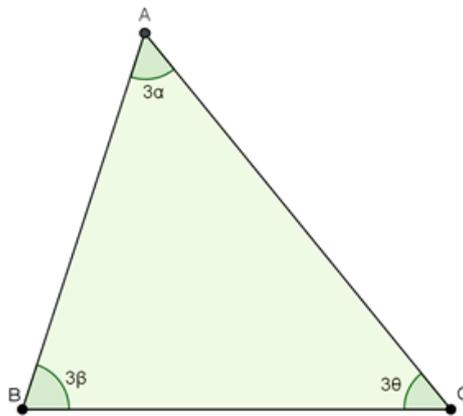
$$H\hat{J}I = H\hat{J}F + F\hat{J}G + G\hat{J}I = 3 \cdot F\hat{J}G = 2 \cdot H\hat{A}I \Rightarrow H\hat{A}I = \frac{1}{2} \cdot H\hat{J}I = \frac{\text{arco}(HI)}{2}.$$

Como, podemos concluir que a circunferência  $\lambda$  passa também pelo ponto A, e sendo as cordas  $HF = FG = GI$ , temos os seus respectivos arcos também congruentes, obtendo  $H\hat{A}F = F\hat{A}G = G\hat{A}I$ , desta forma as semirretas AF e AG são de fato as trissetrizes do vértice A, provando, portanto o teorema de Morley.

### 5.3.2 Demonstração de Taylor e Marr's

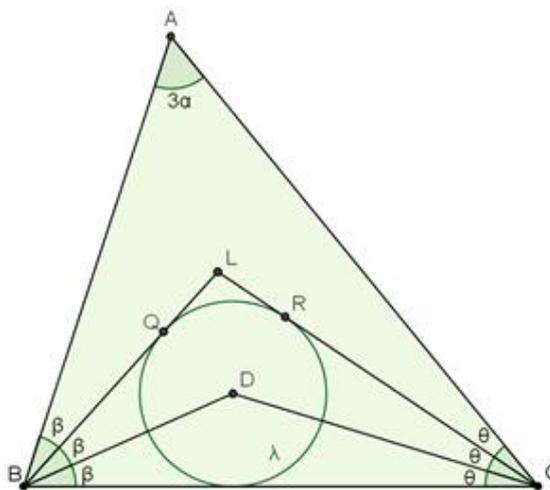
Nesta demonstração são usadas apenas fatos da geometria plana. Em todas as etapas são utilizadas, apenas conceitos acessíveis a alunos do ensino médio.

**1ª Etapa:** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer. Considere  $\hat{A} = 3\alpha$ ,  $\hat{B} = 3\beta$  e  $\hat{C} = 3\theta$ . Temos  $\alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{3}$ .



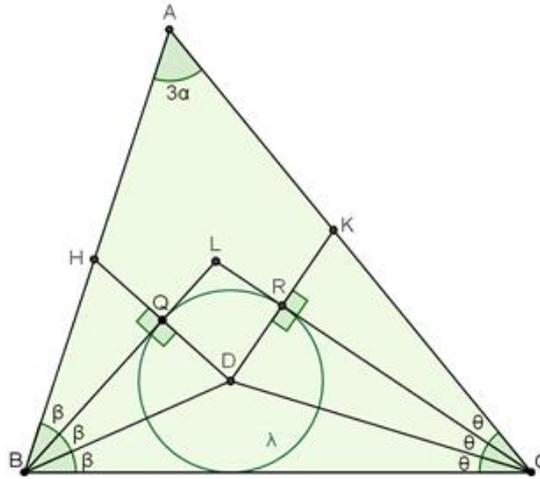
**Figura 22**

**2ª Etapa:** Trace os pares de trissetrizes dos vértices B e C. Sejam D e L os pontos de interseções entre estas trissetrizes. No triângulo LBC, o ponto D é seu incentro. Construa uma circunferência inscrita  $\lambda$ , tangenciando os lados  $\overline{BL}$  e  $\overline{CL}$  nos pontos Q e R.



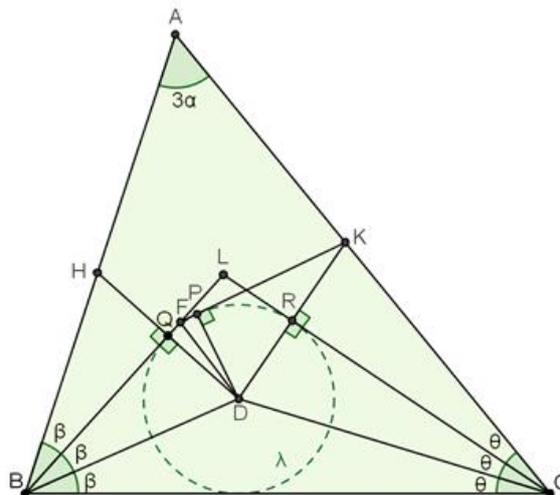
**Figura 23**

**3ª Etapa:** Sejam H e K os simétricos do ponto D em relação aos segmentos BL e CL respectivamente.



**Figura 24**

**4ª Etapa:** Marque o ponto F sobre  $\overline{BL}$  de modo que o segmento FK tangencie a circunferência  $\lambda$  no ponto P, dando origem aos triângulos FDK e DKP, onde  $\triangle DKP$  é retângulo em  $D\hat{P}K$ .



**Figura 25**

Temos  $\overline{DK} = 2 \cdot \overline{DP}$  e utilizando as relações trigonométricas no  $\triangle DKP$ , obteremos:

$$\operatorname{sen}(P\hat{K}D) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DK}} \Rightarrow \operatorname{sen}(P\hat{K}D) = \frac{\overline{DP}}{2 \cdot \overline{DP}} \Rightarrow \operatorname{sen}(P\hat{K}D) = \frac{1}{2} \Rightarrow P\hat{K}D = \frac{\pi}{6}$$

$$P\hat{D}K = \pi - (P\hat{K}D + D\hat{P}K) = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Desta forma,

$$Q\hat{D}R = \pi - \hat{L} = 2.\beta + 2.\theta = \frac{2.\pi}{3} - 2.\alpha.$$

Segue que,

$$F\hat{H}Q = F\hat{D}Q = \frac{1}{2}.Q\hat{D}P = \frac{1}{2}.(Q\hat{D}R - P\hat{D}R) = \frac{1}{2}.(Q\hat{D}R - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}.(\frac{2.\pi}{3} - 2.\alpha - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{6} - \alpha.$$

Daí, como  $\Delta DHK$  é isósceles, teremos:

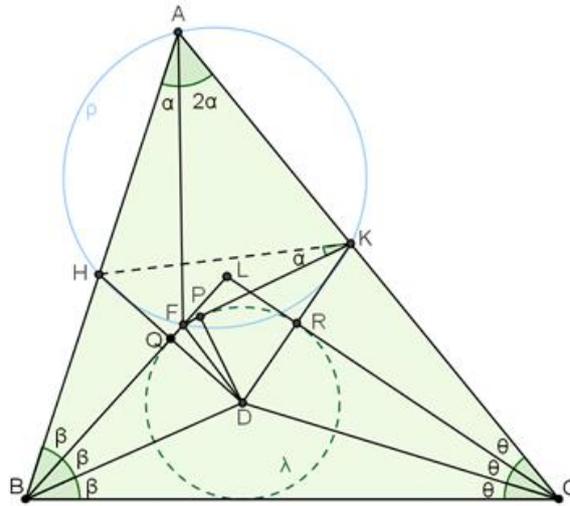
$$\begin{aligned} D\hat{H}K = D\hat{K}H &= \frac{1}{2}.\hat{L} = \frac{1}{2}.[\pi - (2.\beta + 2.\theta)] = \frac{1}{2}.[\pi - (\frac{2.\pi}{3} - 2.\alpha)] = \frac{1}{2}.[\frac{\pi}{3} + 2.\alpha] \\ &= \frac{\pi}{6} + \alpha. \end{aligned}$$

Temos também,

$$F\hat{H}K = D\hat{H}K - F\hat{H}Q = (\frac{\pi}{6} + \alpha) - (\frac{\pi}{6} - \alpha) = 2.\alpha$$

$$\text{e } F\hat{K}H = D\hat{K}H - P\hat{K}D = (\frac{\pi}{6} + \alpha) - \frac{\pi}{6} = \alpha.$$

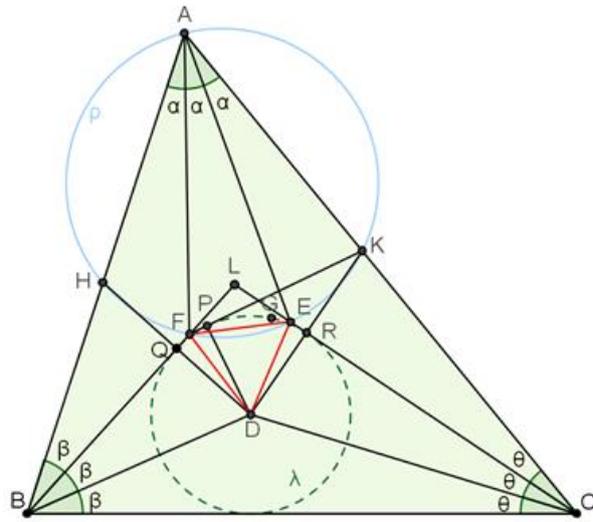
Então,  $H\hat{F}K = \pi - 3.\alpha = \pi - \hat{A}$  e os pontos A, H, F e K pertencem a uma circunferência  $\rho$ , pois os ângulos opostos  $H\hat{A}K$  e  $H\hat{F}K$  são suplementares, como podemos ver na figura 26 a seguir.



**Figura 26**

Segue que  $H\hat{A}F = H\hat{K}F = \alpha$ , pois formam o mesmo arco HF, logo  $\overline{AF}$  é uma trissetriz do vértice A.

**5ª Etapa:** Analogamente marcando o ponto E sobre o segmento  $\overline{CL}$  de modo que o segmento EH tangencie a circunferência  $\lambda$  no ponto G, teremos por simetria do triângulo DHK em relação à circunferência  $\lambda$ ,  $\overline{DF} = \overline{DE}$  e que o ângulo  $F\hat{D}E = \frac{\pi}{3}$ . Portanto o  $\Delta DEF$  é equilátero, concluindo a demonstração do teorema de Morley.

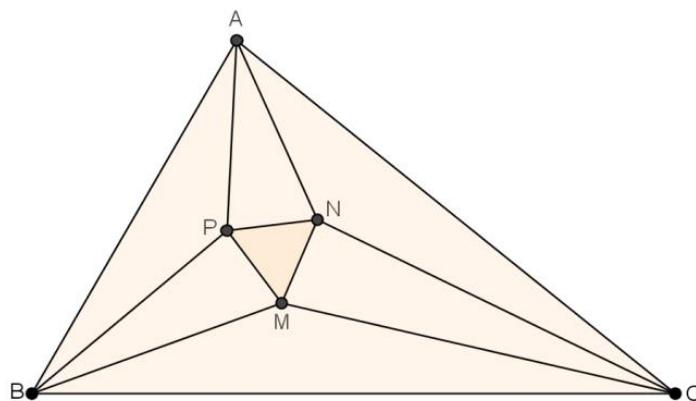


**Figura 27**

### 5.3.3 Demonstração de Constantin Cocea

Nesta demonstração foi usado somente noções de trigonometria.

Dado um triângulo qualquer ABC, sejam M, N e P os pontos de interseção das trissetrizes adjacentes referentes ao lado BC, AC e AB respectivamente.



**Figura 28**

Aplicando a lei dos senos (3.18) no triângulo ABP e as relações dos senos e cossenos de ângulos suplementares, para calcular o segmento AP, teremos:

$$\frac{\overline{AP}}{\text{sen}\frac{\hat{B}}{3}} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}(A\hat{P}B)} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{\overline{AB} \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3}}{\text{sen}\left[\pi - \left(\frac{\hat{A}}{3} + \frac{\hat{B}}{3}\right)\right]} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{2 \cdot R \cdot \text{sen}\hat{C} \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3}}{\text{sen}\left(\frac{\hat{A}}{3} + \frac{\hat{B}}{3}\right)}$$

Onde R representa o raio da circunferência circunscrita no triângulo ABC.

Temos;

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \frac{2 \cdot R \cdot \text{sen}(\pi - \hat{C}) \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3}}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\hat{C}}{3}\right)} \\ \overline{AP} &= \frac{2 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi - \hat{C}}{3}\right) \cdot [3 - 4 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\pi - \hat{C}}{3}\right)]}{\text{sen}\left(\frac{\pi - \hat{C}}{3}\right)} \\ \overline{AP} &= 2 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \left\{3 - 2 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi - 2\hat{C}}{3}\right)\right]\right\} \\ \overline{AP} &= 2 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \left[1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi - 2\hat{C}}{3}\right)\right] \\ \overline{AP} &= 4 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2\pi - 2\hat{C}}{3}\right)\right] \\ \overline{AP} &= 4 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \left[\cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(\frac{2\pi - 2\hat{C}}{3}\right)\right] \\ \overline{AP} &= 4 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot 2 \cdot \left\{\frac{1}{2} \cdot \left[\cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(\frac{2\pi - 2\hat{C}}{3}\right)\right]\right\} \\ \overline{AP} &= 8 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi - 2\hat{C}}{3}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi - 2\hat{C}}{3}}{2}\right)\right] \\ \overline{AP} &= 8 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{3\pi - 2\hat{C}}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi - 2\hat{C}}{6}\right)\right] \\ \overline{AP} &= 8 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \left[\cos\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{2\hat{C}}{6}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\hat{C}}{6}\right)\right] \\ \overline{AP} &= 8 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{C}}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\hat{C}}{3}\right) \\ \overline{AP} &= 8 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \cos\frac{\hat{C}}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\hat{C}}{3}\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$(I) \quad \overline{AP} = 8 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \cos\frac{\hat{C}}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\hat{C}}{3}\right)$$

E analogamente temos,

$$(II) \quad \overline{AN} = 8 \cdot R \cdot \text{sen}\frac{\hat{B}}{3} \cdot \cos\frac{\hat{C}}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\hat{B}}{3}\right)$$

Vamos determinar o valor do segmento PN usando as igualdades (I) e (II), substituindo-as na lei dos cossenos (3.17) aplicado no triângulo APN.

$$\begin{aligned}
 \overline{PN}^2 &= \overline{AP}^2 + \overline{AN}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AN} \cdot \cos \frac{\hat{A}}{3} \\
 \overline{PN}^2 &= 64 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{B}}{3} \right) \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\hat{C}}{3} \cdot \left[ \cos^2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\hat{B}}{3} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\hat{C}}{3} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2 \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\hat{C}}{3} \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\hat{B}}{3} \right) \cdot \cos \frac{\hat{A}}{3} \right] \\
 \overline{PN}^2 &= 64 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{B}}{3} \right) \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{C}}{3} \right) \cdot \left[ \frac{1 + \cos \left( \frac{2\pi}{6} - \frac{2\hat{C}}{3} \right)}{2} \cdot \frac{1 + \cos \left( \frac{2\pi}{6} - \frac{2\hat{B}}{3} \right)}{2} \right. \\
 &\quad \left. - \cos \frac{\hat{A}}{3} \cdot \left( \cos \frac{\pi - \hat{B} - \hat{C}}{3} + \cos \frac{\hat{B} - \hat{C}}{3} \right) \right] \\
 \overline{PN}^2 &= 64 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{B}}{3} \right) \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{C}}{3} \right) \cdot \left[ 1 + \cos \frac{\hat{A}}{3} \cdot \cos \frac{\hat{B} - \hat{C}}{3} - \cos^2 \left( \frac{\hat{A}}{3} \right) - \cos \frac{\hat{A}}{3} \cdot \cos \frac{\hat{B} - \hat{C}}{3} \right] \\
 \overline{PN}^2 &= 64 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{B}}{3} \right) \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{C}}{3} \right) \cdot \left[ 1 - \cos^2 \left( \frac{\hat{A}}{3} \right) \right] \\
 \overline{PN}^2 &= 64 \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{B}}{3} \right) \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{C}}{3} \right) \cdot \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\hat{A}}{3} \right) \\
 \overline{PN} &= 8 \cdot R \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\hat{A}}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\hat{B}}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\hat{C}}{3} \right)
 \end{aligned}$$

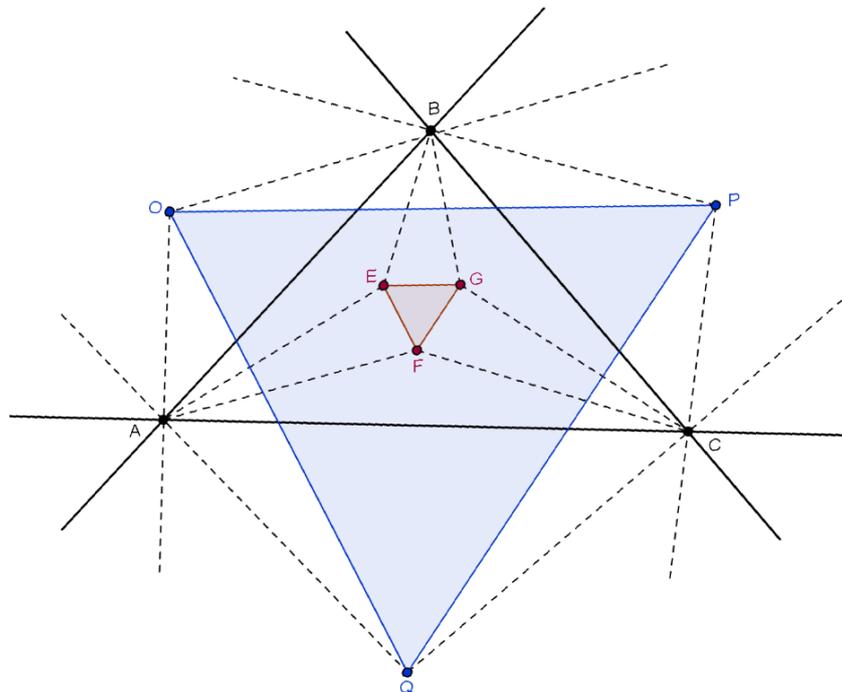
E usando a simetria nos vértices do triângulo ABC, podemos obter  $\overline{PN} = \overline{NM} = \overline{MP}$ , provando que o triângulo PNM é equilátero.

## 6 OUTRAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O TEOREMA DE MORLEY

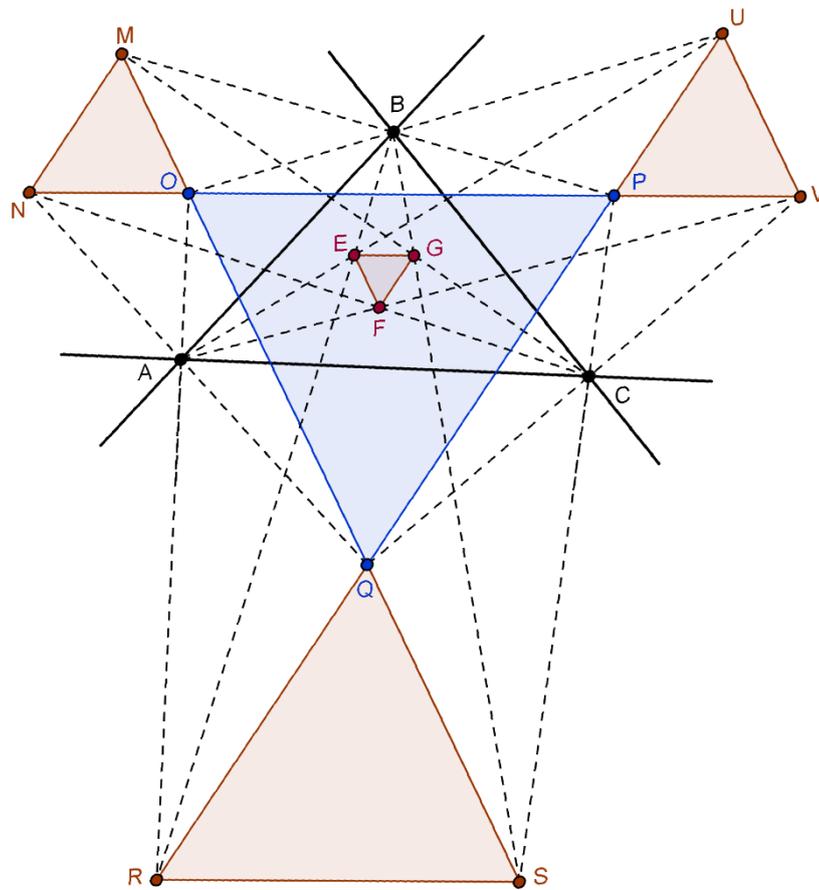
### 6.1 OS TRIÂNGULOS DE MORLEY

O teorema de Morley afirma que os pontos de encontros das trissetrizes adjacentes dos ângulos internos de um triângulo qualquer são vértices de um triângulo equilátero. Esta relação também é válida para os ângulos externos. Se traçarmos as trissetrizes dos ângulos externos de um triângulo qualquer, os pontos de encontros das trissetrizes externas adjacentes são vértices de um triângulo equilátero. Uma característica destes triângulos equiláteros determinados pelas trissetrizes dos ângulos internos e as trissetrizes dos ângulos externos é que seus lados são dois a dois paralelos. Observe a figura 29. O triângulo equilátero interno EFG, determinado pelas trissetrizes adjacentes dos ângulos internos, e o triângulo equilátero OPQ, determinado pelas trissetrizes adjacentes dos ângulos externos. Estes triângulos possuem lados paralelos.

Observação: Podemos obter outros três triângulos de Morley. Eles são formados por uma combinação de encontros entre as trissetrizes internas com as trissetrizes externas. Possuem a mesma características dos dois primeiros triângulos equiláteros, seus lados são dois a dois paralelos com os demais. Veja figura 30.



**Figura 29**

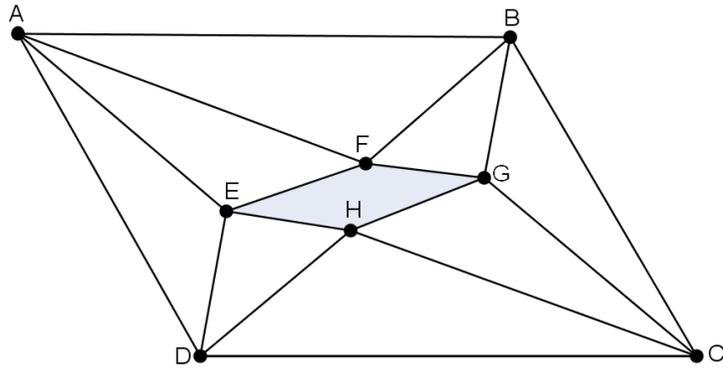


**Figura 30**

## 6.2 PARALELOGRAMOS

Em um paralelogramo, se considerarmos os quatro pontos que são as interseções das trissetrizes adjacentes dos seus ângulos internos constataremos que eles serão colineares ou serão vértices de um outro paralelogramo.

Trataremos apenas do caso em que as interseções das trissetrizes adjacentes formam um paralelogramo. Demonstraremos este fato do seguinte modo: Considere o paralelogramo ABCD e os pontos E, F, G, H como sendo os pontos das interseções das trissetrizes adjacentes, como na figura 31.



**Figura 31**

Deste paralelogramo teremos os seguintes pares de triângulos congruentes, obtidos todos pelo mesmo caso de congruência, ALA:

- I.  $\triangle ADE \equiv \triangle CBG$ , pois  $\widehat{ADE} = \widehat{CBG}$ ,  $\overline{AD} = \overline{BC}$  e  $\widehat{DAE} = \widehat{BCG}$ , portanto  $\overline{AE} = \overline{CG}$  e  $\overline{DE} = \overline{BG}$ .
- II.  $\triangle ABF \equiv \triangle CDH$ , pois  $\widehat{ABF} = \widehat{CDH}$ ,  $\overline{AB} = \overline{DC}$  e  $\widehat{BAF} = \widehat{DCH}$ , portanto  $\overline{AF} = \overline{CH}$  e  $\overline{BF} = \overline{DH}$ .

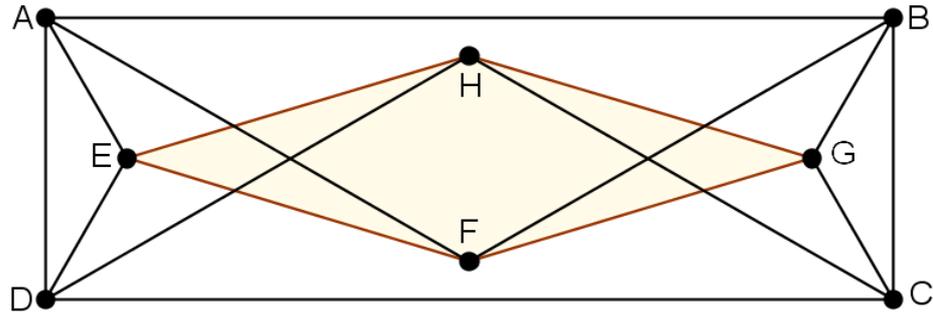
Segue das conclusões de I e II, utilizando o caso LAL, as seguintes novas congruências:

- $\triangle AEF \equiv \triangle CGH$ , pois  $\overline{AE} = \overline{CG}$ ,  $\widehat{EAF} = \widehat{GCH}$  e  $\overline{AF} = \overline{CH}$ , logo  $\overline{EF} = \overline{GH}$ .
- $\triangle BFG \equiv \triangle EDH$ , pois  $\overline{BF} = \overline{DH}$ ,  $\widehat{FBG} = \widehat{HDE}$  e  $\overline{BG} = \overline{DE}$ , logo  $\overline{FG} = \overline{EH}$ .

Desta forma, teremos,  $\overline{EF} = \overline{GH}$  e  $\overline{FG} = \overline{EH}$ , e assim o quadrilátero EFGH é um paralelogramo.

Observações:

01. Se, em particular, o paralelogramo for um retângulo, os pontos de interseções das trissetrizes adjacentes são vértices de um losango.

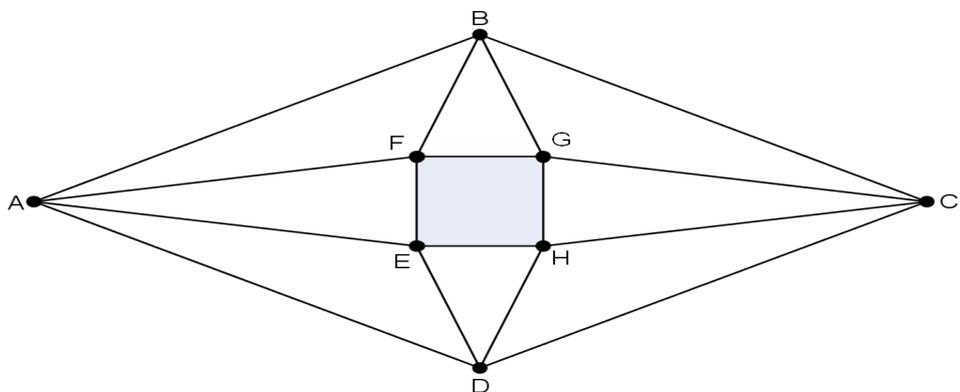


**Figura 32**

Considere o retângulo ABCD (figura 32). Todos os ângulos internos são retos, e assim cada um deles é dividido em três ângulos de  $30^\circ$ . Os triângulos AED, AFB, BGC e CHD são todos isósceles, com  $\overline{DE} = \overline{AE} = \overline{BG} = \overline{CG}$ .

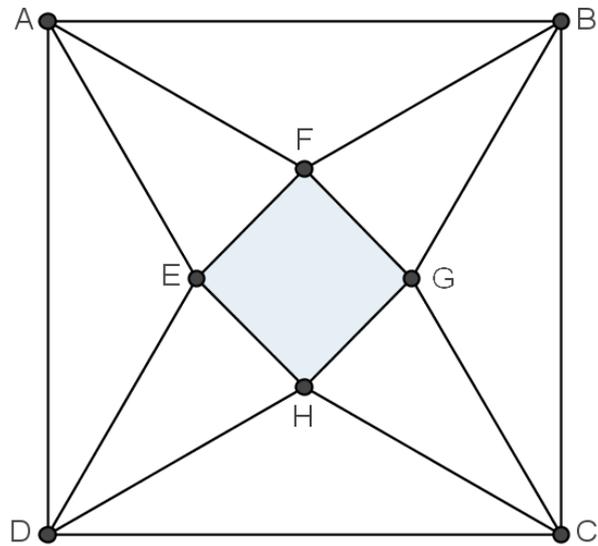
Da mesma forma que demonstramos o caso geral de um paralelogramo, utilizando os mesmos casos de congruências, teremos pares de triângulos congruentes, que neste caso específico, são pares de triângulos isósceles. São eles:  $\triangle AED \equiv \triangle BCG$  e  $\triangle AFB \equiv \triangle CDH$ , com  $\overline{DE} = \overline{AE} = \overline{BG} = \overline{CG}$  e  $\overline{AF} = \overline{BF} = \overline{CH} = \overline{DH}$ . Teremos os pares de triângulos congruentes:  $\triangle EAF \equiv \triangle FBG$ ,  $\triangle EAF \equiv \triangle GCH$  e  $\triangle FBG \equiv \triangle HDE$ . Segue as igualdades  $\overline{EF} = \overline{FG}$ ,  $\overline{EF} = \overline{GH}$  e  $\overline{FG} = \overline{EH}$ , portanto  $\overline{FG} = \overline{EF} = \overline{GH} = \overline{EH}$ , e assim o quadrilátero EFGH é um losango.

02. Se o paralelogramo for um losango, os pontos de interseções das trissetrizes serão sempre vértices de um retângulo. A demonstração é análoga a anterior. Veja figura 33.



**Figura 33**

03. Se o paralelogramo for um quadrado, de maneira análoga mostra-se que os pontos das interseções de suas trissetrizes adjacentes são vértices de um outro quadrado. Veja figura 34.



**Figura 34**

## 7. QUESTÕES OLÍMPICAS SOBRE O TEOREMA DE MORLEY

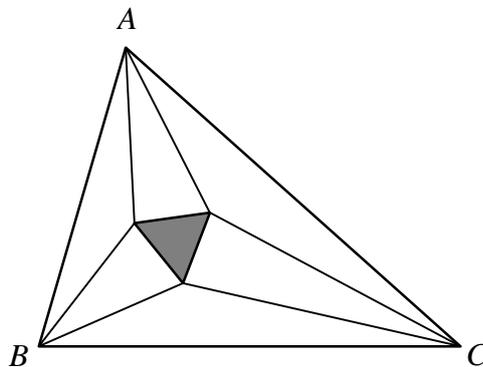
Apesar do teorema de Morley ser pouco difundido, algumas Olimpíadas de Matemática apresentaram problemas cuja solução dependem do conhecimento deste teorema.

### 7.1 QUESTÃO DA OLÍMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Uma destas questões proposta em 2012, na primeira fase da OBM, Olimpíada Brasileira de Matemática, para os alunos de nível 2 e também para os alunos do nível 3, pede para determinar a medida do lado do triângulo de Morley.

A solução apresentada utiliza além de conceitos básicos de geometria plana um pouco de trigonometria. Mas é essencial o conhecimento do Teorema de Morley.

(OBM – 2012) O *teorema de Morley* diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo  $ABC$  em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado *triângulo de Morley de  $ABC$* , como o que está destacado na figura a seguir:



**Figura 35**

Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

**A)**  $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$

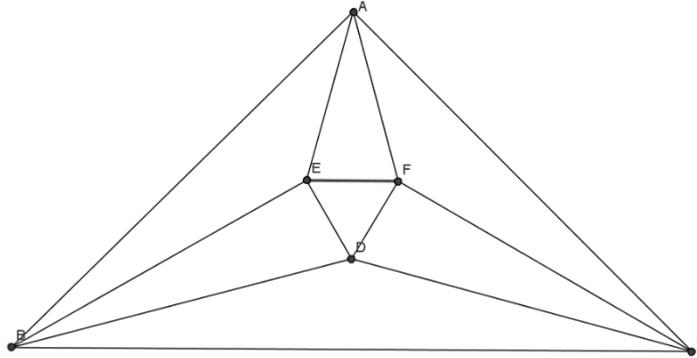
**B)**  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

**C)**  $\sqrt{6} - 2$

**D)**  $2 - \sqrt{3}$

**E)**  $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

**Solução:**



**Figura 36**

Considerando o  $\Delta ABC$  retângulo em  $\hat{A}$ , teremos  $B\hat{A}E = E\hat{A}F = F\hat{A}C = 30^\circ$ . Como  $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ , teremos  $A\hat{B}E = E\hat{B}D = D\hat{B}C = B\hat{C}D = D\hat{C}F = F\hat{C}A = 15^\circ$ . Pelo teorema de Pitágoras obtemos  $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ . Segue que  $\Delta ABE \equiv \Delta ACF$ , pelo caso ALA, logo  $\overline{BE} = \overline{CF}$ . O  $\Delta BCD$  é isósceles, com  $B\hat{D}C = 150^\circ$ . Teremos  $\Delta BDE \equiv \Delta CDF$ , pelo caso LAL, com  $B\hat{D}E = C\hat{D}F$  e  $B\hat{E}D = D\hat{F}C$ . Pelo teorema de Morley  $E\hat{D}F = 60^\circ$ , segue que  $B\hat{D}E = C\hat{D}F = 75^\circ$ , donde obteremos  $B\hat{E}D = D\hat{F}C = 90^\circ$ . Traçando a altura relativa à base do triângulo isósceles

$BDC$ , temos que  $BD = \frac{\sqrt{2}}{\cos 15^\circ}$  e no triângulo  $BED$ , temos que  $ED = BD \cdot \sin 15^\circ$  e daí

$$ED = \sqrt{2} \tan 15^\circ = \sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}.$$

Observação: Usando a fórmula  $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ , temos que

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

## 7.2 QUESTÃO DA OLÍMPIADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Em 2012 a OPM, Olimpíada Paulista de Matemática, propôs para o nível fundamental e para o nível médio, uma questão do envolvendo o teorema de Morley.

Nesta questão, inicialmente é apresentado ao aluno o início de uma demonstração do teorema, familiarizando-o com o tema e a seguir solicitando que o mesmo a finalize.

(OPM - 2012) Um teorema bastante interessante da Geometria é o teorema de Morley, descoberto por Frank Morley em 1899. O teorema diz que as retas que trissectam os ângulos internos (dividem em três partes iguais) determinam um triângulo equilátero, como destacado na figura 1:

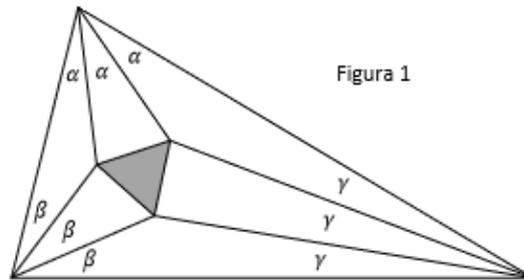


Figura 1

Figura 37

Nesse problema, veremos uma das demonstrações mais engenhosas para esse teorema, dada pelo matemático John H. Conway. A principal ideia é fazer o problema de “dentro para fora”. Isto é, começamos com um triângulo equilátero e depois mostramos que conseguimos montar qualquer triângulo a partir dele.

Primeiro, sejam  $3\alpha$ ,  $3\beta$  e  $3\gamma$  os ângulos internos de um triângulo acutângulo. Para facilitar a notação, dado um ângulo  $\theta$ , denotaremos  $\theta^+ = \theta + 60^\circ$  e  $\theta^{++} = \theta + 120^\circ$ .

Agora, comece com o triângulo equilátero.



Figura 2

Figura 38

Em seguida, encaixe nele três triângulos com ângulos  $\alpha, \beta^+, \gamma^+$ ;  $\alpha^+, \beta, \gamma^+$  e  $\alpha^+, \beta^+, \gamma$ . Note que eles estão determinados, pois um lado é igual ao lado do triângulo equilátero e os três ângulos são dados.

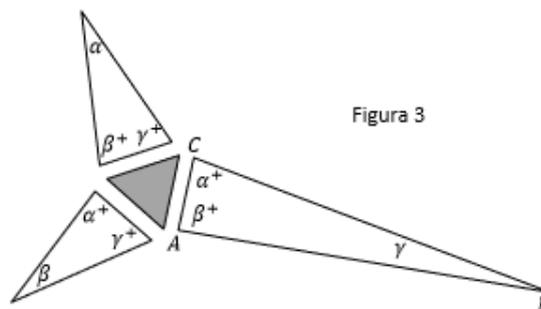
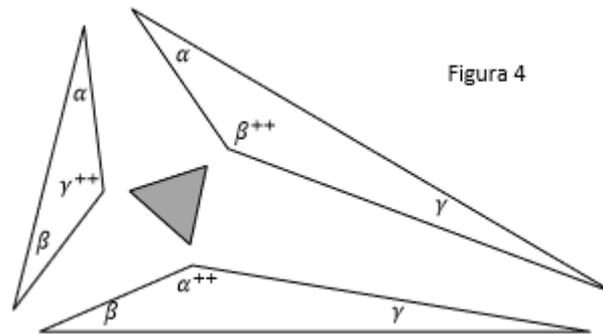


Figura 3

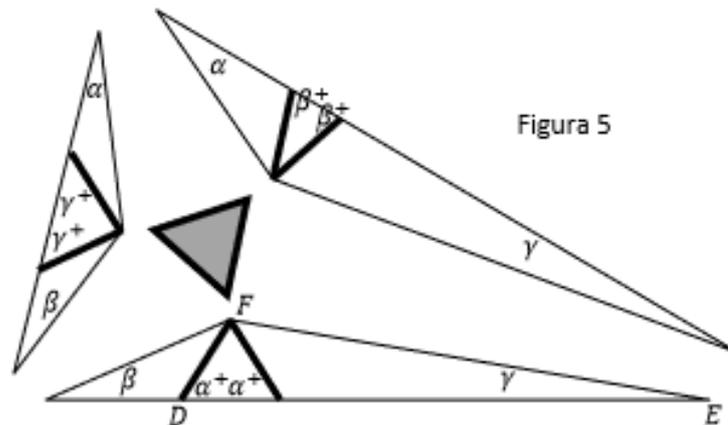
Figura 39

Agora, considere outros três triângulos, com ângulos  $\alpha, \beta, \gamma^{++}$ ;  $\alpha, \beta^{++}, \gamma$  e  $\alpha^{++}, \beta, \gamma$ .



**Figura 40**

Ainda falta determinar os lados dos três triângulos acima, já que só temos seus ângulos. Para isso, construa triângulos isósceles de ângulos de base  $\alpha^+, \beta^+$  e  $\gamma^+$ , como na figura 5. Os lados congruentes dos triângulos isósceles são iguais ao lado do triângulo equilátero.



**Figura 41**

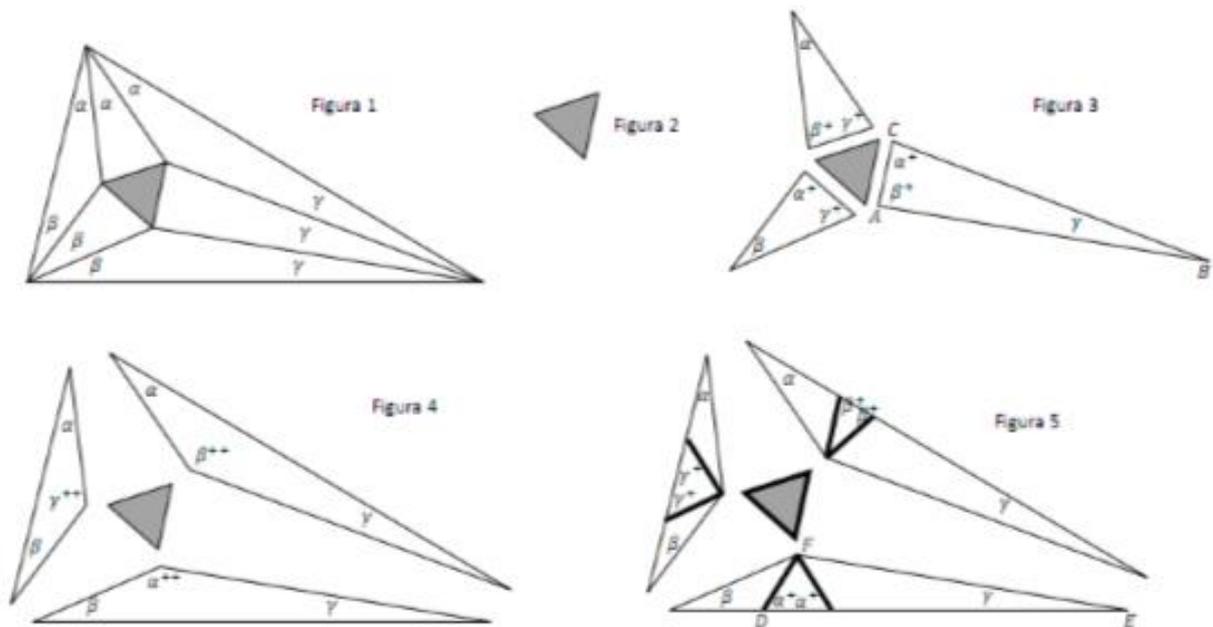
Para completar a demonstração, temos que provar que os sete triângulos que construímos se encaixam perfeitamente. Para isso, faltam dois fatos. É hora de você entrar em ação!

- Mostre que a soma dos ângulos dos triângulos em torno dos vértices do triângulo equilátero é  $360^\circ$ .
- Para mostrar que os lados se encaixam e que podemos montar o triângulo da figura 1, basta verificar que o lado  $AB$  indicado na figura 3 é igual ao lado  $EF$  indicado na figura 5. Os outros casos são análogos.

Complete a demonstração provando que, de fato, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle FED$  são congruentes.

### Solução dada pela OPM:

Temos aqui as 5 figuras dadas no enunciado



**Figura 42**

a) Vejamos a soma dos ângulos num dos vértices do triângulo, por exemplo, C representado na figura 3, temos que somar o ângulo interno do triângulo equilátero, os dois dos triângulos da figura 3 e por fim o da figura 5:

$$60^\circ + (\alpha + 60^\circ) + (\gamma + 60^\circ) + (180^\circ - \alpha - \gamma) = 360^\circ$$

Isso mostra que nesse pontos os 4 pedaços se encaixam. As somas em torno dos outros vértices seguem por analogia.

b) Sendo os ângulos do triângulo  $3\alpha$ ,  $3\beta$  e  $3\gamma$ , observa-se sua soma:

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ \rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$$

Veja no triângulo  $\triangle FED$  que a soma dos ângulos é  $180^\circ$ , logo:

$$\widehat{FED} + \widehat{EDF} + \widehat{DFE} = \gamma + (\alpha + 60^\circ) + \widehat{DFE} = 180^\circ \rightarrow$$

$$\widehat{DFE} = 120^\circ - \alpha - \gamma \rightarrow \widehat{DFE} = \beta + 60^\circ = \beta^+$$

Assim temos congruência dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle FED$  (A.L.A.) já que  $\widehat{CAB} = \widehat{DFE}$ ,  $CA = DE$  (lado do triângulo equilátero) e  $\widehat{BCA} = \widehat{EDF}$ . Assim, concluímos que  $AB = FE$ .

Note que esses lados se encaixam.

Juntando os itens a e b, observamos que de fato os 7 triângulos se encaixam em ângulos e comprimentos dos lados para formar o triângulo maior de  $3\alpha$ ,  $3\beta$  e  $3\gamma$ .

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada uma das interessantes descobertas na área da geometria plana. O objetivo é ampliar a sua divulgação e oferecer aos leitores uma fonte de consulta sobre o tema em foco: O teorema de Morley. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica ampla, o que propiciou um certo rigor matemático nos conceitos aqui apresentados e em particular sobre o teorema de Morley. Apesar da simplicidade em seu enunciado, sua surpreendente conclusão indica que possivelmente ainda existam, em geometria elementar, fatos simples e interessantes a serem descobertos. Os conceitos, as demonstrações e as aplicações foram apresentadas de maneira simples e a nível elementar, mas sem desprezar o rigor matemático. As demonstrações do teorema de Morley, aqui apresentadas podem ser repassadas aos alunos do ensino médio, pois utilizam apenas tópicos elementares e do conhecimentos destes discentes. Poderíamos incluir este teorema em nossas aulas, aplicando-o em exercícios, em laboratórios de Matemática ou outras atividades em sala de aula.

Por fim conclamamos aos colegas professores que procurem descobrir e incentivar novos talentos para o estudo da Matemática. Esperamos que a leitura deste trabalho contribua, de alguma forma, para esse mister.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. Coletânea de provas e gabaritos. Disponível em: < [http://www.obm.org.br/opencms/provas\\_gabaritos](http://www.obm.org.br/opencms/provas_gabaritos)> Acesso em: 02 de abr. 2015.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11 ed. Rio de Janeiro. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.

BETTI, Renato. **Il Miracolo di Morley e Altre Regolarità Dei Triangoli**. Disponível em: <<http://matematica.unibocconi.it/articoli/il-miracolo-di-morley-e-altre-regolarit%C3%A0-dei-triangoli>>. Acesso em: 09 de fev. 2015.

BOGOMOLNY, Alexander. **Morley's Miracle**. Disponível em: < <http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml>>. Acesso em: 08 de mar. 2015.

CARVALHO, João Pitombeira de. **Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega**. Departamento de Matemática, PUC – Rio.

CONDE, Juan Manuel. **Teorema de Morley**. Departamento de Análisis Matemático, Universidade de Alicante.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e Equações Algébricas**. 1 ed. Rio de Janeiro. Coleção PROFMAT, SBM, 2012.

MAGALHÃES, Mário. **Versão do Teorema de Morley para Paralelogramos**. Rev. Gazeta de Matemática, Sociedade Portuguesa de matemática. n. 0155, ano LXIX, p 21-24, jul. 2008.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria euclidiana plana**. Vol. 2. 1 ed. Rio de Janeiro. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2012.

NARANIENGAR, Mandyam Tondanur. **Morley's Theorem**. Geometry Revisited, The Mathematical Association of America. n. 19, p 47 – 49, 1967.

OAKLEY, Cletus O.; BAKER, Justine C. **The Morley Trisector Theorem**. Disponível em: <[www.haverford.edu/math/cgreene/399/morley/morley.pdf](http://www.haverford.edu/math/cgreene/399/morley/morley.pdf)> Acesso em: 16 de fev. 2015.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E.F. **Frank Morley**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Morley.html>> Acesso em: 07 de fev. 2015.

OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA. Arquivo de provas e gabaritos. Disponível em: < <http://www.opm.mat.br/provas>> Acesso em: 02 de abr. 2015.

PICKOVER, Clifford A. **O Livro da Matemática: De Pitágoras à 57ª dimensão, 250 marcos da história da Matemática**. Librero, 2011.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1 ed. Editora Zahar, 2012.

SOUSA, Miguel Rodrigues de. **Trisseccção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia**. Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

TAYLOR; MARR'S. Disponível em: <<http://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/Morley2.shtml>> Acesso em: 08 de mar. 2015.

VALDÉS M.; Fernando. **Unicidad del Teorema de Morley**. Rev. Scientia et Technica. n. 35, ano XIII, p 417 – 420, 2001.