



CRISTIAN ROBERTO MICCERINO DE ALMEIDA

**SÓLIDOS DE PLATÃO E SEUS DUAIS: Construção com material
concreto e representações por GeoGebra**

CAMPINAS
2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA**

CRISTIAN ROBERTO MICCERINO DE ALMEIDA

**SÓLIDOS DE PLATÃO E SEUS DUAIS: Construção com material
concreto e representações por GeoGebra**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Universidade
Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de Mestre

Orientador(a): Samuel Rocha de Oliveira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO
Cristian Roberto Miccerino de Almeida, E ORIENTADO
PELO PROF. DR Samuel Rocha de Oliveira

Assinatura do Orientador

Samuel R. Oliveira.

**CAMPINAS
2015**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

AL64s Almeida, Cristian Roberto Miccerino de, 1979-
Sólidos de Platão e seus duais : construção com material concreto e representações por GeoGebra / Cristian Roberto Miccerino de Almeida. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Samuel Rocha de Oliveira.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Poliedros. 2. Geometria sólida. 3. GeoGebra. 4. Geometria dinâmica. I. Oliveira, Samuel Rocha de, 1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Solids Plato and their duals : construction with concrete materials and representations by GeoGebra

Palavras-chave em inglês:

Polyhedra

Solid geometry

GeoGebra

dynamic geometry

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Samuel Rocha de Oliveira [Orientador]

Claudina Izepe Rodrigues

Humberto José Bortolossi

Data de defesa: 23-06-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 23 de junho de 2015
e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Samuel R. Oliveira.

Prof(a). Dr(a). SAMUEL ROCHA DE OLIVEIRA

Claudina Izepe Rodrigues

Prof(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Humberto José Bortolossi

Prof(a). Dr(a). HUMBERTO JOSÉ BORTOLOSSI

Resumo

Apresentamos um estudo dirigido aos poliedros de Platão e seus duais. Com o intuito de tornar dinâmica e prazerosa as aulas dedicada ao estudo da Geometria, mostramos várias ações para a construção de cada um dos sólidos através do uso de material concreto e também exploramos a construção interativa através de uma aplicação no software GeoGebra. Antes de explorar cada sólido platônico, temos uma revisão teórica dedicada aos professores de sala de aula, aos professores em formação ou estudantes em geral, a quem chamamos de alunos. Nessa revisão, a partir da aresta do poliedro, o aluno pode acompanhar com detalhes todos os cálculos referentes ao volume, à área do sólido e ao tamanho da aresta do dual ou de um poliedro inscrito. Para compreender as diversas propriedades geométricas de inscrições e seções, ensinamos o aluno construir cada um dos sólidos platônicos e seus respectivos duais por meio de material concreto, tais como canudo, linha e folha transparente. E com GeoGebra, o aluno pode rever as propriedades geométricas dos poliedros, investigando cada um dos elementos (vértices, faces e arestas) e seguir todo o processo de construção de cada sólido platônico e a representação do seu dual. Ao final do presente trabalho mostramos a planificação de cada poliedro utilizando régua e compasso. Acrescentamos também outra forma de calcular o volume de cada poliedro, o detalhamento do pentágono regular incluindo a sua construção com régua e compasso, abordando a razão áurea.

Palavras-chave: Poliedros de Platão e seus duais, Material concreto, Geometria dinâmica.

Abstract

We present a directed study to the Polyhedrons of Plato and their duals. In order to get dynamic and pleasant classes devoted to the study of Geometry, several actions showing the construction of each solid through the use of concrete materials and also explored through interactive construction by means of a software application in

GeoGebra. Before exploring each platonic solid, we have a theoretical review dedicated to classroom teachers, prospective teachers or students in general, whom we call students. In this review, starting from size of the polyhedron's edge, the student can follow in detail all the calculations concerning the volume, the area of solid and the size of the dual edge or an inscribed polyhedron. We teach the student to build each of the Platonic solids and their dual through concrete material, such as straw, line, and transparent sheet so the student can understand the various geometric properties of inscriptions and sections. And using GeoGebra, the student can review the geometric properties of polyhedrons, investigating each of the elements (vertex, faces and edges) so the student can follow the whole construction of each Platonic solid and the representation of its dual. At the end of this study we show the unfolding of each polyhedron using ruler and compass. We also added another way to calculate the volume of each polyhedron and the details of the regular pentagon, including its construction with ruler and compass, addressing the golden ratio.

Keywords: Polyhedrons of Plato and their duals, Concrete materials, Dynamic geometry.

Sumário

Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1. Justificativa.....	1
1.2. Objetivo.....	3
1.2.1. Objetivo Geral.....	3
1.2.2. Objetivo Específico.....	4
1.3. Metodologia.....	5
1.4. Fundamentação Teórica.....	7
1.4.1. Um pouco de história.....	7
1.4.2. Por que existem apenas cinco poliedros regulares?.....	9
1.4.3. Poliedros duais.....	10
1.4.4. Recursos Tecnológicos.....	11
1.5. Estrutura desta Dissertação.....	12
Capítulo 2 - Tetraedro Regular.....	15
2.1. Revisão Teórica.....	15
2.1.1. Introdução.....	15
2.1.2. Cálculo da altura do tetraedro regular.....	17
2.1.3. Cálculo da área do tetraedro.....	17
2.1.4. Cálculo do volume do tetraedro.....	17
2.1.5. Cálculo do volume do octaedro regular inscrito no tetraedro.....	18
2.1.6. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita do tetraedro regular.....	18
2.1.7. Cálculo da aresta do dual do tetraedro regular.....	19
2.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular.....	20
2.3. Construindo o modelo esqueleto da altura no tetraedro regular.....	23
2.4. Construindo o modelo esqueleto das arestas do dual no tetraedro regular.....	24
2.5. Construindo o modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular e uma seção por um plano.....	28
2.6. Explorando as novas tecnologias na construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular e seu dual.....	29
2.6.1. Girar, Eixo e Tamanho.....	29
2.6.2. Interativo.....	31
2.6.2.1. Interativo - Passo a Passo.....	31
2.6.2.2. Interativo - Sequência.....	32
2.6.3. Dualidade.....	33
2.6.4. Elementos.....	35
2.6.5. Aprofundamento.....	36
2.6.5.1. Aprofundamento - Base.....	37
2.6.5.2. Aprofundamento - Altura do tetraedro.....	37
2.6.5.3. Aprofundamento - Volume e Área.....	38
2.6.5.4. Aprofundamento - Volume do Octaedro Regular Inscrito.....	39
2.6.5.5. Aprofundamento - Raio da Esfera.....	40
2.6.5.4.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro.....	40
2.6.5.4.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita.....	40
2.6.5.4.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita.....	41
2.6.5.5. Aprofundamento - Aresta do Dual.....	41
Capítulo 3 - Hexaedro Regular.....	43
3.1. Revisão Teórica.....	43

3.1.1. Introdução.....	43
3.1.2. Cálculo das diagonais do hexaedro.....	43
3.1.3. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita no hexaedro regular.....	44
3.1.4. Hexaedro com tetraedro regular inscrito.....	45
3.1.5. Cálculo da aresta do dual do hexaedro.....	45
3.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular.....	46
3.3. Construindo o modelo esqueleto da diagonal principal e algumas diagonais das faces no hexaedro regular.....	50
3.4. Construindo o modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular com um tetraedro regular inscrito.....	52
3.5. Construindo o modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular com um tetraedro regular inscrito e o dual do hexaedro.....	59
3.6. Explorando as novas tecnologias na construção do Hexaedro Regular e seu Dual.....	62
3.6.1. Girar, Eixo e Tamanho.....	62
3.6.2. Interativo.....	64
3.6.2.1. Interativo - Passo a Passo.....	64
3.6.2.2. Interativo - Sequência.....	65
3.6.3. Dualidade.....	66
3.6.4. Elementos.....	68
3.6.5. Aprofundamento.....	69
3.6.5.1. Aprofundamento - Raio da Esfera.....	70
3.6.5.1.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro.....	70
3.6.5.1.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita.....	70
3.6.5.1.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita.....	71
3.6.5.2. Aprofundamento - Diagonal.....	72
3.6.5.2.1. Aprofundamento - Diagonal - Diagonal da Face.....	72
3.6.5.2.2. Aprofundamento - Diagonal - Diagonal do Cubo.....	73
3.6.5.3. Aprofundamento - Área e Volume.....	73
3.6.5.4. Aprofundamento - Aresta do Dual.....	74
Capítulo 4 - Octaedro Regular.....	75
4.1. Revisão Teórica.....	75
4.1.1. Introdução.....	75
4.1.2. Cálculo da área do octaedro regular.....	75
4.1.3. Cálculo do volume do octaedro regular.....	76
4.1.4. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita do octaedro regular.....	77
4.1.5. Cálculo da aresta do dual do octaedro regular.....	77
4.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do octaedro regular.....	78
4.3. Construindo o modelo esqueleto das arestas do dual no octaedro regular.....	86
4.4. Explorando as novas tecnologias na construção do Octaedro Regular e seu Dual.....	93
4.4.1. Girar, Eixo e Tamanho.....	93
4.4.2. Interativo.....	95
4.4.2.1. Interativo - Passo a Passo.....	95
4.4.2.2. Interativo - Sequência.....	96
4.4.3. Dualidade.....	97
4.4.4. Elementos.....	99
4.4.5. Aprofundamento.....	100
4.4.5.1. Aprofundamento - Raio da Esfera.....	101
4.4.5.1.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro.....	101
4.4.5.1.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita.....	101

4.4.5.1.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita.....	102
4.4.5.2. Aprofundamento - Área e Volume.....	103
4.4.5.4. Aprofundamento - Aresta do Dual.....	103
Capítulo 5 - Dodecaedro Regular.....	105
5.1. Revisão Teórica.....	105
5.1.1. Introdução.....	105
5.1.2. Cálculo da área do dodecaedro regular.....	105
5.1.3. Cálculo do volume do dodecaedro regular.....	106
5.1.4. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita do dodecaedro regular.....	109
5.1.5. Dodecaedro com hexaedro regular inscrito.....	111
5.1.6. Dodecaedro com tetraedro regular inscrito.....	111
5.1.7. Dodecaedro com octaedro regular inscrito.....	112
5.1.8. Cálculo da aresta do dual do dodecaedro regular.....	112
5.1.9. Retângulo áureo no dodecaedro regular.....	113
5.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do dodecaedro regular.....	115
5.3. Explorando as novas tecnologias na construção do Dodecaedro Regular e seu Dual.....	123
5.3.1. Girar, Eixo e Tamanho.....	123
5.3.2. Interativo.....	124
5.3.2.1. Interativo - Passo a Passo.....	124
5.3.2.2. Interativo - Sequência.....	125
5.3.3. Dualidade.....	126
5.3.4. Elementos.....	128
5.3.5. Aprofundamento.....	129
5.3.5.1. Aprofundamento - Volume e Área.....	130
5.3.5.1.1. Aprofundamento - Volume e Área - Volume (V).....	130
5.3.5.1.2. Aprofundamento - Volume e Área - Área (A).....	131
5.3.5.2. Aprofundamento - Raio da Esfera.....	132
5.3.5.2.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro.....	132
5.3.5.2.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita.....	133
5.3.5.2.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita.....	134
5.3.5.3. Aprofundamento - Aresta do Dual.....	134
5.3.5.4. Aprofundamento - Hexaedro Inscrito.....	135
5.3.5.5. Aprofundamento - Tetraedro Inscrito.....	136
5.3.5.6. Aprofundamento - Octaedro Inscrito.....	137
5.3.5.7. Aprofundamento - Retângulo Áureo.....	137
Capítulo 6 - Icosaedro Regular.....	139
6.1. Revisão Teórica.....	139
6.1.1. Introdução.....	139
6.1.2. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita do icosaedro regular.....	139
6.1.3. Cálculo da área do icosaedro regular.....	141
6.1.4. Cálculo do volume do icosaedro regular.....	141
6.1.5. Cálculo da aresta do dual do icosaedro regular.....	142
6.1.6. Retângulo áureo no icosaedro regular.....	143
6.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do icosaedro regular.....	143
6.3. Explorando as novas tecnologias na construção do Icosaedro Regular e seu Dual.....	149
6.3.1. Girar, Eixo e Tamanho.....	149
6.3.2. Interativo.....	151
6.3.2.1. Interativo - Passo a Passo.....	151
6.3.2.2. Interativo - Sequência.....	152

6.3.3. Dualidade.....	153
6.3.4. Elementos.....	155
6.3.5. Aprofundamento.....	156
6.3.5.1. Aprofundamento - Raio da Esfera.....	156
6.3.5.1.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro.....	156
6.3.5.1.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita.....	157
6.3.5.1.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita.....	158
6.3.5.2. Aprofundamento - Área e Volume.....	158
6.3.5.3. Aprofundamento - Aresta do Dual.....	159
6.3.5.4. Aprofundamento - Retângulo Áureo.....	159
Conclusão.....	161
Referências Bibliográficas.....	165
Anexos.....	169
Anexo 1 - Número de Ouro, Retângulo Áureo e Pentágono Regular.....	169
Seção 1: Número de Ouro.....	169
Seção 2: Retângulo de Ouro ou Retângulo Áureo.....	171
Seção 3: Pentágono Regular.....	174
1.1. A razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular.....	174
1.2. Construção de um pentágono regular com régua e compasso.....	176
1.3. Construção aproximada do pentágono regular devido a Albrecht Dürer utilizando régua e compasso.....	182
1.4. Cálculo da área de um pentágono regular.....	185
1.5. Cálculo da altura de um pentágono regular.....	187
Anexo 2 - Cálculo do volume dos sólidos de Platão a partir do raio da esfera inscrita.....	189
Seção 1: Volume do Tetraedro Regular.....	189
Seção 2: Volume do Hexaedro Regular.....	189
Seção 3: Volume do Octaedro Regular.....	190
Seção 4: Volume do Dodecaedro Regular.....	191
Anexo 3 - Planificação dos poliedros de Platão utilizando régua e compasso.....	193
Seção 1: Planificação do Tetraedro Regular.....	193
Seção 2: Planificação do Hexaedro Regular.....	195
Seção 3: Planificação do Octaedro Regular.....	201
Seção 4: Planificação do Icosaedro Regular.....	204
Seção 5: Planificação do Dodecaedro Regular.....	211
Anexo 4 - Determinando a soma dos ângulos internos e o número de diagonais de um polígono convexo de n lados.....	217

Dedicatória

Dedico esse trabalho à minha família especialmente ao meu pai Claudio B. de Almeida, à minha mãe Maria Aparecida M. de Almeida e ao meu irmão Luiz Paulo M. de Almeida por todo apoio e empenho para que pudesse estar aonde cheguei.

Aos meus avós maternos Salvador e Almerinda por todo carinho e cuidado que sempre tiveram comigo.

Aos meus avós paternos Benedito (In Memoriam) e Filomena (In Memoriam) pelos conselhos e por sempre querer o meu melhor.

À Luciana dos Santos pelo carinho, paciência e companheirismo de todos os dias.

Dedico também aos professores Antônio Miguel(FE/UNICAMP), Dario Fiorentini (FE/UNICAMP), Antônio Carlos Patrocínio(IMECC/UNICAMP), Ricardo Apparicio Bacci(IMECC/UNICAMP), Maria Sueli Marconi Roversi(IMECC/UNICAMP), Ana Maria Martensen Roland Kaleff (UFF) e Samuel Rocha de Oliveira (IMECC/UNICAMP) que sempre me aconselharam nos momentos mais decisivos e pontuais na minha vida acadêmica.

Agradecimento

A Deus, por minha vida, família e amigos.

Aos professores dessa Universidade que me influenciaram na minha formação acadêmica durante o curso de Licenciatura em Matemática (2004-2008), em particular, aos professores Dario Fiorentini, Antônio Miguel, Antônio Carlos Patrocínio, Ricardo Apparicio Bacci, Maria Sueli Marconi Roversi, Edmundo Capelas de Oliveira e Filidor Edilfonso Vilca Labra;

Aos professores da UFF que tiveram participação direta nessa Dissertação que começou a ser elaborada durante a minha especialização em Novas Tecnologias do Ensino da Matemática - NTEM(2010-2012), em particular, aos professores Ana Maria Martensen Roland Kaleff, Carlos Eduardo Mathias Motta e Humberto José Bortolossi;

Aos professores do PROFMAT (2013-2015) pelo conhecimento compartilhado, em particular, aos professores Claudina Izepe Rodrigues, Maria Aparecida Diniz Ehrhardt, Ary Orozimbo Chiacchio, Lúcio Tunes dos Santos e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz;

Ao professor da UNESPAR, Sérgio Carrazedo Dantas, pela difusão do conhecimento no Curso de GeoGebra;

Ao meu orientador, professor Samuel Rocha de Oliveira, pela ajuda na elaboração estrutural do trabalho;

Aos amigos da turma de Mestrado pelos momentos passados juntos, em particular Adriana de Lima Braga, Daniel Tebaldi Santos, Renato Pereira de Abreu, Felipe Mascagna Bittencourt Lima, Luis Claudio Inácio Bueno, Marina Aparecida Gaglioli e Fabiana Silva Tesine, Clóvis Rodrigues Vilas-Boas, Andréa de Paula Machado e Antônio Marcos Gabetta Júnior;

À Secretaria da Pós-graduação do IMECC, pelo apoio, e principalmente, pela amizade demonstrada pelos funcionários.

Aos colegas de trabalhos, em particular aos professores José Cícero Calheiros, Gutemberg Caparroz Penteado e Míriam Tomazetto;

À CAPES, pelo apoio financeiro que contribuiu muito para a realização desse projeto;

À Luciana dos Santos, minha esposa, com amor, admiração e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio durante todo o Mestrado;

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional;

À todas as pessoas que de alguma maneira me auxiliaram nesta etapa;

Muito Obrigado.

Capítulo 1 - Introdução

1.1. Justificativa

Com relação aos conceitos da geometria espacial, visualizar é uma habilidade necessária ao crescimento do aluno no processo ensino e aprendizagem.

E conforme é afirmado nos PCN, temos “o pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades” (BRASIL, 1997, p. 127).

Dessa forma, a visualização é um processo cognitivo complexo e de caráter pessoal, no qual a experiência tem grande importância; ou seja, o que uma pessoa observa pode não ser visto por outra.

Kaleff (2003, p. 17) afirma que:

Apesar das muitas controvérsias sobre a forma pela qual a visualização se processa em nossa mente, é importante que ocupe seu lugar no ensino da Geometria, pois a habilidade da visualização pode ser desenvolvida até certo ponto, se for disponibilizado ao indivíduo um apoio didático baseado em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo. O material concreto permite ao indivíduo efetivamente ver o objeto de seu estudo. Por outro lado, como a habilidade da visualização não é inata a todos os indivíduos, o que acarreta a existência de indivíduos “visualizadores” e indivíduos “não-visualizadores”, podem surgir grandes conflitos em sala de aula, pela confrontação de alunos visualizadores e professores não-visualizadores e vice-versa, se os profissionais não estiverem conscientes deste fato.

Nesse sentido, a página de um livro ou a lousa não são os instrumentos mais apropriados para se praticar visualização de objetos tridimensionais dado que a maioria das vezes, o professor dispõe apenas do livro didático como ferramenta ao ensino deste assunto.

Pensando nisso, os materiais concretos podem ser um interessante caminho para estudar o assunto e fortalecer o significado das noções geométricas elementares no intuito de que o aluno reconheça as conexões entre ideias e aplicações matemáticas e não apenas da percepção da Matemática, particularmente da Geometria, como um corpo de conceitos e procedimentos isolados do cotidiano e de outras áreas do

conhecimento.

Por isso, precisamos “estar atento ao fato de que, no caso de um aluno necessitar visualizar um objeto geométrico, como por exemplo um poliedro, um modelo concreto desse objeto construído em madeira, papel-cartão ou outro material pode servir de representação para gerar a imagem mental. Esta primeira imagem inicia um processo de raciocínio visual no qual, dependendo das características do objeto, o aluno recorre à habilidade da visualização para executar diferentes processos mentais, gerando outras imagens mentais ou representações do objeto. Estas representações podem ser expressadas através de um desenho ou de outro modelo concreto do objeto geométrico em questão” (KALEFF, 2003, p. 17).

Dessa forma, devemos utilizar o material concreto aliado a tecnologia pois, modelos tridimensionais que podem ser modificados virtualmente na tela de um computador, concebem uma relação entre a representação no plano enquanto que o modelo concreto o aluno interage com um modelo tridimensional do sólido porque algumas características fundamentais das novas tecnologias presentes na elaboração de materiais didáticos à prática pedagógica são as possibilidades que o computador tem de simular aspectos da realidade.

Os poliedros por sua vez, constituem uma unidade didática que se faz importante na medida em que o aluno necessita compreender as diferenças entre as figuras geométricas, sendo que a ligação entre estas e a realidade possibilita a comparação e a reflexão sobre suas formas, composição e decomposição.

Pensando nisso, ao longo do trabalho, apresentamos uma sequência de ações que permite os professores da educação básica e estudantes de graduação na sua prática docente a inserir o material concreto tornando dinâmica e prazerosa as aulas dedicadas ao estudo da Geometria e também a explorar virtualmente a construção dos poliedros através de uma aplicação feita em software de geometria dinâmica.

Deste modo, levamos o aluno do ensino fundamental 2 a explorar os cinco sólidos regulares de Platão construindo as estruturas das arestas com material de baixo custo (canudos plásticos coloridos, linha e agulha de tapeçaria) e com uma dificuldade

de manipulação maior se comparada com outros tipos de construções aplicadas ao aluno do ensino fundamental 1 em que os sólidos são feitos de palito de madeiras, do tipo usado para churrasco, dos quais se cerram as pontas, e unidos por bolinhas de isopor.

Assim, para construir os sólidos não é interessante dar muitos nós durante o processo de construção e a linha por sua vez, deve ser um pouco mais grossa do que a normalmente usada para empinar pipa pois, o uso de uma linha mais fina pode danificar o plástico do canudo.

Ressaltamos que para realizar as construções das arestas de cada um desses sólidos apresentamos esquemas que indicam o sentido da linha e que nunca deixe somente um fio saindo de um canudo porque para se dar firmeza aos vértices de uma estrutura com canudos é necessário que passe o fio de linha mais de uma vez por cada pedaço de canudo ligando-o aos outros.

E utilizando uma linguagem simples, esperamos que o aluno do último ano do ensino fundamental e também do ensino médio consigam realizar todas as construções sem a presença do professor.

1.2. Objetivo

1.2.1. Objetivo Geral

Lorenzato (1995) justifica a necessidade do ensino de geometria, pelo fato de que, um indivíduo, sem este conteúdo, nunca poderia desenvolver o pensar geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizadas.

Assim, através da análise e descrição crítica de formas, da escrita e das diferentes representações, todo o processo deve ser conjuntamente desenvolvido e o objeto analisado deve ser constante no ensino e aprendizagem da Geometria.

Nesse sentido, vamos analisar os poliedros de Platão e seus duais e explorar suas características e sua história com a utilização de materiais concretos como auxílio da aprendizagem uma vez que o trabalho com material concreto pode contribuir no processo de ensino aprendizagem, proporcionando uma melhor compreensão do

pensamento geométrico ao aluno.

Dessa forma, considerando que as novas tecnologias podem propiciar novas concepções de ensino e aprendizagem, podemos explorar virtualmente a construção passo a passo de cada poliedro como um recurso didático à prática pedagógica visto que o ambiente de aprendizagem será aquele que permite o desenvolvimento das capacidades num determinado domínio (competência), a aquisição de processos de aprendizagem para se adquirir determinadas competências (aquisição) e a aplicação de métodos de ensino e estratégias adequadas para promover os processos de aprendizagem e desenvolvimento (intervenção).

Dado que o uso do computador permite construir e identificar figuras geométricas, representar estruturas em 3D ou 2D, formar e representar poliedros e observar características, privilegiando arestas e vértices, dentre outras, despertar o interesse do aluno pela História da Matemática, acreditamos que o trabalho com material concreto em sala de aula pode auxiliar o desenvolvimento do pensamento intuitivo do aluno e proporcionar a chance deles fazerem questionamentos que provavelmente não fariam se fosse uma aula teórica.

1.2.2. Objetivo Específico

Apresentamos os objetivos específicos comuns aos estudantes em geral e aos professores tanto em atuação quanto em formação:

Construir diferentes modelos como recurso para a sua aprendizagem e definir poliedros duais;

Construir os sólidos de Platão utilizando canudos e linhas;

Desenvolver novas ideias, explorando a curiosidade e a descoberta.

Identificar e construir os cinco poliedros regulares e constatar que as faces dessas figuras são triângulos equiláteros, quadrados ou pentágonos regulares.

Oportunizar a visualização e a exploração de conceitos da geometria através do ambiente dinâmico e interativo;

Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas dos poliedros regulares;

Trabalhar procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro e transferidor;

Utilizar os modelos com canudos e o software de geometria dinâmica como uma ferramenta a ser inserida no processo de ensino e recurso de aprendizagem de geometria;

Visualizar seções nos poliedros regulares.

Em seguida, chamamos a atenção dos objetivos específicos aos professores:

Explorar a intuição e a criatividade do aluno;

Interagir junto aos alunos, propondo a comunicação matemática descrevendo, representando e apresentando resultados de forma a argumentar sobre as suas conjecturas;

Levar em conta o conhecimento prévio dos alunos na construção de significados;

Proporcionar aos alunos o conhecimento da história dos conceitos matemáticos envolvidos e aplicados nos poliedros regulares e uma melhor interação entre a Matemática e o aluno.

Possibilitar a compreensão de conceitos de Geometria por meio da interação do aluno com o software de geometria Dinâmica;

Refletir do ponto de vista teórico e metodológico sobre o software de geometria dinâmica como uma ferramenta de apoio ao professor

1.3. Metodologia

Fiorentini e Miorim (1990, p. 3) afirmam que:

Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um “aprender” mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e porque faz. Muito menos um “aprender” que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo, do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.

Assim, observamos que existem formas em que o aluno pode fazer uso do conhecimento matemático em inúmeras atividades para a construção da cidadania pois, é possível perceber a preocupação e conseqüentemente a relação em trabalhar a

matemática e aplicá-la ao cotidiano.

Segundo os apontamento feito pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) temos:

"A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática ao aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos" (BRASIL/MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais, 1997, p. 19)

No entanto, Bairral (2005) considera que os cursos de formação de professores devem oferecer aos futuros docentes oportunidades de conhecer e utilizar novas ferramentas para enfrentar as situações de ensino-aprendizagem da Matemática, principalmente, quando envolver conteúdos da Geometria. Com isso, a Geometria é introduzida no conteúdo a ser fixado, com maior abrangência do tema e a utilização de material concreto e o abstrato, possibilita uma educação inclusiva e um despertar de interesse do aluno pela História da Matemática.

Contudo, o uso do material concreto com a utilização de softwares educativos é uma forma diferente de se realizar o desenvolvimento em sala de aula, proporcionando assim um contato mais significativo com o conteúdo matemático que está sendo trabalho, e então observar a mudança de atitude por parte de professores, e acima de tudo dos alunos que possam se envolver e ver a disciplina tão temida por alguns, se tornar uma disciplina interessante e motivadora na construção do conhecimento.

Nesse sentido, o uso das novas tecnologias pode contribuir para novas práticas pedagógicas, desde que sejam baseadas em novas concepções de conhecimento tanto do aluno, quanto do professor já que as novas tecnologias podem propiciar novas concepções de ensino e aprendizagem, podemos explorá-la na elaboração de materiais didáticos e também, como recurso didático à prática pedagógica.

Dessa forma, o uso dos computadores nas escolas, em especial dos softwares de geometria dinâmica, de forma educativa e articulada, torna-se uma educação inclusiva, contanto que os alunos se sentem mais motivados por utilizar um recurso diferenciado e poder aprimorar seus conhecimentos matemáticos uma vez que a exploração de construções em ambientes de geometria dinâmica podem constituir estratégias poderosas para a aprendizagem da Geometria, desde que inseridas em poderosos contextos de aprendizagem, entendidos como o conjunto de inter-relações que se estabelecem entre alunos, professores e software educativos.

Assim, vamos explorar na área de geometria, construindo os poliedros de Platão com material de baixo custo por meio de passo a passo disponíveis no esquemas gráficos ou através de uma aplicação feita no software de geometria dinâmica.

1.4. Fundamentação Teórica

1.4.1. Um pouco de história

A história da Geometria conta que durante o século IV antes de Cristo viveu na Grécia um grupo de estudiosos que muito influenciou os destinos da Matemática e que trabalharam na chamada Academia de Platão. Platão, nascido em 427 a.C. apesar de não ter sido propriamente um matemático e ser mais conhecido como um filósofo e incentivador de matemáticos, escreveu no portal da sua Academia: “Ninguém que ignore a Geometria entre aqui”.

Platão não manteve seus estudos em sigilo. Ele e sua escola também estudaram os poliedros regulares, contrariando o que fizeram os pitagóricos e talvez este seja o motivo da denominação "corpos platônicos" atribuída aos poliedros regulares. Algumas fontes, como Proclo (410-485), atribuem a descoberta destes sólidos a Pitágoras (572 a.C. -497 a.C.). Outras evidências, contudo, sugerem que Pitágoras conhecia apenas o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, enquanto que a descoberta do octaedro e do icosaedro é atribuída a Theaetetus (417 a.C. -369 a.C.), que também conduziu um estudo mais aprofundado dos cinco sólidos regulares, incluindo a primeira demonstração conhecida de que existem somente cinco destes

sólidos.

No entanto, desde os tempos de Euclides já se sabia, como ficou demonstrado em Elementos, que existem apenas cinco poliedros regulares. Apesar de não sabermos se a demonstração era original de Euclides, esta foi a primeira que apareceu escrita.

No livro XIII dos Elementos, de Euclides (300 a.C.) temos poucas referências aos poliedros regulares, chamando-os poliedros de Platão. As proposições de 13 a 17 nesse livro descrevem as construções do tetraedro, do octaedro, do cubo, do icosaedro, e do dodecaedro, nesta ordem. Para cada sólido, Euclides calcula a razão entre o diâmetro da esfera circunscrita e o comprimento da aresta do sólido. Na proposição 18, ele demonstra que não existem outros poliedros regulares. Vários dos resultados presentes no Livro XIII são provavelmente obtidos do trabalho de Theaetetus.

Os nomes sólidos platônicos ou corpos cósmicos foram dados devido a forma pela qual Platão (427 a.C. -34 a.C.), em um diálogo intitulado Timeu, os empregou para explicar a natureza. Não se sabe se Timeu realmente existiu ou se Platão o inventou como um personagem para desenvolver suas ideias. A atração pelo desconhecido e pelo místico levou estes estudiosos gregos a atribuírem um significado especial a cada um destes poliedros.

Em Timeu, Platão associa cada um dos elementos clássicos (terra, ar, água e fogo) com um poliedro regular. Terra é associada com o cubo, ar com o octaedro, água com o icosaedro e fogo com o tetraedro. Com relação ao quinto sólido platônico, o dodecaedro, Platão escreve: “Faltava ainda uma quinta construção que Deus utilizou para organizar todas as constelações do céu”.

Aristóteles introduziu um quinto elemento, éter, e postulou que os céus eram feitos deste elemento, mas ele não teve interesse em associá-lo com o quinto sólido de Platão. No entanto, os estudantes desta Academia faziam corresponder um dos doze signos do Zodíaco a cada face pentagonal do dodecaedro e, por isso, essa forma geométrica foi considerada como símbolo do Universo.

Esses estudiosos admiravam tais sólidos por considerarem suas formas harmoniosas, mas também porque perceberam que eles eram uma fonte rica para a

observação de relações geométricas. Ao mesmo tempo, além das observações que puderam verificar em cada um dos sólidos, também buscaram relações entre os cinco.

1.4.2. Por que existem apenas cinco poliedros regulares?

Se lembrarmos que existe um número infinito de polígonos regulares, o fato histórico de que só existem cinco poliedros regulares surpreende ainda muita gente. Porém, se usarmos argumentos simples, vamos comprovar a veracidade desse fato. É válido observar que o sufixo edro vem da palavra grega hedra que significa face.

Primeiramente, são conhecidos como regulares porque todas as faces, ângulos e ângulos entre as faces adjacentes de cada um desses poliedros são sempre os mesmos.

Dessa forma, a soma dos ângulos internos dos polígonos que concorrem em um mesmo vértice do poliedro é menor do que 360° . Caso contrário, não conseguiríamos formar um ângulo constituído por todas as faces que convergem num vértice. Em outras palavras, se a soma dos ângulos internos do polígono fosse maior do que 360° então eles estariam se sobrepondo e se a soma fosse igual a 360° então os polígonos estariam sobre o mesmo plano.

Assim, se fizermos a planificação de um sólido construído com cartolina e nivelarmos os cantos de um poliedro, a soma dos ângulos dos polígonos unidos em cada vértice será menor do que 360° e no mínimo necessitamos de três faces unidas em cada vértice para formar um sólido se considerarmos as possibilidades de união de polígonos regulares. Por outro lado, um poliedro convexo é regular quando as suas faces são polígonos regulares iguais entre si, e em cada vértice se encontram o mesmo número de faces. Num poliedro deste tipo as faces não se distinguem entre si, o mesmo sucedendo às arestas e aos vértices.

Pensando nisso, os únicos polígonos regulares capazes de formar poliedros convexos regulares são o triângulo, o quadrado, e o pentágono.

Se utilizarmos triângulo equilátero, temos a amplitude dos seus ângulos internos é 60° . Então, a soma dos ângulos com três triângulos é $3 \times 60^\circ = 180^\circ$ e o poliedro formado é o tetraedro, com quatro triângulos, a soma dos ângulos é $4 \times 60^\circ = 240^\circ$ e o poliedro formado é o octaedro, com cinco triângulos, a soma dos

ângulos é $5 \times 60^0 = 300^0$ e o poliedro formado é o icosaedro. Já com seis triângulos, a soma dos ângulos é $6 \times 60 = 360^0$ sendo impossível formar um poliedro.

Se utilizarmos quadrados, a amplitude dos seus ângulos internos é 90^0 . Então, a soma dos ângulos com três quadrados é $3 \times 90^0 = 270^0$ e o poliedro formado é o cubo. Porém, com quatro quadrados, a soma dos ângulos é $3 \times 90^0 = 360^0$ sendo impossível formar um poliedro.

Se utilizarmos pentágonos, a amplitude dos seus ângulos internos é 108^0 . Então, a soma dos ângulos com três pentágonos é $3 \times 108^0 = 324^0$ e o poliedro formado é o dodecaedro. Mas com quatro pentágonos, a soma dos ângulos é $4 \times 108^0 = 432^0$ sendo impossível formar um poliedro.

Esse raciocínio permite concluir que não podem existir poliedros regulares com faces hexagonais ou faces com número maior de lados. E finalmente, concluímos que só existem 5 poliedros regulares: o tetraedro (4 faces triangulares), o cubo ou hexaedro (6 faces quadradas), o octaedro (8 faces triangulares), o dodecaedro (12 faces pentagonais) e o icosaedro (20 faces triangulares). Note que o prefixo, também oriundo do grego, indicam a quantidade de faces de cada poliedro.

1.4.3. Poliedros duais

Visto que dualidade não é uma característica específica dos poliedros platônicos, esta se estende a todos os poliedros, embora certos duais não possam ser considerados poliedros no sentido tradicionalmente usado.

No entanto, o processo utilizado a obter os duais dos platônicos não pode ser estendido a todos os poliedros. A dualidade é geralmente definida em termos de reciprocidade polar sobre uma determinada esfera, o que nos permite determinar o dual de um poliedro qualquer.

Segundo BAIRRAL e SILVA (2005), é importante perceber que podemos definir, diferentemente, determinado conceito se soubermos identificar atributos relevantes em uma definição. No caso de poliedros duais consideramos as seguintes definições:

1) Se considerarmos um sólido platônico qualquer e unirmos os pontos centrais das faces adjacentes, obteremos um novo sólido. Esses dois são duais um do

outro.

2) Poliedros duais são formados por dois poliedros, um dentro do outro, de modo que os vértices do sólido interior coincidam com os centros de faces do sólido exterior.

3) Dois poliedros são duais quando um está inscrito no outro de tal forma que os vértices do poliedro inscrito são centros de faces do poliedro circunscrito.

Para BAIRRAL e SILVA (2005), além dos atributos relevantes, cada definição pode submeter a outros elementos conceituais e usar terminologias diferentes. Na primeira definição, temos referência aos sólidos platônicos e ao ponto central das faces enfatizando que as faces são adjacentes. Dessa forma, para construirmos poliedros duais, prestemos atenção na relação entre o comprimento das arestas dos poliedros correspondentes pois a dualidade é um tipo de inscrição/circunscrição de poliedros regulares.

Logo, o tetraedro é dual de si mesmo (autodual), o octaedro é dual do cubo, o dodecaedro é dual do icosaedro.

1.4.4. Recursos Tecnológicos

O software GeoGebra é um programa gratuito de geometria dinâmica, criado por Markus Hohenwarter em 2001 e a partir da versão 3.2 ficou mais simples utilizar a Álgebra Linear com a implementação e a manipulação de matrizes. Hoje, na versão 5.0, o ambiente 3D é nativo no GeoGebra e é possível construir todos os poliedros de Platão e suas respectivas planificações.

Porém, por uma questão de performance e tempo de resposta do computador, fez com que utilizássemos o conhecimento de Álgebra Linear e da Geometria Analítica para projetar o espaço sobre o plano e assim, simulando um ambiente 3D¹ por meio de matriz de rotação com altíssima performance em que a aplicação não é afetada.

Nessa aplicação, o aluno pode acompanhar virtualmente passo a passo a construção de cada um dos poliedros de Platão, visualizar o seu dual e individualmente

1 PARK, J. ; SON, Y. ; KWON, O. ; YANG, H. ; CHOI, K. Constructing 3D graph of function with GeoGebra(2D). In: Paper will be presented at First Eurasia Meeting of GeoGebra, 2010, Istanbul. Disponível em: < http://2011geogebralessons.wikispaces.com/file/view/son,yang,kwon,park,choi_2003_.pdf >. Acesso em: 15 nov. 2013.

cada um dos seus elementos, incluso um aprofundamento teórico.

No entanto, aconselhamos aos alunos a explorarem alguns dos trabalhos feitos pelo professor Humberto Bortolossi da UFF que dentre eles destacamos “Uma Pletora de Poliedros”² em que o aluno pode cortar, montar, modelar, exibir o poliedro e seu dual dos sólidos platônicos e outros poliedros. Um outro trabalho é “Os sólidos Platônicos”³ em que o professor Humberto destaca as propriedades matemáticas, os aspectos históricos e os modelos virtuais interativos de cada um dos sólidos platônicos.

É válido dizer que na Geometria, a planificação de um poliedro é um arranjo de polígonos, de lados comuns, que ao serem dobrados retornam à forma espacial que lhe deu origem. Nesse sentido temos 2 planificações diferentes para o tetraedro regular, 11 planificações diferentes para o cubo e o octaedro regular e 43380 planificações diferentes para o icosaedro regular e o dodecaedro regular (Buekenhout e Parker 1998).

E, embora o foco do trabalho não seja ensinar o aluno a aprender utilizar o software GeoGebra, temos na internet uma infinidade de materiais, dentre eles o Instituto de GeoGebra no Rio de Janeiro (<http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>), de São Paulo (<http://www.pucsp.br/geogebra/>) e também cursos excelentes gratuitos através de videoaulas na qual indicamos o curso do professor Sérgio Dantas disponível em <http://ogeogebra.com.br/> e o curso do professor Luis Aquino disponível em <http://www.lcmaquino.org/category/geogebra/>.

1.5. Estrutura desta Dissertação

O presente trabalho é composto de 7 capítulos. Além da forma com que o trabalho foi organizado, o capítulo 1 explora alguns aspectos históricos e tecnológicos sugerindo diversas formas de deixar a aula mais atrativa e agradável.

Dentre os capítulos 2 e 6, apresentamos os poliedros de Platão e seus duais. No início de cada um desses capítulos, temos uma revisão teórica dedicada tanto aos professores em atuação quanto ao professor em formação ou estudantes em geral, a qual chamamos de alunos. Nessa revisão, a partir da aresta do poliedro, o aluno pode

2 BORTOLOSSI, H. Uma Pletora de Poliedros. Disponível em: < <http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html> >. Último acesso: Março de 2015

3 BORTOLOSSI, H. Os Sólidos Platônicos. Disponível em: < <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html> >. Último acesso: Março de 2015

acompanhar detalhadamente todos os cálculos referente ao volume, à área do sólido e ao tamanho de aresta, seja tal aresta a medida do dual ou de um poliedro inscrito.

Em seguida, baseado no estudo de poliedros de Platão (KALEFF, 2003) e no livro “Tópicos em Ensino de Geometria” (KALEFF, 2008) que visa o ensino à distância, ensinamos o aluno construir os poliedros e seus duais por meio de material concreto (canudo, linha e acetato⁴), considerando inscrições, planificações e seções. Isso ajuda e muito o aluno a compreender as diversas propriedades geométricas.

Assim, ao final de cada um desses capítulos, por meio de uma aplicação feita no software de geometria dinâmica (GeoGebra), o aluno pode acompanhar virtualmente todo o processo de construção do poliedro e a representação do seu dual, observar individualmente cada um dos elementos (vértice, faces e arestas) e rever as propriedades geométricas do poliedros visto no início de cada um dos capítulos através da opção aprofundamento.

Finalmente, no capítulo 7, apresentamos algumas considerações e conclusões relativas ao desenvolvimento deste trabalho.

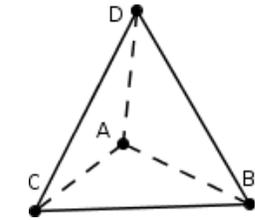
Lembramos de que no anexo, temos informações sobre a razão áurea, detalhamento do pentágono regular, incluso construção usando régua e compasso, outra forma de calcular o volume dos poliedros e as planificações dos poliedros utilizando régua e compasso.

4 Folha de plástico transparente

Capítulo 2 - Tetraedro Regular

2.1. Revisão Teórica

2.1.1. Introdução



V e IV a.C.

O filósofo grego Platão estabelecia uma ligação dos poliedros com as forças da natureza. Hoje é possível estudar as formas moleculares (por exemplo, CH_4 , SiF_4 e CH_2Cl_2), existentes na natureza e observar as ideias que Platão teve por volta do século

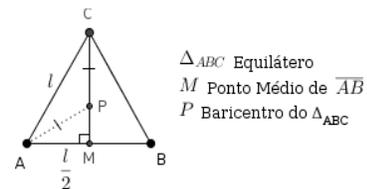
Segundo Platão, o poliedro mais “pontudo”, com arestas mais cortantes, com menor número de faces e o de maior mobilidade. Representante do elemento fogo, dada sua forma, suas pontas agudas explicariam a propriedade destrutiva e penetrante do calor.

Esse sólido é formado por 4 vértices (A , B , C e D), 6 arestas (\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AD} , \overline{BD} e \overline{CD}), 4 faces triangulares (ABC , ABD , ACD e BCD), e 3 arestas que concorrem em cada vértice.

Como as faces são triângulos equiláteros temos a coincidência dos quatro pontos notáveis do triângulo (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro).

Dentre esses pontos, o encontro das medianas de um triângulo recebe o nome de baricentro e divide cada mediana na razão 2:1. Vejamos a demonstração:

No triângulo equilátero ABC , sejam o ponto P o baricentro do triângulo, M o ponto médio de \overline{AB} e \overline{CM} a altura relativa a \overline{AB} , com $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = l$. Como $\overline{CM} = \overline{CP} + \overline{PM}$, vamos



provar que $\frac{\overline{CP}}{\overline{PM}} = 2$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo CMA , temos:

$$\overline{CM}^2 + \overline{MA}^2 = \overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{CM}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow \overline{CM}^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow$$

$$\overline{CM}^2 = \frac{3}{4}l^2 \Rightarrow \overline{CM} = l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então

$$\overline{CP} + \overline{PM} = l\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.1)$$

Como $\overline{AP} = \overline{CP}$, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo PMA , temos:

$$\overline{PM}^2 + \overline{MA}^2 = \overline{AP}^2 \Rightarrow \overline{PM}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \overline{CP}^2$$

Então

$$\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = \frac{l^2}{4} \quad (2.2)$$

Como $\overline{CP}^2 - \overline{PM}^2 = (\overline{CP} + \overline{PM})(\overline{CP} - \overline{PM})$, substituindo (2.1) e (2.2) temos:

$$\frac{l^2}{4} = l\frac{\sqrt{3}}{2}(\overline{CP} - \overline{PM}) \Rightarrow \frac{l}{2} = \sqrt{3}(\overline{CP} - \overline{PM}) \Rightarrow \overline{CP} - \overline{PM} = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

Então

$$\overline{CP} - \overline{PM} = l\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (2.3)$$

De (2.1) e (2.3) temos o sistema $\begin{cases} \overline{CP} + \overline{PM} = l\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \overline{CP} - \overline{PM} = l\frac{\sqrt{3}}{6} \end{cases}$

Somando as duas equações temos:

$$2\overline{CP} = l\frac{\sqrt{3}}{2} + l\frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow 2\overline{CP} = l\frac{4\sqrt{3}}{6}$$

Então

$$\overline{CP} = l\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.1) temos:

$$l\frac{\sqrt{3}}{3} + \overline{PM} = l\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{PM} = l\frac{\sqrt{3}}{2} - l\frac{\sqrt{3}}{3}$$

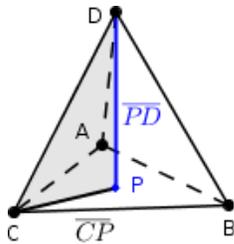
Então

$$\overline{PM} = l \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (2.5)$$

Logo, $\frac{CP}{PM} = \frac{l \frac{\sqrt{3}}{3}}{l \frac{\sqrt{3}}{6}} = 2 \square$

Nas próximas seções desse capítulo, vamos apresentar propriedades (altura, área, volume, raios das esferas inscrita e circunscrita) e construções, incluso aresta do dual, desse sólido.

2.1.2. Cálculo da altura do tetraedro regular

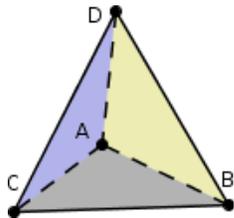


Seja o ponto P o baricentro do triângulo ABC . Para calcular a altura \overline{PD} do tetraedro $ABCD$ regular, consideramos o triângulo retângulo CPD e determinamos o comprimento do segmento PD .

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{CP}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{CD}^2 \Rightarrow \left(l \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \overline{PD}^2 = l^2 \Rightarrow \overline{PD} = l \frac{\sqrt{6}}{3}$$

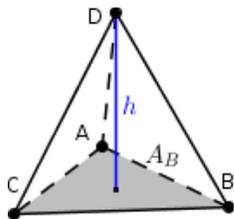
2.1.3. Cálculo da área do tetraedro



Como o tetraedro regular tem quatro faces triangulares (ABC , ABD , BCD e ACD) e cada face tem a mesma área, a área é dada por

$$A = 4A_B \Rightarrow A = 4l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = l^2 \sqrt{3}.$$

2.1.4. Cálculo do volume do tetraedro

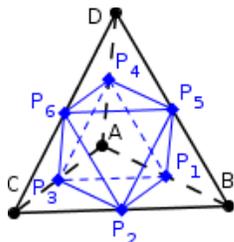


No tetraedro regular, sejam A_B a área da base e h a altura. Como o tetraedro é um caso particular de pirâmide de base triangular, temos o volume⁵ é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$. Logo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = l^3 \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

5 Na seção 1 do anexo 2 mostramos um forma diferente para calcular o volume do tetraedro regular.

2.1.5. Cálculo do volume do octaedro regular inscrito⁶ no tetraedro



Como cada face do tetraedro regular de lado l é um triângulo equilátero então ligando os pontos médio de seus lados, dividimos a face em quatro triângulos equiláteros de lado $\frac{l}{2}$.

Dessa forma, podemos decompor o tetraedro regular de aresta l em quatro tetraedros regulares e um octaedro regular, ambos, de aresta $\frac{l}{2}$.

Como o volume do tetraedro de aresta l é dado por $V_{(l)} = l^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$, vamos calcular o volume do octaedro regular inscrito, representado por V_O . Logo,

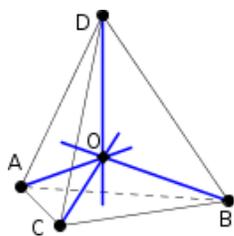
$$V_{(l)} = 4V_{(\frac{l}{2})} + V_O \Rightarrow l^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = 4 \cdot \left(\left(\frac{l}{2} \right)^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \right) + V_O \Rightarrow$$

$$l^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = 4 \cdot \left(\frac{l^3}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \right) + V_O \Rightarrow l^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{l^3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} + V_O \Rightarrow$$

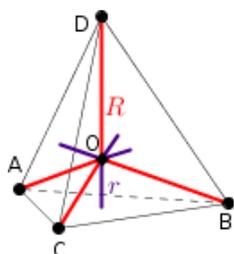
$$l^3 \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{2} \left(l^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \right) + V_O \Rightarrow V_O = \frac{1}{2} \left(l^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \right)$$

Em outras palavras, o volume do octaedro regular inscrito é a metade do volume do tetraedro.

2.1.6. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita do tetraedro regular

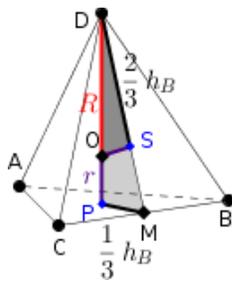


Note que o centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O , é obtido pela interseção das alturas do tetraedro relativas aos seus vértices.



Como a distância entre o centro da esfera e o vértice do sólido é o raio da esfera circunscrita, representado por R , e a distância entre o centro da esfera e uma face desse sólido é o raio da esfera inscrita, representado por r , para determinar os raios das esferas do tetraedro, sejam P o centro da face ABC , S o centro da face BCD e h a altura do tetraedro regular.

6 Octaedro regular em que os vértices são os pontos médios das arestas do tetraedro regular.



Como $\overline{DO} + \overline{OP} = \overline{PD}$, $\overline{OS} = \overline{OP} = r$, $\overline{DO} = R$ $\overline{PD} = h$ e temos:

$$h = R + r \quad (2.6)$$

Por outro lado, P e S são baricentros de faces ABC e BCD , respectivamente, e M é ponto médio de \overline{BC} .

$$\text{Então, } \overline{PM} = \frac{1}{3}h_B \text{ e } \overline{DS} = \frac{2}{3}h_B.$$

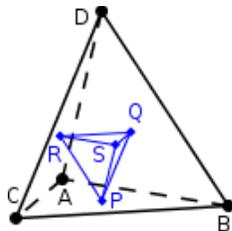
Assim, pelo caso de semelhança AA , os triângulos retângulos DPM e DSO são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{DS}}{\overline{OS}} \Rightarrow \frac{h}{\frac{1}{3}h_B} = \frac{\frac{2}{3}h_B}{r} \Rightarrow r = \frac{\frac{2}{9}(h_B)^2}{h} \Rightarrow r = \frac{\frac{2}{9}(l\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{l\frac{\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow r = l\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

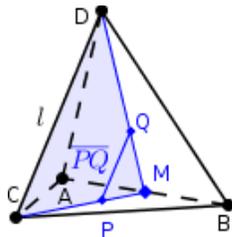
Substituindo r em (2.6) temos:

$$h = R + r \Rightarrow l\frac{\sqrt{6}}{3} = R + l\frac{\sqrt{6}}{12} \Rightarrow R = l\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

2.1.7. Cálculo da aresta do dual do tetraedro regular



Sejam os pontos P, Q, R e S , os baricentros dos triângulos ABC, ABD, ACD e BCD , respectivamente. Construimos os segmentos entre os centros de faces adjacentes do sólido e teremos assim, o chamado dual do tetraedro com as seguintes arestas: $\overline{QP}, \overline{QR}, \overline{RS}, \overline{RP}$ e \overline{SP} .



Para a medida da aresta do tetraedro $PQRS$, consideramos os triângulos ABC e ABD e determinamos o segmento QP .

Como o ponto P é o baricentro do triângulo ABC , temos

$$\overline{CP} = 2\overline{PM} \text{ e portanto } \overline{PM} = \frac{1}{3}\overline{CM}.$$

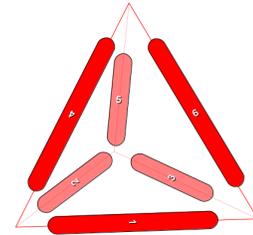
Assim, pelo caso de semelhança LAL , os triângulos DCM e QPM são semelhantes.

Então,

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PM}} \Rightarrow \frac{l}{\overline{CM}} = \frac{\overline{PQ}}{\frac{1}{3}\overline{CM}} \Rightarrow l = \frac{\overline{PQ}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{l}{3}$$

2.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular

Para realizar a construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular, utilizando um canudo de 12 cm, vamos precisar de 6 pedaços de canudo de mesma cor⁷, um pedaço de linha maior do que 1,44 m de comprimento⁸ e o tempo livre de 1 aula (50 minutos)



Agora vejamos a construção passo a passo das arestas desse sólido:

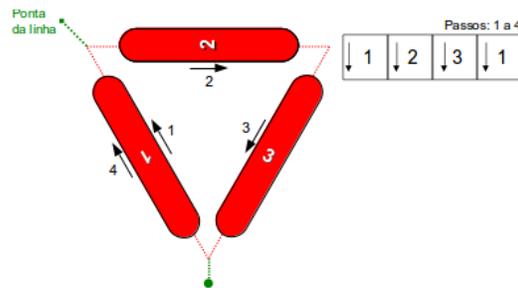


Figura 1 - 1ª Sequência

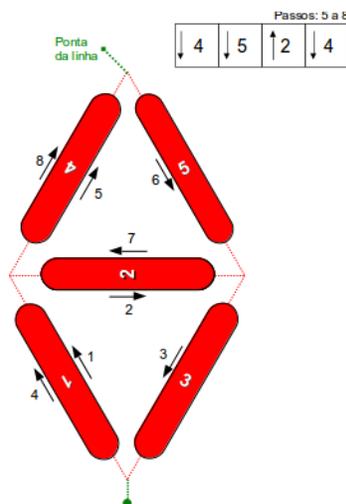


Figura 2 - 2ª Sequência

- 7 Na representação do tetraedro, não visualizamos os canudos representados na parte traseira, por isso a cor do canudo será transparente.
- 8 Seja t o tamanho da linha e c_1 o tamanho do canudo de quantidade 6. Então, $t = 12 \cdot c_1$. Para $c_1 = 12$ cm, temos: $t = 12 \cdot 12 \Rightarrow t = 144$ cm $\Rightarrow t = 1,44$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

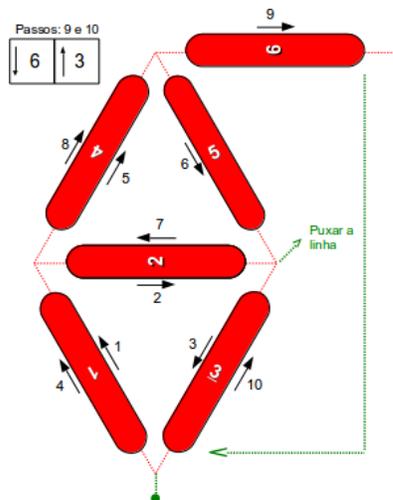


Figura 3 - 3ª Sequência

Antes de prosseguir a construção, vamos puxar a linha da 3ª sequência, conforme indicado no passo 10 da figura 3.

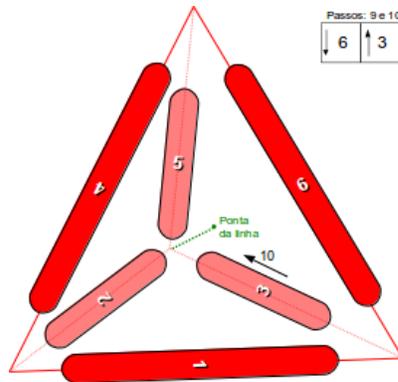


Figura 4 - 3ª Sequência - Continuação

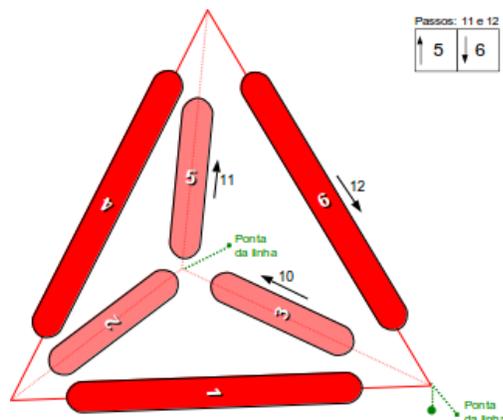


Figura 5 - 4ª Sequência

Para finalizar, faremos um único nó com as linhas ligando as arestas 6 e 1 da última sequência.

Agora vejamos todo o procedimento sem interrupção, a visualização de dois modos diferentes e uma foto do sólido construído com material concreto.

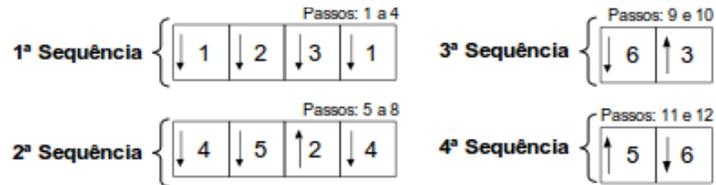


Figura 5 - Procedimento completo

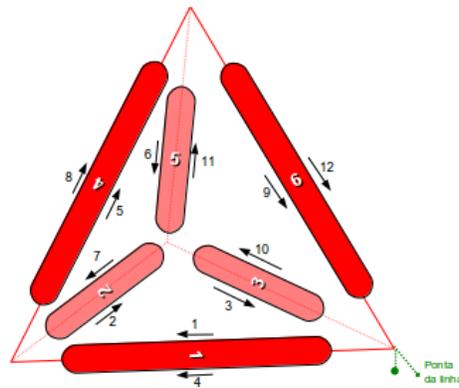


Figura 6 - 1º Modo

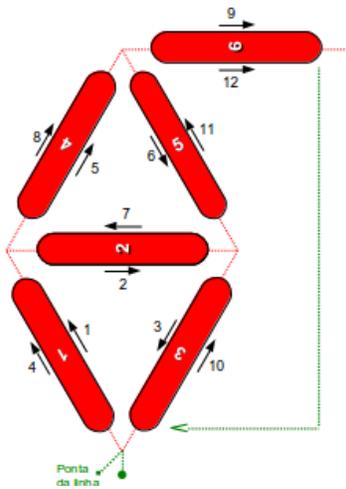


Figura 7 - 2º Modo

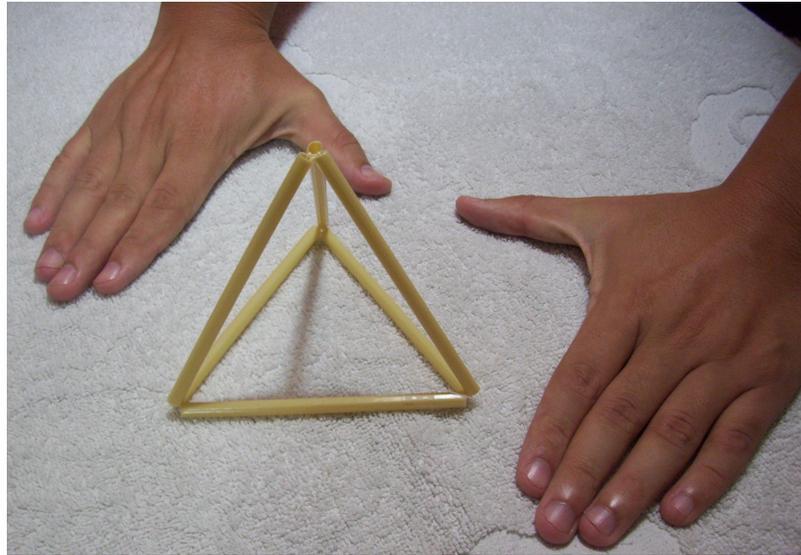
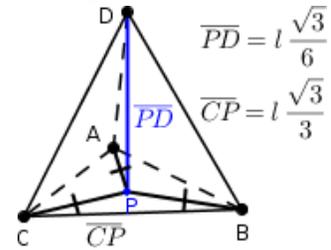


Figura 8 - Construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular

2.3. Construindo o modelo esqueleto da altura no tetraedro regular

Para construir o modelo esqueleto da altura do tetraedro regular são necessários⁹ 6 canudos (\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AD} , \overline{BD} e \overline{CD}) de 12 cm, 3 canudos (\overline{AP} , \overline{BP} e \overline{CP}) de $4\sqrt{3}$ cm, 1 canudo (\overline{PD}) de $4\sqrt{6}$ cm, um pedaço de linha maior do que 3,08 m de comprimento¹⁰ e o tempo livre de 2 aulas (1 hora e 40 minutos).



Conforme indicado no item 1.2, realizar a montagem do tetraedro regular $ABCD$ (1ª Sequência).

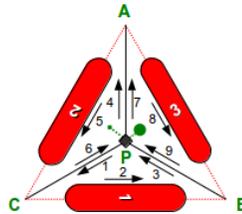
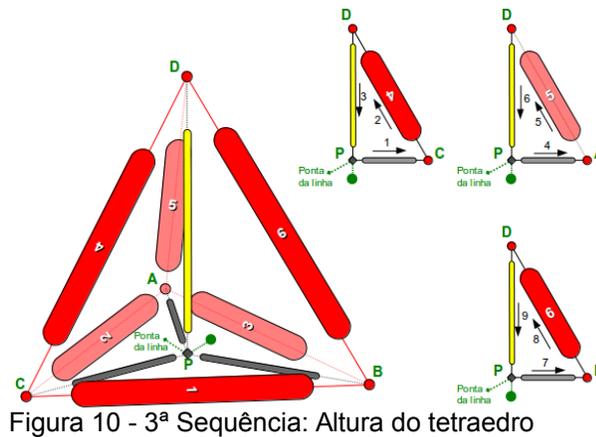


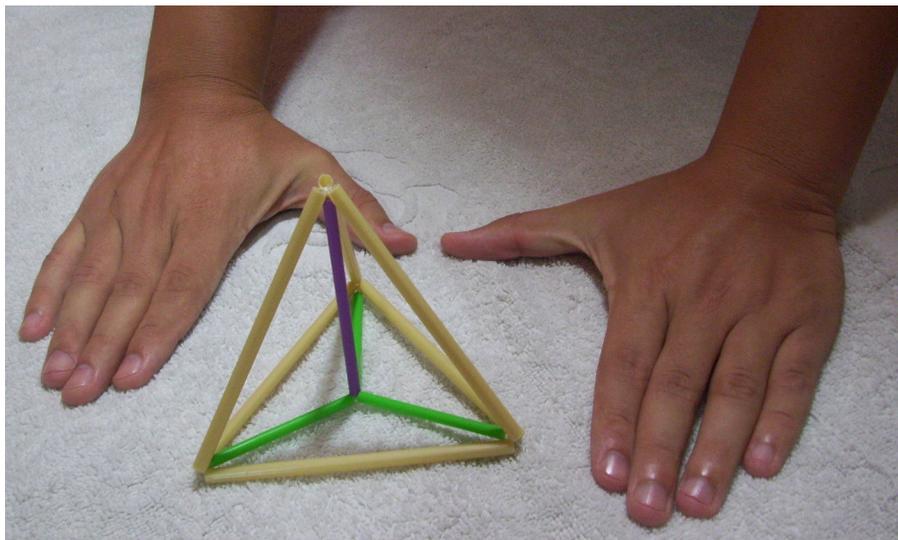
Figura 9 - 2ª Sequência: Baricentro do triângulo ABC

9 Para $l = 12$ temos $\overline{CP} = l \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ e $\overline{PD} = l \frac{\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6}$ conforme itens 2.1.1. e 2.1.2.

10 Seja t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de lado l , c_2 o tamanho do canudo de lado $l \frac{\sqrt{3}}{3}$, c_3 o tamanho do canudo de quantidade $l \frac{\sqrt{6}}{3}$. Então $t = 6 \cdot c_1 + 9 \cdot c_2 + 3 \cdot c_3 \Rightarrow t = 6 \cdot l + 9 \cdot l \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \cdot l \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow t = 6l + 3\sqrt{3}l + \sqrt{6}l \Rightarrow t = (6 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})l$. Ao construir o modelo esqueleto das arestas encontramos $t = 12 \cdot l$. Logo, o tamanho da linha final é $t = (18 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})l$. Para $l = 12$ cm, temos $t = 308$ cm $\Rightarrow t = 3,08$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.



É válido observar que os triângulos APD , BPD e CPD são retângulos em P. Para finalizar, faremos um único nó com o início e a ponta da linha no

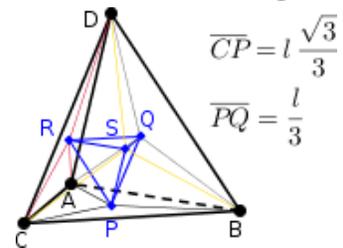


triângulo BPD . Vejamos uma foto do sólido construído com material concreto.

Figura 11 - Construção do modelo esqueleto da altura do tetraedro regular

2.4. Construindo o modelo esqueleto das arestas do dual no tetraedro regular

Para construir o modelo esqueleto das arestas do dual no tetraedro regular são necessários¹¹ 6 canudos (\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AD} , \overline{BD} e \overline{CD}) de 12 cm, 9 canudos (\overline{AP} , \overline{BP} , \overline{CP} , \overline{AQ} , \overline{BQ} , \overline{DQ} , \overline{AR} , \overline{CR} , \overline{DR} , \overline{BS} , \overline{CS} e \overline{DS}) de $4\sqrt{3}$ cm e 6 canudos (\overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RP} , \overline{PS} , \overline{QS} , \overline{RS}) de 4 cm



11 Para $l = 12$ temos: $\overline{CP} = l \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ e $\overline{PQ} = \frac{l}{3} = 4$ conforme itens 2.1.1. e 2.1.7.

e um pedaço de linha maior do que 6,94 m de comprimento¹² e o tempo livre de 3 aulas (2 horas e 30 minutos).

Conforme indicado no item 1.2, realizar a montagem do tetraedro regular $ABCD$ (1ª Sequência).

Antes de prosseguir, vamos planificar o tetraedro regular¹³ e visualizar que alguns canudos (4, 5 e 6) ocupam duas posições (figura 12).

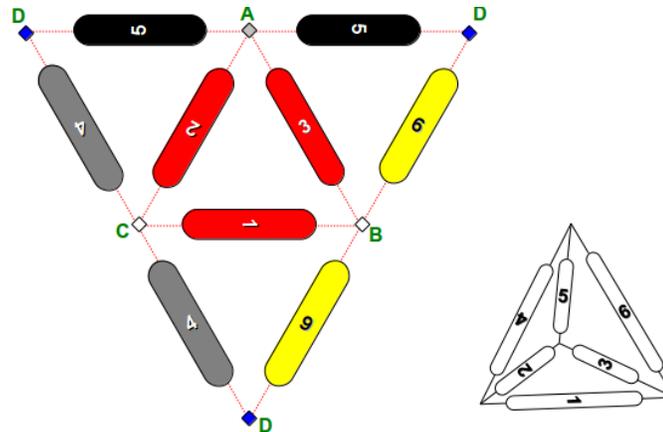


Figura 12 - Planificação do Tetraedro Regular

Dessa forma, para encontrar os vértices do dual do tetraedro, devemos determinar o baricentro de cada triângulo.

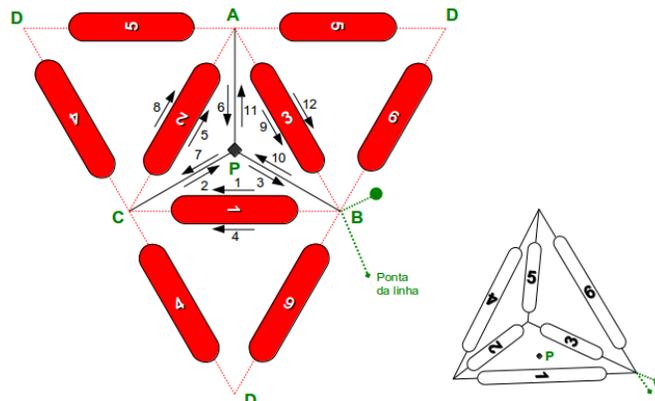


Figura 13 - 2ª Sequência: Baricentro do triângulo ABC

12 Seja t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de lado l , c_2 o tamanho do canudo de lado $l\frac{\sqrt{3}}{3}$, c_3 o tamanho do canudo de quantidade $\frac{l}{3}$. Então $t = 28 \cdot c_1 + 24 \cdot c_2 + 12 \cdot c_3 \Rightarrow t = 28 \cdot l + 24 \cdot l\frac{\sqrt{3}}{3} + 12 \cdot \frac{l}{3} \Rightarrow t = 28l + 8\sqrt{3}l + 4l \Rightarrow t = (32 + 8\sqrt{3})l$. Ao construir o modelo esqueleto das arestas encontramos $t = 12 \cdot l$. Logo, o tamanho da linha final é $t = (44 + 8\sqrt{3})l$. Para $l = 12$ cm, temos $t = 694$ cm $\Rightarrow t = 6,94$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

13 Na seção 1 do anexo 3 temos a planificação do tetraedro utilizando régua e compasso.

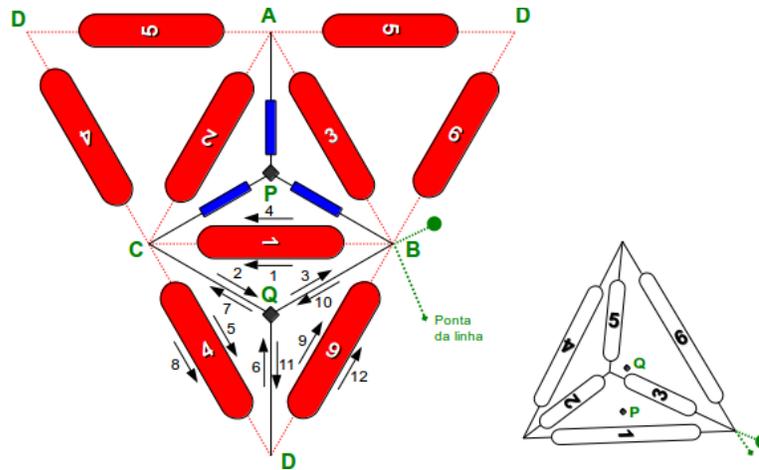


Figura 14 - 3ª Sequência: Baricentro do triângulo BCD

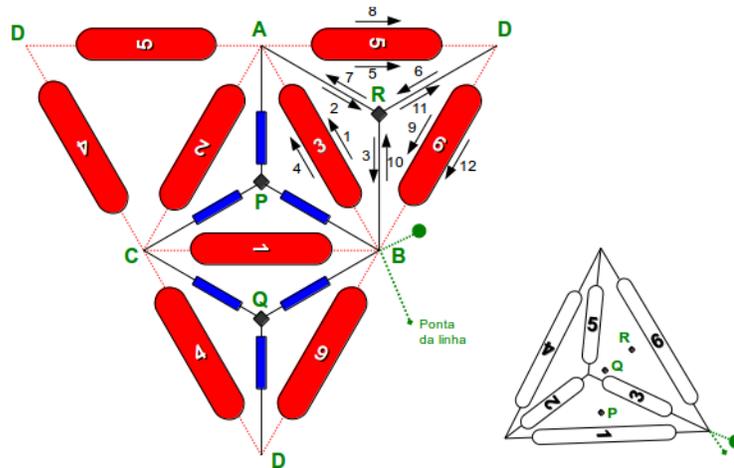


Figura 15 - 4ª Sequência: Baricentro do triângulo ABD

Para determinar o baricentro do triângulo ACD , conforme indicado na figura 16, levemos a ponta da linha até o triângulo passando pelos canudos 1 e 2:

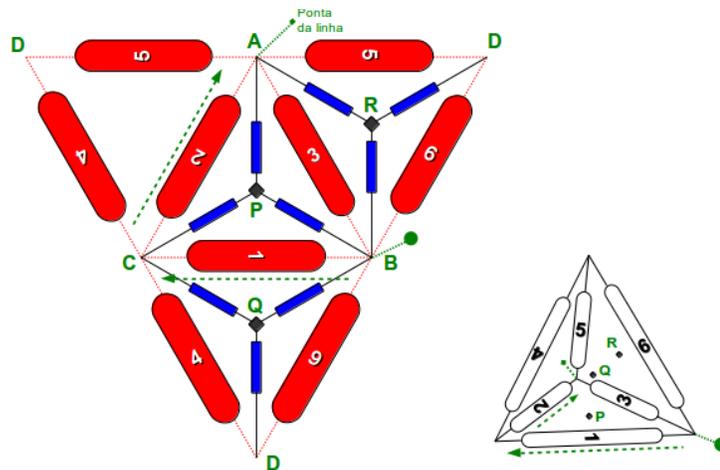


Figura 16

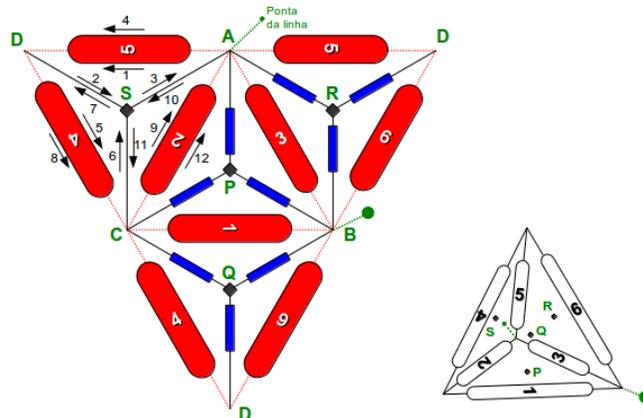


Figura 17 - 5ª Sequência: Baricentro do triângulo ACD

Para finalizar com um nó, conforme indicado na figura 18, levemos a ponta da linha até o início passando pelos canudos 5 e 6:

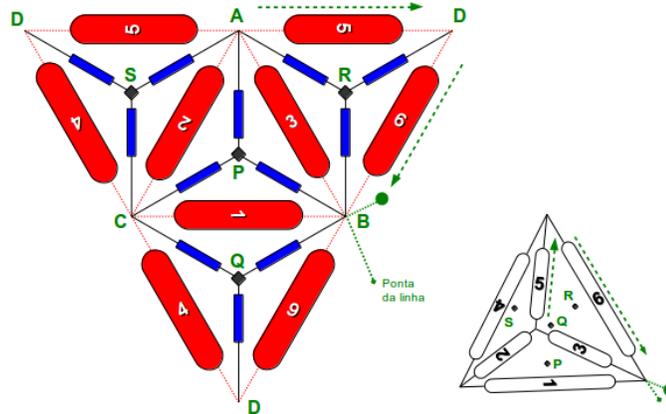


Figura 18

Para realizar a montagem do tetraedro regular $PQRS$, conforme apresentado no item 2.2, devemos unir por meio de um laço cada vértice desse tetraedro com o baricentro de uma das faces do tetraedro $ABCD$.

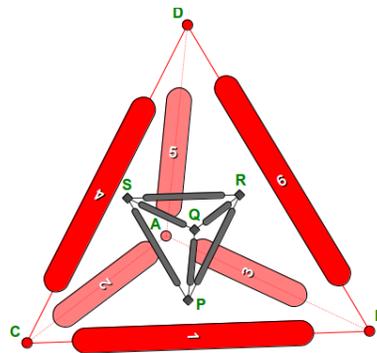


Figura 19

Vejamos uma foto do sólido construído com material concreto.

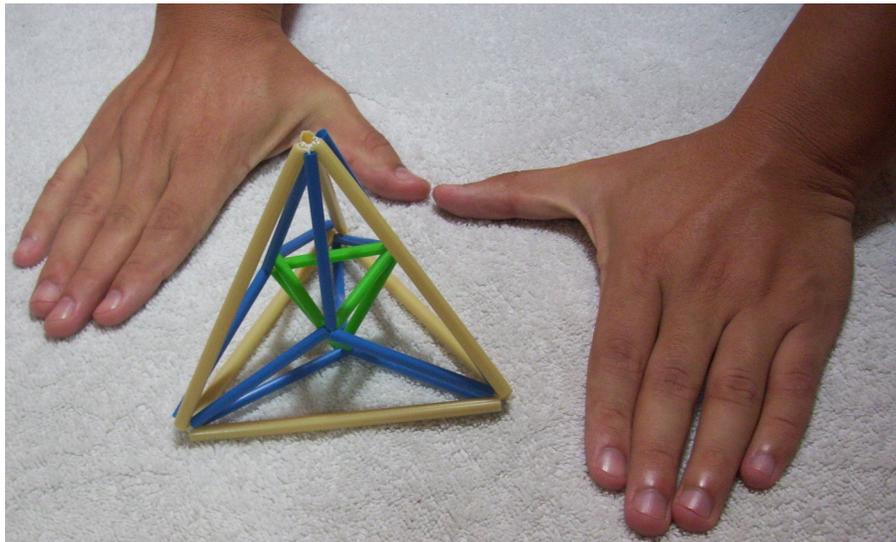
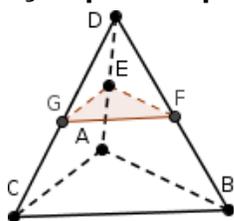


Figura 20 - Construção do modelo esqueleto das arestas do dual no tetraedro regular

2.5. Construindo o modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular e uma seção por um plano



Para construir o modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular e uma seção por um plano são necessários cola, $5,5\text{cm} \times 5,5\text{cm}$ de acetato¹⁴, 6 canudos (\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AD} , \overline{BD} e \overline{CD}) de 12 cm, 3 canudos (\overline{EF} , \overline{FG} e \overline{GE}) de 5 cm, um pedaço de linha maior do que 1,59 m de comprimento¹⁵ e o tempo livre de 2 aulas (1 hora e 40 minutos).

Conforme indicado no item 1.2, realizar a montagem do tetraedro regular $ABCD$ (1ª Sequência).

Dentre as diversas formas de executar uma seção no plano, optamos em realizar um corte por um plano paralelo a face do tetraedro. Visto que a face é um triângulo equilátero, vamos montar o triângulo equilátero PQR recortar e colar o acetato.

¹⁴ Folha de plástico transparente.

¹⁵ Seja t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de lado l , c_2 o tamanho do canudo de lado 5 cm. Então $t = 3 \cdot 5 \Rightarrow t = 15$ cm. Ao construir o modelo esqueleto das arestas encontramos $t = 12 \cdot l$. Logo, o tamanho da linha final é $t = 15 + 12l$. Para $l = 12$ cm, temos $t = 159$ cm $\Rightarrow t = 1,59$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

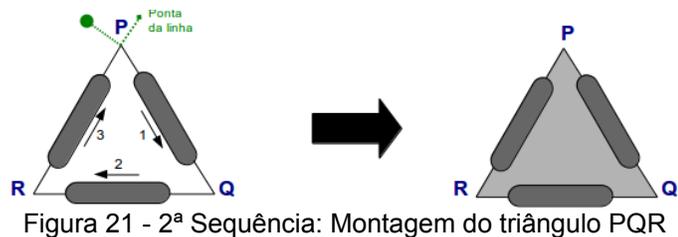


Figura 21 - 2ª Sequência: Montagem do triângulo PQR

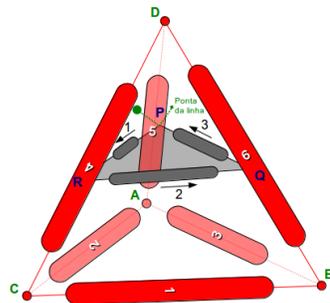


Figura 22 - 3ª Sequência: Montagem do corte no plano

Para finalizar, por meio de um laço, unimos o triângulo PQR ao tetraedro $ABCD$. Vejamos uma foto do sólido construído com material concreto.

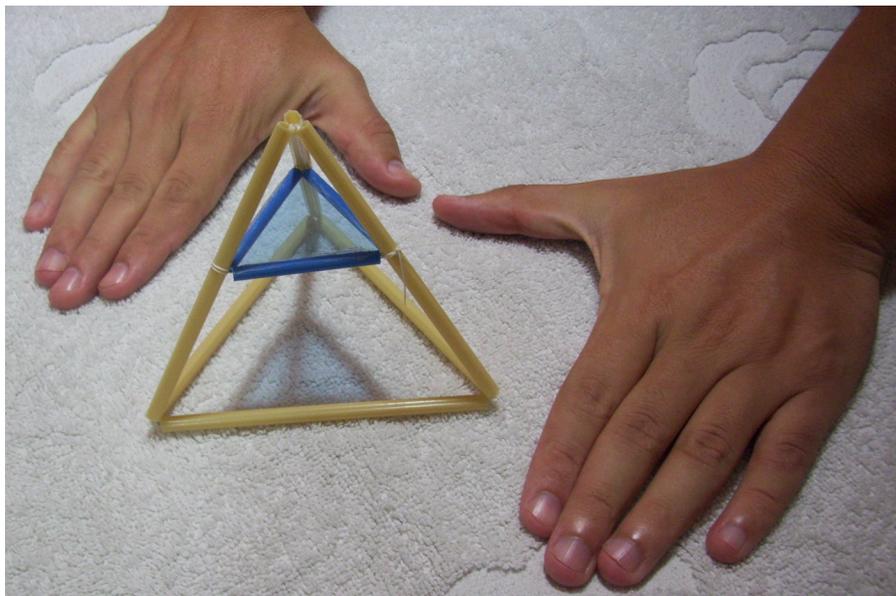


Figura 23 - Construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular e um corte no plano

2.6. Explorando as novas tecnologias na construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro regular e seu dual

2.6.1. Girar, Eixo e Tamanho

Apresentamos um applet desenvolvido no software GeoGebra para observarmos a construção passo a passo apresentada nos itens anteriores do modelo

esqueleto das arestas e particularidades do tetraedro regular. O applet em questão pode ser encontrado no link <http://tube.geogebra.org/material/show/id/bcqhKWfB>.

Além de acompanhar passo a passo a construção, é possível alterar o tamanho do tetraedro, girá-lo em torno dos 3 eixos, exibir somente o dual do tetraedro, detalhar individualmente cada um dos seus elementos e aprofundar os estudos desse poliedro.

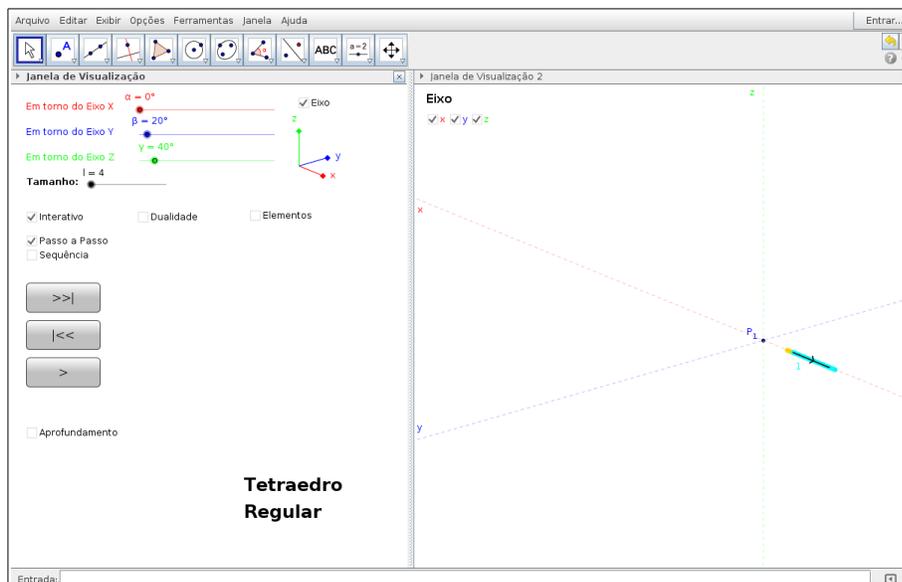


Figura 24

Na figura 24, temos 4 opções de interação: Interativo, Dualidade, Elementos e Aprofundamento.

É possível exibir/ocultar e girar em torno dos três eixos em todas as opções de interação. Já alterar o tamanho do tetraedro na tela é possível somente nas duas primeiras opções.

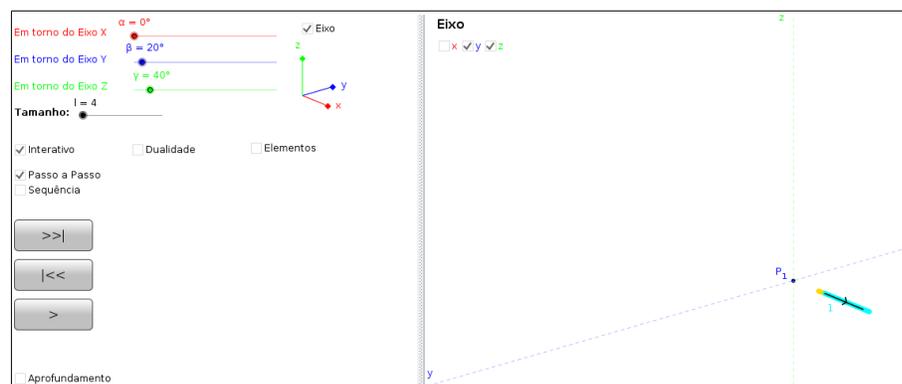


Figura 25

Conforme exibido na figura 25, podemos mostrar somente os eixos y e z, selecionando a caixa de seleção Eixo e desmarcando a caixa de seleção x. Para não exibir nenhum eixos, desmarque a caixa de seleção Eixo.



Figura 26

Na Figura 26 b), giramos em torno do eixo y e mantemos fixos os eixos x e z. Assim, durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas do tetraedro, a possibilidade de girá-lo em torno dos eixos permite uma melhor visualização do poliedro.

2.6.2. Interativo

Nessa situação temos 2 opções: Passo a Passo e Sequência.

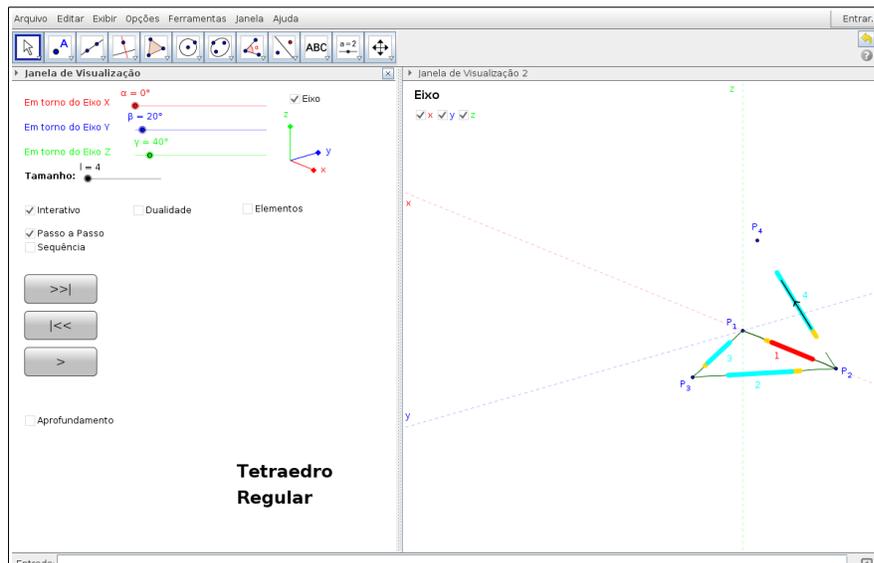


Figura 27

2.6.2.1. Interativo - Passo a Passo

Na opção Passo a Passo, conforme exibido na figura 28, temos 3 botões:

- (Próximo): Avança com a linha passo a passo.
- (Anterior): Retrocede com a linha passo a passo.
- (Início): Vai ao Início da linha (representado pelas Figuras 24 e 25).

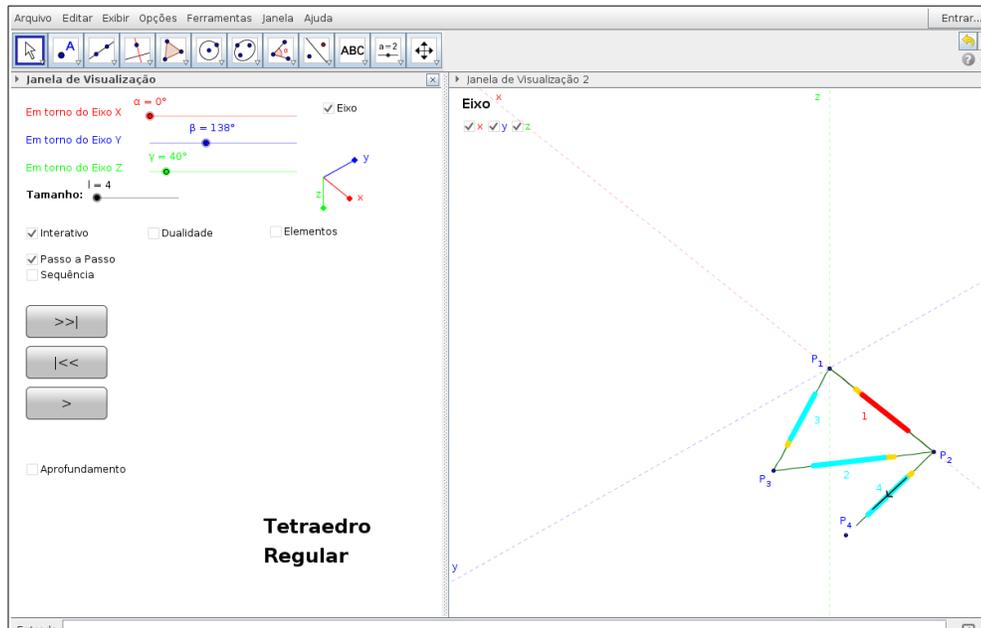


Figura 28

Conforme exibido na figura 27, a posição do tetraedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 26 a). Na figura 28 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 26 b).

2.6.2.2. Interativo - Sequência

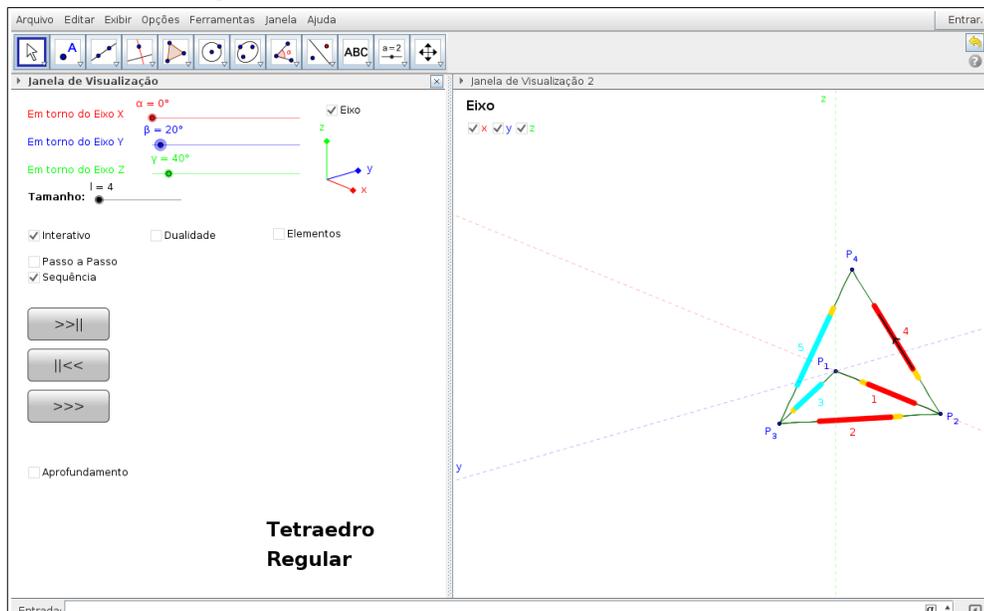


Figura 29

Conforme exibido na figura 29, a opção sequência do processo interativo permite realizar diversos passos de uma única vez. Nessa situação temos 3 botões:

-  (Próximo): Avança com a linha na próxima sequência.
-  (Anterior): Retrocede com a linha sequência anterior.
-  (Completo): Exibe todo processo de construção de uma só vez.

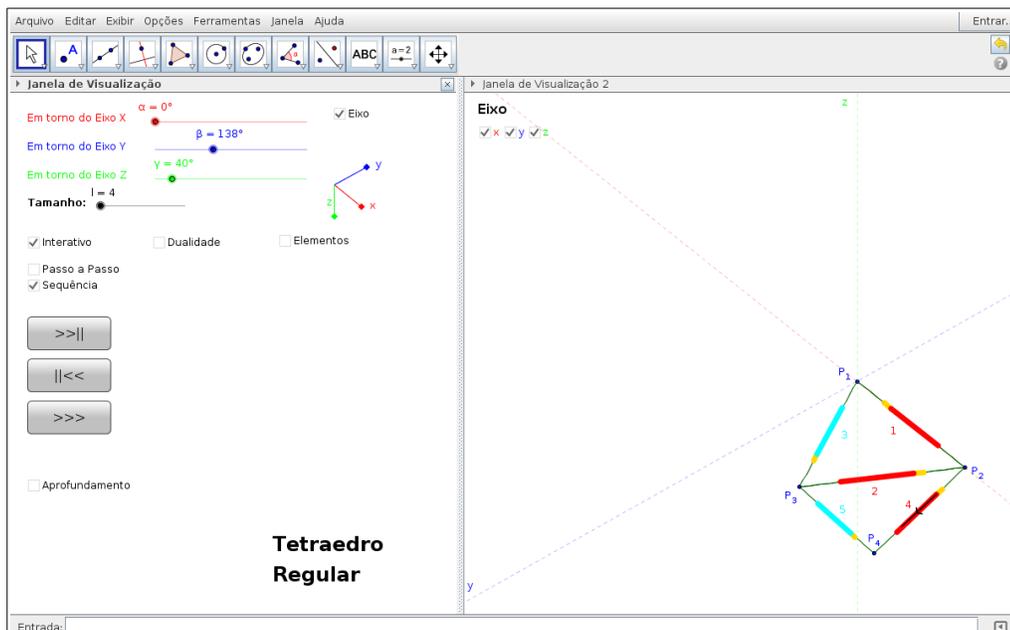


Figura 30

A figura 29 representa a posição do tetraedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 26 a). Já a figura 30 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 26 b).

2.6.3. Dualidade

Conforme exibido na figura 31, na opção Dualidade, temos 2 possibilidades: Dual e tetraedro.

Note que o tetraedro regular é autodual. Nessa figura, o dual está representado de azul. Em alguns poliedros de Platão, mesmo utilizando o software de geometria dinâmica, não é tão simples visualizar o seu dual.

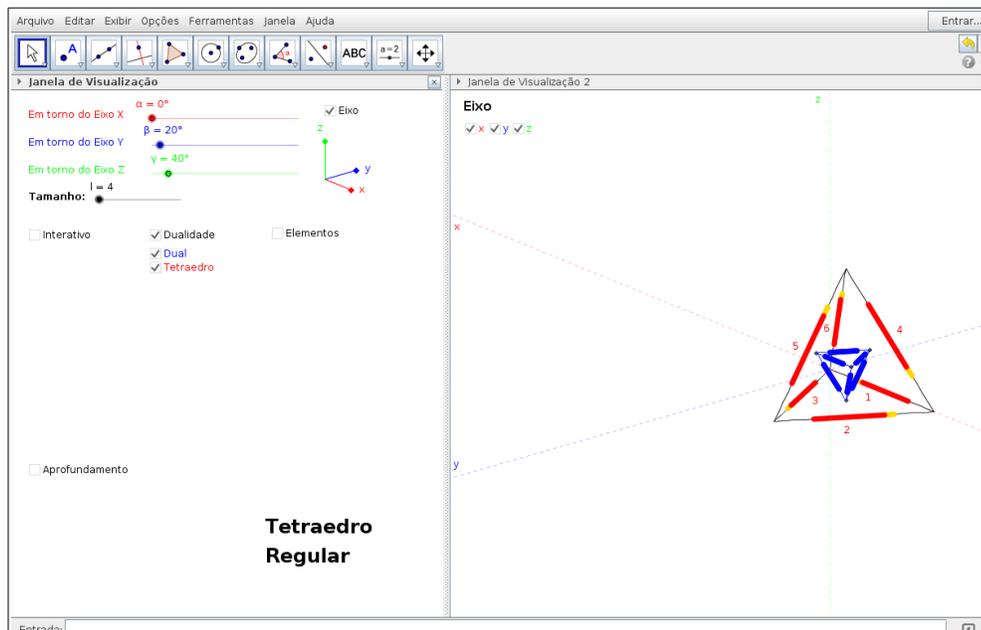


Figura 31

Dessa forma, selecione apenas a opção Dual, conforme exibido na figura 32, para exibir o dual do tetraedro. Para exibir somente o tetraedro, selecione apenas a opção tetraedro (figura 33).

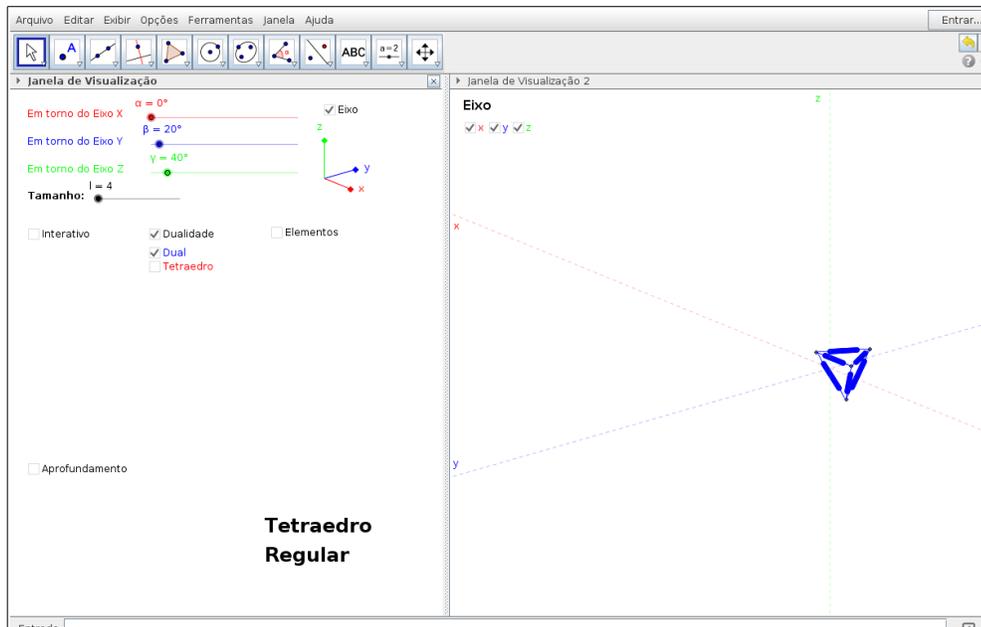


Figura 32

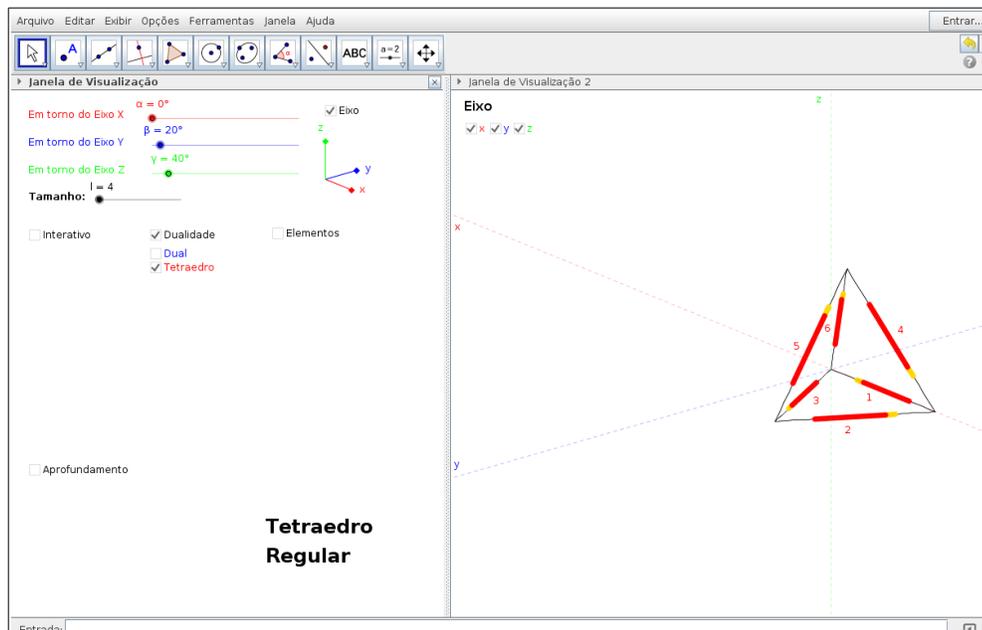


Figura 33

2.6.4. Elementos

Nessa situação temos 3 opções: Vértices, Arestas e Faces.

Conforme exibido na figura 34, todos os elementos podem ser exibidos individualmente através da caixa de seleção. Note que o tetraedro tem 4 faces, 4 vértices e 6 arestas, conforme detalhes apresentados do lado direito da figura.

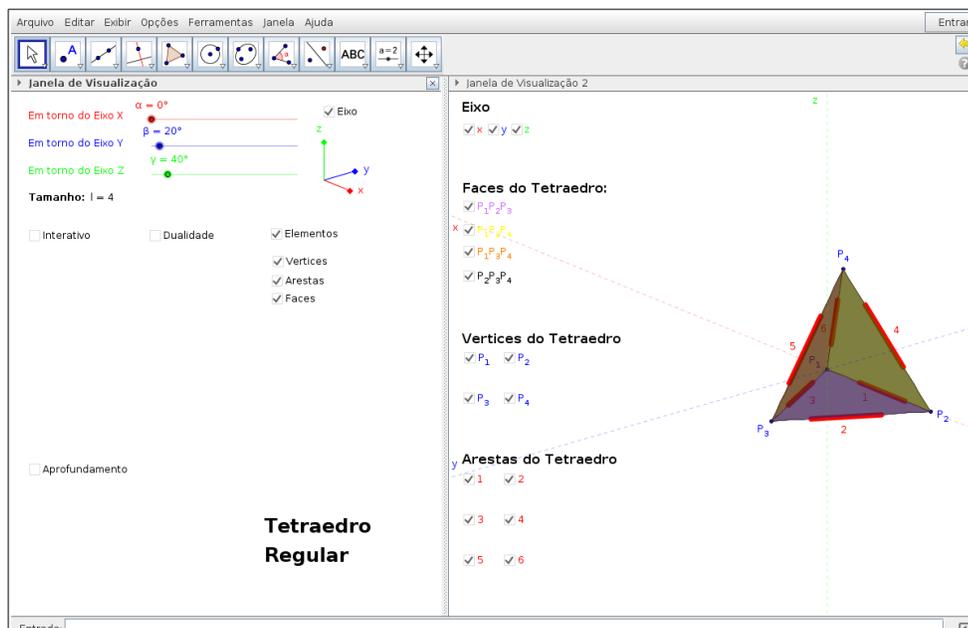


Figura 34

Assim, se desejarmos exibir algumas opções de um elemento específico, basta selecionar apenas um elemento do lado esquerdo e as opções do lado direito. Outra situação é visualizada na figura 35, em que exibimos alguns canudos e apenas 3 faces.

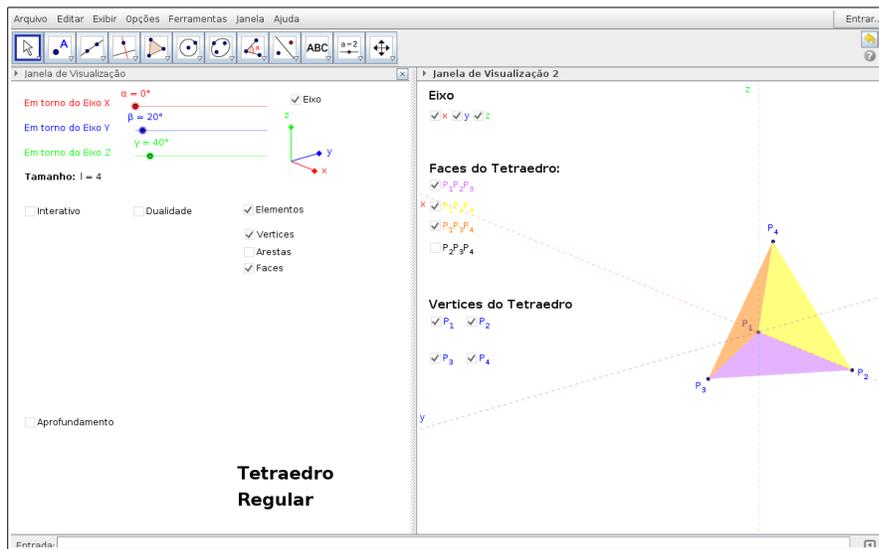


Figura 35

É válido observar que os vértices do tetraedro são definidos a partir do centro dos eixos coordenados.

2.6.5. Aprofundamento

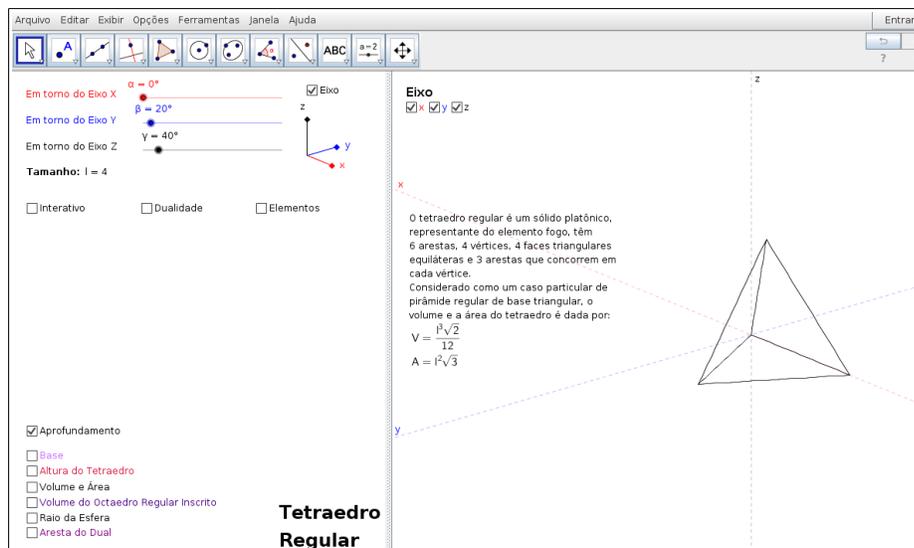


Figura 36

Conforme exibido na figura 36, na opção Aprofundamento, temos 5

possibilidades: Base, Altura do tetraedro, Volume e Área, Volume do Octaedro Regular Inscrito, Raio da Esfera e Aresta do Dual.

2.6.5.1. Aprofundamento - Base

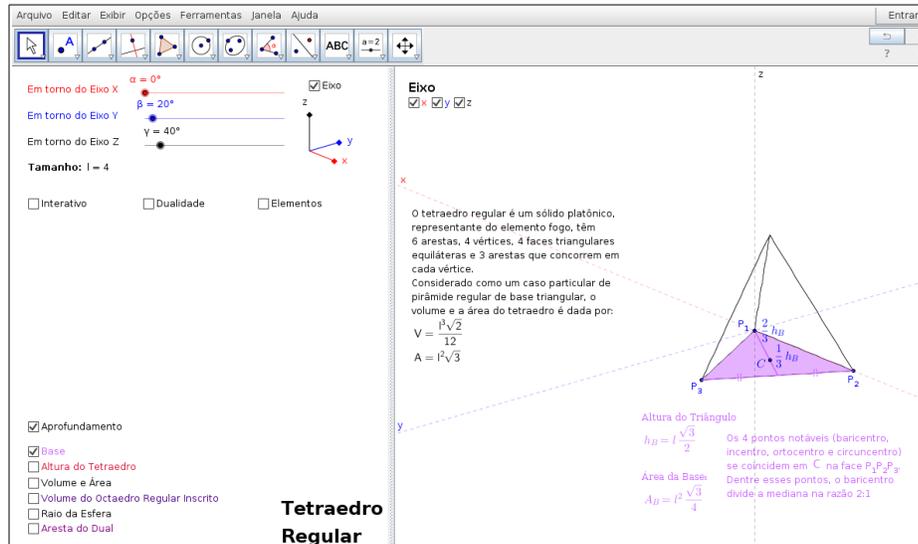


Figura 37

Visto que as faces do tetraedro regular são formadas por triângulos equiláteros, é fácil encontrar a altura e a área da base e, como existe a coincidência dos 4 pontos notáveis (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro), temos o baricentro está sobre a altura da base e divide a mesma na razão 2:1 (Figura 37).

2.6.5.2. Aprofundamento - Altura do tetraedro

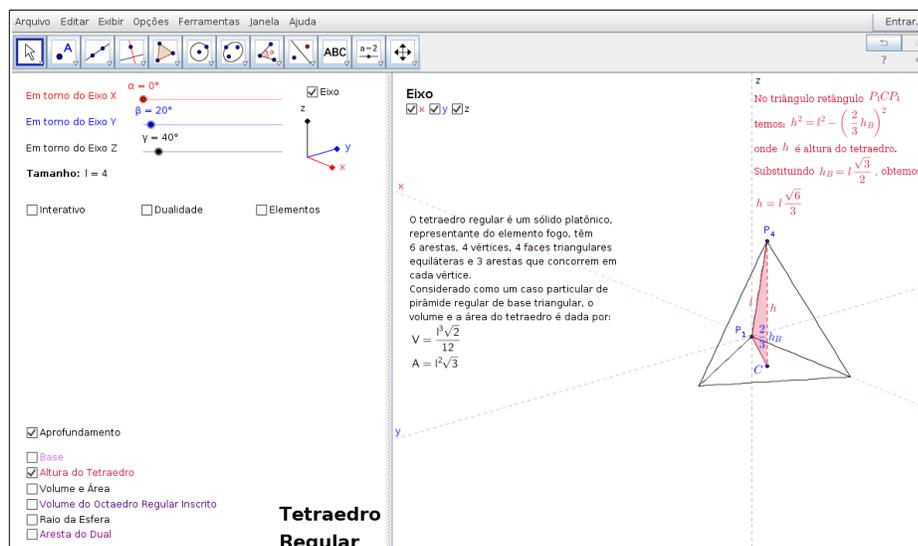


Figura 38

Conforme exibido na figura 38, a altura do tetraedro é obtida¹⁶ por meio do triângulo retângulo formado pela sua aresta e $\frac{2}{3}$ de sua altura.

2.6.5.3. Aprofundamento - Volume e Área

Sejam A_B é a área da base e h é a altura do tetraedro regular. Como o tetraedro é um caso particular de uma pirâmide de base triangular, o seu volume¹⁷ é dado por $V = \frac{1}{3}A_B h$. Para o cálculo de sua área¹⁸, as quatro faces são triângulos equiláteros e isso $A = 4A_B$ (Figura 39).

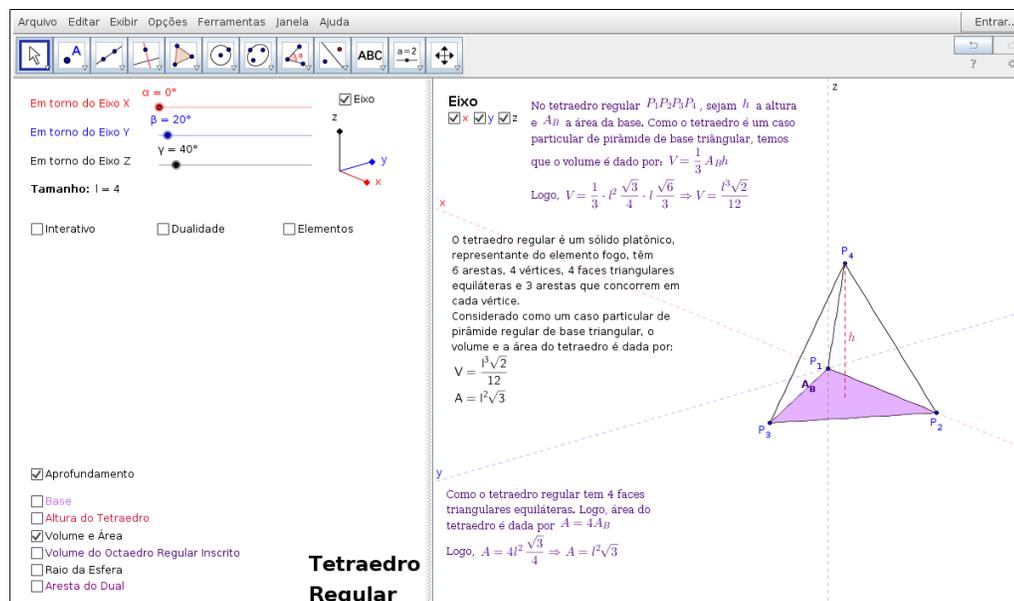


Figura 39

Na opção Volume e Área da seção Aprofundamento, é possível selecionar as opções Base e Altura do Tetraedro (Figura 40).

16 Conforme apresentado na seção 2.1.2.
 17 Conforme apresentado na seção 2.1.4.
 18 Conforme apresentado na seção 2.1.3.

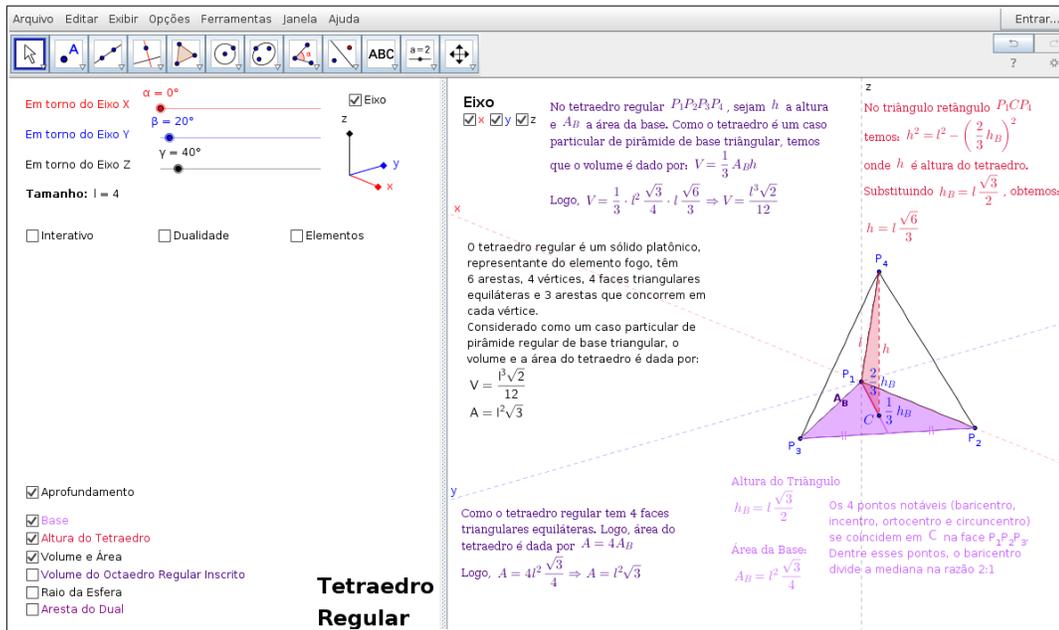


Figura 40

2.6.5.4. Aprofundamento - Volume do Octaedro Regular Inscrito

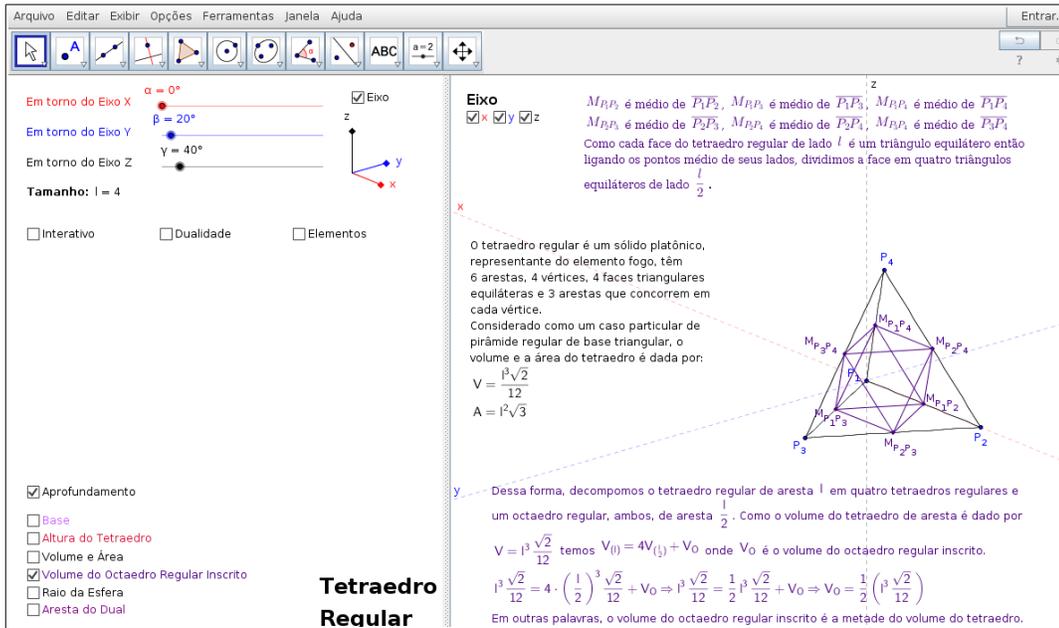


Figura 41

Conforme exibido na figura 41, cada face do tetraedro regular de lado l é um triângulo equilátero. Ligando os pontos médio de seus lados, dividimos a face em quatro triângulos equiláteros de lado $\frac{l}{2}$.

Assim, podemos decompor o tetraedro regular de aresta l em quatro tetraedros regulares e um octaedro regular, ambos, de arestas $\frac{l}{2}$. Finalmente, concluímos¹⁹ que o volume do octaedro regular inscrito é a metade do volume do tetraedro de aresta l .

2.6.5.5. Aprofundamento - Raio da Esfera

Conforme exibido na figura 42, na opção Raio da Esfera²⁰ do item Aprofundamento, temos 3 possibilidades: Centro da Esfera, Raio da Esfera Inscrita e Raio da Esfera Circunscrita.

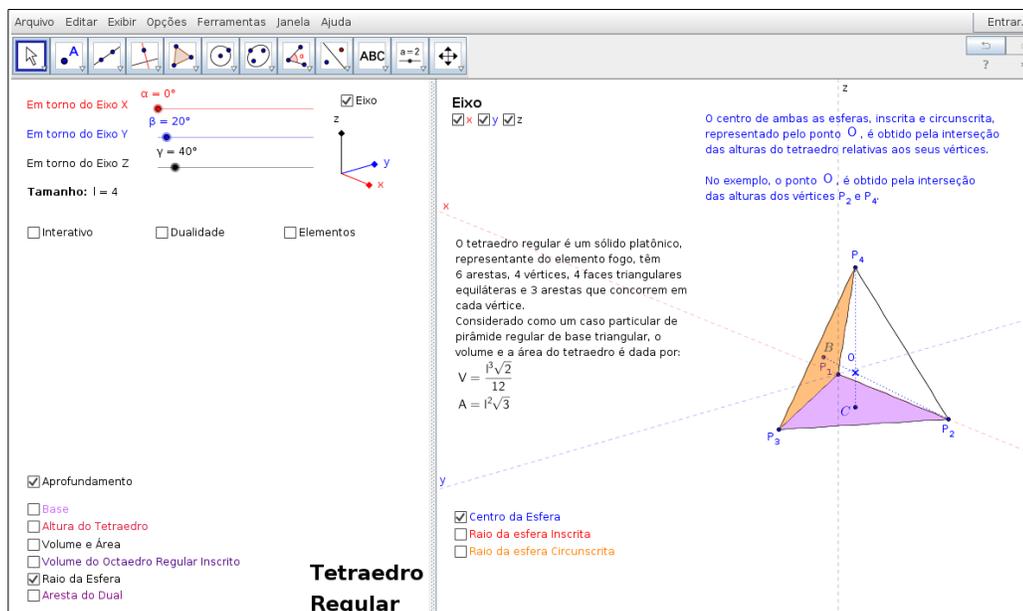


Figura 42

2.6.5.4.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro

Na figura 42, podemos observar que o centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O , é obtido pela interseção das alturas do tetraedro relativas aos seus vértices.

2.6.5.4.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita

Conforme exibido na figura 43, o raio da esfera inscrita é a distância entre o centro da esfera e uma face desse sólido.

19 Conforme apresentado na seção 2.1.5.

20 Conforme apresentado na seção 2.1.6.

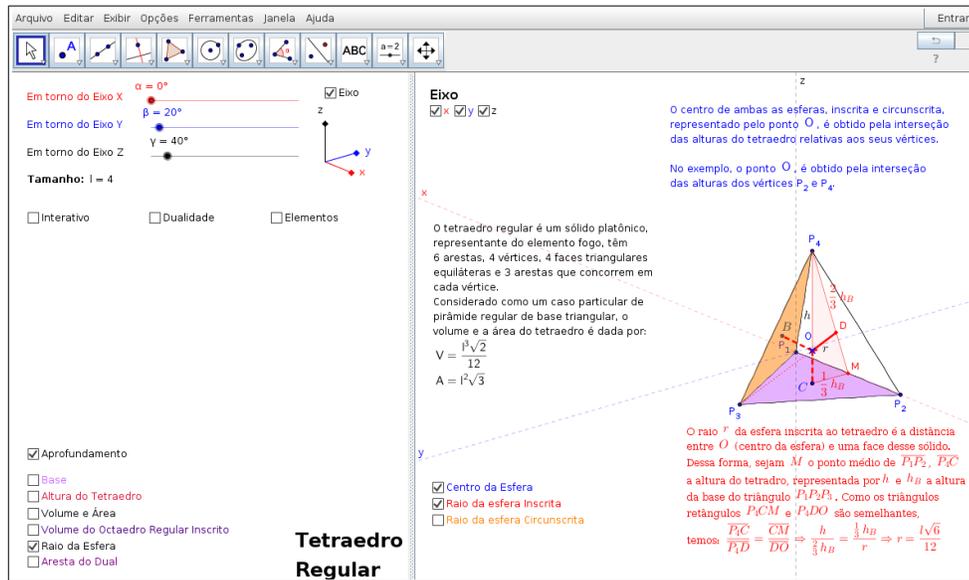


Figura 43

2.6.5.4.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita

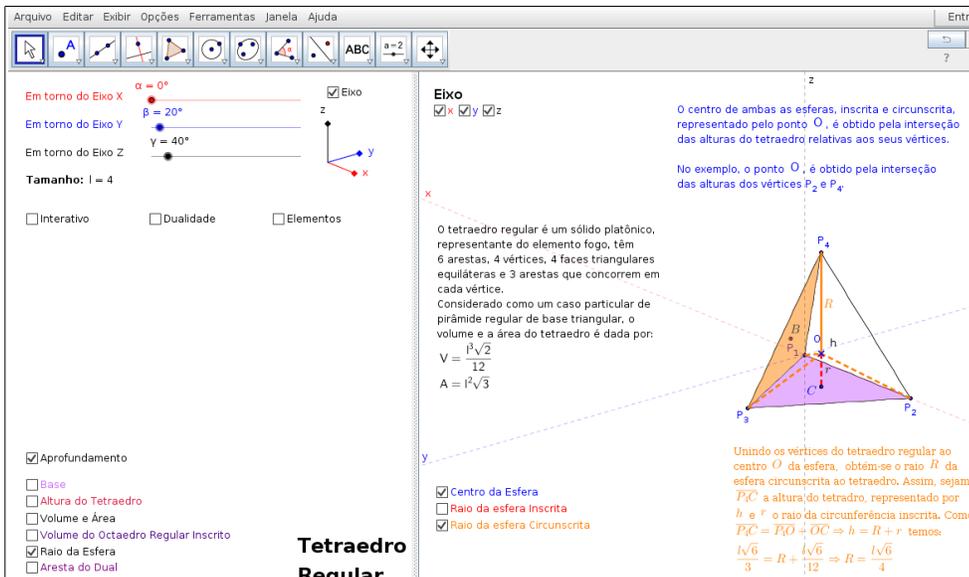


Figura 44

Conforme exibido na figura 44, a distância entre o centro da esfera e o vértice do sólido é o raio da esfera circunscrita.

2.6.5.5. Aprofundamento - Aresta do Dual

Após encontrar o centro de cada uma das faces e traçar os segmentos ligando os baricentros de faces adjacentes do sólido vamos obter um novo tetraedro e concluir que o tetraedro regular é autodual.

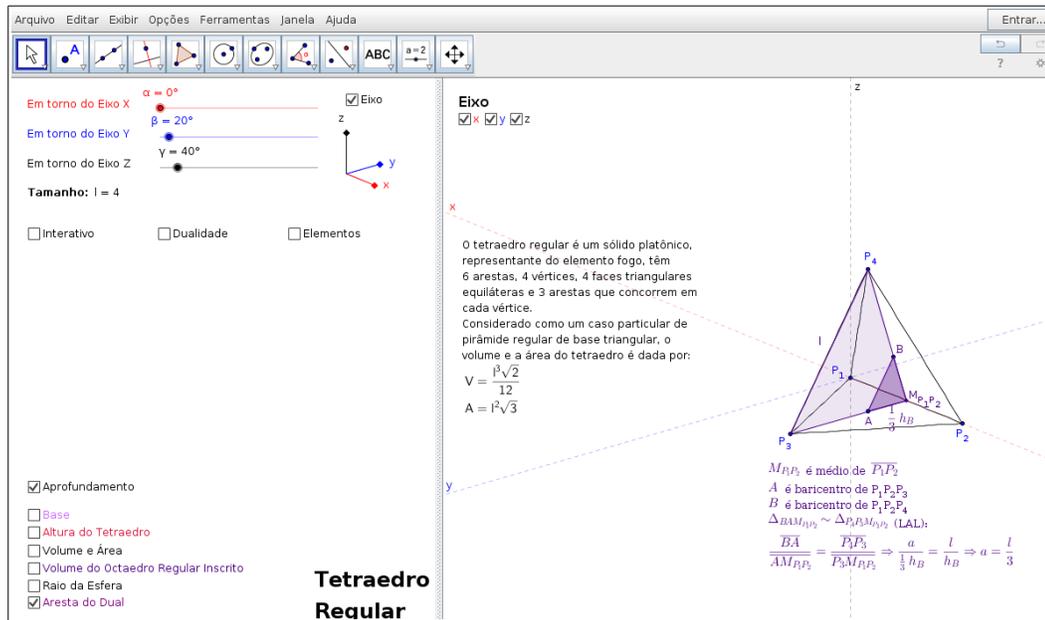


Figura 45

Para calcular o tamanho da aresta de seu dual, conforme exibido na figura 45, consideramos²¹ duas faces adjacentes do tetraedro, o ponto médio da aresta comum as faces e as alturas relativas a esta aresta comum. Como os baricentros dessas faces estão sobre a altura, obteremos dois triângulos semelhantes, e por meio de semelhança, chegaremos a conclusão que a aresta do dual será $\frac{1}{3}$ da aresta do tetraedro.

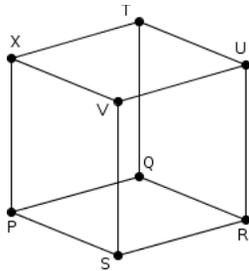
21 Conforme apresentado na seção 2.1.7.

Capítulo 3 - Hexaedro Regular

3.1. Revisão Teórica

3.1.1. Introdução

O hexaedro regular, também denominado de cubo, é um sólido platônico representante do elemento terra. Segundo Platão, a terra, o elemento mais imóvel, ele associa ao cubo, o único poliedro com faces quadradas, e deste fato, o mais apto a garantir estabilidade e facilidade com que pode ser empilhado formando estruturas maiores.



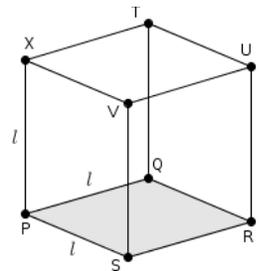
Esse sólido é formado por 8 vértices (P, Q, R, S, T, U, V e X), 12 arestas ($\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}, \overline{SP}, \overline{TU}, \overline{UV}, \overline{VX}, \overline{XT}, \overline{PX}, \overline{QT}, \overline{RU}$ e \overline{SV}), 6 faces quadradas ($PQRS, TUVX, PQTX, QRUT, RSVU$ e $SPXV$) e 3 aresta que concorrem em cada vértice.

Como todas as arestas de medidas iguais a l , o cubo é um caso particular de paralelepípedo retângulo. Sejam A_B área da base, A_L área lateral e h altura do cubo, o volume²² e a área do cubo são dados por

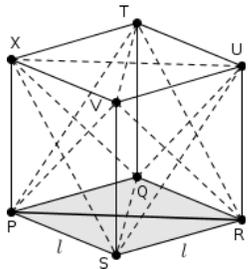
$$V = A_B \cdot h \Rightarrow V = l^2 \cdot l \Rightarrow V = l^3$$

$$A = 2A_B + 4A_L \Rightarrow A = 2l^2 + 4l^2 \Rightarrow A = 6l^2$$

Nas próximas seções desse capítulo, vamos apresentar propriedades (diagonal, raios das esferas inscrita e circunscrita) e construções (tetraedro regular inscrito, aresta do dual) desse sólido.



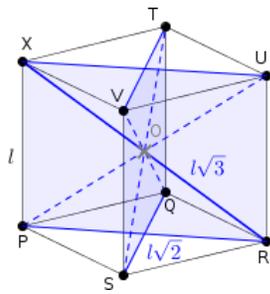
3.1.2. Cálculo das diagonais do hexaedro



Um quadrado tem duas diagonais²³ e um hexaedro regular é formado por seis faces quadradas ($PQRS, TUVX, PQTX, QRUT, RSVU$ e $SPXV$), em cada face do hexaedro teremos duas diagonais. Assim, \overline{PR} e \overline{QS} são as diagonais da face $PQRS$, e portanto, $\overline{PR} = \overline{QS} = l\sqrt{2}$.

22 Na seção 2 do anexo 2 mostramos um forma diferente para calcular o volume do hexaedro regular.

23 Conforme anexo, o número de diagonais de um polígono de n lados é dada por $d = \frac{n(n-3)}{2}$



Seccionando o hexaedro por um plano que contém os pontos P , R e U ou Q , S e V obtém-se, respectivamente, os retângulos $PRUX$ ou $QSVT$ de dimensões $l\sqrt{2}$ e l .

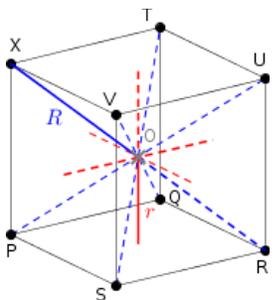
Como um retângulo tem duas diagonais, as diagonais do cubo são \overline{RX} , \overline{UP} , \overline{ST} e \overline{QV} .

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo

RPX , temos:

$$\overline{XP}^2 + \overline{PR}^2 = \overline{RX}^2 \Rightarrow l^2 + (l\sqrt{2})^2 = \overline{RX}^2 \Rightarrow \overline{RX} = l\sqrt{3}.$$

3.1.3. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita no hexaedro regular



O centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O , é obtido a partir da interseção dos segmentos traçados de cada vértice do hexaedro regular ao seu vértice oposto ou pela interseção das retas perpendicularmente traçadas a partir do centro de cada uma das faces.

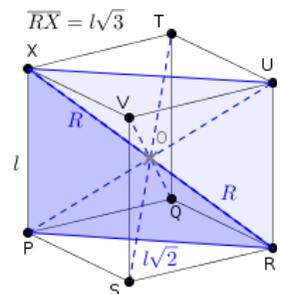
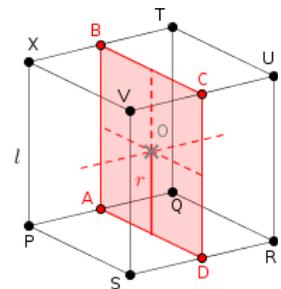
Seccionando o hexaedro por um plano que contém os pontos médios das arestas \overline{PQ} , \overline{RS} , \overline{UV} e \overline{XT} , obtemos o quadrado $ABCD$ de lado l .

Logo, a distância entre o centro desse quadrado e o ponto médio de um de seus lados é o raio da esfera inscrita no

hexaedro e vale $r = \frac{l}{2}$.

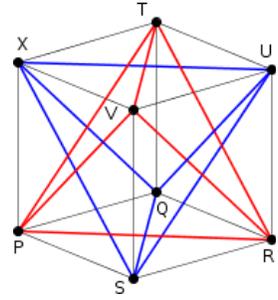
Como raio da esfera circunscrita, representado por R , é da distância entre o centro da esfera e o vértice do sólido, seccionando o hexaedro por um plano que contém os pontos P , R e O , obtém-se o retângulo $PRUX$, de dimensões $l\sqrt{2}$ e l , inscrito num círculo de raio R . Então $\overline{RX} = l\sqrt{3}$ e $\overline{OR} = \overline{OX} = R$.

$$\text{Logo, } R = l \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

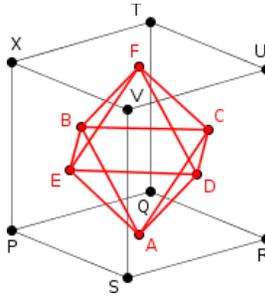


3.1.4. Hexaedro com tetraedro regular inscrito

Para inscrever um tetraedro regular no hexaedro, basta traçar as diagonais de sua face. Dessa forma, no hexaedro regular $PQRSTUVX$ de aresta l , as medidas das arestas dos tetraedros $PTRV$ e $SUXQ$ valem $l\sqrt{2}$.



3.1.5. Cálculo da aresta do dual do hexaedro



Sejam os pontos A, B, C, D, E e F , os centros de faces $PQRS, PQTX, QRUT, RSVU, SPXV$ e $TUVX$, respectivamente.

Construímos os segmentos entre os centros de faces adjacentes do sólido e teremos assim, o chamado dual do hexaedro com as seguintes arestas: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BC}, \overline{CD},$

$\overline{DE}, \overline{EB}, \overline{EF}, \overline{BF}, \overline{CF}$ e \overline{DF} .

Note que o dual do hexaedro regular é o octaedro regular.

Para a medida da aresta do dual, consideramos as faces $PQRS, QRUT$ e determinamos o segmento AC .

Sejam M o ponto médio de \overline{QR} , A o centro da face $PQRS$ e C o centro da face $QRUT$. Então

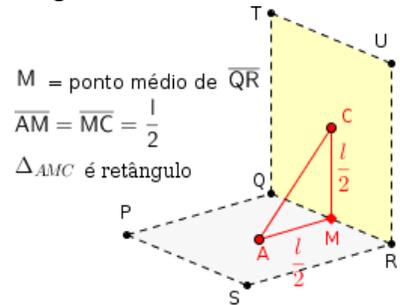
$$\overline{AM} = \overline{MC} = \frac{l}{2}.$$

Como as faces são perpendiculares entre si e \overline{QR} é comum, o triângulo AMC é retângulo em M .

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

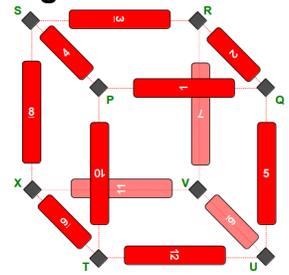
$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\overline{AC}^2 = 2\left(\frac{l^2}{4}\right) \Rightarrow \overline{AC} = l\frac{\sqrt{2}}{2}$$



3.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular

Para realizar a construção do modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular, utilizando um canudo de 12 cm, vamos precisar de 12 pedaços de canudo de mesma cor²⁴, um pedaço de linha maior do que 2,88 m de comprimento²⁵ e o tempo livre de 2 aulas (1 hora e 40 minutos).



Agora vejamos a construção passo a passo das arestas desse sólido:

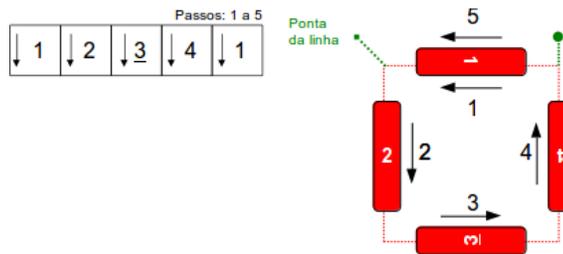


Figura 46 - 1ª Sequência

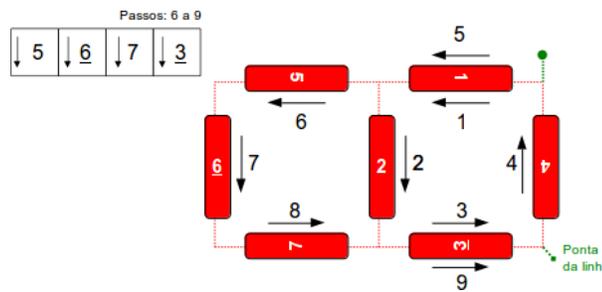


Figura 47 - 2ª Sequência

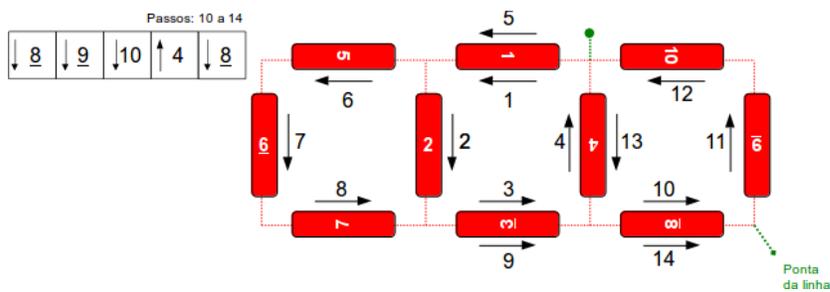


Figura 48 - 3ª Sequência

24 Na representação do hexaedro, não visualizamos os canudos representados na parte traseira, por isso a cor do canudo será transparente.

25 Seja t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de quantidade 12. Então, $t = 24 \cdot c_1$. Para $c_1 = 12$ cm, temos: $t = 24 \cdot 12 \Rightarrow t = 288$ cm $\Rightarrow t = 2,88$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

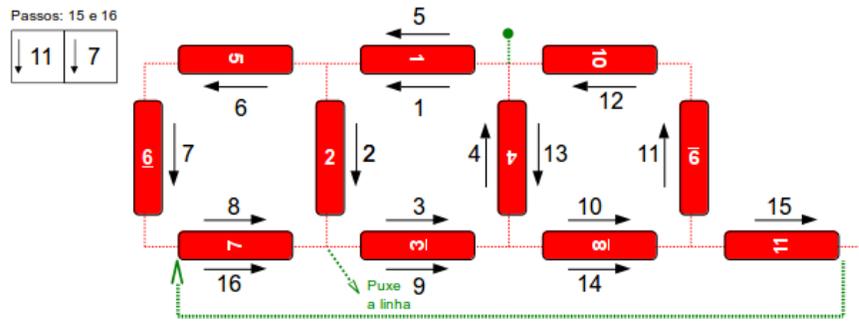


Figura 49 - 4ª Sequência

Antes de prosseguir a construção, vamos puxar a linha da 4ª sequência, conforme indicado no passo 16 da figura 49.

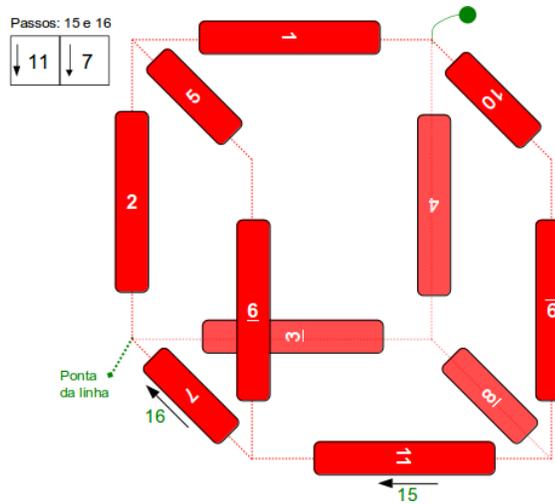


Figura 50 - 4ª Sequência(Continuação)

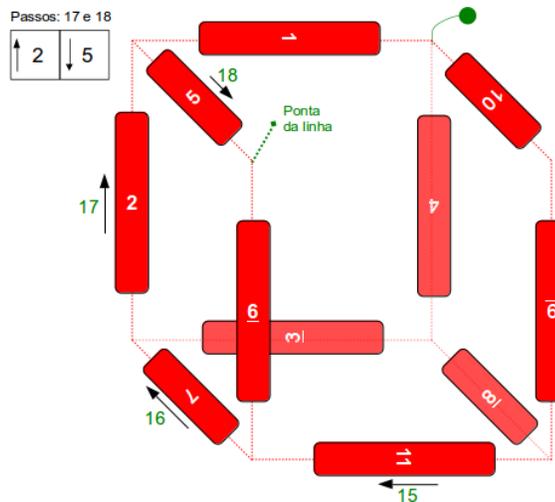


Figura 51 - 5ª Sequência

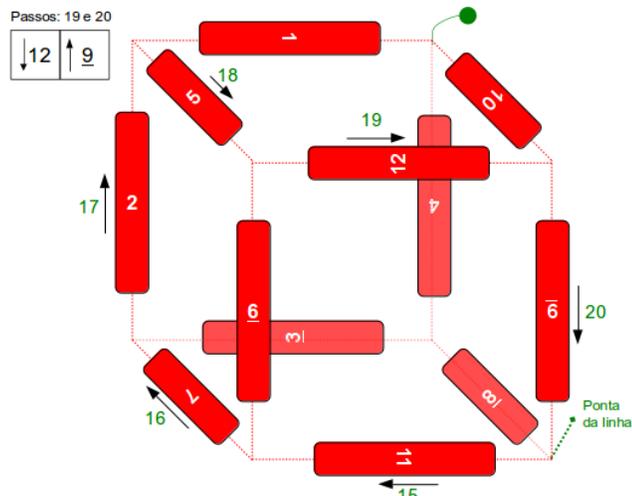


Figura 52 - 6ª Sequência

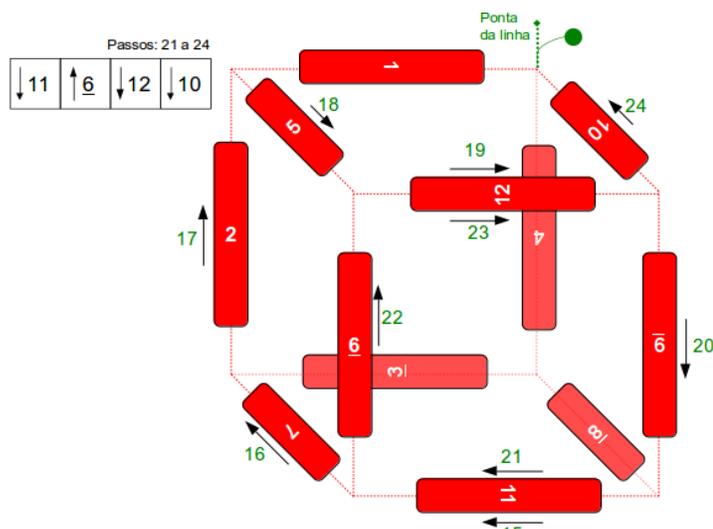


Figura 53 - 7ª Sequência

Para finalizar, faremos um único nó com as linhas ligando as arestas 10 e 1 da última sequência.

Agora vejamos todo o procedimento sem interrupção, a visualização de dois modos diferentes e uma foto do sólido construído com material concreto:



Figura 54 - Procedimento completo

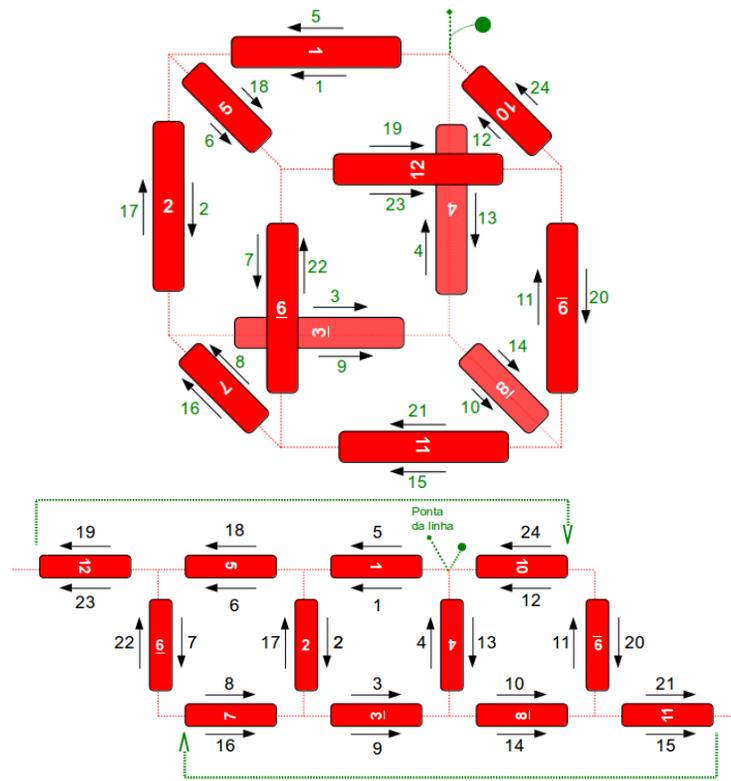


Figura 55 - 1º Modo

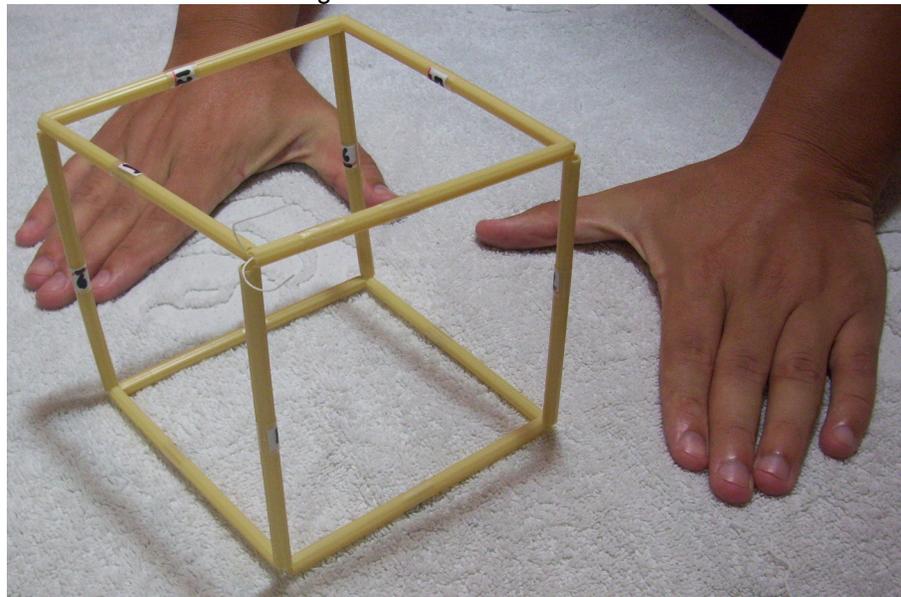


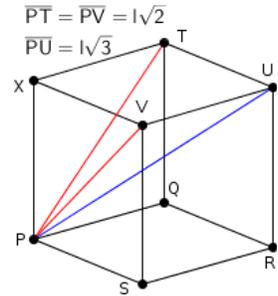
Figura 56 - 2º Modo

Figura 57 - Construção do modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular

3.3. Construindo o modelo esqueleto da diagonal principal e algumas diagonais das faces no hexaedro regular

Pela construção anterior, notamos que a estrutura de canudos não é rígida e que pode ser achatada contra a superfície da mesa. Para que a estrutura se torne uma de um cubo, é necessário colocar algumas diagonais de suas faces, ou uma de suas diagonais interiores, ligando dois vértices opostos de duas de suas faces paralelas.

Para construir o modelo esqueleto da diagonal principal e algumas diagonais da face do hexaedro regular são necessários²⁶ 12 canudos (\overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} , \overline{SP} , \overline{TU} , \overline{UV} , \overline{VX} , \overline{XT} , \overline{PX} , \overline{QT} , \overline{RU} e \overline{SV}) de 12 cm, 2 canudos (\overline{PT} e \overline{PV}) de $12\sqrt{2}$ cm, 1 canudo (\overline{PU}) de $12\sqrt{3}$ cm, um pedaço de linha maior do que 5,51 m de comprimento²⁷ e o tempo livre de 2 aulas (1 hora e 40 minutos).



Conforme indicado no item 3.2, realizar a montagem do hexaedro regular $PQRSTUVX$ (1º Passo).

Antes de prosseguir, vamos planificar o hexaedro regular²⁸ e visualizar que alguns canudos (1, 3, 4, 9, 10, 11 e 12) ocupam duas posições (figura 58).

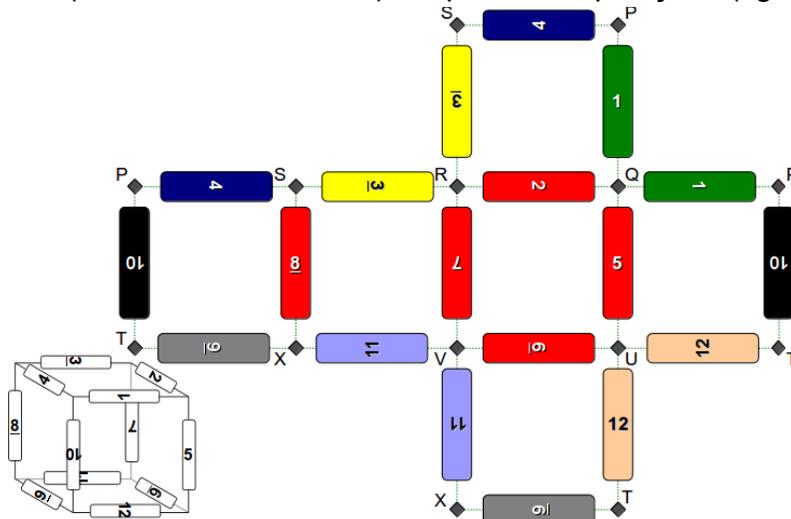


Figura 58 - 2º Passo: Planificação do Cubo

26 Para $l = 12$ temos: $\overline{PT} = \overline{PV} = l\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ e $\overline{PU} = l\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ conforme item 3.1.2

27 Seja t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de lado l , c_2 o tamanho do canudo de lado $l\sqrt{2}$, c_3 o tamanho do canudo de quantidade $l\sqrt{3}$. Então $t = 10 \cdot c_1 + 6 \cdot c_2 + 2 \cdot c_3 \Rightarrow t = (10 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3})l$. Ao construir o modelo esqueleto das arestas encontramos $t = 24 \cdot l$. Logo, o tamanho da linha final é $t = (34 + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{3})l$. Para $l = 12$ cm temos $t = 551$ cm $\Rightarrow t = 5,51$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

28 Na seção 2 do anexo 3 temos a planificação do Hexaedro utilizando régua e compasso.

O próximo passo é montar as duas diagonais da face:

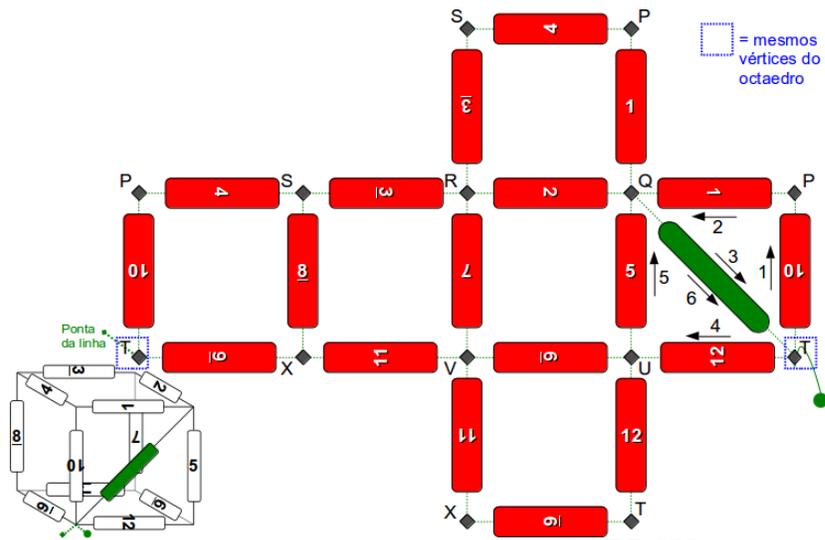


Figura 59 - 3º Passo: Diagonal da face $TPQU$

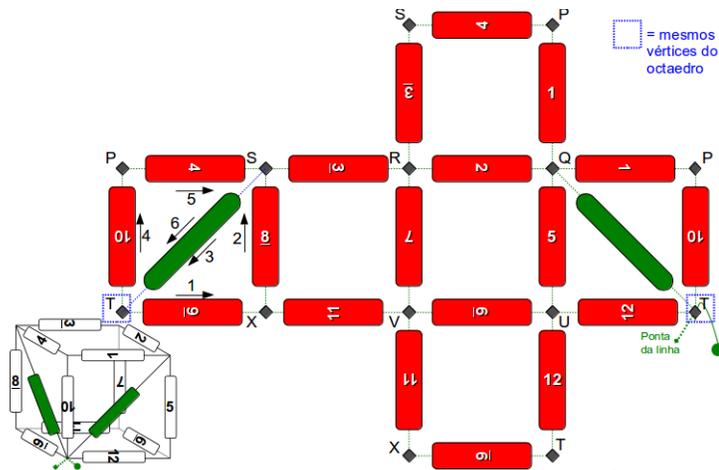


Figura 60 - 4º Passo: Diagonal da face $TXSP$

No próximo passo, montamos uma diagonal principal do hexaedro:

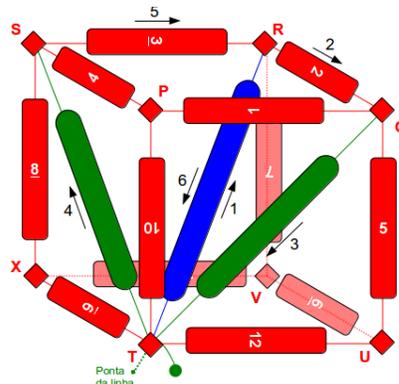


Figura 61 - 5º Passo: Diagonal principal \overline{TR}

Para finalizar, faremos um único nó com o início e a ponta da linha. Agora vejamos uma foto do sólido construído com material concreto

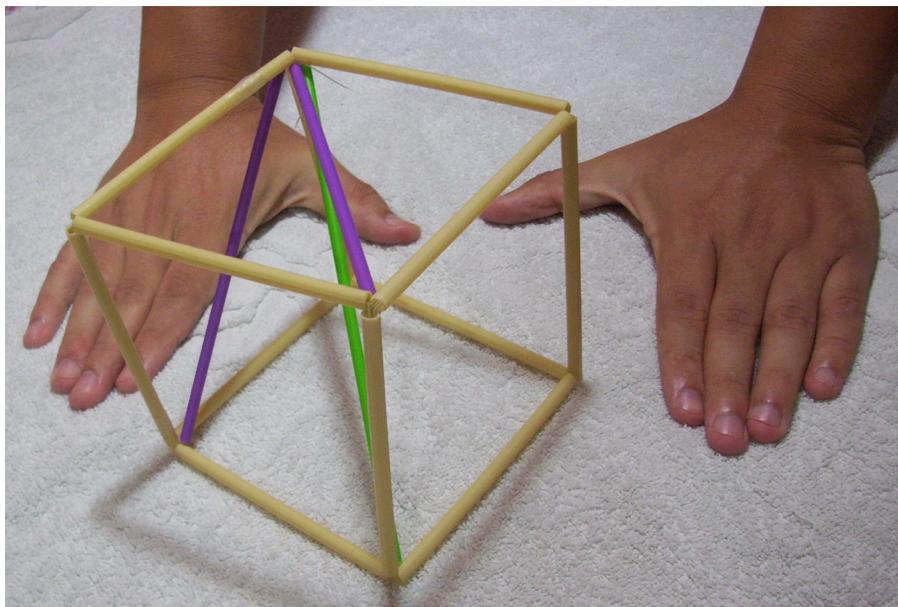
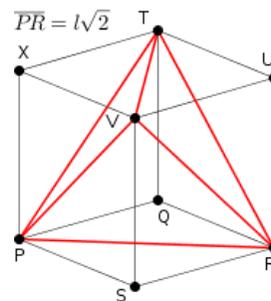


Figura 62 - Construção do modelo esqueleto da diagonal principal e algumas diagonais da face do hexaedro regular

3.4. Construindo o modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular com um tetraedro regular inscrito

Note que em cada vértice de uma diagonal da face, encontram-se dois vértices de outras duas diagonais. Com isso, elas formam a estrutura de um tetraedro inscrito no cubo.

Para construir o modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular com um tetraedro regular inscrito são necessários²⁹ 12 canudos (\overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} , \overline{SP} , \overline{TU} , \overline{UV} , \overline{VX} , \overline{XT} , \overline{PX} , \overline{QT} , \overline{RU} e \overline{SV}) de 12 cm, 6 canudos (\overline{PR} , \overline{RT} , \overline{TP} , \overline{PV} , \overline{RV} e \overline{TV}) de $12\sqrt{2}$ cm, um pedaço de linha maior do que 6,06 m de comprimento³⁰ e o tempo livre de 3 aulas (2 horas e 30 minutos).



29 Para $l = 8$ temos: $\overline{PR} = l\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ conforme item 3.1.4

30 Seja t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de lado l e c_2 o tamanho do canudo de lado $l\sqrt{2}$. Então $t = 18 \cdot c_1 + 6 \cdot c_2 \Rightarrow t = 18 \cdot l + 6 \cdot l\sqrt{2} \Rightarrow t = (18 + 6\sqrt{2})l$. Ao construir o modelo esqueleto das arestas encontramos $t = 24 \cdot l$. Logo, o tamanho da linha final é $t = (42 + 6\sqrt{2})l$. Para $l = 12$ cm, temos $t = 606$ cm $\Rightarrow t = 6,06$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

O 1º passo da construção é realizar a montagem do hexaedro regular $PQRSTUVX$ como indicado no item 3.2.

Antes de prosseguir, vamos planificar o hexaedro regular³¹ e visualizar que alguns canudos (1, 3, 4, 9, 10, 11 e 12) ocupam duas posições (figura 63).

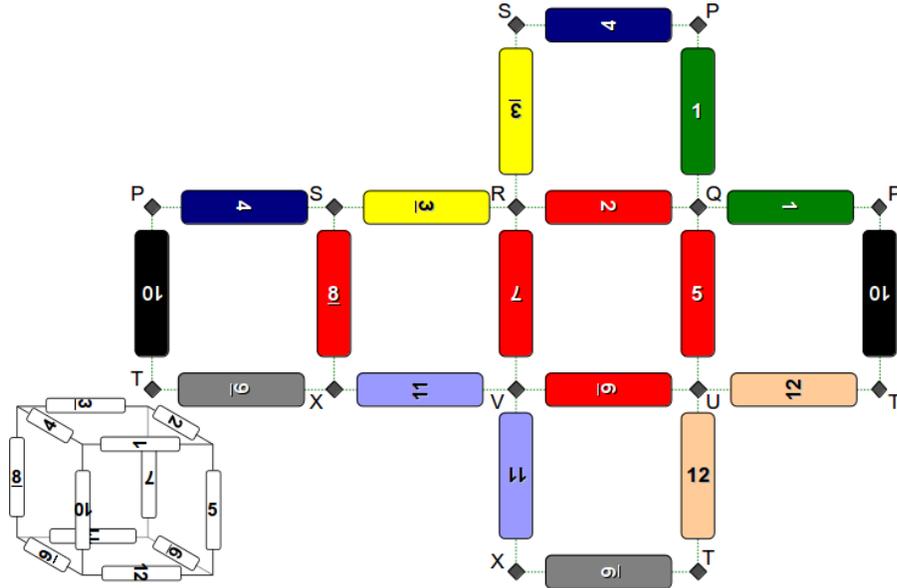


Figura 63 - 2º Passo: Planificação do Cubo

Para encontrar o vértice do tetraedro regular inscrito, devemos traçar a diagonal de cada face.

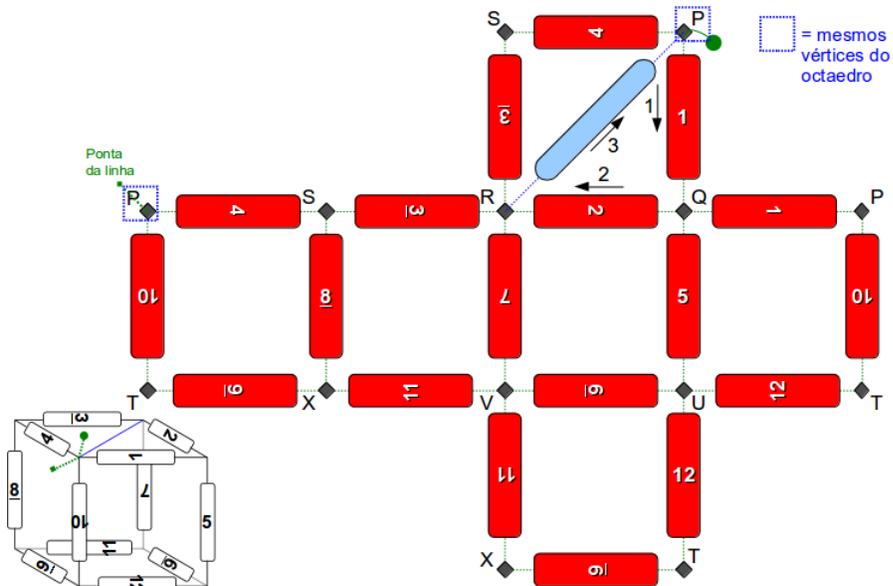


Figura 64 - 3º Passo: Diagonal \overline{PR} da face $PQRS$

31 No anexo temos a planificação do hexaedro utilizando régua e compasso.

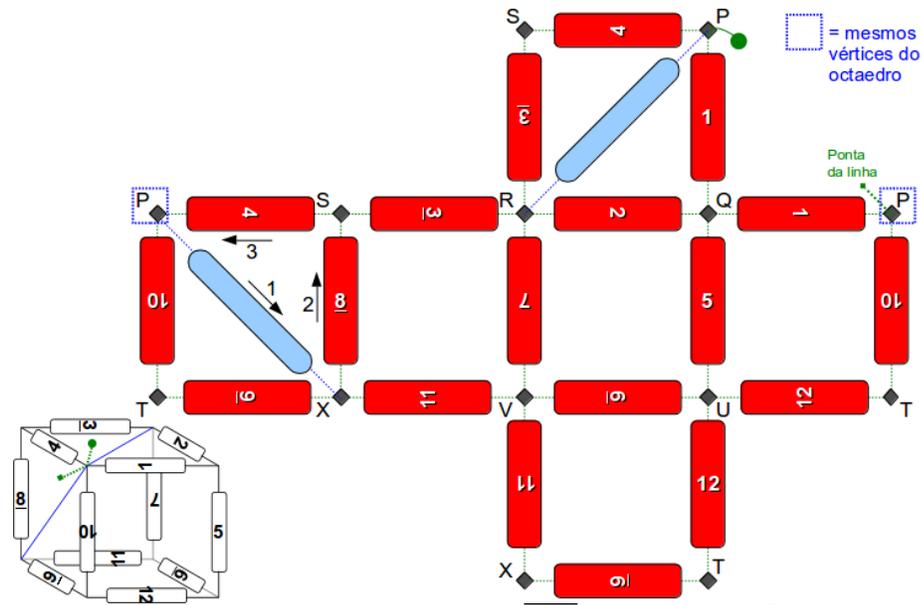


Figura 65 - 4º Passo: Diagonal \overline{PX} da face $PTXS$

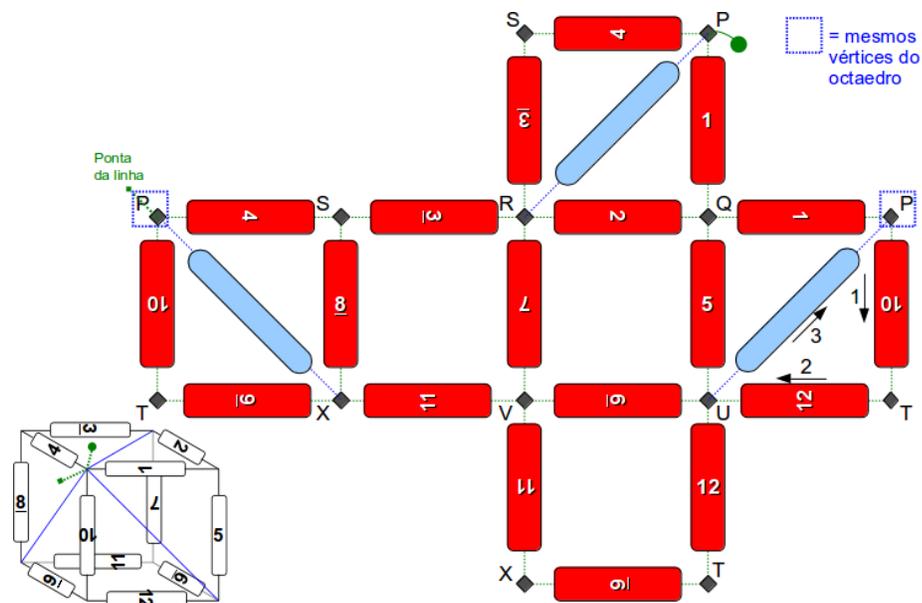


Figura 66 - 5º Passo: Diagonal \overline{PU} da face $PTUQ$

Para determinar as diagonais nas faces $VUQR$, $VXTU$ e $VRSX$, conforme indicado nas figuras 67 e 68, levemos a ponta da linha até o vértice V passando pelos canudos 10, 9 e 11:

A seguir, determinamos uma diagonal das faces $VUQR$, $VXTU$ e $VRSX$:

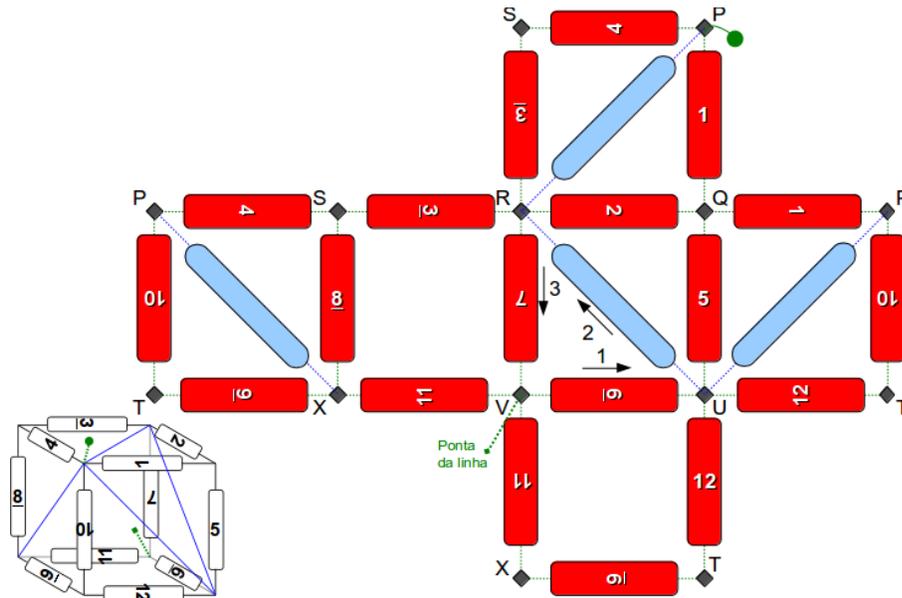


Figura 69 - 6º Passo: Diagonal \overline{UR} da face $VUQR$

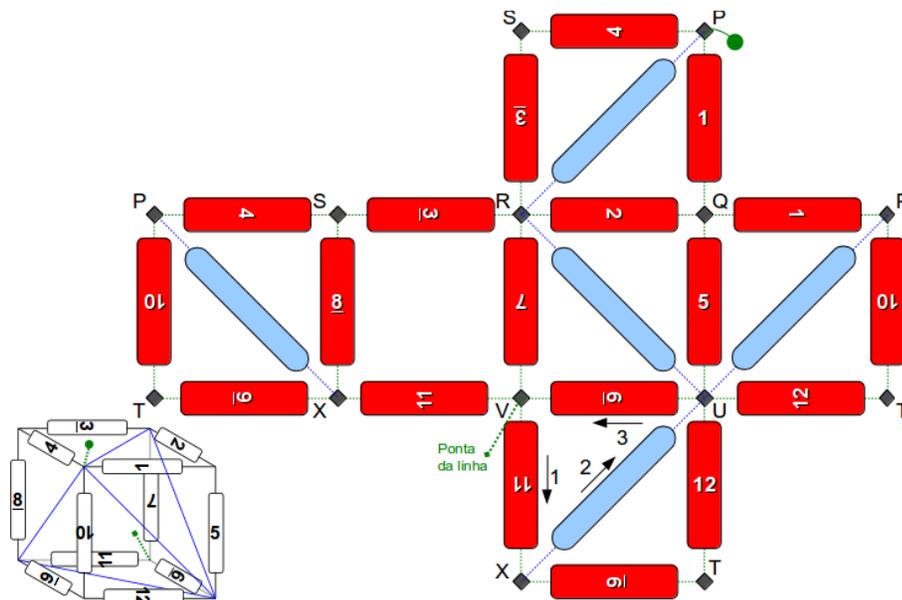


Figura 70 - 7º Passo: Diagonal \overline{XU} da face $VXTU$

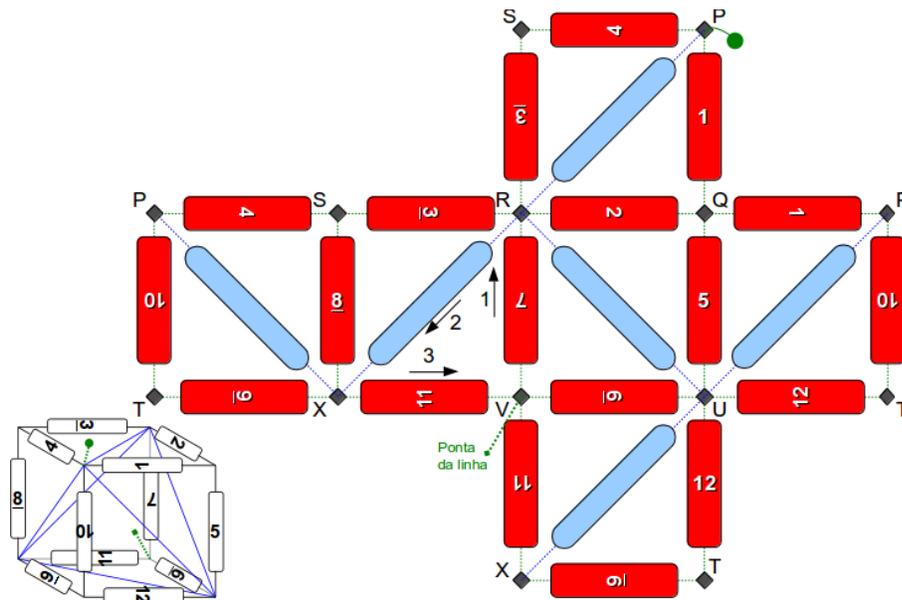


Figura 71 - 8º Passo: Diagonal \overline{RX} da face $VRSX$

Conforme indicado nas figuras 72 e 73, levemos a ponta da linha até o início passando pelos canudos 7, 3 e 4:

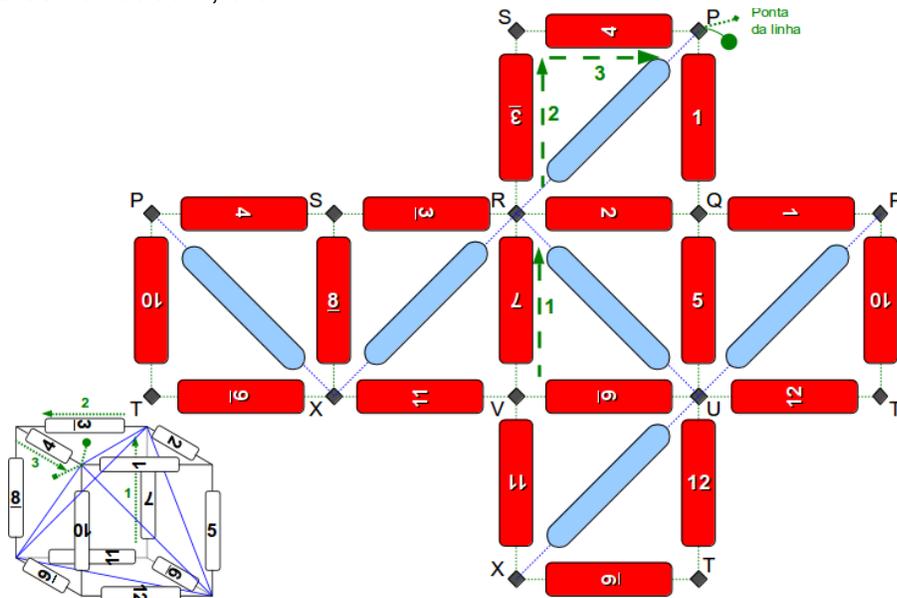


Figura 72 - Visualização do cubo planificado

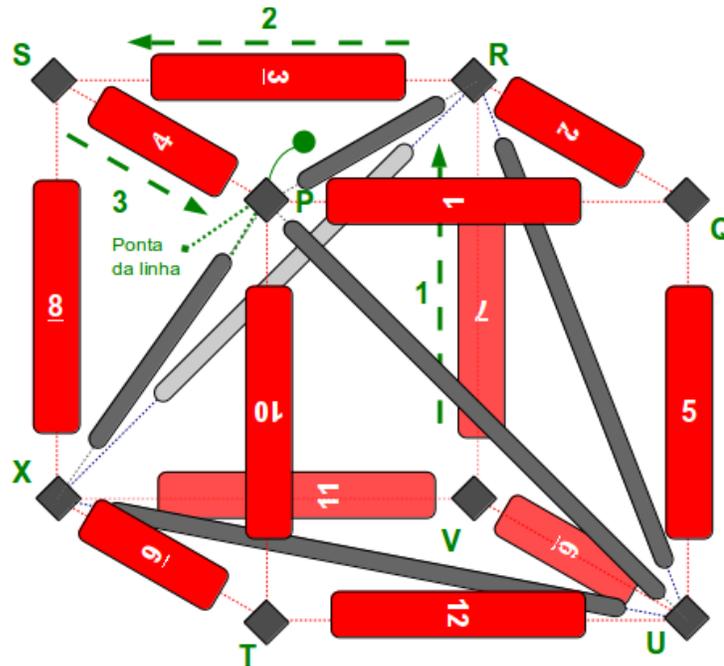


Figura 73 - Visualização do cubo não planificado

Para finalizar, faremos um único nó com o início e a ponta da linha.
 Agora vejamos uma foto do sólido construído com material concreto.

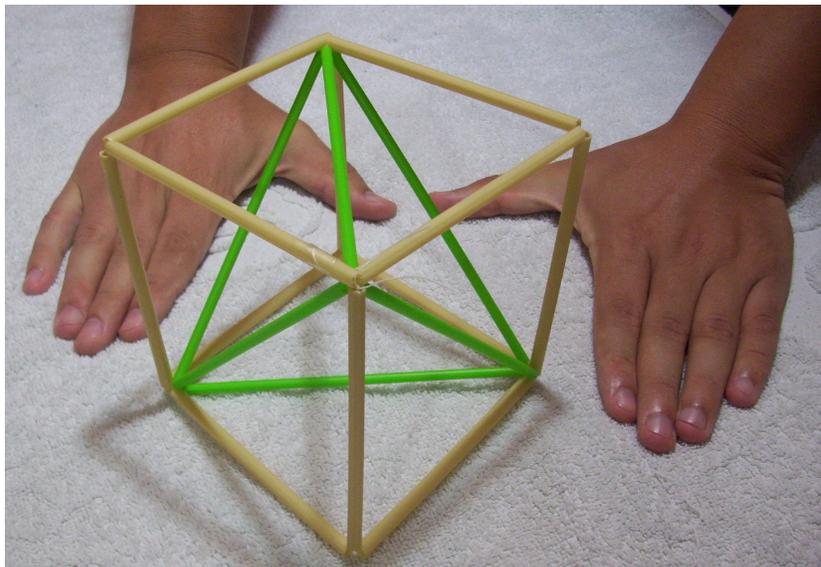
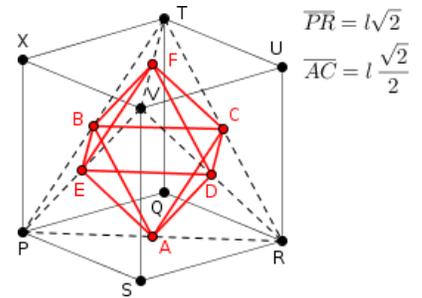


Figura 74 - Construção do modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular com um tetraedro regular inscrito

3.5. Construindo o modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular com um tetraedro regular inscrito e o dual do hexaedro

Para construir o modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular com um tetraedro regular inscrito e o dual do hexaedro são necessários³² 12 canudos (\overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} , \overline{SP} , \overline{TU} , \overline{UV} , \overline{VX} , \overline{XT} , \overline{PX} , \overline{QT} , \overline{RU} e \overline{SV}) de 12 cm, 6 canudos (\overline{PR} , \overline{RT} , \overline{TP} , \overline{PV} , \overline{RV} e \overline{TV}) de $12\sqrt{2}$ cm, 12 canudos (\overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EB} , \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{AE} , \overline{FB} , \overline{FC} , \overline{FD} e \overline{FE}) de $6\sqrt{2}$ cm, um pedaço de linha maior do que 9,11 m de comprimento³³ e o tempo livre de 4 aulas (3 horas e 20 minutos).



O 1º passo da construção é realizar a montagem do hexaedro regular $PQRSTUVX$ com um tetraedro regular inscrito conforme indicado no item 3.4.

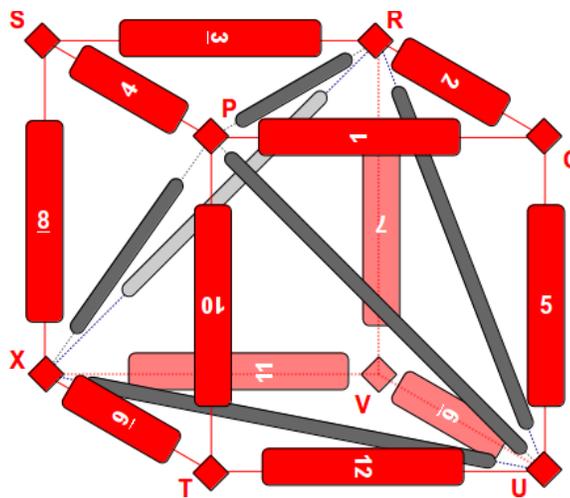


Figura 75

Antes de prosseguir, conforme indicado na figura 76, vamos planificar o hexaedro regular e visualizar a diagonal de cada face quadrada (aresta do tetraedro regular inscrito).

32 Para $l = 12$ temos: $\overline{PR} = l\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ e $\overline{AC} = l\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ conforme itens 3.1.2 e 3.1.5

33 Sejam t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de lado l , c_2 o tamanho do canudo de lado $l\sqrt{2}$ e c_3 o tamanho do canudo de lado $l\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pela construção do item anterior temos: $t = (42 + 6\sqrt{2})l$. Conforme item 4.2, ao construir o modelo esqueleto das arestas do octaedro regular de aresta $l\frac{\sqrt{2}}{2}$ encontramos $t = 36 \cdot l\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = 18\sqrt{2}l$. Logo, o tamanho da linha final é $t = (42 + 24\sqrt{2})l$. Para $l = 12$ cm, temos $t = 911$ cm $\Rightarrow t = 9,11$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

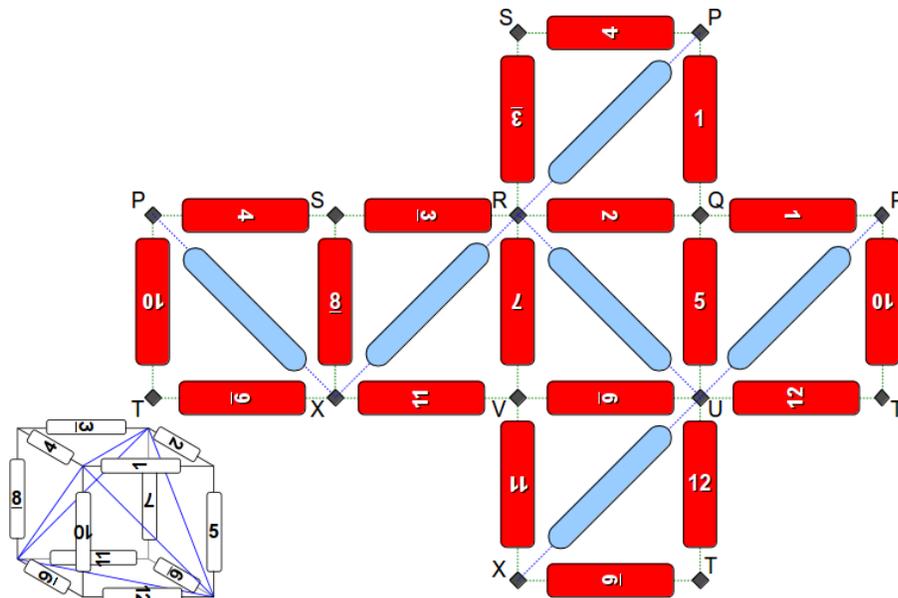


Figura 76 - Planificação do hexaedro regular com um tetraedro regular inscrito

Dessa forma, para encontrar o vértice do dual do hexaedro, devemos fixar o ponto médio da diagonal de cada face quadrada.

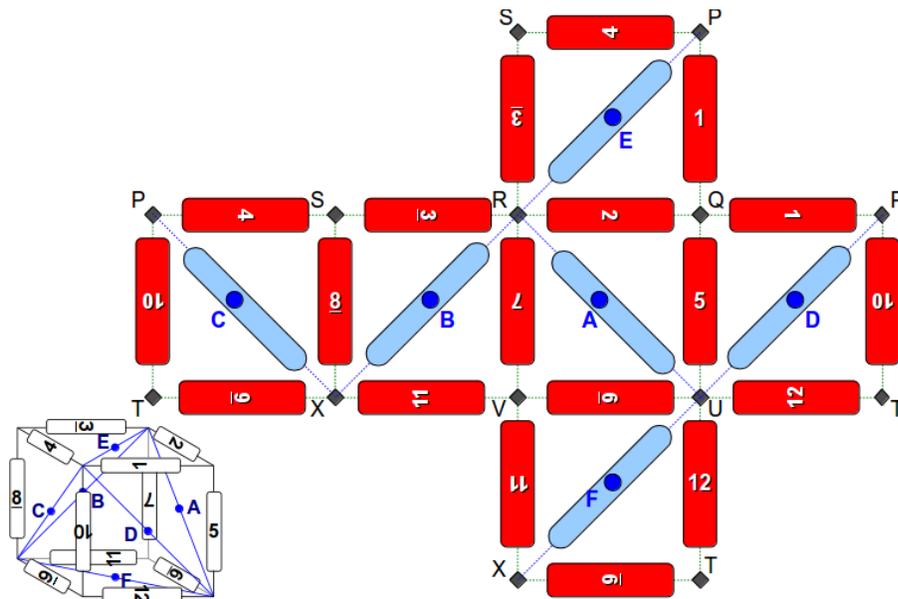


Figura 77 - 2º Passo: Vértices do dual do hexaedro

É válido observar que o número de faces do hexaedro regular é o mesmo que o número de vértices do seu dual.

Agora vejamos uma outra visualização do cubo com tetraedro regular inscrito não planificado.

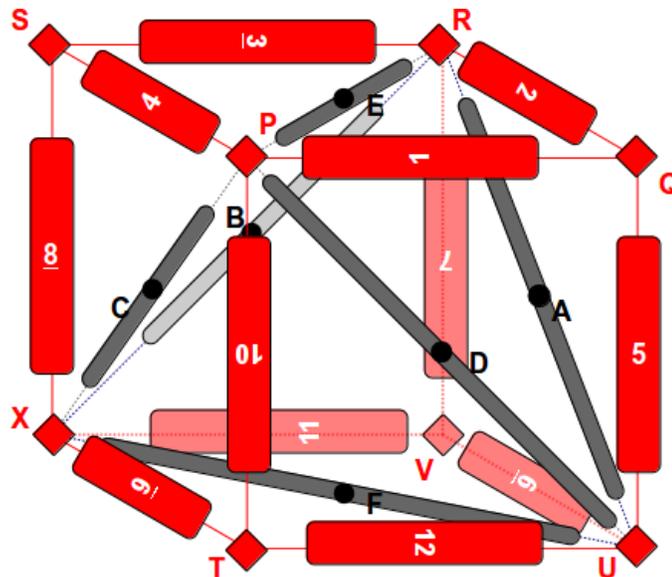


Figura 78

Assim, podemos concluir que o dual do hexaedro regular é o octaedro regular.

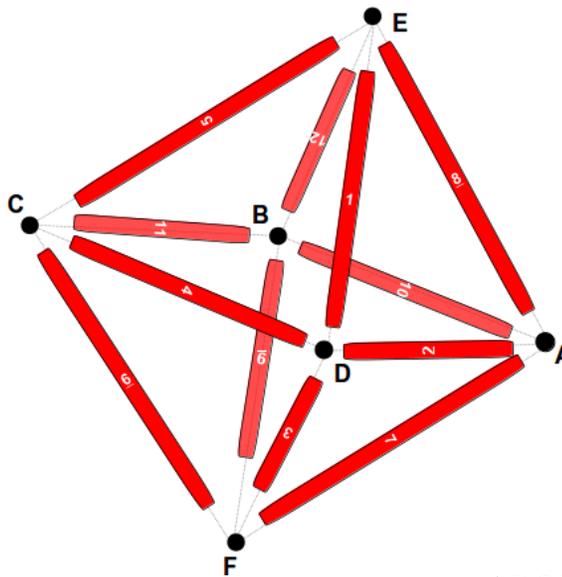


Figura 79 - 3º Passo: Montagem do Octaedro $ABCDEF$

Após montar o octaedro regular³⁴ (dual do hexaedro), una o vértice com o ponto médio da diagonal de cada quadrado realizando um laço na seguinte ordem:

$$A \mapsto E \mapsto C \mapsto F \mapsto B \mapsto E \mapsto D \mapsto C \mapsto B \mapsto A \mapsto F \mapsto D \mapsto A$$

34 Construção do modelo esqueleto das arestas do octaedro regular está indicado no item 4.2 do capítulo 4.

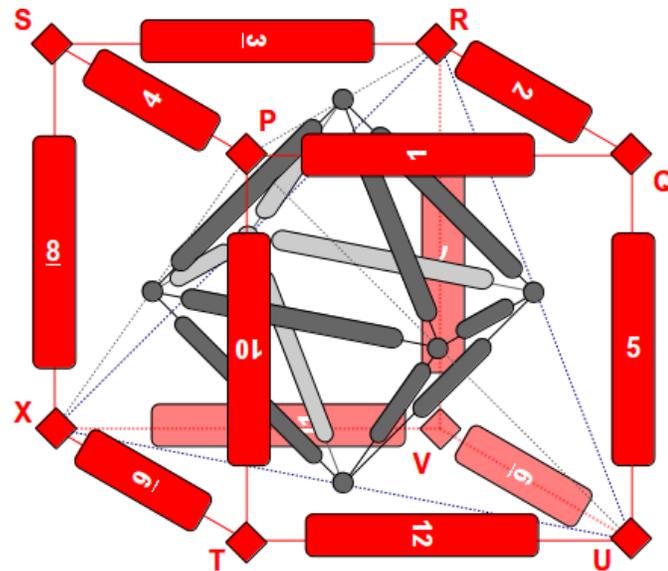


Figura 80

Agora vejamos uma foto do sólido construído com material concreto.

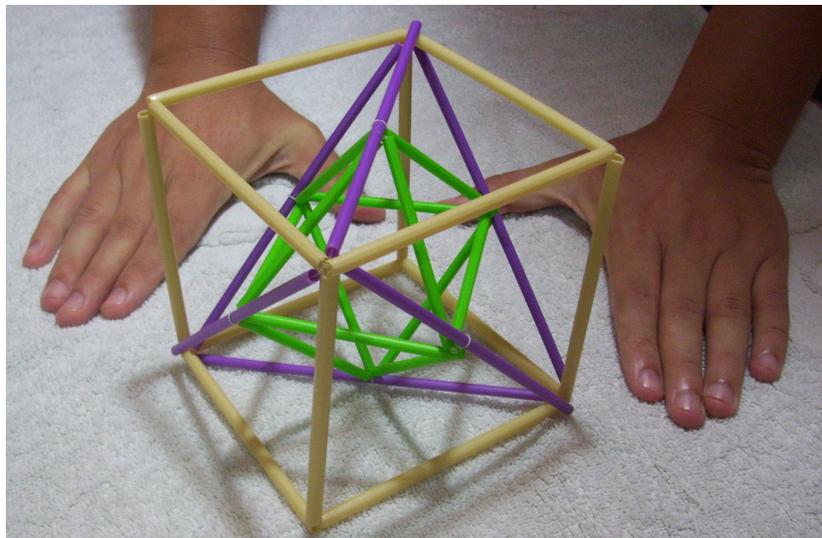


Figura 81 - Construção do modelo esqueleto das arestas do hexaedro regular com um tetraedro regular inscrito

3.6. Explorando as novas tecnologias na construção do Hexaedro Regular e seu Dual

3.6.1. Girar, Eixo e Tamanho

Apresentamos um applet desenvolvido no software GeoGebra para observarmos a construção passo a passo apresentada nos itens anteriores do modelo esqueleto das arestas e particularidades do hexaedro regular. O applet em questão

pode ser encontrado no link <http://tube.geogebra.org/material/show/id/SnV8Mnti>.

Além de acompanhar passo a passo a construção, é possível alterar o tamanho do hexaedro, girá-lo em torno dos 3 eixos, exibir somente o dual do hexaedro, detalhar individualmente cada um dos seus elementos e aprofundar os estudos desse poliedro.

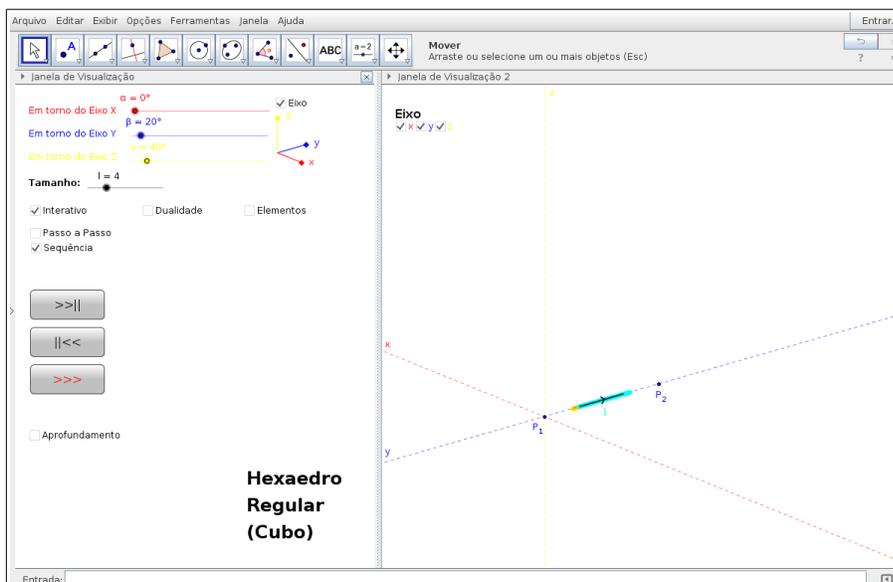


Figura 82

Conforme exibido na figura 82, temos 4 opções de interação: Interativo, Dualidade, Elementos e Aprofundamento.

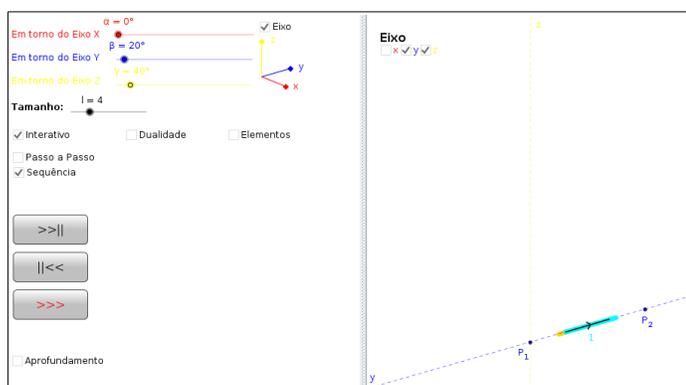


Figura 83

É possível exibir/ocultar e girar em torno dos três eixos em todas as opções de interação. Já, alterar o tamanho do hexaedro na tela é possível somente nas duas primeiras opções.



Figura 84

Na figura 83, podemos mostrar somente os eixos y e z, selecionando a caixa de seleção Eixo e desmarcando a caixa de seleção x. Para não exibir nenhum eixos, desmarque a caixa de seleção Eixo. Já a figura 84 b), giramos em torno do eixo y e mantemos fixos os eixos x e z. Assim, durante o processo de construção do hexaedro, a possibilidade de girá-lo em torno dos eixos permite uma melhor visualização do poliedro.

3.6.2. Interativo

Nessa situação temos 2 opções: Passo a Passo e Sequência.

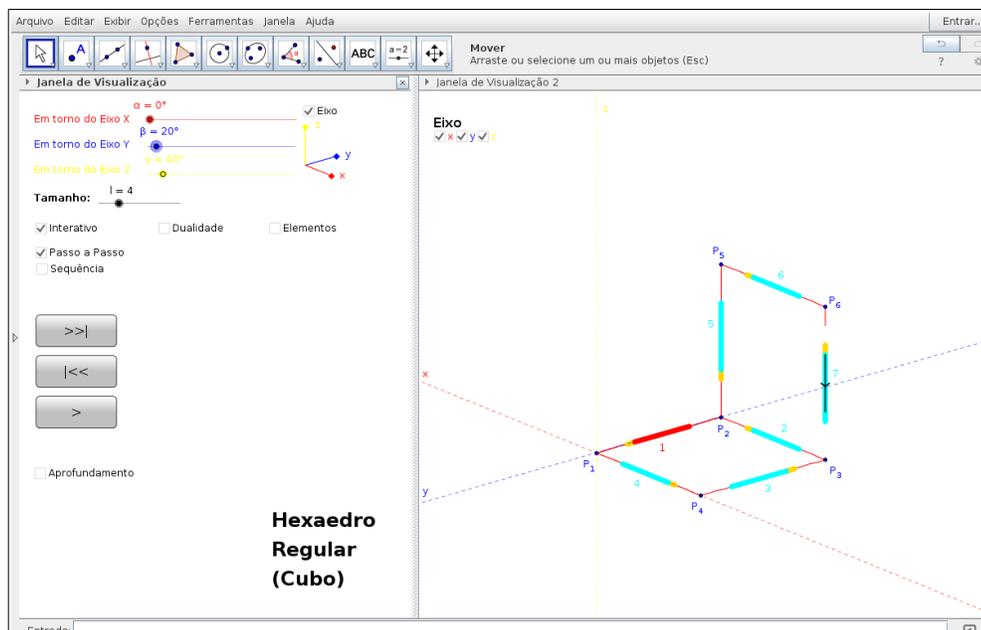


Figura 85

3.6.2.1. Interativo - Passo a Passo

Na opção Passo a Passo, conforme exibido na figura 85, temos 3 botões:

- (Próximo): Avança com a linha passo a passo.
- (Anterior): Retrocede com a linha passo a passo.
- (Início): Vai ao Início da linha (representado pelas Figuras 82 e 83).

A figura 85 representa a posição do hexaedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 84 a). Já a figura 86 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 84 b).

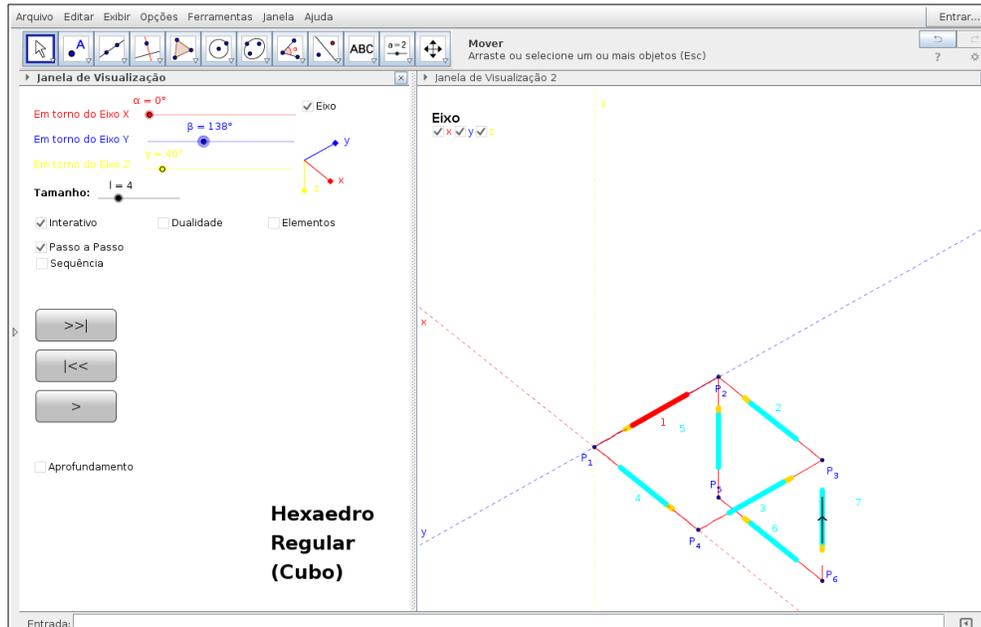


Figura 86

3.6.2.2. Interativo - Sequência

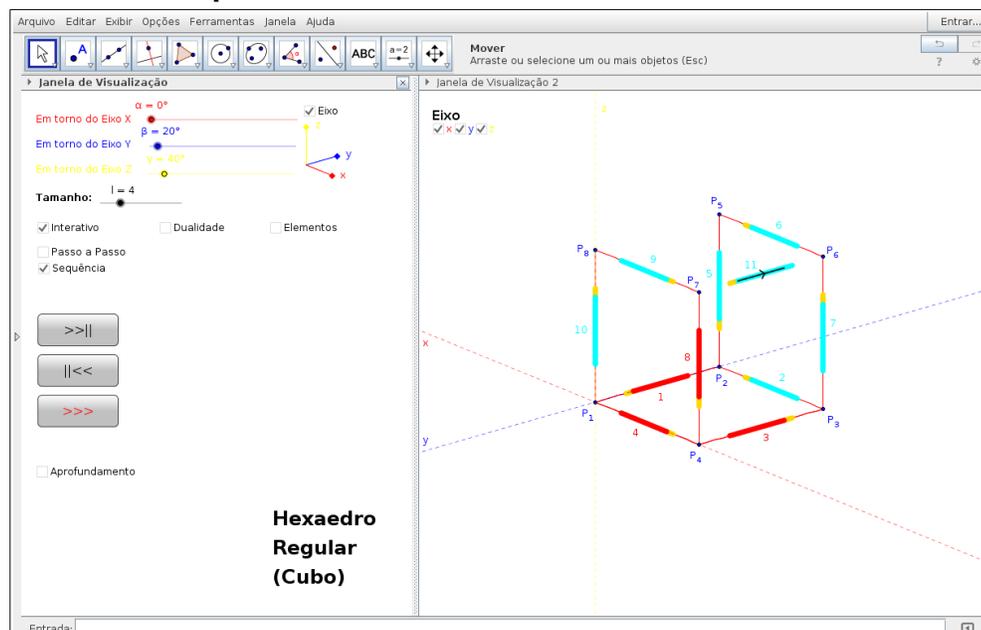


Figura 87

Conforme exibido na figura 87, a opção sequência do processo interativo permite realizar diversos passos de uma única vez. Nessa situação temos 3 botões:

 (Próximo): Avança com a linha na próxima sequência.

 (Anterior): Retrocede com a linha sequência anterior.

 (Completo): Exibe todo processo de construção de uma só vez.

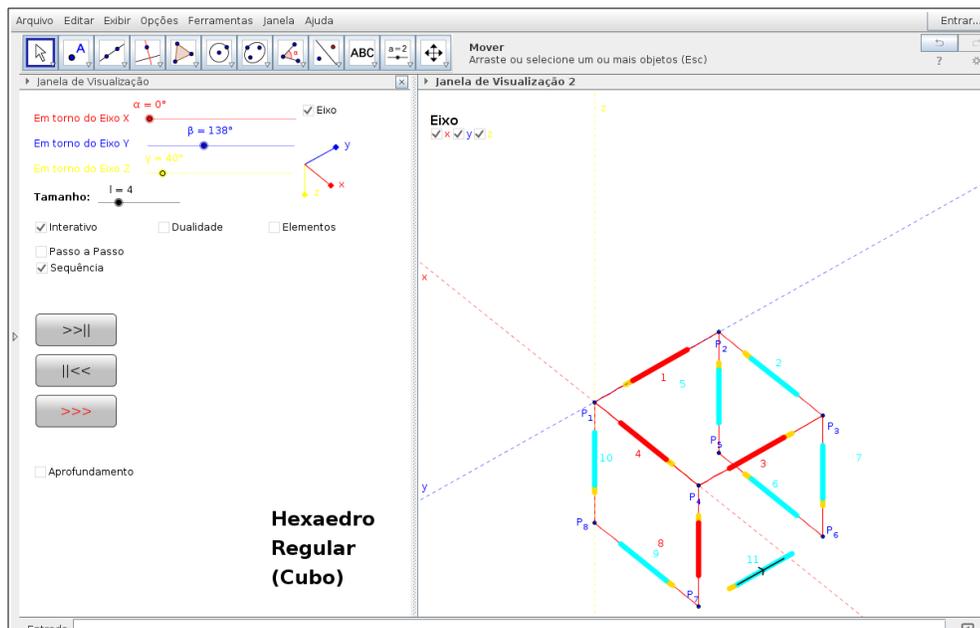


Figura 88

A figura 87 representa a posição do hexaedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 84 a). Já a figura 88 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 84 b).

3.6.3. Dualidade

Conforme exibido na figura 89, na opção Dualidade, temos 2 possibilidades: Dual e Cubo.

Note que o dual do hexaedro regular é o octaedro regular. Na figura, o dual está representado de azul. Em alguns poliedros de Platão, mesmo utilizando o software de geometria dinâmica, não é tão simples visualizar o seu dual.

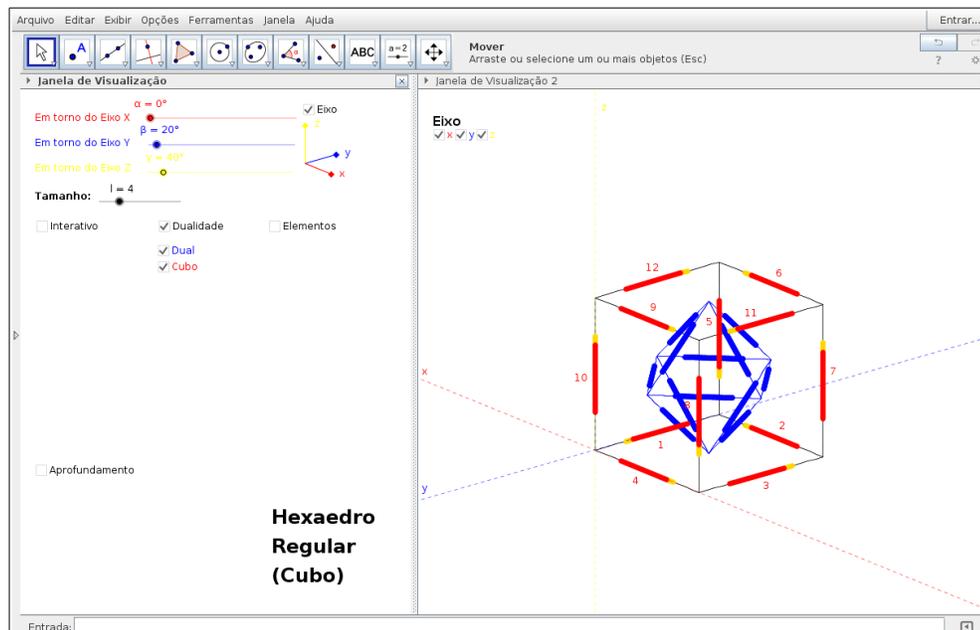


Figura 89

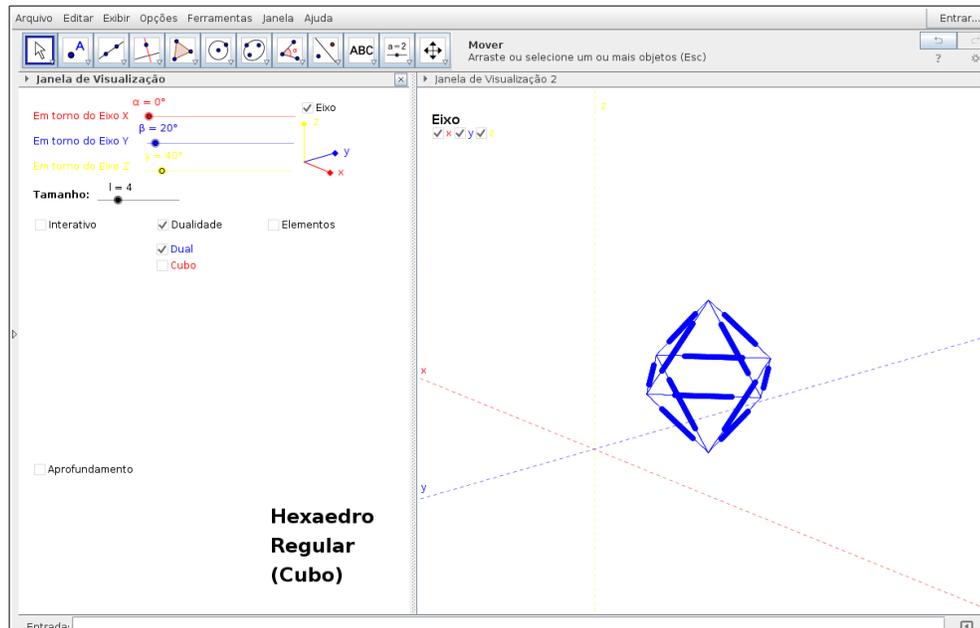


Figura 90

Dessa forma, selecione apenas a opção Dual, conforme exibido na figura 90, para exibir o dual do hexaedro. Para exibir somente o hexaedro, selecione apenas a opção Cubo (figura 91).

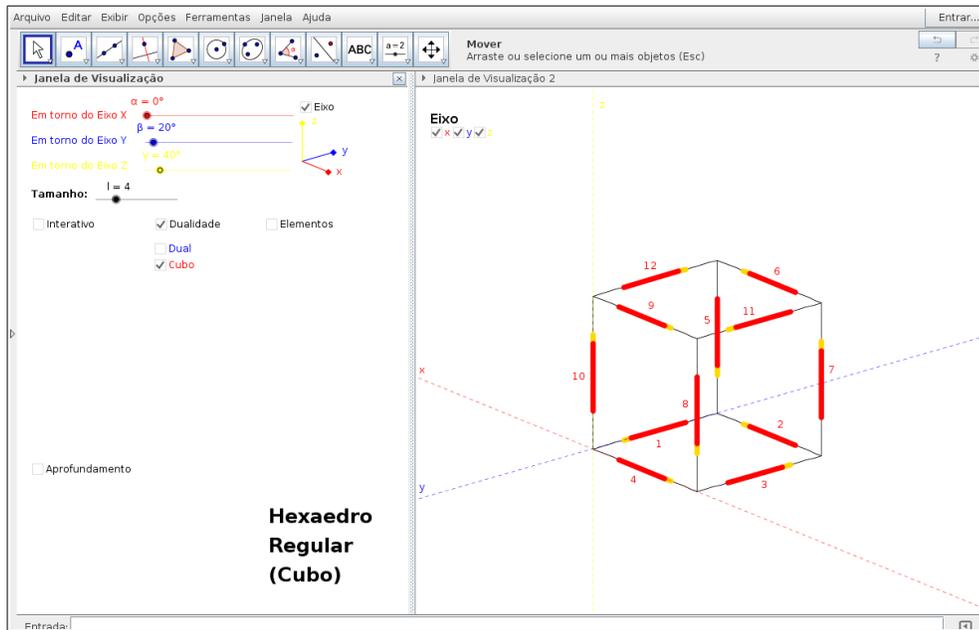


Figura 91

3.6.4. Elementos

Nessa situação temos 3 opções: Vértices, Arestas e Faces.

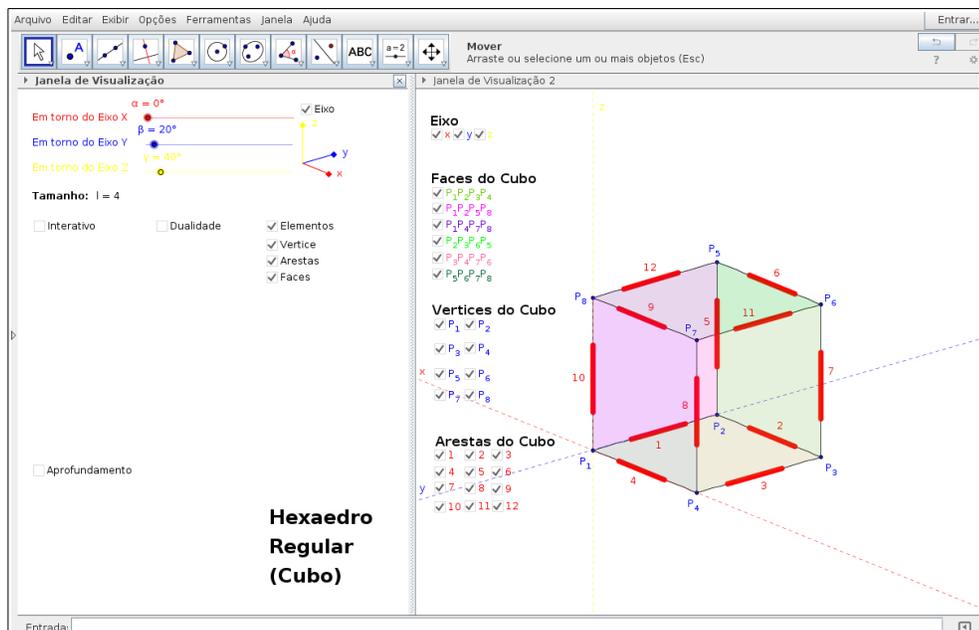


Figura 92

Conforme exibido na figura 92, todos os elementos podem ser exibidos individualmente através da caixa de seleção. Note que o hexaedro tem 6 faces, 8 vértices e 12 arestas, conforme detalhes apresentados do lado direito da figura. Assim,

se desejarmos exibir algumas opções de um elemento específico, basta seleccionar apenas um elemento do lado esquerdo e as opções do lado direito. Outra situação é visualizada na figura 93, em que exibimos alguns canudos e apenas 2 faces.

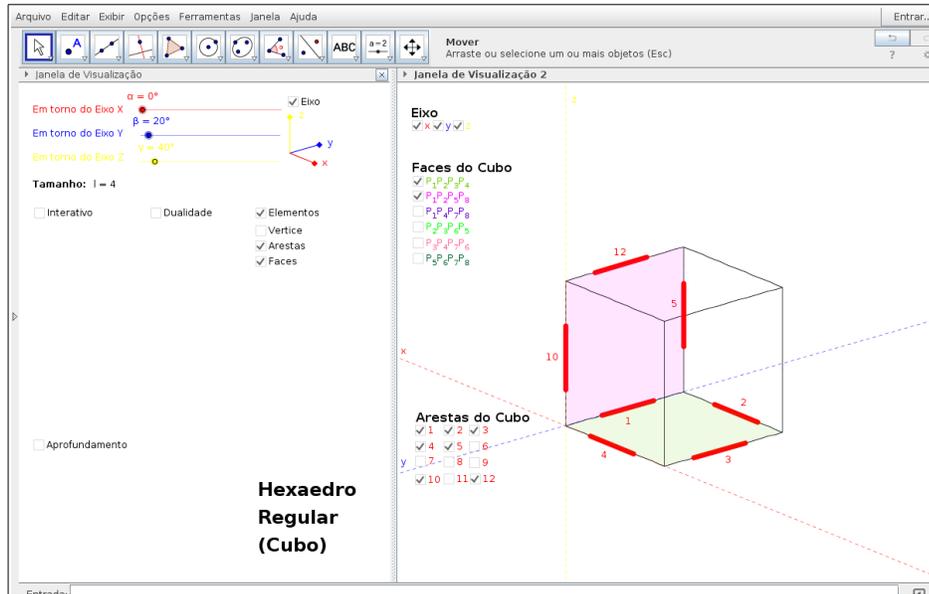


Figura 93

É válido observar que os vértices do hexaedro são definidos a partir da origem dos eixos coordenados.

3.6.5. Aprofundamento

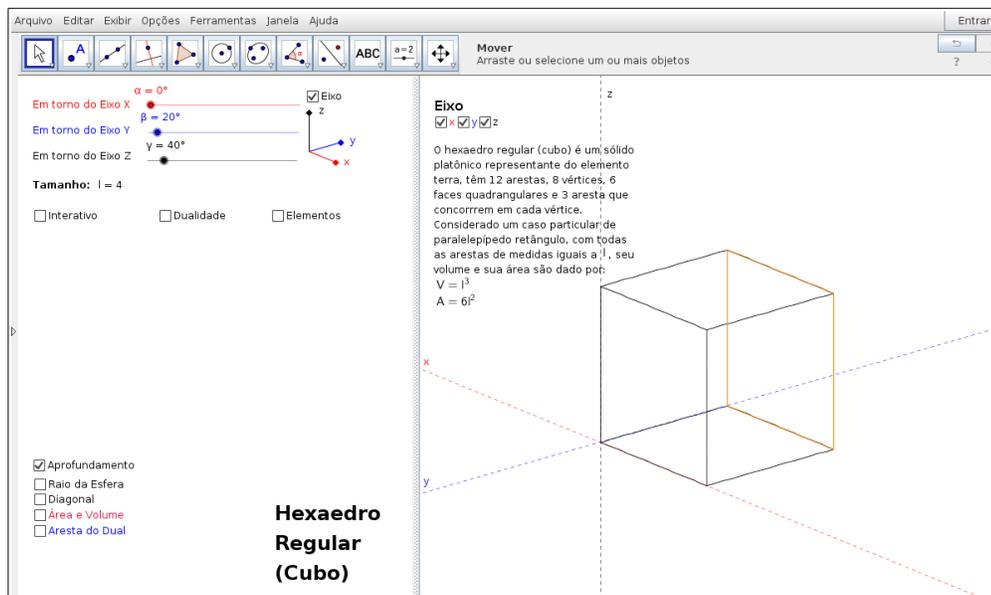


Figura 94

Conforme exibido na figura 94, na opção Aprofundamento, temos 4 possibilidades: Raio da Esfera, Diagonal, Área e Volume, Aresta do Dual.

3.6.5.1. Aprofundamento - Raio da Esfera

Conforme exibido na figura 95, na opção Raio da Esfera³⁵ do item Aprofundamento, temos 3 possibilidades: Centro da Esfera, Raio da Esfera Inscrita e Raio da Esfera Circunscrita.

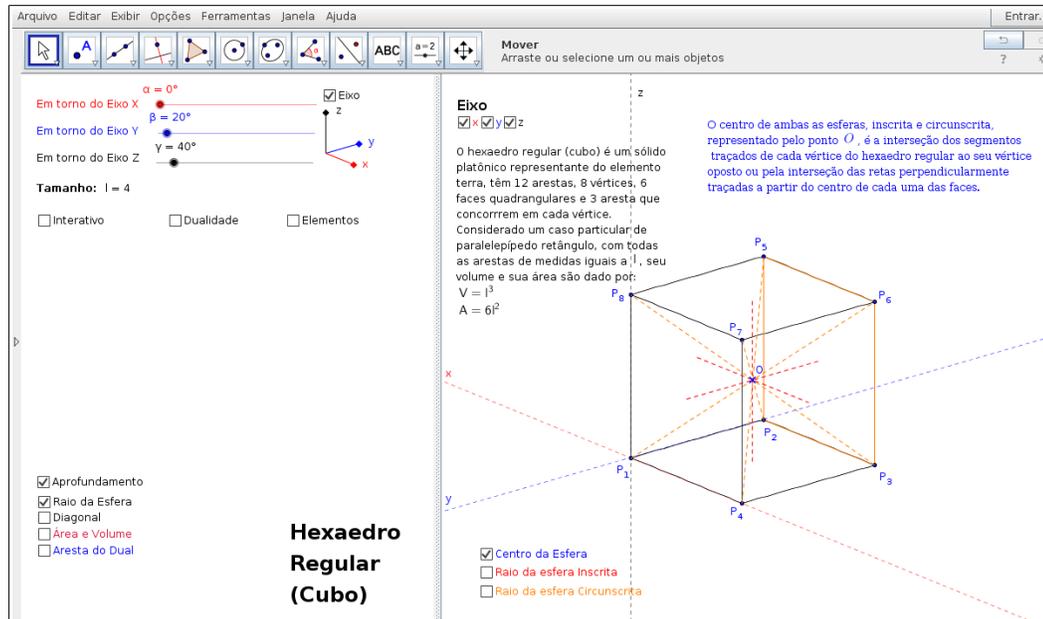


Figura 95

3.6.5.1.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro

Nessa figura 95, podemos observar que o centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O , é obtido a partir da interseção dos segmentos traçados de cada vértice do hexaedro regular ao seu vértice oposto ou pela interseção das retas perpendicularmente traçadas a partir do centro de cada uma das faces.

3.6.5.1.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita

Na figura 96, o raio da esfera inscrita é a distância entre o centro da esfera e o centro uma face desse sólido.

35 Conforme apresentado na seção 3.1.3.

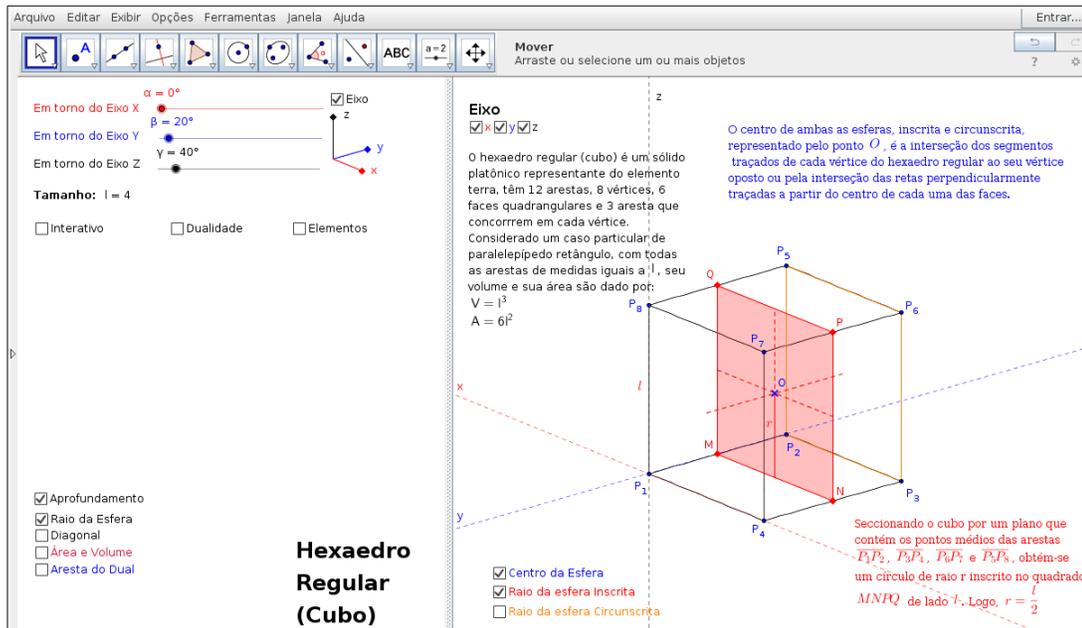


Figura 96

3.6.5.1.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita

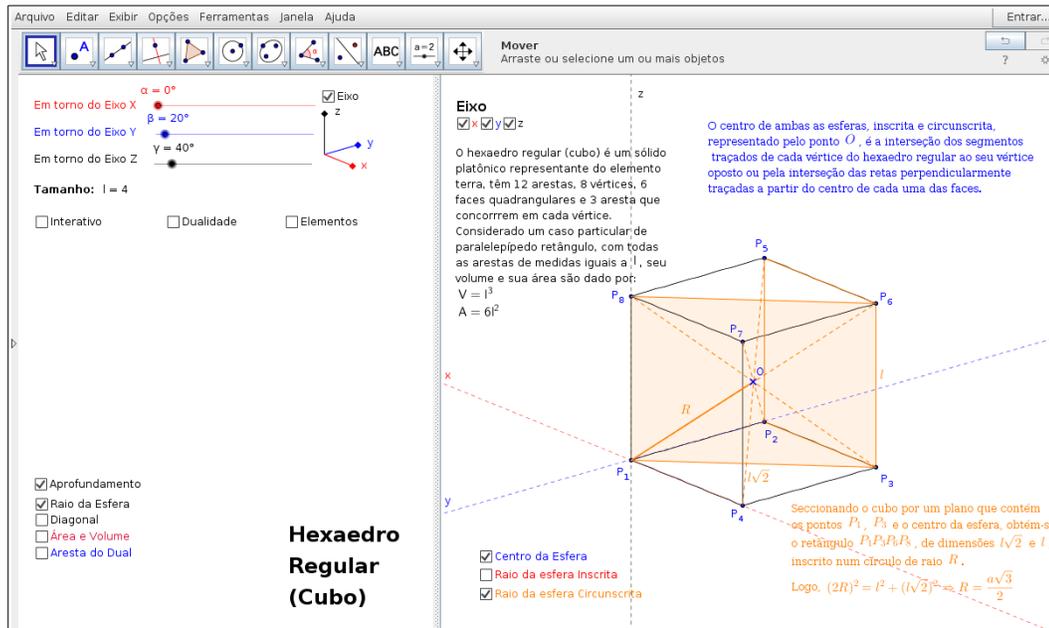


Figura 97

Conforme exibido na figura 97, a distância entre o centro da esfera e o vértice do sólido é o raio da esfera circunscrita.

3.6.5.2. Aprofundamento - Diagonal

Na figura 98, na opção Diagonal do item Aprofundamento, temos 2 possibilidades: Diagonal da Face e Diagonal do Cubo.

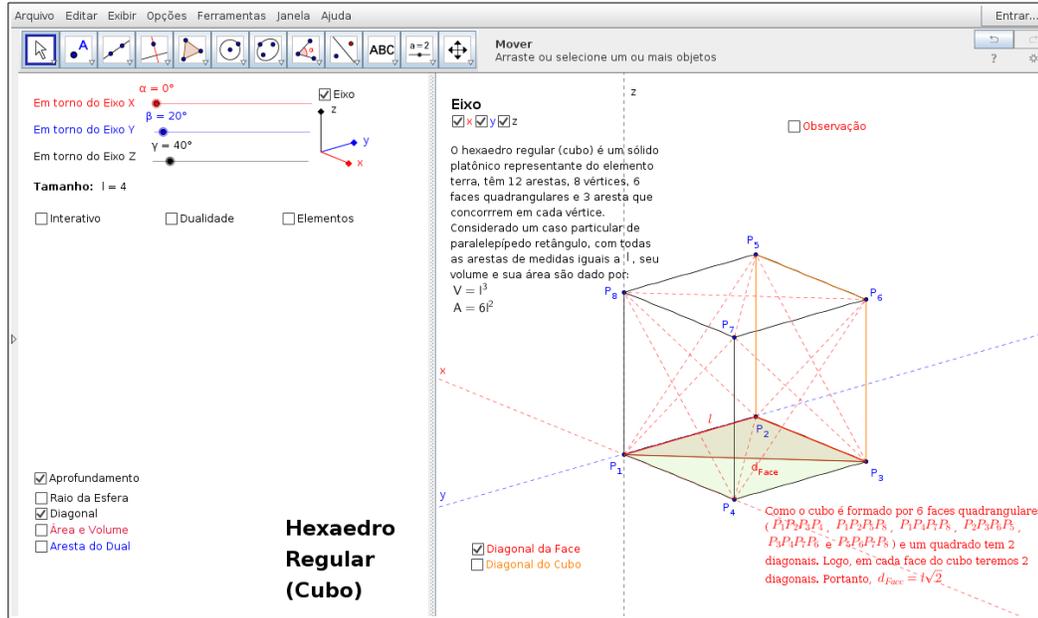


Figura 98

3.6.5.2.1. Aprofundamento - Diagonal - Diagonal da Face

Como a face do hexaedro é quadrada, cada face tem duas diagonais e traçando as todas as diagonais, obtemos³⁶ dois tetraedros inscritos no hexaedro.

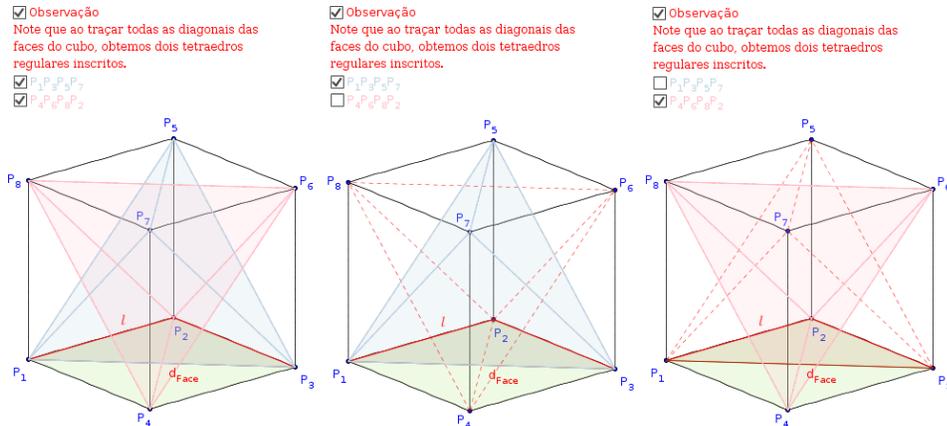


Figura 99

Para exibir individualmente cada tetraedro(figura 99), selecione o item Observação da figura 98.

36 Conforme apresentado na seção 3.1.4.

3.6.5.2.2. Aprofundamento - Diagonal - Diagonal do Cubo

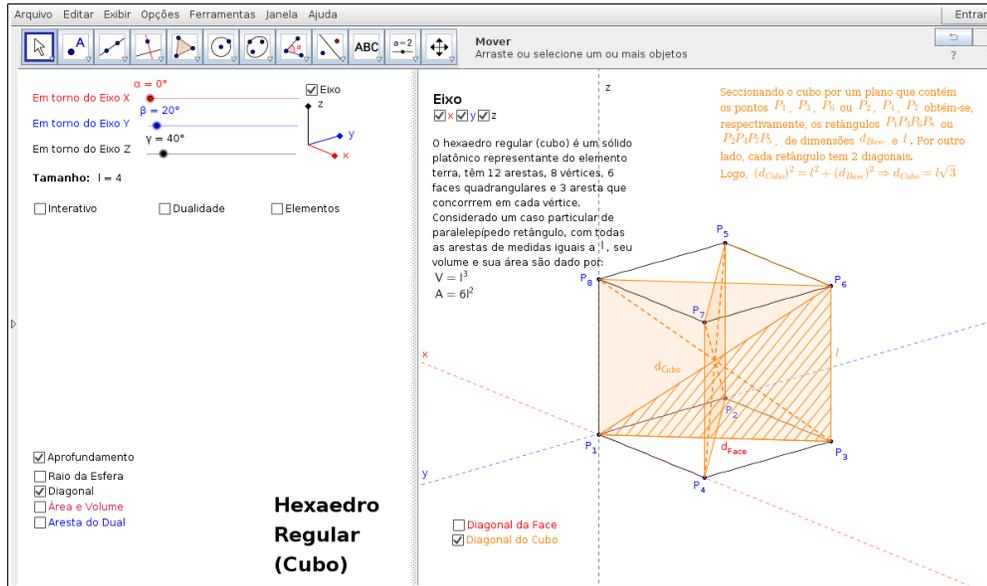


Figura 100

Para calcular a medida da diagonal do cubo³⁷, conforme exibido na figura 100, seccionamos o hexaedro por um plano que os pontos P_1, P_3 e P_6 , obtemos o retângulo $P_1P_3P_6P_8$ e aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pela diagonal da face e pela medida de uma aresta do hexaedro.

3.6.5.3. Aprofundamento - Área e Volume

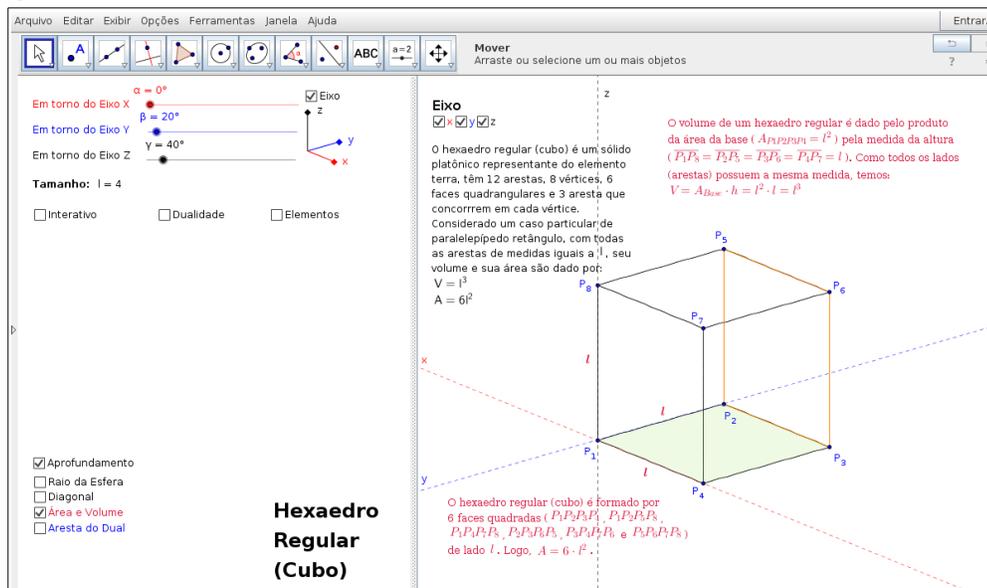


Figura 101

37 Conforme apresentado na seção 3.1.2.

Conforme exibido na figura 101, considerando a face do hexaedro regular contido no plano XY, é fácil encontrar³⁸ o volume e a área total visto que o hexaedro tem seis faces quadradas e é um caso particular de paralelepípedo retângulo.

3.6.5.4. Aprofundamento - Aresta do Dual

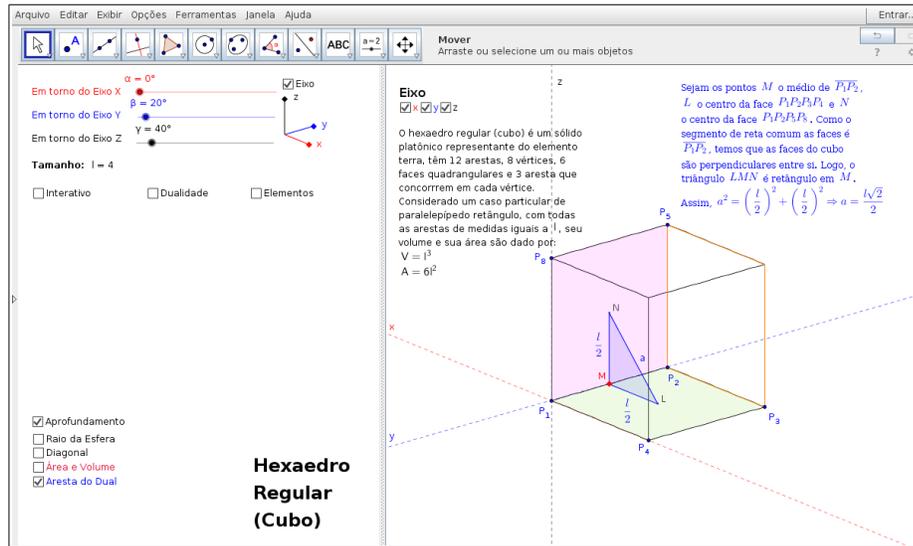


Figura 102

Como o octaedro regular é o dual do hexaedro regular e as faces do hexaedro são perpendiculares entre si, conforme exibido na figura 102, considere duas faces adjacentes e trace o triângulo retângulo formado pelo centro de cada uma dessas faces e o ponto médio da aresta comum. Logo, aplicando³⁹ o teorema de Pitágoras, a diagonal desse triângulo retângulo corresponde ao comprimento da aresta do dual.

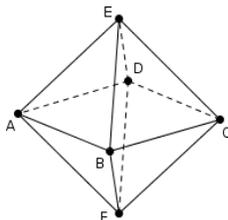
38 Conforme apresentado na seção 3.1.1.

39 Conforme apresentado na seção 3.1.5.

Capítulo 4 - Octaedro Regular

4.1. Revisão Teórica

4.1.1. Introdução



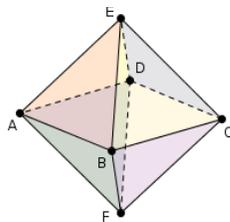
Segundo Platão, o octaedro regular representa o elemento ar de mobilidade crescente e intermediária entre a terra (cubo) e o fogo (tetraedro), sendo suficientemente leve para flutuar e penetrar em todo o espaço "vazio".

Esse sólido é formado por 6 vértices (A, B, C, D, E e F), 8 faces triangulares ($ABE, BCE, CDE, DAE, ABF, BCF, CDF$ e DAF), 12 arestas ($\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}, \overline{AE}, \overline{BE}, \overline{CE}, \overline{DE}, \overline{AF}, \overline{BF}, \overline{CF}$ e \overline{DF}) e 4 arestas que concorrem em cada vértice.

Como as faces desse sólido são triângulos equiláteros, conforme apresentado no item 2.1.1 do capítulo 2, temos a coincidência dos quatro pontos notáveis do triângulo (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro). Dentre esses pontos, o encontro das medianas de um triângulo recebe o nome de baricentro e divide cada mediana na razão 2:1.

Nas próximas seções desse capítulo, vamos apresentar propriedades (área, volume, raios das esferas inscrita e circunscrita) e construções (aresta do dual) desse sólido.

4.1.2. Cálculo da área do octaedro regular



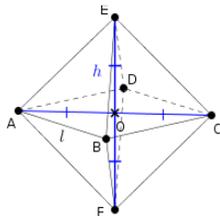
$$A_{(3)} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

A área de um triângulo equilátero de lado l é dada por

Como o octaedro regular tem oito faces triangulares equiláteras, temos:

$$A = 8A_{(3)} \Rightarrow A = 8 \cdot l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 2l^2\sqrt{3}$$

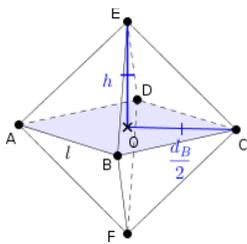
4.1.3. Cálculo do volume do octaedro regular



Seccionando o octaedro regular por um plano que contém os pontos A , B e C , obtém-se o quadrado $ABCD$ de lado l . Dessa forma, podemos decompor o sólido em duas pirâmides regulares de base quadrada ($ABCDE$ e $ABCDF$).

Por outro lado, o volume de uma pirâmide é dado por $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$, onde A_B é a área da base e h é a altura de pirâmide.

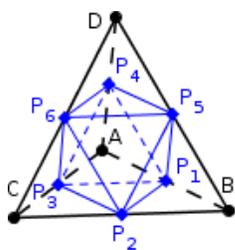
É válido observar que seccionando o sólido por um plano que contém os pontos B , E e D ou A , E e C , obtém-se, respectivamente, os quadrados $BEDF$ ou $AECE$ de lado l .



Como a base da pirâmide é quadrada, a altura da pirâmide é a metade da diagonal da base. Então $A_B = l^2$, $h = \frac{d_B}{2}$ e $d_B = l\sqrt{2}$.

Logo, o volume do octaedro⁴⁰ é dado por

$$V = 2V_P \Rightarrow V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h \Rightarrow V = \frac{2}{3} \cdot l^2 \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = l^3 \frac{\sqrt{2}}{3}.$$



É válido observar que na seção 2.1.5. do capítulo 2, para calcular o volume do octaedro regular inscrito no tetraedro regular de aresta l decomparamos o sólido em quatro tetraedros regulares e um octaedro regular, ambos, de aresta $\frac{l}{2}$ e chegamos a conclusão que o

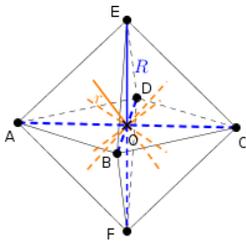
volume do octaedro regular inscrito de aresta $\frac{l}{2}$ é a metade do volume do tetraedro de aresta l .

Em outras palavras, o volume do octaedro regular inscrito é igual ao volume dos quatro tetraedros regulares inscritos. Visto que ambos os sólidos têm a mesma aresta, como o volume do tetraedro é dado por $V = l^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$, vamos calcular o volume do

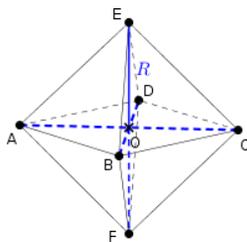
40 Na seção 3 do anexo 2 mostramos um forma diferente para calcular o volume do octaedro regular.

octaedro da seguinte forma: $V = 4 \cdot l^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = l^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$

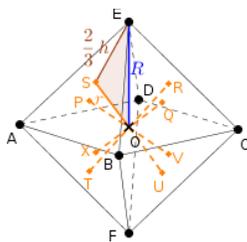
4.1.4. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita do octaedro regular



O centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O , é obtido a partir da interseção dos segmentos traçados de cada vértice do octaedro regular ao seu oposto ou pela interseção dos segmentos traçados perpendicularmente a partir do centro de cada uma das faces.



Conforme vimos no item 4.1.3, ao decompor o octaedro regular em duas pirâmides regulares de base quadrada, encontramos que a altura da pirâmide é a metade da diagonal da base. Logo, raio da esfera circunscrita é dado por $R = l \frac{\sqrt{2}}{2}$.



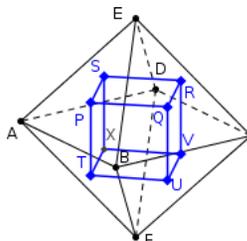
O raio da esfera inscrita é a distância entre o centro da esfera e uma face desse sólido, representado por r . Sejam \overline{EO} o raio da esfera circunscrita e P o baricentro do triângulo equilátero ABE de altura h , então $\overline{EP} = \frac{2}{3}h \Rightarrow \overline{EP} = \frac{2}{3} \cdot l \frac{\sqrt{3}}{2}$ o que implica

$$\overline{EP} = l \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo EPO , temos:

$$\overline{EP}^2 + \overline{PO}^2 = \overline{EO}^2 \Rightarrow \left(l \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow \frac{l^2}{3} + r^2 = \left(l \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow r = l \frac{\sqrt{6}}{6}$$

4.1.5. Cálculo da aresta do dual do octaedro regular



Sejam os pontos P, Q, R, S, T, U, V e X os baricentros dos triângulos $ABE, BCE, CDE, DAE, ABF, BCF, CDF$ e DAF . Construimos os segmentos entre os baricentros de faces adjacentes do sólido e teremos assim, o chamado dual do octaedro com as seguintes arestas: $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}, \overline{SP}, \overline{TU}, \overline{UV}, \overline{VX}, \overline{XT},$

$\overline{PT}, \overline{QU}, \overline{RV}$ e \overline{SX} .

Para a medida da aresta do dual do octaedro, consideramos os triângulos ABE e BCE e determinamos \overline{PQ} :

Sejam M o ponto médio de \overline{AB} , N o ponto médio de \overline{BC} , P é o baricentro do triângulo ABE e Q o baricentro do triângulo BCE .

Como M o ponto médio de \overline{AB} e N o ponto médio de \overline{BC} , temos

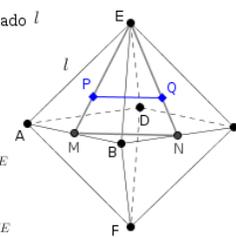
$$\overline{MB} = \overline{BN} = \frac{l}{2}. \text{ Logo, } \overline{MN} = l \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como P é o baricentro do triângulo equilátero ABE e Q é o baricentro do triângulo equilátero BCE , temos $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$ e $\overline{EP} = \frac{2}{3}\overline{EM}$.

Pelo caso de semelhança LAL , os triângulos EPQ e EMN são semelhantes.

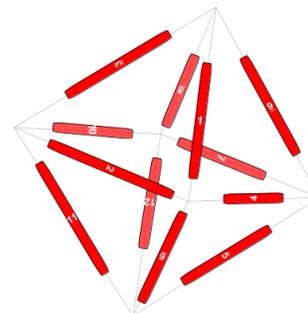
$$\text{Logo, } \frac{\overline{EM}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \frac{\overline{EM}}{\frac{2}{3}\overline{EM}} = \frac{l \frac{\sqrt{2}}{2}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \overline{PQ} = l \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$ABCD$ é quadrado de lado l
 M é médio de \overline{AB}
 N é médio de \overline{BC}
 $\overline{MN} = l \frac{\sqrt{2}}{2}$
 ΔABE é equilátero
 P é Baricentro de ΔABE
 $\overline{EP} = \frac{2}{3}\overline{EM}$
 Q é Baricentro de ΔBCE
 $\Delta EPQ \sim \Delta EMN$ (LAL)



4.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do octaedro regular

Para realizar a construção do modelo esqueleto das arestas do octaedro regular, utilizando um canudo de 12 cm, vamos precisar de 12 pedaços de canudo de mesma cor⁴¹, um pedaço de linha maior do que 4,32 m de comprimento⁴² e o tempo livre de 2 aulas (1 hora e 40 minutos).



Agora vejamos a construção passo a passo das arestas desse sólido:

41 Na representação do tetraedro, não visualizamos os canudos representados na parte traseira, por isso a cor do canudo será transparente.

42 Seja t o tamanho da linha e c_1 o tamanho do canudo de quantidade 6. Então, $t = 36 \cdot c_1$. Para $c_1 = 12$ cm, temos: $t = 36 \cdot 12 \Rightarrow t = 432$ cm $\Rightarrow t = 4,32$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

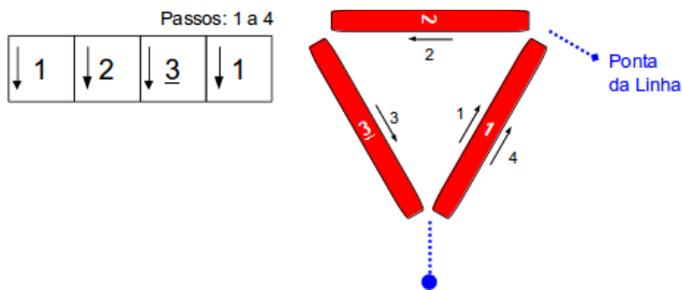


Figura 103 - 1º Sequência (1/4)

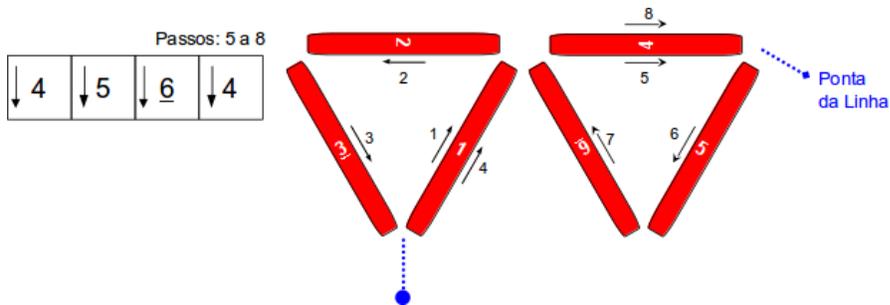


Figura 104 - 1º Sequência (2/4)

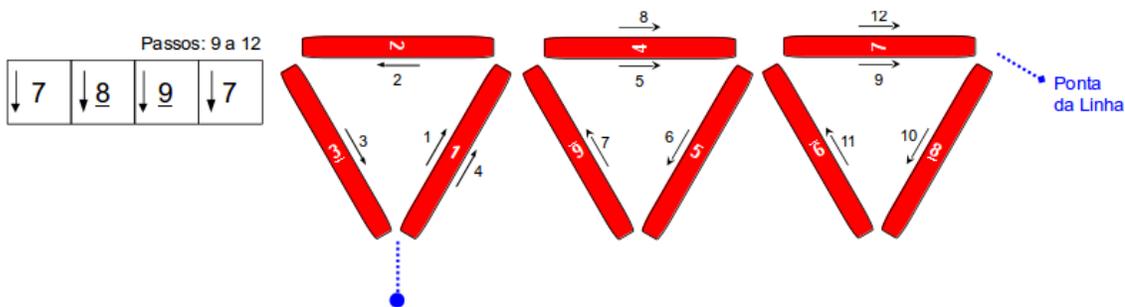


Figura 105 - 1º Sequência (3/4)

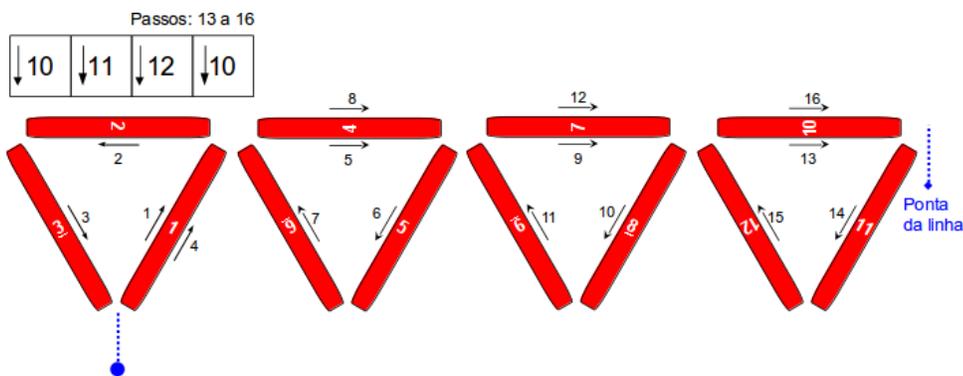


Figura 106 - 1º Sequência (4/4)

Antes de prosseguir a construção, vamos montar o desenho de um quadrado com as arestas 2, 4, 7 e 10 dos 4 triângulos construídos.

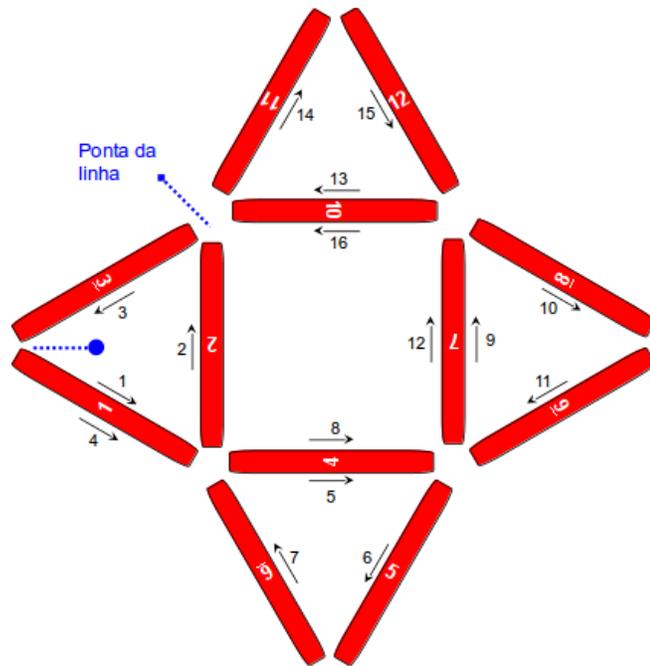


Figura 107 - 1º Sequência

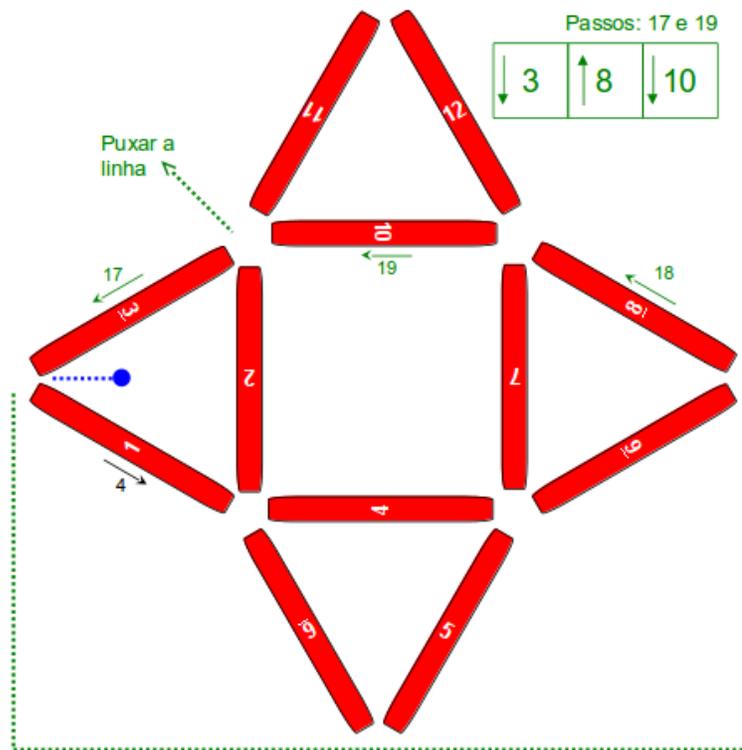


Figura 108 - 2º Sequência: Visualização 1/2

Antes de prosseguir a construção, vamos puxar a linha conforme indicado no passo 19 da figura 108.

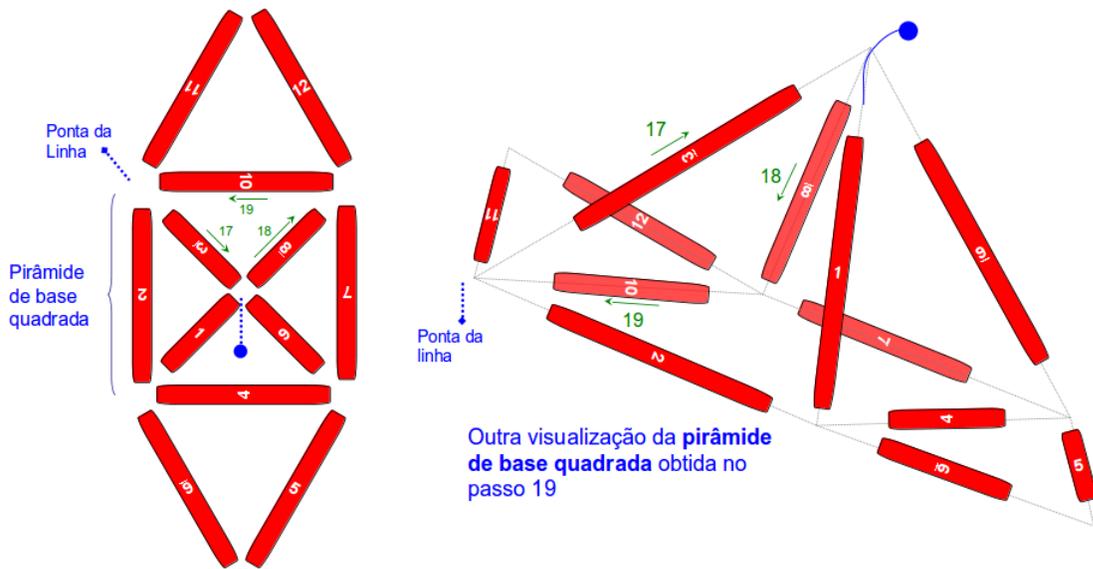


Figura 109 - 2ª Sequência: Visualização 2/2

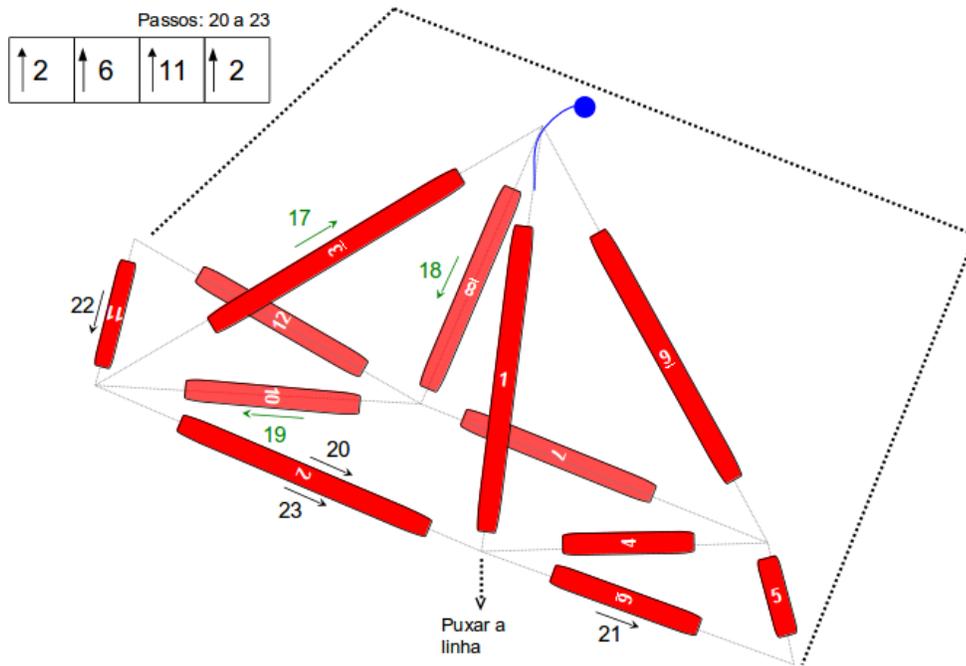


Figura 110 - 3ª Sequência: Visualização 1/2

Conforme indicado no passo 23 da figura 110, após puxar a linha que passa pelos canudos 6, 11 e 2, observamos a figura montada será o octaedro regular.

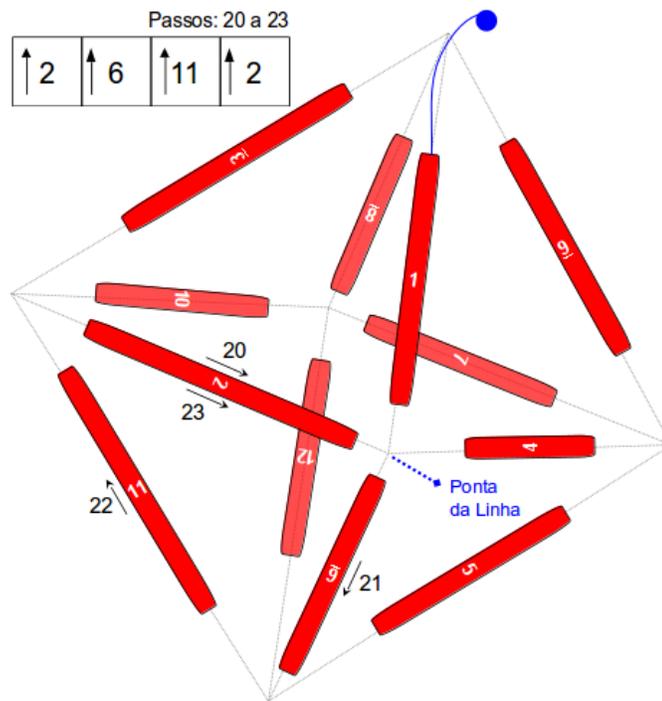


Figura 111 - 3º Sequência: Visualização 2/2

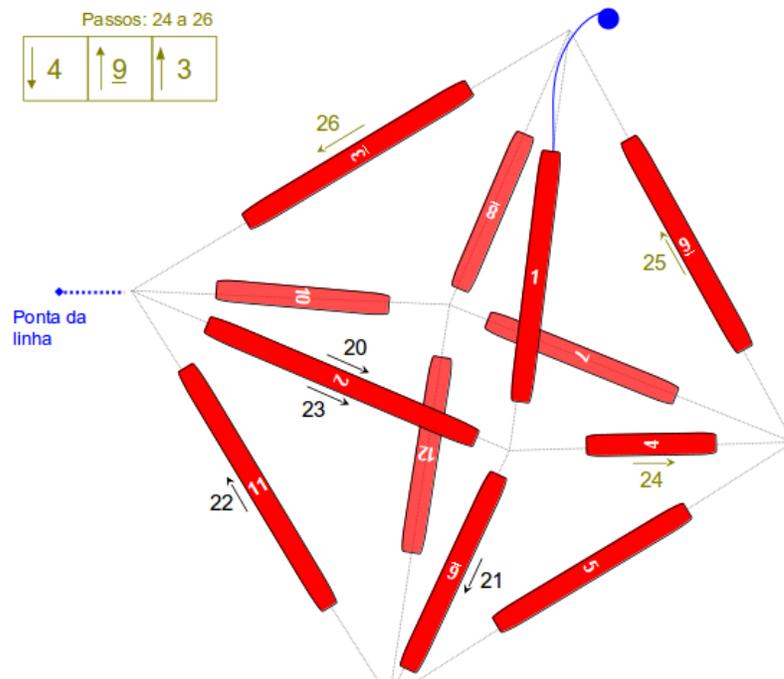


Figura 112 - 4º Sequência (1/4)

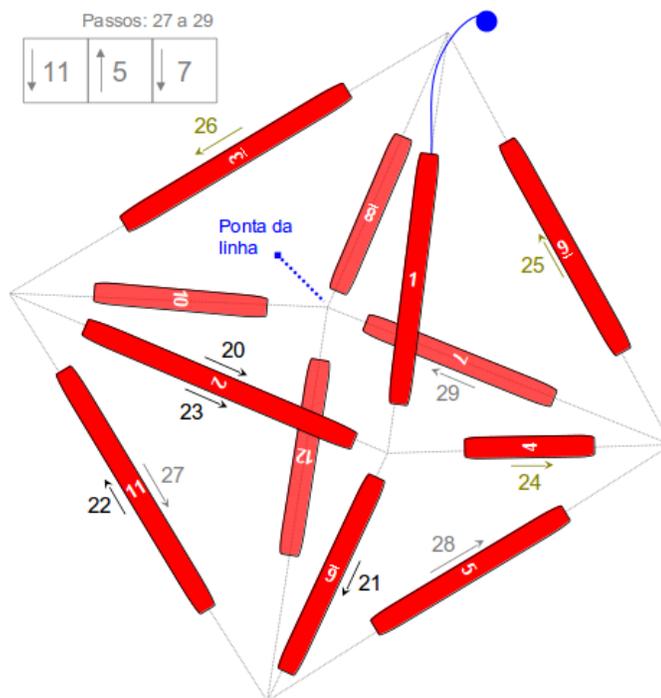


Figura 113 - 4º Sequência (2/4)

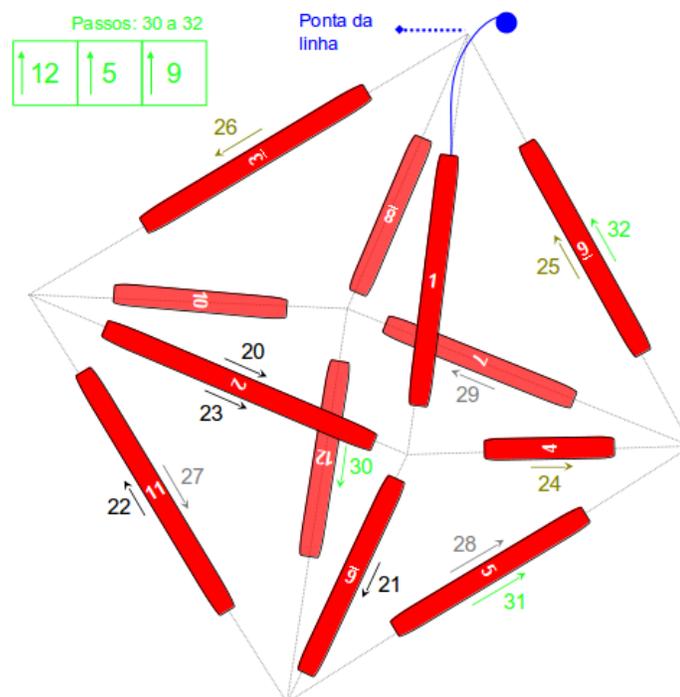


Figura 114 - 4º Sequência (3/4)

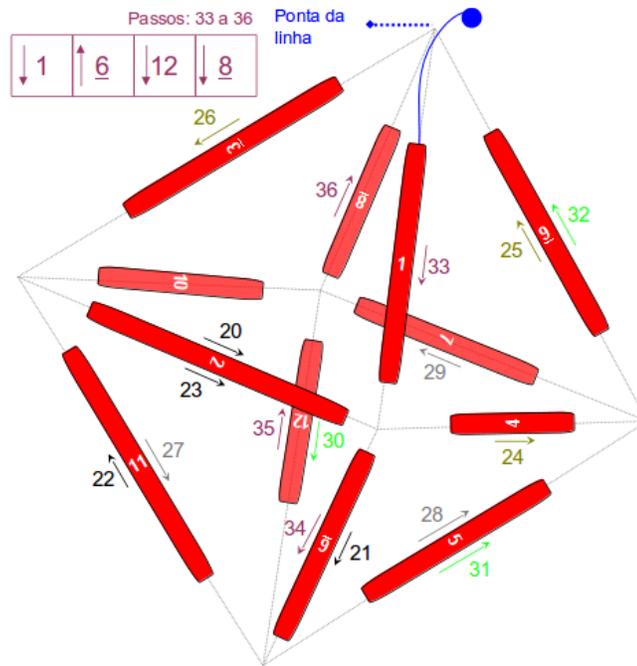


Figura 115 - 4º Sequência (3/4)

Para finalizar, faremos um único nó com as linhas ligando as arestas 8 e 1 da última sequência.

Agora vejamos todo o procedimento sem interrupção, a visualização do octaedro regular e uma foto do sólido construído com material concreto.

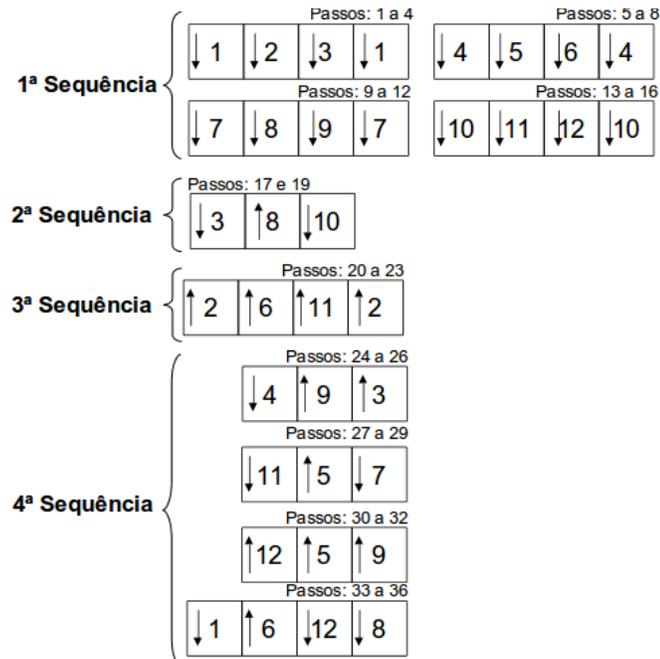


Figura 116 - Procedimento completo

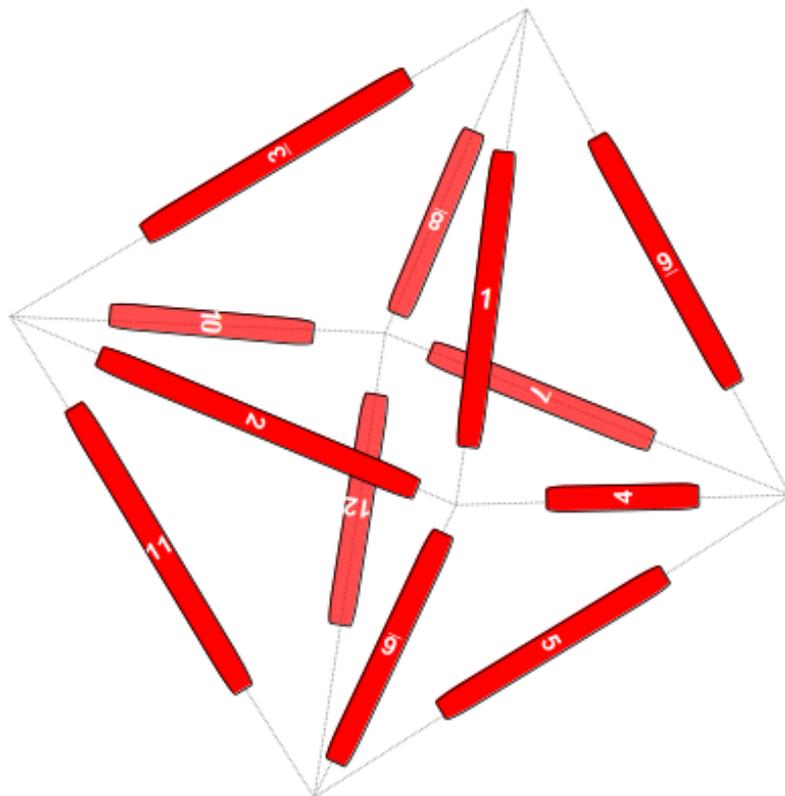


Figura 117 - Visualização do Octaedro Regular

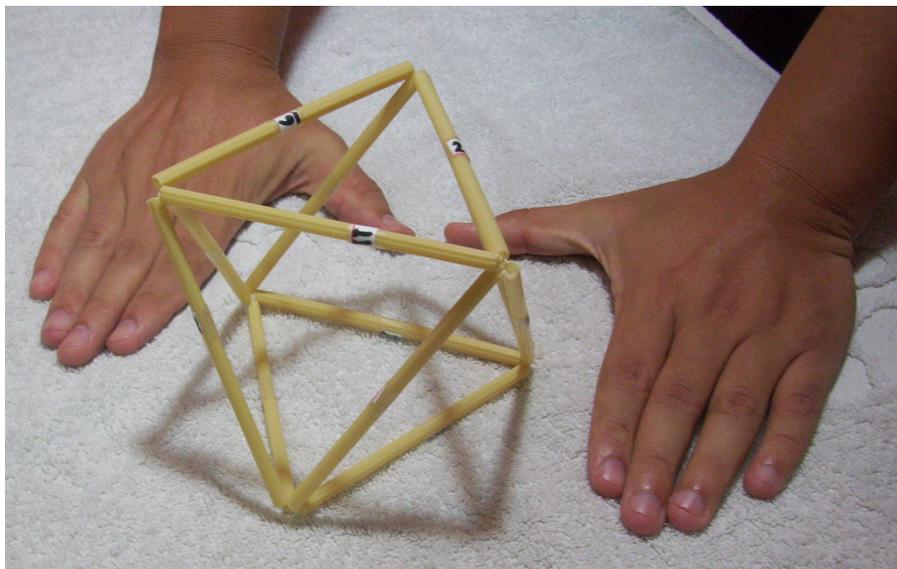
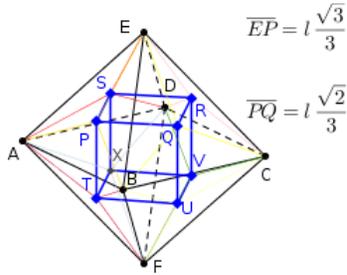


Figura 118 - Construção do modelo esqueleto das arestas do octaedro regular

4.3. Construindo o modelo esqueleto das arestas do dual no octaedro regular



Para construir o modelo esqueleto das arestas do dual no octaedro regular são necessários⁴³ 12 canudos (\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} , \overline{AE} , \overline{BE} , \overline{CE} , \overline{DE} , \overline{AF} , \overline{BF} , \overline{CF} e \overline{DF}) de 12 cm, 24 canudos (\overline{PA} , \overline{PB} , \overline{PE} , \overline{SA} , \overline{SD} , \overline{SE} , \overline{QB} , \overline{QC} , \overline{QE} , \overline{RC} , \overline{RD} , \overline{RE} , \overline{XA} , \overline{XD} , \overline{XF} , \overline{TA} , \overline{TB} , \overline{TF} , \overline{UB} , \overline{UC} , \overline{UF} , \overline{VC} , \overline{VD} e \overline{VF}) de $6\sqrt{3}$ cm, 12 canudos (\overline{PQ} , \overline{QR} , \overline{RS} , \overline{SP} , \overline{TU} , \overline{UV} , \overline{VX} , \overline{XT} , \overline{PT} , \overline{QU} , \overline{RV} e \overline{SX}) de $4\sqrt{2}$ cm, um pedaço de linha maior do que 16,91 m de comprimento⁴⁴ e o tempo livre de 4 aulas (3 horas e 20 minutos).

Conforme indicado no item 4.2, realizar a montagem do octaedro regular $ABCDEF$ (1ª Sequência).

Antes de prosseguir, vamos planificar o octaedro regular⁴⁵ e visualizar que alguns canudos (1, 5, 7, 8 e 10) ocupam duas posições (figura 119).

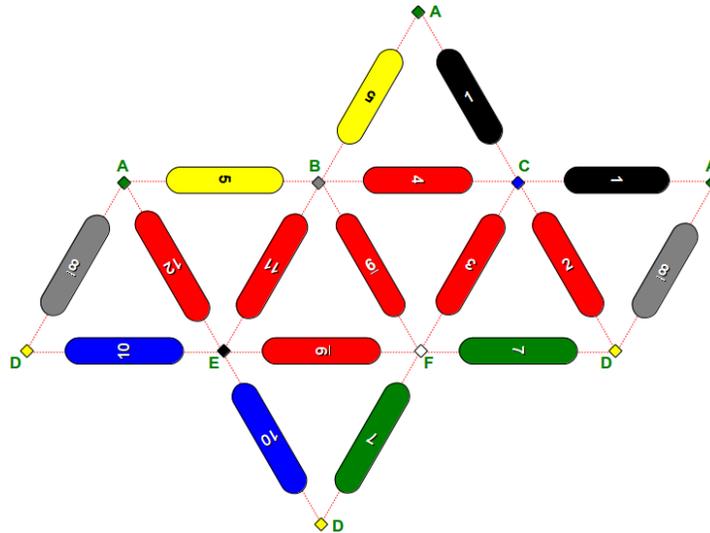


Figura 119 - Planificação do Octaedro Regular

43 Para $l = 12$ temos: $\overline{EP} = l \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ e $\overline{PQ} = l \frac{\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$ conforme itens 4.1.4 e 4.1.5.

44 Seja t o tamanho da linha, c_1 o tamanho do canudo de lado l , c_2 o tamanho do canudo de lado $l \frac{\sqrt{3}}{2}$, c_3 o tamanho do canudo de lado $l \frac{\sqrt{2}}{3}$. Então, $t = 16 \cdot c_1 + 48 \cdot c_2$. Para construir os modelos esqueletos das arestas do octaedro regular no item 4.2 utilizando o canudo c_1 e do hexaedro regular no item 3.2 utilizando o canudo c_3 temos $36 \cdot c_1 + 24 \cdot c_3$
 $t = 52 \cdot c_1 + 48 \cdot c_2 + 24 \cdot c_3 \Rightarrow t = 52 \cdot l + 48 \cdot l \frac{\sqrt{3}}{2} + 24 \cdot l \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow t = 52l + 24\sqrt{3}l + 8\sqrt{2}l$, o que implica $t = (52 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{2})l$. Logo, o tamanho total da linha utilizada é $t = (88 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{2})l$. Para $l = 12$ cm, temos: $t = 1691$ cm $\Rightarrow t = 16,91$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

45 Na seção 3 do anexo 3 temos a planificação do octaedro utilizando régua e compasso.

Dessa forma, para encontrar os vértices do dual do octaedro, devemos determinar o baricentro de cada triângulo.

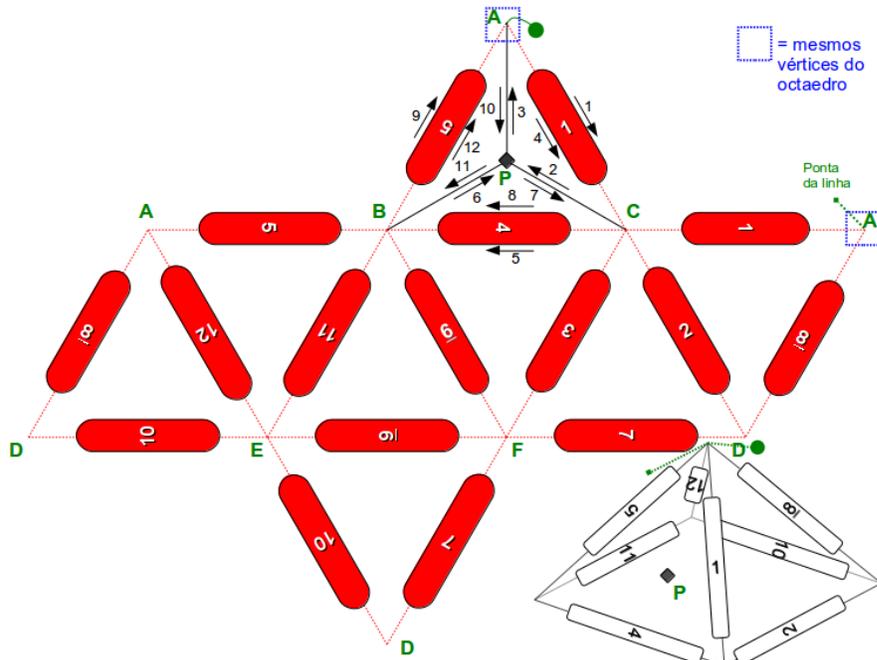


Figura 120 - 2ª Sequência: Baricentro do triângulo ABC

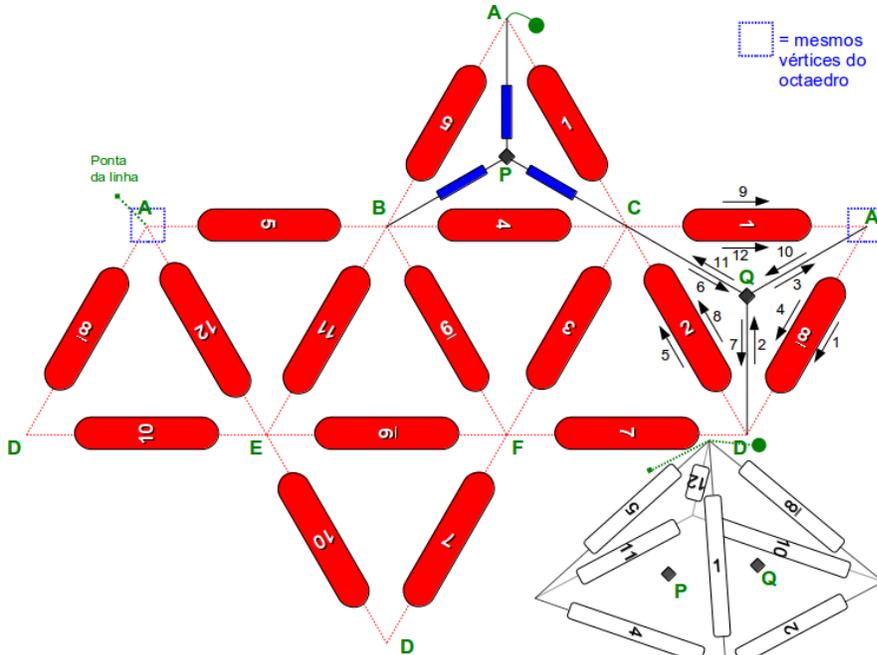


Figura 121 - 3ª Sequência: Baricentro do triângulo ACD

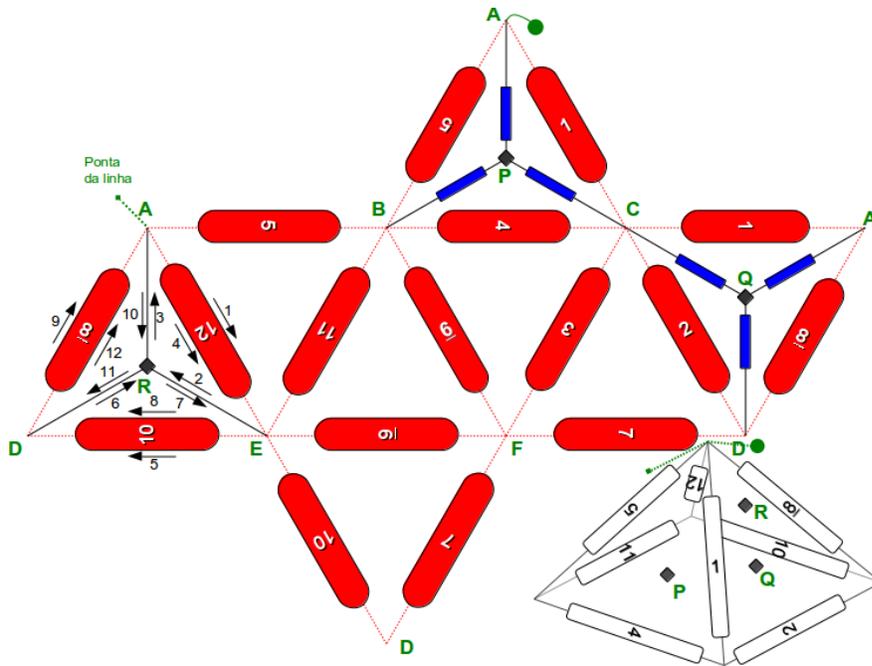


Figura 122 - 4ª Sequência: Baricentro do triângulo ADE

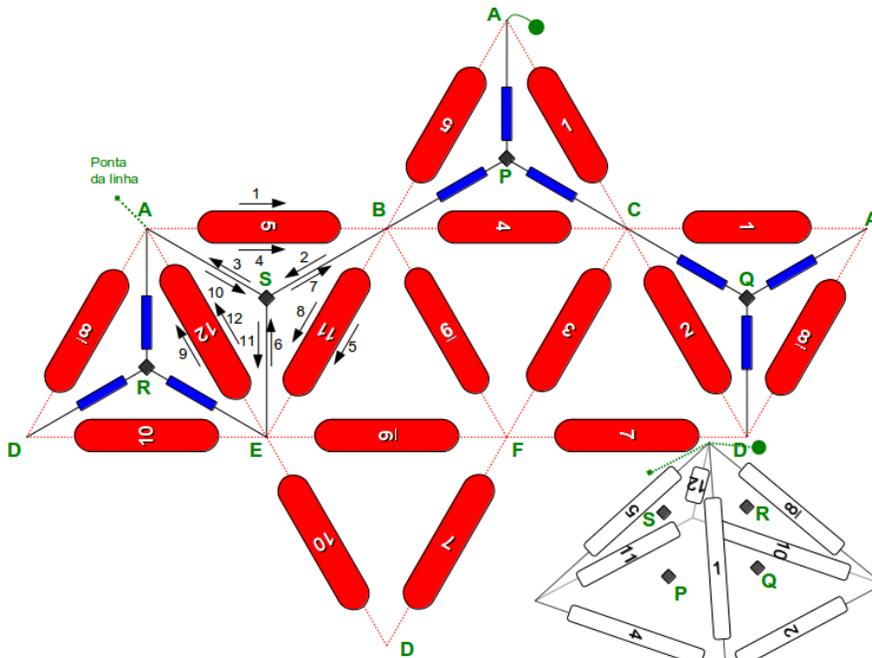


Figura 123 - 5ª Sequência: Baricentro do triângulo ABE

Para determinar o baricentro dos triângulos BCF , CDF e EDF , conforme indicado na figura 124, levemos a ponta da linha passando pelos canudos 5 e 6:

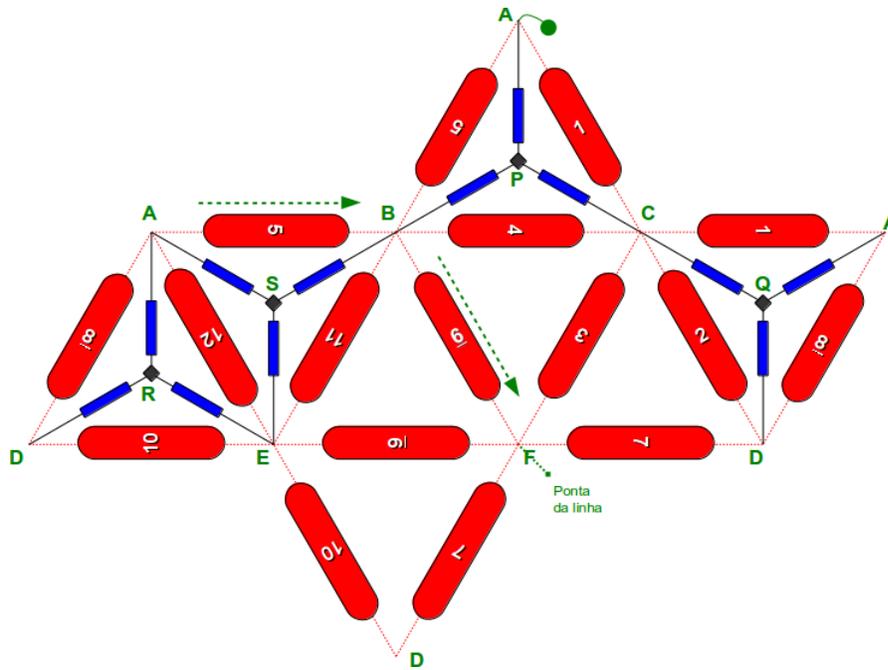


Figura 124 - Visualização do octaedro planificado

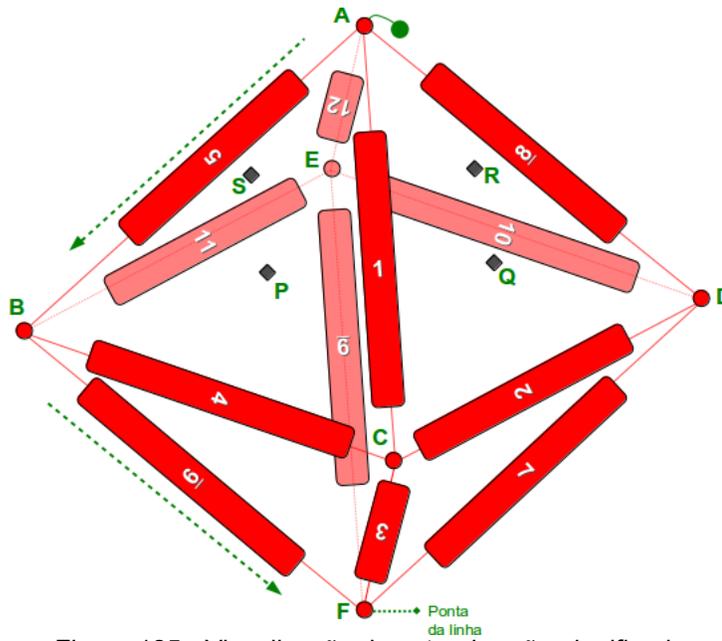


Figura 125 - Visualização do octaedro não planificado

A seguir, determinamos o baricentro dos triângulos BCF , CDF e EDF :

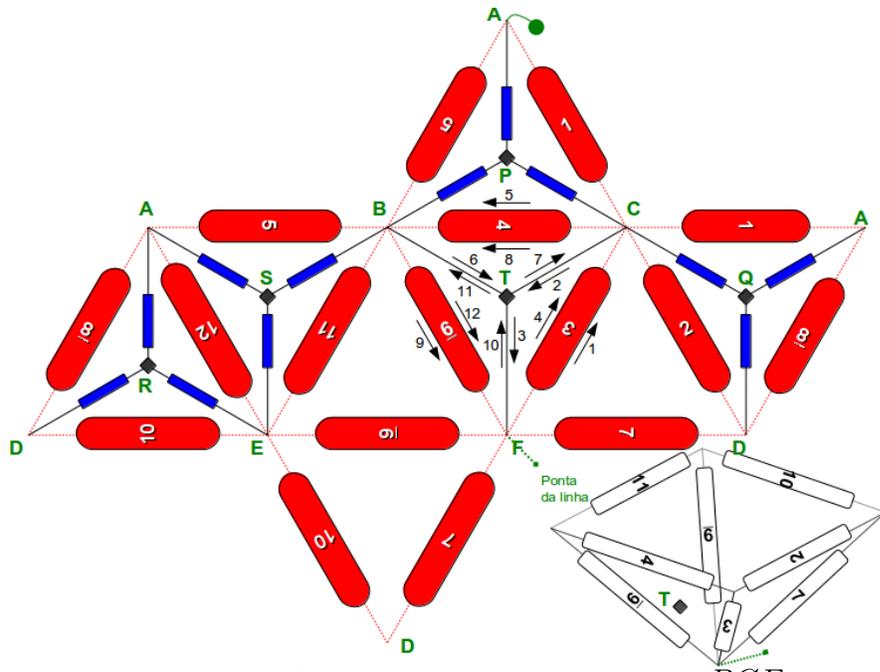


Figura 126 - 6ª Sequência: Baricentro do triângulo BCF

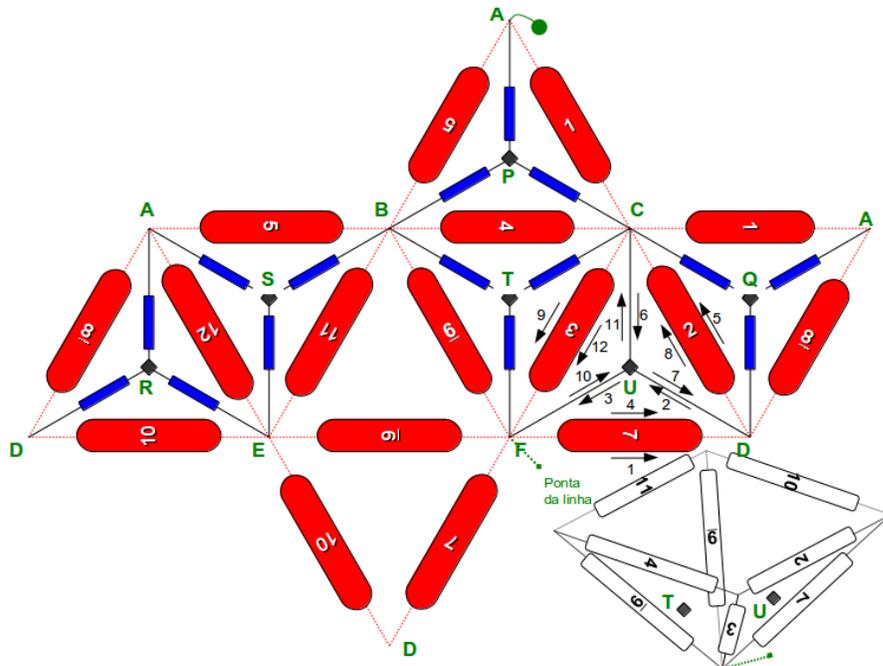


Figura 127 - 7ª Sequência: Baricentro do triângulo CDF

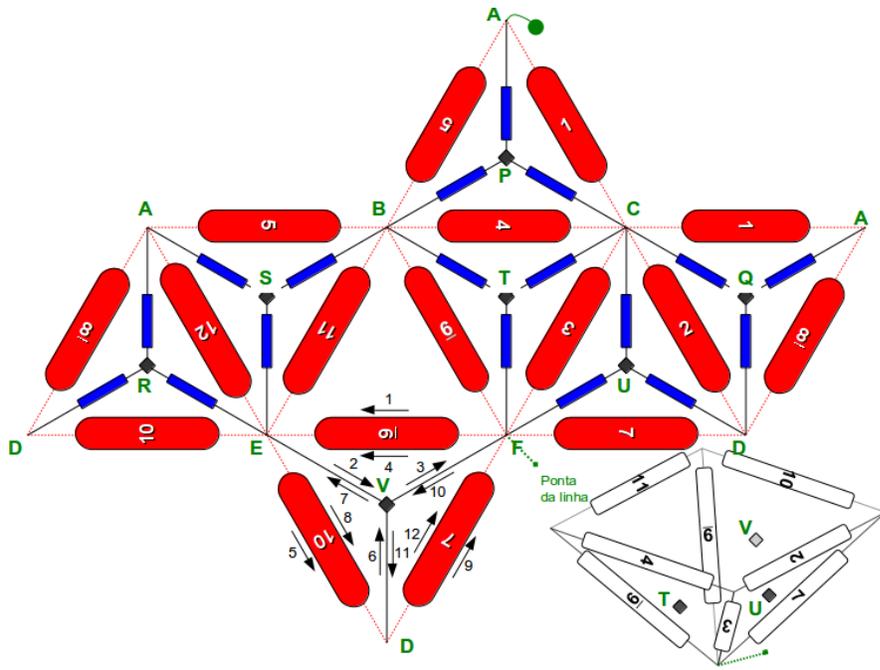


Figura 128 - 8ª Sequência: Baricentro do triângulo DEF

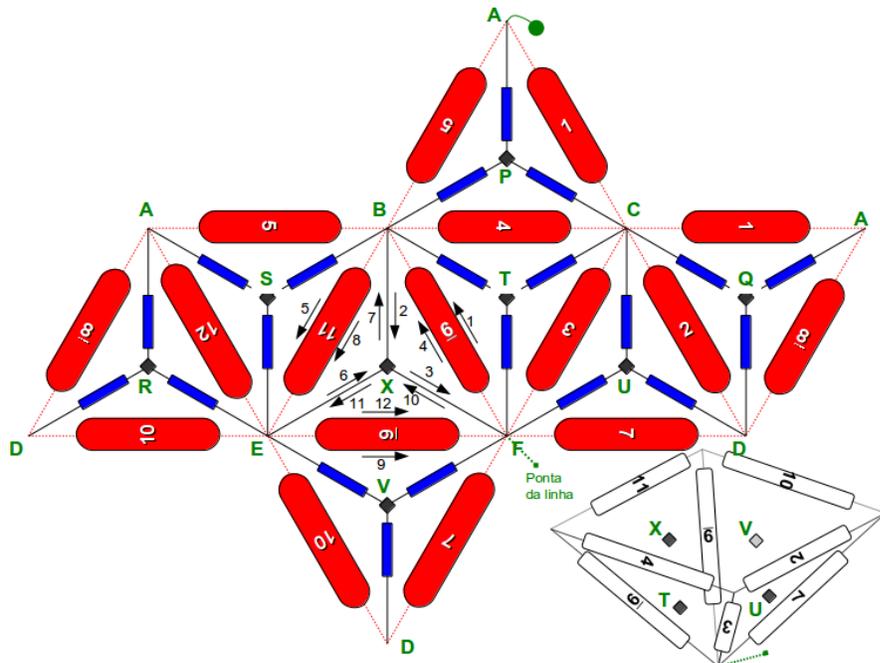


Figura 129 - 9ª Sequência: Baricentro do triângulo BEF

Para finalizar com um nó, conforme indicado na figura 130, levemos a ponta da linha passando pelos canudos 7 e 8:

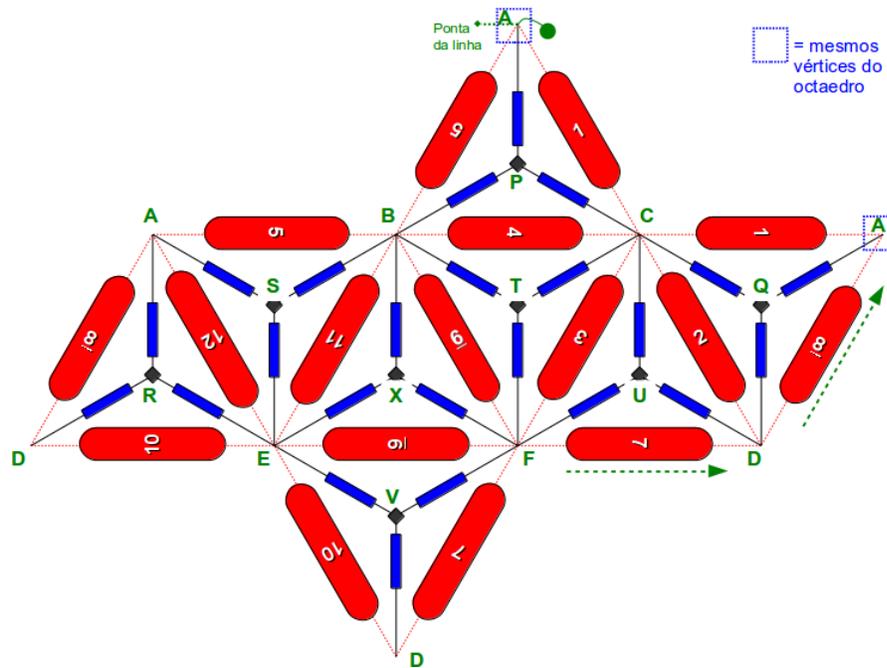


Figura 130 - Visualização do octaedro planificado

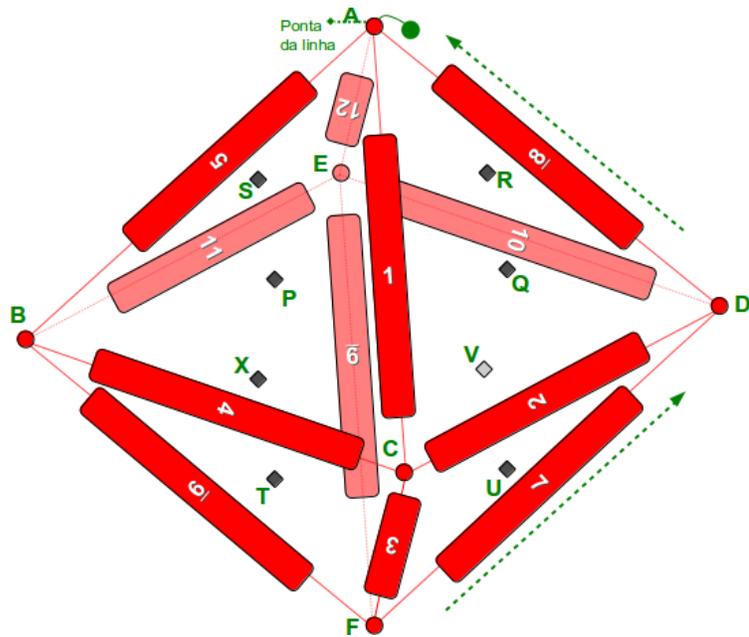


Figura 131 - Visualização do octaedro não planificado

Conforme indicado no item 3.2, realizar a montagem do hexaedro regular $PQRSTUVX$ (6ª Sequência).

Ao montar o dual do octaedro $ABCDEF$ (hexaedro regular $PQRSTUVX$), una o vértice com o baricentro de cada triângulo realizando um laço.

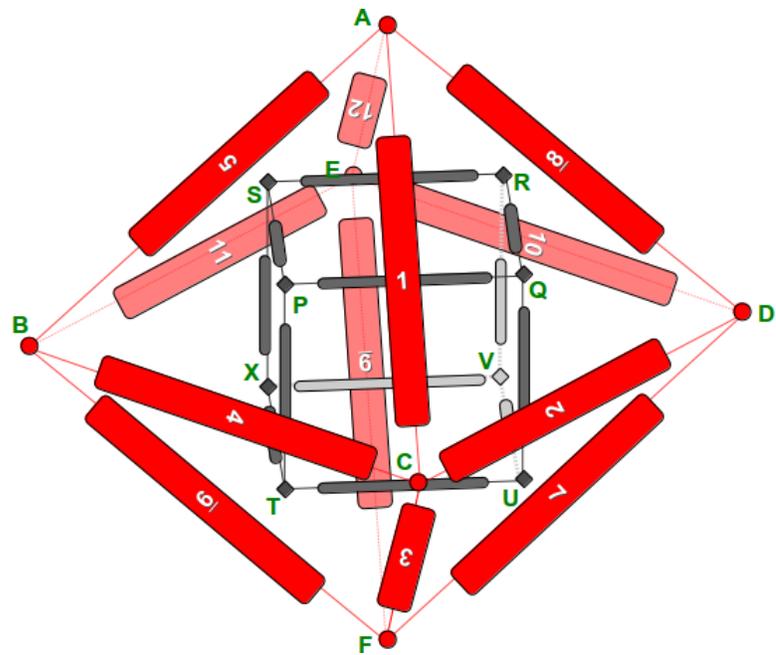


Figura 132

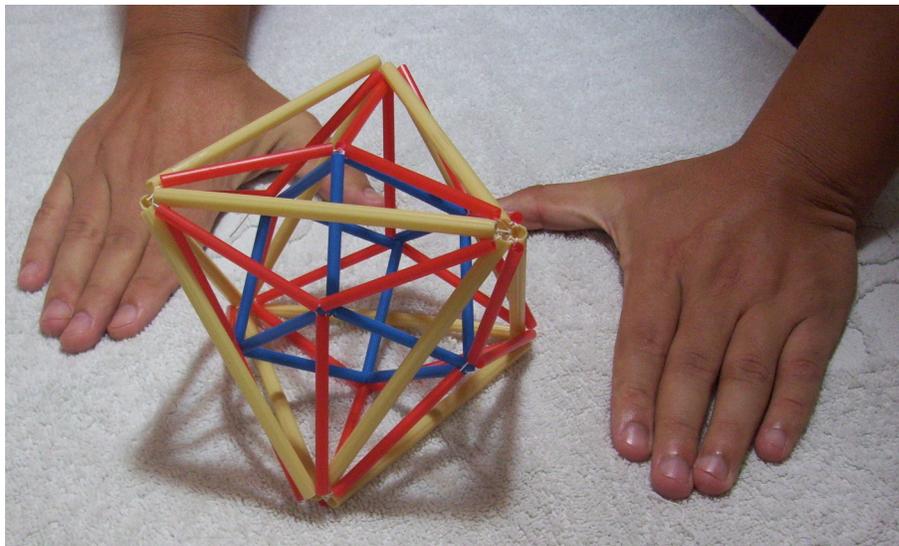


Figura 133

4.4. Explorando as novas tecnologias na construção do Octaedro Regular e seu Dual

4.4.1. Girar, Eixo e Tamanho

Apresentamos um applet desenvolvido no software GeoGebra para observarmos a construção passo a passo apresentada nos itens anteriores do modelo esqueleto das arestas e particularidades do octaedro regular. O applet em questão

pode ser encontrado no link <http://tube.geogebra.org/material/show/id/Wm4jkw8g>.

Além de acompanhar passo a passo a construção, é possível alterar o tamanho do octaedro, girá-lo em torno dos 3 eixos, exibir somente o dual do octaedro, detalhar individualmente cada um dos seus elementos e aprofundar os estudos desse poliedro.

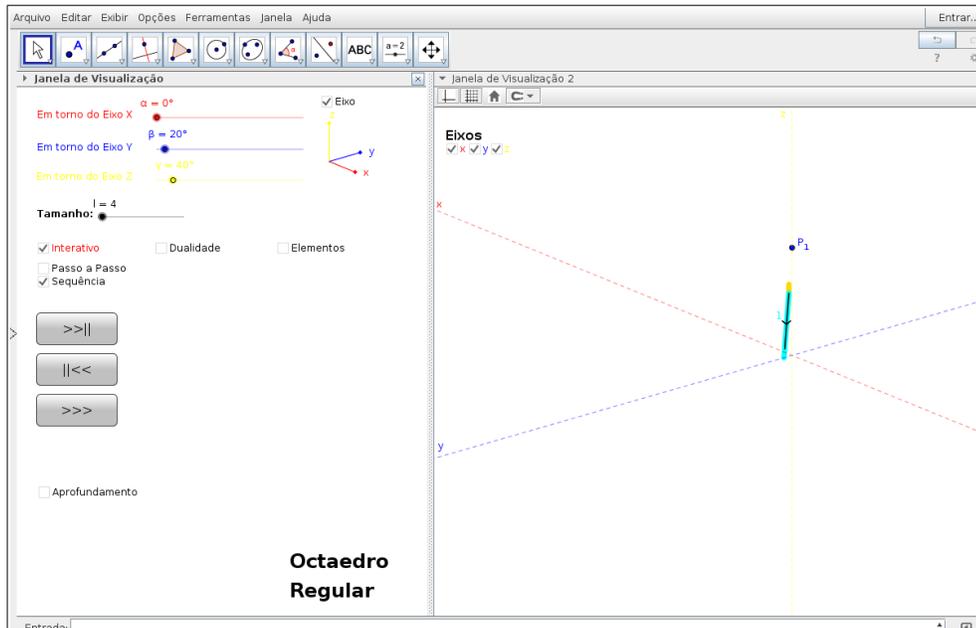


Figura 134

Conforme exibido na figura 134, temos 4 opções de interação: Interativo, Dualidade, Elementos e Aprofundamento.

É possível exibir/ocultar e girar em torno dos três eixos em todas as opções de interação. Já, alterar o tamanho do octaedro na tela é possível somente nas duas primeiras opções.

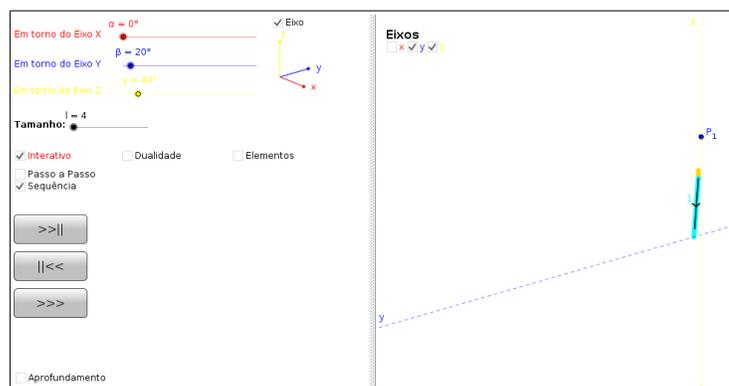


Figura 135

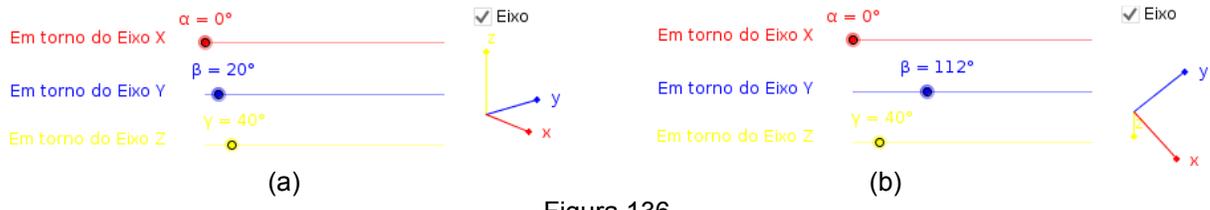


Figura 136

Na figura 135 podemos mostrar somente os eixos y e z, selecionando a caixa de seleção Eixo e desmarcando a caixa de seleção x. Para não exibir nenhum eixos, desmarque a caixa de seleção Eixo. Já a figura 136 b), giramos em torno do eixo y e mantemos fixos os eixos x e z. Assim, durante o processo de construção do octaedro, a possibilidade de girá-lo em torno dos eixos permite uma melhor visualização do poliedro.

4.4.2. Interativo

Nessa situação temos 2 opções: Passo a Passo e Sequência.

4.4.2.1. Interativo - Passo a Passo

Na opção Passo a Passo, conforme exibido na figura 137, temos 3 botões:

- (Próximo): Avança com a linha passo a passo.
- (Anterior): Retrocede com a linha passo a passo.
- (Início): Vai ao Início da linha (representado pelas Figuras 134 e 135).

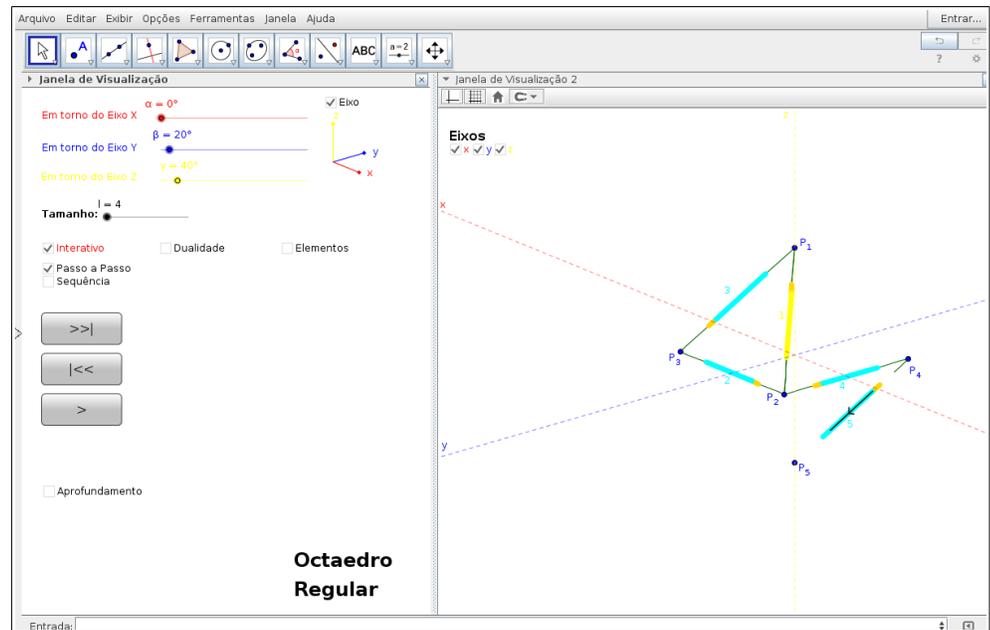


Figura 137

A figura 137 representa a posição do octaedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 136 a). Já a figura 138 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 136 b).

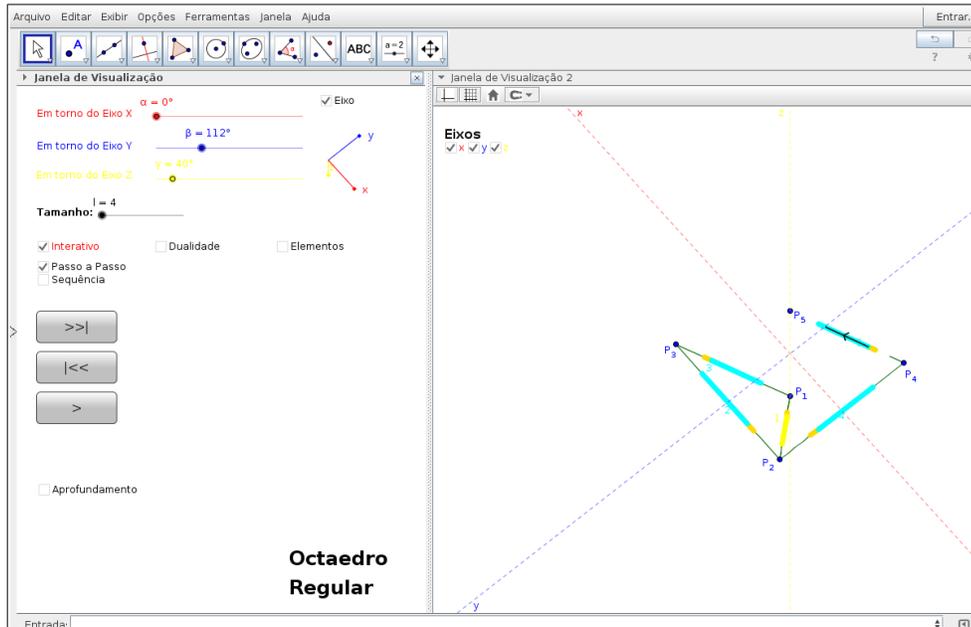


Figura 138

4.4.2.2. Interativo - Sequência

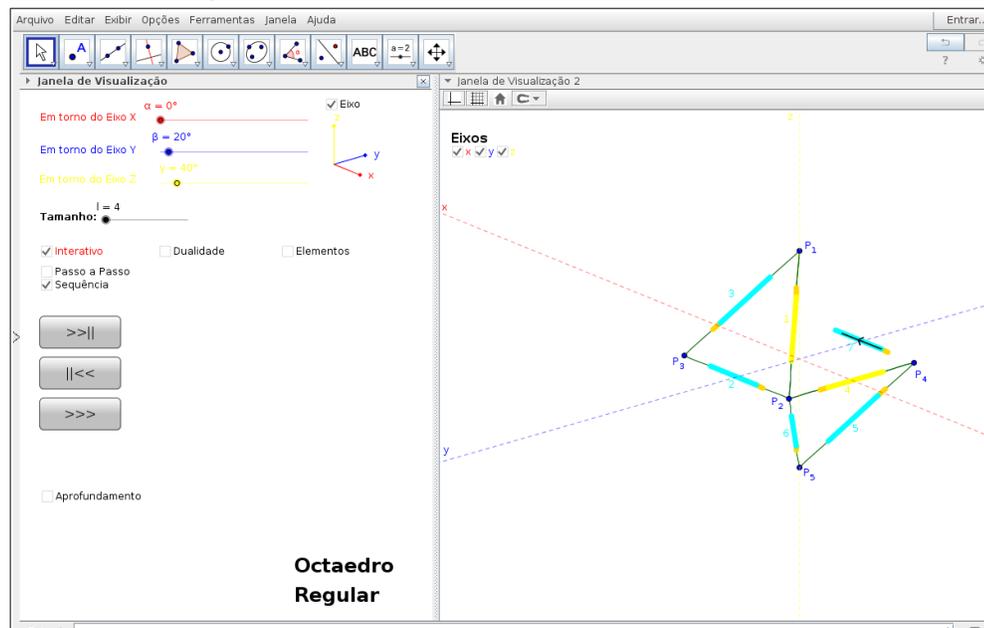


Figura 139

Na opção Sequência, conforme exibido na figura 139, temos 3 botões:



(Próximo): Avança com a linha na próxima sequência.



(Anterior): Retrocede com a linha sequência anterior.



(Completo): Exibe todo processo de construção de uma só vez.

Nessa opção, o processo interativo permite realizar diversos passos de uma única vez.

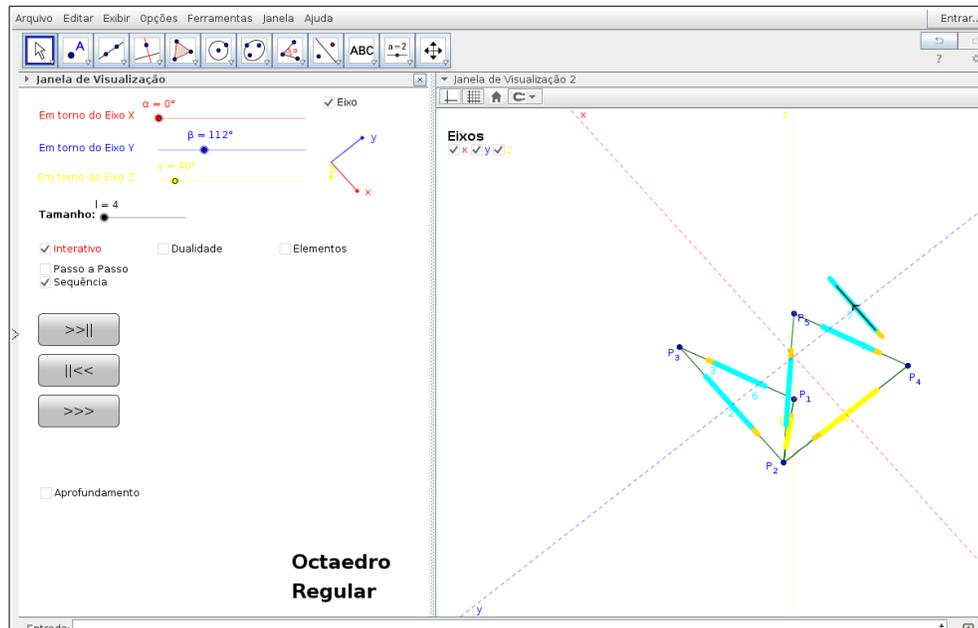


Figura 140

A figura 139 representa a posição do octaedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 136 a). Já a figura 140 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 136 b).

4.4.3. Dualidade

Conforme exibido na figura 141, na opção Dualidade, temos 2 possibilidades: Dual e Octaedro.

Note que o dual do octaedro regular é o hexaedro regular (cubo). Na figura, o dual está representado de azul. Em alguns poliedros de Platão, mesmo utilizando o software de geometria dinâmica, não é tão simples visualizar o seu dual.

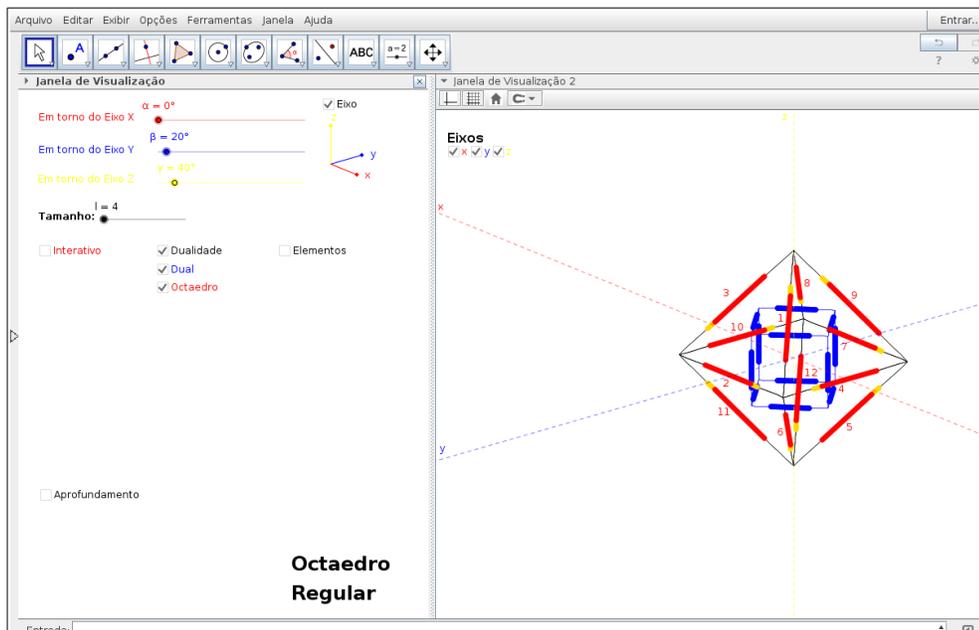


Figura 141

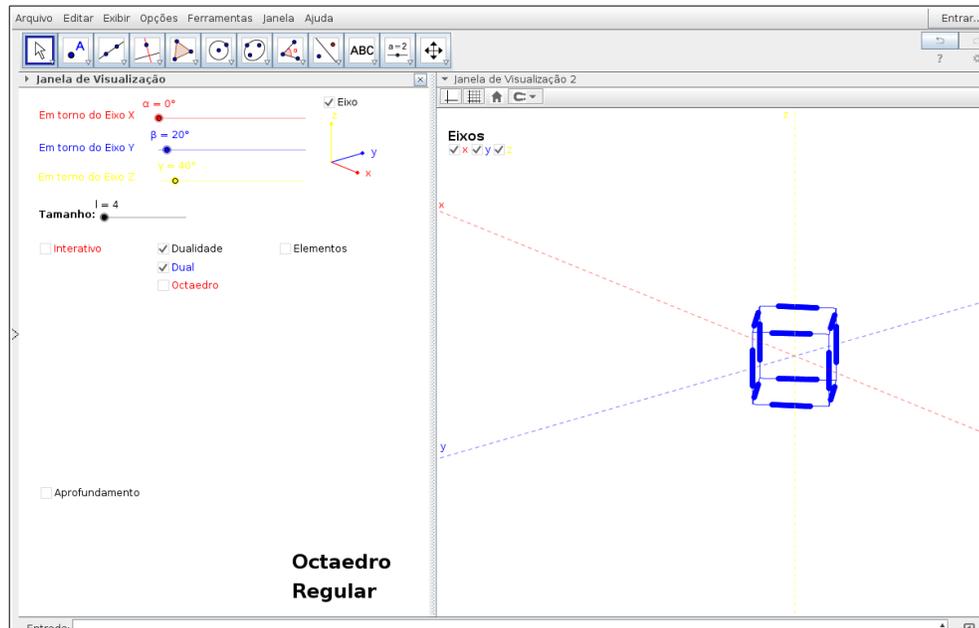


Figura 142

Dessa forma, selecione apenas a opção Dual, conforme exibido na figura 142, para exibir o dual do octaedro. Para exibir somente o octaedro, selecione apenas a opção Octaedro (figura 143).

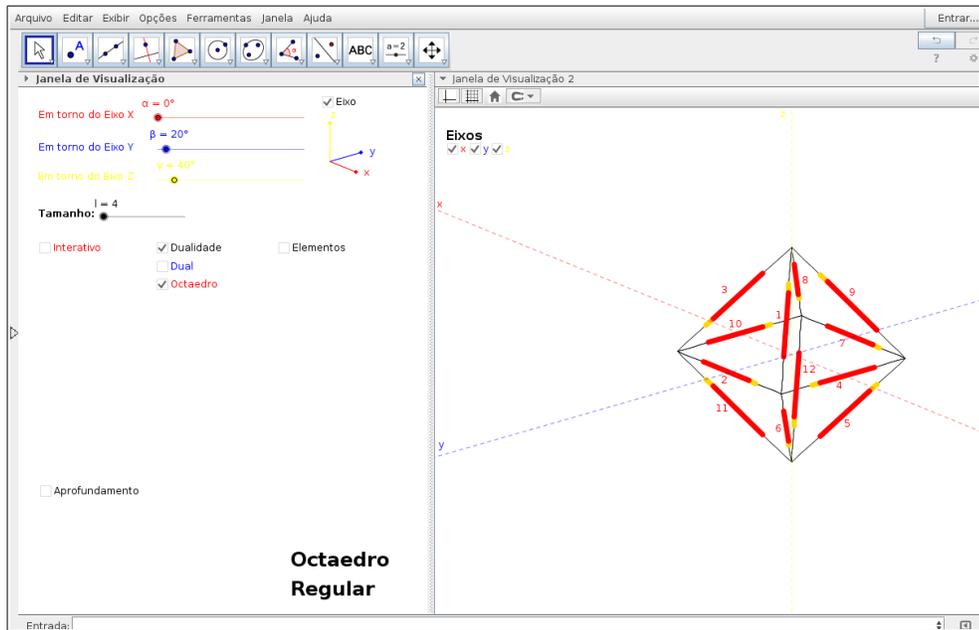


Figura 143

4.4. 4. Elementos

Nessa situação temos 3 opções: Vértices, Arestas e Faces.

Conforme exibido na figura 144, todos os elementos podem ser exibidos individualmente através da caixa de seleção. Note que o octaedro tem 8 faces, 6 vértices e 12 arestas, conforme detalhes apresentados do lado direito da figura.

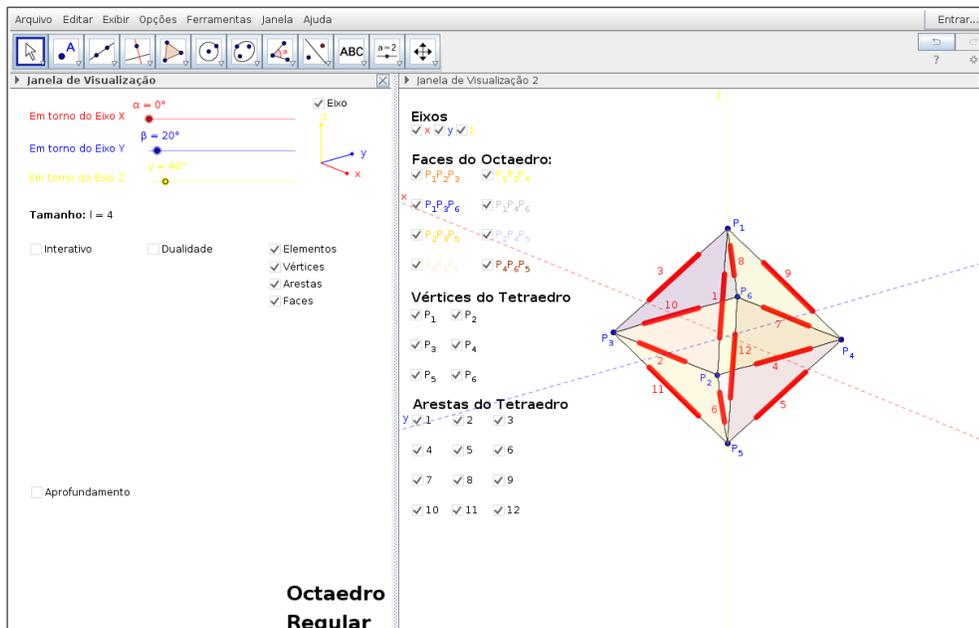


Figura 144

Assim, se desejarmos exibir algumas opções de um elemento específico, basta selecionar apenas um elemento do lado esquerdo e as opções do lado direito. Outra situação é visualizada na figura 145, em que exibimos alguns canudos e apenas quatro faces.

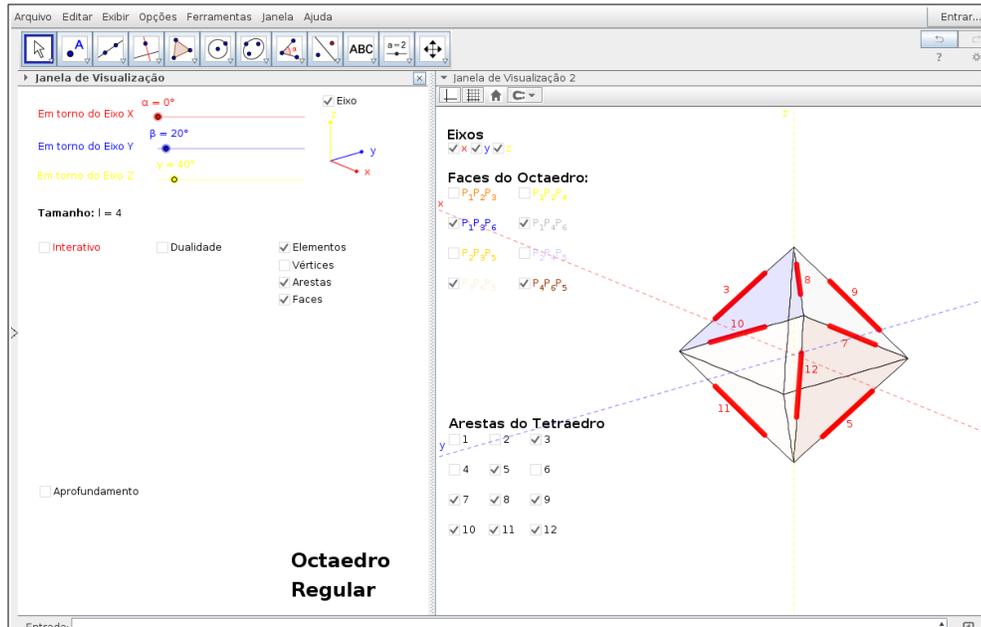


Figura 145

4.4.5. Aprofundamento

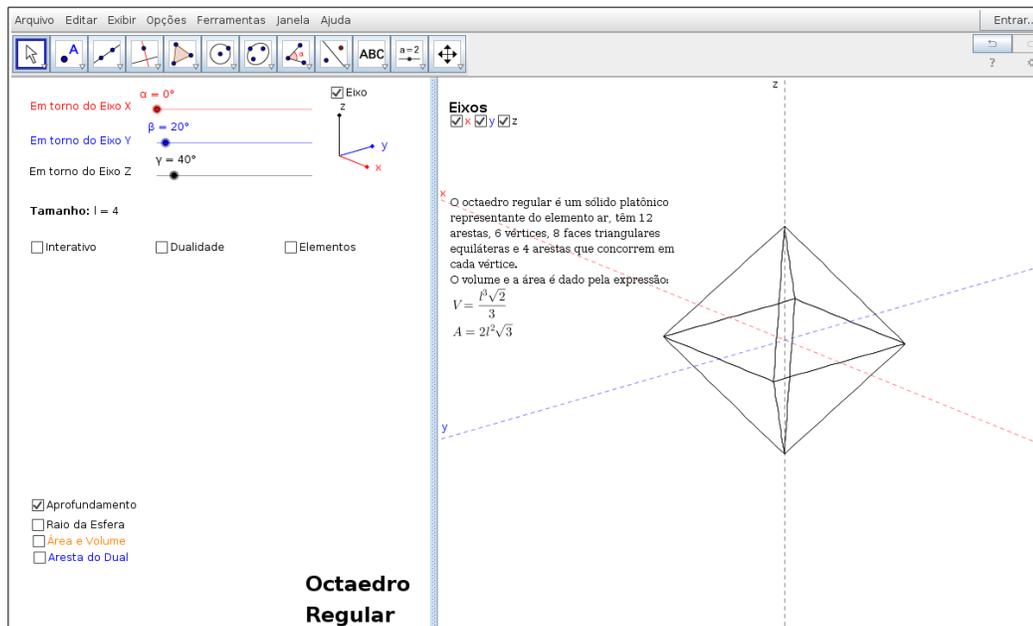


Figura 146

Conforme exibido na figura 146, na opção Aprofundamento, temos 3 possibilidades: Raio da Esfera; Área e Volume; e Aresta do Dual.

4.4.5.1. Aprofundamento - Raio da Esfera

Conforme exibido na figura 147, na opção Raio da Esfera⁴⁶ do item Aprofundamento, temos 3 possibilidades: Centro da Esfera, Raio da Esfera Circunscrita e Raio da Esfera Inscrita.

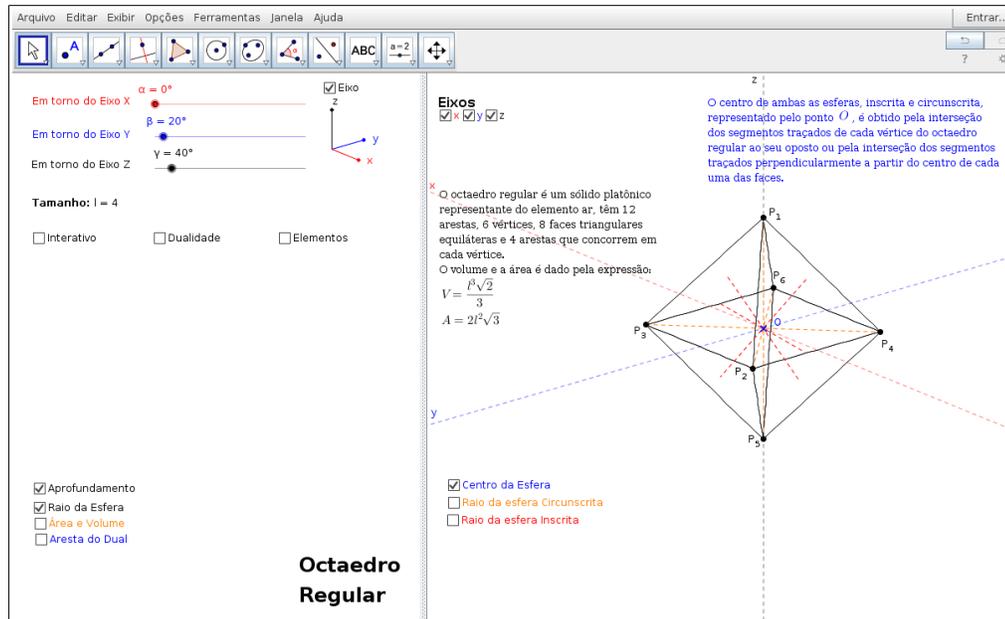


Figura 147

4.4.5.1.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro

Nessa figura 147, podemos observar que o centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O , é obtido a partir da interseção dos segmentos traçados de cada vértice do octaedro regular ao seu oposto ou pela interseção dos segmentos traçados perpendicularmente a partir do centro de cada uma das faces.

4.4.5.1.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita

Na figura 148, o raio da esfera circunscrita é a distância entre o centro da esfera e o seus vértices. Note que ao decompor o octaedro regular em duas pirâmides regulares de base quadrada, a altura da pirâmide é o raio da esfera circunscrita, ou seja, metade da diagonal da base.

46 Conforme apresentado na seção 4.1.4.

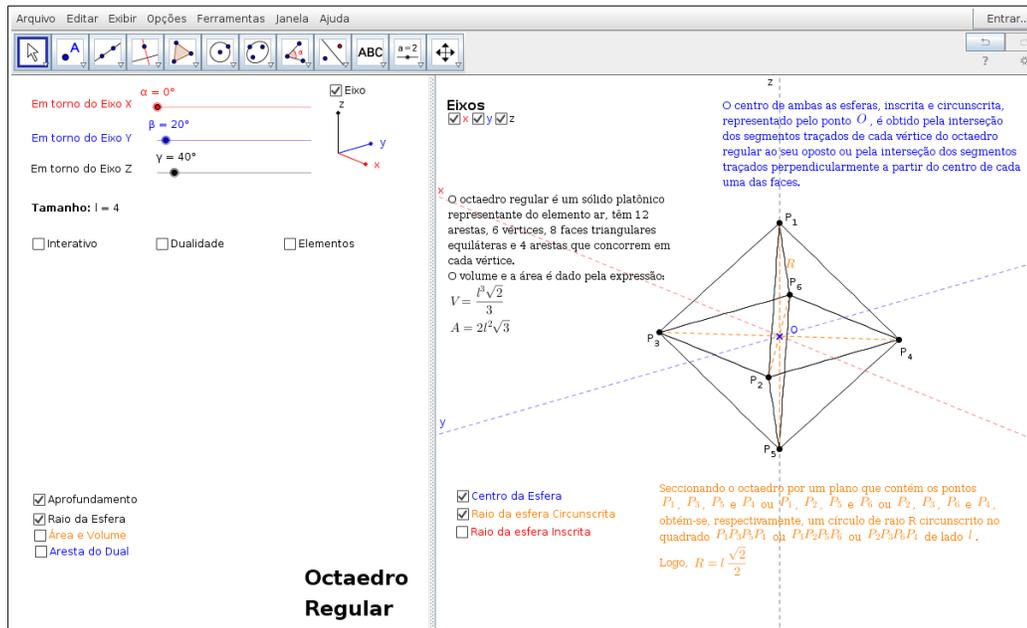


Figura 148

4.4.5.1.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita

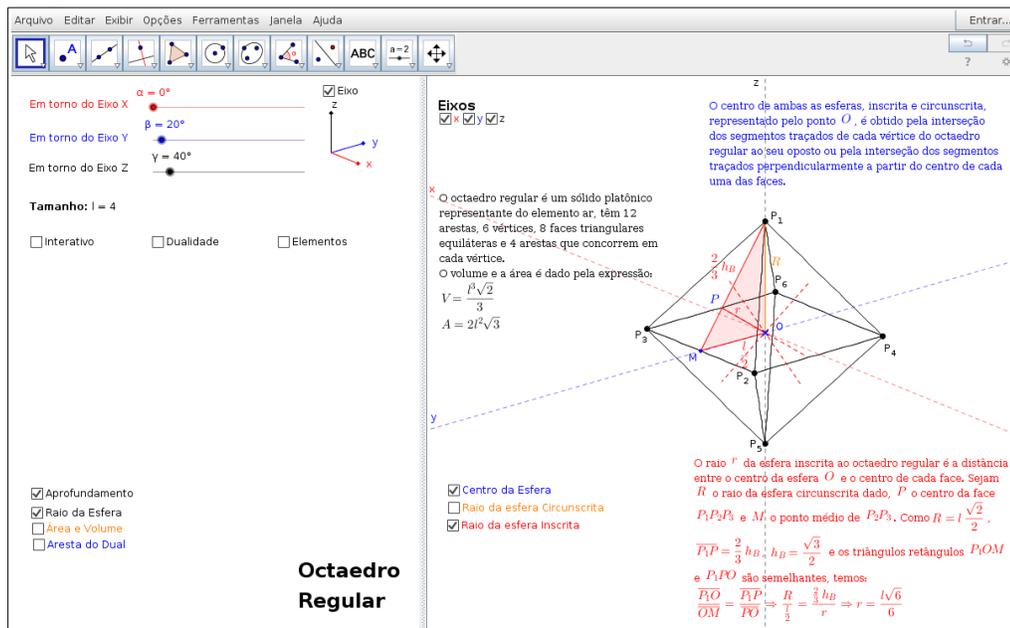


Figura 149

Conforme exibido na figura 149, o raio da esfera inscrita é a distância entre o centro da esfera e o centro de cada uma das faces.

4.4.5.2. Aprofundamento - Área e Volume

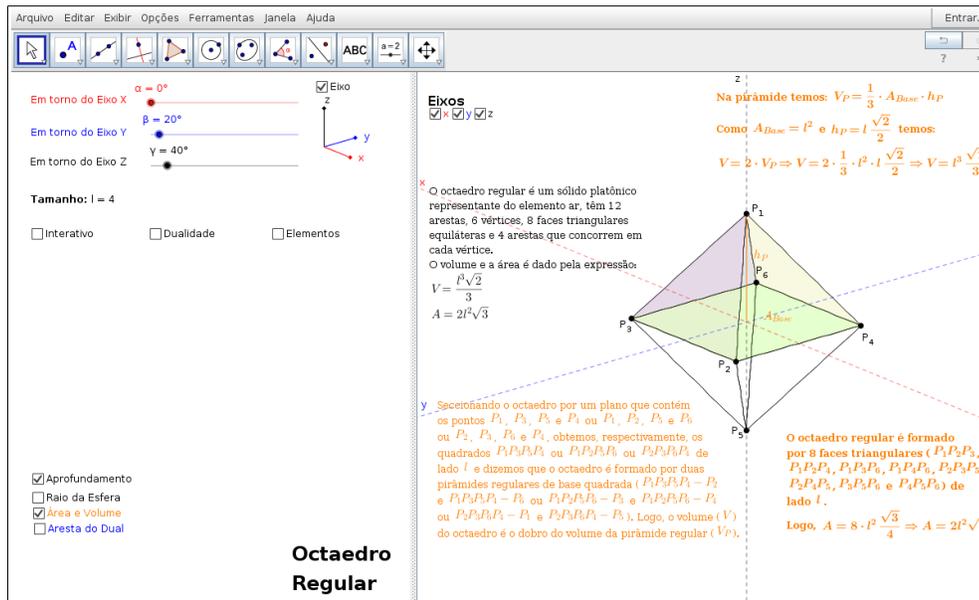


Figura 150

Conforme exibido na figura 150, o octaedro regular é formado por 8 faces triangulares. Logo, a área é oito vezes o valor da área de uma das faces⁴⁷. Por outro lado, o octaedro pode ser visto como duas pirâmides regulares de base quadrada de lado l . Logo, o volume é dado pelo dobro do volume da pirâmide regular⁴⁸.

4.4.5.4. Aprofundamento - Aresta do Dual

Como o hexaedro regular é o dual do octaedro regular, para calcular o tamanho da aresta do dual na figura 151, decomparamos o sólido em duas pirâmides de base quadrada e consideramos duas faces adjacentes da pirâmide. Em seguida, vamos obter triângulos semelhantes traçando as alturas de ambas as faces, ligando o pé dessas alturas e o centro de cada uma das faces adjacentes. Como as faces da pirâmide são triângulos equiláteros, conhecendo a altura do triângulo equilátero, a distância entre os pés das alturas das faces e a distância entre o vértice da pirâmide e o centro da face, aplicamos⁴⁹ semelhança de triângulo e encontramos o comprimento da aresta do dual que corresponde a ligação entre os centros de faces adjacentes.

47 Conforme apresentado na seção 4.1.2.

48 Conforme apresentado na seção 4.1.3.

49 Conforme apresentado na seção 4.1.5.

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Entrar...

Eixo
 Em torno do Eixo X $\alpha = 0^\circ$
 Em torno do Eixo Y $\beta = 20^\circ$
 Em torno do Eixo Z $\gamma = 40^\circ$

Tamanho: $l = 4$

Interativo Dualidade Elementos

Aprofundamento
 Raio da Esfera
 Área e Volume
 Aresta do Dual

Octaedro Regular

O octaedro regular é um sólido platônico representante do elemento ar. Tem 12 arestas, 6 vértices, 8 faces triangulares equiláteras e 4 arestas que concorrem em cada vértice. O volume e a área é dado pela expressão:
 $V = \frac{l^3 \sqrt{2}}{3}$
 $A = 2l^2 \sqrt{3}$

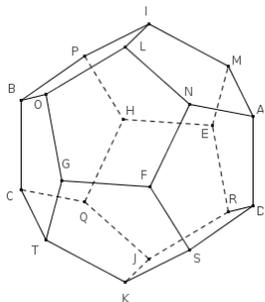
No quadrado $P_2P_3P_4P_1$, o ponto M é médio de P_3P_2 e o ponto N é médio de P_2P_3 . Como P é o baricentro de $P_1P_2P_3$ e o ponto Q é o baricentro de $P_1P_2P_4$ temos que $\overline{P_1P} = \frac{2}{3} \overline{P_1M}$ e $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$. Assim, pelo caso de congruência LAL , os triângulos P_1PQ e P_1MN são semelhantes.
 Logo, $\frac{\overline{P_1M}}{\overline{P_1P}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \frac{\overline{P_1M}}{\frac{2}{3} \overline{P_1M}} = \frac{l \frac{\sqrt{2}}{2}}{\overline{PQ}} \Rightarrow \overline{PQ} = l \frac{\sqrt{2}}{3}$

Figura 151

Capítulo 5 - Dodecaedro Regular

5.1. Revisão Teórica

5.1.1. Introdução

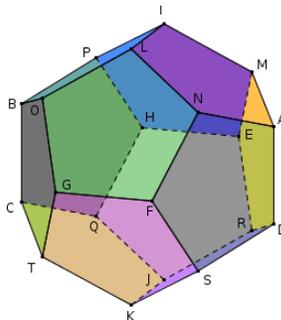


Segundo Platão, o dodecaedro representa a quintessência que permeava a tudo no universo, sendo o poliedro mais próximo da Esfera, a forma perfeita.

Esse poliedro regular é formado por 20 vértices ($A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S$ e T), 30 arestas ($\overline{AD}, \overline{DS}, \overline{SK}, \overline{KT}, \overline{TC}, \overline{CB}, \overline{BP}, \overline{PI}, \overline{IM}, \overline{MA}, \overline{AN}, \overline{NF}, \overline{FG}, \overline{GT}, \overline{CQ}, \overline{QH}, \overline{HE}, \overline{EM}, \overline{IL}, \overline{LO}, \overline{OB}, \overline{DR}, \overline{RJ}, \overline{JK}, \overline{LN}, \overline{OG}, \overline{FS}, \overline{RE}, \overline{JQ}$ e \overline{HP}), 12 faces pentagonais⁵⁰ ($ADSFN, SFGTK, DSKJR, KJQCT, RJQHE, ADREM, EMIPH, PHQCB, CTGOB, GOLNF, AMILN$ e $BPILO$) e 3 arestas que concorrem em cada vértice.

Nas próximas seções desse capítulo, vamos apresentar propriedades (área, volume, raios das esferas inscrita e circunscrita) e construções (inscrição do hexaedro regular, inscrição do tetraedro regular, inscrição do octaedro regular, inscrição do retângulo de ouro e aresta do dual) desse sólido.

5.1.2. Cálculo da área do dodecaedro regular



Como o dodecaedro regular é formado por doze faces pentagonais, temos:

$$A = 12 \cdot A_{(5)} \quad (5.1)$$

E conforme apresentado no item 1.3 da seção 3 do anexo 1, a área de um pentágono regular é dada por

$$A_{(5)} = l^2 \frac{\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{4}$$

Dessa forma, substituindo $A_{(5)}$ em (5.1) temos:

⁵⁰ A face do dodecaedro regular é um pentágono e conforme apresentado no item 1.1 da seção 3 do anexo 1, a razão entre a medida da diagonal e a medida do lado é, a razão áurea, $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ que é chamado número de ouro.

$$A = 12 \cdot l^2 \frac{\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{4} \Rightarrow A = l^2 \left(3\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})} \right)$$

5.1.3. Cálculo do volume do dodecaedro regular

Para calcular o volume (V) do dodecaedro regular⁵¹ de aresta l , conforme exibido na figura 152, vamos decompor o sólido em um cubo ($MNOPQRST$) de aresta c e seis sólidos geométricos ($MNOPIL$, $MNSRDA$, $NOTSFG$, $OPQTCB$, $PMRQHE$ e $RSTQJK$).

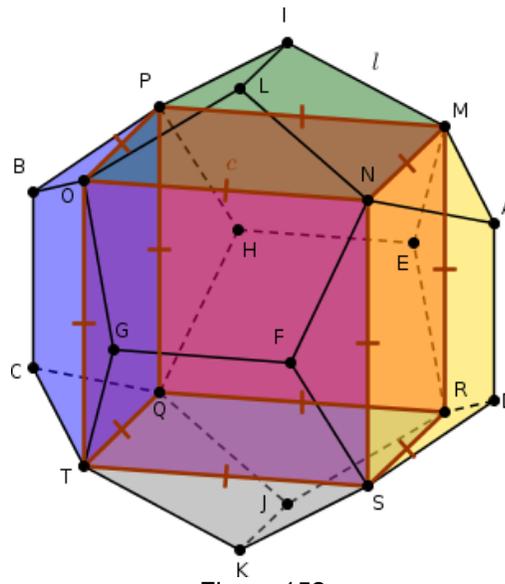


Figura 152

Note que as arestas do cubo representam uma diagonal de cada face do dodecaedro, ou seja, $c = \phi \cdot l$.

E, conforme apresentado na seção 3.1.1 do capítulo 3, o volume do cubo é dado por $V_C = \phi^3 l^3$.

Por outro lado, como o volume dos sólidos geométricos são iguais, o volume do dodecaedro é dado por $V = V_C + 6V_S$ onde V_S é o volume do sólido geométrico. Então

$$V = \phi^3 l^3 + 6V_S \tag{5.2}$$

A seguir, identificamos cada um dos elementos do sólido geométrico.

51 Na seção 4 do anexo 2 mostramos um forma diferente para calcular o volume do dodecaedro regular.

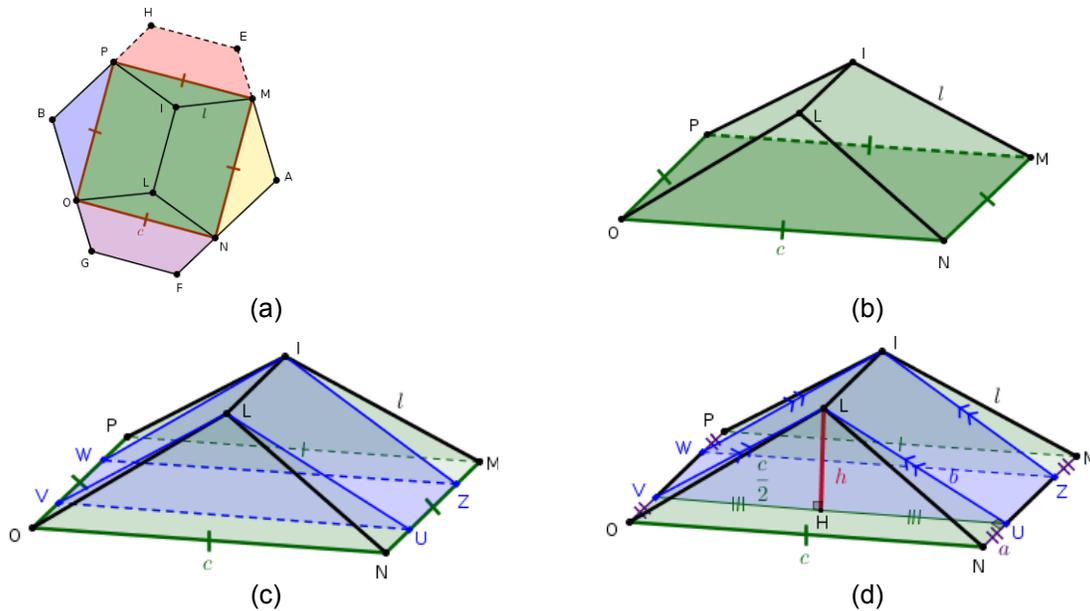


Figura 153

Na figura 153, como indicado em a), observamos que o sólido $MNOPIIL$ é formado pelas arestas \overline{MI} , \overline{NL} , \overline{OL} , \overline{PI} e \overline{IL} e as diagonais \overline{MN} , \overline{NO} , \overline{OP} e \overline{PM} das faces $AMILN$, $GOLNF$, $BPILO$ e $EMIPH$, respectivamente, do dodecaedro.

No item b) dessa figura, notamos que o sólido tem 5 faces sendo uma quadrada ($MNOP$) de lado c , duas triangulares (IMP e LNO isósceles) de lados l , l e c e duas trapezoidais ($MNL I$ e $OPIL$ isósceles) de lados l , l , l e c .

Já no item d), seja b a altura dos trapézios, então os triângulos NUL , MZI , OVL e PWI são retângulos e congruentes. Logo, $\overline{MZ} = \overline{UN} = \overline{OV} = \overline{WP} = a$, $\overline{VL} = \overline{WI} = \overline{ZI} = \overline{UL} = b$ e $\overline{IL} = \overline{IM} = \overline{IP} = \overline{LN} = \overline{LO} = \overline{ZU} = \overline{VW} = l$ o que implica

$$c = l + 2a \quad (5.3)$$

e

$$a^2 + b^2 = l^2 \quad (5.4)$$

Dessa forma, conforme exibido na figura 153 c), o volume do sólido $MNOPIIL$, representado por V_S , é a soma dos volumes do prisma triangular⁵² $LVUIWZ$ e das peças das extremidades ($PMZWI$ e $NOVUL$).

52 O prisma triangular $LVUIWZ$ é um poliedro, cuja superfície é formada por dois triângulos iguais e paralelos (LVU e IWZ isósceles de lado b , b e c) chamados de bases e três faces laterais ($UVWZ$ de lados c e l , $VWIL$ e $ZULI$ de lados l e b).

Consideremos h a altura do sólido geométrico, conforme exibido na figura 153 d), e H é o pé dessa altura. Como a base do prisma triangular é formada por triângulos isósceles (LVU e IWZ), h é também altura desses triângulos e H é o pé da altura do triângulo LVU . Assim, o plano que corta os pontos I , L e H divide o prisma triangular na metade e unindo as faces laterais $VWIL$ e $ZULI$ temos um bloco retangular de medidas l , $\frac{c}{2}$ e h . Por outro lado, unindo as peças das extremidades teremos uma pirâmide de altura h e base retangular $2a$ e c .

Logo,

$$V_S = l \cdot \frac{c}{2} \cdot h + \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot c \cdot h \quad (5.5)$$

Por (5.3), $a = \frac{c-l}{2}$. Substituindo a em (5.4) temos:

$$\left(\frac{c-l}{2}\right)^2 + b^2 = l^2 \Rightarrow b^2 = l^2 - \frac{c^2 - 2cl + l^2}{4}$$

Então

$$b^2 = \frac{3l^2 - c^2 + 2cl}{4} \quad (5.6)$$

Como o triângulo LUV é isósceles de base \overline{UV} , $\overline{UV} = \overline{ZW} = \overline{NO} = c$ e H é ponto médio de \overline{UV} temos $h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = b^2$ pois o triângulo LHV é retângulo.

Então

$$b^2 = \frac{4h^2 + c^2}{4} \quad (5.7)$$

Dentre as propriedades apresentadas na seção 1 do anexo 1, temos $(\phi - 1)\phi = 1$. Como $c = \phi l$, para encontrar a altura do sólido geométrico (h), substituindo (5.6) em (5.7) temos:

$$4h^2 + c^2 = 3l^2 - c^2 + 2cl \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2 - 2c^2 + 2cl}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2 - 2\phi^2 l^2 + 2\phi l^2}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{h^2}{l^2} = \frac{3}{4} - \frac{\phi(\phi - 1)}{2} \Rightarrow \frac{h^2}{l^2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{h^2}{l^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{h}{l} = \frac{1}{2}$$

Então

$$h = \frac{l}{2} \quad (5.8)$$

Substituindo (5.3) e (5.8) em (5.5) temos:

$$V_S = l \cdot \frac{c}{2} \cdot h + \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot c \cdot h \xrightarrow{(5.3);(5.8)} V_S = l \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{3} \cdot (c-l) \cdot c \cdot \frac{l}{2} \xrightarrow{c=\phi l}$$

$$V_S = l \cdot \frac{\phi l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{3} \cdot (\phi l - l) \cdot \phi l \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow V_S = \frac{\phi l^3}{4} + \frac{(\phi - 1)\phi l^3}{6}$$

$$V_S = \frac{\phi l^3}{4} \cdot \frac{6}{6} + \frac{l^3}{6} \Rightarrow V_S = \frac{\phi l^3}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{l^3}{6}$$

Então

$$V_S = \frac{l^3}{6} \left(\frac{3\phi}{2} + 1 \right) \quad (5.9)$$

Para calcular o volume do dodecaedro, como $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\phi^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$,

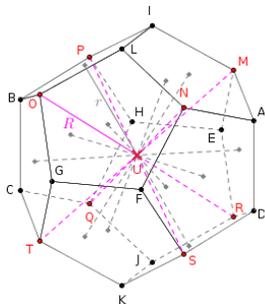
substituindo (5.9) em (5.2), temos:

$$V = \phi^3 l^3 + 6V_S \Rightarrow V = l^3 \phi^3 + 6 \cdot \left[\frac{l^3}{6} \left(\frac{3\phi}{2} + 1 \right) \right] \Rightarrow V = l^3 \left(\phi^3 + \frac{3\phi}{2} + 1 \right) \Rightarrow$$

$$V = l^3 \left[\phi \left(\phi^2 + \frac{3}{2} \right) + 1 \right] \Rightarrow V = l^3 \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} \right) + 1 \right] \Rightarrow$$

$$V = \left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} \right) l^3.$$

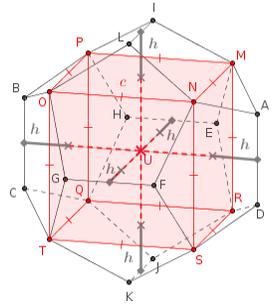
5.1.4. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita do dodecaedro regular



O centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto U , é obtido a partir da interseção dos segmentos traçados de cada vértice do dodecaedro regular ao seu oposto ou pela interseção dos segmentos traçados a partir dos centros de faces opostas.

A distância entre o centro da esfera e o centro de uma face desse sólido é chamada de raio da esfera inscrita e representado por r . Já a distância entre o centro da esfera e um vértice do sólido é chamada de raio da esfera circunscrita e representado por R .

Dessa forma, para calcular os raios das esferas inscrita e circunscrita, vamos encontrar a distância entre as arestas \overline{AD} e \overline{BC} ou \overline{FG} e \overline{HE} ou \overline{IL} e \overline{JK} que será representada por H . E, conforme apresentado anteriormente, decomparamos o dodecaedro regular em um cubo de aresta c e seis sólidos geométricos de altura h .



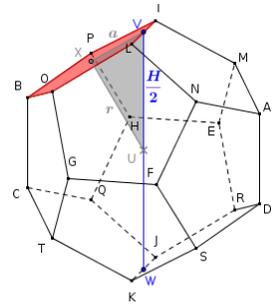
Dentre as propriedades apresentadas na seção 1 do anexo 1, temos

$\phi^2 = \phi + 1$. Como $c = \phi l$, $h = \frac{l}{2}$ e $\phi^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ temos:

$$H = c + 2h \Rightarrow H = \phi l + l \Rightarrow H = (\phi + 1)l \Rightarrow H = \phi^2 l \Rightarrow H = l \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Para calcular o raio r , consideramos a face $BPILO$ e a distância entre as arestas \overline{IL} e \overline{JK} dada por $H = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} l$ e, alguns elementos do pentágono regular, tais como centro (X) e o apótema (a).

Dessa forma, sejam W o ponto médio de \overline{JK} , V o ponto médio de \overline{IL} e U o centro das esferas então $\overline{UX} = r$, $\overline{UV} = \frac{H}{2}$ e o triângulo UXV é retângulo em X .



No item 1.3 da seção 3 do anexo 1, vimos que o apótema de um pentágono regular é dado por

$$a^2 = l^2 \left(\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20} \right).$$

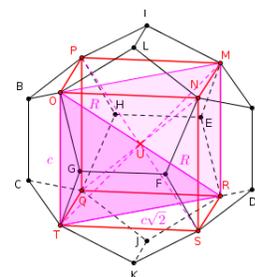
Logo, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{UX}^2 + \overline{XV}^2 = \overline{UV}^2 \Rightarrow r^2 + a^2 = \left(\frac{H}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$r^2 + l^2 \left(\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20} \right) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} l \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$r^2 = l^2 \left(\frac{50 + 22\sqrt{5}}{80} \right) \Rightarrow r = l \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20}.$$

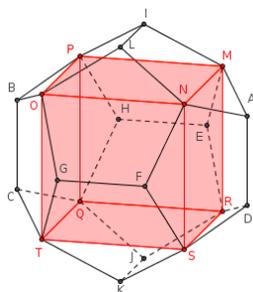
Para calcular o raio R , vamos considerar o hexaedro regular inscrito no dodecaedro e, conforme apresentado na seção 3.1.3 do capítulo 3, para um cudo de aresta c , o raio da esfera circunscrita, é dado por $R = c \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Sendo c a diagonal da face pentagonal do dodecaedro, temos:

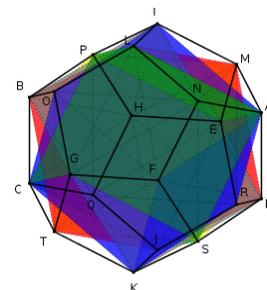
$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \phi l \Rightarrow R = l \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow R = l \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4}$$

5.1.5. Dodecaedro com hexaedro regular inscrito

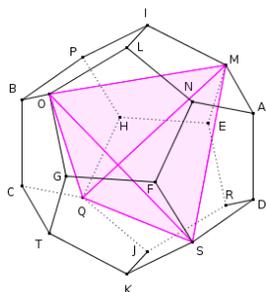


Como as faces do dodecaedro regular são pentágonos, traçando as diagonais \overline{MN} , \overline{NO} , \overline{OP} , \overline{PM} , \overline{QR} , \overline{RS} , \overline{ST} , \overline{TQ} , \overline{MR} , \overline{NS} , \overline{OT} e \overline{PQ} das faces $AMILN$, $GOLNF$, $BPILO$, $EMIPH$, $RJQHE$, $DSKJR$, $SFGTK$, $KJQCT$, $ADREM$, $ADSFN$, $CTGOB$ e $PHQCB$ temos um hexaedro regular (cubo) inscrito de aresta c onde $c = \phi l$.

Logo, a medida da aresta do cubo inscrito vale $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)l$. É válido observar que para montar o cubo $MNOPQRST$ traçou-se uma determinada diagonal de cada uma das faces do dodecaedro. Como o pentágono tem cinco diagonais⁵³, é possível inscrever cinco cubos no dodecaedro.



5.1.6. Dodecaedro com tetraedro regular inscrito



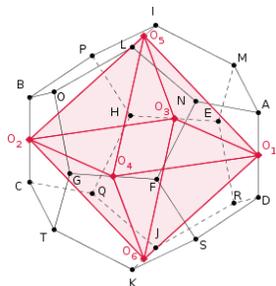
Conforme apresentado na seção 3.1.4 do capítulo 3, o tetraedro regular de aresta $l\sqrt{2}$ está inscrito no cudo de aresta l traçando-se as diagonais da face desse sólido.

Por outro lado, vimos na seção anterior desse capítulo que um cudo de aresta c está inscrito no dodecaedro regular.

53 No anexo 3 mostramos que para um polígono de n lados, o número de diagonais é dada por $d = \frac{n(n - 3)}{2}$

Logo, a medida da aresta do tetraedro regular é dada por $\sqrt{2}c \Rightarrow \sqrt{2}\phi l \Rightarrow l \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{5})}{2}$. Como é possível inscrever dois tetraedros em um cubo e também, inscrever cinco cubos no dodecaedro. Então, é possível inscrever dez tetraedros regulares no dodecaedro.

5.1.7. Dodecaedro com octaedro regular inscrito



Sejam O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 e O_6 os pontos médios de $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{EH}, \overline{FG}, \overline{IL}$ e \overline{JK} , respectivamente. Traçando-se $\overline{O_1O_3}, \overline{O_3O_2}, \overline{O_2O_4}, \overline{O_4O_1}, \overline{O_5O_1}, \overline{O_5O_2}, \overline{O_5O_3}, \overline{O_5O_4}, \overline{O_6O_1}, \overline{O_6O_2}, \overline{O_6O_3}$ e $\overline{O_6O_4}$ temos um octaedro regular $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$.

Conforme apresentado na seção 5.1.4 do capítulo 5, a distância entre as arestas \overline{AD} e \overline{BC} ou \overline{FG} e \overline{HE} ou \overline{IL} e \overline{JK}

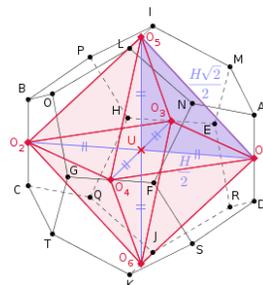
vale $H = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}l$ ou $H = \phi^2 l$. Então, $\overline{O_1O_2} = \overline{O_3O_4} = \overline{O_5O_6} = H$.

Dessa forma, para calcular a medida da aresta do octaedro ($\overline{O_1O_5}$), seja U o centro da esfera então $\overline{O_1U} = \overline{O_5U} = \frac{H}{2}$ e o triângulo O_1UO_5 é retângulo em U .

Logo, $\overline{O_1O_5} = \frac{H\sqrt{2}}{2}$.

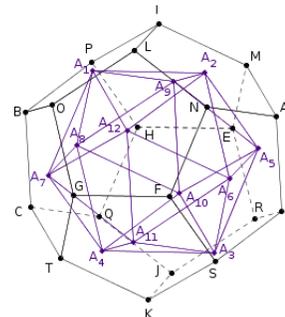
Assim, para $H = \phi^2 l$ temos $\overline{O_1O_5} = l \frac{\sqrt{2}\phi^2}{2}$. E para $H = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}l$ temos

$\overline{O_1O_5} = l \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4}$.



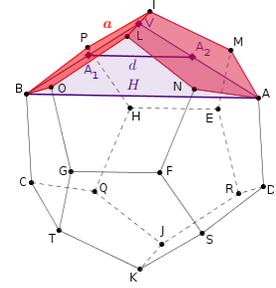
5.1.8. Cálculo da aresta do dual do dodecaedro regular

Sejam os pontos $A_k, k = 1, \dots, 12$ os centros de faces dos pentágonos $BPILO, AMILN, DSKJR, KTCQJ, MADRE, ANFSD, TGOBC, CBPHQ, PIMEH, ERJQH, SFGTK$ e $OLNFG$.



Construímos os segmentos entre os centros de faces adjacentes do sólido e teremos assim, o chamado dual do dodecaedro com as seguintes arestas: $\overline{A_4A_1}$, $\overline{A_4A_9}$, $\overline{A_4A_8}$, $\overline{A_4A_7}$, $\overline{A_4A_{12}}$, $\overline{A_1A_9}$, $\overline{A_9A_8}$, $\overline{A_8A_7}$, $\overline{A_7A_{12}}$, $\overline{A_{12}A_1}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_2A_{10}}$, $\overline{A_2A_5}$, $\overline{A_2A_6}$, $\overline{A_2A_{11}}$, $\overline{A_3A_{10}}$, $\overline{A_{10}A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_1A_5}$, $\overline{A_6A_{11}}$, $\overline{A_{11}A_3}$, $\overline{A_5A_9}$, $\overline{A_6A_1}$, $\overline{A_9A_{10}}$, $\overline{A_{10}A_8}$, $\overline{A_8A_3}$, $\overline{A_3A_7}$, $\overline{A_7A_{11}}$, $\overline{A_{11}A_{12}}$ e $\overline{A_{12}A_6}$.

Para calcular a medida da aresta do dual do dodecaedro regular, representada por $\overline{A_1A_2}$, consideramos as faces $BPILO$ e $AMILN$ do dodecaedro regular, a distância entre as arestas \overline{AD} e \overline{BC} dada por $H = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}l$ ou $H = \phi^2l$ e, alguns elementos do pentágono regular, tais como o apótema (a) e a altura (h).



Dessa forma, sejam A_1 o centro da face pentagonal $BPILO$, A_2 o centro da face pentagonal $AMILN$, V o ponto médio de \overline{IL} , $h^2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{4}$ e $a^2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{20}$.

Como os triângulos A_2A_1V e ABV são semelhantes temos:

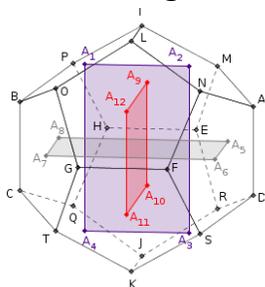
$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1V}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BV}} \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{H}{h} \Rightarrow d = \frac{a}{h} \cdot H \Rightarrow d^2 = \frac{a^2}{h^2} \cdot H^2 \Rightarrow$$

$$d^2 = \frac{l^2 \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{20} \right)}{l^2 \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{4} \right)} H^2 \Rightarrow d^2 = \frac{4}{20} H^2 \Rightarrow d^2 = \frac{1}{5} H^2 \Rightarrow d = \frac{1}{\sqrt{5}} H \Rightarrow d = \frac{\sqrt{5}}{5} H$$

Assim, para $H = \phi^2l$ temos $d = l \frac{\sqrt{5}\phi^2}{5}$. E para $H = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}l$ temos

$$d = l \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}.$$

5.1.9. Retângulo áureo no dodecaedro regular



No dodecaedro regular de aresta l , sejam os pontos A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 , A_6 , A_7 , A_8 , A_9 , A_{10} , A_{11} e A_{12} os centros de faces pentagonais $BPILO$, $AMILN$, $DSKJR$, $KTCQJ$, $MADRE$, $ANFSD$, $TGOBC$, $CBPHQ$, $PIMEH$, $ERJQH$, $SFGTK$ e $OLNFG$.

Traçando os retângulos $A_1A_2A_3A_4$, $A_5A_6A_7A_8$ e $A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ vamos mostrar que eles têm áreas iguais e são áureos.

Seja d a medida da aresta do dual do dodecaedro regular. Para provar que as áreas do retângulo são iguais, temos:

$$\text{a) } \overline{A_1A_4} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_5A_8} = \overline{A_6A_7} = \overline{A_9A_{12}} = \overline{A_{10}A_{11}} = D;$$

$$\text{b) } \overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4} = \overline{A_5A_6} = \overline{A_7A_8} = \overline{A_9A_{10}} = \overline{A_{11}A_{12}} = d$$

Agora analisemos o retângulo $A_1A_2A_3A_4$.

Sejam U o centro das esferas, $\overline{UA_1} = \overline{UA_3} = r$ (raio da esfera inscrita) e $\overline{A_1A_2} = d$. No triângulo retângulo $A_1A_2A_3$, aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_2A_3}^2 = \overline{A_1A_3}^2 \Rightarrow d^2 + D^2 = (2r)^2$$

Então,

$$D^2 = 4r^2 - d^2 \tag{5.10}$$

Pela seção 5.1.6. e 5.1.7., para calcular a medida da aresta do dual do dodecaedro, representada por d , e do raio da esfera inscrita, representado por r , encontramos os seguintes valores:

$$d = l \frac{\sqrt{5}\phi^2}{5} \Rightarrow d^2 = l^2 \frac{\phi^4}{5} \Rightarrow d^2 = \frac{l^2}{5} \cdot \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow d^2 = l^2 \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10} \right); \text{ e}$$

$$r = l \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20} \Rightarrow r^2 = l^2 \frac{250 + 110\sqrt{5}}{400} \Rightarrow r^2 = l^2 \left(\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40} \right).$$

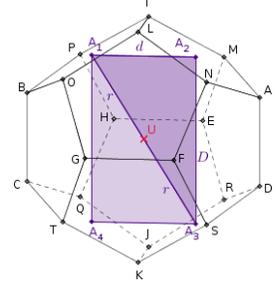
Dessa forma, substituindo d^2 e r^2 em (5.10) temos:

$$D^2 = 4r^2 - d^2 \Rightarrow D^2 = 4 \cdot l^2 \left(\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40} \right) - l^2 \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10} \right) \Rightarrow$$

$$D^2 = l^2 \left(\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10} - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{10} \right) \Rightarrow D^2 = l^2 \left(\frac{18 + 8\sqrt{5}}{10} \right) \Rightarrow$$

$$D^2 = l^2 \left(\frac{9 + 4\sqrt{5}}{5} \right) \Rightarrow D = \frac{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} l$$

Finalmente, calculando a razão entre D e d , representada por x , temos:



$$x = \frac{D}{d} \Rightarrow x^2 = \frac{D^2}{d^2} \Rightarrow x^2 = \frac{l^2 \left(\frac{9+4\sqrt{5}}{5} \right)}{l^2 \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10} \right)} \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{9+4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{10}{7+3\sqrt{5}} \cdot \frac{7-3\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}} \Rightarrow$$

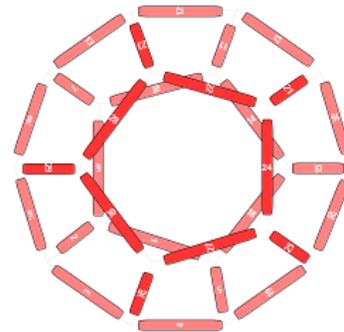
$$x^2 = \frac{2 \cdot (63 - 27\sqrt{5} + 28\sqrt{5} - 60)}{49 - 45} \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{2 \cdot (3 + \sqrt{5})}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 = \phi^2 \Rightarrow x = \phi$$

Logo, os retângulos $A_1A_2A_3A_4$, $A_5A_6A_7A_8$ e $A_9A_{10}A_{11}A_{12}$ são áureos.

5.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do dodecaedro regular

Para realizar a construção do modelo esqueleto das arestas do dodecaedro regular, utilizando um canudo de 12 cm, vamos precisar de 30 pedaços de canudo de mesma cor⁵⁴, um pedaço de linha maior do que 7,2 m de comprimento⁵⁵ e o tempo livre de 3 aulas (2 horas e 30 minutos).



Agora vejamos a construção passo a passo das arestas desse sólido:

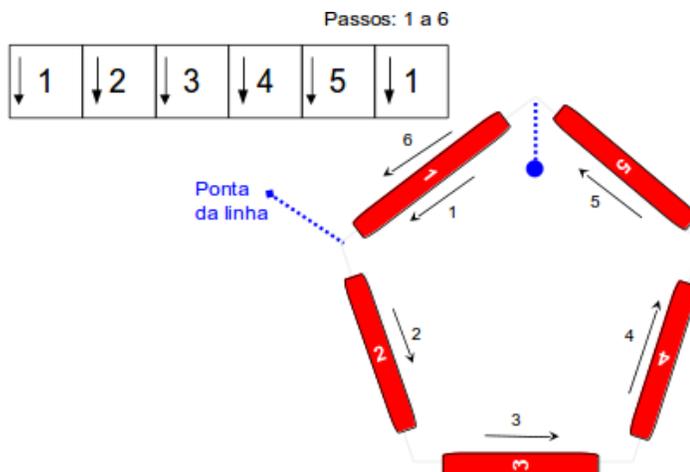


Figura 154 - 1º Sequência (1/4)

54 Na representação do tetraedro, não visualizamos os canudos representados na parte traseira, por isso a cor do canudo será transparente.

55 Seja t o tamanho da linha e c_1 o tamanho do canudo de quantidade 30. Então, $t = 60 \cdot c_1$. Para $c_1 = 12$ cm, temos: $t = 60 \cdot 12 \Rightarrow t = 720$ cm $\Rightarrow t = 7,2$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

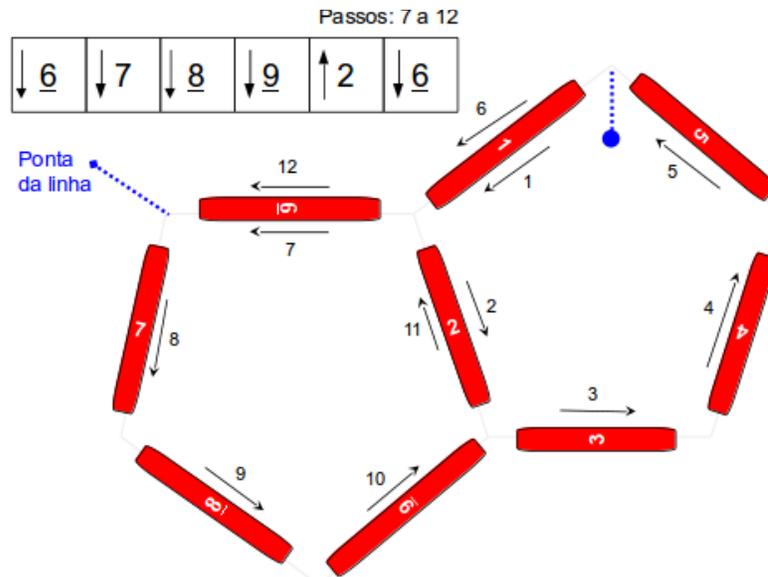


Figura 155 - 1º Sequência (2/4)

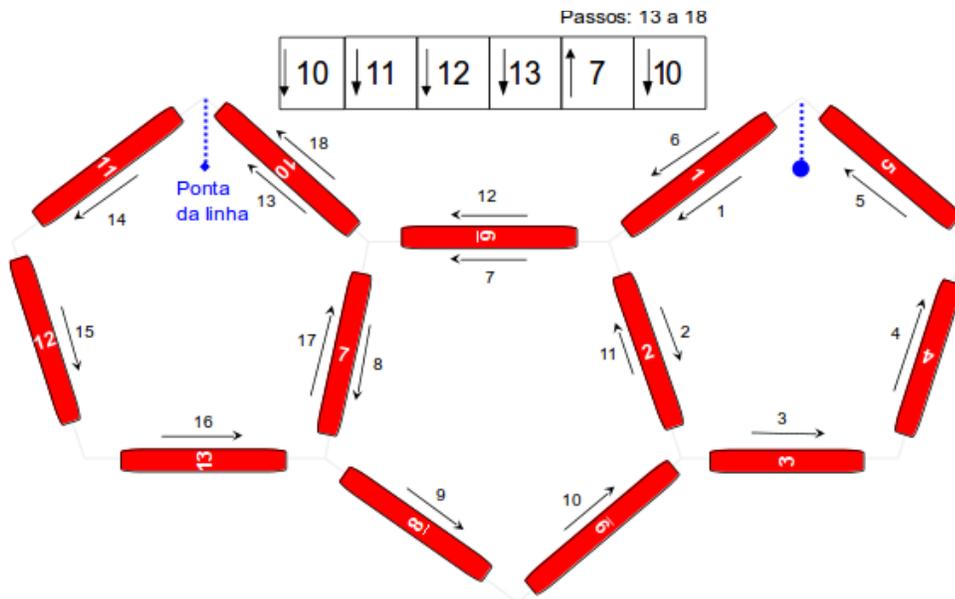


Figura 156 - 1º Sequência (3/4)

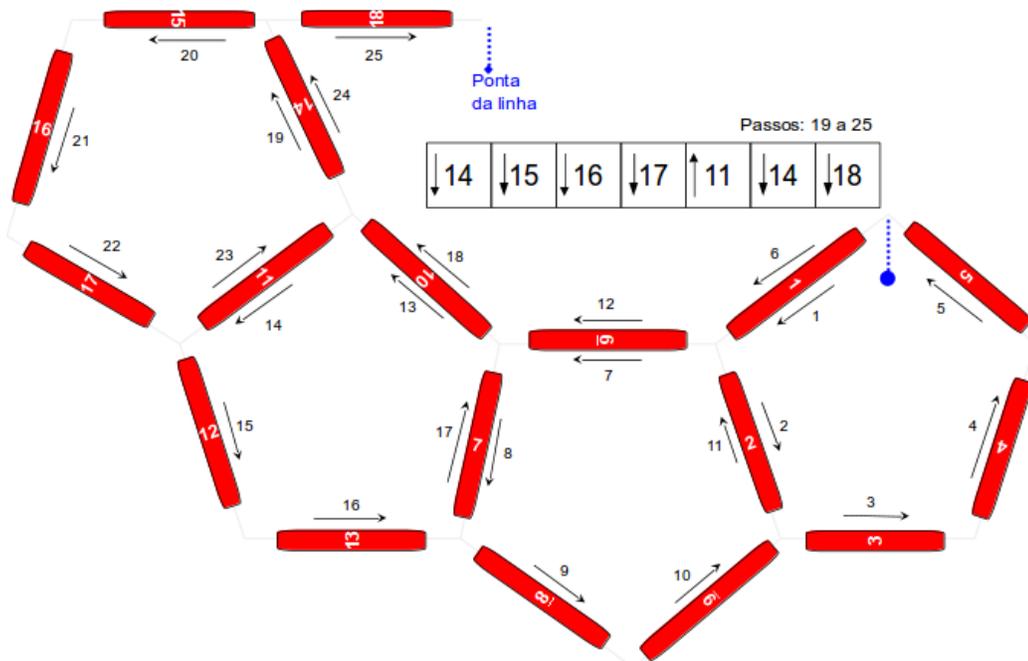


Figura 157 - 1º Sequência (4/4)

Antes de prosseguir a construção, vamos montar o desenho de um pentágono com as arestas 1, 6, 10, 14 e 18 dos 4 pentágonos construídos.

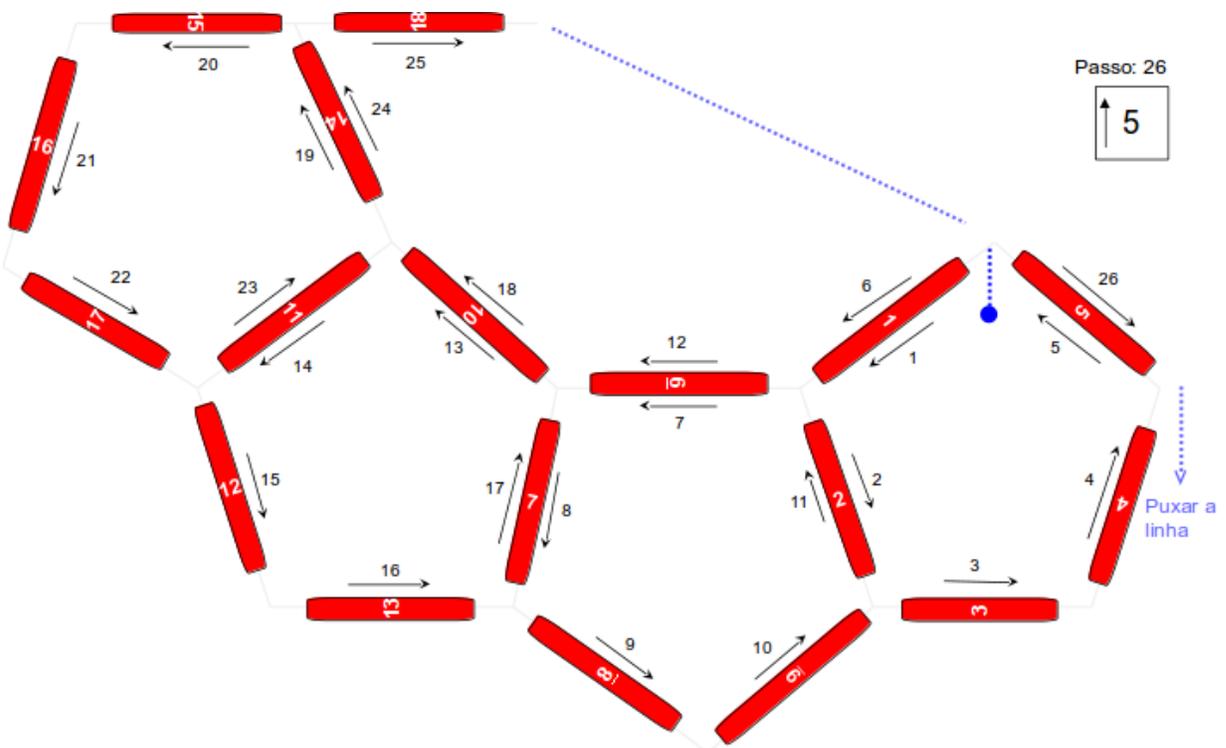


Figura 158 - 1º Sequência: Visualização (1/2)

Antes de prosseguir a construção, vamos puxar a linha conforme indicado no passo 26 da figura 158.

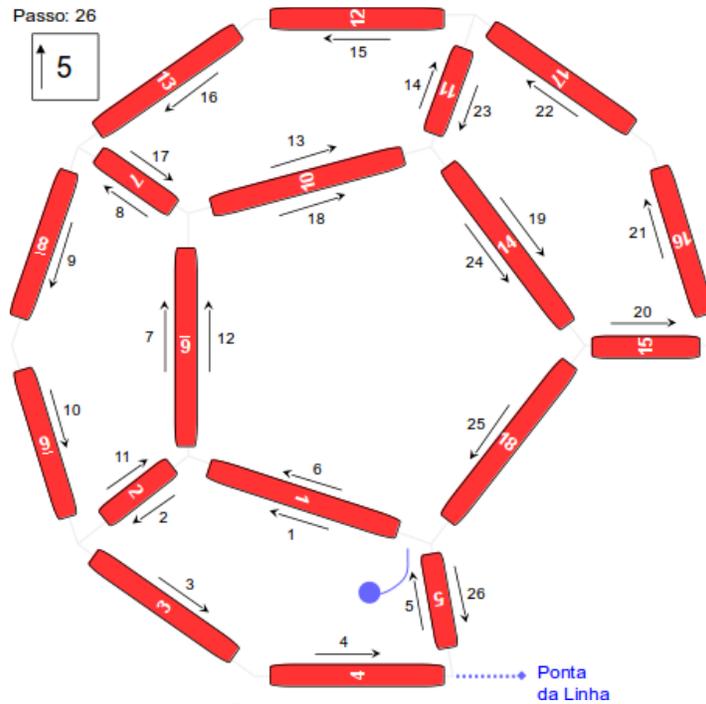


Figura 159 - 1º Sequência: Visualização (2/2)

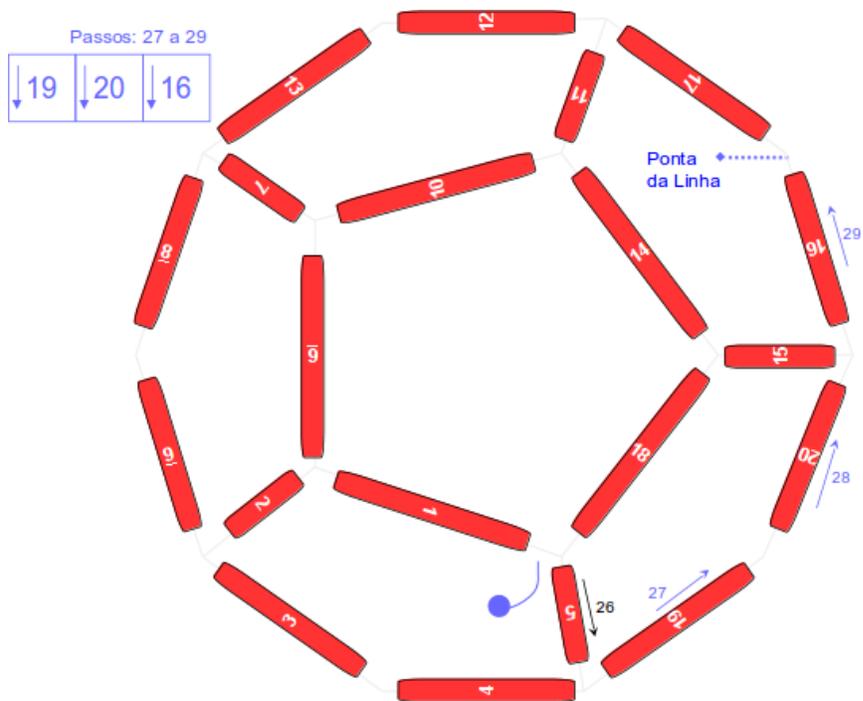


Figura 160 - 2º Sequência

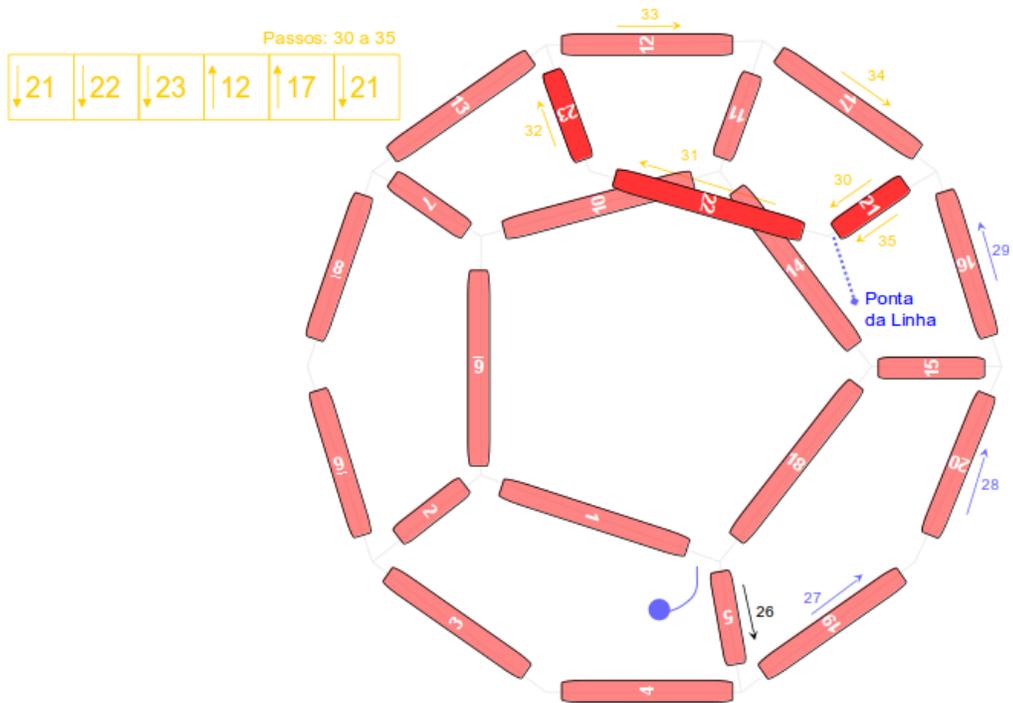


Figura 161 - 3º Sequência

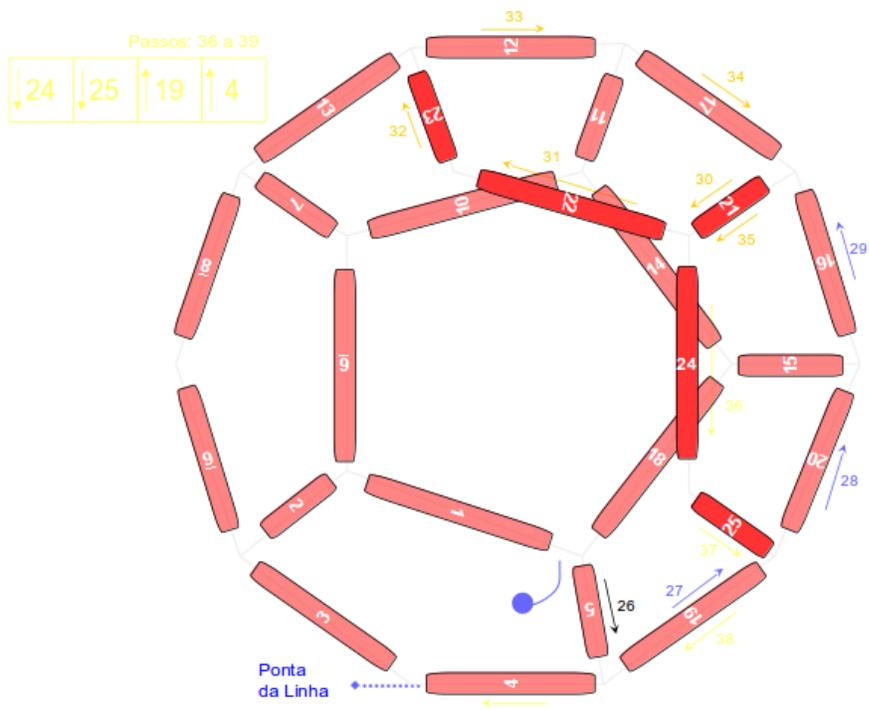


Figura 162 - 4º Sequência

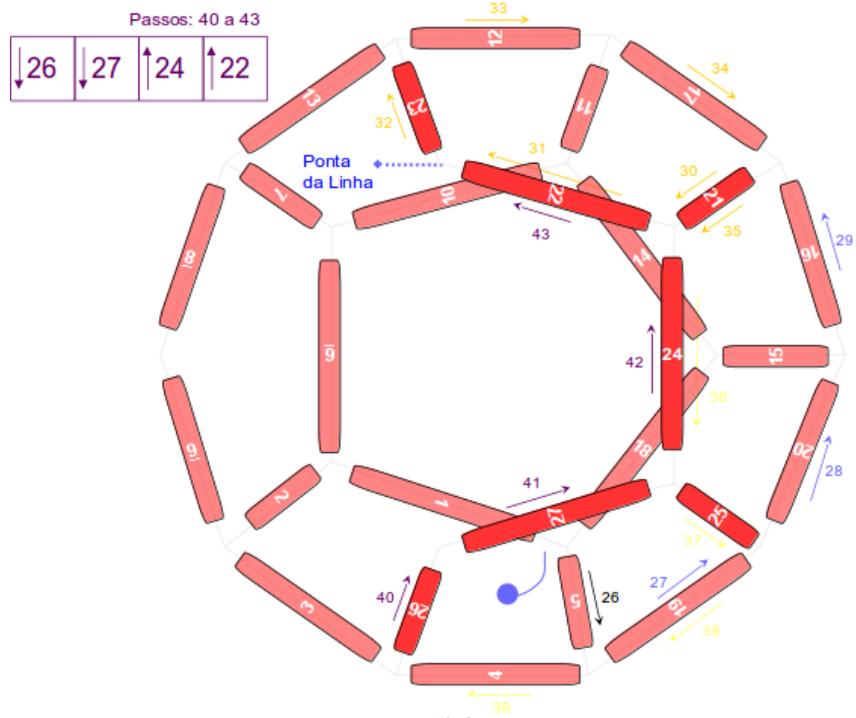


Figura 163 - 5º Sequência

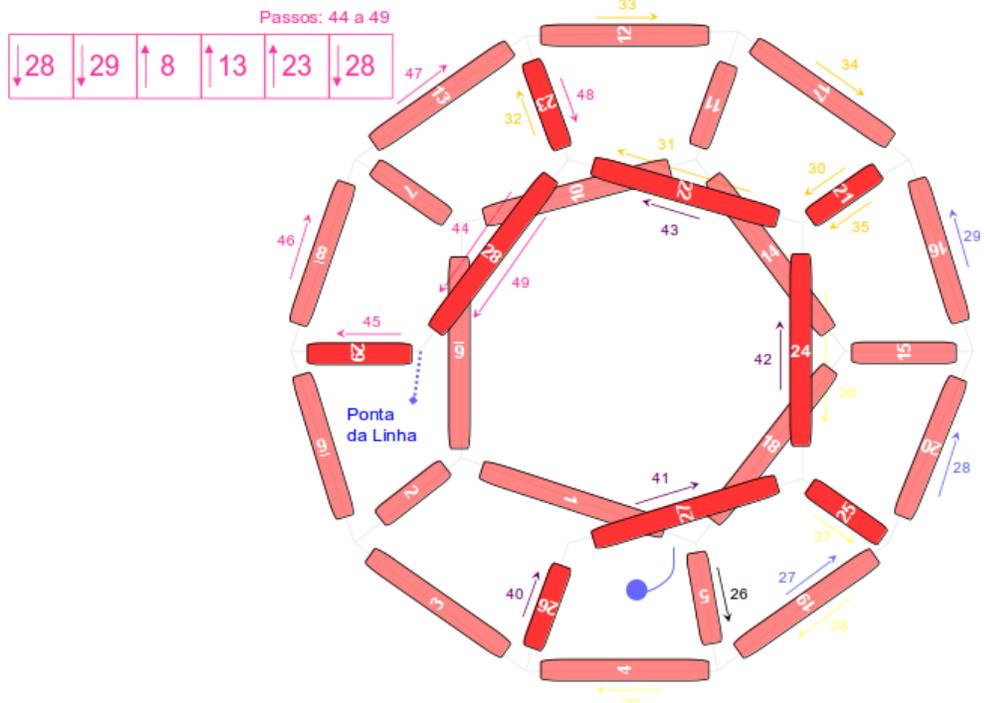


Figura 164 - 6º Sequência

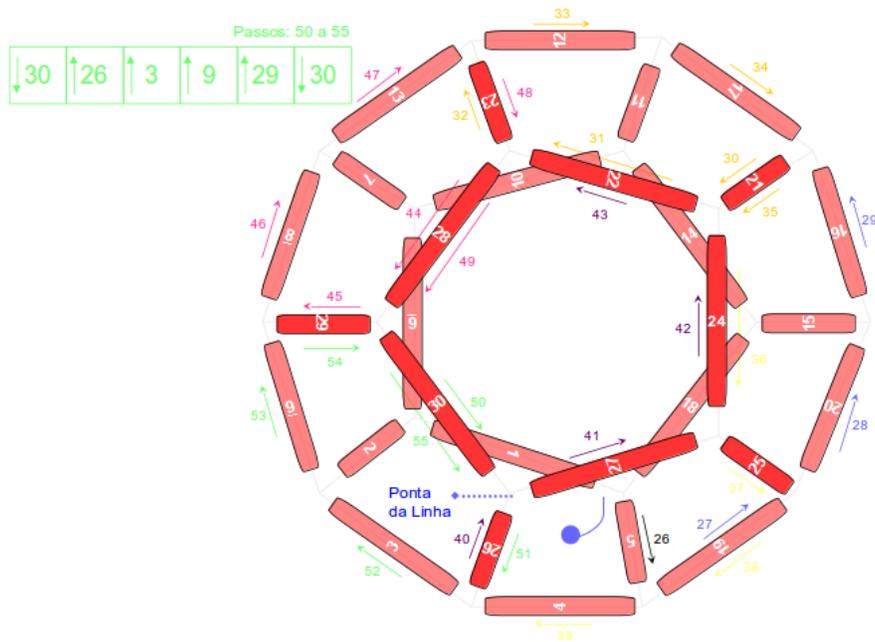


Figura 165 - 7º Sequência

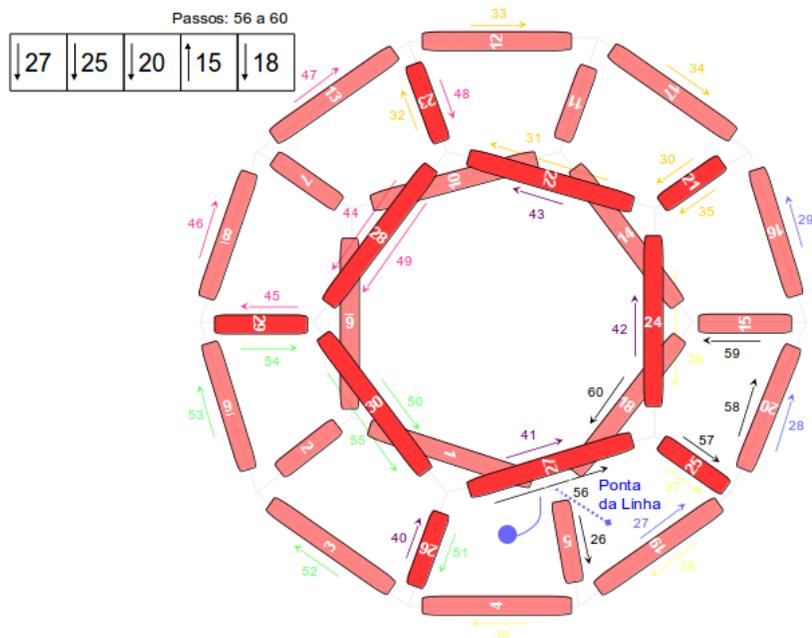


Figura 166 - 8º Sequência

Para finalizar, faremos um único nó com as linhas ligando as arestas 18 e 1 da última sequência. Agora vejamos todo o procedimento sem interrupção⁵⁶ e uma foto do sólido construído com material concreto.

⁵⁶ Ciente que o icosaedro regular é o dual do dodecaedro regular, não vemos a necessidade de aprendizagem da construção do esqueleto utilizando canudo e linha. No entanto, aos alunos mais experientes e habilidosos que gostam de desafios, na seção 5 do anexo 3 apresentamos planificação do dodecaedro utilizando régua e compasso.

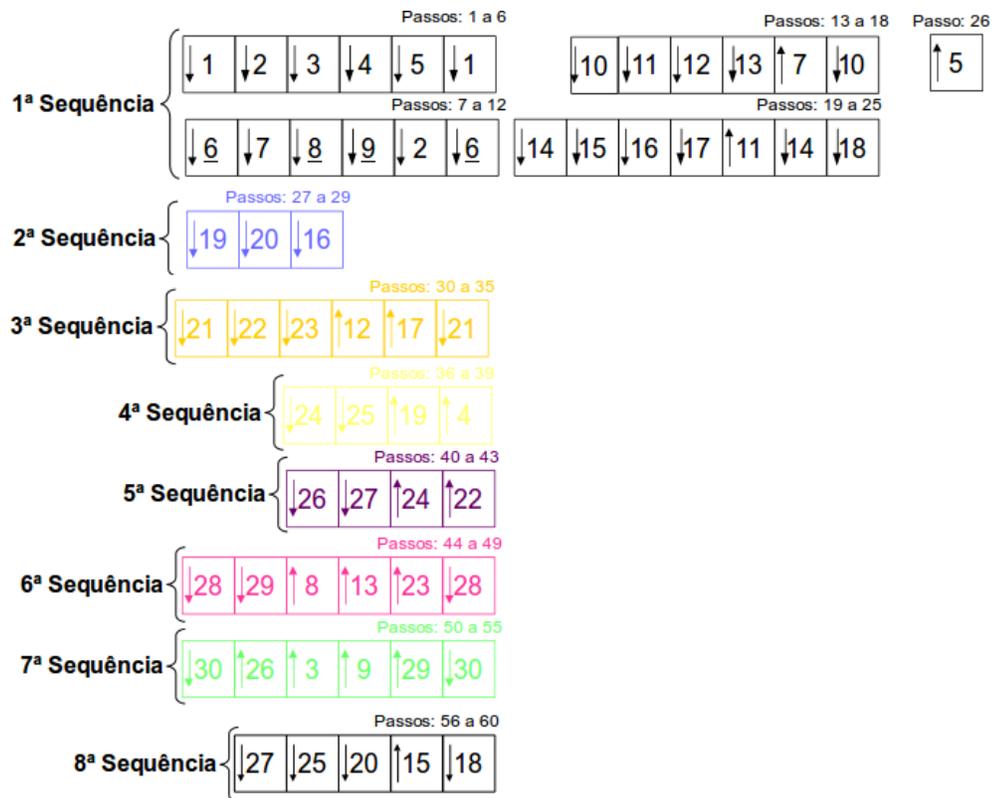


Figura 167 - Procedimento completo

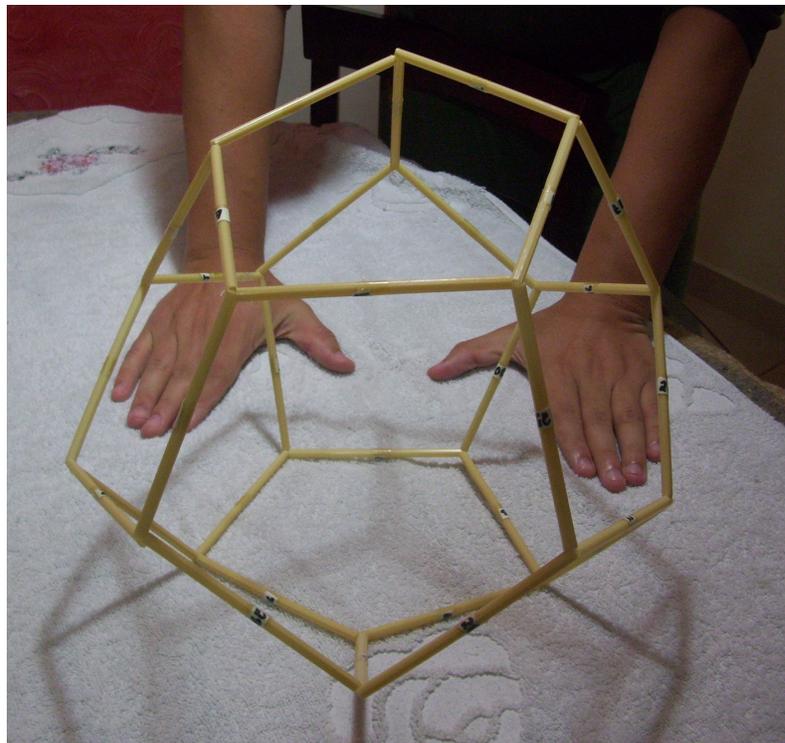


Figura 168 - Construção do modelo esqueleto das arestas do dodecaedro regular

5.3. Explorando as novas tecnologias na construção do Dodecaedro Regular e seu Dual

5.3.1. Girar, Eixo e Tamanho

Apresentamos um applet desenvolvido no software GeoGebra para observarmos a construção passo a passo apresentada nos itens anteriores do modelo esqueleto das arestas e particularidades do dodecaedro regular. O applet em questão pode ser encontrado no link <http://tube.geogebra.org/material/show/id/d5SVDHGO>.

Além de acompanhar passo a passo a construção, é possível alterar o tamanho do dodecaedro, girá-lo em torno dos 3 eixos, exibir somente o dual do dodecaedro, detalhar individualmente cada um dos seus elementos e aprofundar os estudos desse poliedro.

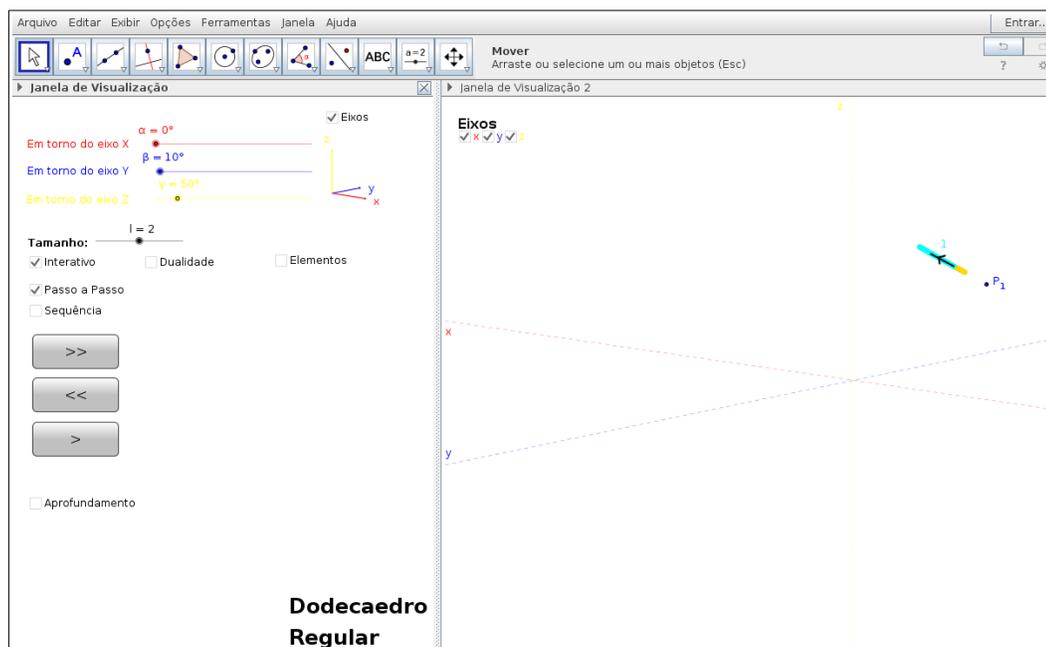


Figura 169

Na figura 169, temos 4 opções de interação: Interativo, Dualidade, Elementos e Aprofundamento.

É possível exibir/ocultar e girar em torno dos três eixos em todas as opções de interação. Já, alterar o tamanho do dodecaedro na tela é possível somente nas duas primeiras opções.

Conforme exibido na figura 170, podemos mostrar somente os eixos y e z,

selecionando a caixa de seleção Eixo e desmarcando a caixa de seleção x. Para não exibir nenhum eixos, desmarque a caixa de seleção Eixo.

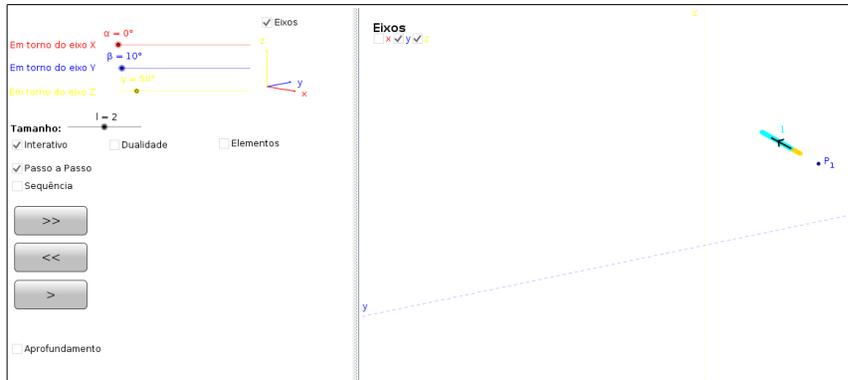


Figura 170

Na Figura 171 b), giramos em torno do eixo y e mantemos fixos os eixos x e z. Assim, durante o processo de construção do dodecaedro, a possibilidade de girá-lo em torno dos eixos permite uma melhor visualização do poliedro.

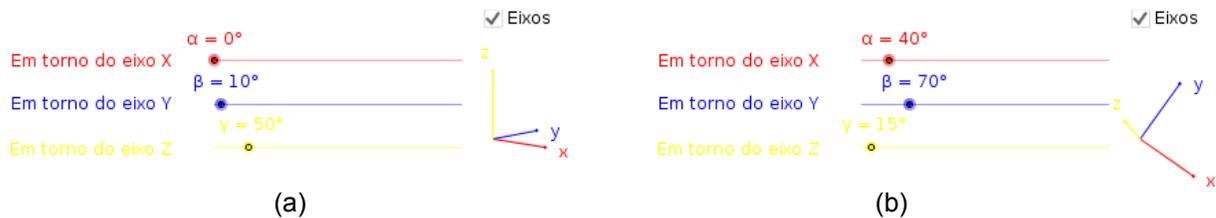


Figura 171

5.3.2. Interativo

Nessa situação temos 2 opções: Passo a Passo e Sequência.

5.3.2.1. Interativo - Passo a Passo

Na opção Passo a Passo, conforme a figura 172, temos 3 botões:

- (Próximo): Avança com a linha passo a passo.
- (Anterior): Retrocede com a linha passo a passo.
- (Início): Vai ao Início da linha (representado pelas Figuras 169 e 170).

A figura 172 representa a posição do dodecaedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 171 a). Já a figura 173 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 171 b).

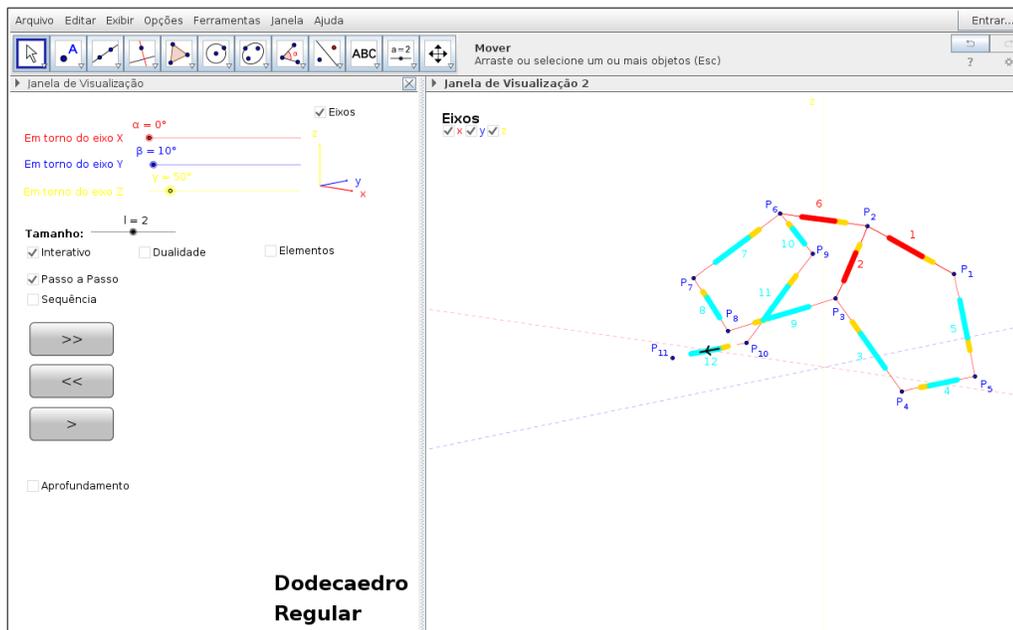


Figura 172

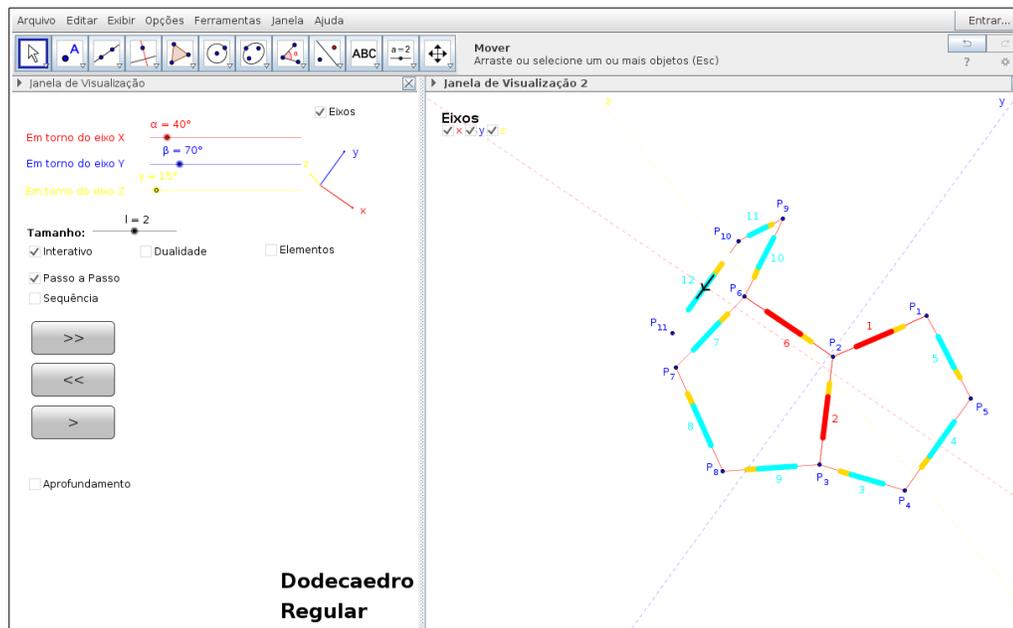


Figura 173

5.3.2.2. Interativo - Sequência

Na opção Sequência, conforme a figura 174, temos 3 botões:

-  (Próximo): Avança com a linha na próxima sequência.
-  (Anterior): Retrocede com a linha sequência anterior.
-  (Completo): Exibe todo processo de construção de uma só vez.

Nessa opção, o processo interativo permite realizar diversos passos de uma única vez.

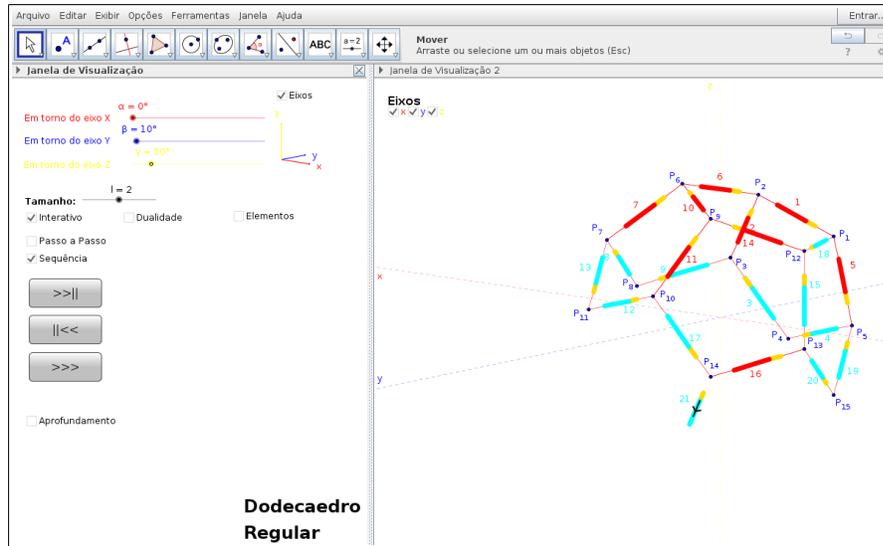


Figura 174

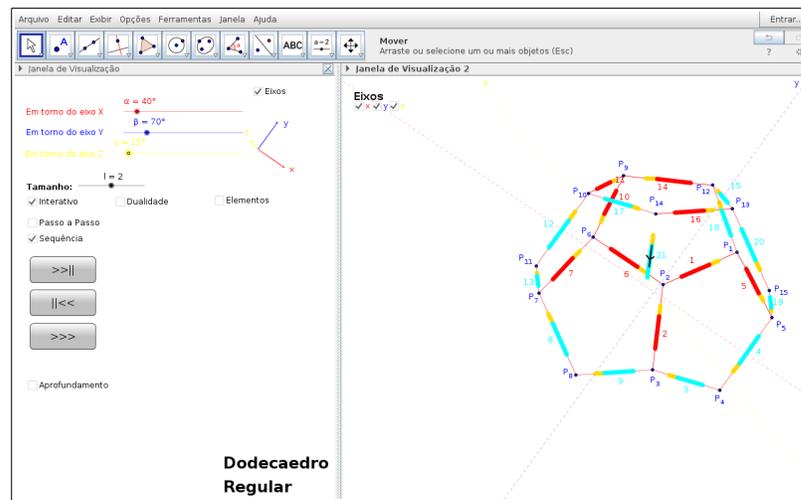


Figura 175

A figura 174 representa a posição do dodecaedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 171 a). Já a figura 175 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 171 b).

5.3.3. Dualidade

Na opção Dualidade, conforme a figura 176, temos 2 possibilidades: Dual e Dodecaedro

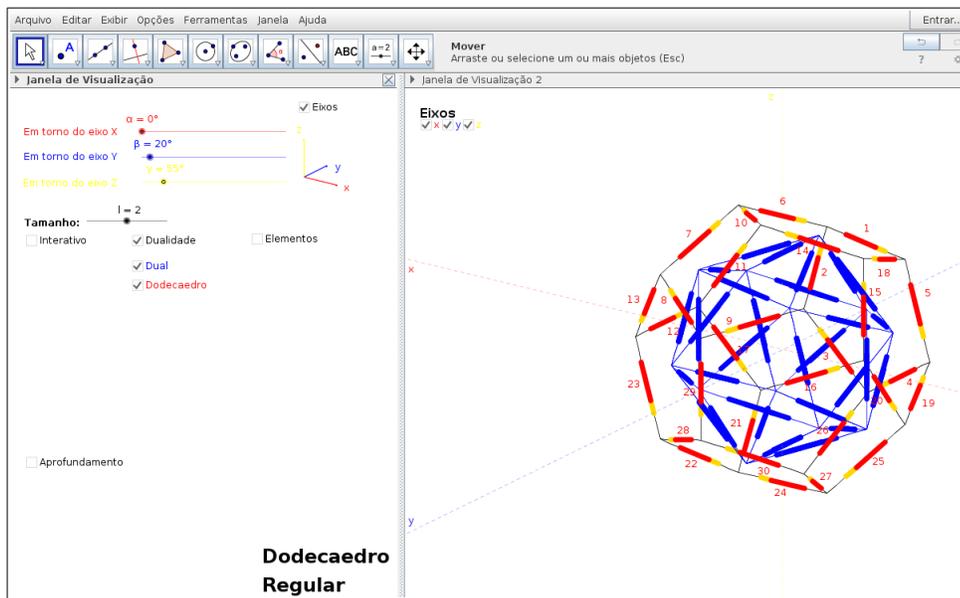


Figura 176

Note que o dual do dodecaedro regular é o icosaedro regular. Nessa figura, o dual está representado de azul. Em alguns poliedros de Platão, mesmo utilizando o software de geometria dinâmica, não é tão simples visualizar o seu dual.

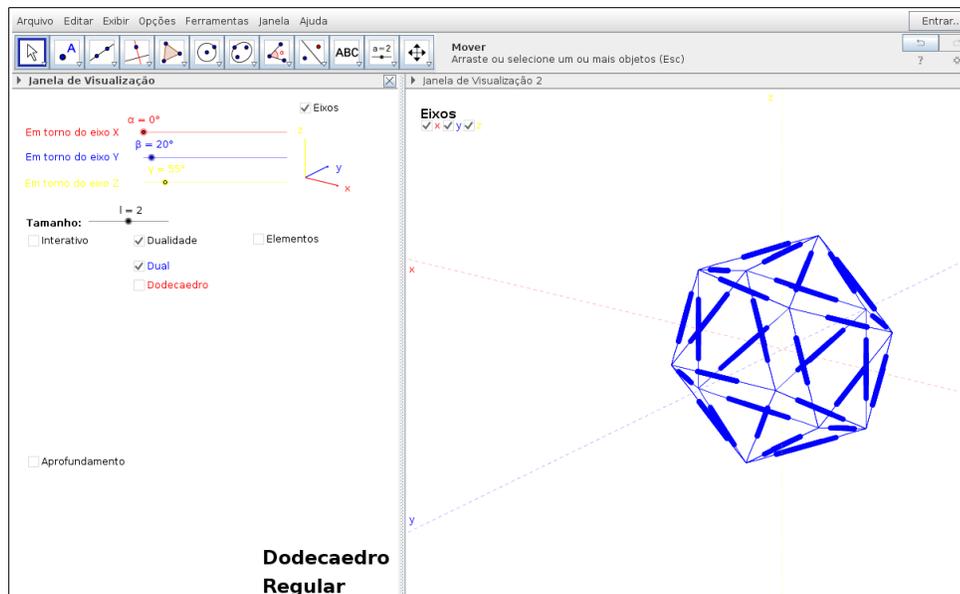


Figura 177

Dessa forma, selecione apenas a opção Dual, para exibir o dual do dodecaedro (figura 177). Conforme exibido na figura 178, para exibir somente o dodecaedro, selecione apenas a opção Dodecaedro.

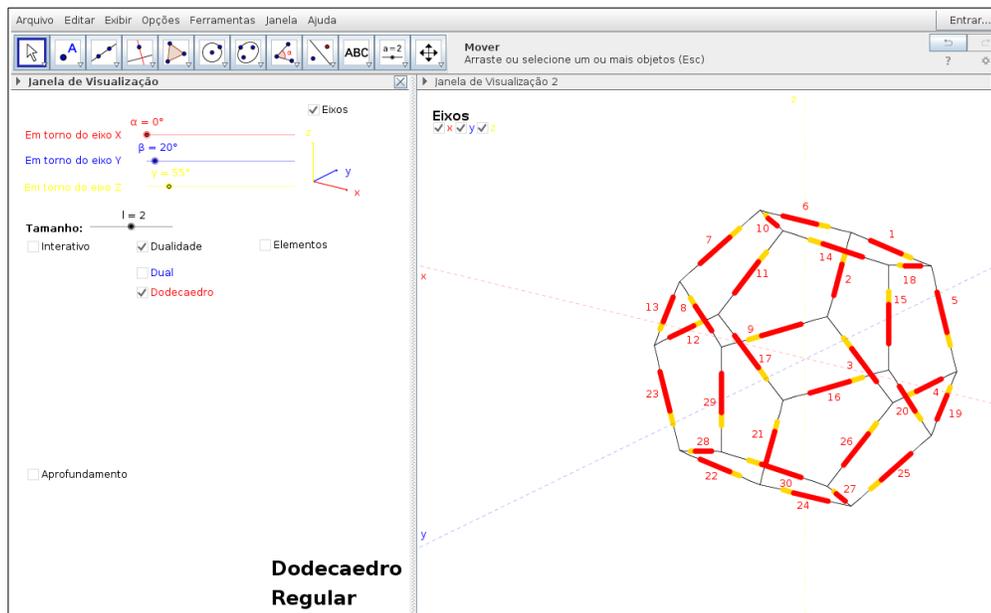


Figura 178

5.3.4. Elementos

Nessa situação temos 3 opções: Vértices, Arestas e Faces.

Conforme exibido na figura 179, todos os elementos podem ser exibidos individualmente através da caixa de seleção. Note que o dodecaedro tem 12 faces, 20 vértices e 30 arestas, conforme detalhes apresentados do lado direito da figura.

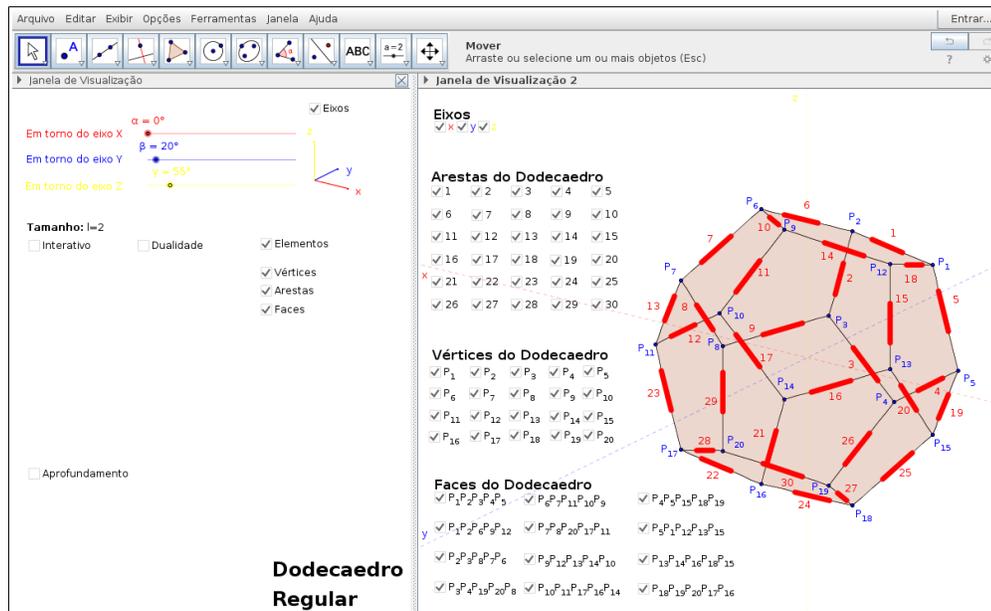


Figura 179

Assim, se desejarmos exibir algumas opções de um elemento específico, basta selecionar apenas um elemento do lado esquerdo e as opções do lado direito. Outra situação é visualizada na figura 180, em que exibimos alguns canudos e apenas 6 faces.

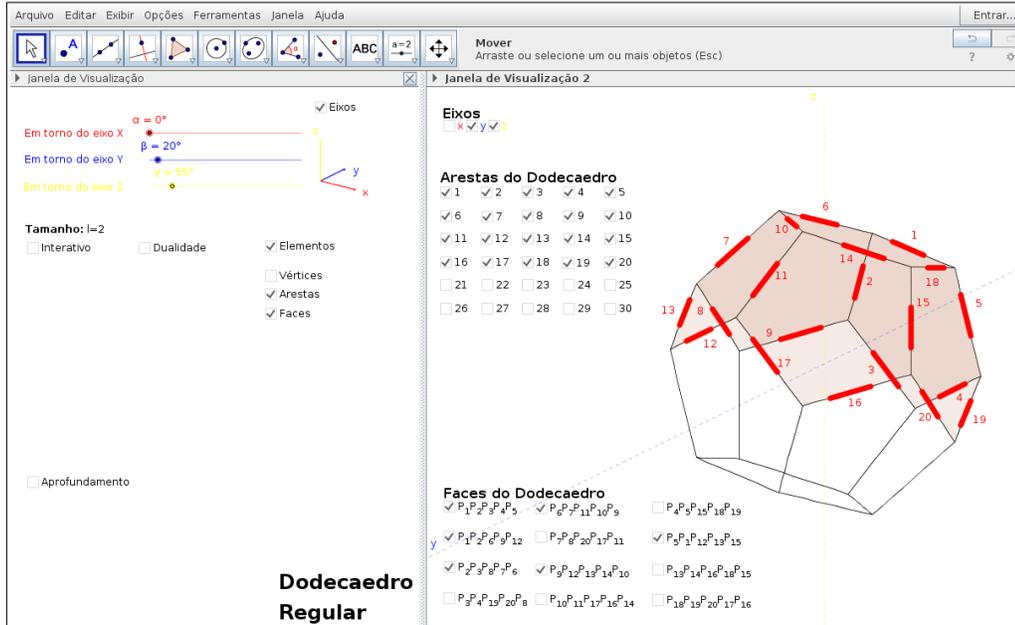


Figura 180

5.3.5. Aprofundamento

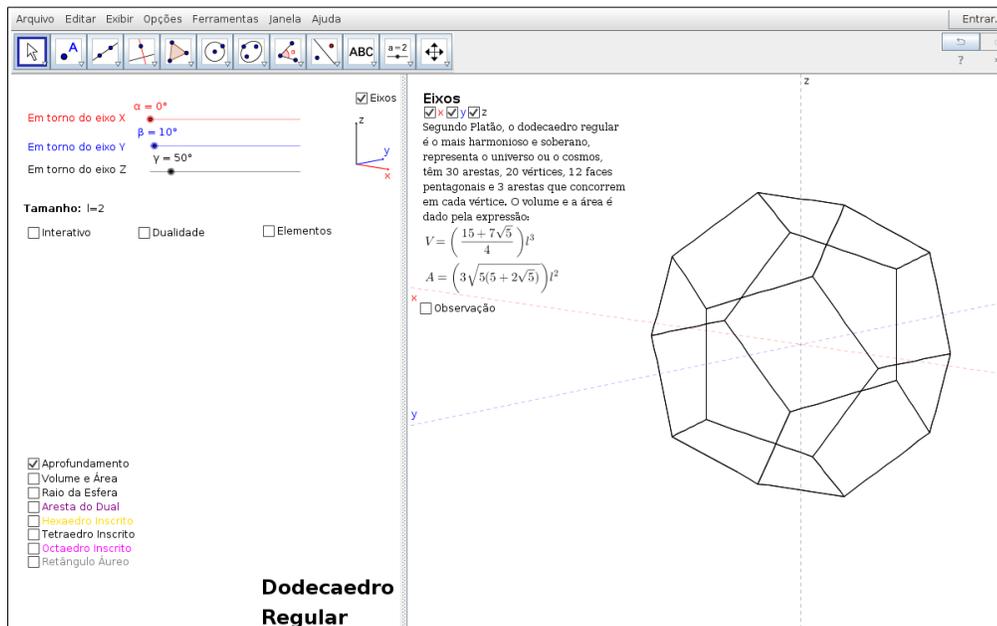


Figura 181

Conforme exibido na figura 181, na opção Aprofundamento, temos 7 possibilidades: Volume e Área; Raio da Esfera; Aresta do Dual; Hexaedro Inscrito; Tetraedro Inscrito; Octaedro Inscrito; e Retângulo Áureo.

Como as faces do dodecaedro regular são pentágonos, alertamos no aluno na opção Observação disponível do lado direito da figura 181.

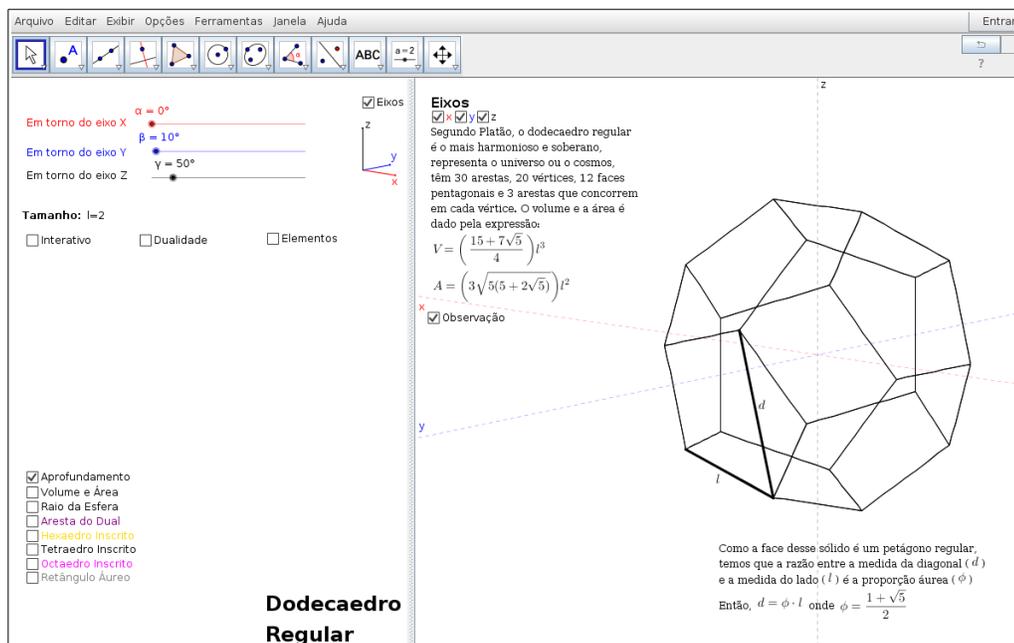


Figura 182

Assim, ao clicar nessa opção, temos a razão entre a medida da diagonal e a medida do lado é a razão áurea⁵⁷(Figura 182).

5.3.5.1. Aprofundamento - Volume e Área

Na figura 183, na opção Volume e Área do item Aprofundamento, temos 2 possibilidades: Volume (V) e Área (A).

5.3.5.1.1. Aprofundamento - Volume e Área - Volume (V)

Nessa figura, para calcular o volume do dodecaedro⁵⁸, decompomos o sólido em um cudo de aresta c e seis sólidos geométricos. Além disso, identificamos cada um dos elementos do sólido geométrico e verificamos que o seu volume é igual a soma dos volumes de um prisma triangular e das peças das extremidades que unidas formam uma pirâmide de base retangular.

57 Conforme apresentado no item 1.1 da seção 3 do anexo 1.

58 Conforme apresentado na seção 5.1.3

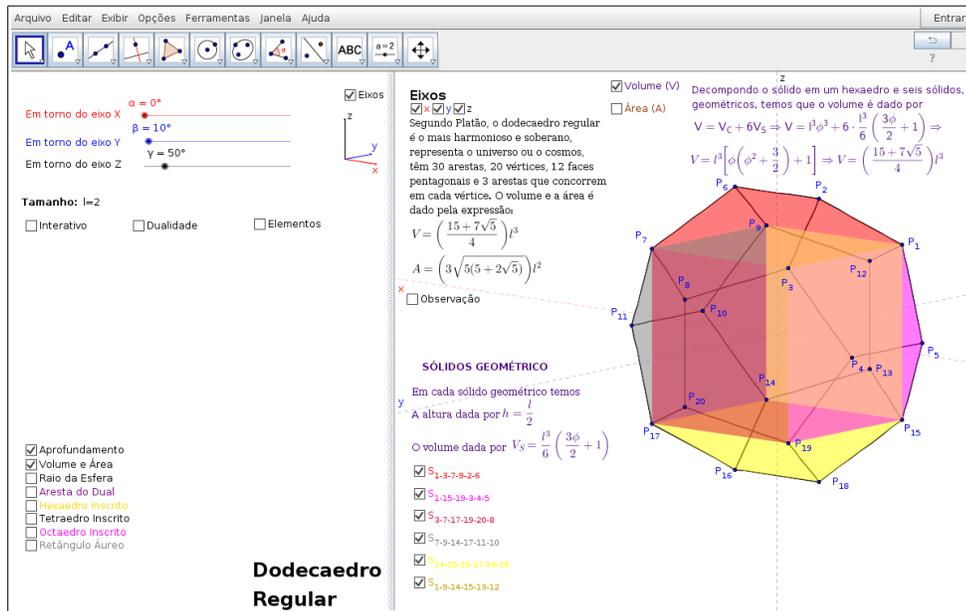


Figura 183

5.3.5.1.2. Aprofundamento - Volume e Área - Área (A)

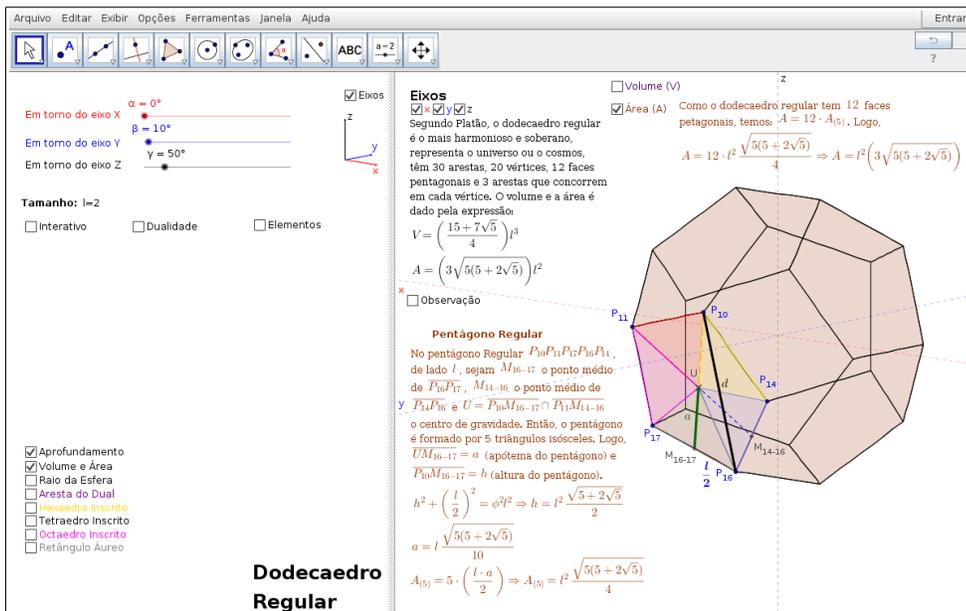


Figura 184

Como o dodecaedro regular é formado por 12 faces pentagonais. Logo, a área do dodecaedro⁵⁹ é 12 vezes o valor da área de uma das faces⁶⁰(Figura 184).

59 Conforme apresentado na seção 5.1.2.

60 Conforme apresentado no item 1.3 da seção 3 do anexo 1.

5.3.5.2. Aprofundamento - Raio da Esfera

Conforme exibido na figura 185, na opção Raio da Esfera⁶¹ do item Aprofundamento, temos 3 possibilidades: Centro da Esfera, Raio da Esfera Circunscrita e Raio da Esfera Inscrita.

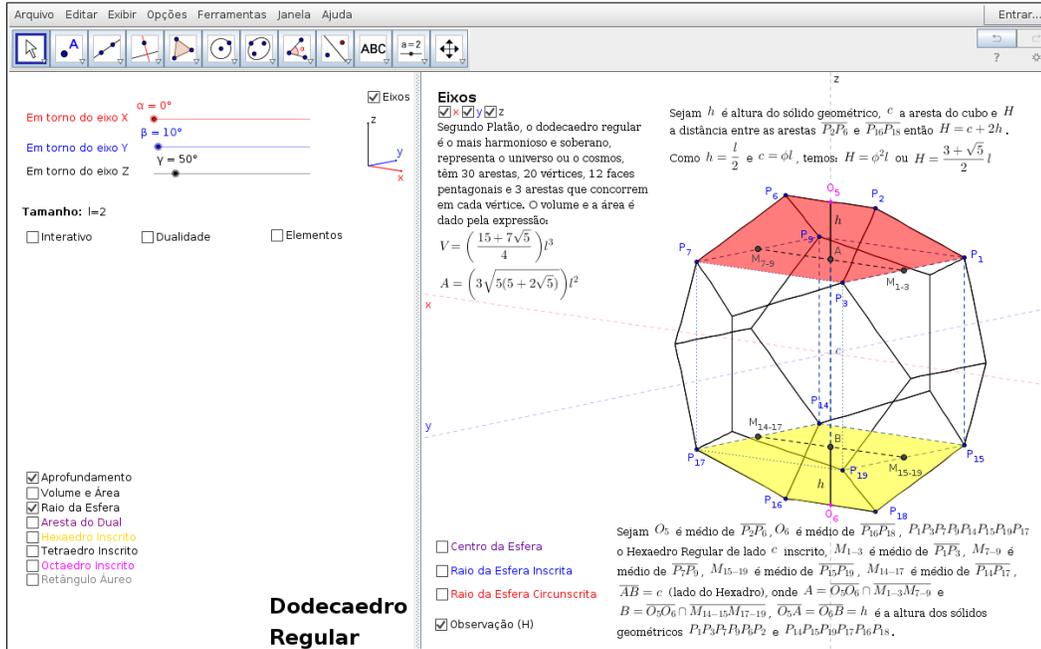


Figura 185

Ao selecionar a opção Observação (H), temos $H = c + 2h$. Para encontrar o valor de H , decompomos o sólido em um cudo de aresta c e seis sólidos geométricos de altura h . O valor de H representa a distância entre duas arestas opostas do dodecaedro e é utilizado para calcular o raio da esfera inscrita, a medida da aresta do dual e a medida da aresta do octaedro regular inscrito.

5.3.5.2.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro

Conforme exibido na figura 186, o centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O , é obtido a partir da interseção dos segmentos traçados de cada vértice do dodecaedro regular ao seu oposto ou pela interseção dos segmentos traçados a partir dos centros de faces opostas.

61 Conforme apresentado na seção 5.1.4.

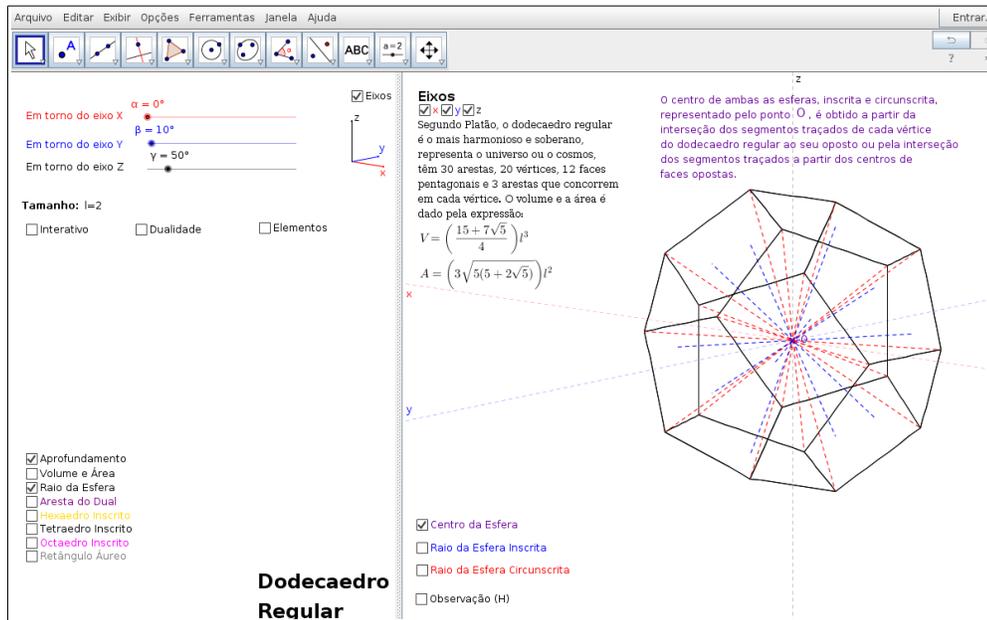


Figura 186

5.3.5.2.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita

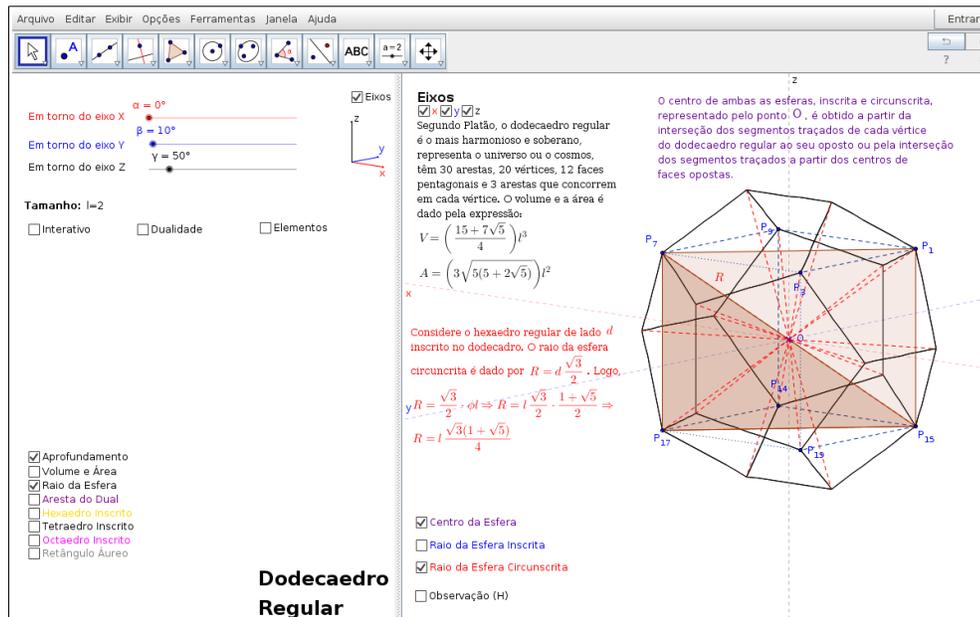


Figura 187

Na figura 187, o raio da esfera circunscrita é a distância entre o centro da esfera e um vértice do sólido. Esse raio pode ser obtido da mesma forma com que calculamos o raio da esfera circunscrita em um cubo⁶², uma vez que é possível inscrever um hexaedro regular em um dodecaedro.

62 Conforme apresentado na seção 3.1.5 do capítulo 3 - Hexaedro.

5.3.5.2.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita

Sabemos que o raio da esfera inscrita é a distância entre o centro da esfera e o centro de uma face desse sólido. Conforme exibido na figura 188, consideramos uma face do sólido e a distância entre duas arestas opostas (H). Então, aplicamos o teorema de Pitágoras em que a hipotenusa é o raio da esfera inscrita e os catetos são o apótema da face pentagonal⁶³ e a metade da distância entre duas arestas opostas.

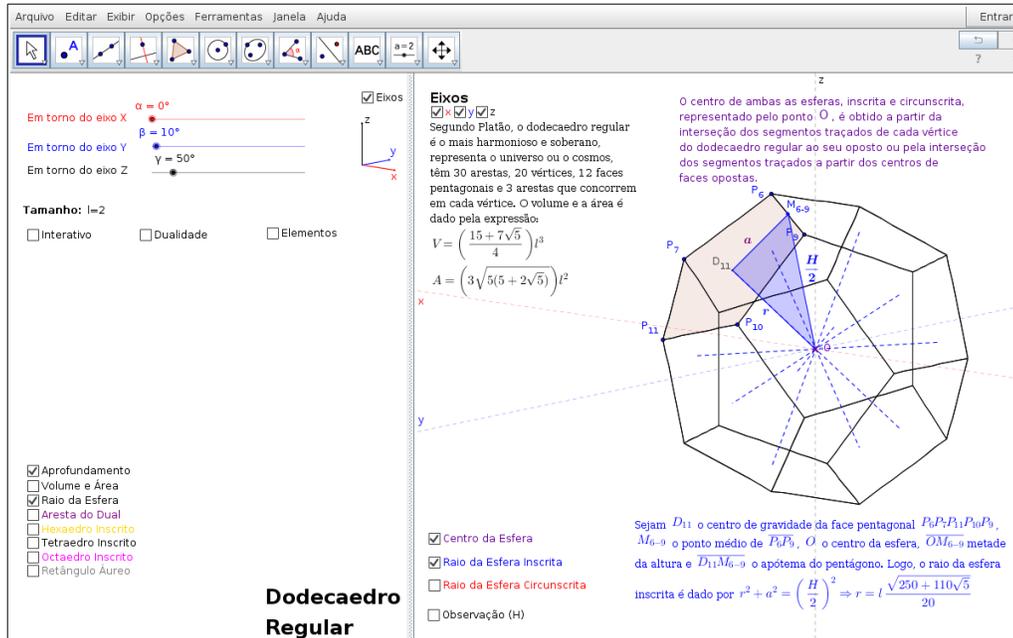


Figura 188

5.3.5.3. Aprofundamento - Aresta do Dual

Como o icosaedro regular é o dual do dodecaedro regular, para calcular o tamanho da aresta do dual, consideramos duas faces adjacentes do sólido, a distância entre duas arestas opostas (H) e, alguns elementos do pentágono regular, tais como altura (h) e o apótema (a). Então, aplicamos⁶⁴ semelhança de triângulos conforme exibido na figura 189.

63 Conforme apresentado no item 1.3 da seção 3 do anexo 1.

64 Conforme apresentado na seção 5.1.8.

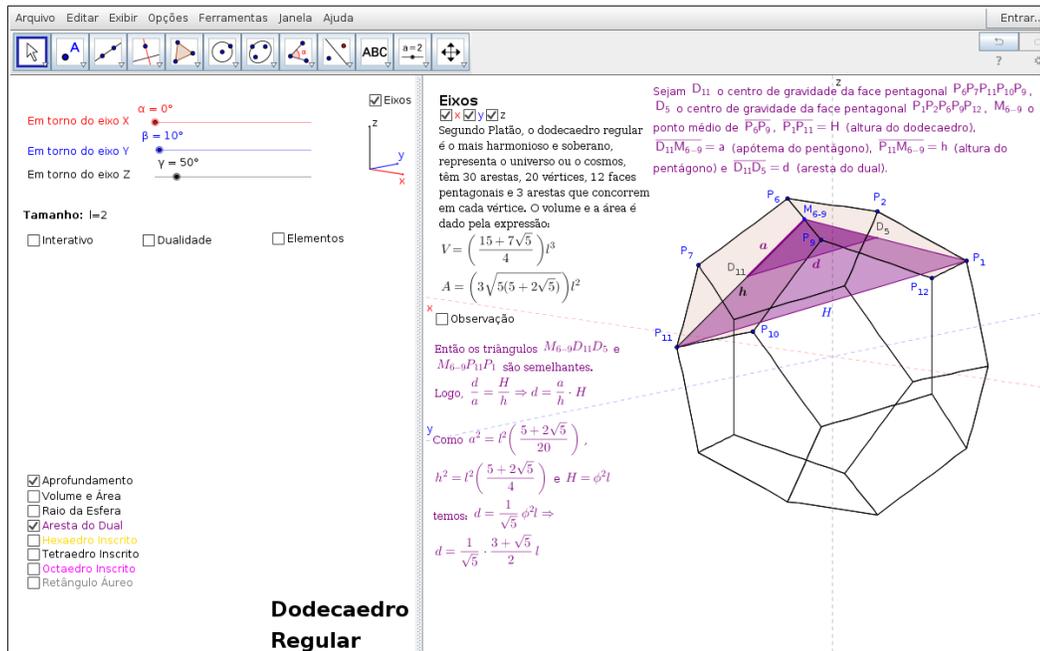


Figura 189

5.3.5.4. Aprofundamento - Hexaedro Inscrito

Conforme exibido na figura 190, traçando⁶⁵ uma determinada diagonal de cada uma das faces do dodecaedro é possível inscrever um hexaedro regular.

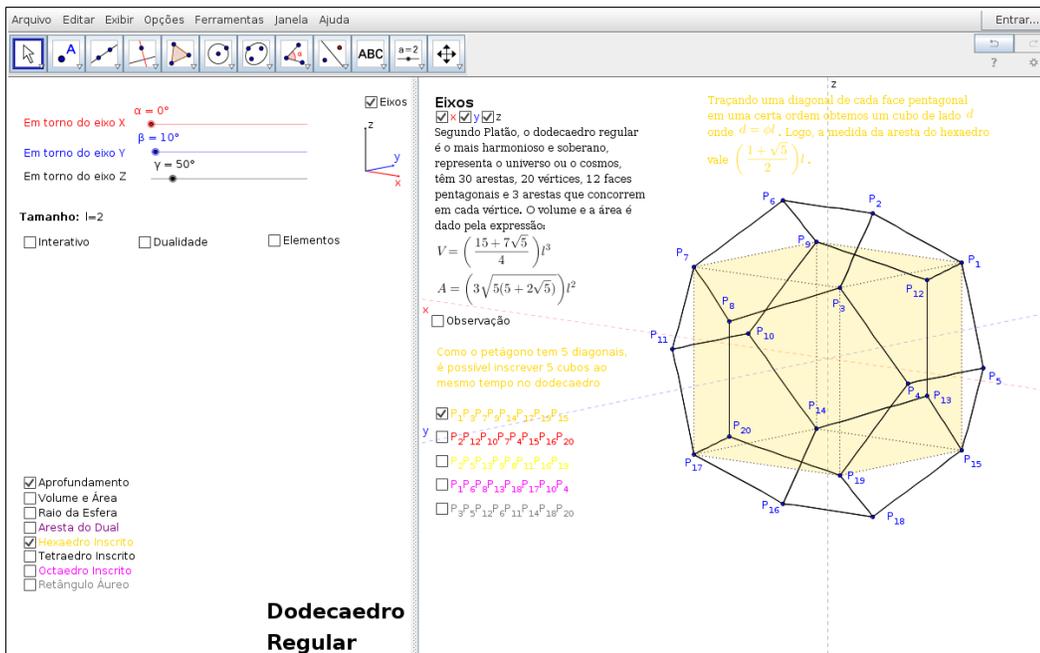


Figura 190

65 Conforme apresentado na seção 5.1.5.

E, como o pentágono tem cinco diagonais, é possível inscrever cinco cubos no dodecaedro (Figura 191).

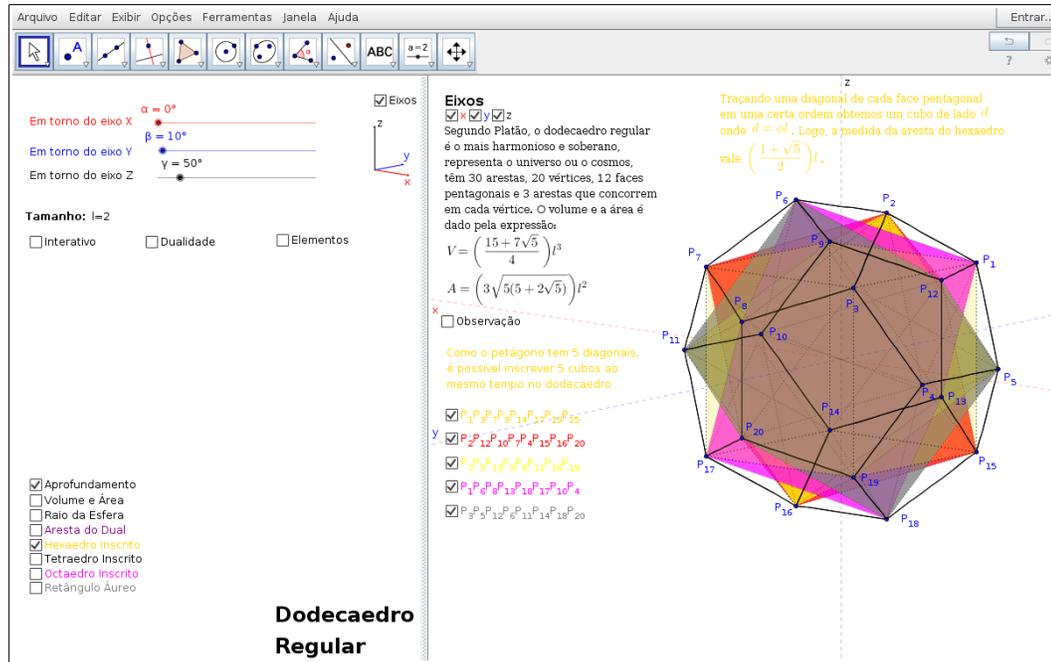


Figura 191

5.3.5.5. Aprofundamento - Tetraedro Inscrito

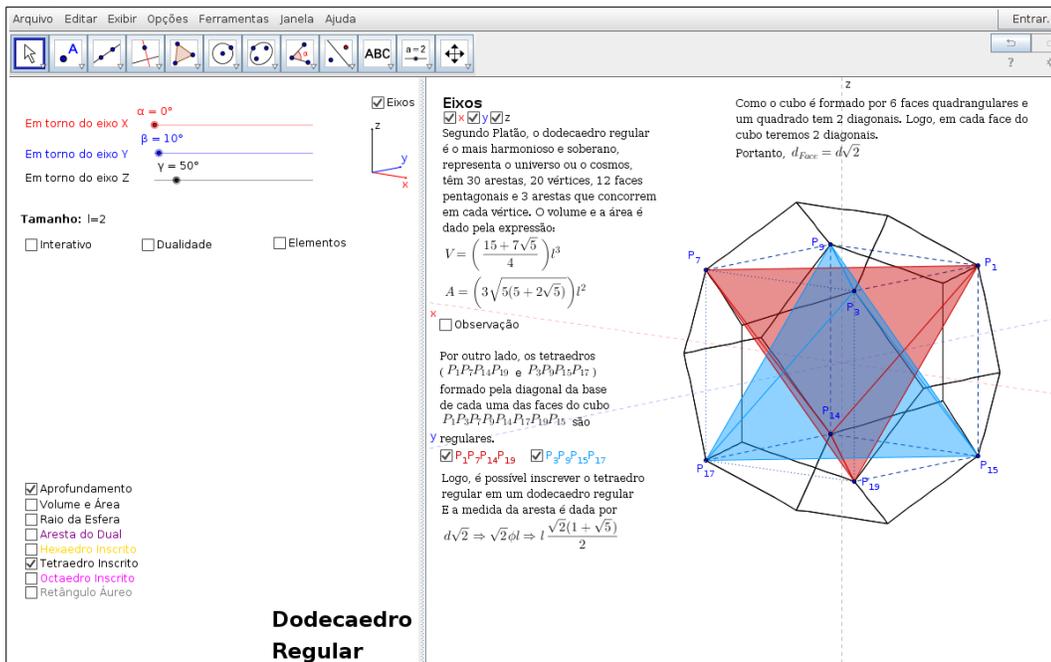


Figura 192

Na figura 192, traçando-se⁶⁶ as diagonais das faces do cubo inscrito, obtemos dois tetraedros regulares inscritos no dodecaedro.

5.3.5.6. Aprofundamento - Octaedro Inscrito

Conforme exibido na figura 193, é possível inscrever um octaedro regular no dodecaedro marcando⁶⁷ os pontos médios das arestas que forma H .

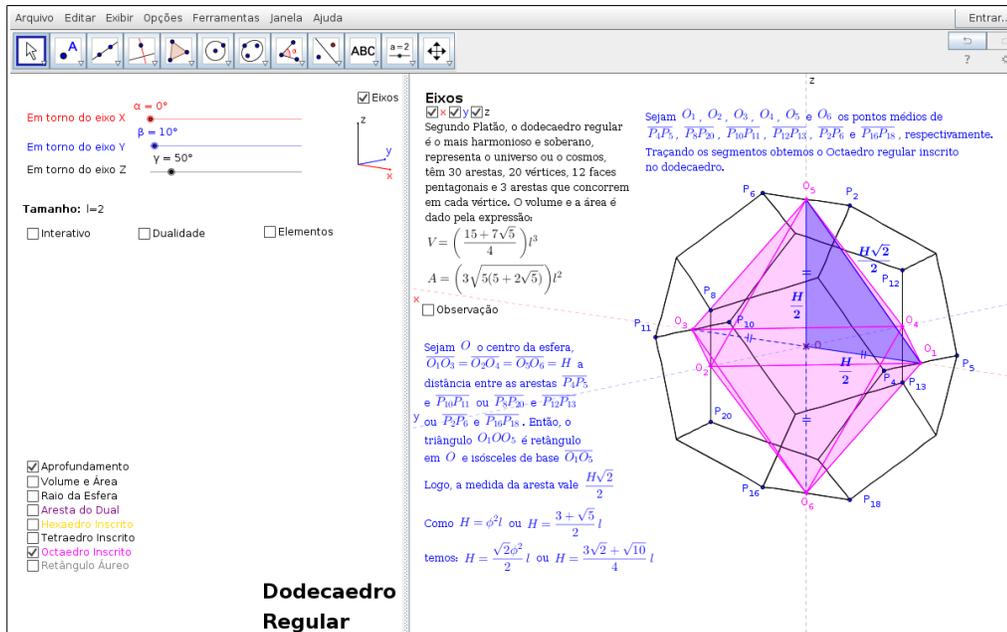


Figura 193

5.3.5.7. Aprofundamento - Retângulo Áureo

Na figura 194, é possível traçar três retângulos a partir do centro de cada uma das faces. Para mostrarmos⁶⁸ que os retângulos são áureos, selecionamos a opção Demonstração e notamos que a diagonal do retângulo é o dobro do raio da esfera inscrita e a medida de um dos lados é igual a aresta do dual, representada por d . Assim, aplicando o teorema de Pitágoras obtemos o outro lado do retângulo, representado por D . Assim, encontramos que a razão dos lados desse retângulo é o número de ouro (Figura 195).

66 Conforme apresentado na seção 5.1.6.

67 Conforme apresentado na seção 5.1.7.

68 Conforme apresentado na seção 5.1.9.

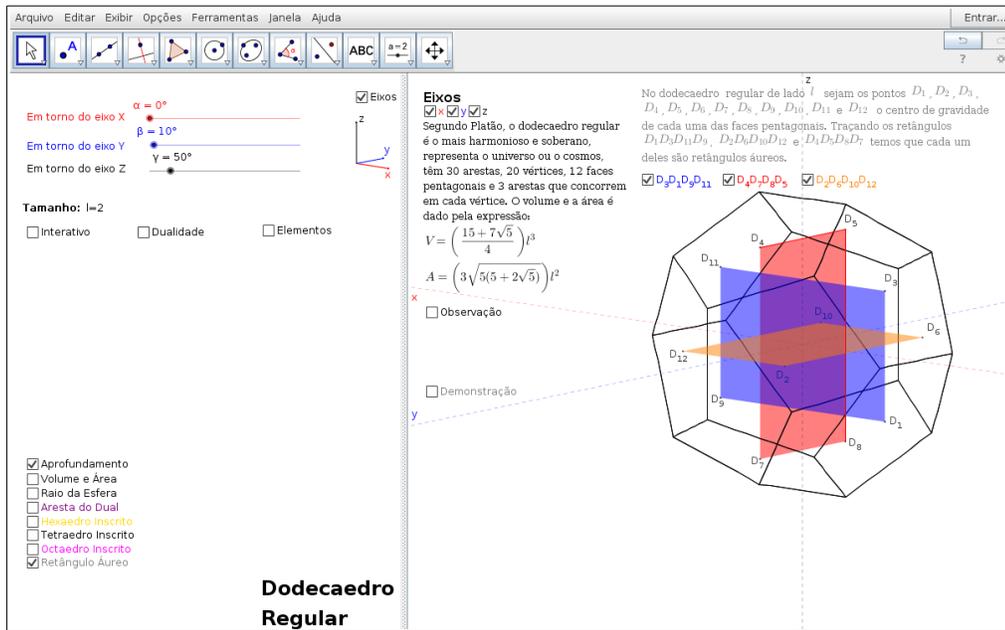


Figura 194

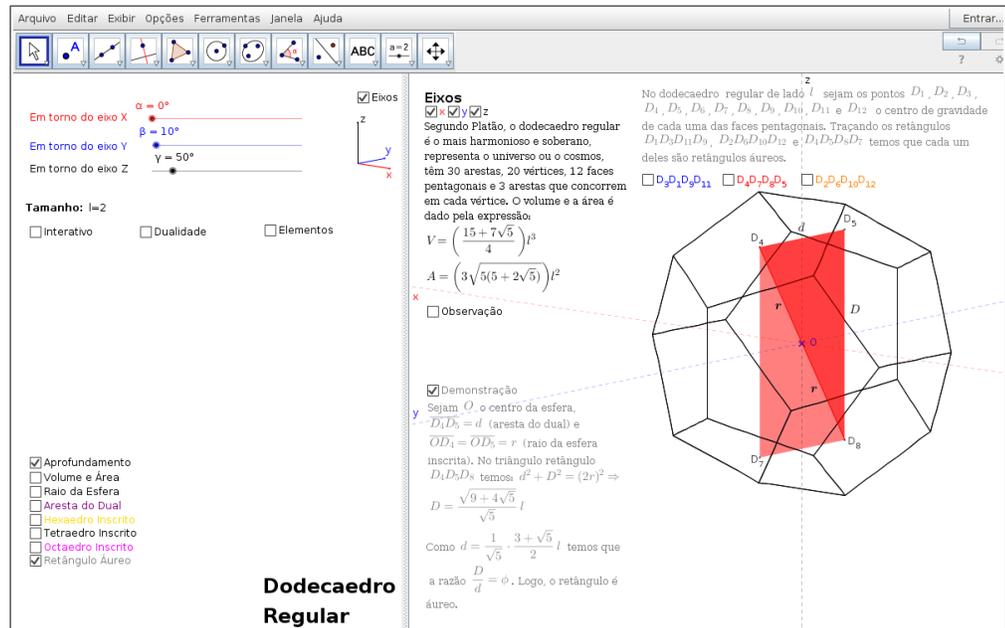
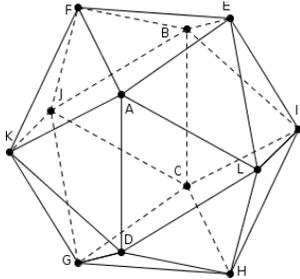


Figura 195

Capítulo 6 - Icosaedro Regular

6.1. Revisão Teórica

6.1.1. Introdução

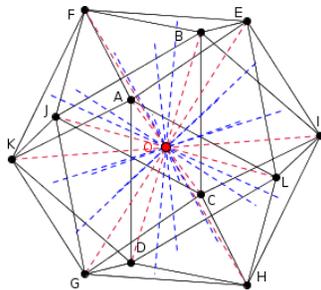


Segundo Platão, o icosaedro regular representa o elemento água de mobilidade crescente e intermediária entre a terra (cubo) e o fogo (tetraedro), dada a seu peso e suas bases pequenas, passíveis de rolar com facilidade e fluidez.

Esse sólido é formado por 12 vértices ($A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$ e L), 30 arestas ($\overline{AE}, \overline{EB}, \overline{BJ}, \overline{JK}, \overline{KA}, \overline{AF}, \overline{EF}, \overline{BF}, \overline{JF}, \overline{KF}, \overline{AD}, \overline{AL}, \overline{EL}, \overline{EI}, \overline{BI}, \overline{BC}, \overline{JC}, \overline{JG}, \overline{KG}, \overline{KD}, \overline{DL}, \overline{LI}, \overline{IC}, \overline{CG}, \overline{GD}, \overline{DH}, \overline{LH}, \overline{IH}, \overline{CH}$ e \overline{GH}), 20 faces triangulares ($AEF, EBF, BJF, JKF, KAF, AEL, EBI, BJC, JKG, KAD, DLA, LIE, ICB, CGJ, GDK, DLH, LIH, ICH, CGH$ e GDH) e 5 arestas que concorrem em cada vértice.

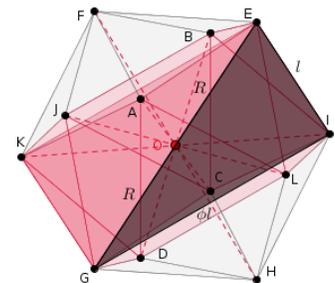
Nas próximas seções desse capítulo, vamos apresentar propriedades (raios das esferas inscrita e circunscrita, área e volume) e construções (aresta do dual e retângulo áureo) desse sólido.

6.1.2. Cálculo dos raios das esferas inscrita e circunscrita do icosaedro regular



O centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O , é obtido a partir da interseção dos segmentos traçados de cada vértice do icosaedro regular ao seu oposto ou pela interseção dos segmentos traçados a partir dos centros de faces opostas.

Sabendo que o raio da esfera circunscrita é a distância entre o centro da esfera e um vértice do sólido, para calcular a medida desse raio, representada por R , vamos decompor o icosaedro regular em duas pirâmides pentagonais ($AEBJKF$ e $CGDLIH$) equiláteras e um prismaoide⁶⁹ ($AEBJKGDLIC$).



69 Um prismaoide é um poliedro que possui duas bases paralelas e faces laterais do tipo triângulos, paralelogramos ou trapézios

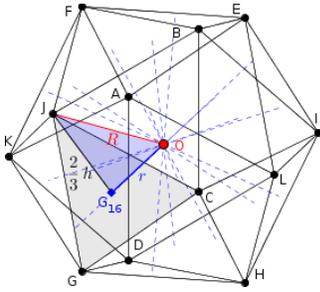
Como as bases paralelas do prismaoide são pentágonos temos $\overline{EK} = \overline{IG} = \phi l$.

Por outro lado, $\overline{EI} \parallel \overline{GK}$, $\overline{EI} = \overline{GK} = l$ e $\overline{EK} \perp \overline{EI}$ então, $EIGK$ é um retângulo, \overline{EG} é diagonal, $\overline{OE} = \overline{OG} = R$ e o triângulo EIG é retângulo em I .

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(\phi l)^2 + l^2 = (2R)^2 \Rightarrow R^2 = l^2 \left(\frac{\phi^2 + 1}{4} \right) \Rightarrow R = l \frac{\sqrt{\phi^2 + 1}}{2}$$

Para $\phi^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ temos: $R = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} + 1} \Rightarrow R = l \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$



Como o raio da esfera inscrita é a distância entre o centro da esfera e uma face desse sólido, representado por r , vamos considerar a face triangular JGC do dodecaedro regular para calcular o raio r .

Sendo G_{16} o baricentro do triângulo equilátero JGC

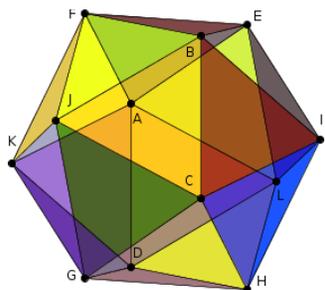
temos $\overline{JG_{16}} = \frac{2}{3}h$, onde $h = l \frac{\sqrt{3}}{2}$ (altura do triângulo).

Sejam $\overline{OJ} = R$ e $\overline{OG_{16}} = r$ então o triângulo $OG_{16}J$ é retângulo em G_{16} .

Logo, aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{2}{3}h \right)^2 &= R^2 \Rightarrow r^2 + \left(l \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = l^2 \left(\frac{\phi^2 + 1}{4} \right) \cdot \frac{3}{3} - \frac{l^2}{3} \cdot \frac{4}{4} \Rightarrow \\ r^2 &= l^2 \left(\frac{3\phi^2 + 3 - 4}{12} \right) \Rightarrow r^2 = \frac{l^2}{4} \left(\phi^2 - \frac{1}{3} \right) \Rightarrow r^2 = \frac{l^2}{4} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} \right) \Rightarrow \\ r^2 &= \frac{l^2}{4} \cdot \frac{7 + 3\sqrt{5}}{6} \Rightarrow r^2 = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow r^2 = \frac{l^2}{4} \cdot \frac{\phi^4}{3} \Rightarrow r = l \frac{\phi^2}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \\ r &= l \frac{\phi^2 \sqrt{3}}{6} \Rightarrow r = l \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \Rightarrow r = l \frac{\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12}. \end{aligned}$$

6.1.3. Cálculo da área do icosaedro regular



Como o icosaedro regular é formado por vinte faces triangulares, temos $A = 20 \cdot A_{(3)}$. Por outro lado, a área de um

triângulo equilátero de lado l é dada por $A_{(3)} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

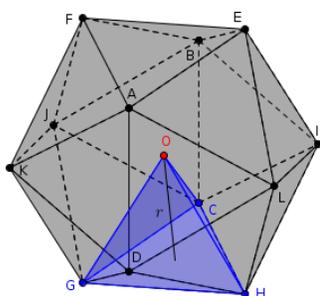
Dessa forma, substituindo $A_{(3)}$ em A temos:

$$A = 20 \cdot l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 5l^2\sqrt{3}$$

6.1.4. Cálculo do volume do icosaedro regular

Em um artigo da RPM 74, o professor Carlos Eduardo de Souza C. Granja e sua aluna Marianna Perrone M. Costa deduz a fórmula do volume do icosaedro⁷⁰ que é utilizada por muitos professores até os dias de hoje.

No entanto, se utilizarmos os elementos das esferas inscrita e circunscrita apresentado no item 6.1.2, podemos encontrar o volume do icosaedro decompondo o sólido em vinte tetraedros equivalentes. Logo, $V = 20 \cdot V_{Tetraedro}$



Sejam O o centro, r o raio da esfera inscrita e R o raio da esfera circunscrita do icosaedro regular de aresta l .

Dessa forma, a área da base do tetraedro é um triângulo equilátero de lado l (área da face do icosaedro), r é a altura e R é a aresta lateral.

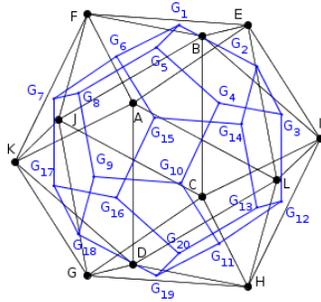
Logo, o volume do tetraedro é dado por

$$V_{Tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot \left(l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot r.$$

$$\text{Então, } V = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot l \frac{\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{12} \Rightarrow V = \frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) l^3$$

70 Granja, C. E. S. C. ; Costa, M. P. M. (2011). A fórmula do volume do icosaedro. Revista do Professor de Matemática, 74, 41-45.

6.1.5. Cálculo da aresta do dual do icosaedro regular



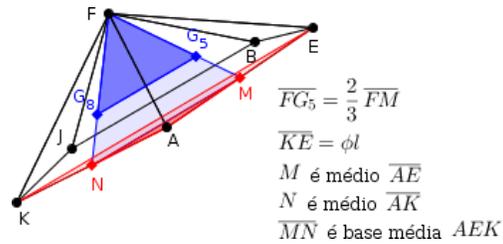
Sejam os pontos $G_k, k = 1, \dots, 20$ os baricentros dos triângulos $EBF, EBI, LIE, AEL, AEF, BJF, JKF, KAF, KAD, DLA, DLH, LIH, ICH, ICB, BJC, CGJ, JKG, GDK, GDH$ e CGH .

Construímos os segmentos entre os centros de faces adjacentes do sólido e teremos assim, o chamado dual do icosaedro com as seguintes arestas: $\overline{G_1G_2}, \overline{G_2G_3}, \overline{G_3G_4},$

$\overline{G_4G_5}, \overline{G_5G_1}, \overline{G_3G_{12}}, \overline{G_1G_6}, \overline{G_2G_{14}}, \overline{G_8G_7}, \overline{G_5G_8}, \overline{G_6G_7}, \overline{G_6G_{15}}, \overline{G_{14}G_{15}}, \overline{G_{14}G_{13}},$
 $\overline{G_{12}G_{13}}, \overline{G_{12}G_{11}}, \overline{G_{10}G_{11}}, \overline{G_{10}G_9}, \overline{G_8G_9}, \overline{G_4G_{10}}, \overline{G_{15}G_{16}}, \overline{G_{13}G_{20}}, \overline{G_{11}G_{19}}, \overline{G_9G_{18}},$
 $\overline{G_{18}G_{19}}, \overline{G_7G_{17}}, \overline{G_{17}G_{18}}, \overline{G_{19}G_{20}}, \overline{G_{20}G_{16}}$ e $\overline{G_{16}G_{17}}$.

Para calcular a medida da aresta do dual do icosaedro regular, representada por $\overline{G_5G_8}$, devemos considerar a pirâmide pentagonal $AEBJKF$ regular.

Sejam M o ponto médio de \overline{AE} ,



N o ponto médio de \overline{AK} , \overline{KE} a diagonal do pentágono $AEBJK$ e $\overline{FG_5} = \frac{2}{3} \overline{FM}$. Então, \overline{MN} é base média do triângulo isósceles AKE de base \overline{KE} . Logo,

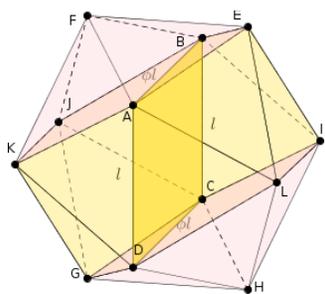
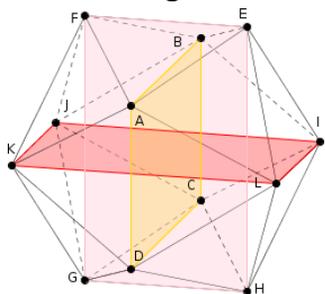
$$\overline{MN} = \frac{\overline{KE}}{2} = \frac{\phi l}{2} = l \frac{\phi}{2}.$$

Por outro lado, sejam G_5 o baricentro de FAE e G_8 o baricentro de FAK .

Então, os triângulos FG_5G_8 e FMN são semelhantes. Para $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ temos:

$$\frac{\overline{FG_5}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{G_5G_8}}{\overline{MN}} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3} \overline{FM}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{G_5G_8}}{l \frac{\phi}{2}} \Rightarrow \overline{G_5G_8} = l \frac{\phi}{3} \Rightarrow \overline{G_5G_8} = l \frac{1 + \sqrt{5}}{6}$$

6.1.6. Retângulo áureo no icosaedro regular



No icosaedro regular de aresta l , vamos mostrar que $ABCD$, $EFGH$ e $IJKL$ são retângulos áureos.

Para mostrar que $ABCD$ é um retângulo, vamos decompor o icosaedro regular em duas pirâmides pentagonais ($AEBJKF$ e $CGDLIH$) equiláteras e um prismatoide ($AEBJKGDLIC$).

Como as bases paralelas do prismatoide são pentágonos temos $\overline{AB} = \overline{CD} = \phi l$.

Por outro lado, se $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC} = l$ e $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ então, $ABCD$ é um retângulo.

Como, a razão entre \overline{AB} e \overline{BC} é a proporção áurea, temos o retângulo $ABCD$ é áureo.

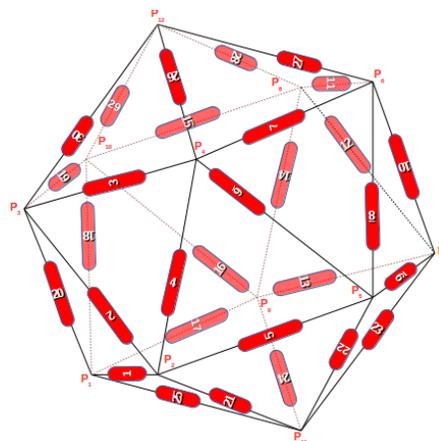
Esse fato se repete se considerarmos os retângulos $EFGH$ e $IJKL$.

6.2. Construindo o modelo esqueleto das arestas do icosaedro regular

Para realizar a construção do modelo esqueleto das arestas do icosaedro regular, utilizando um canudo de 12 cm, vamos precisar de 30 pedaços de canudo de mesma cor⁷¹, um pedaço de linha maior do que 7,2 m de comprimento⁷² e o tempo livre de 3 aulas (2 horas e 30 minutos).

Como o icosaedro tem 20 faces triangulares, vamos realizar a construção passo a passo desse sólido em 3 etapas.

Para isso, decompos o icosaedro em duas pirâmides pentagonais e um prismatoide. Note que tal prismatoide tem 10 faces laterais triangulares e duas bases paralelas pentagonais.



71 Na representação do tetraedro, não visualizamos os canudos representados na parte traseira, por isso a cor do canudo será transparente.

72 Seja t o tamanho da linha e c_1 o tamanho do canudo de quantidade 30. Então, $t = 60 \cdot c_1$. Para $c_1 = 12$ cm, temos: $t = 60 \cdot 12 \Rightarrow t = 720$ cm $\Rightarrow t = 7,2$ m conforme o passo a passo demonstrado nesse item.

Dessa forma, utilizamos 20 canudos de 12 cm e um pedaço de linha de 3,6 m para construir o passo a passo do prismaoide na primeira etapa do processo:

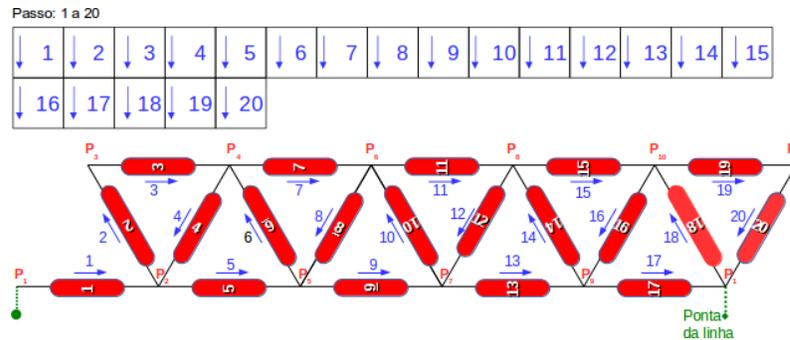


Figura 196 - 1º Sequência (1/3)

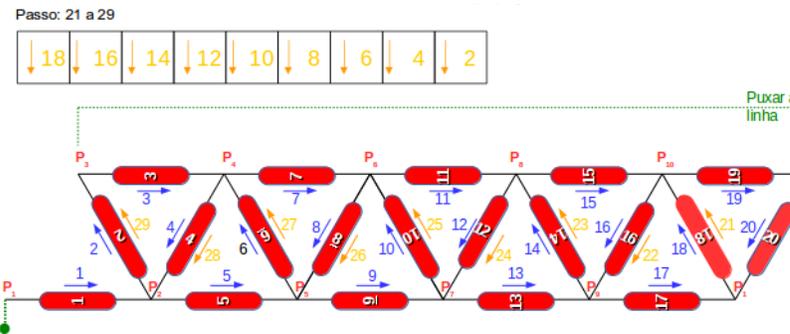


Figura 197 - 1º Sequência (2/3): Visualização 1/2

Antes de prosseguir a construção, conforme indicado no passo 29 da figura 197, vamos puxar a linha e visualizar de outra forma o prismaoide.

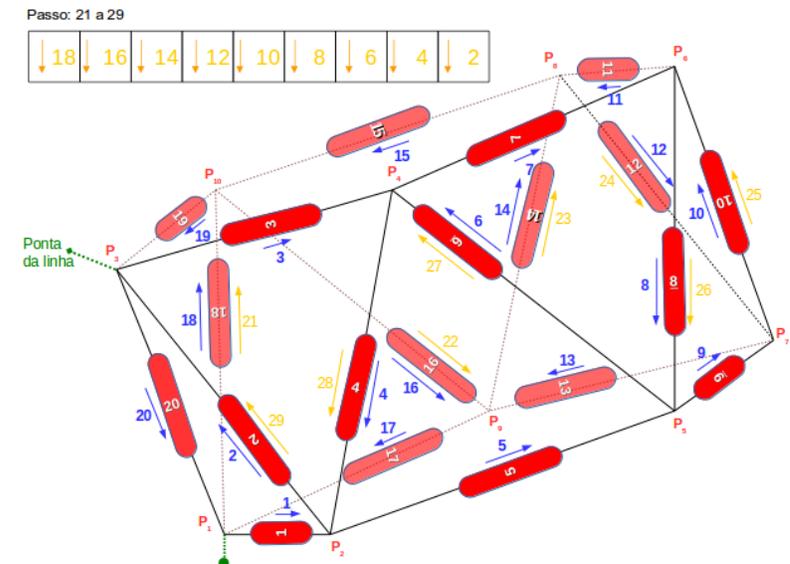


Figura 198 - 1º Sequência (2/3): Visualização 2/2

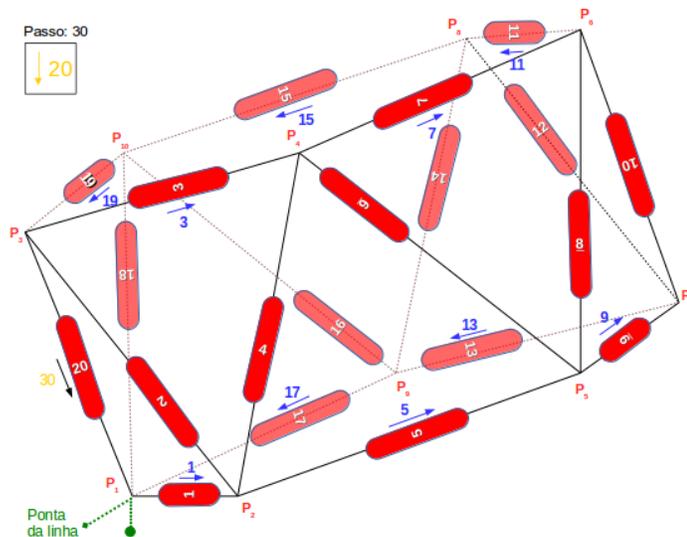


Figura 199 - 1º Sequência (3/3)

Para finalizar a primeira etapa, faremos um único nó com as linhas ligando as arestas 20 e 1 montando o prisma $P_1P_2P_5P_7P_9 - P_3P_4P_6P_8P_{10}$. Observe que os canudos que compõe a base do prisma tem apenas uma linha no seu interior possibilitando a montagem das pirâmides pentagonais a partir de qualquer aresta da base.

Nessa segunda etapa, para construir a pirâmide pentagonal, vamos utilizar um pedaço de linha de 1,8 m e 10 canudos sendo 5 canudos (1, 5, 9, 13 e 17) da base do prisma.

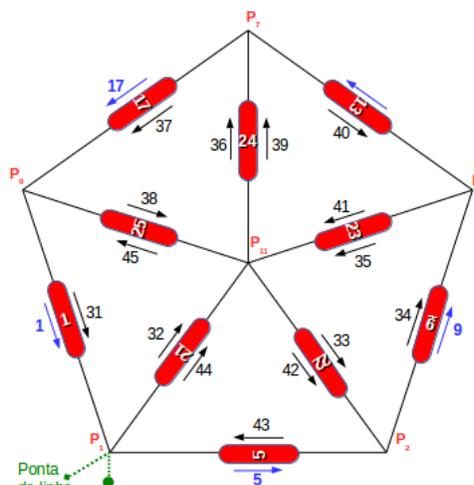
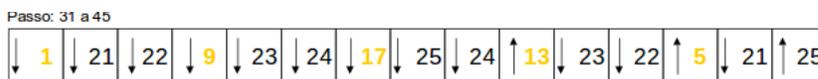


Figura 200 - 2º Sequência: Visualização (1/2)

Agora uma outra visualização da pirâmide pentagonal $P_1P_2P_5P_7P_9 - P_{11}$

Passo: 31 a 45

↓	1	↓	21	↓	22	↓	9	↓	23	↓	24	↓	17	↓	25	↓	24	↑	13	↓	23	↓	22	↑	5	↓	21	↑	25
---	---	---	----	---	----	---	---	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	---	---	----	---	----

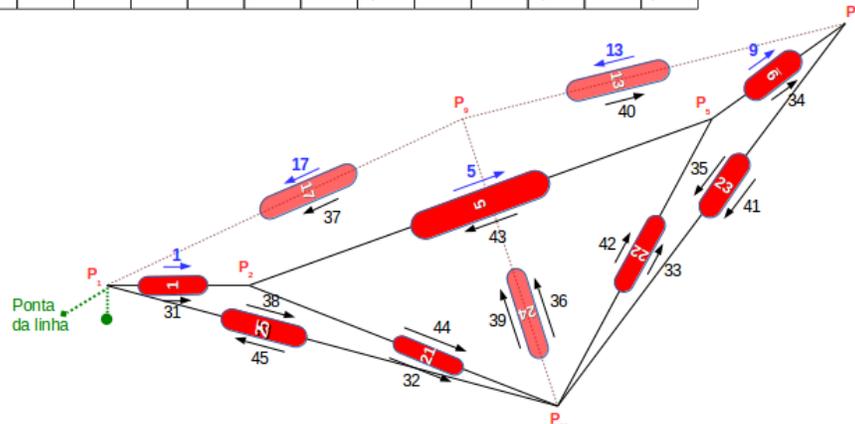


Figura 201 - 2ª Sequência: Visualização (2/2)

Para finalizar, faremos um único nó com as linhas ligando as arestas 25 e 1. Note que a pirâmide foi traçada a partir de aresta 1. Dessa forma, ao respeitar a ordem dos passos (31, 34, 37, 40 e 43), é possível construir uma pirâmide pentagonal a partir de qualquer aresta da base (1, 5, 9, 13 e 17).

Para executar a terceira etapa do processo de construção do icosaedro regular, vamos construir outra pirâmide pentagonal utilizando um pedaço de linha de 1,8 m e 10 canudos sendo 5 canudos (3, 7, 11, 15 e 19) da base do prismaoide.

Passo: 46 a 60

↓	3	↓	26	↓	27	↓	11	↓	28	↓	29	↓	19	↓	30	↓	29	↑	15	↓	28	↓	27	↑	7	↓	26	↑	30
---	---	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	---	---	----	---	----

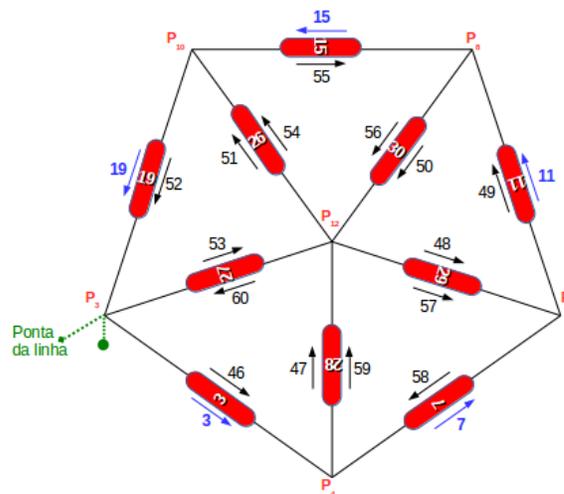


Figura 202 - 3ª Sequência: Visualização (1/2)

Agora uma outra visualização da pirâmide pentagonal $P_3P_4P_6P_8P_{10} - P_{12}$

Passo: 46 a 60

↓ 3	↓ 26	↓ 27	↓ 11	↓ 28	↓ 29	↓ 19	↓ 30	↓ 29	↑ 15	↓ 28	↓ 27	↑ 7	↓ 26	↑ 30
-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-----	------	------

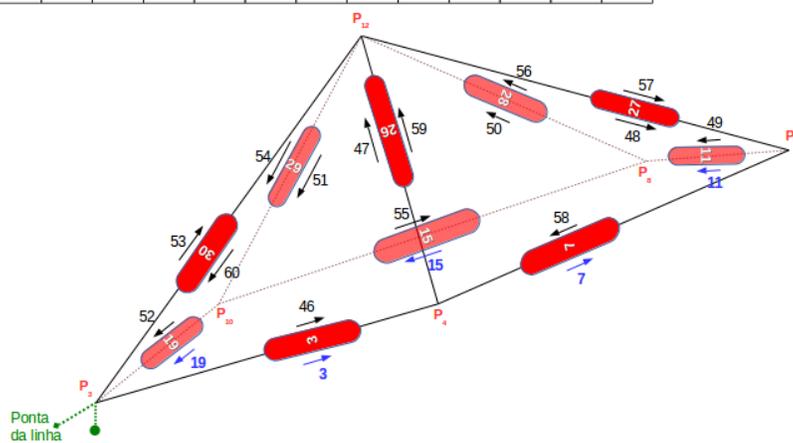


Figura 203 - 3ª Sequência: Visualização (2/2)

Para finalizar, faremos um único nó com as linhas ligando as arestas 30 e 3. E conforme alertado no final da segunda etapa, respeitando a posição física dos passos (46, 49, 52, 55 e 58), a partir de aresta 3, construímos uma pirâmide pentagonal e concluímos que é possível construir tal pirâmide a partir de qualquer aresta da base (3, 7, 11, 15 e 19).

Agora vejamos todo o procedimento sem interrupção, a visualização tridimensional⁷³ e uma foto do sólido construído com material concreto.

73 Ciente que o dodecaedro regular é o dual do icosaedro regular, não vemos a necessidade de aprendizagem da construção do esqueleto utilizando canudo e linha. No entanto, aos alunos mais experientes e habilidosos que gostam de desafios, na seção 4 do anexo 3 apresentamos planificação do icosaedro utilizando régua e compasso.

1ª Sequência: Construindo o prismaoide
 $P_1P_2P_3P_7P_9 - P_3P_4P_6P_8P_{10}$

Passo: 1 a 30

↓ 1	↓ 2	↓ 3	↓ 4	↓ 5	↓ 6	↓ 7	↓ 8	↓ 9	↓ 10
↓ 11	↓ 12	↓ 13	↓ 14	↓ 15	↓ 16	↓ 17	↓ 18	↓ 19	↓ 20
↓ 18	↓ 16	↓ 14	↓ 12	↓ 10	↓ 8	↓ 6	↓ 4	↓ 2	↓ 20

2ª Sequência: Construindo a pirâmide pentagonal
 $P_1P_2P_3P_7P_9 - P_{11}$

Passo: 31 a 45

↓ 1	↓ 21	↓ 22	↓ 9	↓ 23	↓ 24	↓ 17	↓ 25	↓ 24	↑ 13
↓ 23	↓ 22	↑ 5	↓ 21	↑ 25					

3ª Sequência: Construindo a pirâmide pentagonal
 $P_3P_4P_6P_8P_{10} - P_{12}$

Passo: 46 a 60

↓ 3	↓ 26	↓ 27	↓ 11	↓ 28	↓ 29	↓ 19	↓ 30	↓ 29	↑ 15
↓ 28	↓ 27	↑ 7	↓ 26	↑ 30					

Figura 204 - Procedimento completo

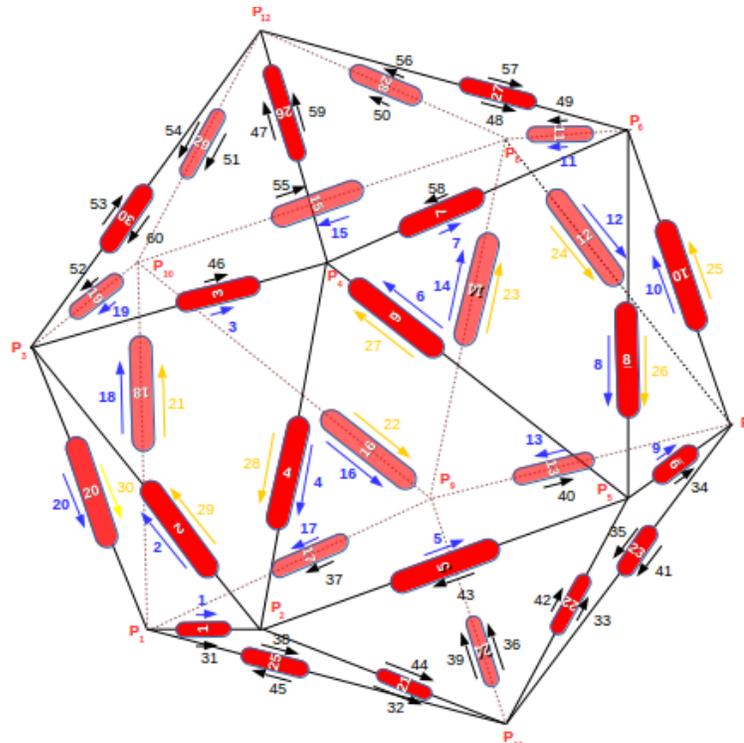


Figura 205 - Visualização

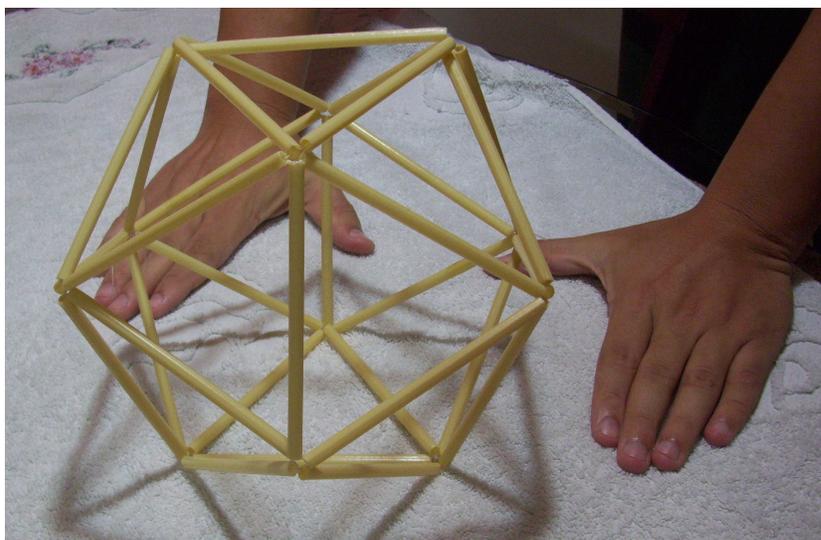


Figura 206 - Construção do modelo esqueleto das arestas do icosaedro regular

6.3. Explorando as novas tecnologias na construção do Icosaedro Regular e seu Dual

6.3.1. Girar, Eixo e Tamanho

Apresentamos um applet desenvolvido no software GeoGebra para observarmos a construção passo a passo apresentada nos itens anteriores do modelo esqueleto das arestas e particularidades do icosaedro regular. O applet em questão pode ser encontrado no link <http://tube.geogebra.org/material/show/id/adCCVBao>.

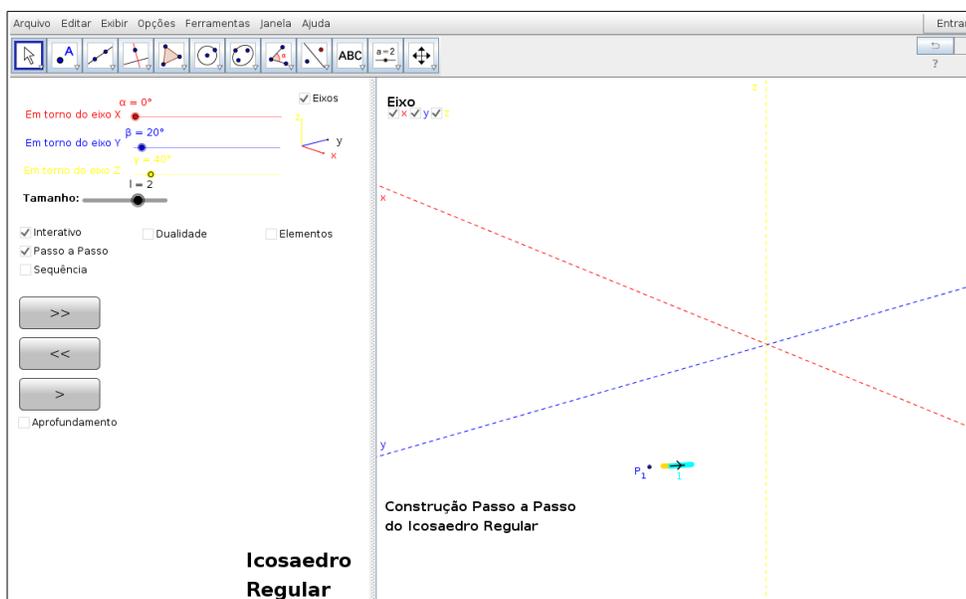


Figura 207

Além de acompanhar passo a passo a construção, é possível alterar o tamanho do icosaedro, girá-lo em torno dos 3 eixos, exibir somente o dual do icosaedro, detalhar individualmente cada um dos seus elementos e aprofundar os estudos desse poliedro.

Conforme exibido na figura 207, temos 4 opções de interação: Interativo, Dualidade, Elementos e Aprofundamento. É possível exibir/ocultar e girar em torno dos três eixos em todas as opções de interação. Já, alterar o tamanho do icosaedro na tela é possível somente nas duas primeiras opções.

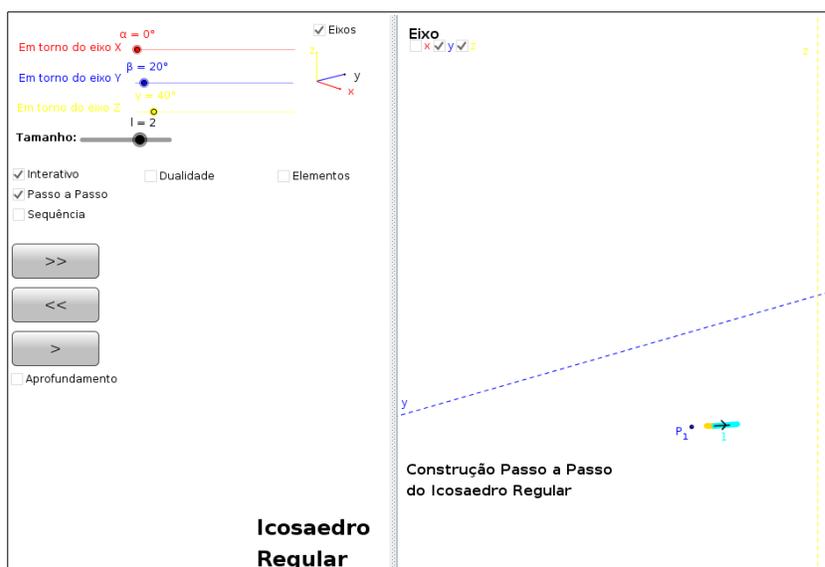


Figura 208

De acordo com a figura 208, podemos mostrar somente os eixos y e z, selecionando a caixa de seleção Eixo e desmarcando a caixa de seleção x. Para não exibir nenhum eixos, desmarque a caixa de seleção Eixo.



Figura 209

Na Figura 209 b), mantemos fixos o eixos x e giramos em torno do eixo y e z. Assim, durante o processo de construção do icosaedro, a possibilidade de girá-lo em torno dos eixos permite uma melhor visualização do poliedro.

6.3.2. Interativo

Nessa situação temos 2 opções: Passo a Passo e Sequência.

6.3.2.1. Interativo - Passo a Passo

Na opção Passo a Passo, conforme exibido na figura 210, temos 3 botões:



(Próximo): Avança com a linha passo a passo.



(Anterior): Retrocede com a linha passo a passo.



(Início): Vai ao Início da linha (representado pelas Figuras 207 e 208).

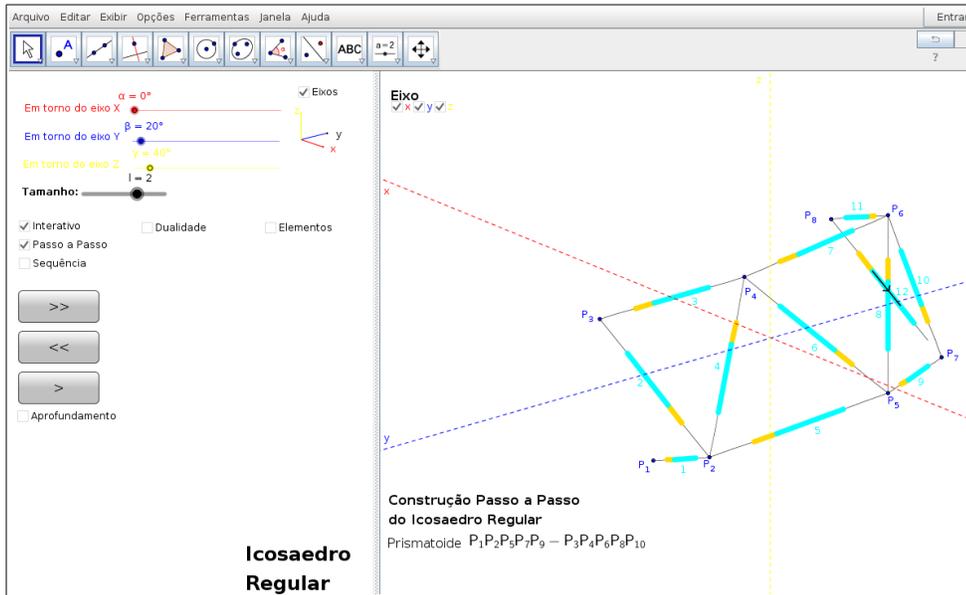


Figura 210

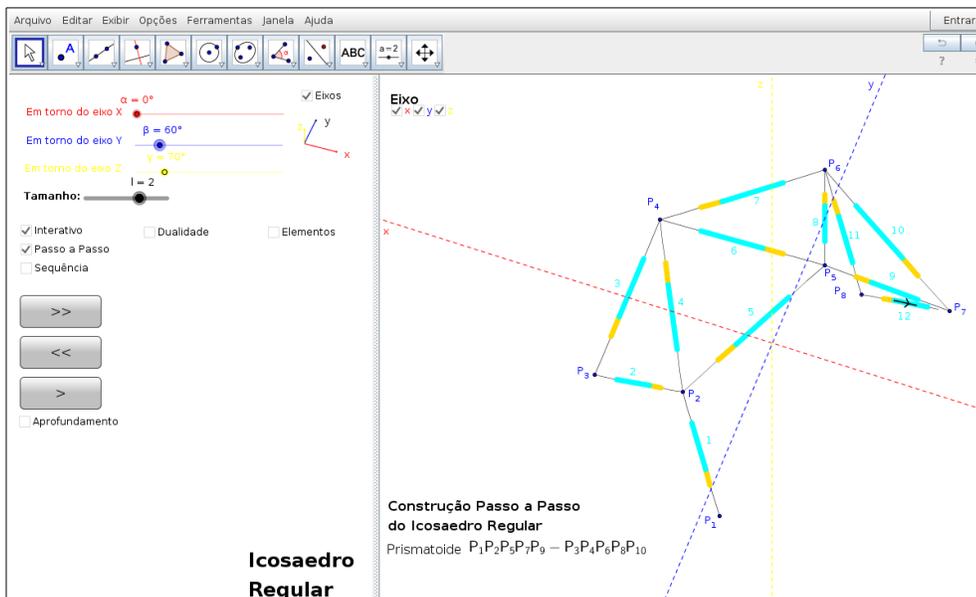


Figura 211

A figura 210 representa a posição do icosaedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 209 a). Já a figura 211 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 209 b).

6.3.2.2. Interativo - Sequência

Na opção Sequência, conforme exibido na figura 212, temos 3 botões:

 (Próximo): Avança com a linha na próxima sequência.

 (Anterior): Retrocede com a linha sequência anterior.

 (Completo): Exibe todo processo de construção de uma só vez.

Nessa opção, o processo interativo permite realizar diversos passos de uma única vez.

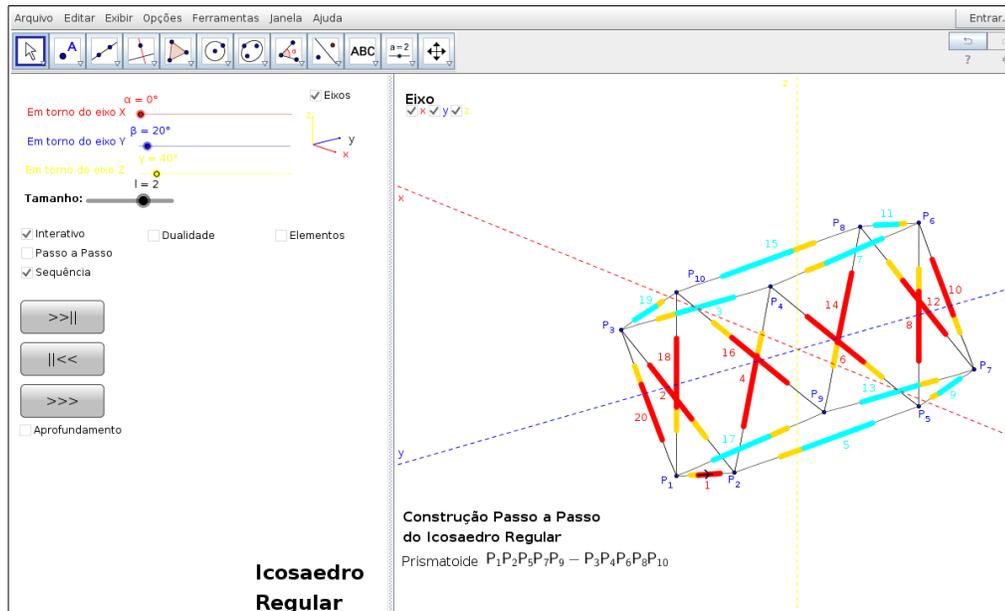


Figura 212

A figura 212 representa a posição do icosaedro durante o processo de construção do modelo esqueleto das arestas refere-se a figura 209 a). Já a figura 213 temos outra visualização do sólido por meio de uma rotação em torno do eixo y conforme indicado na figura 209 b).

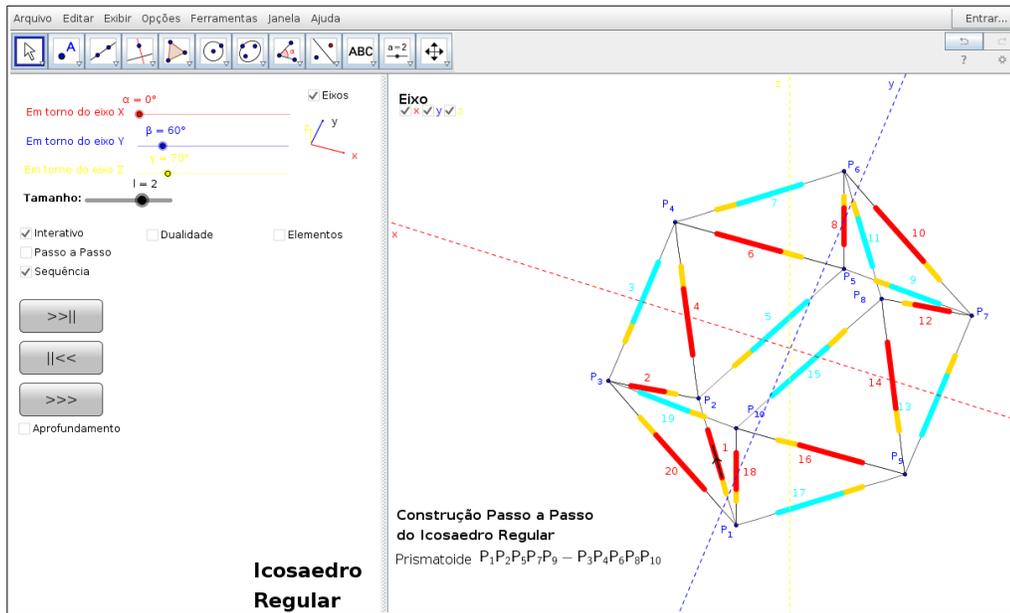


Figura 213

6.3.3. Dualidade

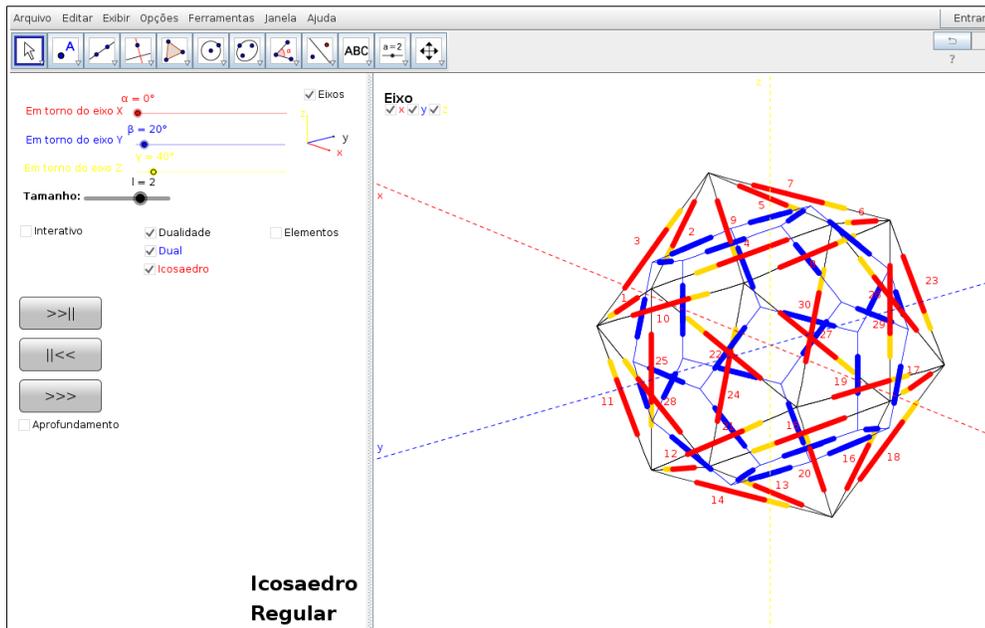


Figura 214

Na figura 214, na opção Dualidade, temos 2 possibilidades: Dual e Icosaedro.

Note que o dual do icosaedro regular é o dodecaedro regular. Nessa figura, o dual está representado de azul. Em alguns poliedros de Platão, mesmo utilizando o

software de geometria dinâmica, não é tão simples visualizar o seu dual.

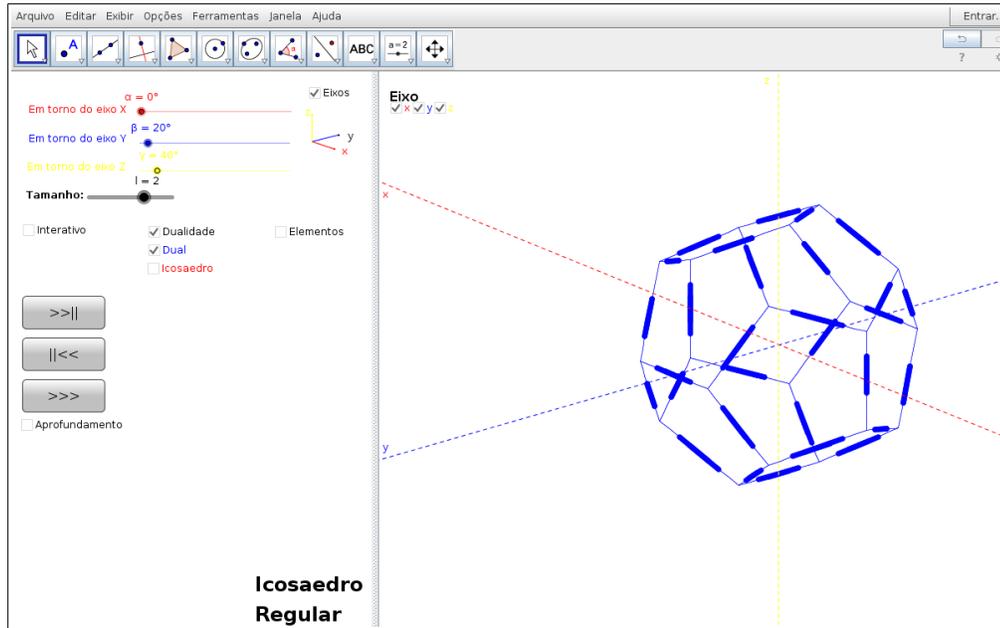


Figura 215

Dessa forma, selecione apenas a opção Dual, para exibir o dual do icosaedro (figura 215). Conforme exibido na figura 216, para exibir somente o icosaedro, selecione apenas a opção Icosaedro.

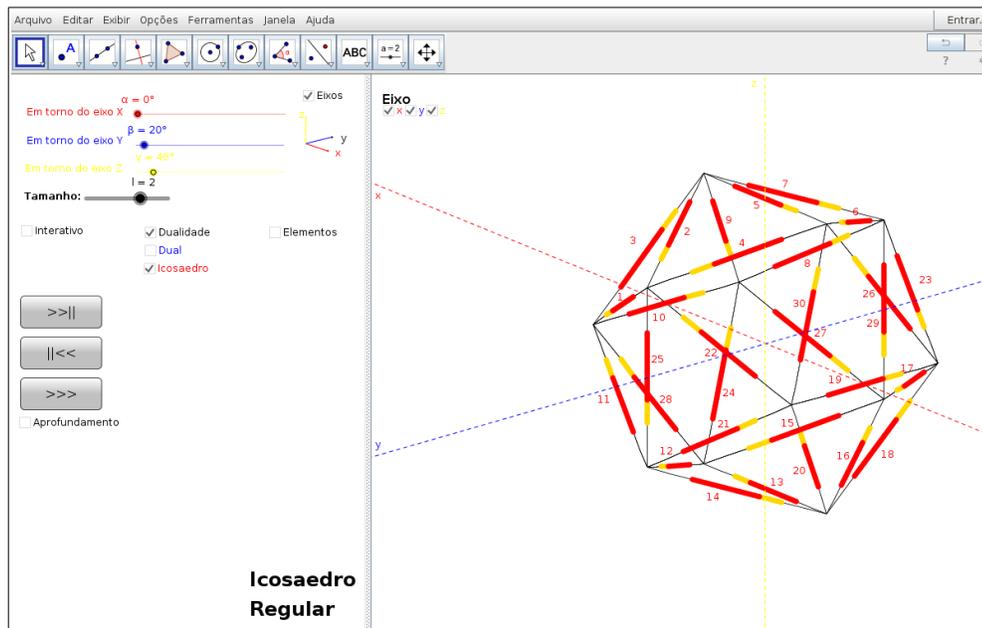


Figura 216

6.3.4. Elementos

Nessa situação temos 3 opções: Vértices, Arestas e Faces.

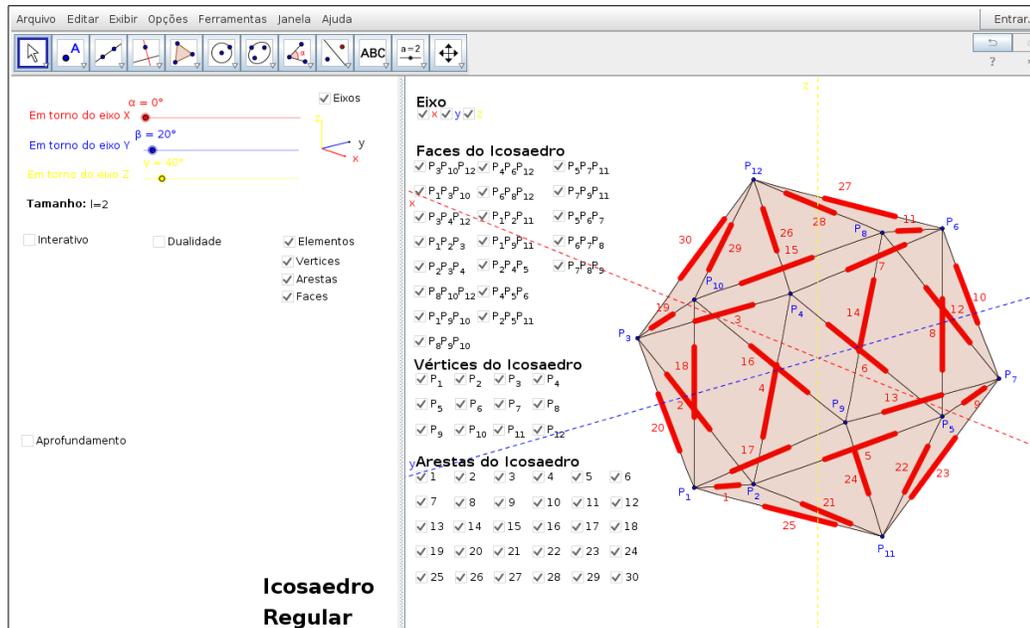


Figura 217

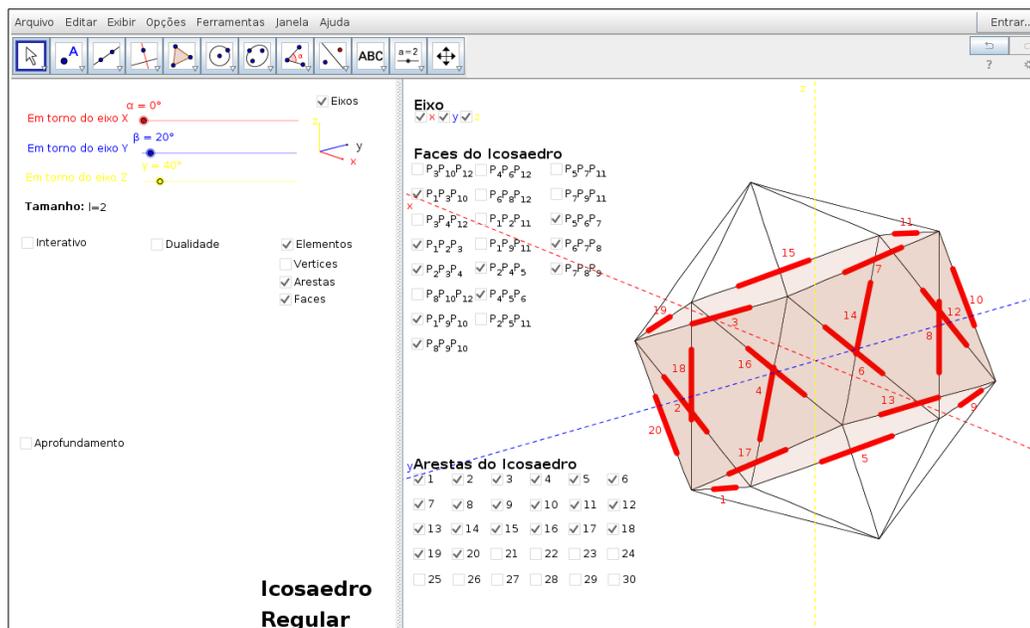


Figura 218

Na figura 217, todos os elementos podem ser exibidos individualmente através da caixa de seleção. Note que o icosaedro tem 8 faces, 6 vértices e 12 arestas, conforme detalhes apresentados do lado direito dessa figura. Assim, se desejarmos

exibir algumas opções de um elemento específico, basta selecionar apenas um elemento do lado esquerdo e as opções do lado direito. Outra situação é visualizada na figura 218, em que exibimos alguns canudos e apenas 10 faces.

6.3.5. Aprofundamento

Conforme exibido na figura 219, na opção Aprofundamento, temos 4 possibilidades: Raio da Esfera; Área e Volume; Aresta do Dual e Retângulo Áureo.

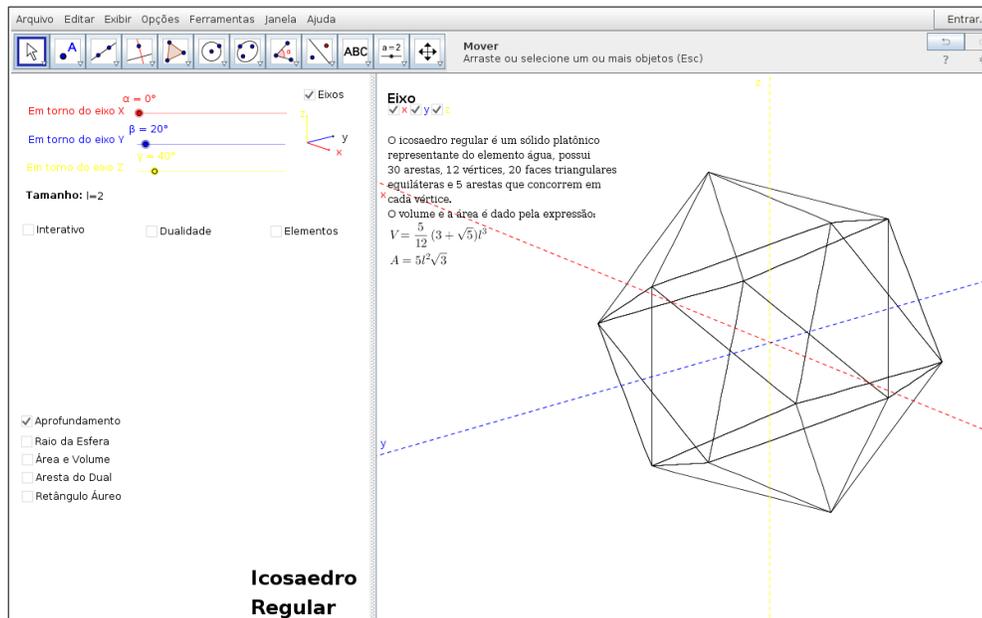


Figura 219

6.3.5.1. Aprofundamento - Raio da Esfera

Na figura 220, na opção Raio da Esfera⁷⁴ do item Aprofundamento, temos 3 possibilidades: Centro da Esfera, Raio da Esfera Circunscrita e Raio da Esfera Inscrita.

6.3.5.1.1. Aprofundamento - Raio da Esfera - Centro

Observamos na figura 220 que o centro de ambas as esferas, inscrita e circunscrita, representado pelo ponto O , é obtido a partir da interseção dos segmentos traçados de cada vértice do icosaedro regular ao seu oposto ou pela interseção dos segmentos traçados a partir dos centros de faces opostas.

74 Conforme apresentado na seção 6.1.2.

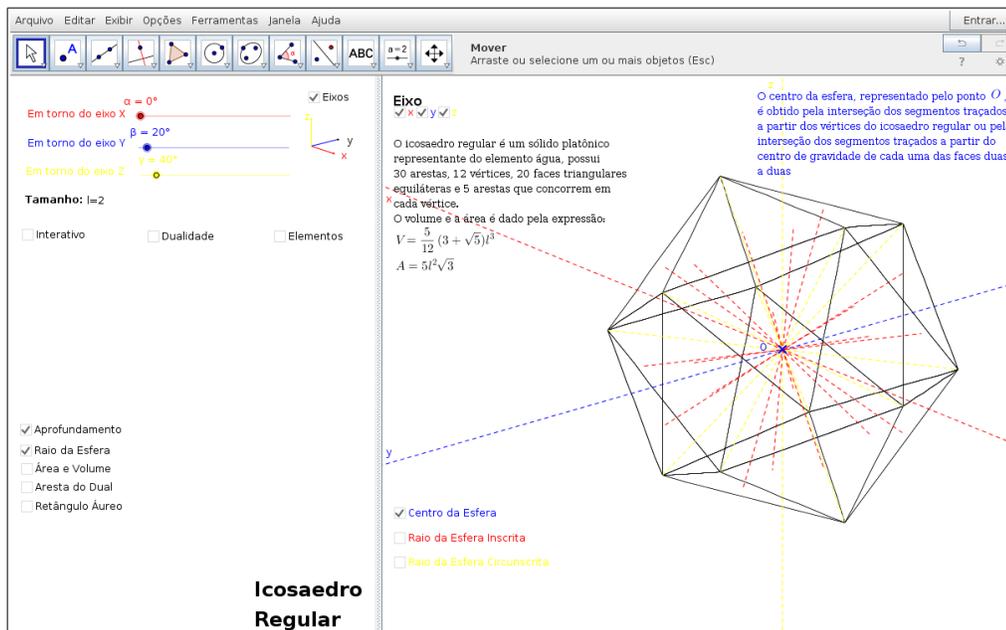


Figura 220

6.3.5.1.2. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Inscrita

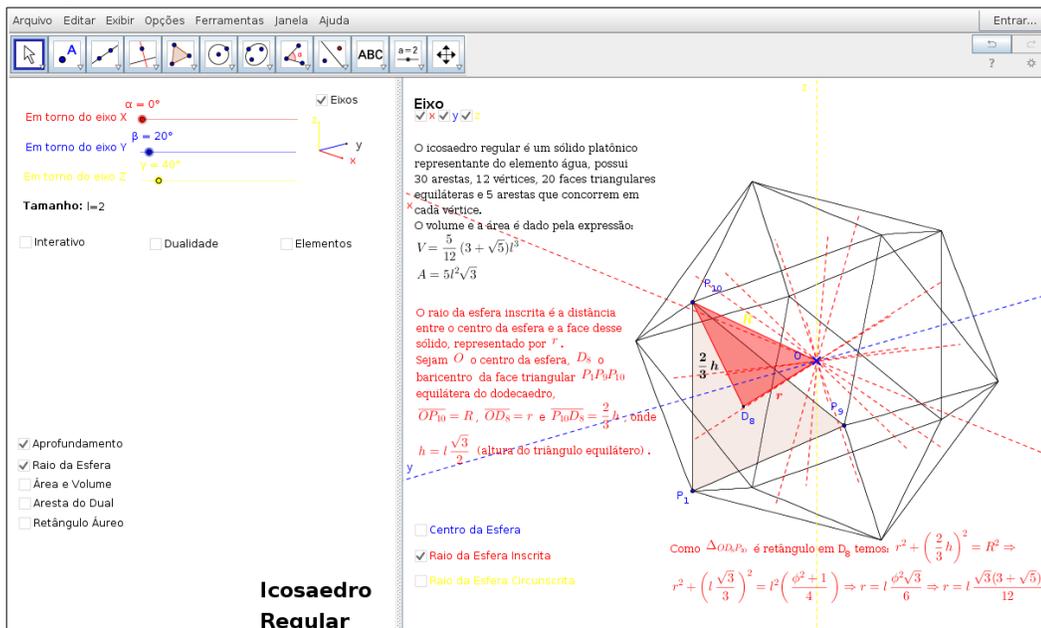


Figura 221

Na figura 221, o raio da esfera inscrita é a distância entre o centro da esfera e uma face desse sólido.

6.3.5.1.3. Aprofundamento - Raio da Esfera - Raio da esfera Circunscrita

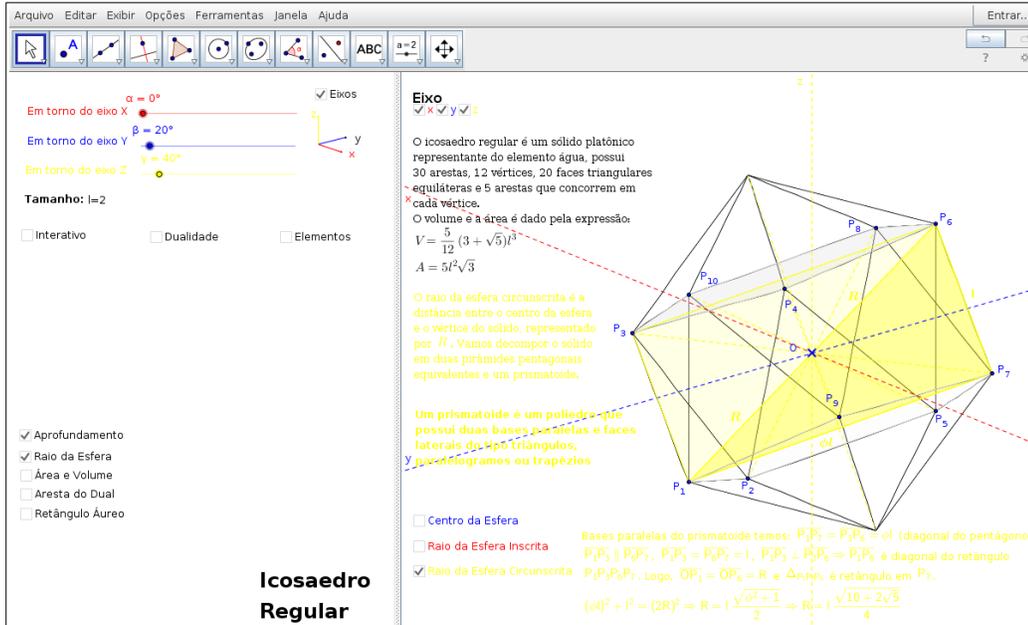


Figura 222

Conforme exibido na figura 222, o raio da esfera circunscrita é a distância entre o centro da esfera e o vértice do sólido. Para isso, devemos decompor o sólido em duas pirâmides pentagonais equivalentes e um prismaoide.

6.3.5.2. Aprofundamento - Área e Volume

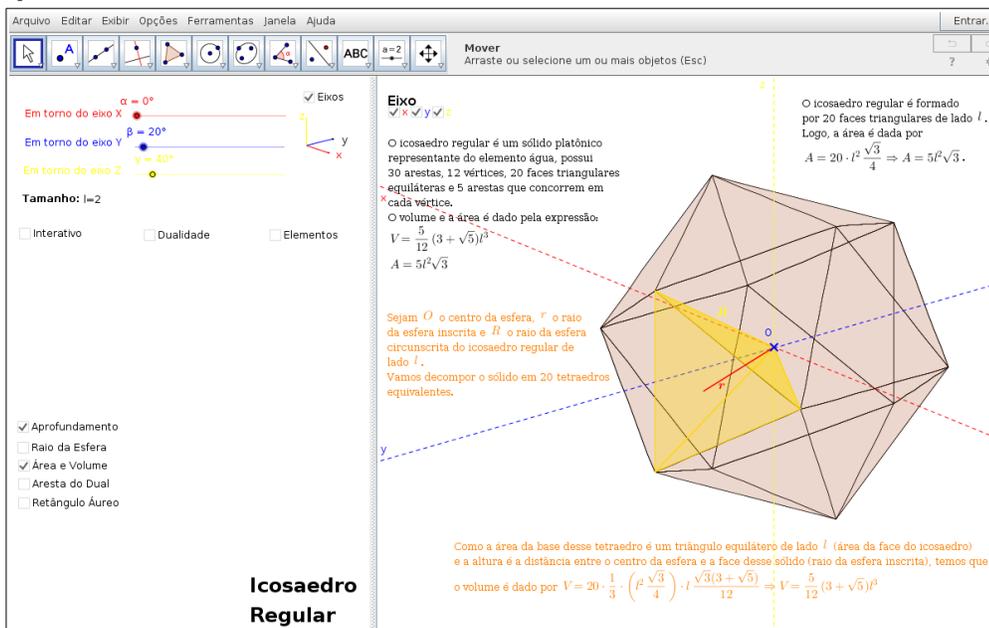


Figura 223

O dodecaedro regular é formado por 12 faces triangulares (figura 223). Logo, a área é doze vezes o valor da área de uma das faces⁷⁵. Por outro lado, o dodecaedro pode ser decomposto em em vinte tetraedros equivalentes em que a área da base é a área da face do sólido e a altura é o raio da esfera inscrita. Logo, o volume é 20 vezes o volume desse tetraedro⁷⁶.

6.3.5.3. Aprofundamento - Aresta do Dual

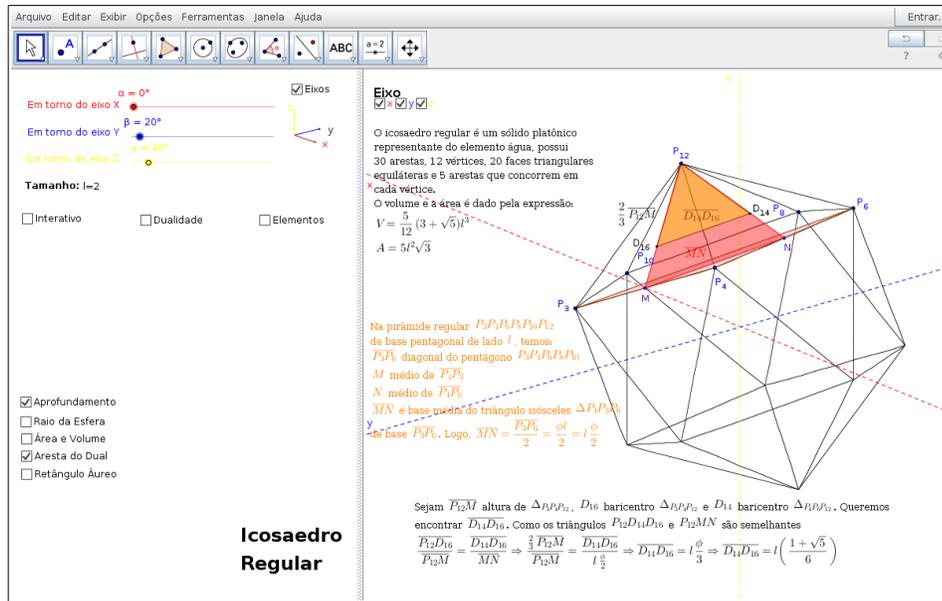


Figura 224

Como o dodecaedro regular é o dual do icosaedro regular, e podemos decompor o icosaedro em duas pirâmides pentagonais regulares e um prismaoide, para calcular o tamanho da aresta do dual, consideramos duas faces adjacentes de uma das pirâmides. Após traçar a altura de ambas as faces, para obter dois triângulos semelhantes, traçamos o segmento ligando os pés dessas alturas e outro segmento ligando os baricentros dessas faces. Então, aplicamos⁷⁷ semelhança de triângulos conforme exibido na figura 224.

6.3.5.4. Aprofundamento - Retângulo Áureo

Conforme exibido na figura 225, é possível traçar três retângulos a partir do vértices do icosaedro.

75 Conforme apresentado na seção 6.1.3.
 76 Conforme apresentado na seção 6.1.4.
 77 Conforme apresentado na seção 6.1.5.

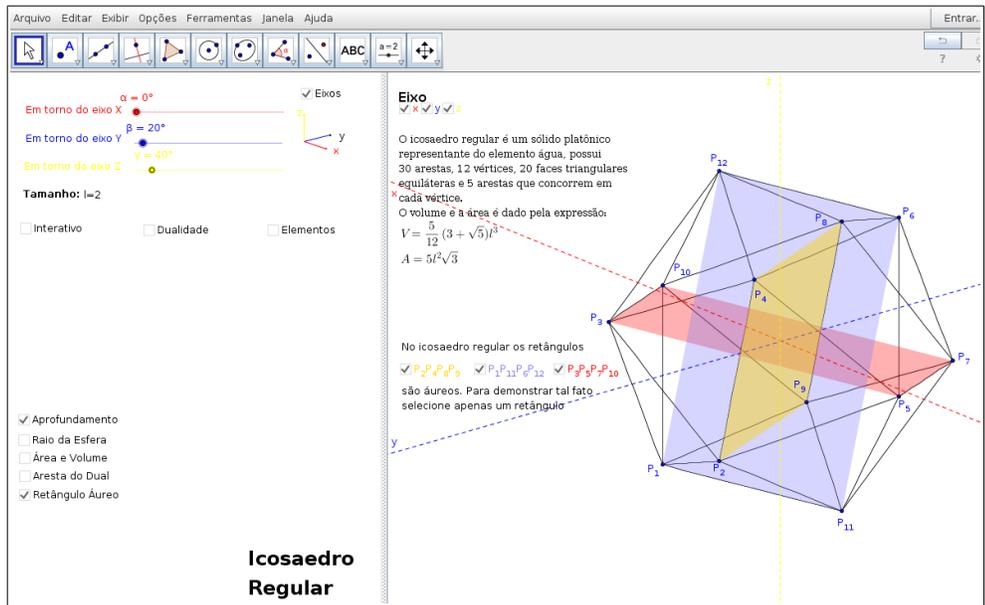


Figura 225

Para mostrarmos⁷⁸ que os retângulos são áureos, selecionamos apenas um retângulo (Figura 226) e observamos que é possível decompor o sólido em duas pirâmides regulares pentagonais e um prismatoide. Como as bases do prismatoide são pentágonos e paralelas, um lado do retângulo vale l e o outro é a diagonal do pentágono. Logo, a razão dos lados do retângulo é a proporção áurea.

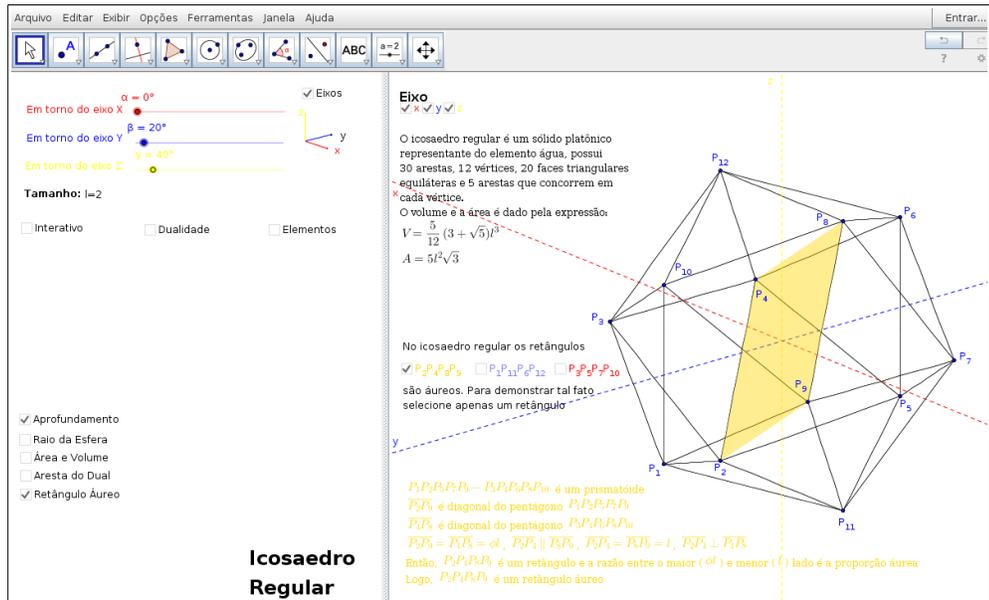


Figura 226

78 Conforme apresentado na seção 6.1.6.

Conclusão

Ninguém pode ser um bom professor sem dedicação, preocupação com o próximo, pois o professor media ao aluno aquilo que nenhum ser vivo pode tirar de alguém, que é o conhecimento (D'Ambrósio, 2004).

No entanto, é papel do professor promover a interação entre os alunos, incentivando ele rever, descrever o seu raciocínio e ao mesmo tempo, desenvolvendo o espírito explorador, criativo e independente por meio de práticas de princípios construtivistas ao explorar situações do dia a dia com o uso das novas tecnologias.

Em suma, os PCN apontam que os materiais concretos têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base para a formalização matemática (Brasil, 1997).

Pensando nisso, as sugestões apresentadas no decorrer desse trabalho, proporcionam ao aluno a oportunidade de acompanhar com detalhes a dedução das fórmulas referentes aos sólidos platônicos partindo do tamanho da aresta representado por l .

Vejamos os principais resultados:

	Tetraedro Regular	Hexaedro Regular	Octaedro Regular	Dodecaedro Regular	Icosaedro Regular
Altura	$l \frac{\sqrt{6}}{3}$				
Diagonal da face		$l\sqrt{2}$			
Diagonal principal		$l\sqrt{3}$			
Área	$l^2\sqrt{3}$	$6l^2$	$2l^2\sqrt{3}$	$l^2 \left(3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})} \right)$	$5l^2\sqrt{3}$

	Tetraedro Regular	Hexaedro Regular	Octaedro Regular	Dodecaedro Regular	Icosaedro Regular
Volume	$l^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$	l^3	$l^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$	$\left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\right) l^3$	$\frac{5}{12} (3 + \sqrt{5}) l^3$
Raio da esfera inscrita	$l \frac{\sqrt{6}}{12}$	$\frac{l}{2}$	$l \frac{\sqrt{6}}{6}$	$l \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20}$	$l \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$
Raio da esfera circunscrita	$l \frac{\sqrt{6}}{4}$	$l \frac{\sqrt{3}}{2}$	$l \frac{\sqrt{2}}{2}$	$l \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{5})}{4}$	$\frac{l}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} + 1}$
Tamanho da aresta do Dual	$\frac{l}{3}$	$l \frac{\sqrt{2}}{2}$	$l \frac{\sqrt{2}}{3}$	$l \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$	$l \frac{1 + \sqrt{5}}{6}$
Volume do octaedro regular inscrito	$\frac{1}{2} \left(l^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \right)$				
Tamanho da aresta do tetraedro regular inscrito		$l\sqrt{2}$		$l \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$	
Tamanho da aresta do hexaedro regular inscrito				$l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$	
Tamanho da aresta do octaedro regular inscrito				$l \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$	
Tamanho da aresta do icosaedro regular inscrito				$l \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$	
Prova do Retângulo Áureo				✓	✓

Em seguida, na construção dos modelos esqueletos utilizando material concreto, o aluno pode visualizar a parte interna da figura formada, enxergando por entre as arestas e proporcionando a possibilidade de construir concretamente diversos elementos geométricos tais como: diagonais, alturas, seções planas, etc. Assim,

trabalhando com material concreto em sala de aula, indicado para todas as séries nos diferentes graus de dificuldade, podemos auxiliar o desenvolvimento do pensamento intuitivo do aluno.

Porém, isso não quer dizer que, ao usar o material concreto obteremos o resultado esperado, pois vários fatores interferem na aprendizagem, mas ao utilizarmos tal material proporcionamos aos alunos a chance de fazer questionamentos que eles provavelmente não fariam se fosse uma aula teórica e ajudamos na compreensão e ampliação da percepção do espaço e na construção de modelos, mentais ou manipulativos, para interpretar criticamente questões de Matemática e outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, é fundamental para o professor estar atualizado em um mundo tecnológico e virtual visto que os recursos do programa são uma inovação no ensino de geometria e, o ambiente colaborativo propiciado pelo programa, transforma as aulas prazerosas e ilustrativa, uma vez que a exploração, manipulação e visualização realmente favorecem uma aprendizagem significativa e ao passo que vamos descrevendo, encontramos elementos conceituais diferentes e, conseqüentemente, enriquecemos nosso repertório matemático posto que perceber as relações entre as representações planas e suas propriedades são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos de outras ciências.

Com isso, esperamos que as diversas ações apresentadas no presente trabalho, tais como a manipulação do material concreto e as aplicações feita no GeoGebra (software de geometria dinâmica) venha despertar nos alunos a curiosidade e a vontade para aprender outros conteúdos matemáticos.

Referências Bibliográficas

- BAIRRAL, M. A. ; SILVA, M. A. Instrumentação do Ensino da Geometria. 1. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2005. v. 2.325p.
- BAIRRAL, M. A. Desenvolvendo-se criticamente em matemática: a formação continuada em ambientes virtualizados. In: FIORENTINI, D; NACARATO, A. M. (Org.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática*. São Paulo: Musa Editora, 2005.
- BORTOLOSSI, H. Os Sólidos Platônicos. Disponível em: < <http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html> >. Último acesso: Março de 2015
- BORTOLOSSI, H. Uma Pletora de Poliedros. Disponível em: < <http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html> >. Último acesso: Março de 2015
- BOYER, C. B. História da Matemática. SP. Editora Edgar Blucher Ltda. Tradução de Elza F. Gomide. 1974.488 p.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : matemática / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília : MEC/SEF, 1997. 142p
- BUEKENHOUT, F. and PARKER, M. "The Number of Nets of the Regular Convex Polytopes in Dimension ≤ 4 ". Disc. Math. 186, 69-94, 1998.
- D'AMBRÓSIO, U. Educação Matemática: da teoria à prática. 11a ed. Campinas: Papirus, 2004.
- EUCLIDES. Os elementos. Irineu Bicudo (Trad.). 1. ed. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600p.
- FIORENTINI, D. e MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, Ano 4, n. 7, julho de 1990.
- GRANJA, C. E. S. C. ; COSTA, M. P. M. (2011). A fórmula do volume do icosaedro. *Revista do Professor de Matemática*, 74, 41-45.
- KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e Entendendo Poliedros**. 2ª ed. Niterói: EdUFF, 2003.210p
- _____, . **Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria**. 1ª Ed. ampl. Rio de Janeiro: UFF/UAB/CEDERJ, 2008. 223p.

- _____. Modelando Poliedros de Platão. Disponível em: < http://www.uff.br/cdme/poliedros_platao_dual/index.html >. Último acesso: Abril de 2015
- KILHIAN, Kleber. Construção de um Pentágono Regular com Régua e Compasso (Parte II). Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/08/construcao-de-um-pentagono-regular-com_28.html> Acesso em 10 de mar. 2015.
- KILHIAN, Kleber. Construção de um Pentágono Regular com Régua e Compasso (Parte III). Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/08/construcao-de-um-pentagono-regular-com_29.html> Acesso em 10 de mar. 2015
- KNOTT, R. The Golden Geometry of Solids or Phi in 3 dimensions. Disponível em: < <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phi3DGeom.html> >. Último acesso: Abril de 2015
- Kunihiko Kasahara. Origami - Yume Ori Kikagaku no Subete. Japan Publications, Tóquio, 1988. Em japonês.
- LAURO, M. M. Discutindo o ensino de geometria: uma proposta para o ensino dos poliedros regulares. Dialogia, São Paulo, v. 7, n. 2, p. 177-188, 2008.
- LIMA, E. L. et al. A Matemática do Ensino Médio, volume 2. Rio de Janeiro. SBM. 2006.308 p
- LIMA, E. L. Meu professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro. IMPA. 1991.
- LORENZATO, S. **Por que não Ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista, Ano III, n. 4, 1º semestre, Blumenau: SBEM, 1995.
- Matematicas Visuales, Geometry. Disponível em: < <http://www.matematicasvisuales.com/english/html/geometry/geometry.html> >. Acesso em: 10 de jul. 2014
- MACHADO, N. J. Os poliedros de Platão e os dedos da mão. Coleção vivendo a matemática. São Paulo: Scipione, 1990.
- MENDES, A. I. Matemática e Investigação na Sala de Aula: Tecendo Redes Cognitivas. 2 edição revisada e ampliada. Livraria da Física, São Paulo, 2009 215p
- PARK, J. ; SON, Y. ; KWON, O. ; YANG, H. ; CHOI, K. Constructing 3D graph of function with GeoGebra(2D). In: **Paper will be presented at First Eurasia Meeting of GeoGebra**, 2010, Istanbul. Disponível em: < http://2011geogebralessons.wikispaces.com/file/view/son,yang,kwon,park,choi_2003_.pdf >. Acesso em: 15 nov. 2013.

- PEREIRA, Hamilton Soares. Poliedros Platônicos. Belo Horizonte: UFMG, 2011, 42 p. Monografia - Pós Graduação em Matemática para Professores do Ensino Básico. Disponível em: < http://www.mat.ufmg.br/~espec/Monografias_Noturna/Monografia_HamiltonSoares.pdf >. Acesso em: 02 março 2015
- VERSA, Ilseu. SOUZA, José Ricardo. Uso de material didático manipulável (material concreto) no estudo da geometria métrica espacial. Disponível em: < <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1953-8.pdf> >. Acesso em: 26 Nov. 2014.
- WAGNER, E. (1998). Um volume complicado. Revista do Professor de Matemática, 36, 31-37.
- WASHILISKI, Marcelo. Didática e avaliação: algumas perspectivas da educação matemática. Curitiba: Ibpex, 2007.
- Wikipédia, Retângulo de ouro. Disponível em: < http://pt.wikipedia.org/wiki/Retângulo_de_ouro >. Último acesso: Julho de 2014
- Wikipédia, Proporção áurea. Disponível em: < http://pt.wikipedia.org/wiki/Proporção_áurea >. Último acesso: Julho de 2014

Anexos

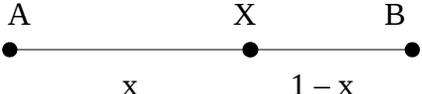
Anexo 1 - Número de Ouro, Retângulo Áureo e Pentágono Regular⁷⁹

Seção 1: Número de Ouro

No Livro VI dos Elementos, Euclides apresenta a seguinte definição:

“Uma reta é dita estar cortada em extrema razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor” (Euclides, 2009, p. 231)

Supondo que o segmento todo tem comprimento 1 e que segmento maior tem medida x , então a definição de Euclides pode ser traduzida na seguinte equação


$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1-x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

Resolvendo essa equação, o valor positivo de x é $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Conseqüentemente,

$$\frac{x}{1-x} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5}}{9-5} \Rightarrow \frac{2+2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Em outras palavras, sempre que dois segmentos de reta estão nesta situação, dizemos que eles são incomensuráveis, o que quer dizer que não tem medida comum.

Então sempre que não pudermos escrever uma medida na forma de um quociente, isto é, quando o número que expressa a medida, não for um número do conjunto dos racionais, dizemos que esta medida é representada por um número irracional.

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180399\dots = \phi$ é denominado número de ouro e

⁷⁹ Matematicas Visuales, Geometry. Disponível em: < [http://www.matematicasvisuales.com/english/html/geometry/ geometry.html](http://www.matematicasvisuales.com/english/html/geometry/geometry.html) >. Acesso em 10 de jul. 2014

também $\phi^{-1} = \frac{1}{\phi} = 0,6180399\dots$ que é a razão inversa do número de ouro.

Vejam algumas propriedades de ϕ :

i. $\phi^{-1} = \phi - 1$ ou $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$

Demonstração:

$$\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-2+1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1 + \phi = \phi - 1$$

ii. $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$

Demonstração:

De (i) temos $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$, então $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$

iii. $\phi^2 = 1 + \phi$

Demonstração:

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} = \phi + 1$$

iv. $\phi(\phi - 1) = 1$

Demonstração:

$$\phi(\phi - 1) \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \frac{5-1}{4} \Rightarrow 1$$

v. $\phi^3 = \phi(\phi + 1)$

Demonstração:

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 \Rightarrow \phi^3 = \phi(\phi + 1)$$

É válido dizer que:

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{4} = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2 + \sqrt{5}$$

$$\phi^4 = (\phi^2)^2 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} = \frac{14+6\sqrt{5}}{4} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

Seguem algumas curiosidades:

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Seção 2: Retângulo de Ouro ou Retângulo Áureo

O retângulo de ouro (ou retângulo áureo) é uma figura geométrica muito presente nas artes.

A psicologia da percepção demonstra que o retângulo de ouro parece agradável à vista, ao ser confrontado com outros formatos aleatórios.

Durante anos o homem procurou a beleza perfeita, a proporção ideal. Arquitetos e artistas da Grécia Antiga acreditavam que a razão de ouro potencializava o valor estético dos monumentos e das esculturas.

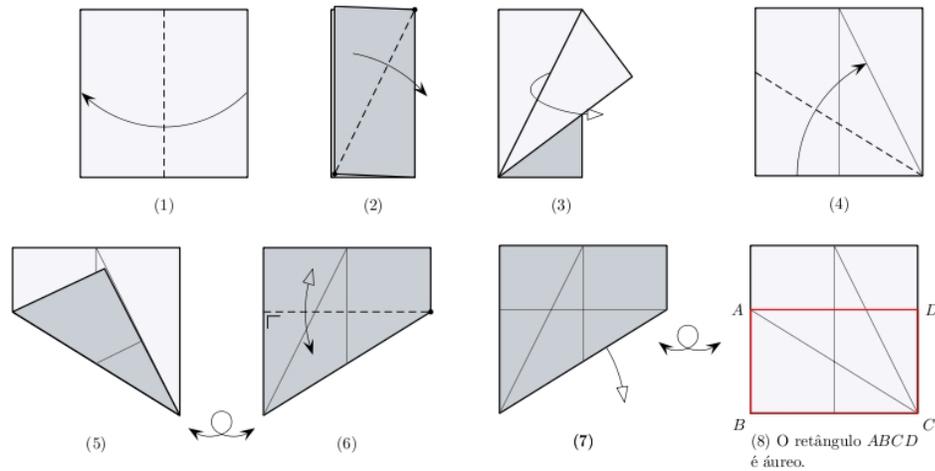
O famoso pintor e inventor Leonardo da Vinci (1452-1519), ao pintar São Jerônimo, em 1480, procurou encaixar a imagem desse santo em um retângulo de ouro.

Outro exemplo é o templo Partenon, em Atenas, Grécia, construído pelos gregos por volta de 440 a.C. para moradia dos deuses olímpicos e para culto. Os gregos viam em seus deuses a representação mais perfeita e admirável da beleza humana. Assim, as únicas moradas dignas dessas divindades eram as que, por suas proporções, formavam um conjunto harmonioso perfeito.

Na arquitetura moderna, exemplos de edifícios projetados por *Le Corbusier*, ou a sede das Nações Unidas contêm o retângulo de ouro em suas fachadas.

Este retângulo, cuja razão entre os seus lados (maior pelo menor) é igual ao número de ouro, pode ser dividido em um quadrado e um retângulo também de ouro. E, este processo pode ser repetido indefinidamente.

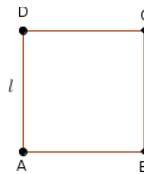
Para construir um retângulo de ouro a partir de uma folha de papel quadrada realizando as seguintes dobraduras (Kunihiko, 1988):



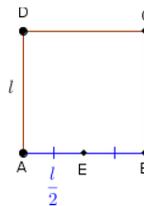
Agora vejamos o procedimento para construir o retângulo de ouro utilizando

Régua e Compasso:

1. Construir um quadrado $ABCD$ de lado l . Note que $\overline{AB} = \overline{BC} = l$



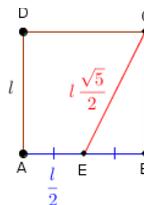
2. Seja E o ponto médio de \overline{AB} . Note que $\overline{AE} = \overline{EB} = \frac{l}{2}$



3. Traçar o segmento EC

Como Δ_{EBC} é retângulo em B , aplicando o teorema de Pitágoras temos:

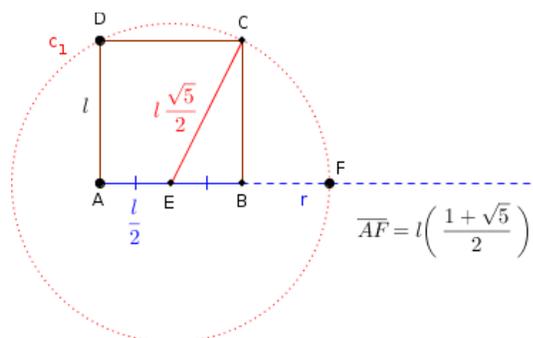
$$\overline{EC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{EC}^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2 \Rightarrow \overline{EC}^2 = \frac{5l^2}{4} \Rightarrow \overline{EC} = l\frac{\sqrt{5}}{2}.$$



4. Trace a semirreta r com origem em A passando por B .

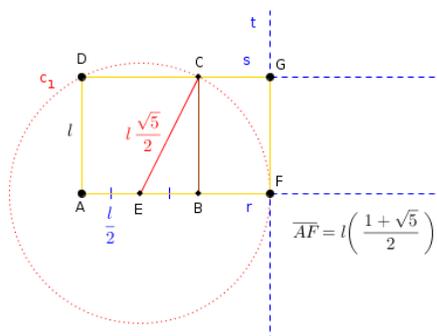
- Trace a circunferência c_1 de centro E e raio \overline{EC} .
- Denote por F o ponto de interseção entre c_1 e r .

Note que $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} \Rightarrow \overline{AF} = \frac{l}{2} + l \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \overline{AF} = l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$



- Trace a semirreta s com origem em D passando por C .
- Trace a reta t perpendicular a r passando por F .
- Denote por G o ponto de interseção entre t e s .

Construímos um retângulo $AFGD$ de lados l e ϕl , em que $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



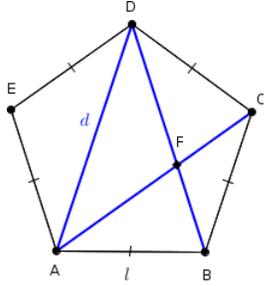
E, dividindo o lado maior do retângulo construído pelo menor temos:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

Assim, a razão entre \overline{AF} e \overline{AD} é $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, ou seja, o número de ouro.

Seção 3: Pentágono Regular

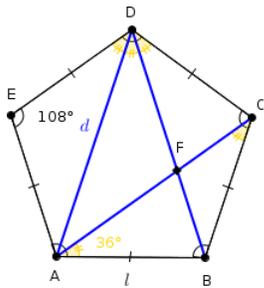
1.1. A razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular



No pentágono regular $ABCDE$ de lado l , sejam \overline{AD} , \overline{AC} e \overline{BD} as diagonais do pentágono são representadas pela letra d e queremos calcular $\frac{d}{l}$.

Como $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BD} = d$, temos os triângulos BAC , CBD , EDA e DAB são isósceles.

Por outro lado⁸⁰, o pentágono tem 5 lados e 5 ângulos internos de 108° cada um.



Assim, no triângulo BAC , temos:

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ \Rightarrow \angle BAC = 36^\circ$$

Analogamente, $\angle CDB = \angle ADE = \angle BAC$.

Em D , temos:

$$\angle CDB + \angle ADE + \angle BDA = 108^\circ \Rightarrow \angle BDA = 36^\circ.$$

Como DAB isósceles temos $\angle ABD = \angle DAB$

Então,

$$\angle BDA + \angle ABD + \angle DAB = 180^\circ \Rightarrow \angle ABD = 72^\circ$$

No triângulo ABF , para $\angle ABF = \angle ABD = 72^\circ$ e

$\angle BAF = \angle BAC = 36^\circ$, temos:

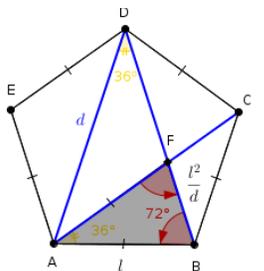
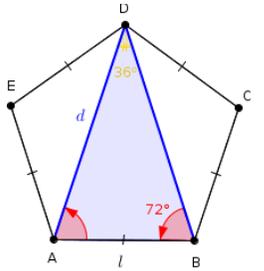
$$\angle ABF + \angle BAF + \angle BFA = 180^\circ$$

Então,

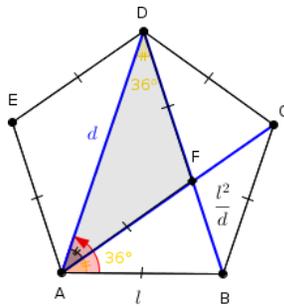
$$\angle BFA = 72^\circ$$

Logo, o triângulo ABF é isósceles, o que implica,

$\overline{AB} = \overline{AF} = l$. Portanto, os triângulos DAB e ABF são semelhantes pelo caso de semelhança AA .



80 Sejam n o número de lados, d o número de diagonais, S_n a soma dos ângulos internos e a_i o ângulo interno de um polígono regular. Então, $d = \frac{n(n-3)}{2}$, $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$ e $a_i = \frac{S_n}{n}$.



Então,

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} \Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{l}{\overline{BF}} \Rightarrow \overline{BF} = \frac{l^2}{d}$$

Como $\angle ABD = \angle DAB = 72^\circ$ e $\angle BAF = 36^\circ$ temos:

$$\angle BAF + \angle DAF = \angle DAB \Rightarrow \angle DAF = 36^\circ$$

Logo, o triângulo FDA é isósceles, o que implica

$$\overline{AF} = \overline{FD} = l.$$

Como $\overline{BD} = \overline{BF} + \overline{FD}$ temos:

$$d = \frac{l^2}{d} + l \Rightarrow \frac{l^2}{d} = d - l \Rightarrow l^2 = d(d - l) \Rightarrow l^2 = d^2 - dl \Rightarrow d^2 - ld - l^2 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau em d, temos:

$$d = \frac{-(-l) \pm \sqrt{(-l)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-l^2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow d = \frac{l \pm \sqrt{5l^2}}{2} \Rightarrow d = l \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

Então,

$$d = l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

ou,

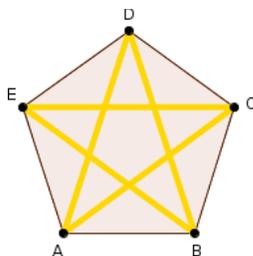
$$d = l \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Como $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ temos:

$$d = l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

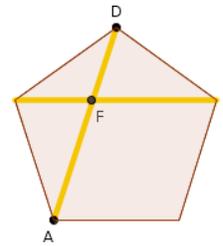
Portanto,

$$\frac{d}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$



Cerca de 500 aC, Pitágoras e os pitagóricos conheciam esta razão porque o seu símbolo era o pentagrama (um pentágono com suas diagonais), mas a primeira referência escrita que temos é no Livro VI dos Elementos de Euclides (cerca de 300 aC):

“uma reta é dita estar cortada em extrema razão, quando como a toda esteja para o maior segmento, assim o maior para o menor” (Euclides, 2009, p. 231)



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{AF}}$$

A primeira referência a esta construção aparece no Livro II, Proposição 11 Euclides neste livro ainda não tinha definido "razão" e a proposição é feita em termos de áreas.

"Cortar a reta dada, de modo que o retângulo inscrito pela inteira e por um dos segmentos ser igual ao quadrado do segmento restante" (Euclides, 2009, p. 146).

Usando a nossa notação, teríamos:

$$\overline{AD} \cdot \overline{AF} = \overline{FD}^2$$

1.2. Construção de um pentágono regular com régua e compasso

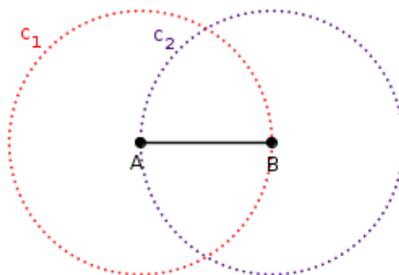
Como a razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular é o número de ouro, vejamos o passo a passo da construção de um pentágono regular de dois métodos diferentes utilizando régua e compasso

Método 1⁸¹

1. Considere os pontos A e B .
2. Trace o segmento AB . Note que \overline{AB} é o lado do pentágono

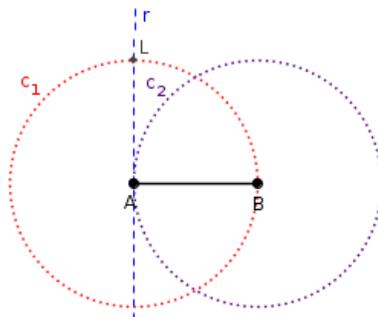


3. Trace a circunferência c_1 de centro A e raio \overline{AB} .
4. Trace a circunferência c_2 de centro B e raio \overline{BA} . Note que $\overline{AB} = \overline{BA}$

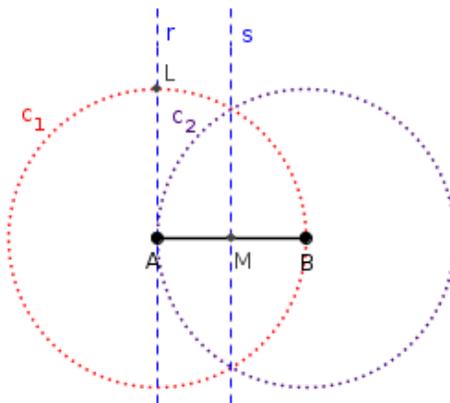


81 KILHIAN, Kleber. Construção de um Pentágono Regular com Régua e Compasso (Parte II). Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/08/construcao-de-um-pentagono-regular-com_28.html> Acesso em 10 de mar. 2015.

5. Trace a reta r perpendicular a \overline{AB} passando por A .
6. Denote por L o ponto de interseção entre r e c_1 . Note que $\overline{AB} = \overline{AL}$.

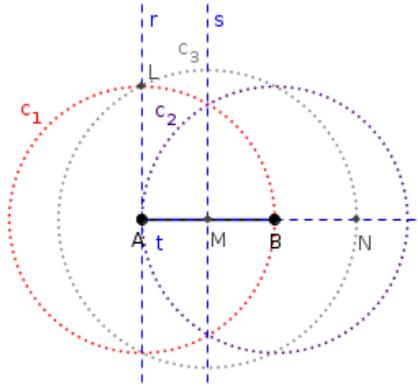


7. Denote por M o ponto médio de \overline{AB} .
8. Trace a reta s perpendicular \overline{AB} passando por M . Note que s é a mediatriz do lado \overline{AB} do pentágono.

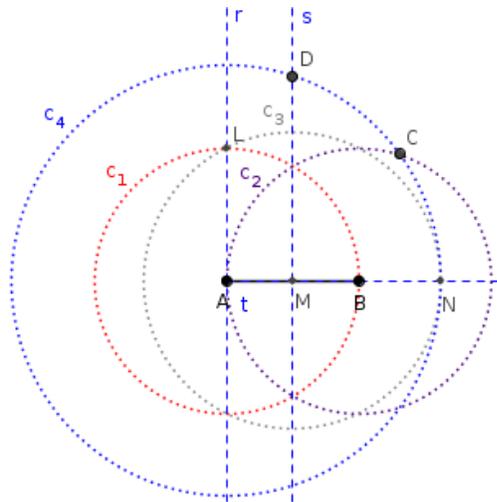


9. Trace a semirreta t de origem em A passando por B .
10. Trace a circunferência c_3 de centro M e raio \overline{ML} . Note que $\overline{ML} = l \frac{\sqrt{5}}{2}$

11. Denote por N o ponto de interseção entre c_3 e t . Como $\overline{ML} = \overline{MN}$ e $\overline{AM} = \frac{l}{2}$ temos $\overline{AN} = l \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \phi l$ (diagonal do pentágono regular)

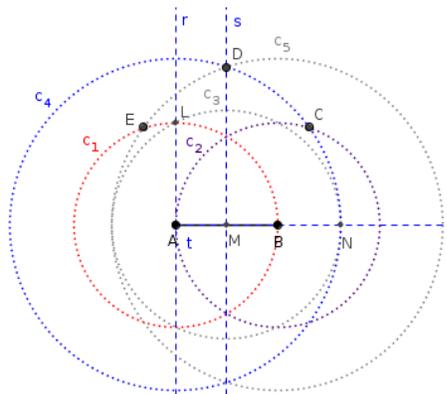


12. Trace a circunferência c_4 de centro A e raio \overline{AN} .
 13. Denote por C o ponto de interseção entre c_4 e c_2 .
 14. Denote por D o ponto de interseção entre c_4 e s . Como $\overline{AD} = \overline{AN}$, $D \in s$ e s é a mediatriz do lado \overline{AB} do pentágono, temos $\overline{BD} = \overline{AD}$

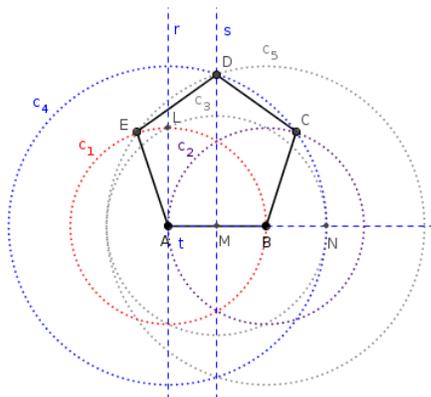


15. Trace a circunferência c_5 de centro B e raio \overline{BD} .

16. Denote por E o ponto de interseção entre c_5 e c_1 .



17. Trace os segmentos AB , BC , CD , DE e EA obtendo o pentágono regular $ABCDE$.

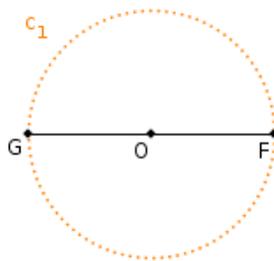


Método 2⁸²

1. Considere os pontos F e G .
2. Trace o segmento FG .

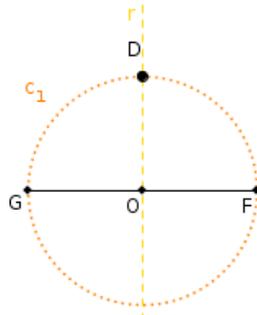


3. Denote por O o ponto médio de \overline{FG} .
4. Trace a circunferência c_1 de centro O e raio \overline{OF} .

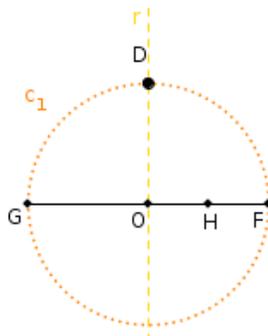


82 KILHIAN, Kleber. Construção de um Pentágono Regular com Régua e Compasso (Parte III). Disponível em: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/08/construcao-de-um-pentagono-regular-com_29.html> Acesso em 10 de mar. 2015

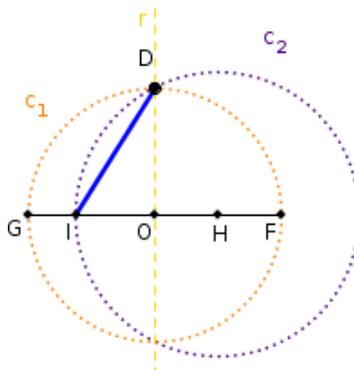
5. Trace a reta r perpendicular à \overline{FG} passando por O
6. Denote por D o ponto de interseção entre c_1 e r .



7. Denote por H o ponto médio de \overline{OF} .

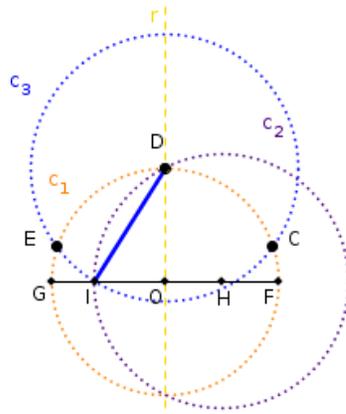


8. Trace a circunferência c_2 de centro H e raio \overline{HD}
9. Denote por I o ponto de interseção entre c_2 e \overline{OG} . É válido observar que \overline{DI} é o comprimento do lado do pentágono.



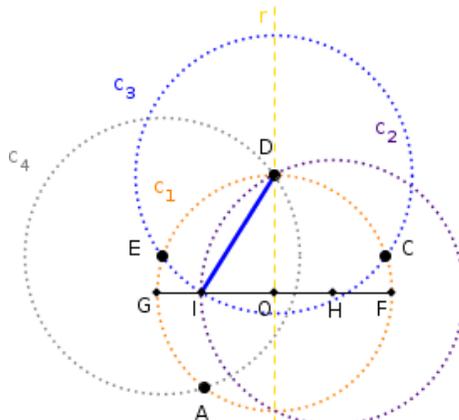
10. Trace a circunferência c_3 de centro D e raio \overline{DI} .

11. Denote por E e C os pontos das interseções entre c_3 e c_1 . Note que $\overline{DE} = \overline{DC} = \overline{DI}$



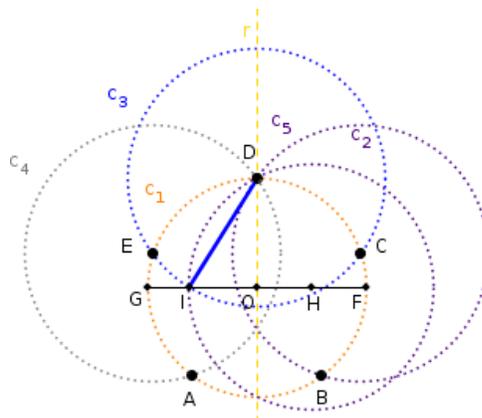
12. Trace a circunferência c_4 de centro E e raio \overline{DE} .

13. Denote por A o ponto de interseção entre c_4 e c_1 . Note que $\overline{DE} = \overline{EA}$.

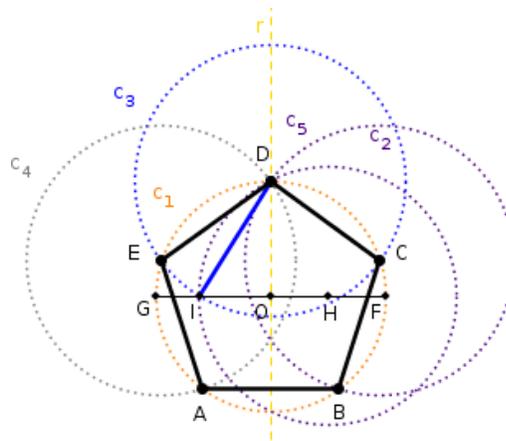


14. Trace a circunferência c_5 de centro C e raio \overline{CD} .

15. Denote por B o ponto de interseção entre c_5 e c_1 . Note que $\overline{EA} = \overline{AB} = \overline{BC}$



16. Trace os segmentos AB , BC , CD , DE e EA obtendo o pentágono regular $ABCDE$



1.3. Construção aproximada do pentágono regular devido a Albrecht Dürer utilizando régua e compasso⁸³

Durante o Renascimento, a relação entre pensamento arquitetônico e investigação humanística geral era muito estreita.

Albrecht Dürer (1471-1528) em *Underweysung der Messung* trata o primeiro texto sobre geometria euclidiana e a ciência renascentista da perspectiva escrita em língua vernácula, especificamente alemã, e, portanto, acessíveis a artesãos e artistas comuns.

Logo após a sua publicação em 1525 foi vinculado, juntamente com uma edição do livro *Elementos de Euclides* (1516) e a primeira edição ilustrada *De Architectura* de Vitruvius (1511).

Nesse texto, Dürer apresenta a construção de um pentágono em que os lados são iguais e não os ângulos.

Vejamos a construção utilizando régua e compasso.

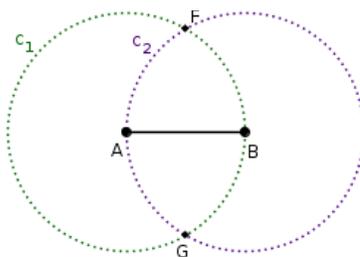
1. Considere os pontos A e B .
2. Trace o segmento AB . Note que \overline{AB} é o lado do pentágono



3. Trace a circunferência c_1 de centro A e raio \overline{AB} .
4. Trace a circunferência c_2 de centro B e raio \overline{BA} . Note que $\overline{AB} = \overline{BA}$

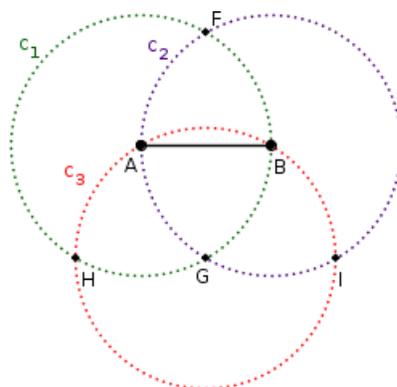
⁸³ Matemáticas Visuales, History, Durer's approximation of a Regular Pentagon. Disponível em: < <http://www.matematicasvisuales.com/english/html/history/durer/durerpentagon.html> >. Acesso em: 10 de fev. 2015

5. Denote por F e G os pontos das interseções entre c_1 e c_2 .



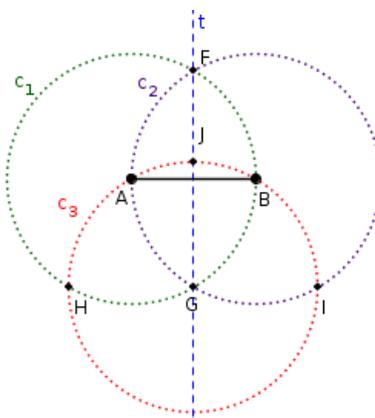
6. Trace a circunferência c_3 de centro G e raio \overline{GA} . Note que $\overline{GA} = \overline{GB} = \overline{AB}$.

7. Denote por H e I os pontos das interseção entre c_1 e c_2 .



8. Trace a reta t que passar por F e G .

9. Denote por J o ponto de interseção entre c_3 e t . Note que t é a mediatriz do lado \overline{AB} do pentágono.

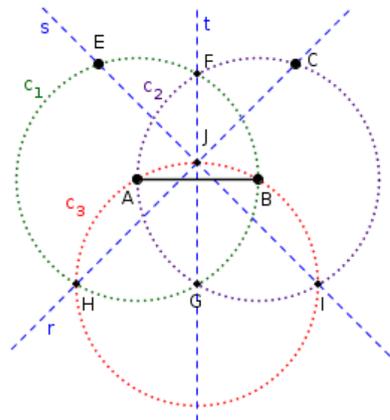


10. Trace a reta r que passa por H e J .

11. Denote por C o ponto de interseção entre r e c_2 .

12. Trace a reta s que passa por I e J .

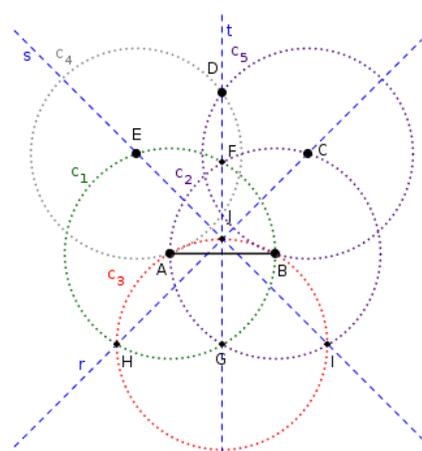
13. Denote por E o ponto de interseção entre s e c_1 .



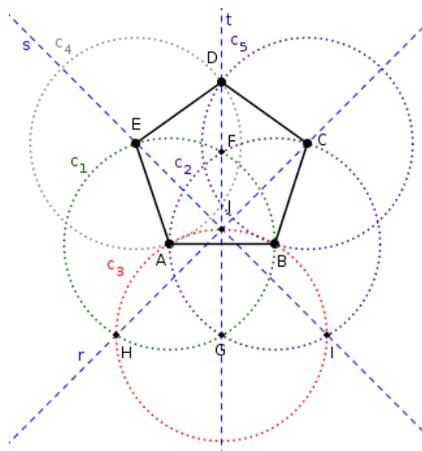
14. Trace a circunferência c_4 de centro E e raio \overline{EA} . Note que $\overline{EA} = \overline{AB}$.

15. Trace a circunferência c_5 de centro C e raio \overline{CB} . Note que $\overline{CB} = \overline{AB}$.

16. Denote por D o ponto de interseção entre c_4 e c_5 . Note que o ponto $D \in t$.

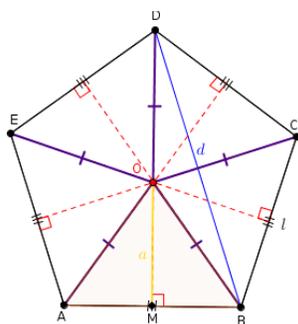


17. Trace os segmentos AB , BC , CD , DE e EA obtendo o pentágono $ABCDE$.



Embora seja aproximada a construção que estamos estudando, tal construção é muito simples de desenhar. Sabemos que os cinco ângulos de um pentágono regular são 108° . No entanto, na construção aproximada de Dürer, os ângulos da base são $108^\circ 21' 58''$, há dois ângulos menores que 108° e o ângulo do topo maior que 109° . Estas diferenças dificilmente seria detectável em um desenho. Os cálculos de cada um dos ângulos internos está disponível em inglês no link <http://www.matematicasvisuales.com/english/html/history/durer/durerpentagon.html> .

1.4. Cálculo da área de um pentágono regular



Seja o ponto O o centro do pentágono regular $ABCDE$ de lado l e diagonal d .

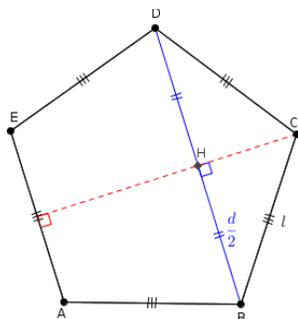
Essa figura é formada por 5 triângulos isósceles (OAB, OBC, OCD, ODE).

Como a área dos triângulos isósceles são iguais, sejam M o ponto médio de \overline{AB} e \overline{OM} o apótema do triângulo OAB de base \overline{AB} , representado pela letra a , então a área de um pentágono regular é dada por $A_{(5)} = 5 \cdot A_{(3)}$

Então,

$$A_{(5)} = 5 \cdot \frac{l \cdot a}{2} \quad (1)$$

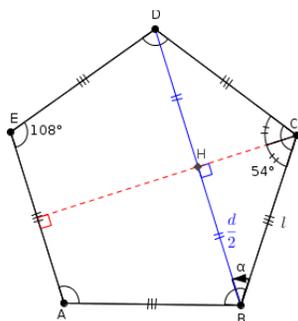
Em seguida, encontramos o comprimento do apótema do triângulo.



Seja H o ponto de interseção entre a diagonal do pentágono (\overline{BD}) e a altura relativa ao vértice C . Como o triângulo CBD é isósceles de base \overline{BD} temos H é ponto médio de \overline{BD} . Logo, $\overline{BH} = \frac{d}{2} = \frac{\phi l}{2}$.

Por outro lado, se soma dos ângulos internos de um pentágono é 540° , então cada ângulo interno vale 108° .

Como o triângulo CBD é isósceles, $\angle DCB = 108^\circ$ e H é ponto médio de \overline{BD} temos $\angle DCH = \angle HCB = 54^\circ$.

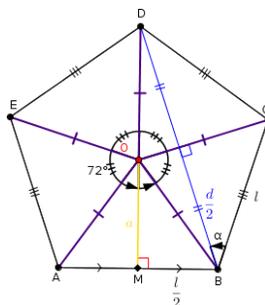


Assim, no triângulo retângulo BHC temos $\angle CBH + 90^\circ + 54^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$$\angle CBH = 36^\circ = \alpha. \text{ Logo, } \cos \alpha = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\frac{\phi l}{2}}{l} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\phi}{2}.$$

Então,

$$\cos^2 \alpha = \frac{\phi^2}{4} \quad (2)$$



Como o pentágono é formado por 5 triângulos isósceles de áreas iguais, em O temos $5 \cdot \angle AOB = 360^\circ$, então $\angle AOB = 72^\circ$.

Sendo M o ponto médio de \overline{AB} e isósceles o triângulo OAB temos $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{l}{2}$ e $\angle AOM = \angle MOB = 36^\circ = \alpha$.

Portanto, o triângulo BMO é retângulo em M e $\tan \alpha = \frac{l/2}{a} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{l}{2a}$.

Então,

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{l^2}{4a^2} \quad (3)$$

Utilizamos a relação fundamental da trigonometria para encontrar $\sin^2 \alpha$:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{\phi^2}{4}$$

Então,

$$\sin^2 \alpha = \frac{4 - \phi^2}{4} \quad (4)$$

Substituindo (4), (2) e a proporção áurea em (3) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{4 - \phi^2}{4}}{\frac{\phi^2}{4}} &= \frac{l^2}{4a^2} \Rightarrow \frac{l^2}{4a^2} = \frac{4 - \phi^2}{\phi^2} \Rightarrow \frac{l^2}{4a^2} = \frac{4 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \frac{l^2}{4a^2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \Rightarrow \\ \frac{l^2}{4a^2} &= \frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \Rightarrow \frac{l^2}{4a^2} = \frac{15 - 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5}{9 - 5} \Rightarrow \frac{l^2}{4a^2} = \frac{20 - 8\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \\ \frac{l^2}{4a^2} &= \frac{20 - 8\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{l^2} = \frac{1}{20 - 8\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{a^2}{l^2} = \frac{1}{20 - 8\sqrt{5}} \cdot \frac{20 + 8\sqrt{5}}{20 + 8\sqrt{5}} \Rightarrow \\ \frac{l^2}{a^2} &= \frac{(20 - 8\sqrt{5}) \cdot (20 + 8\sqrt{5})}{20 + 8\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{l^2}{a^2} = \frac{400 - 64 \cdot 5}{20 + 8\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{l^2}{a^2} = \frac{80}{20 + 8\sqrt{5}} \stackrel{\div 4}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

$$\frac{l^2}{a^2} = \frac{20}{5 + 2\sqrt{5}} \Rightarrow a^2 = l^2 \left(\frac{5 + 2\sqrt{5}}{20} \right) \cdot \frac{5}{5} \Rightarrow a = l \sqrt{\frac{5(5 + 2\sqrt{5})}{100}}$$

Então,

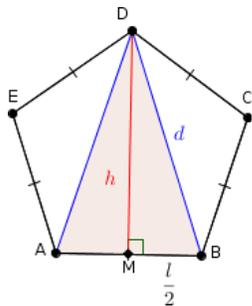
$$a = l \frac{\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{10} \quad (5)$$

Para finalizar, substituindo (5) em (1) temos:

$$A_{(5)} = 5 \cdot \frac{l \cdot a}{2} \Rightarrow A_{(5)} = \frac{5}{2} \cdot l \cdot l \frac{\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{10} \Rightarrow A_{(5)} = l^2 \frac{\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{4}$$

Logo, a área do pentágono regular é dada por $A_{(5)} = l^2 \frac{\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{4}$

1.5. Cálculo da altura de um pentágono regular



No pentágono regular $ABCDE$ de lado l e diagonal d , o triângulo DAB é isósceles de base AB .

Traçando a altura relativa ao vértice D temos M é ponto médio de \overline{AB} e o triângulo BMD é retângulo em M .

A seguir, calculamos a altura do pentágono (\overline{DM}), representado por h .

Como $\phi^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}$, $\overline{MB} = \frac{l}{2}$ e $\overline{BD} = d = \phi l$, aplicando o teorema de

Pitágoras temos:

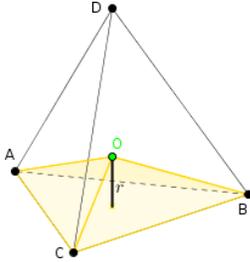
$$\overline{DM}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{DB}^2 \Rightarrow h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = (\phi l)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 \left(\phi^2 - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$h^2 = l^2 \left(\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow h^2 = l^2 \left(\frac{5 + 2\sqrt{5}}{4}\right) \Rightarrow h = l \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}$$

Logo, a altura do pentágono regular é dada por $h = l \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}$

Anexo 2 - Cálculo do volume dos sólidos de Platão a partir do raio da esfera inscrita

Seção 1: Volume do Tetraedro Regular



Na seção 2.1.4, do capítulo 2, encontramos o volume do tetraedro regular sendo $V = l^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$.

A seguir, calculamos novamente o volume desse sólido a partir do raio da esfera inscrita⁸⁴ dado por $r = l \frac{\sqrt{6}}{12}$, decompondo o

tetraedro em 4 pirâmides triangulares equivalentes. Logo, $V = 4 \cdot V_{Piramide}$

Em cada pirâmide, sejam a aresta lateral o raio da esfera circunscrita (R), a altura o raio da circunferência inscrita (r), O o centro da esfera e área da base é a área da face do tetraedro ($A_{(3)}$), a área de um triângulo equilátero de lado l .

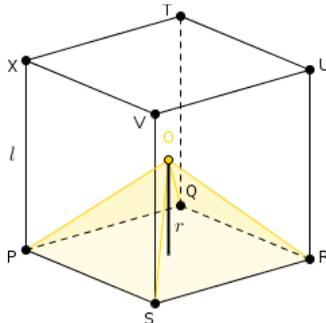
Como o volume de uma pirâmide é dado por $V_{Piramide} = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h$ onde

A_{Base} é a área da base e h a altura, temos:

$$A_{(3)} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ e } r = l \frac{\sqrt{6}}{12}. \text{ Então, } V_{Piramide} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\text{Logo, } V = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l \frac{\sqrt{6}}{12} \Rightarrow V = l^3 \frac{\sqrt{18}}{36} \Rightarrow V = l^3 \frac{3\sqrt{2}}{36} \Rightarrow V = l^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Seção 2: Volume do Hexaedro Regular



Na seção 3.1.1, do capítulo 3, encontramos o volume do cubo sendo $V = l^3$.

A seguir, calculamos novamente o volume desse sólido a partir do raio da esfera inscrita⁸⁵ dado por $r = \frac{l}{2}$, decompondo o cubo em 6 pirâmides quadrangulares equivalentes. Logo, $V = 6 \cdot V_{Piramide}$

84 Conforme apresentado na seção 2.1.6.

85 Conforme apresentado na seção 3.1.3.

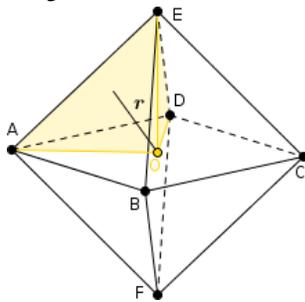
Em cada pirâmide, sejam a aresta lateral o raio da esfera circunscrita (R), a altura o raio da circunferência inscrita (r), O o centro da esfera e área da base é a área da face do cubo ($A_{(4)}$, a área de um quadrado de lado l).

Como o volume de uma pirâmide é dado por $V_{Piramide} = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h$ onde A_{Base} é a área da base e h a altura, temos:

$$A_{(4)} = l^2 \text{ e } r = \frac{l}{2}. \text{ Então, } V_{Piramide} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot \frac{l}{2}$$

$$\text{Logo, } V = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow V = l^3$$

Seção 3: Volume do Octaedro Regular



Na seção 4.1.3, do capítulo 4, encontramos o volume

do octaedro sendo $V = l^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$.

A seguir, calculamos novamente o volume desse

sólido a partir do raio da esfera inscrita⁸⁶ dado por $r = l \frac{\sqrt{6}}{6}$,

decompondo o octaedro em 8 pirâmides triangulares equivalentes. Logo, $V = 8 \cdot V_{Piramide}$

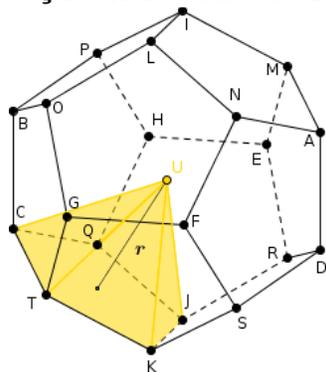
Em cada pirâmide, sejam a aresta lateral o raio da esfera circunscrita (R), a altura o raio da circunferência inscrita (r), O o centro da esfera e área da base é a área da face do octaedro ($A_{(3)}$, a área de um triângulo equilátero de lado l).

$$A_{(3)} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ e } r = l \frac{\sqrt{6}}{6}. \text{ Então, } V_{Piramide} = \frac{1}{3} \cdot l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Logo, } V = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V = l^3 \frac{\sqrt{18}}{9} \Rightarrow V = l^3 \frac{3\sqrt{2}}{9} \Rightarrow V = l^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$$

86 Conforme apresentado na seção 4.1.4.

Seção 4: Volume do Dodecaedro Regular



Na seção 5.1.3, do capítulo 5, encontramos o

volume do dodecaedro regular sendo $V = \left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\right)l^3$.

A seguir, calculamos novamente o volume desse sólido a partir do raio da esfera inscrita⁸⁷ dado por

$$r = l \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20}, \text{ decompondo o dodecaedro em 12}$$

pirâmides pentagonais equivalentes. Logo, $V = 12 \cdot V_{Piramide}$

Em cada pirâmide, sejam a aresta lateral o raio da esfera circunscrita (R), a altura o raio da circunferência inscrita (r), O o centro da esfera e área da base é a área da face do dodecaedro regular ($A_{(5)}$, a área de um pentágono regular de lado l).

Como $A_{(5)} = l^2 \frac{\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{4}$ e $r = l \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20}$ temos:

$$r = l \frac{\sqrt{250 + 110\sqrt{5}}}{20} \Rightarrow r = l \sqrt{\frac{250 + 110\sqrt{5}}{400}} \Rightarrow r = l \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}$$

$$\text{Logo, } V_{Piramide} = \frac{1}{3} \cdot \left(l^2 \frac{\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{4} \right) \cdot l \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}$$

$$\text{Então}^{88}, V = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot l^2 \frac{\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}}{4} \cdot l \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}} \Rightarrow$$

$$V = l^3 \sqrt{\frac{(25 + 10\sqrt{5})(25 + 11\sqrt{5})}{40}} \Rightarrow V = l^3 \sqrt{\frac{1175 + 525\sqrt{5}}{40}} \stackrel{\div 5}{\Rightarrow}$$

$$V = l^3 \sqrt{\frac{235 + 105\sqrt{5}}{8}} \cdot \frac{2}{2} \Rightarrow V = l^3 \sqrt{\frac{470 + 210\sqrt{5}}{16}} \Rightarrow$$

$$V = \frac{l^3}{4} \sqrt{470 + 210\sqrt{5}} \Rightarrow V = \frac{l^3}{4} \sqrt{(15 + 7\sqrt{5})^2} \Rightarrow$$

$$V = \left(\frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}\right)l^3$$

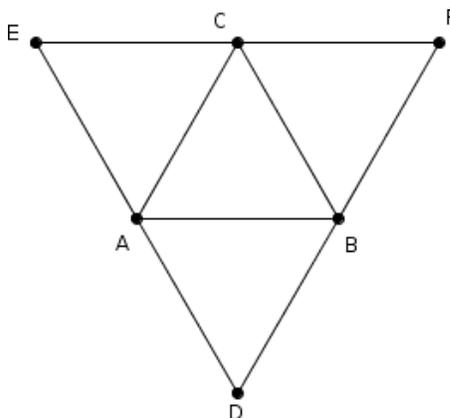
⁸⁷ Conforme apresentado na seção 5.1.4.

⁸⁸ $(15 + 7\sqrt{5})^2 = 225 + 105\sqrt{5} + 105\sqrt{5} + 245 = 470 + 210\sqrt{5}$

Anexo 3 - Planificação dos poliedros de Platão utilizando régua e compasso⁸⁹

Seção 1: Planificação do Tetraedro Regular

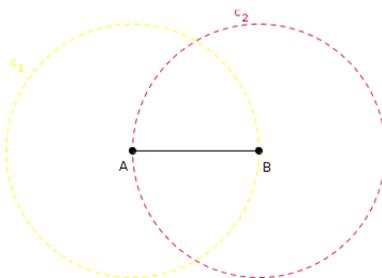
Utilizando apenas régua e compasso, apresentamos a seguir, o passo a passo da planificação do tetraedro regular.



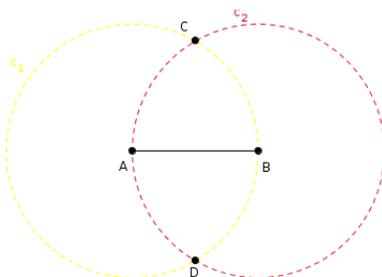
1. Considere os pontos A e B e trace o segmento AB



2. Trace a circunferência c_1 com centro em A e raio \overline{AB} . E, trace a circunferência c_2 com centro em B e raio \overline{BA} . Note que $\overline{AB} = \overline{BA}$

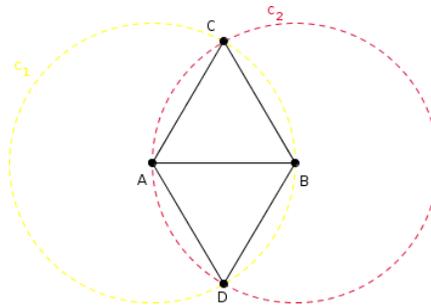


3. Denote por C e D os pontos de interseção das circunferências c_1 e c_2

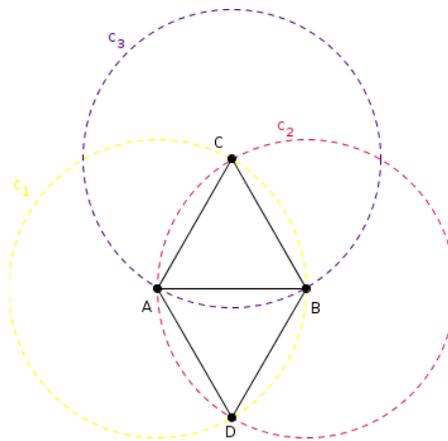


89 PEREIRA, Hamilton Soares. Poliedros Platônicos. Belo Horizonte: UFMG, 2011, 42 p. Monografia - Pós Graduação em Matemática para Professores do Ensino Básico. Disponível em: < http://www.mat.ufmg.br/~espec/Monografias_Noturna/Monografia_HamiltonSoares.pdf >. Acesso em: 02 março 2015

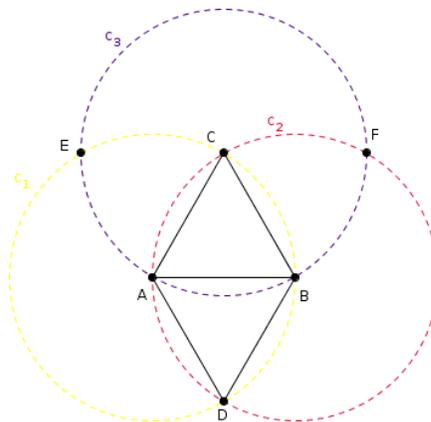
4. Trace os segmentos AC , AD , BC e BD obtendo os triângulos equiláteros ABC e ABD .



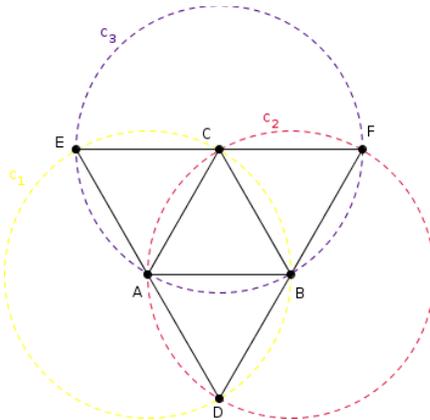
5. Trace a circunferência c_3 com centro em C e raio \overline{AB}



6. Denote por E e F os pontos de interseção entre as circunferências c_3 e c_1 e as circunferências c_3 e c_2 , respectivamente.

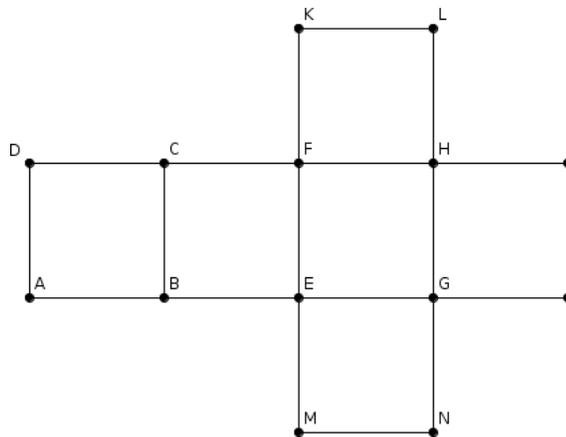


7. Trace os segmentos AE , CE , BF , CF obtendo os triângulos equiláteros ACE e BCF



Seção 2: Planificação do Hexaedro Regular

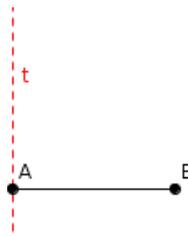
Utilizando apenas régua e compasso, apresentamos a seguir, o passo a passo da planificação do hexaedro regular, também conhecido por cubo.



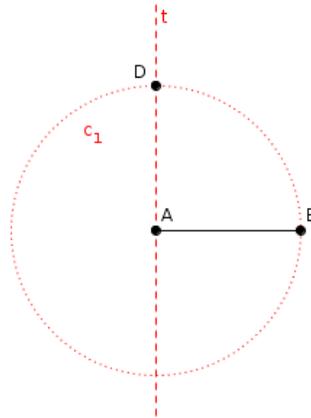
1. Considere os pontos A e B e trace o segmento AB



2. Trace a reta t perpendicular a \overline{AB} passando por A .



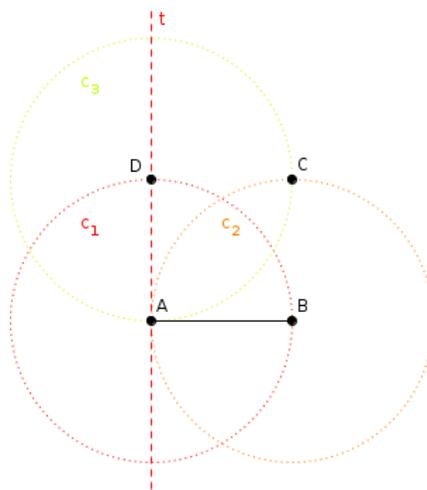
3. Trace a circunferência c_1 com centro em A e raio \overline{AB} . E, denote por D o ponto de interseção entre a reta t e a circunferência c_1 . Note que $\overline{AB} = \overline{AD}$



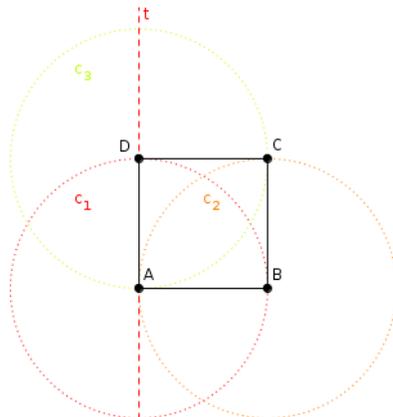
4. Trace a circunferência c_2 com centro em B e raio \overline{AB}

5. Trace a circunferência c_3 com centro em D e raio \overline{AB}

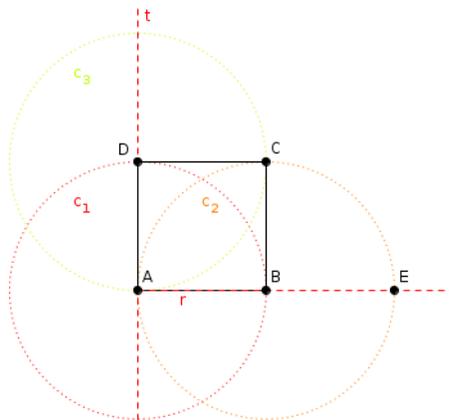
6. Denote por C o ponto de interseção entre as circunferências c_2 e c_3



7. Trace os segmentos BC , CD e DA obtendo assim o quadrado $ABCD$



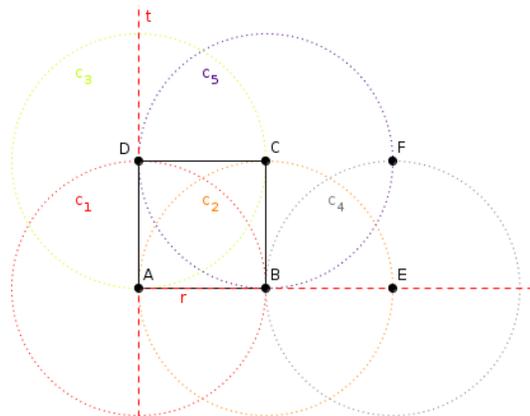
8. Trace a semirreta r , com origem em A e passando por B . Denote por E o ponto de interseção entre a semirreta r e a circunferência c_2



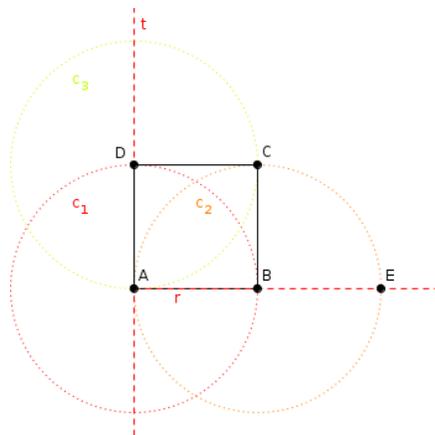
9. Trace a circunferência c_4 com centro em E e raio \overline{EB} . Note que $\overline{AB} = \overline{EB}$

10. Trace a circunferência c_5 com centro em C e raio \overline{BC} .

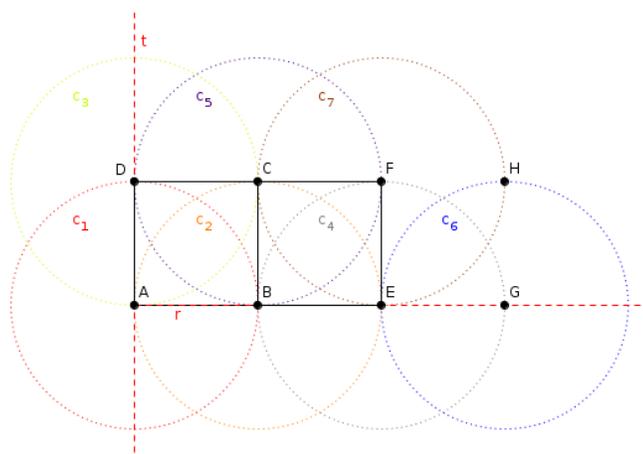
11. Denote por F o ponto de interseção entre as circunferências c_4 e c_5 .



12. Trace os segmentos EB , EF e CF obtendo assim o quadrado $BCFE$
13. Denote por G o ponto de interseção entre a semirreta r e a circunferência c_4

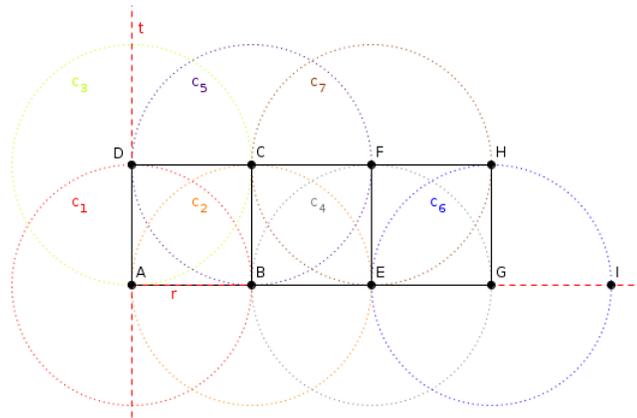


14. Trace a circunferência c_6 com centro em G e raio \overline{GE} . Note que $\overline{GE} = \overline{AB}$
15. Trace a circunferência c_7 com centro em F e raio \overline{FE} .
16. Denote por H o ponto de interseção entre as circunferências c_6 e c_7 .



15. Trace os segmentos GE , GH e FH obtendo o quadrado $EFHG$.

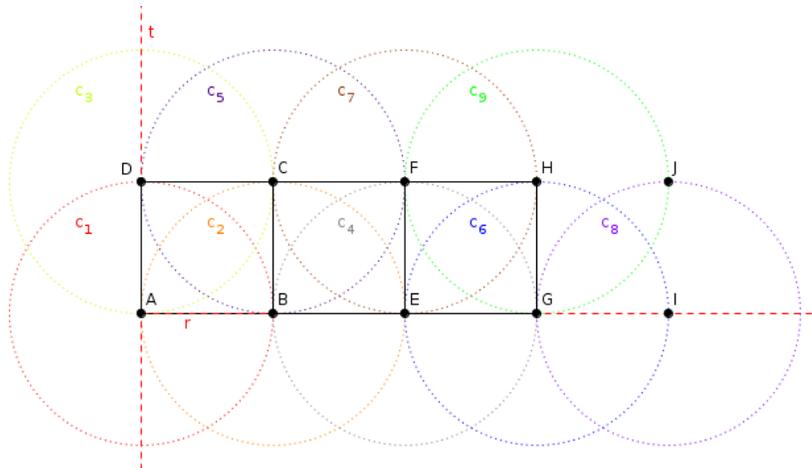
16. Denote por I o ponto de interseção entre a semirreta r e a circunferência c_6



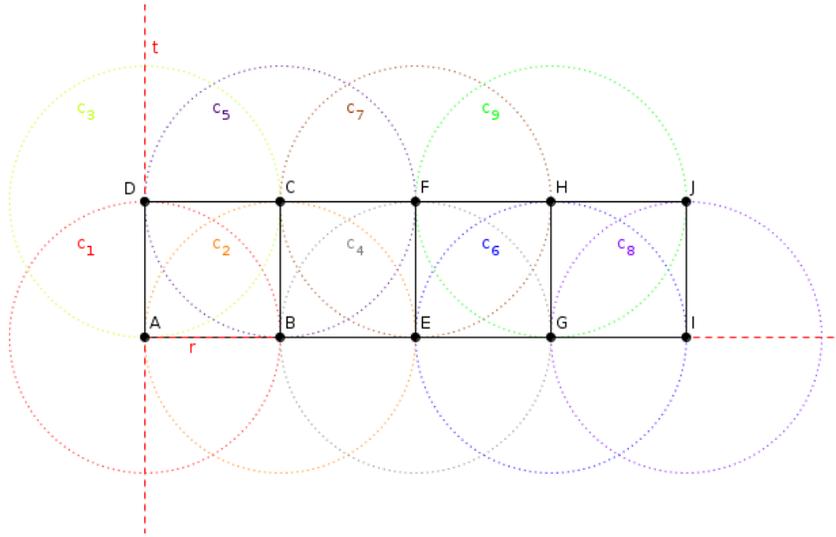
17. Trace a circunferência c_8 com centro em I e raio \overline{IG} . Note que $\overline{IG} = \overline{AB}$

18. Trace a circunferência c_9 com centro em H e raio \overline{HG} .

19. Denote por J o ponto de interseção entre as circunferências c_8 e c_9 .



20. Trace os segmentos IG , IJ e HJ obtendo o quadrado $GHJI$.



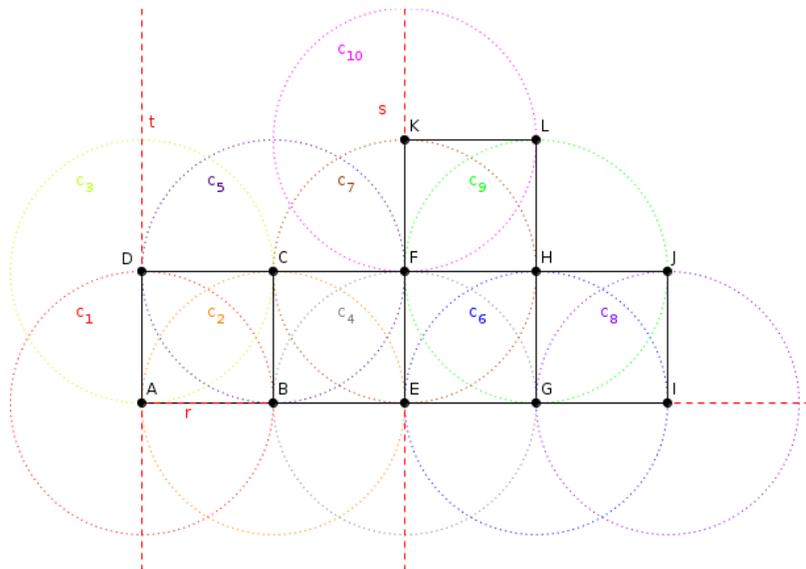
21. Trace a reta s passando pelos pontos E e F

22. Denote por K o ponto de interseção entre a reta s e a circunferência c_7 .

23. Trace a circunferência c_{10} com centro em K e raio \overline{KF} . Note que $\overline{KF} = \overline{AB}$

24. Denote por L o ponto de interseção entre as circunferências c_{10} e c_9 .

25. Trace os segmentos KF , KL e HL obtendo o quadrado $FHLK$.

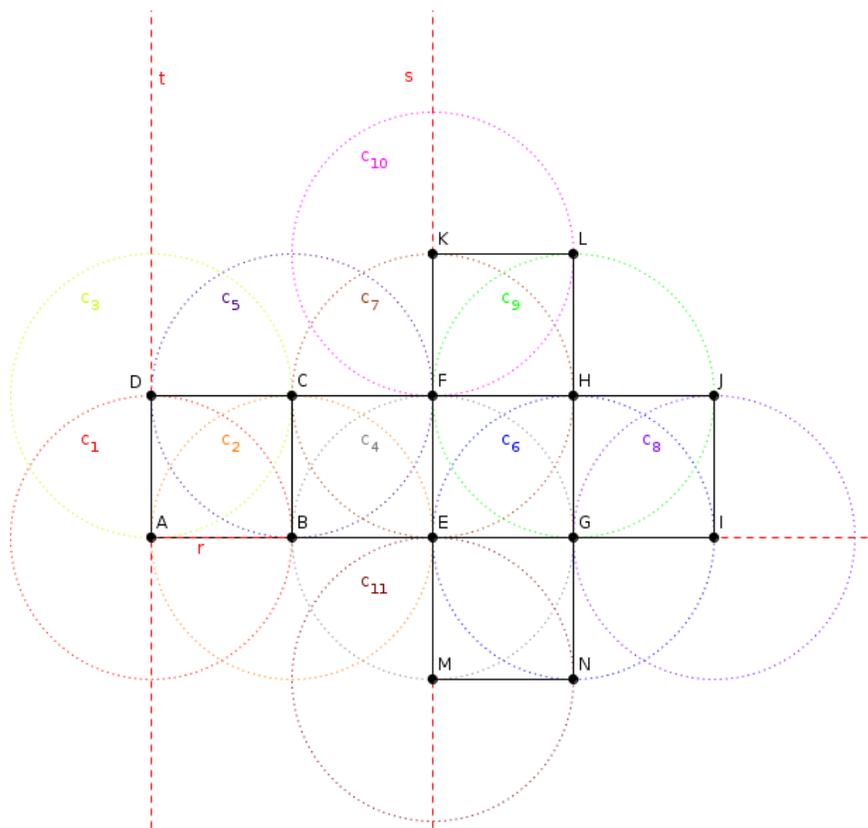


26. Denote por M o ponto de interseção entre a reta s e a circunferência c_4 .

27. Trace a circunferência c_{11} com centro em M e raio \overline{ME} . Note que $\overline{ME} = \overline{AB}$

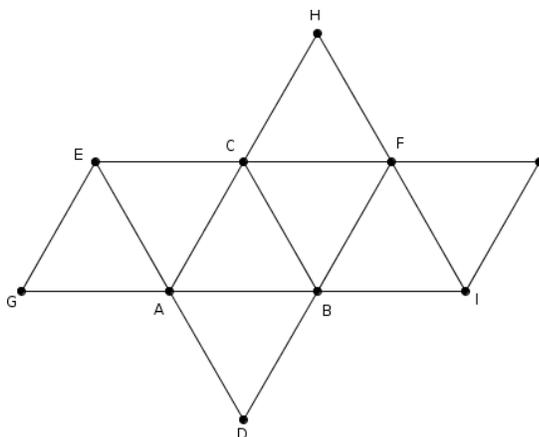
28. Denote por N o ponto de interseção entre as circunferências c_{11} e c_6 .

29. Trace os segmentos ME , MN e GN obtendo o quadrado $EGNM$.

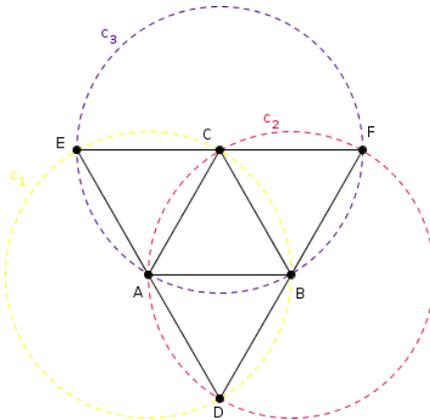


Seção 3: Planificação do Octaedro Regular

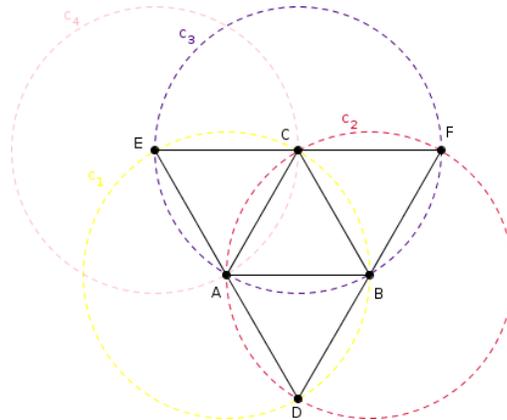
Utilizando apenas régua e compasso, apresentamos a seguir, o passo a passo da planificação do octaedro regular.



1. Realizar a planificação do tetraedro regular, conforme apresentado na seção 1 desse anexo.

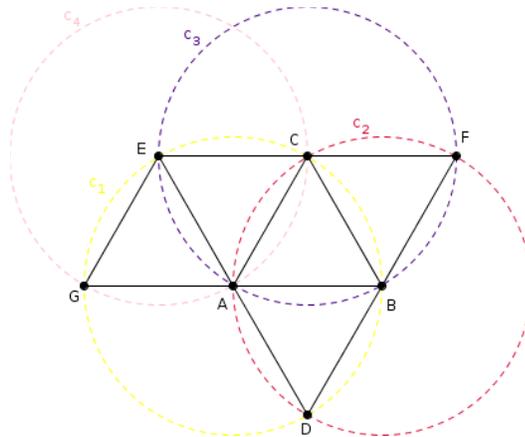


2. Trace a circunferência c_4 com centro em E e raio \overline{EA} .

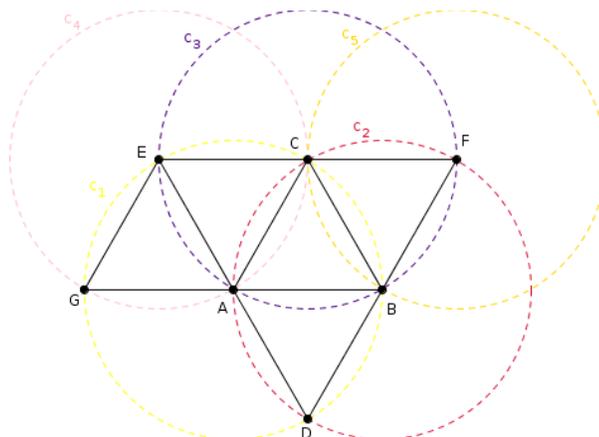


3. Denote por G o ponto de interseção entre as circunferências c_4 e c_1 .

4. Trace os segmentos EG e AG obtendo o triângulo equilátero AEG .

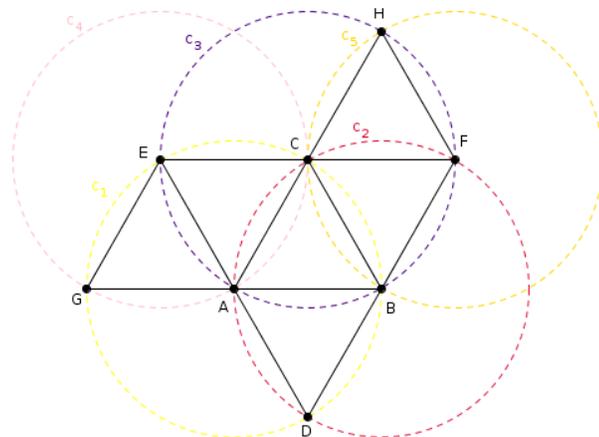


5. Trace a circunferência c_5 com centro em F e raio \overline{FC} .



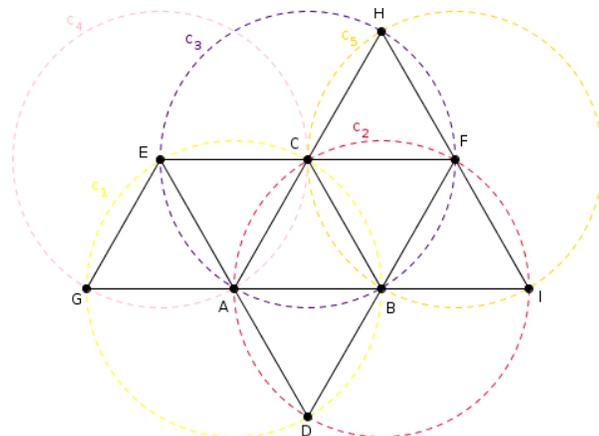
6. Denote por H o ponto de interseção entre as circunferências c_5 e c_3 .

7. Trace os segmentos FH e CH obtendo o triângulo equilátero CFH .

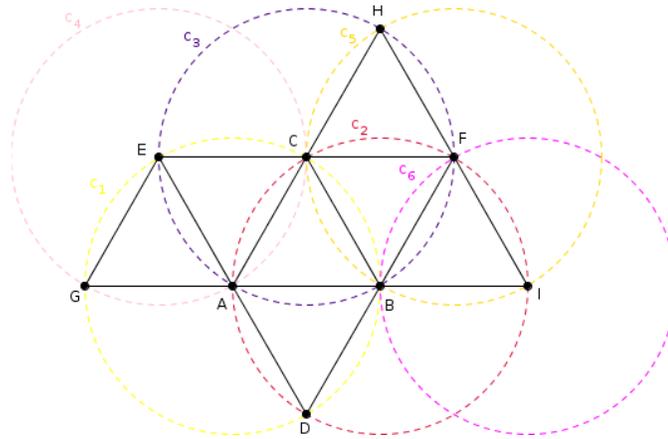


8. Denote por I o ponto de interseção entre as circunferências c_5 e c_2 .

9. Trace os segmentos FI e BI obtendo o triângulo equilátero BFI .

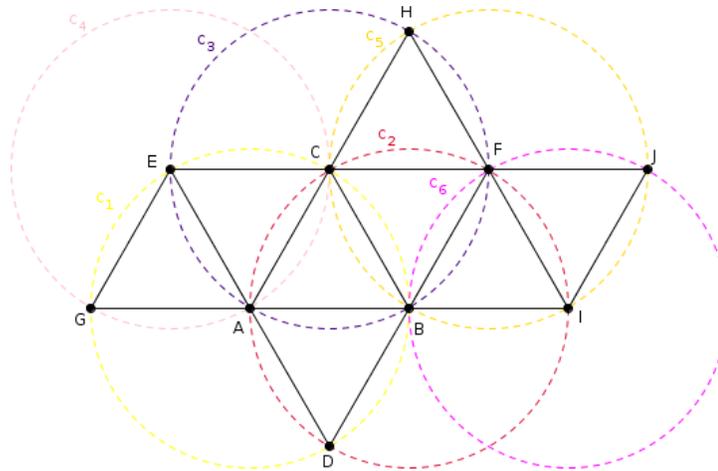


10. Trace a circunferência c_6 com centro em I e raio \overline{IF} .



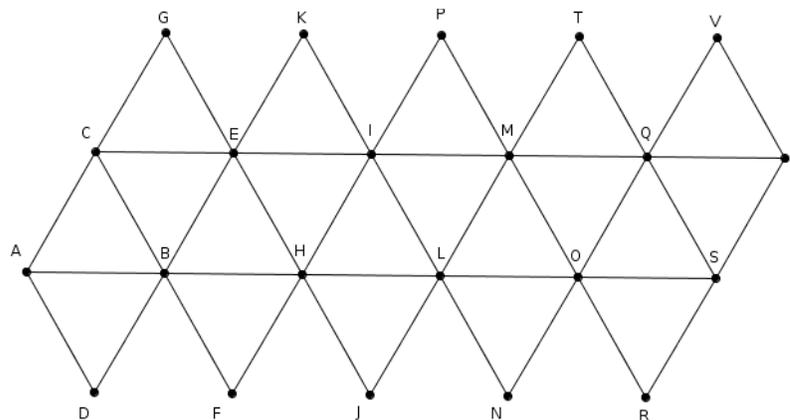
11. Denote por J o ponto de interseção entre as circunferências c_6 e c_5 .

12. Trace os segmentos JF e JI obtendo o triângulo equilátero FIJ .



Seção 4: Planificação do Icosaedro Regular

Utilizando apenas régua e compasso, apresentamos a seguir, o passo a passo da planificação do icosaedro regular.



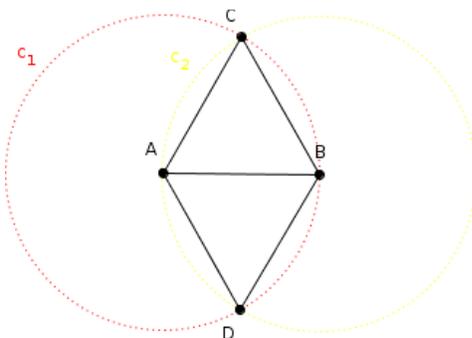
1. Considere os pontos A e B e trace o segmento AB



2. Trace a circunferência c_1 com centro em A e raio \overline{AB} . E, trace a circunferência c_2 com centro em B e raio \overline{BA} . Note que $\overline{AB} = \overline{BA}$

3. Denote por C e D os pontos de interseção das circunferências c_1 e c_2

4. Trace os segmentos AC , AD , BC e BD obtendo os triângulos equiláteros ABC e ABD .



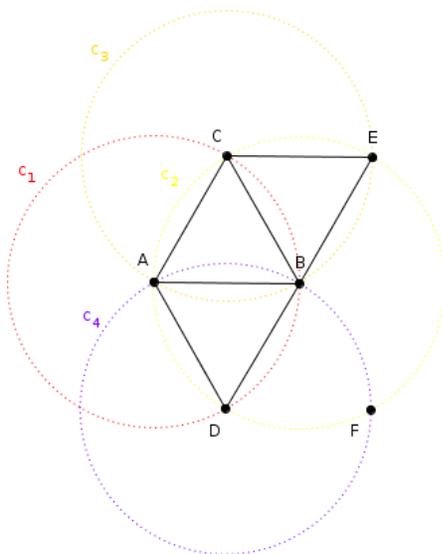
5. Trace a circunferência c_3 com centro em C e raio \overline{CB} .

6. Denote por E o ponto de interseção entre as circunferências c_3 e c_2 .

7. Trace os segmentos CE e BE obtendo o triângulo equilátero BCE .

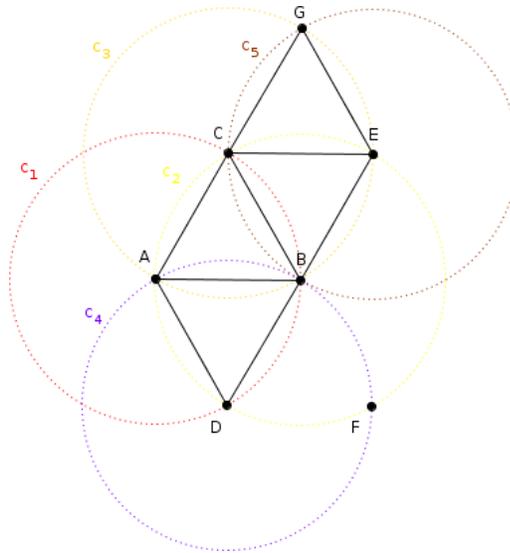
8. Trace a circunferência c_4 com centro em D e raio \overline{DB} .

9. Denote por F o ponto de interseção entre as circunferências c_4 e c_2 .

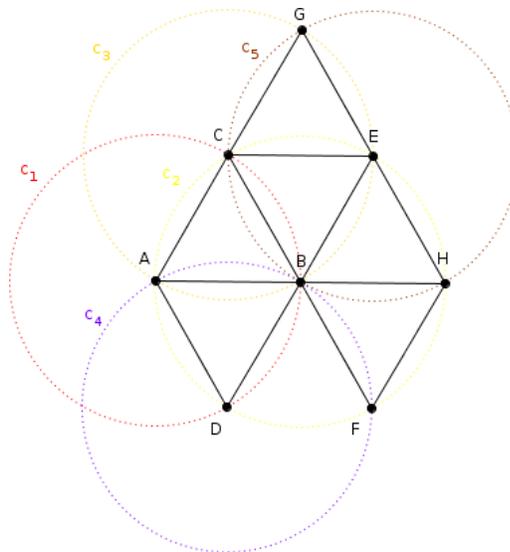


10. Trace a circunferência c_5 com centro em E e raio \overline{EC} .

11. Denote por G o ponto de interseção entre as circunferências c_5 e c_3 .
12. Trace os segmentos EC e EG obtendo o triângulo equilátero CEG .

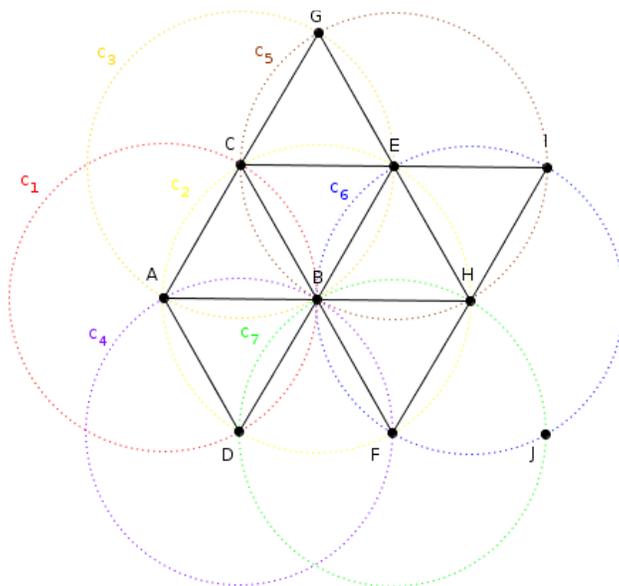


13. Denote por H o ponto de interseção entre as circunferências c_5 e c_2 .
14. Trace os segmentos HE , HB , HF e BF obtendo os triângulos equiláteros BEH e BFH .



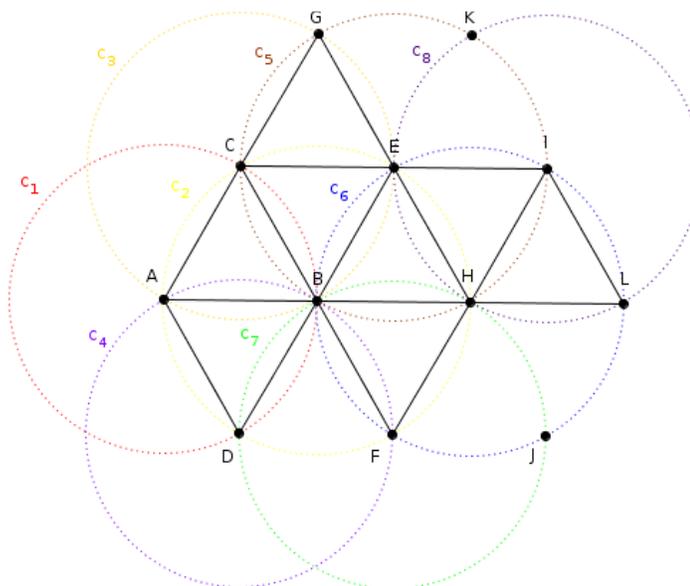
15. Trace a circunferência c_6 com centro em H e raio \overline{HB} .
16. Trace a circunferência c_7 com centro em F e raio \overline{FB} .
17. Denote por I o ponto de interseção entre as circunferências c_6 e c_5 .
18. Trace os segmentos HI e EI obtendo o triângulo equilátero EHI .

19. Denote por J o ponto de interseção entre as circunferências c_6 e c_7 .



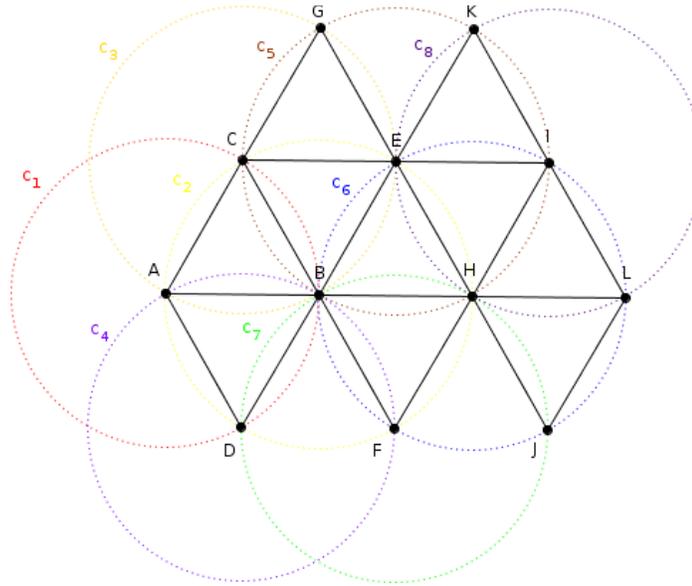
20. Trace a circunferência c_8 com centro em I e raio \overline{IE} .

21. Denote por K o ponto de interseção entre as circunferências c_8 e c_5 .



22. Trace os segmentos IK e EK obtendo o triângulo equilátero EIK .

23. Trace os segmentos HJ e LJ obtendo o triângulo equilátero HJL .



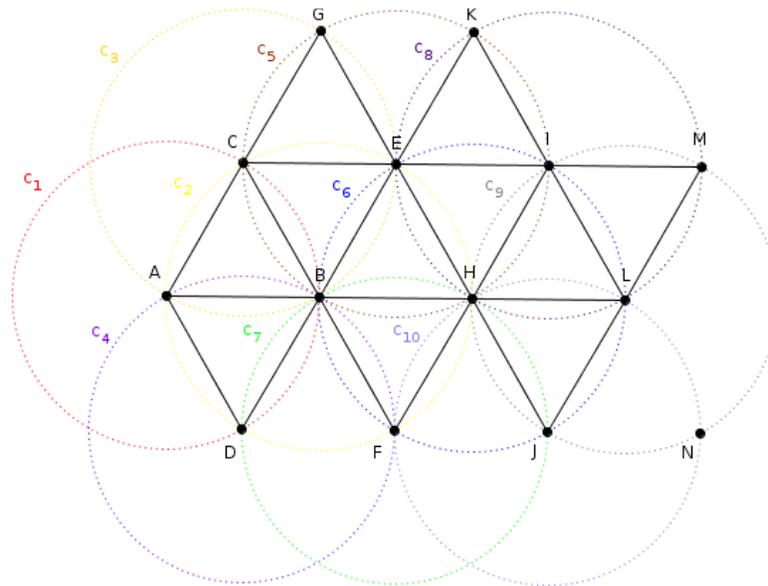
24. Trace a circunferência c_9 com centro em L e raio \overline{LI} .

25. Denote por M o ponto de interseção entre as circunferências c_9 e c_8 .

26. Trace os segmentos LM e IM obtendo o triângulo equilátero ILM .

27. Trace a circunferência c_{10} com centro em J e raio \overline{JL} .

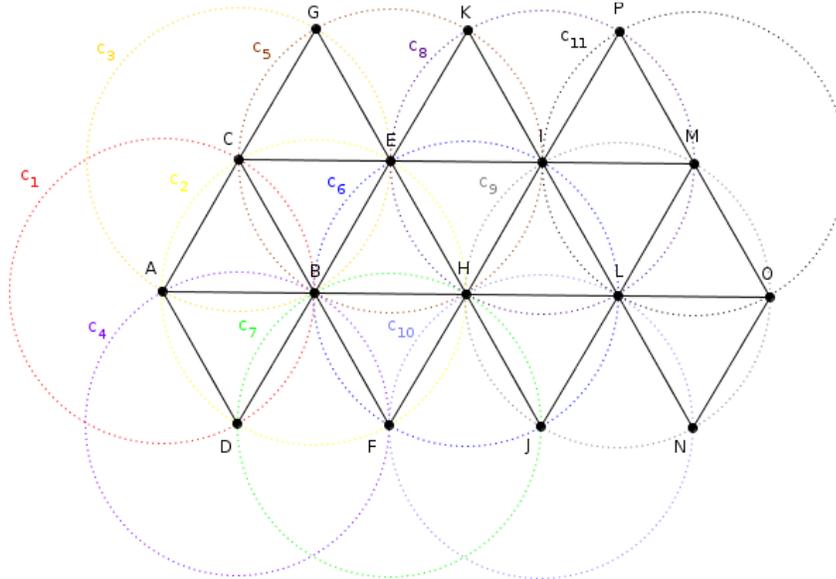
28. Denote por N o ponto de interseção entre as circunferências c_{10} e c_9 .



29. Trace a circunferência c_{11} com centro em M e raio \overline{MI} .

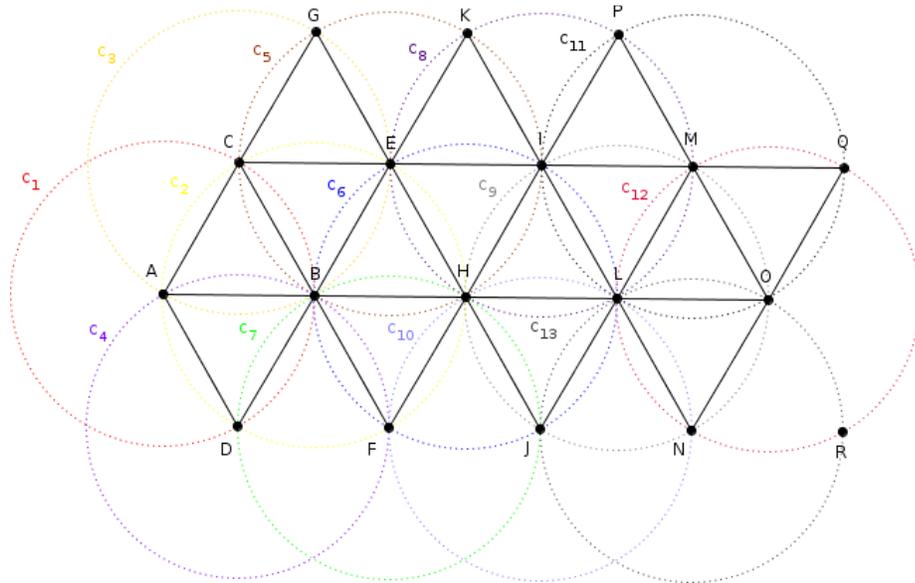
30. Denote por O o ponto de interseção entre as circunferências c_{11} e c_9 .

31. Trace os segmentos MO , LO , LN e NO obtendo os triângulos equiláteros LMO e LNO .
32. Denote por P o ponto de interseção entre as circunferências c_{11} e c_8 .
33. Trace os segmentos MP e IP obtendo o triângulo equilátero IMP .



34. Trace a circunferência c_{12} com centro em O e raio \overline{OM} .
35. Denote por Q o ponto de interseção entre as circunferências c_{12} e c_{11} .
36. Trace os segmentos OQ e MQ obtendo o triângulo equilátero MOQ .
37. Trace a circunferência c_{13} com centro em N e raio \overline{NO} .

38. Denote por R o ponto de interseção entre as circunferências c_{13} e c_{12} .



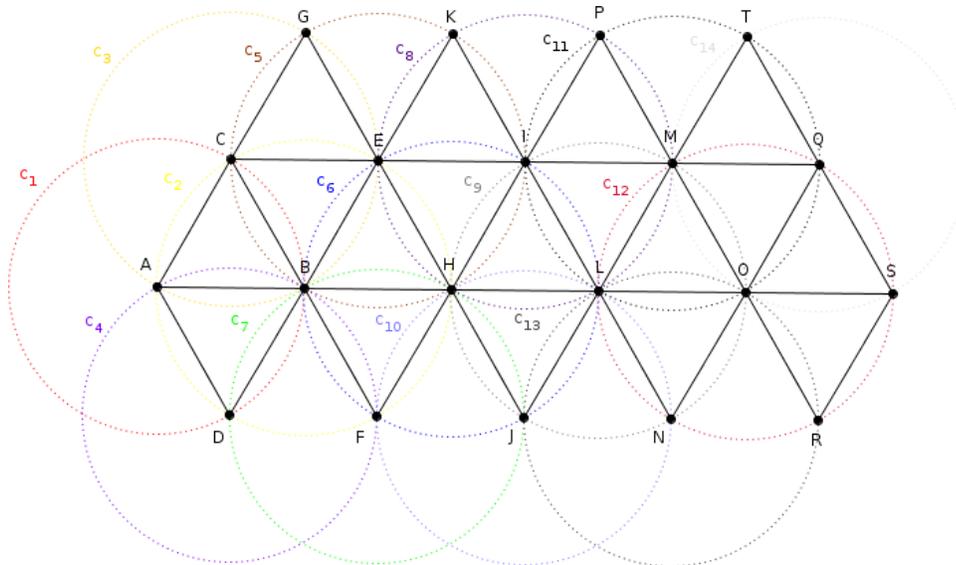
39. Trace a circunferência c_{14} com centro em Q e raio \overline{QM} .

40. Denote por S o ponto de interseção entre as circunferências c_{14} e c_{12} .

41. Trace os segmentos OS , OR , QS e RS obtendo os triângulos equiláteros OQS e ORS .

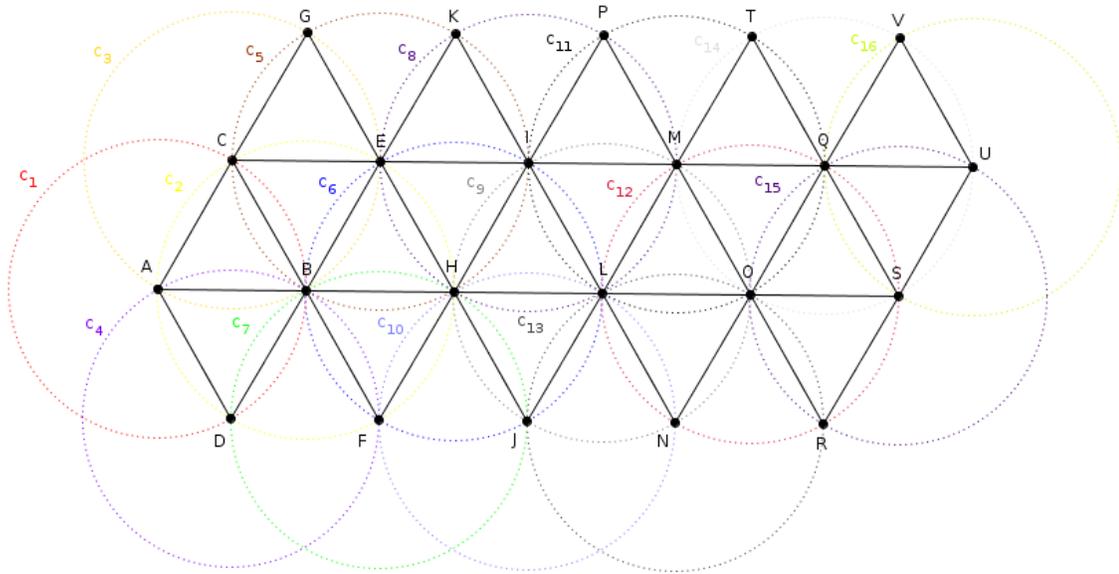
42. Denote por T o ponto de interseção entre as circunferências c_{14} e c_{11} .

43. Trace os segmentos QT e MT obtendo o triângulo equilátero MTQ .



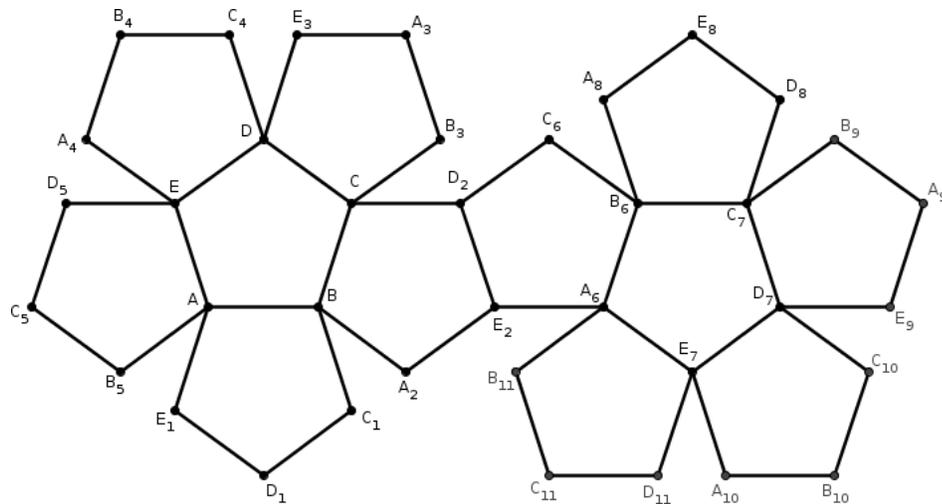
44. Trace a circunferência c_{15} com centro em S e raio \overline{SQ} .

45. Denote por U o ponto de interseção entre as circunferências c_{15} e c_{14} .
46. Trace os segmentos UQ e US obtendo o triângulo equilátero QSU .
47. Trace a circunferência c_{16} com centro em U e raio \overline{UQ} .
48. Denote por V o ponto de interseção entre as circunferências c_{16} e c_{14} .
49. Trace os segmentos UV e QV obtendo o triângulo equilátero QUV .

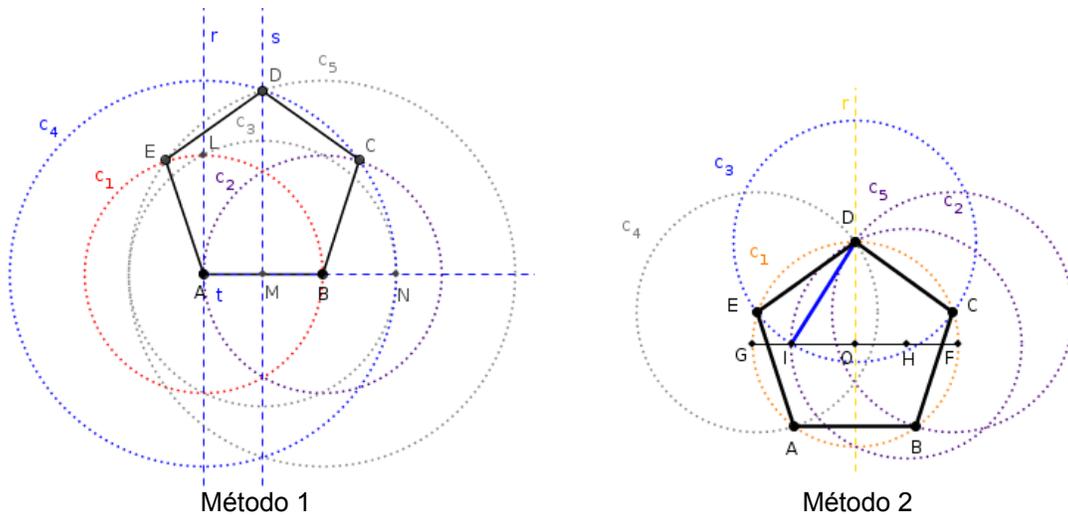


Seção 5: Planificação do Dodecaedro Regular

Utilizando apenas régua e compasso, apresentamos a seguir, o passo a passo da planificação do dodecaedro regular.



1. Realizar a planificação do pentágono regular $ABCDE$ no item 1.2 da seção 3 do anexo 1.



Como o dodecaedro regular é formado por 12 faces pentagonais, vamos construir as demais faces do sólido conhecendo um lado e o centro do pentágono.

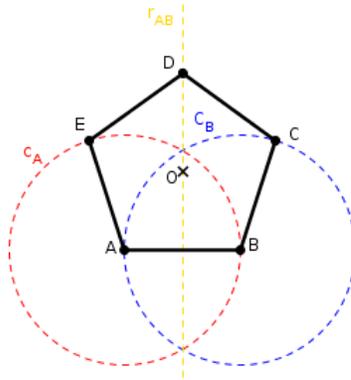
Por construção, o ponto O é o centro do pentágono regular $ABCDE$ no método 2. Por outro lado, o centro de um pentágono é a interseção das alturas relativas aos vértices.

Dessa forma, para determinar o centro do pentágono no método 1, sendo a reta s a altura relativa ao vértice D , basta traçar a altura relativa a outro vértice (A , B , C ou E).

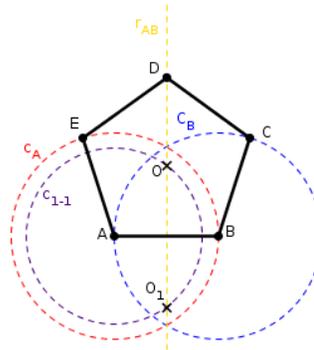
Em seguida, construímos o pentágono $ABC_1D_1E_1$ de centro O_1 utilizando o lado \overline{AB} .

2. Trace a circunferência c_A com centro em A e raio \overline{AB} .
3. Trace a circunferência c_B com centro em B e raio \overline{AB} .

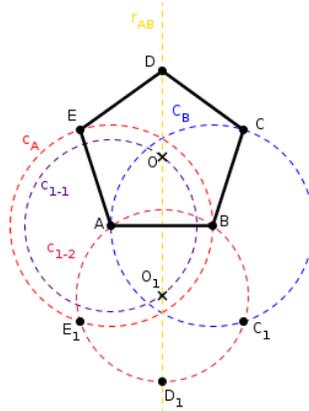
4. Trace a reta r_{AB} perpendicular a \overline{AB} passando por O . Note que a altura relativa ao segmento AB pertence a reta r_{AB} .



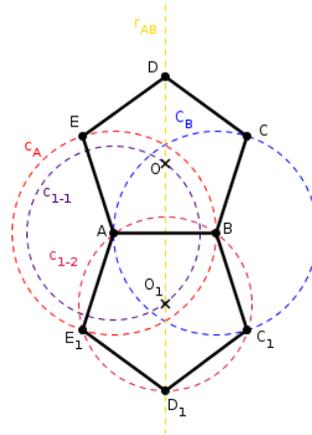
5. Trace a circunferência c_{1-1} com centro em A e raio \overline{AO} .
 6. Denote por O_1 o ponto de interseção entre r_1 e c_{1-1} .



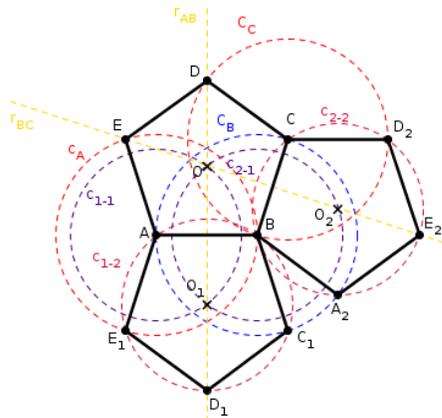
7. Trace a circunferência c_{1-2} com centro em O_1 e raio $\overline{O_1A}$.
 8. Denote por C_1 o ponto de interseção entre c_{1-2} e c_B .
 9. Denote por D_1 o ponto de interseção entre c_{1-2} e r_{AB} .
 10. Denote por E_1 o ponto de interseção entre c_{1-2} e c_A .



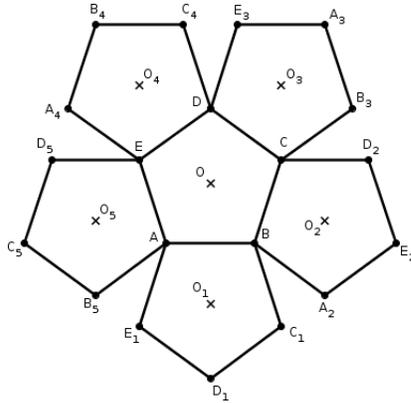
11. Trace os segmentos BC_1 , C_1D_1 , D_1E_1 e E_1A obtendo o pentágono regular $ABC_1D_1E_1$ de centro O_1 .



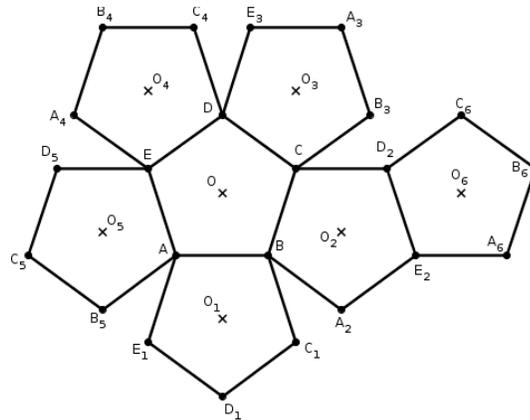
12. Repita os passos de 2 à 11, utilizando o lado \overline{BC} , obtendo o pentágono $A_2BCD_2E_2$ de centro O_2 .



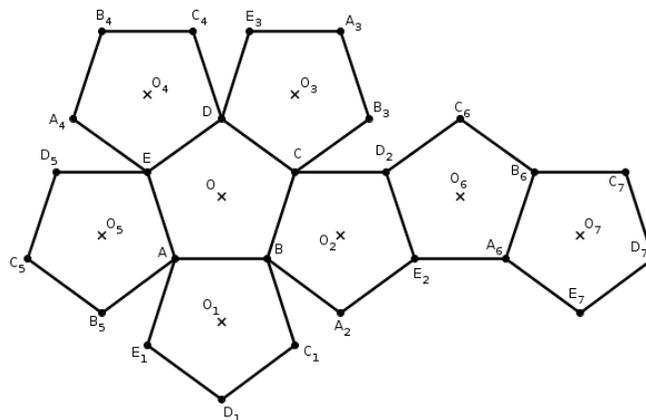
13. Repita os passos de 2 à 11, utilizando os lados \overline{CD} , \overline{DE} e \overline{EA} , obtendo os pentágonos $A_3B_3CDE_3$ de centro O_3 , $A_4B_4C_4DE$ de centro O_4 e $AB_5C_5D_5E$ de centro O_5 , respectivamente.



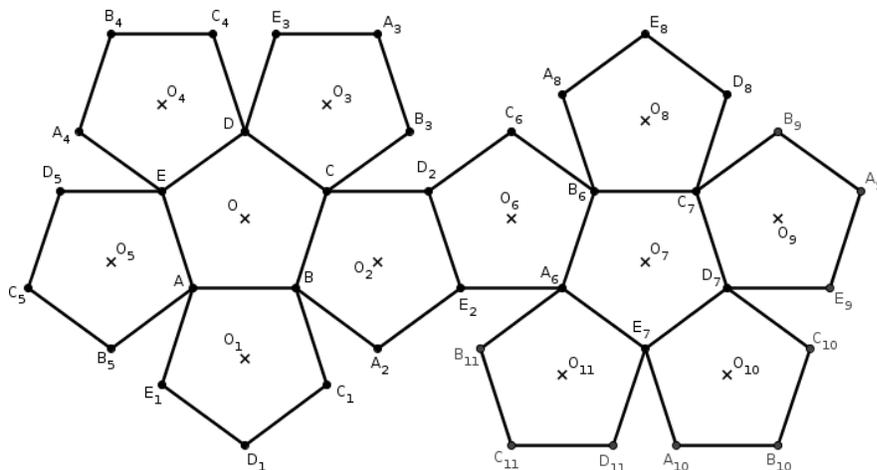
14. Repita os passos de 2 à 11, utilizando o lado $\overline{D_2E_2}$ do pentágono $A_2BCD_2E_2$ de centro O_2 , obtendo o pentágono $A_6B_6C_6D_2E_2$ de centro O_6 .



15. Repita os passos de 2 à 11, utilizando o lado $\overline{A_6B_6}$ do pentágono $A_6B_6C_6D_2E_2$ de centro O_6 , obtendo o pentágono $A_6B_6C_7D_7E_7$ de centro O_7 .



16. Repita os passos de 2 à 11, utilizando os lados $\overline{B_6C_7}$, $\overline{C_7D_7}$, $\overline{D_7E_7}$ e $\overline{E_7A_6}$, obtendo os pentágonos $A_8B_6C_7D_8E_8$ de centro O_8 , $A_9B_9C_7D_7E_9$ de centro O_9 , $A_{10}B_{10}C_{10}D_7E_7$ de centro O_{10} e $A_6B_{11}C_{11}D_{11}E_7$ de centro O_{11} , respectivamente.

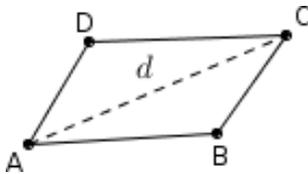


Anexo 4 - Determinando a soma dos ângulos internos e o número de diagonais de um polígono convexo de n lados

Sabendo apenas o número de lados do polígono convexo, vamos determinar a soma dos ângulos internos e a quantidade de diagonais sem ter que propriamente traçá-las.

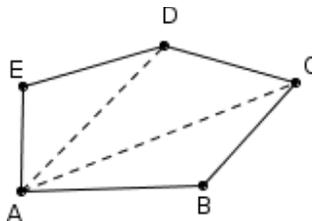
Para isso, definimos a diagonal de um polígono sendo um segmento de reta que une dois de seus vértices não-consecutivos.

Por outro lado, um triângulo não tem nenhuma diagonal e na geometria euclidiana a soma dos ângulos internos vale 180^0 .



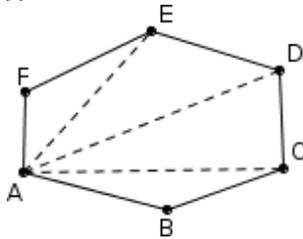
Dessa forma, tomando um quadrilátero qualquer $ABCD$, vemos que parte apenas uma diagonal de cada vértice.

Por exemplo, do vértice A, parte apenas a diagonal \overline{AC} . É válido dizer que o quadrilátero foi dividido em dois triângulos (ADC e ACB). Logo, $2 \cdot 180^0 = 360^0$



Agora, tomando um pentágono, temos, por exemplo, que do vértice A partem duas diagonais: \overline{AC} e \overline{AD} .

É válido dizer que o pentágono foi dividido em três triângulos (AED , ADC e ACB). Logo, $3 \cdot 180^0 = 540^0$



Já para um hexágono, temos, por exemplo, que do vértice A partem três diagonais: \overline{AC} , \overline{AD} e \overline{AE} .

Por outro lado, observamos que o hexágono foi dividido em quatro triângulos (AFE , AED , ADC e ACB). Logo, $4 \cdot 180^0 = 720^0$

Assim, queremos encontrar uma forma de determinar a soma dos ângulos internos ou a quantidade de diagonais sem ter que traçar o polígono.

Como um polígono de 4 lados, tem 1 diagonal partindo de um vértice e 2 triângulos internos; um polígono de 5 lados, tem 2 diagonais partindo de um vértice e 3 triângulos internos; um polígono de 6 lados tem 3 diagonais partindo de um vértice e 4 triângulos internos.

Por outro lado, o número de diagonais que parte de um vértice é igual à quantidade de lados do polígono menos 3 e a quantidade de triângulos internos é igual à quantidade de lados do polígono menos 2.

Logo, para um polígono de n lados, teremos $n - 3$ diagonais partindo de um vértice e $n - 2$ triângulos internos.

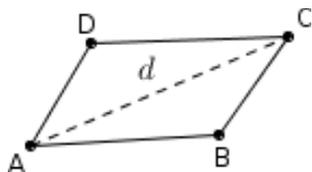
Por fim, montamos uma pequena tabela:

Número de lados	4	5	6	n
Número de diagonais de um vértice	1	2	3	$n - 3$
Número de triângulos internos	2	3	4	$n - 2$

Visto que, a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180^0 na geometria euclidiana temos para um polígono n lados a soma dos ângulos internos é dada por $S_n = (n - 2) \cdot 180^0$ para $n \geq 3$.

Como o número de vértices é igual ao número de lados do polígono, segue que teremos, com extremidade nos n vértices:

$$n \cdot (n - 3) \text{ diagonais} \quad (1)$$



No entanto, cada diagonal tem extremidades em dois vértices, por exemplo no quadrilátero, observamos que a diagonal $\overline{AC} = \overline{CA}$ representa a mesma diagonal:

Se cada diagonal é contada duas vezes, então basta dividirmos (1) por dois:

$$d = \frac{n(n - 3)}{2} \quad (2)$$

Para finalizar, utilizamos o processo de indução matemática para mostrar que para $n \geq 3$, é válido as fórmulas $d = \frac{n(n - 3)}{2}$ e $S_n = (n - 2) \cdot 180^0$

Antes vamos estabelecer algumas relações de recorrência através de uma tabela:

n	$d = \frac{n(n-3)}{2}$	
3	0	
4	2	$2 = 0 + 2 \Rightarrow d_4 = d_3 + 2 = d_3 + 3 - 1$
5	5	$5 = 2 + 3 \Rightarrow d_5 = d_4 + 3 = d_4 + 4 - 1$
6	9	$9 = 5 + 4 \Rightarrow d_6 = d_5 + 4 = d_5 + 5 - 1$
\vdots		\vdots
$n+1$		$d_{n+1} = d_n + n - 1$

n	$S_n = (n-2) \cdot 180^0$	
3	180^0	
4	360^0	$360^0 = 180^0 + 180^0 \Rightarrow S_4 = S_3 + 180^0$
5	540^0	$540^0 = 360^0 + 180^0 \Rightarrow S_5 = S_4 + 180^0$
6	720^0	$720^0 = 540^0 + 180^0 \Rightarrow S_6 = S_5 + 180^0$
\vdots		\vdots
$n+1$		$S_{n+1} = S_n + 180^0$

Então, aplicando o processo de indução matemática temos:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}, n \geq 3$$

Para $n = 3$ temos $d = \frac{3(3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Queremos provar que $d_n = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

$$d_{n+1} = d_n + n - 1 = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 \Rightarrow$$

$$d_{n+1} = \frac{n(n-3) + 2n - 2}{2} = \frac{n(n-3) + n + n - 2}{2} \Rightarrow$$

$$d_{n+1} = \frac{n(n-3+1) + n - 2}{2} = \frac{n(n-2-1+1) + n - 2}{2} \Rightarrow$$

$$d_{n+1} = \frac{n(n-3+1) + n - 2}{2} = \frac{n(n-2-1+1) + n - 2}{2} \Rightarrow$$

$$d_{n+1} = \frac{n(n-2) + n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^0, n \geq 3$$

Para $n = 3$ temos $S_3 = (3 - 2) \cdot 180^0 = 1 \cdot 180^0 = 180^0$

Queremos provar que $S_n = (n - 2) \cdot 180^0 \Rightarrow S_{n+1} = (n - 1) \cdot 180^0$

$$S_{n+1} = S_n + 180^0 = (n - 2) \cdot 180^0 + 180^0 = n \cdot 180^0 - 2 \cdot 180^0 + 180^0$$

$$S_{n+1} = n \cdot 180^0 - 360^0 + 180^0 = n \cdot 180^0 - 180^0 = (n - 1) \cdot 180^0$$