UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GRAFOS: UMA FERRAMENTA POSSÍVEL E NECESSÁRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ALISON QUIROZ SILVA

CRUZ DAS ALMAS - Bahia
2015

GRAFOS: UMA FERRAMENTA POSSÍVEL E NECESSÁRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ALISON QUIROZ SILVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof° Dr. Juarez dos Santos Azevedo

CRUZ DAS ALMAS - Bahia
2015

GRAFOS: UMA FERRAMENTA POSSÍVEL E NECESSÁRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ALISON QUIROZ SILVA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Orientador:____

Prof^o Dr. Juarez dos Santos Azevedo-UFRB

Membro:____

Prof^o Dr.Hassan Sherafat-UFS

Membro: José Valentim dos Santos Filho

Prof^o Dr. José Valentim dos Santos Filho-UFRB

Cruz das Almas, 09 de Julho de 2015.

Aos meus pais (in memorian)
à minha família, e minha esposa Rosilandia.

Agradecimentos

A Deus, por me permitir viver e me dar forças para isto.

Ao meu orientador, Prof^{o} Dr. Juarez dos Santos Azevedo, que me ajudou bastante nesta trajetória sendo de vital importância para a conclusão desta dissertação.

Aos professores da instituição, que contribuíram significativamente na minha formação. A vocês meu muito obrigado. Em especial, Juarez, Gilberto, Erikson, pelos bons momentos vividos.

Aos colegas e amigos da turma 2013, pelas resenhas, apoio nos momentos de dificuldades e pelos bons momentos que tivemos juntos. Em especial a Patrícia, Tânia e Marcos Sanches.

Aos amigos, pela compreensão que tiveram devido as minhas ausências desse período. Em particular, meus agradecimentos aos irmãos, Gabriel Velame, Roque Lyrio e a família goiaba. A vocês devo muito.

A minha família, pelo apoio, compreensão, paciência. Peço também perdão pelas muitas ausências. E a minha esposa Rosilandia, pelo carinho, apoio e companheirismo, sendo fundamental em minha vida.

Principalmente a meu pai (in memorian), pelo exemplo de pessoa, por tudo o que me ensinou, pela confiança em mim depositada. Perdão pelas minhas faltas. Amo demais o Senhor e obrigado por tudo.

Alison Quiroz Silva

Resumo

O presente trabalho busca ratificar a relevância da Teoria dos Grafos para a Educação Básica, sobretudo para o aprimoramento da Matemática, tornando-se uma importante ferramenta no desenvolvimento do raciocínio lógico dos discentes, além de não fomentar o uso excessivo de fórmulas na resolução de problemas de Análise Combinatória e Probabilidade. Neste sentido, serão destacados alguns problemas clássicos que ajudaram no surgimento da teoria, apresentando-se conceitos e definições para melhor compreensão da teoria, as quais respondem à aplicações práticas e interdisciplinares.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Educação Básica, Grafos, Probabilidade.

Abstract

The present study aims to ratify the relevance of the theory of graphs for basic education, especially for the improvement of mathematics, becoming an important tool in the development of logical reasoning of students, and not promote excessive use of formulas solving problems associated with Combinatorial Analysis and Probability. In this sense, will be highlighted some classic problems that helped in the origin theory, presenting concepts and definitions for better understanding of the theory, which respond to practices and interdisciplinary applications.
Keywords: Combinatorial Analysis, Basic Education, Graphs, Probability.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Ao explanar um determinado assunto, o professor espera que seus alunos obtenham um bom desempenho em determinado conteúdo. É também de se esperar que o profissional use novos recursos para alcançar o que almeja, culminando com o sucesso em sua aprendizagem. Desta forma, a motivação para elaboração deste trabalho veio da procura de uma maneira, uma técnica ou de uma ferramenta que trouxesse melhorias para o ensino de Matemática, sobretudo, no ensino de Análise Combinatória e Probabilidade. Seria a *Teoria dos Grafos* uma sugestão para isto?

Ao longo dos últimos anos percebe-se, através de relatos de alunos e professores, nas escolas públicas e privadas, que Análise Combinatória e Probabilidade são tidos como um dos assuntos complicados, ou mesmo, os mais difíceis. Segundo (BACHX, 1975; MORGADO, 2006) a Análise Combinatória tem sido frequentemente indicada por professores do Ensino Médio como sendo a parte desafiadora da Matemática de ensinar. Além disso, nota-se também, nas soluções dos problemas propostos, um uso excessivo de fórmulas. De acordo com BACHX (1975), tal situação pode estar relacionada a um ensino calcado tradicionalmente em definições e fórmulas, habituando os estudantes a um trabalho mecânico que muitas vezes exclui a compreensão do que estão fazendo ou do que deveriam fazer.

A Teoria dos Grafos é, hoje, um campo de interesse crescente pois apropria-se de extraordinário desenvolvimento teórico e aplicado que vem desde os problemas de localização e de traçados de rotas para diversos tipos de serviço a aplicações na Física, Química, Genética, Pesquisa Operacional, Computação, Engenharia Molecular, Bioinformática, Psicologia, Sociologia, Estatística, Relações Sociais e Empresariais, no Projeto de Códigos, Planejamento de Transportes, na Otimização de Recursos Humanos, no estudo de estrutura de DNA, dentre outros (JURKIEWICZ, 2009b; NETTO, 1979).

Sabe-se que um determinado assunto pode vir a se tornar, interessante ou atrativo se possuir diversas alternativas na resolução de questões. Desta forma, a Teoria dos Grafos que traz inúmeras aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento, além de ajudar a criar o ambiente ideal para a resolução de situações problema (através da coleta, organização, sistematização e análise dos dados), vem a ser um importante instrumento no desenvolvimento do raciocínio lógico, na resolução de problemas reais e fictícios, no estudo de Análise Combinatória e Probabilidade, trazendo um maior nível de significância no estudo e conhecimento de tais assuntos, dentre outros.

Assim, esta dissertação tem por objetivo mostrar que a inclusão da Teoria dos Grafos não é só possível como também necessária na Educação Básica, além de mostrar que podemos utilizar os grafos como uma ferramenta a auxiliar os problemas de Análise Combinatória e Probabilidade, visando trazer contribuições significativas para o processo de ensino aprendizagem, no Ensino Médio e auxiliar o entendimento de conteúdos administrados em disciplinas como Biologia, Geografia, Literatura, Química, Física e principalmente, Matemática.

O trabalho é dividido como segue: o **Capítulo 1** consta de duas seções, na primeira, é feita uma abordagem histórica da Teoria dos Grafos até os dias atuais, já a segunda, traz algumas das principais definições, teoremas, corolários e lemas, para uma melhor compreensão do assunto; o **Capítulo 2**, enfatiza a Teoria das Árvores, Planaridade e Coloração de Mapas, com o intuito de relacioná-las, respectivamente, à Probabilidade e Análise Combinatória; o **Capítulo 3**, traz a discussão do por que Grafos na Educação Básica, seguida de uma seção referente as possibilidades de aplicação de tal teoria em problemas, sendo que para esta última serão usados alguns dos principais resultados apresentados nos capítulos anteriores. Concluiremos este trabalho buscando firmar claramente quais os objetivos, justificativas e perspectivas em torno desta temática.

Capítulo 1

Noções Gerais

NESTE capítulo são expostos um breve histórico acerca da origem da Teoria dos Grafos até os dias atuais, além de conceitos e definições relevantes no estudo de tal princípio. As principais referências aqui utilizadas foram (JURKIEWICZ, 2009a, 2009b; LUCCHESI, 1979; MORGADO, 2006; NETTO, 1979, 1996).

1.1 Relato Histórico

Pode-se considerar que a Teoria dos Grafos é um ramo recente na história da Matemática, surgindo de forma tímida, por volta de 1735, como uma charada Matemática para alguns, a saber, a tentativa de se encontrar um percurso para um passeio que partisse de uma das quatro porções de terra atravessando uma única vez cada uma das sete pontes e retornasse à margem de partida (JURKIEWICZ, 2009b; NETTO, 1979).

No século XVIII, o Rio Pregel atravessava a cidade de Konigsberg - território da Prússia até 1945, atual Kaliningrado - e, num determinado ponto se ramificava formando duas ilhas que, juntas, formavam um complexo contendo sete pontes, interligando as ilhas e as mesmas às margens opostas do rio (vide Figs. 1.1-1.2).[1] Conta-se que os habitantes da cidade pretendiam estabelecer um percurso em que, obrigatoriamente, deveriam passar por todas as pontes, não passando mais que uma vez por cada ponte e retornar ao ponto de partida. Tal problema, conhecido como o *Problema das Pontes de Konigsberg* - marco fundador da Teoria dos Grafos (JURKIEWICZ, 2009a) - ao que se sabe, foi o primeiro problema que resultou nesta teoria (NETTO,

[1]Pelo fato do mapa da cidade de Konigsberg descrito na Fig. 1.1 ser muito antigo, a Fig. 1.2 ilustra de maneira mais simples a representação das ilhas, margens e pontes desta cidade, a fim de uma melhor percepção.

1996).

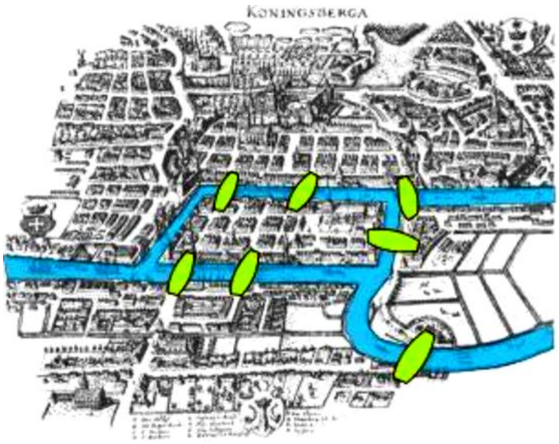


Figura 1.1: Mapa da cidade de Konigsberg.

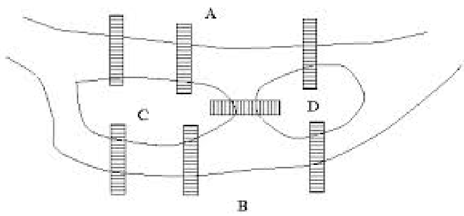


Figura 1.2: Representação das ilhas (C e D), pontes e margens (A e B) do rio.

Em meio a muitas tentativas sem sucesso da resolução deste problema, começou a se acreditar que tal percurso era impossível, até que em 1736, o famoso físico e matemático Leonhard Euler, provou que tal percurso era de fato impossível e sua solução envolveu conceitos de Teoria dos Grafos (NETTO, 1979). Ele usou um argumento extremamente simples e eficiente, a saber, representou as margens e ilhas por pontos A, B, C, D, e, as pontes por linhas ou arcos, que tem os pontos como extremidades (vide Fig. 1.3), tal representação pode ter sido o primeiro grafo da história. Além disso, observou que o número de passagens de uma margem para uma ilha, ou entre duas ilhas, era sempre ímpar, sendo assim, pode-se passar de uma porção de terra para outra, mas em algum momento não se conseguirá retornar. Portanto, chegou a conclusão de que para existir tal percurso, cada massa de terra deveria se ligar à outra por um número par de pontes (JURKIEWICZ, 2009b). Tal demonstração será exibida na Seção 1.2.

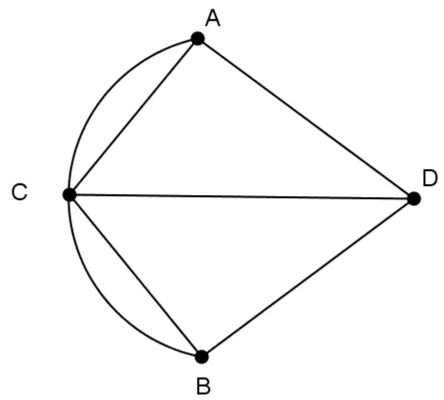


Figura 1.3: Representação do modelo matemático elaborado por Euler.

A Fig. 1.3 é uma representação gráfica do que, hoje em dia, chama-se um *modelo de grafo*. Encontrar a solução do problema das pontes não passou de um desafio para Euler, porém o estudo não foi mais a fundo, ou seja, não se procurou desenvolvê-lo ou muito menos achar onde pudesse aplicá-lo. Dessa forma, também não despertou interesse para outros, ficando por mais de um século perdido em meio a tantas outras obras de sua autoria (pouco mais de setenta obras) (JURKIEWICZ, 2009b; NETTO, 1996).

Vale destacar que o termo grafo foi utilizado pela primeira vez por Sylvester em 1878, na publicação de um artigo de sua autoria, Chemistry and Algebra, na revista Nature, uma das revistas cientificas mais antigas do mundo. No ano 1847, Gustav Robert Kirchhoff iniciou o estudo das árvores - um tipo de grafo - quando estudava problemas de circuitos elétricos, criando a Teoria das Árvores. Em 1857, Arthur Cayley relacionou essa teoria com o estudo dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos, em química orgânica. Nesse período, Guthrie, resolveu dar atenção ao problema relacionado com a prática da cartografia, de um ponto de vista matemático. Era de conhecimento dos cartógrafos que para colorir as regiões de um mapa, não eram necessários mais do que quatro cores diferentes, mas apenas em 1976 que se conseguiu um resultado significativo (JURKIEWICZ, 2009b; NETTO, 1979, 1996).

Em 1859, William Rowan Hamilton estudava problemas de caminhos, criando um jogo que consistia na busca de um percurso fechado envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de modo que cada vértice fosse visitado apenas uma vez, dando origem mais tarde aos Grafos Hamiltonianos, e Jordan em 1869 procurou formalizar a Teoria das Árvores. Claude Jacques Roger Berge em 1958, tentou realizar a integração das diferentes tendências sobre o tema, tendo um certo êxito.

Em 1962, o matemático chinês Kwan Mei-Ko, interessado nos estudos de Euler, propôs-se a resolver um problema - semelhante ao problema das pontes - referente aos carteiros da sua cidade. Seu objetivo era definir um caminho de forma a visitar todas as casas que deveria, tomando o menor percurso para cumprir as entregas, além de passar por cada rua apenas uma vez. Tal problema ficou conhecido como *O Problema do Carteiro Chinês* (PCC). Portanto, esse problema consiste em encontrar o caminho mais curto, ou circuito fechado, que visite cada aresta de um grafo conexo e não-orientado apenas uma vez. Quando o grafo é Euleriano (existe um caminho que visite todas as arestas apenas uma vez), este circuito é uma solução ótima do problema, caso contrário, deve-se Eulerizar o grafo. A importância do PCC, está no fato de ser aplicado a problemas atuais como coleta de lixo, entregas de correio, vendas em domicílio, etc.

Vale ressaltar que o primeiro livro específico sobre grafos foi publicado por Konig em 1936, porém, hoje existem centenas. Existem outros eventos importantes que não foram relatados neste texto que podem ser encontrados em (NETTO, 1979, 1996).

O desenvolvimento da Teoria dos Grafos se deu na segunda metade do século XX, devido à invenção do computador (sem o qual a maioria das aplicações de grafos seriam impossíveis) e pelo interesse de muitos matemáticos trazido pelo estudo de problemas como os citados acima, possibilitando o desenvolvimento do corpo teórico, permitindo atualmente aplicações em vários campos do conhecimento. Na próxima seção destacamos alguns conceitos fundamentais a serem abordados neste trabalho.

1.2 Conceitos Básicos

Muitas situações do cotidiano, ou fictícias, podem ser convenientemente descritas e resolvidas através de diagramas que são constituídos de um conjunto de pontos ou pequenos círculos, juntamente com linhas ou arcos que ligam alguns pares desses pontos, ou um ponto a ele mesmo (LUCCHESI, 1979). Em tal situação, o que determinará quais pontos serão interligados, são as relações existentes entre eles. Notem os três exemplos a seguir.

Exemplo 1.1. *"Em uma festa com cem convidados, há um número par de pessoas que conhecem, na festa, uma quantidade ímpar de outras pessoas". Isso é possível?*

Exemplo 1.2. *"Um país tem 10 cidades e 37 estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga duas cidades distintas e cada duas cidades são ligadas por, no máximo, uma estrada. Nessas condições, é* *possível, usando as estradas, viajar entre duas cidades quaisquer do país (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)"?*

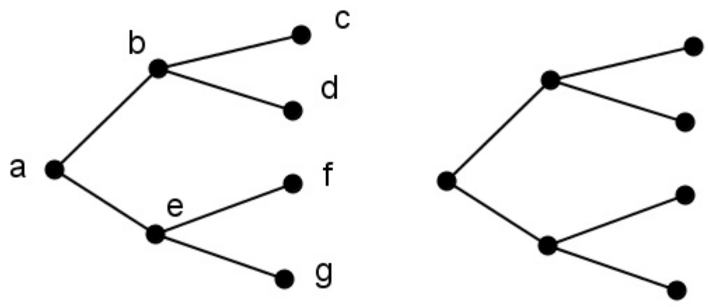
Exemplo 1.3. *"Uma pizzaria contrata um motoboy para fazer as entregas. Mas, para ser efetivado passará por um teste, se no seu primeiro dia de trabalho conseguir entregar todas as pizzas ainda quentes então, será efetivado. No seu teste, terá que entregar cinco pizzas. Pode ele fazer as entregas de qualquer forma, ou seja, ele deve escolher seguir por qualquer rua para efetuar as entregas?"*

Apesar da aparente falta de correlação nas situações descritas acima, tem-se certos conjuntos de objetos e suas relações, conforme cada caso, o que é suficiente para analisá-las em um contexto abstrato de *Teoria dos Grafos* (NETO, 2012). Este ramo da Matemática auxilia no estudo das relações entre os objetos com um determinado conjunto. De maneira geral este conjunto é definido por meio de pontos, onde alguns desses ou todos, podem ser ligados entre si por segmentos cujas extremidades devem conter tais pontos. Determinadas situações problema, da vida real ou não, podem ser representadas e resolvidas por meio dos grafos, como descritas nos Exemplos 1.1, 1.2 e 1.3. Para tanto, deve-se montar o diagrama de acordo com as especificações do problema e fazer as análises necessárias para encontrar a solução, caso exista. A seguir, iremos apresentar algumas definições, lemas, teoremas e corolários, que são relevantes para o entendimento do assunto e quando na resolução de problemas apresentados neste texto.

Definição 1.1. *Um grafo G representado por $G = (V, E)$, consiste de um conjunto finito $V = V(G)$ de elementos denominados vértices de G (representados nas estruturas por pontos), um conjunto finito de elementos $E = E(G)$[2] chamados arestas (nas estruturas são representadas por segmentos de reta, arcos ou setas) que conectam quaisquer vértices, e uma função de incidência f que associa a cada aresta {u,v} de G um par não ordenado de vértices u e v (não necessariamente distintos) de G, chamados de extremos de {u,v}.*

De acordo com a Definição 1.1, pode-se ter grafos tendo seus vértices sendo indicados por números, letras ou letras com índices, a esses tipos chamam-se *Grafos Rotulados*, quando não houver tal identificação chamam-se *Grafos não-Rotulados*. A Fig. 1.4 descreve um exemplo destes tipos de grafos.

[2] O uso da letra E para denotar a família das arestas de G deriva da palavra inglesa para aresta, *edge*.



(a) (b)

Figura 1.4: Grafos: (a) Rotulado e (b) não-Rotulado.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e u e v dois de seus vértices, diz-se que u e v são **adjacentes** (ou **vizinhos**) se $\{u,v\} \in E$, ou seja, se existir pelo menos uma aresta que os conectem. Assim, pode-se dizer que a aresta $\{u,v\}$ incide nos vértices u e v. Uma outra notação para representar a aresta é uv. Quando u e v não forem adjacentes diz-se que tais vértices são **não-adjacentes** de G. O número de vértices de um grafo também chamado de ordem do grafo é denotado por $|V|$, já o número de arestas incidentes em um certo vértice v, chamados também de grau de v é denotado por $d(v)$, também pode ser denotado por $d_G(v)$ [3]. O número de arestas denotado por $|E|$, é chamado tamanho do grafo.

Teorema 1.1. *Em um grafo $G = (V, E)$, a soma dos graus dos vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos:*

$$2|E| = \sum_{u \in V} d_G(u). \tag{1.1}$$

Demonstração. Para provar este resultado, utilizaremos contagem dupla. Basta observar que se $\{u, v\}$ é uma aresta de G, então ela é contada duas vezes no segundo membro de (1.8), isto é, uma vez na parcela $d_G(u)$ e outra na parcela $d_G(v)$. Portanto o segundo membro tem de ser igual a $2|E|$, já que tal número também conta cada aresta exatamente duas vezes.

A título de exemplo, temos a Fig. 1.5. Desta figura pode-se concluir que: $V = \{A, B, C, D\}$ e $E = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{B, D\}, \{B, C\}, \{C, D\}\}$. Além disso, os vértices A e B, A e D, B e D, C e D, são adjacentes, enquanto que A e C são não adjacentes. E mais $|V| = 4$; $|E| = 7$ e $d(A) = 3$; $d(B) = 5$; $d(C) = 3$ e $d(D) = 3$.

[3] O uso da letra d para denotar o grau do vértice v deriva da palavra inglesa para grau, *degree*.

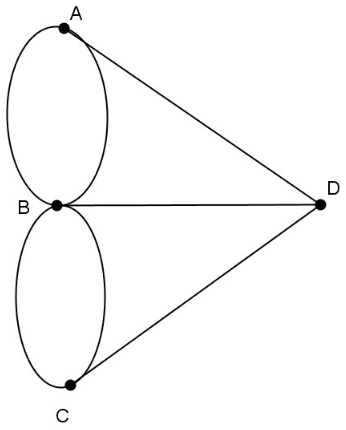


Figura 1.5: Grafo que ilustra as pontes de Konigsberg.

Note que a soma dos graus dos vértices é

$$d(A) + d(B) + d(C) + d(D) = 3 + 5 + 3 + 3 = 14, \tag{1.2}$$

que é exatamente o dobro do número de arestas, como determina o Teorema 1.1.

Corolário 1.1. *Em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Demonstração. Para $k \geq 0$ inteiro, $v_k(G)$ o número de vértices de G com grau k. Como a soma no segundo membro de (1.8) tem exatamente $v_k(G)$ parcelas iguais a k, tem-se (novamente por contagem dupla) a igualdade

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = \sum_{k \geq 0} k v_k(G). \tag{1.3}$$

Segue, pois, do Teorema 1.1 que

$$2|E| = \sum_{k \geq 0} k v_k(G) = \sum_{j \geq 0} v_{2j+1}(G) + \sum_{j \geq 1} 2j(v_{2j}(G) + v_{2j+1}(G)). \tag{1.4}$$

Logo,

$$\sum_{j \geq 0} v_{2j+1}(G) = 2|E| - \sum_{j \geq 1} 2j(v_{2j}(G) + v_{2j+1}(G)) \tag{1.5}$$

um número par.

Segue, então, uma situação problema em que a utilização do Corolário 1.1 torna-se necessária.

Exemplo 1.4. *Antes da reunião de um comitê, alguns de seus dez membros trocaram apertos de mão. É possível que os números de apertos de mão tenham sido em alguma ordem, iguais a 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 8?*

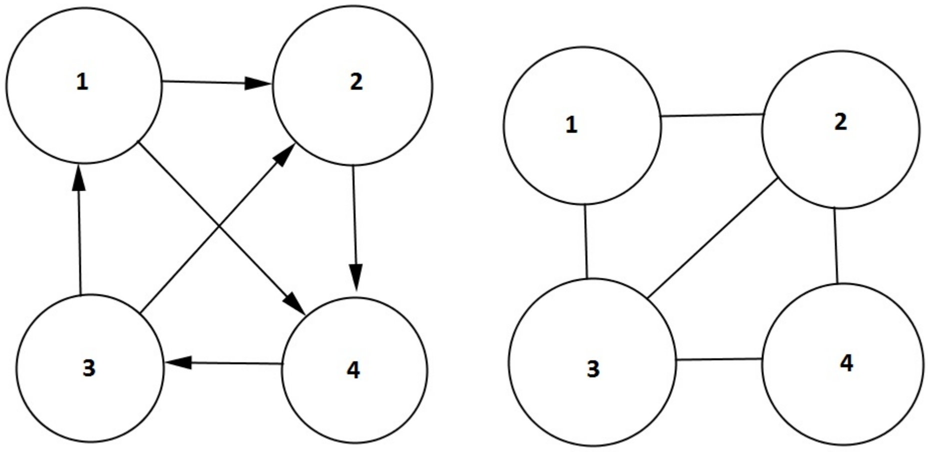
Podemos considerar os membros deste comitê como sendo os vértices de um grafo, sendo que dois vértices são adjacentes se as pessoas correspondentes tiverem trocado um aperto de mão. Assim, os graus dos vértices sendo, em alguma ordem, iguais a 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 8, contradiz o Corolário 1.1 pois há sete vértices com grau ímpar. Logo, a situação descrita não pode ter ocorrido. Este grafo pode ser representado por dez vértices, sem arestas que os conectem, já que tal situação não pode ter ocorrido.

Em determinados grafos faz-se necessário dar uma orientação às arestas, em apenas um sentido, com o objetivo de preservar a hierarquia existente entre os vértices e determinar se não existe uma reciprocidade num relacionamento. Tais grafos têm utilidade frequente em vários sistemas dinâmicos tais como computadores ou sistemas de fluxo (LIPSCHUTZ, 2004). Já quando não existir tal orientação, podemos interpretar que não existe hierarquia entre os vértices, ou seja, existe reciprocidade entre eles.

Definição 1.2. ***Grafo Direcionado***, ***Orientado*** *ou* ***Dígrafo*** *é todo grafo em que existe uma orientação quanto ao sentido das arestas (indicada por uma seta). Nesse sentido, se uma aresta conecta u e v, pode-se ir de u para v, mas não o contrário.*

Definição 1.3. ***Grafo não-Direcionado*** *ou* ***não-Orientado*** *é todo grafo em que não exista nenhuma orientação quanto ao sentido das arestas. Nesse caso pode-se ir de u para v ou de v para u.*

A título de exemplo, observe na Fig. 1.6(a) que os vértices são um grupo de quatro pessoas, já as arestas, representam uma relação de amizade. Porém, sabemos que uma relação desse tipo pode não haver reciprocidade, então, podemos fazer a seguinte interpretação da figura mencionada: 1 considera 2 e 4 como amigos(as); 2 considera 4 como amigo(a); 3 considera 1 e 2 como amigos(as) e 4 considera apenas 3 como amigo(a).



(a) (b)

Figura 1.6: Grafos: (a) Orientado e (b) não-Orientado.

Definição 1.4. ***Grafo Simples*** *é um grafo não direcionado, sem laços* [4] *e que tem no máximo uma aresta entre quaisquer dois vértices.*

Para exemplificar, nos referimos ao grafo não-orientado da Fig. 1.6 o qual define um grafo simples.

Definição 1.5. ***Grafo Completo*** *é um grafo simples em que, para cada vértice do grafo, existe uma aresta conectando a este vértice a cada um dos demais, ou seja, todos os vértices do grafo possuem mesmo grau. Se este tipo de grafo tem n vértices, então terá $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arestas e é denotado, frequentemente por K_n (vide Fig. 1.7).*

A demonstração de que o número de arestas num Grafo Completo que tenha n vértices é dado por $\dfrac{n(n-1)}{2}$ está descrita a seguir.

Demonstração.

Seja $G = (V, E)$ um grafo completo com n vértices e $X_i \in V$ (um vértice qualquer de G). O grau de x_i é $n-1$, por conseguinte em x_i incidem $n-1$ arestas. Considerando-se agora todos os vértices do grafo, temos que o somatório dos graus é $n(n-1)$. Como cada aresta incide em dois vértices, tem-se que cada aresta foi contada em dobro no somatório, logo o número das arestas de G é $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

[4]Laços são arestas que conectam um vértice a ele mesmo.

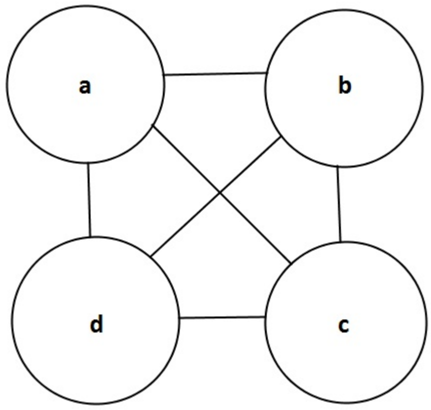


Figura 1.7: Grafo Completo.

Dado um grafo qualquer com $V = \emptyset$, este se diz Grafo Nulo, e, quando $E = \emptyset$, este se diz Grafo Vazio.

Definição 1.6. ***Grafo Trivial*** *é o grafo que possui apenas um vértice e nenhuma aresta.*

Definição 1.7. ***Grafo Regular*** *é um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau.*

Todo Grafo Completo é Regular, mas a recíproca nem sempre é verdadeira. Na Fig. 1.7, se não existissem as arestas ac e bd, por exemplo, tal grafo passaria a ser regular pois, todos os vértices teriam grau 2, mas não seria completo.

Definição 1.8. ***Multigrafo*** *é um grafo que permite múltiplas arestas (ou arestas paralelas) conectando os mesmos vértices.*

O grafo que contém arestas múltiplas (ou paralelas) e laços, é definido como Pseudografo (vide Fig.1.8). Neste grafo, os vértices A, B, C e D, tem arestas paralelas, além disso, os vértices A e D contém laços. Portanto, $d(A) = 3$; $d(B) = 6$; $d(C) = 2$ e $d(D) = 3$.

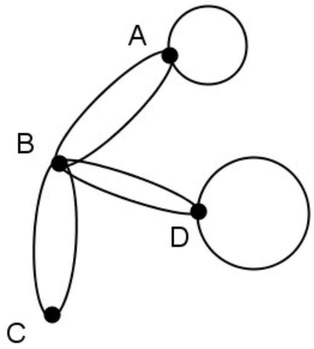


Figura 1.8: Pseudografo.

Definição 1.9. *Um grafo $H = (V', E')$ será dito **Subgrafo** de um grafo $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.*

A Fig. 1.9 mostra um exemplo de um grafo e dois subgrafos.

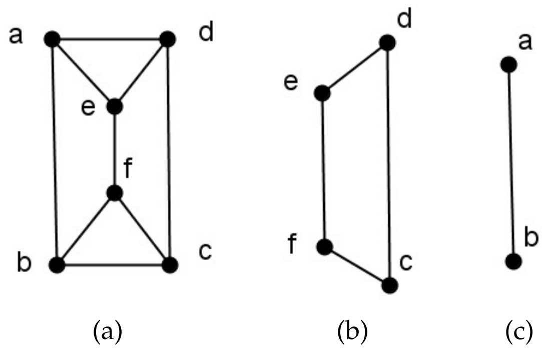


Figura 1.9: Exemplos de Grafo (a) e Subgrafos (b) e (c).

1.3 Circuitos em Grafos

Em determinadas situações, faz-se necessário estabelecer num grafo, um trajeto através dos vértices e arestas, com algumas especificidades. Essas recebem nomes específicos.

Um passeio ou percurso é uma sequência finita de vértices e arestas $v_0v_1; v_1v_2; v_2v_3; ...; v_{s-1}v_s$ começando e terminando com vértices, s é o comprimento do passeio. Se todas as arestas do passeio são distintas, o passeio é chamado trilha; se $v_0 = v_s$, o passeio é uma trilha fechada. Se, além das arestas, todos os vértices são distintos, então, têm-se um caminho e se $v_0 = v_s$, tem-se um ciclo.

Definição 1.10. *Uma sequência de vértices, em que sempre existe uma aresta conectando o vértice anterior com o seguinte tal que todos os seus vértices e arestas são distintos é chamada de caminho. O número de arestas que o caminho usa é chamado de comprimento do caminho.*

Definição 1.11. ***Grafo Conexo*** *é o grafo em que se consegue estabelecer um caminho entre qualquer par de vértices. Então, chama-se* ***Grafo Desconexo****, quando não se consegue exibir tal caminho.*

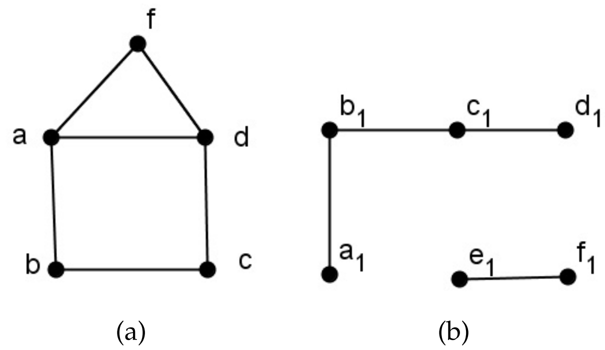


Figura 1.10: Grafos: (a) Conexo e (b) Desconexo.

Note da Fig. 1.10(a) que é possível estabelecer um caminho de qualquer vértice escolhido para qualquer outro vértice enquanto na Fig. 1.10(b) não se pode estabelecer um caminho de a_1 para e_1, por exemplo.

Definição 1.12. ***Ciclo*** *ou* ***Circuito*** *é um caminho que começa e acaba no mesmo vértice.*

Observação 1.1. *Ciclos de comprimento 1 são laços.*

Definição 1.13. ***Ciclos Simples*** *são ciclos que têm comprimento no mínimo de 3 unidades e no qual o vértice inicial só aparece mais uma vez, como o vértice final, e os outros vértices só aparecem uma vez.*

A título de exemplo, observem o grafo da Fig. 1.9(a). Deste grafo, podemos concluir que o caminho $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow a$ trata-se de um Ciclo Simples de comprimento 4.

Definição 1.14. ***Grafo Acíclico*** *é o grafo que não contém ciclos simples.*

Em determinados grafos, pode-se ter valores numéricos associados ou caracterizando as arestas. Esses valores, também chamados de pesos, representam uma condição existente entre os vértices adjacentes que podem representar distância, tempo, etc. A esses tipos de grafos dá-se o nome de Grafos Ponderados. Na Fig. 1.11 trazemos um exemplo de Grafo Ponderado onde seus pesos representam o tempo (em minutos) que normalmente é gasto para ir de um bairro a outro usando transporte público numa determinada cidade. Percebe-se que é possível estabelecer um caminho entre quaisquer bairros (vértices), então, tal grafo além de ser ponderando, é também, um Grafo Conexo. Agora observando a Fig. 1.12, percebe-se que não existe possibilidade de se estabelecer um caminho de Maria (vértice) a Luiz (vértice), portanto, trata-se de um Grafo Desconexo.

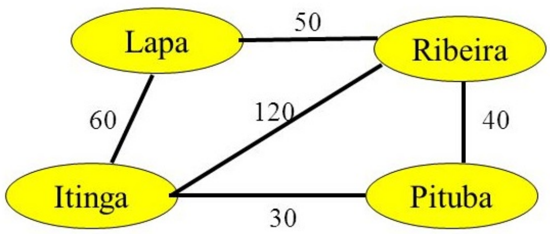


Figura 1.11: Grafo Ponderado.

Definição 1.15. ***Grafo Bipartido*** *é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos, e as arestas conectam apenas vértices pertencentes a conjuntos diferentes.*

Num grupo de cinco pessoas (Maria, Joana, Carla, Pedro e Luiz), Pedro conhece Maria e Carla, e Luiz conhece Joana (vide Fig. 1.12).

Do grafo ilustrado pela Fig. 1.12 pode-se considerar que há dois conjuntos, M e H, representando o conjunto das mulheres e o dos homens, respectivamente. Logo, pela Definição 1.15, trata-se de um Grafo Bipartido.

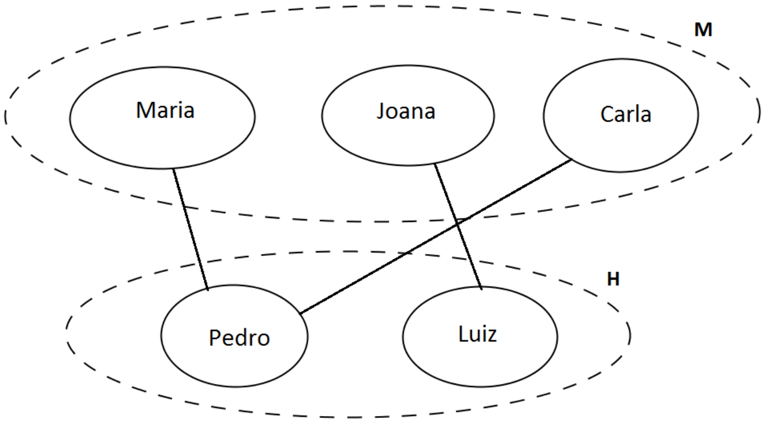


Figura 1.12: Grafo Bipartido.

Vale ressaltar que nos Grafos Bipartidos não há ciclo de comprimento ímpar. Como estabelece o teorema abaixo.

Teorema 1.2. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, não contém ciclos de comprimento ímpar.*

Prova

($\Rightarrow$) Seja G bipartido. Se não houver um ciclo em G, não há o que mostrar. Se há um ciclo em G, este alterna vértices de V_1 e V_2, dois subconjuntos disjuntos. Partindo de V_1, por exemplo, para retornar ao ponto de partida, teremos que utilizar um número par de arestas. O ciclo é, portanto, de comprimento par.

($\Leftarrow$) Considerando apenas grafos conexos, seja G um grafo sem ciclos ímpares, particionando em dois subconjuntos V_1 e V_2, independentes e disjuntos. Tomando-se primeiramente um vértice qualquer v, o subconjunto V_1 será formado por todos os vértices w tais que exista um caminho de comprimento par entre v e w. Os conjuntos V_1 e V_2 são disjuntos, pois se w estivesse em V_1 e V_2 ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um comprimento de tamanho ímpar ligando v e w. Esses caminhos podem se cruzar (ou não) antes de chegar em w, produzindo alguns ciclos (vide Fig. 1.13). Como o número usado de arestas nos caminhos é ímpar (a soma do número de arestas dos dois caminhos) isso produziria pelo menos um ciclo ímpar em G, contrariando a hipótese.

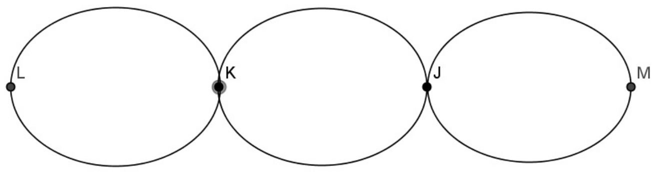


Figura 1.13: Caminhos e ciclos.

Definição 1.16. ***Grafo Euleriano*** *é o grafo que possui uma trilha fechada, ou seja, visita cada aresta apenas uma vez e o vértice inicial é também o vértice final.*

Como consequência da visita a cada aresta, todos os vértices também serão visitados, no entanto podem ser visitados quantas vezes se precisar. O grafo ilustrado na Fig.1.14 é um exemplo de Grafo Euleriano, pois pode-se fazer o percurso: $a \longrightarrow b \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b \longrightarrow a \longrightarrow c \longrightarrow a$.

Retomando o problema das Pontes de Koningsberg, para entender como Euler chegou a sua conclusão, faz-se necessário entender o lema e o teorema a seguir:

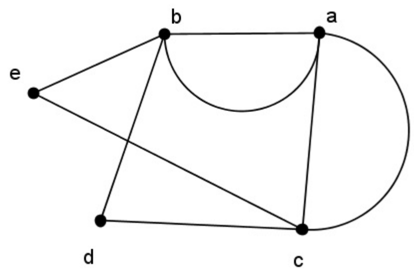


Figura 1.14: Grafo Euleriano.

Lema 1.1. *Se todo vértice de um grafo conexo G (não necessariamente simples) tem grau maior ou igual a 2, então, G contém um ciclo.*

Demonstração. Se G tem laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois G já contém um ciclo. Considerando um Grafo Simples, partindo de um vértice inicial qualquer, inicia-se uma trilha. Quando chegamos a outro vértice, estamos visitando-o pela primeira vez; continuando o percurso, ao chegar a um vértice já visitado, produzimos um ciclo. Como o número de vértices é finito, o resultado está provado.

Teorema 1.3. *(Euler) Um Grafo Conexo (não necessariamente simples) G é euleriano se, e somente se, todos seus vértices têm grau par.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Supondo que G tenha uma trilha fechada m. Cada vez que a trilha passa por um vértice, utiliza duas novas arestas, um para entrar outro para sair. Logo, o grau de cada vértice é obrigatoriamente par.

($\Leftarrow$) Seja G com todos os vértices de grau par. Usaremos indução sobre o número de arestas m do grafo. Para $m = 0$ é verdadeiro. Supondo que seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas, sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo Lema 1.1, G contém um ciclo. Dentre todas as trilhas fechadas de G escolheremos uma trilha T com o comprimento máximo. Se T tem comprimento m, o teorema está provado. Caso contrário, consideremos o grafo H resultante da retirada das arestas de T. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T, e todos os vértices têm grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices de grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha que passa por todos os vértices de H, e podemos formar uma trilha fechada maior, conectando T com a trilha H. Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T.

Fica então provado que para se obter o percurso pretendido seria necessário que as porções de terra tivessem uma quantidade par de entradas e saídas (pontes) conectando-as. Neste caso, isto representa condição necessária para existir um ciclo como todas as porções de terra que possuem uma quantidade ímpar de pontes. Logo, não existe tal percurso, ou ainda, basta observar que o grafo feito por Euler não é Euleriano.

Definição 1.17. ***Grafo Semi-Euleriano*** *é o grafo que possui uma trilha que visita cada aresta apenas uma vez e não retorna ao vértice inicial.*

Temos da Fig. 1.15 uma representação de um Grafo Semi-Euleriano, pois pode-se fazer, por exemplo, o percurso: $a \longrightarrow c \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow e \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b$.

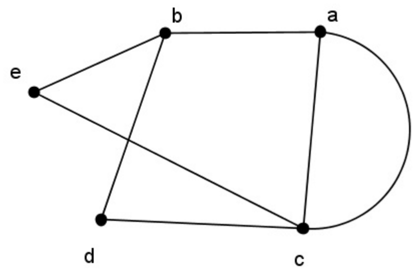


Figura 1.15: Grafo Semi-Euleriano.

O corolário a seguir, será importante para determinar se um dado Grafo é Semi-Euleriano.

Corolário 1.2. *Um Grafo Conexo (não necessariamente simples) G é Semi-Euleriano se, e somente se, dois vértices têm grau ímpar.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que G possua um caminho Semi-Euleriano F começando num vértice u e terminando num vértice v. Como $u \neq v$, u e v têm ambos grau ímpar, pois cada vez que um dos demais vértices aparecem em F tem duas arestas incidentes. Como cada aresta ocorre uma vez em F, o grau desses vértices é par.

($\Leftarrow$) Suponhamos que G seja conexo e possui dois vértices u (inicial) e v (final) de grau ímpar, pois em outra situação não teríamos um grafo. Considere o grafo H que se obtém de G por junção de uma nova aresta ligando u a v. A este novo grafo podemos aplicar o Teorema 1.3 e concluir que admite um caminho Euleriano. Apagando deste caminho a aresta previamente adicionada a G obtemos um caminho Semi-Euleriano ligando u a v, como desejado.

Definição 1.18. ***Grafo Hamiltoniano*** *é o grafo que possui um caminho que visita cada vértice apenas uma vez.*

Notem que o grafo da Fig. 1.16 trata-se de um Grafo Hamiltoniano, pois pode-se fazer, por exemplo, o percurso $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow e$, esse percurso é chamado *caminho Hamiltoniano*. Se tal percurso fosse $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow e \longrightarrow a$, este seria um *Ciclo Hamiltoniano*, que é definido como: *é um percurso feito, partindo de um vértice qualquer do grafo, passando por todos os seus vértices apenas uma vez e retornando ao vértice do qual partiu*.

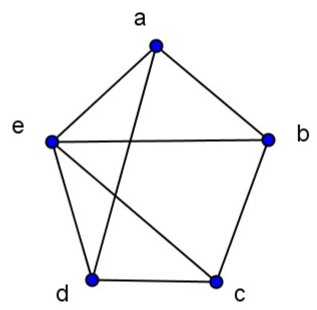


Figura 1.16: Grafo Hamiltoniano.

A seguir iremos apresentar uma definição de como pode ocorrer um mapeamento injetivo entre dois grafos distintos.

1.4 Isomorfismo

Definição 1.19. *Dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$, serão ditos* ***isomorfos*** *se existir uma bijeção $f : V_1 \longrightarrow V_2$ que preserva incidência, i.e., tal que, para vértices distintos quaisquer u e v de G, tenha-se*

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2. \tag{1.6}$$

Deste modo, denota-se que $G_1 \simeq G_2$.

Dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles, em outras palavras, dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais.

Proposição 1.1. *Dois grafos isomorfos têm quantidades iguais de vértices de um mesmo grau. Em particular, têm quantidades iguais de vértices e quantidades iguais de arestas.*

Prova. Sejam $G = (V_1; E_1)$ e $H = (V_2; E_2)$ grafos isomorfos e $f : V_1 \longrightarrow V_2$ uma bijeção que preserva incidência. Se u é um vértice de G com grau $k \geq 0$, é imediato que $f(u)$ é um vértice de H com grau k. Portanto, G e H têm quantidades iguais de vértices de grau k, digamos a_k, de maneira que

$$|V_1| = \sum_{k \geq 0} a_k = |V_2|. \tag{1.7}$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Euler duas vezes, juntamente com a primeira parte acima, obtemos

$$2|E_1| = \sum_{u \in V_1} d_G(u) = \sum_{u \in V_1} d_H(f(u)) = \sum_{f(u) \in V_2} d_H(f(u)) = 2|E_2|. \tag{1.8}$$

e, daí

$$|E_1| = |E_2|. \tag{1.9}$$

Da Fig. 1.17, note que $f(a) = 1; f(b) = 2; f(c) = 7; f(d) = 6; f(e) = 5; f(f) = 8; f(g) = 3$ e $f(h) = 4$. Portanto, tais grafos são isomorfos.

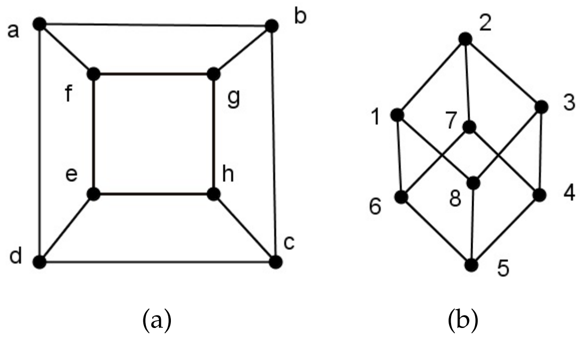


Figura 1.17: Grafos Isomorfos.

De modo geral pode-se mostrar que grafos não são isomorfos através de invariantes como: número de vértices, número de arestas, existência de arestas paralelas, laços, vértices com grau diferente, ciclos e pela conexidade. Exemplos clássicos de isomorfismo em grafos são notados na representação dos grafos que representam os poliedros regulares de modo que não haja cruzamento entre as arestas.

No próximo capítulo será abordado duas particularidades da Teoria dos Grafos, a saber, Árvores e Planaridade, muito utilizadas em conteúdos de caráter Matemático, embora não disseminado nos livros didáticos.

Capítulo 2

Árvore e Arborescência; Planaridade e Coloração de Mapas

Os problemas que envolvem a Teoria dos Grafos as vezes apresentam difícil solução, porém, uma boa maneira de resolver esses problemas é representá-los como *árvores* ou *arborescências* (SCHEINERMAN, 2003) - que talvez sejam a família mais simples de grafos - ou coloração de vértices, contribuindo também na resolução de problemas relacionados a Análise Combinatória e a Probabilidade, muitas vezes sem utilização de fórmulas.

2.1 Árvore e Arborescência

As árvores são uma das mais importantes estruturas da Teoria dos Grafos, encontrando aplicações em organograma de empresas, esquemas de tabelas de campeonatos, árvore de decisão, na formação das estruturas de dados em informática e na solução de grande número de problemas reais (GOLDBARG, 2012).

Definição 2.1. ***Árvore*** *é um grafo conexo e sem ciclos.*

A Definição 2.1 é a mais usual entre os autores, porém sucinta. Outras propriedades exclusivas das árvores podem ser utilizadas como definição e estão especificadas no Teorema 2.1 enunciado a seguir. Entre tais propriedades, a mais tradicional diz que *"é um grafo conexo T* [1] *aquele que existe um e somente um caminho entre qualquer par de vértices de T"* (GOLDBARG, 2012). A Fig. 2.1 é um exemplo de árvore.

[1] O uso da letra T para denotar uma árvore genérica deriva da palavra inglesa para árvore, *tree.*

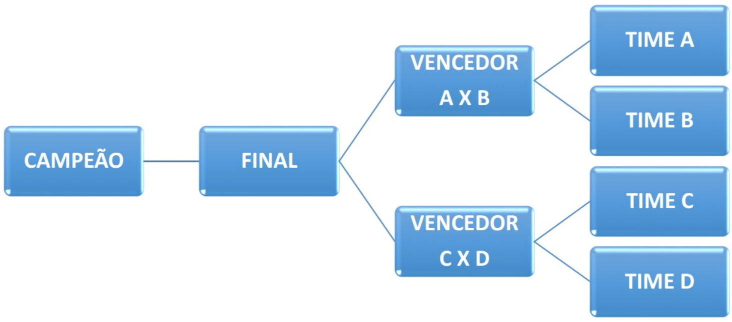


Figura 2.1: Tabela de um campeonato, do tipo mata mata.

Numa árvore um vértice de grau 1 é chamado *folha* e um *nó* é um vértice de grau maior que 1 (NETO, 2012).

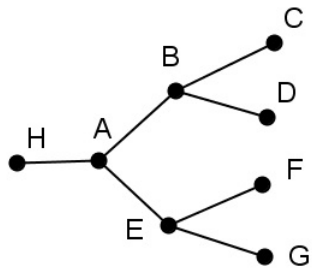


Figura 2.2: Grafo da Fig. 2.1.

Teorema 2.1. *Seja G = (V,E) um grafo com* $n \geq 2$ *(vértices); as propriedades seguintes são equivalentes para caracterizar G como uma árvore:*

1. G é sem ciclos e conexo.
2. G é sem ciclos e têm $n-1$ arestas.
3. G é conexo e tem $n-1$ arestas.
4. G é sem ciclos e a adição de uma aresta cria um ciclo único.
5. G é conexo, mas $G' = (V, E - \{u\})$ é não-conexo $\forall\, u \in U$.
6. Todo par de vértices de G é unido por uma cadeia única.

Prova:

(1) $\Rightarrow$ (2): Se retirarmos uma aresta de G, teremos um grafo não conexo com duas componentes conexas (se assim não fosse, recolocando a aresta ela fecharia um ciclo). Retirando uma segunda aresta, estaremos portanto dividindo a componente à qual ela pertence em duas e, assim, sucessivamente, até que para obter n componentes conexas, devemos ter retirado ao todo $n-1$ arestas. Com n componentes conexas, o último grafo será trivial; então o total de arestas nele existentes será $n-1$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Suponhamos por absurdo que G não seja conexo: então irá existir dois vértices u e v não unidos por uma cadeia (percurso). Acrescentemos a G a aresta uv. O novo grafo não pode ter ciclos, porque G não os possuía. Repetindo o processo até que o grafo se torne conexo, teremos adicionado k arestas ao todo. O grafo resultante não pode ter ciclos, porque somente foram unidos vértices anteriormente não ligados. Mas (2) nos garante que o grafo possuía $n-1$ arestas e (3) mantém essa afirmação; logo, $k=0$, o que implica em que o grafo original era conexo.

(3) $\Rightarrow$ (4): Suponhamos por absurdo que G possua um ou mais ciclos. Retirando uma aresta de um ciclo, restarão por hipótese $n-2$ arestas e o grafo continuará conexo. Repetindo-se o processo enquanto existir um ciclo, ter-se-ão retirado ao final k arestas e o grafo, neste momento, será uma árvore; mas restarão apenas, neste momento, $n-k-1$ arestas, com $k>0$; então se conclui que, de fato, $k=0$ e o grafo original não possuía ciclos.

(4) $\Rightarrow$ (5): Suponhamos que G não seja conexo. Sejam, então u e v dois vértices não ligados. Adicionemos a G a aresta uv. Por hipótese, teremos criado um ciclo - que é absurdo, sendo u e v não ligados. Logo, eles são de fato ligados e o grafo é conexo.

(5) $\Rightarrow$ (6): Suponhamos que dois vértices u e v em G estejam ligados por mais de uma cadeia: então, suprimindo-se uma aresta pertencente a uma delas, o grafo continuaria a ser conexo, o que contrairia a hipótese.

(6) $\Rightarrow$ (1): Dizer que todo par de vértices de G é unido por uma cadeia equivale a dizer que G é conexo; por outro lado, se existisse mais de uma cadeia unindo dois vértices dados u e v, existiria ao menos um ciclo, logo a cadeia existente é única.

Lema 2.1. *Toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos duas folhas.*

Prova. Seja T uma árvore com pelo menos dois vértices e considere em T um caminho C com o maior comprimento possível. Se $C=(u_1,u_2,...,u_n)$, afirmamos que u_1 e u_n são folhas. De fato, se fosse $d_T(u_1)\geq 2$, então u_1 seria adjacente a u_2 e a um outro vértice que chamaremos de u_0. Como árvores não contém ciclos, deve ser $u_0 \neq u_3, ..., u_n$. Daí, o caminho $(u_0, u_1, u_2, ..., u_n)$ teria comprimento maior que c, o que é um absurdo. Logo, $d_T(u_1) = 1$, e analogamente, $d_T(u_n) = 1$.

A Proposição seguinte dá uma condição necessária para um grafo conexo ser uma árvore.

Proposição 2.1. *Se $T = (V, E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$.*

Prova. Façamos indução sobre $|V|$. Inicialmente, é claro que toda árvore com dois vértices têm exatamente uma aresta. Suponha, como hipótese de indução, que toda árvore com $n > 1$ vértices têm exatamente $n - 1$ arestas, e considere uma árvore T com $n + 1$ vértices. Pelo Lema 2.1, T tem uma folha u; portanto, $T - u$ é uma árvore com n vértices, e a hipótese de indução garante que $T - u$ tem $n - 1$ arestas. Mas como T tem exatamente uma aresta a mais que $T - u$, segue que T tem exatamente n arestas.

Corolário 2.1. *Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então G contém pelo menos um ciclo se e só se $|E| \geq |V|$.*

Prova. Suponha inicialmente que G contém pelo menos um ciclo. Iremos mostrar que $|E| \geq |V|$ por indução sobre $|E|$. Se ϵ é uma aresta de um ciclo em G, então $G - \epsilon$ ainda é conexo e tem $|V|$ vértices e $|E| - 1$ arestas. Há, pois, duas possibilidades:

- $G - \epsilon$ ainda contém pelo menos um ciclo: segue da hipótese de indução que $|E| - 1 \geq |V|$;
- $G - \epsilon$ é acíclico: como ainda é conexo, $G - \epsilon$ é uma árvore, e a proposição anterior garante que $|V| = (|E| - 1) + 1 = |E|$.

Em qualquer caso, $|E| \geq |V|$. Reciprocamente, se G for acíclico, então G é uma árvore, e a proposição anterior garante que $|E| = |V| - 1 < |V|$.

Corolário 2.2. *Seja $T = (V, E)$ um grafo conexo. Se $|E| = |V| - 1$, então T é uma árvore.*

Prova. Se T contivesse pelo menos um ciclo, seguiria do corolário anterior que $|E| \geq |V|$, uma contradição. Logo, T é conexo e acíclico, donde uma árvore.

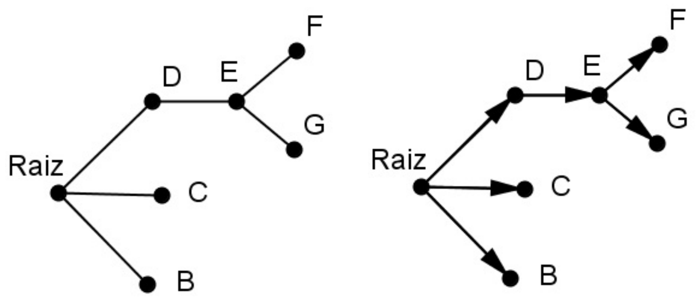
Um tipo de estrutura similar as *árvores* em que a orientação das arestas é relevante será especificada a seguir.

Arborescência é o nome dado a um tipo de estrutura associado a árvores. Este termo é utilizado para diferenciá-las das árvores em que não se considera uma orientação. Uma arborescência qualquer apresenta as seguintes propriedades:

- Existe um vértice sem antecessores, o qual recebe o nome de *raiz*;

- Todos os vértices (fora a raiz) possuem exatamente um único antecessor.

Na arborescência, a direção das arestas é considerada. Tal direção pode ser indicada por uma seta (que também é um tipo de aresta), ou simplesmente pelas arestas usuais (sem direção). Esta escolha fica a critério de cada um, pois uma vez escolhida a raiz da árvore, automaticamente é estabelecida uma orientação natural dos arcos, ou seja, a raiz dá o sentido delas (vide Fig. 2.3).



(a) (b)

Figura 2.3: Ilustração de Arborescências.

A arborescência de uso mais frequente é a *arborescência binária* ou *árvore binária*. Se caracteriza desta forma por conta de uma propriedade adicional:

- Todos os seus vértices têm no máximo dois sucessores (por ser binária).

Exemplos clássicos desse tipo de arborescência aparecem com frequência em problemas de probabilidade que envolvam moeda. A seguir abordaremos um problema cuja solução tornase facilitada quando associada a *árvore*.

Exemplo 2.1. *Um estudante se submete a um exame de múltipla escolha no qual cada questão tem 5 respostas possíveis das quais exatamente uma é correta. O estudante seleciona a resposta correta se ele sabe a resposta. Caso contrário, ele seleciona ao acaso uma resposta entre as 5 possíveis. Suponha que o estudante saiba a resposta de 70% das questões.*

a) Qual a probabilidade de que o estudante escolha a resposta correta para uma dada questão?

b) Se o estudante escolhe a resposta correta para uma dada questão, qual a probabilidade de que ele sabia a resposta?

Uma boa maneira de resolver este problema é representando-o através de uma árvore binária - o que facilitará sua análise - já que tem-se apenas duas possibilidades para o estudante quanto a sua escolha, a saber, ter ou não a resposta. Segue então pelo enunciado que:

- ele sabe (e acerta) $70\% = \dfrac{7}{10}$ das respostas, logo, não sabe $30\% = \dfrac{3}{10}$;
- quando não sabe, seleciona uma resposta qualquer, podendo acertar ou não. Neste caso, como existem 5 alternativas e apenas uma é correta, ele tem $\dfrac{1}{5}$ chance de acerto e $\dfrac{4}{5}$ chance de erro.

Portanto, a árvore binária fica modelada da seguinte forma. Considere Q (questão):

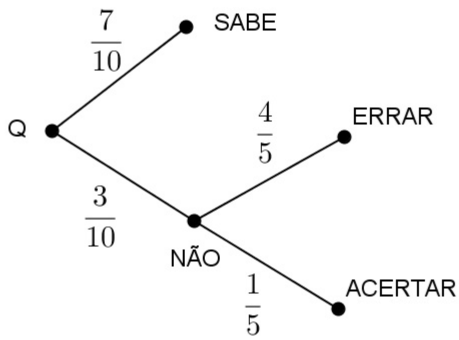


Figura 2.4: Possibilidades para o estudante.

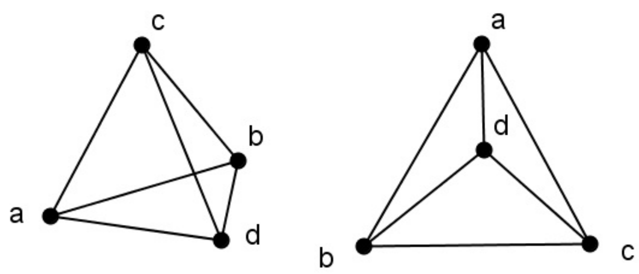
a) Temos aqui dois caminhos a seguir, quando ele sabe e quando ele não sabe mas acerta, logo, $\dfrac{7}{10} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{19}{25}$

b) Aqui queremos a probabilidade de que sabia a resposta, $\dfrac{7}{10}$, no universo das respostas certas, $\dfrac{19}{25}$, logo, $\dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{19}{25}} = \dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{25}{19} = \dfrac{35}{38}$.

2.2 Planaridade e Coloração de Mapas

Finalizando este capítulo, é abordado nesta seção um importante tema que tem uma vasta aplicação na solução de diversos problemas, **os grafos planares**. Um grafo é dito planar se admite uma representação gráfica em um plano na qual as arestas só se encontrem nos vértices aos quais são incidentes. Na Fig. 2.5(a) temos um exemplo de um grafo planar G cujas arestas se interceptam. Apesar disso é possível construir um tipo de grafo G' (vide Fig. 2.5(b)) isomorfo a G, de tal modo que as arestas não se interceptem, desta forma, G é um Grafo Planar. Como exemplos clássicos desses tipos de grafos, têm-se os que representam os poliedros.

Quando um grafo é planar (sem cruzamento de arestas) ele divide o plano em regiões, chamadas faces, delimitadas por suas arestas. A região exterior ao grafo, que não é limitada por suas arestas, também é considerada uma face.



(a) G (b) G'

Figura 2.5: Grafo Planar

Tomando como exemplo o grafo G'da Fig. 2.5(b) e denotando o número de faces por F, de vértices por V e de arestas por E, tem-se que $F = 4$, $V = 4$ e $E = 6$. Note que, $V + F = E + 2$. Esta relação não é uma simples coincidência, ela vale para todos os grafos planares, como estabelece o teorema a seguir:

Teorema 2.2. *Seja G um grafo planar simples e conexo. Seja F o número de faces, V o número de vértices e E o número de arestas de G, então $V + F = E + 2$.*

Prova. Vamos provar por indução em F. Se $F = 1$ o teorema é verdadeiro pois o grafo é uma árvore e $E = V - 1$. Supondo $F \in \mathbb{N}$ tal que $F \geq 2$. Escolhendo uma aresta a de G que não seja de corte[2] (a pertence a algum ciclo de G) e retirando-a obtemos um subgrafo G' que

[2]Uma aresta que quando removida aumenta o número de componentes conexas de um grafo G é chamada *ponte* ou *aresta de corte*. As componentes conexas, funcionam como subgrafos.

é conexo. Note que G tem ao menos um ciclo pois $F \geq 2$ e assim G não é árvore. Logo, o subgrafo G' tem $F-1$ faces, V vértices e $E-1$ arestas. Dessa forma, $V+(F-1)=(E-1)+2$. Donde concluímos que $V+F=E+2$.

Este resultado é conhecido como a fórmula de Euler ou o Teorema de Euler. Os resultados a seguir serão importantes para posterior aplicação, a saber, na solução de problemas do capítulo seguinte.

Corolário 2.3. *Em todo grafo planar conexo* $2E \geq 3F$.

Prova. Se contarmos as arestas de cada face, contamos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face é limitada por pelo menos três arestas então $\dfrac{3F}{2} \leq E$ (pois o grafo possui E arestas). Daí, $2E \geq 3F$. A igualdade se verifica se todas as faces forem triangulares.

Corolário 2.4. *Seja G um grafo conexo planar bipartido, com ao menos duas arestas, então* $E \leq 2V-4$.

Prova. Se um grafo é bipartido não tem ciclo de comprimento ímpar. Assim, cada face tem, no mínimo 4 arestas. Se contarmos as arestas de cada face, contamos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face é limitada por pelo menos quatro arestas então $\dfrac{4F}{2} \leq E$. Daí, $2E \geq 4F$. Da relação de Euler temos que $V-E+F=2$. Daí, $4V-4E+4F=8$, como $2E \geq 4F$ então $4V-4E+2E \geq 8$. Com isso, $E \leq 2V-4$.

Existem outros importantes resultados relacionados a grafos planares que não foram mencionados neste trabalho que podem ser encontrados em (BONDY, 2008; HARRIS, 2008; WILSON, 1996).

Um outro importante tema e um dos mais conhecidos na Teoria dos Grafos, mencionado em outrora, é o problema da coloração em grafos. Colorir um grafo G é atribuir cores aos seus vértices de forma que vértices adjacentes recebam cores distintas, dessa forma, colorir um grafo é uma atividade simples pois, basta atribuir uma cor para cada vértice. No entanto, o problema da coloração é estabelecido quando objetiva-se colorir o tal grafo, utilizando o menor número possível de cores, a este chama-se *número cromático*, denotado por $\chi(G)$. As aplicações de coloração aparecem quando precisamos repartir o conjunto de vértices em conjuntos de vértices independentes[3] disjuntos (JURKIEWICZ, 2009a). A coloração depende exclusivamente da vizinhança entre países ou regiões e não de suas formas, tamanhos ou posições (GOLDBARG, 2012).

[3]Um conjunto independente de um grafo G é um conjunto S de vértices de G tal que não existem dois vértices adjacentes contidos em S, ou seja, se u e v são vértices quaisquer de um conjunto independente, então não há arestas conectando u e v.

Cada mapa do plano pode ser representado por um grafo, sendo as regiões do mapa representadas pelos vértices e as fronteiras pelas arestas. Desse modo, as arestas conectam os vértices se as regiões tiverem uma fronteira em comum. O grafo assim obtido é chamado ***grafo dual*** do mapa. Vale salientar que duas ou mais regiões com apenas um ponto em comum não são consideradas adjacentes. Desse modo, para se colorir um mapa pretendendo utilizar o mínimo de cores, contanto que regiões fronteiriças tenham cores diferentes é equivalente a colorir os vértices de grafo dual, de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor.

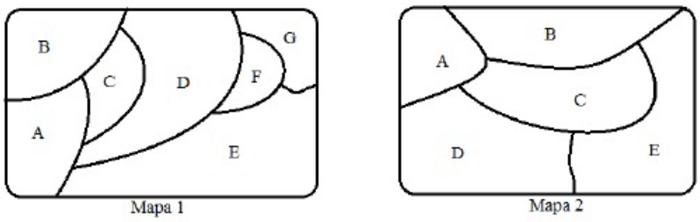


Figura 2.6: Mapas ilustrativos.

Para se colorir os mapas da Fig. 2.6 utilizando o menor número de cores, serão necessários quatro cores para o Mapa 1, e, para o Mapa 2, três cores (vide Fig. 2.7) que são os grafos duais dos mapas associados a Fig. 2.6. Portanto, o número cromático do mapa 1 é quatro e do mapa 2 é três, assim, o grafo dual do mapa 1 representa uma 4-coloração ou é 4-colorável, do mesmo modo o grafo dual do mapa 2 representa uma 3-coloração ou é 3-colorável.

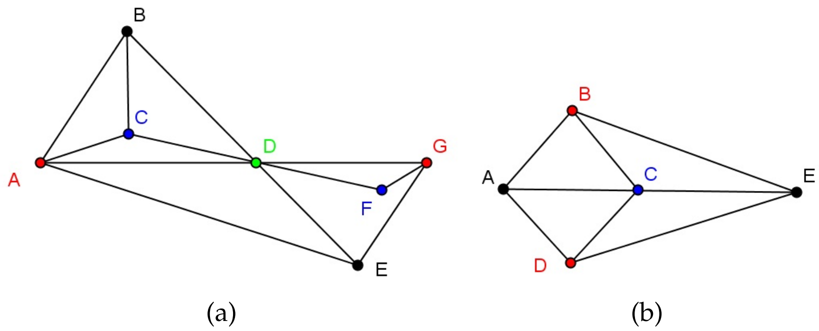


Figura 2.7: Grafo Dual (a) do Mapa 1 e (b) do Mapa 2.

O Teorema das quatro Cores diz que um mapa desenhado num plano pode ser colorido utilizando-se, no máximo quatro cores, de modo que regiões que possuem uma fronteira comum recebam cores diferentes. Foi conjecturado por Francis Guthrie, em 1853, mas sua prova permaneceu em aberto até que Appel & Haken (1977) apresentaram uma prova com o auxílio de um computador - Alguns membros da comunidade científica não aceitam a prova exibida, uma vez que se faz necessária a análise exaustiva de um grande número de configurações - finalmente, em 2008 Gonthier demonstrou o referido teorema (GOLDBARG, 2012). Um fato importante é que em 1879, Kempe propôs uma pretensa solução que só em 1890 foi refutada por Heawood, que provou a suficiência de cinco cores para a coloração dos vértices de grafos planares (CARDOSO, 2004-2005).

A seguir serão expostos dois problemas cuja solução envolverá, coloração de mapas e coloração de vértices, respectivamente.

Exemplo 2.2. *O califa de Bagdad tinha quatro filhos e tinha muito gosto por eles. Para cada filho mandou construir um palácio. O filho mais velho, Abdul, ficou com o terreno 1, Budal com o terreno 2, Cadaf com o terreno 3 e Dubal com o terreno 4, (vide Fig. 2.8). Antes de morrer, fez um testamento com indicações de como deveriam ser distribuídas suas ricas terras, num total de 20. Cada filho ficaria com o terreno onde tinha seu palácio. Abdul, herdaria também o terreno 9, onde ficava o palácio do califa. Os outros terrenos seriam distribuídos de modo que, no final, cada filho ficasse com 5 terrenos, mas, seus 5 terrenos não poderiam ter fronteiras comuns. Por exemplo, Cadaf não podia ficar com o terreno 19. Como esses irmãos fariam a divisão das terras entre si?*

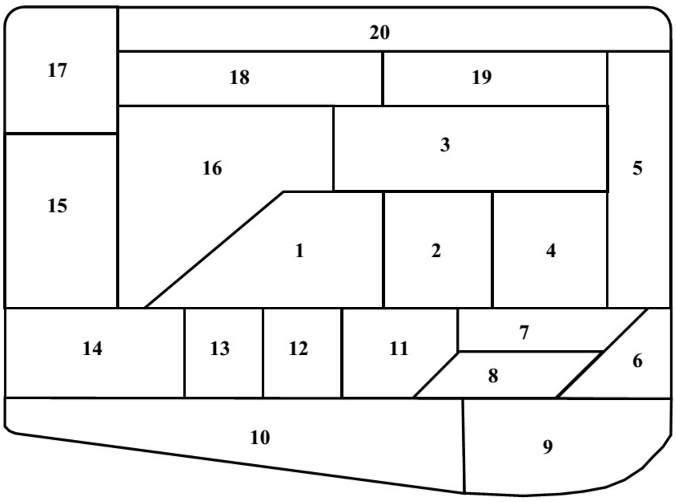


Figura 2.8: Mapa das terras do califa.

Um meio de se fazer essa divisão seria por coloração das faixas de terra (vide Fig. 2.9).

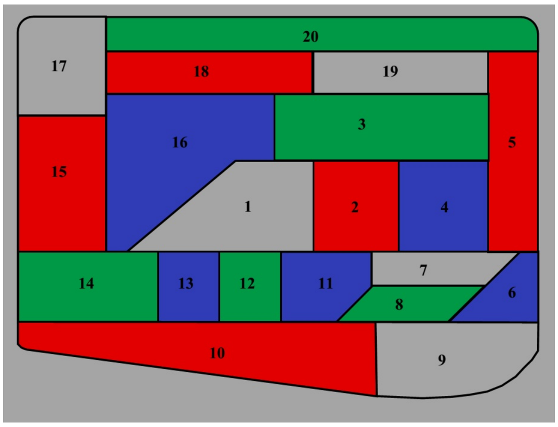


Figura 2.9: Coloração das terras.

Para o exemplo a seguir, usaremos a coloração de vértices para facilitar a resolução. Podem haver outras formas de resolução deste problema.

Exemplo 2.3. *Para um determinado Congresso estão cogitados, em princípio, 7 minicursos a serem confirmados ou não em função da disponibilidade de horários, obedecidas as seguintes condições:*

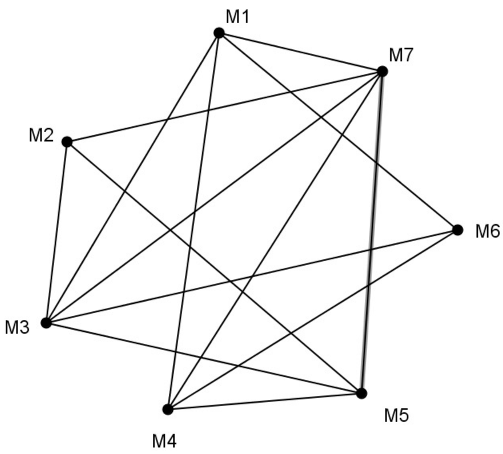
- Em todos os dias, durante o período de realização do Congresso, deve haver sessões de todos os minicursos. Cada minicurso deve ser oferecido em horário fixo (válido para todos os dias), podendo ser alocados num mesmo horário mais de um minicurso (há número suficiente de salas para isso). O horário reservado a cada minicurso deve ser, obrigatoriamente, 8:00/9:30, 9:30/11:00, 11:00/12:30, 14:30/16:00 ou 16:00/17:30.

- Denominando os minicursos por M1, M2, M3, M4, M5, M6 e M7, não podem ter horários coincidentes: M1 com M3, M4, M6 e M7 / M2 com M3, M5 e M7 / M3 com M1, M2, M5, M6 e M7 / M4 com M1, M5, M6 e M7 / M5 com M2, M3, M4 e M7 / M6 com M1, M3 e M4 / M7 com M1, M2, M3, M4 e M5.

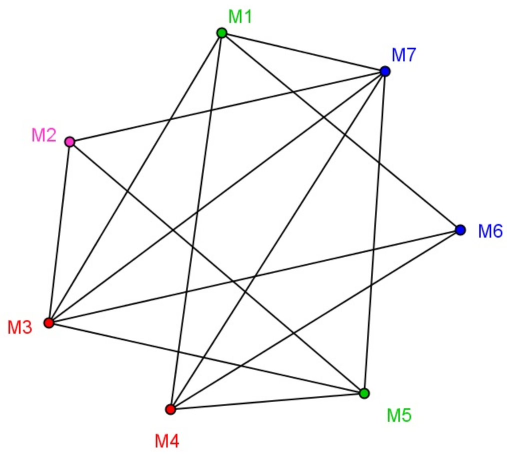
Os 7 minicursos podem ser oferecidos, isto é, é possível destinar horários para eles com as condições impostas? Se afirmativo, otimize tal alocação, isto é, conclua sobre o número mínimo de horários fixos a serem utilizados. Exemplifique um quadro de horários realizando este mínimo.

Solução.

Consideremos os minicursos como sendo os vértices do grafo. Dois vértices serão conectados por uma aresta se os mesmos correspondem a minicursos que não podem ter horários coincidentes conforme descrito na Fig. 2.10(a). Agora, atribuiremos cores aos vértices de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes, buscando usar o mínimo de cores. Na prática, cada cor representará um horário. Assim, temos da Fig. 2.10(b) a representação completa do problema. Desta última, podemos concluir que os sete minicursos podem ser oferecidos, pois são suficientes apenas quatro cores para colorir este grafo, o que significa que dos cinco horários disponibilizados, necessitamos apenas de quatro. A Tabela 2.1 exemplifica um dos possíveis horários para a realização dos minicursos.



(a)



(b)

Figura 2.10: Grafos (a) e (b) da aplicação 6

Horário	Cor Associada	Minicursos oferecidos
8:00/9:30	Azul	M6 e M7
9:30/11:00	Verde	M1 e M5
11:00/12:30	XXXXXXXX	XXXXXXXX
14:30/16:00	Rosa	M2
16:00/17:30	Vermelho	M3 e M4

Tabela 2.1: Tabela de horários.

Assim como abordado no capítulo anterior, pretende-se neste capítulo, revelar o potencial significativo desta parte da Teoria dos Grafos, seja para representações em certas atividades cotidianas ou quando associada ao estudo da Análise Combinatória e Probabilidade. Para esta última, nota-se que tal parte da teoria, na fase pré universitária, não vem sendo devidamente utilizada ou abordada. Tal fato se dá, possivelmente, pois o conteúdo não é ofertado, além disso nota-se que nos livros didáticos, a Teoria das Árvores é mencionada como "diagrama de árvores ou árvore de possibilidades", não fazendo menção: a sua origem ou mesmo a sua parte teórica, sendo que esta traz como benefício, inclusive, a não utilização de fórmulas quando na resolução de problemas (vide Exemplo 2.1).

No próximo capítulo traremos uma discussão acerca do por que grafos na Educação Básica além de aplicações usando resultados já enunciados e demonstrados neste texto.

Capítulo 3

Por que Grafos na Educação Básica?

NESTE capítulo faremos uma breve discussão acerca do porque de Grafos na Educação Básica e apresentaremos algumas aplicações. O objetivo é mostrar que a inclusão da Teoria dos Grafos não só é possível, como também necessária na Educação Básica, principalmente quando associadas a conteúdos de Matemática, além de contribuir na resolução de problemas relacionados a outras áreas do conhecimento.

3.1 Contribuições na Análise Combinatória e Probabilidade

A discussão sobre a seleção e a organização de conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental é complexa, porém, há um razoável consenso no sentido de que devam contemplar o estudo dos números e das operações, o estudo do espaço e das formas, estudo das grandezas e das medidas, e, aqueles que permitam ao cidadão tratar as informações que recebem cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória (BRASIL, 1997). Mas, como tratar deste último ponto (parte da matemática discreta), sendo que Análise Combinatória e Probabilidade tem sido frequentemente indicada por professores do Ensino Médio como sendo uma área da Matemática de obstáculo, se tornando um verdadeiro tabu para os estudantes (BACHX, 1975; CARVALHO, 2010; MORGADO, 2006)?

É necessário dar um melhor tratamento a alguns assuntos no Ensino Fundamental, para se conseguir respeitar finalidades da LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional) para o Ensino Médio, a saber, garantir a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos no Ensino Médio, portanto, evitando que àqueles conteúdos, outrora mencionados e classificados como difíceis, tragam algum tipo de problema que influenciem na aprendizagem dos discentes.

Respeitando finalidades e princípios estabelecidos pela LDB e PCN'S (Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensinos Fundamental e Médio), devemos considerar o pluralismo de ideias e adotar estratégias que estimulem a iniciativa dos discentes. Procura-se com isso levá-los à buscar informações, selecioná-las, analisá-las, formular hipóteses, ao invés de buscar o simples exercício de memorização, portanto, sendo capaz de resolver diversas situações problema, principalmente de natureza combinatória, sem utilização excessiva de fórmulas ou sem sua utilização, objetivando trazer um alto nível de significância e confiabilidade daquilo que está sendo resolvido. Porém, isto não acontece na prática nos dias atuais (BRASIL, 2000).

A seguir, apresentaremos um problema proposto para os alunos do 3º ano do Ensino Médio, numa atividade em grupo, quando o conteúdo estudado era Análise Combinatória, seguido da análise das respostas, finalizando com uma possível resolução via grafos, a fim de ratificar o que diz (BACHX, 1975; CARVALHO, 2010).

Exemplo 3.1. *(OBMEP-2007/ Nível 1) Um grupo de amigos acampou durante seis noites e, toda noite, dois deles vigiaram o acampamento. Cada um ficou de guarda três vezes, nunca com o mesmo amigo. Quantos eram os amigos?*

Figura 3.1: Acampamento.

a) 3

b) 4

c) 6

d) 12

e) 18

Este experimento revelou que de um total de 5 grupos, apenas um grupo de fato acertou - o fez montando uma tabela - os demais grupos, apesar de realmente tentar respondê-la, se preocuparam mais em tentar usar o princípio multiplicativo ou as fórmulas de que dispunham (arranjos e combinação), já que no enunciado disponibilizavam três possíveis valores. Portanto, percebe-se aí, uma desenfreada tentativa de utilização de fórmulas, ao invés de tentar modelar o problema.

Neste sentido, propomos outra solução admitindo a linguagem da Teoria dos Grafos. Podemos considerar o grupo de amigos como sendo os vértices do grafo, já as arestas, representariam cada noite no acampamento, e assim conectam o par de amigos que vigiaram o acampamento por uma noite. Como cada pessoa vigiou por três noites e em cada noite com um amigo diferente, pode-se concluir que cada vértice tem grau 3, conectado a 3 outros vértices, logo, tem 4 vértices. Basta agora interligá-los. Portanto são 4 amigos (vide Fig. 3.2).

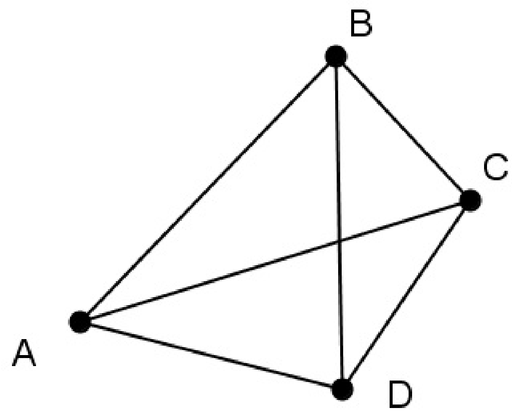


Figura 3.2: Grafos dos amigos no acampamento.

A disseminação de noções básicas da Teoria dos Grafos, no Ensino Fundamental, e, seu posterior aprofundamento no Ensino Médio, poderia ser o tratamento - mencionado no início desta seção - pretendido, pois além desta teoria contribuir para a resolução de problemas de naturezas diversas, seria uma importante ferramenta a ser utilizada na Análise Combinatória e Probabilidade.

Não é comum encontrar nos livros didáticos menções a Teoria dos Grafos, porém, não é difícil encontrar situações que são modeladas ou até mesmo resolvidas por meio dos grafos. Nota-se nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, seja no estudo de Análise Combinatória ou Probabilidade, a expressão "diagrama de árvores"ou "árvore de possibilidades", tratada de forma simplória e omitindo a real importância da teoria (Teoria das Árvores) na resolução de problemas. A forma com a qual essa teoria vem sendo abordada, pode contribuir para que os discentes não usem efetivamente esse modelo, que facilita muito a resolução de problemas, principalmente sem a utilização de fórmulas, além de responder a problemas cotidianos.

A seguir são expostas algumas justificativas por parte do porque dos grafos na Educação Básica. Começamos por destacar que alguns autores defendem a introdução dos grafos a partir do Ensino Fundamental (BRAICOVICH, 2013; BRIA, 2004). Segundo (BRAICOVICH, 2013), os grafos são: aplicáveis (pois nos últimos anos tem sido usado em diversas áreas), acessíveis (pois em muitas situações é suficiente ter conhecimento de aritmética e em outras somente de álgebra elementar), atrativos (pois podem levantar situações muito motivadoras para os alunos) e são adequados (pois aos estudantes que não tem problemas em matemática, lhes dará maior preparo para as carreiras que escolherem, e aos que não vão bem nesta disciplina, pode dar a possibilidade de um novo começo).

Existem também aqueles que defendem a inclusão dos grafos no Ensino Médio (FERREIRA, 2009; MALTA, 2008), justificando-se, respectivamente: pela necessária adequação do currículo às exigências do mundo contemporâneo; por fazer parte da matemática discreta.

Sendo considerado como um dos maiores pesquisadores no Brasil, sobre grafos, Jurkiewicz (2007), relata que a Teoria dos Grafos permite, de forma simples e contextualizada, a construção das ideias básicas que permeiam os processos algorítmicos. A importância disso decorre das transformações na sociedade. Além disso, contribuem potencialmente para a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos nos processos produtivos, terceira finalidade apontada pela LDB para o Ensino Médio e devido ao planejamento, execução e avaliação de ações de intervenção na realidade que são apontados nos PCN's do Ensino Médio como objetivos da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, é mais um elemento que justifica a abordagem deste assunto no Ensino Médio, na medida que ele fornece conhecimentos para a interpretação e análise e execução de ações do cotidiano (JURKIEWICZ, 2007).

De acordo com (BURÍGO, 2012), com o intuito de traçar objetivos para a melhoria da qualidade da educação, poderíamos questionar e mesmo afastar alguns conteúdos do currículo e incluir outros. Uma das propostas de conteúdos ausentes do currículo usual, mas que pode ser trabalhado tanto no nível fundamental, como no médio, são os grafos - esses não estão presentes nos currículos escolares, talvez, por constituírem teoria recente na Matemática -, que se oferecem como um mundo novo para as aplicações de conteúdos da Matemática escolar tradicional, tais como Matrizes, Combinatória e Geometria.

Por fim, nota-se que a Matemática Discreta, na Educação Básica, vem se restringindo ao estudo de Análise Combinatória.

> No Ensino Médio, o termo "combinatória"está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Konigsberg, tratado por Euler [...] (BRASIL, 2006, p.94).

Diante do exposto, pensamos que a Teoria dos Grafos poderá ser o elemento que ampliará o estudo desta parte da Matemática.

Tudo isso nos leva a uma reflexão e discussão acerca do quão importante é a inclusão dos grafos na Educação Básica e como podemos contornar os problemas de aprendizagem dos conteúdos de Matemática oferendo outras alternativas e metodologias de trabalho.

Na próxima seção apresentaremos algumas aplicações de caráter multidisciplinar envolvendo um nível de dificuldade elevado, que foi solucionada usando ferramentas de Teoria dos Grafos.

3.2 Aplicações

Determinados problemas podem apresentar enunciados simples, no entanto, para ser resolvido pode trazer uma engrenagem complexa. Nesta seção, traremos alguns problemas que podem ser resolvidos por intermédio da Teoria dos Grafos, pois deseja-se mostrar aqui o potencial significativo dessa teoria para resolver problemas, seja da vida real ou não, em vários campos do conhecimento. Para resolução da primeira aplicação utilizaremos conceitos referentes a grau de vértices e caminhos.

APLICAÇÃO 1 (Banco de questões da OBMEP-2013/ Nível 1)

Dizemos que um desenho é bem desenhado quando pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar o lápis duas vezes por cima de uma mesma linha. Por exemplo, o desenho abaixo é bem desenhado. pois pode ser desenhado, por exemplo, seguindo a ordem dos vértices $A \longrightarrow B \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow C \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow D \longrightarrow A$.

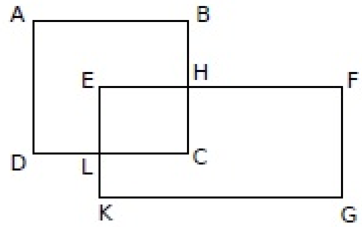


Figura 3.3: Desenho bem desenhado.

O desenho a seguir é bem desenhado? Justifique.

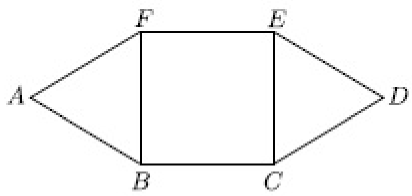


Figura 3.4: Item b) da prova OBMEP-2013.

Solução.

A resposta é não. O vértice F tem três segmentos ligados a ele (grau 3). Devido a isto, temos dois casos a analisar: ou o desenho começa nesse vértice F ou o desenho começa em outro.

Se o desenho começa no vértice F, um dos segmentos ligados a F é de saída, outro é de entrada e o terceiro é de saída novamente. Logo, o desenho não pode terminar nele. Entretanto, E, C e B também têm três segmentos ligados a eles. Logo, cada um deles deveria ser o ponto final do caminho (pois teriam dois segmentos de entrada e um de saída). Como o caminho só pode ter um ponto final, há uma contradição, o que mostra que o desenho não pode começar em F.

Se o desenho não começa em F, mas começa em alguns dos vértices B, C ou E, o argumento é o mesmo que apresentamos para o caso em que ele começa em F. Se o caminho começa em A, como A tem dois segmentos ligados a ele, um deve ser de entrada e outro de saída. Logo, A deve ser o ponto final do caminho. Mas F tem três segmentos ligados a ele, então seriam dois de entrada e um de saída, o que significa que F é que deveria ser o ponto final do caminho, novamente uma contradição. E se o ponto inicial for D, o argumento é o mesmo que apresentado para A.

Na aplicação a seguir utilizaremos grafos ponderados, dígrafos e coloração de vértices, para determinar sua solução.

APLICAÇÃO 2 (OBMEP-2012/ Nível 3)

Três casais fizeram compras em uma livraria. Vitor comprou 3 livros a mais do que Lorena e Pedro comprou 5 livros a mais do que Cláudia. Cada um dos homens comprou 4 livros a mais do que a respectiva esposa. Lorena e Cláudia compraram mais livros do que Bianca, que só comprou 3 livros. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) *Vitor comprou mais livros do que Pedro.*

b) *Pedro é marido de Cláudia.*

c) *Pedro foi o marido que comprou o maior número de livros.*

d) *Cláudia comprou um livro a mais do que Lorena.*

e) *Vitor é marido de Bianca.*

Solução.

Consideremos as pessoas envolvidas como sendo os vértices do grafo, já as arestas, representaram as quantidades de livros a mais que tem em relação ao outro, sendo a chegada da flecha a indicação de que este tem mais livros em relação ao vértice que a originou. Consideremos também a letra H como sendo o homem que não teve seu nome explicitado.

A flecha que vai de Lorena a Vítor, indicada com +3 revela que ele comprou 3 livros a mais que Lorena, analogamente para as outras relações. As flechas que saem de Bianca para Lorena e Cláudia também indicam que ambas compraram mais livros que Bianca. A seguir explicitaremos as flechas que não correspondem a dados do enunciado.

Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e cada homem comprou 4 livros a mais que sua esposa, segue que Pedro não é o marido de Cláudia. Por outro lado, como Cláudia comprou mais livros que Bianca, então Pedro Comprou pelo menos 6 livros a mais que Bianca, logo, ele também não marido de Bianca, assim, Pedro é marido de Lorena. Indicaremos essa conclusão colorindo tais vértices de vermelho e os conectando por uma flecha com peso +4.

Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e 4 livros a mais que Lorena, segue que Lorena comprou 1 a mais que Cláudia, o que nos dá a flecha que conecta Cláudia a Lorena. As flechas que ligam Cláudia a Vitor, passando por Lorena mostram que Vitor comprou 4 livros a mais que Cláudia; como Cláudia comprou mais livros que Bianca, segue que Vitor comprou pelo menos 5 livros a mais que Bianca. Logo Vitor não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Cláudia; indicamos essa conclusão colocando seus nomes de verde. Restando então Bianca a ser mulher de H; assim, ligamos esses dois por uma flecha com peso +4 e colocamos seus nomes em azul.

Com o grafo montado, podemos concluir que: Pedro comprou pelo menos 6 livros a mais que Bianca; como H comprou 4 livros a mais que Bianca, segue que Pedro comprou mais livros que H. Finalmente, observa-se que como Pedro comprou 4 livros a mais que Lorena e Vitor comprou 3 livros a mais que Lorena, segue que Pedro comprou 1 livro a mais que Vitor, conforme indicado na Fig. 2.7. Portanto, a alternativa "c", é a verdadeira.

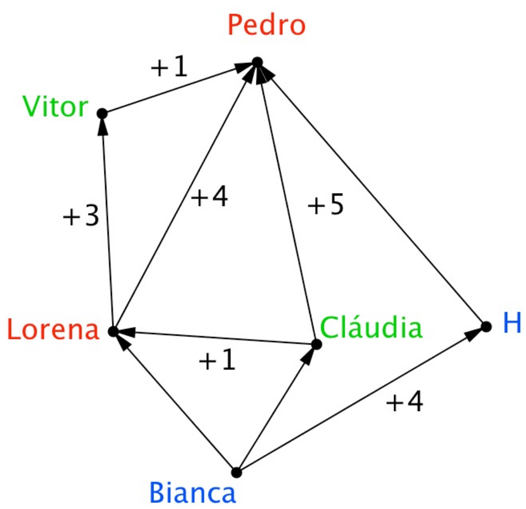


Figura 3.5: Grafo da Aplicação 2.

Na próxima aplicação será utilizado grafo regular e o Corolário 1.1.

APLICAÇÃO 3 (Banco de questões da OBMEP-2011/ Nível 2)

Considere um grupo de 15 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:

a) *4 pessoas do grupo*?

b) *3 pessoas do grupo*?

(Admita que se A conhece B então B conhece A)

Solução.

a) É possível. Representemos as 15 pessoas como sendo os vértices do grafo conforme ilustrado na Fig. 3.6. Um arco entre dois pontos significa que as duas pessoas representadas se conhecem. Como cada ponto está ligado a dois pontos à esquerda e a dois pontos à direita, saem quatro arcos de cada ponto, o que significa que é possível que cada pessoa conheça exatamente 4 pessoas do grupo.

b) Não é possível. Vamos representar novamente as pessoas como sendo os vértices. Ligamos dois pontos se as pessoas representadas se conhecem. Quantos arcos vamos precisar traçar para representar todas as amizades? Cada ponto é extremidade de 3 arcos, resultando num total de 15 x 3 = 45 arcos que saem de todos os pontos. Porém, nesta contagem, cada arco foi contado duas vezes, nas duas extremidades (o arco que conecta 1 a 2, foi contado tanto para ver quem 1 conhece quanto para a contagem de 3, por exemplo). Portanto, o número de segmentos deve ser $\frac{45}{2}$, o que é um absurdo, pois este número não é inteiro, ou seja, não existe meia amizade por exemplo. Além do exposto, tal situação não atende ao Corolário 1.1, a saber, num grafo qualquer o número de vértices de grau ímpar é par.

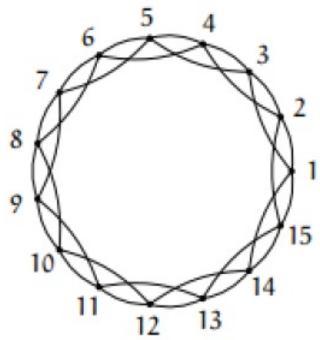


Figura 3.6: Grupo de 15 pessoas.

Na próxima aplicação utilizaremos caminhos e arborescência.

APLICAÇÃO 4 (OBM-2003)

Considere as sequências de inteiros positivos tais que cada termo mais a soma dos seus algarismos é igual ao termo seguinte. Por exemplo: 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39 é uma sequência nessas condições. Escreva a maior sequência cujo último termo é 103 e que satisfaz tais condições.

Observação: *maior sequência é aquela com o maior número de termos*.

Solução.

Como a sequência termina em 103, então faremos o caminho inverso da sequência, ou seja, começaremos pelo fim. Utilizaremos o símbolo ✓para indicar o fim de uma sequência. Assim teremos:

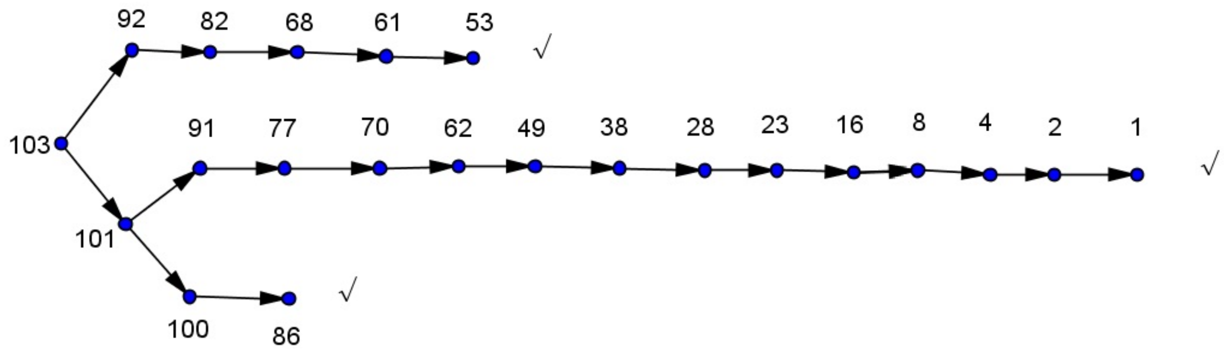


Figura 3.7: Sequência invertida.

Notem que após os números 53 e 86, não existem termos tais que somados com o valor da soma dos seus algarismos gerem tanto o 53 quanto o 86. Portanto, a maior sequência obtida é: 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, 62, 70, 77, 91, 101, 103.

Deste capítulo podemos extrair as diversas possibilidades de solução de determinados problemas e confirmar, que é possível e em certos momentos necessário, se valer da Teoria dos Grafos para a resolução de certas aplicações que em muitos casos estão relacionadas a conteúdos do Ensino Médio, outrora comentado. Pretendeu-se, portanto, mostrar que os Grafos podem ser uma significativa ferramenta no processo de ensino aprendizagem, pois além da sua variedade de aplicações, dentro da Matemática ou não, torna-se para os alunos, mais uma alternativa na resolução de problemas. Alternativa esta que permite uma abordagem diferente da que normalmente é utilizada, ou seja, a não priorização do uso de fórmulas, o que favorece também, como outrora mencionado, o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Na próxima aplicação, utilizaremos a teoria da arborescência para solução.

APLICAÇÃO 5 (OBM - 1988; adaptada)

De quantas maneiras distintas podemos escrever os algarismos de 1 a 9 em sequência (sem repeti-los), de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis por 7 ou por 13.

Solução.

Inicialmente, exibiremos os múltiplos de 7 e 13, com no máximo dois dígitos.

a) *De 7* $\Longrightarrow$ 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98;

b) *De 13* $\Longrightarrow$ 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91.

Desses, podemos desconsiderar o 70 e o 77, pois o algarismo 0 não faz parte dos algarismos considerados e no 77 existe uma repetição.

A raiz da arborescência, necessariamente, tem que ser o algarismo 7, pois caso fosse o número 13 ao considerar o próximo algarismo da sequência teríamos aí um número de três dígitos, fugindo então das especificidades da questão. Os vértices são os próximos algarismos.

Após o 7, o próximo tem que ser o 8, pois devemos considerar os dois algarismo em sequência e este deve estar entre os múltiplos de que dispomos, neste caso o 78. De modo análogo, o próximo deve ser o 4, em seguida temos duas possibilidades, o 2 ou o 9, pois pode ser o número 42 ou 49: escolhendo o 9, o próximo deve ser o 1, seguido do 3 e 5, a partir deste, temos novamente, duas possibilidades, o 6 e o 2. Caso escolha o 6, termina a sequência, pois o próximo deveria ser o algarismo 5, mas já foi utilizado. Escolhendo o 2 o próximo é o 6 e termina a sequência pelo mesmo motivo anterior; escolhendo o 2, temos duas possibilidades, 1 ou 6. Escolhendo o 1, em seguida será o 3, que terá duas possibilidades, 9 ou 5, caso 9, acaba a sequência, escolhendo o 5, o próximo será o 6 e também acaba a sequência; escolhendo o 6, terá duas possibilidades, 5 ou 3, caso escolha 5, acaba a sequência, caso escolha o 3, tem duas possibilidades, 9 ou 5, escolhendo o 5 acaba a sequência, caso 9, o próximo é 1 e acaba a sequência. Utilizaremos o símbolo $\bigstar$ para indicar fim de uma sequência que não atende aos pré-requisitos e usaremos o símbolo $\checkmark$, caso contrário. A Fig. 3.8 exemplifica o que foi descrito acima. Portanto, fica evidente que existe apenas uma maneira de dispor esses algarismos, a saber, (7, 8, 4, 9, 1, 3, 5, 2, 6).

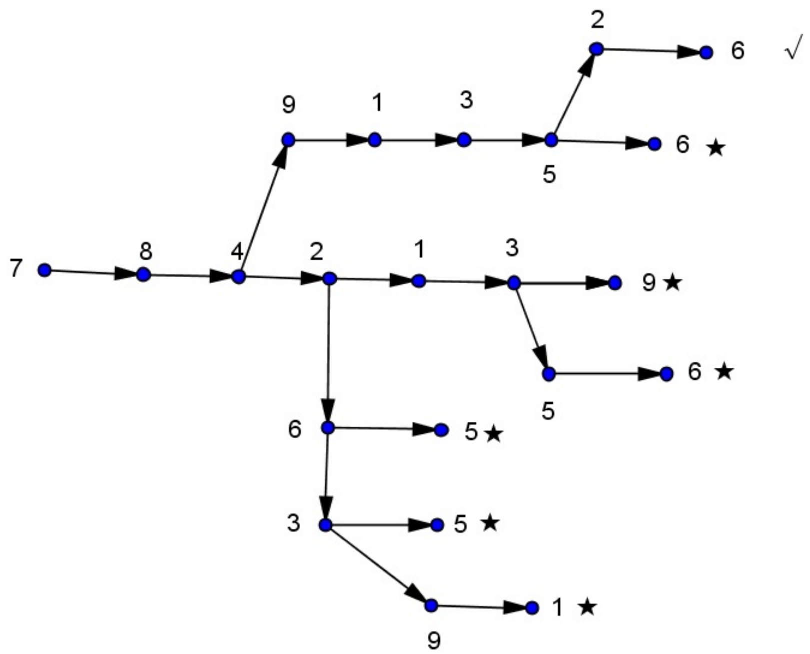


Figura 3.8: Sequências ou caminhos encontrados.

APLICAÇÃO 6

O Departamento de Matemática de certa Universidade, pretende oferecer seis disciplinas para o próximo semestre: (C) - Cálculo; (G) - Grafos; (L) - Lógica; (N) - Noções de Análise; (S) - Sólidos Platônicos e (T) - Topologia. Verificou-se que cada estudante planeja cursar as disciplinas indicadas na tabela a seguir:

Aluno	Disciplina	Aluno	Disciplina
Bianca	C,L,T	Jackson	C,G,S
Marcos	C,L	Jonathas	L,N
Adriana	C,T	Leonardo	G,L
Simão	G,N	Patrícia	G,L,N
Oraldo	C,S,T	Marco	C,G

a) Considerando que cada disciplina é dada num período, como se poderia determinar qual o menor número de períodos necessários para que as seis disciplinas possam ser oferecidas?

b) Qual o maior número de disciplinas que podem ser dadas ao mesmo tempo?

Solução.

a) Podemos associar o menor número de períodos a coloração de vértices, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas. Na prática, cada cor representará um período. Assim, temos da Fig.3.9 a representação completa do problema. Desta última, podemos concluir que as seis disciplinas podem ser oferecidas em 3 períodos, pois são suficientes apenas 3 cores para colorir este grafo.

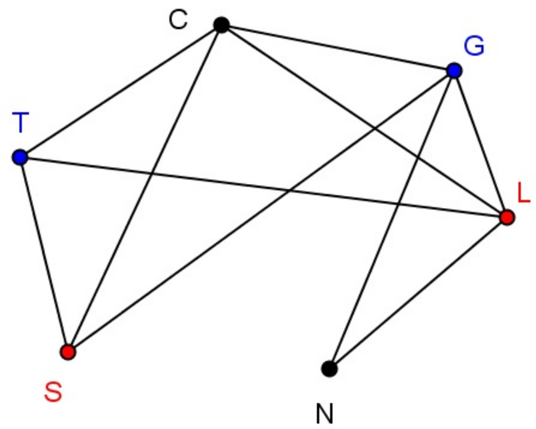


Figura 3.9: Grafo das Disciplinas.

b) O número máximo de disciplinas que podem ser dadas ao mesmo tempo, está associado a maior quantidade de vértices pintados com a mesma cor do grafo da Fig.3.9, logo, são duas disciplinas que podem ser dadas ao mesmo tempo.

Capítulo 4

Conclusão

Este trabalho de conclusão de curso foi elaborado com o intuito de trazer contribuições ao ensino de Matemática da Educação Básica. Nele apresentamos, uma introdução a Teoria dos Grafos e suas aplicabilidades. Devido à sua variedade de aplicações dentro e fora da Matemática, percebemos que se fazia necessário discutir porque essa teoria deveria fazer parte, ou melhor, deveria ser incluída no currículo da Educação Básica.

Dentre as possíveis justificativas, podemos citar o fato de: responder a problemas reais, sendo importante para o sujeito enquanto cidadão; ampliação do conhecimento, o que é sempre instrutivo; por contribuir no desenvolvimento do raciocínio lógico, já que cria o ambiente ideal para a resolução de situações problema (através da coleta, organização, sistematização e análise dos dados); por já ser um conteúdo utilizado, principalmente no Ensino Médio, na Matemática e em outras áreas do conhecimento, e, não menos importante, por poder ser utilizada na Análise Combinatória e Probabilidade, contribuindo nesses tópicos para a resolução de problemas sem uso de fórmulas, além de ser uma técnica a mais para resolução de problemas.

Acreditamos que a Teoria dos Grafos, não só será relevante nesta modalidade de ensino, como também, trará contribuições significativas no estudo dos conteúdos outrora mencionados e classificados como difíceis de serem trabalhados e/ou aprendidos. Desta forma, esperamos que tal teoria seja incluída no currículo da Educação Básica, de modo que sejam ofertas noções básicas no Ensino Fundamental, com posterior prosseguimento e aprofundamento de estudos no Ensino Médio.

Procuramos dar um tratamento ao tema de forma que pudesse ser acessível tanto aos professores de Matemática que nunca tiveram contato com esta teoria, como a todos aqueles que se interessarem por esta temática, em especial os alunos secundaristas, sendo que para estes traçamos como objetivo levá-los a utilizar os grafos como uma ferramenta para a resolução de problemas (sem o uso de fórmulas, sempre que possível, principalmente quando nos problemas de contagem).

No futuro, pretendemos desenvolver um trabalho, no ano de 2016, nas turmas de terceiro ano do Ensino Médio, do Colégio Estadual Professora Celita Franca da Silva, em Feira de Santana-BA e nas Turmas do Eixo VII, do Colégio Ana da Costa Falcão, em São Gonçalo dos Campos-BA. Em uma das turmas, tanto de terceiro ano quanto do Eixo VII, antes de introduzir os assuntos Análise Combinatória e Probabilidade, será explanado aos discentes noções básicas da Teoria dos Grafos, dando maior ênfase aos conteúdos de Árvores, Planaridade e Coloração de Mapas. Já as outras turmas terão contato com o conteúdo tradicional de Probabilidade e Análise Combinatória e farão as mesmas atividades e avaliações propostas as turmas associadas a Teoria dos Grafos. Ao final de cada unidade o desempenho das turmas será analisado e terão seus resultados comparados. Espera-se, que as turmas que tiveram contato com os grafos obtenham melhores resultados, quando na resolução de problemas de natureza combinatória ou probabilística.

A fim de continuar à busca por uma melhoria no ensino de Matemática, propomos a quem interessar, que às ideias aqui discutidas sejam ampliadas.

Referências Bibliográficas

[1] BACHX, A. C.; POPPE, L. M. B.; TAVARES, R. N. O. **Prelúdio à Análise Combinatória**. São Paulo: Nacional, 1975.

[2] BONDY, J. A.; MURTHY, U. S. R. **Graph Theory**: graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 2008.

[3] BRAICOVICH, T. **Algunos Conceptos de Grafos em la Ensenanza**. In: VI CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 2013, Canoas. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br. Acesso em janeiro de 2015.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Fundamental. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1997.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2000.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2006.

[7] BRIA, J. **Conheça Grafos**: interdisciplinaridade e contextualização. In: $VIII$ ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br. Acesso em janeiro de 2015.

[8] BÚRIGO, E. Z. et al. **A Matemática na Escola**: novos conteúdos, novas abordagens. Porto Alegre: UFRGS, 2012.

[9] CARDOSO, D. M. **Teoria dos Grafos e Aplicações**. 2004-2005. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Aveiro.

[10] CARVALHO, P. C. P. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[11] FERREIRA, G. P. **A Viabilidade do Ensino de Matemática Discreta no Ensino Médio Usando Modelagem**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica) - Universidade do Grande Rio.

[12] GOLDBARG, M.; GOLDBARG, E. **Grafos**: Conceitos, Algoritmos e Aplicações. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

[13] HARRIS, J. M.; HIRST, J. L.; MOSSINGHOFF, M. J. **Combinatorics and Graph Theory**: under-graduate texts in mathematics. 2008.

[14] JURKIEWICZ, S. **Grafos - Uma Introdução**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009a.

[15] JURKIEWICZ, S.; MUNIZ, I. Jr. **Qual é o Menor Caminho**: Conceitos, Aplicações e Experiências no Ensino Médio com Teoria dos Grafos e Algoritmos. In: $XXXIX$ SBPO, Fortaleza, agosto, 2007. Disponível em: http://www.din.uem.br. Acesso em janeiro de 2015.

[16] JURKIEWICZ, S.; NETTO, P. O. B. **Grafos**: Introdução e Prática. São Paulo: Blucher, 2009b.

[17] LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. L. **Teoria e Problemas em Matemática Discreta**. Tradução: Heloisa Bauzer Medeiros. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004. (Coleção Schaum).

[18] LUCCHESI, C. L. **Introdução à Teoria dos Grafos**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[19] MALTA, G. H. S. **Grafos no Ensino Médio**: uma inserção possível. 2008. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

[20] MORGADO, A. C. et al **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[21] NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar**: Combinatória. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[22] NETTO, P. O. B. **Teoria e Modelos de Grafos**. São Paulo: Edgard Blucher, 1979.

[23] NETTO, P. O. B. **Grafos**: Teoria, Modelos, Algoritmos. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[24] ROSEN, K. H. **Matemática Discreta e suas Aplicações**. Tradução: João Giudice. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

[25] SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta**: Uma Introdução. Tradução: Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

[26] WILSON, R. J. **Introduction to Graph Theory**. 4. ed. Harlow: Longman, 1996.