



Márcia Cristina Lemos Guimarães Franco

# SIMETRIA

Campinas  
2015





Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Márcia Cristina Lemos Guimarães Franco

## SIMETRIA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientadora: Claudina Izepe Rodrigues

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Márcia Cristina Lemos Guimarães Franco, e orientada pela Prof<sup>a</sup>. Dra. Claudina Izepe Rodrigues

Assinatura da orientadora

A handwritten signature in black ink, reading "Claudina Izepe Rodrigues", is written over a horizontal line.

Campinas  
2015

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

F848s Franco, Márcia Cristina Lemos Guimarães, 1980-  
Simetria / Márcia Cristina Lemos Guimarães Franco. – Campinas, SP : [s.n.],  
2015.

Orientador: Claudina Izepe Rodrigues.  
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Simetria (Matemática). 2. Transformações (Matemática). 3. Isometria  
(Matemática). 4. Grupos de simetria. 5. Frisos (Geometria). I. Rodrigues, Claudina  
Izepe, 1953-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Symmetry

Palavras-chave em inglês:

Symmetry (Mathematics)

Transformations (Mathematics)

Isometrics (Mathematics)

Symmetry groups

Friezes (Geometry)

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestra

Banca examinadora:

Claudina Izepe Rodrigues [Orientador]

Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

Pedro Luiz Aparecido Malagutti

Data de defesa: 08-06-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional



**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 08 de junho de 2015 e  
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

*Claudina Zepe Rodrigues*

Prof. (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

*Maria Lúcia Bontorim de Queiroz*

Prof. (a). Dr (a). MARIA LÚCIA BONTORIM DE QUEIROZ

*Pedro Luiz Aparecido Malagutti*

Prof. (a). Dr (a). PEDRO LUIZ APARECIDO MALAGUTTI



## **Abstract**

We present a study of groups, geometric transformations and isometries in the plane. Introducing the classification theorem of isometries in the plane, the Leonardo theorem that classifies symmetry groups of limited ornaments and the classification theorem of friezes groups. We propose a sequence of activities for the basic education involving isometry and identification of symmetry group of limited ornaments and friezes. Moreover some of the suggested activities provide an intuitive idea of the algebraic structure of groups. We end this paper by reporting on the manner in which the application of three of the suggested sequences occurred, the procedures that were adopted and the results that were obtained.

Key-words: Symmetry, Transformations, Isometries, Group of Symmetry, Friezes Group

## **Resumo**

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre grupos, transformações geométricas e isometrias no plano. Apresentamos o teorema da classificação das isometrias no plano, o teorema de Leonardo que classifica os grupos de simetria de ornamentos limitados e o teorema da classificação dos grupos de frisos. Propomos sequências de atividades para a Educação Básica envolvendo as isometrias e a identificação do grupo de simetria de um ornamento limitado e de um friso. Além disso, as atividades sugeridas apresentam intuitivamente a ideia da estrutura algébrica de grupos. Finalizamos este trabalho relatando como ocorreu a aplicação de três das sequências sugeridas, os procedimentos adotados e os resultados obtidos.

Palavras-chave: Simetria, Transformações, Isometrias, Grupos de Simetria, Grupos de Frisos.



# Sumário

Introdução Geral	1
<b>1 Grupos e transformações</b>	<b>3</b>
1.1 Grupos	3
1.1.1 Subgrupos	7
1.2 Transformações	7
<b>2 Isometrias</b>	<b>9</b>
2.1 Definição de isometria	9
2.2 Isometrias fundamentais no plano	10
2.2.1 Identidade	10
2.2.2 Rotação	11
2.2.3 Reflexão em relação a uma reta	12
2.2.4 Translação	16
2.2.5 Reflexão deslizante	19
2.3 Proposições sobre isometrias no plano	20
2.4 Translações e meia-voltas	26
2.5 O produto de reflexões e consequências	27
2.6 Isometrias diretas e opostas	38
2.7 Classificação das isometrias no plano	39
2.8 O produto de reflexões e translações	40
2.9 O produto de rotações	41
<b>3 Grupo de simetria de ornamentos limitados</b>	<b>45</b>
3.1 Simetria de figuras	45
3.2 Grupo de simetria de ornamentos limitados	46
3.3 O Teorema de Leonardo	51
3.4 Identificação do grupo de simetria de um ornamento limitado	53

<b>4</b>	<b>Grupos de frisos</b>	<b>57</b>
4.1	Definições e teoremas . . . . .	57
4.2	Classificação dos grupos de frisos . . . . .	59
4.3	Identificação do grupo de friso . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Sequências de atividades</b>	<b>79</b>
5.1	Grupo de simetria de um ornamento limitado . . . . .	80
5.2	Construir um ornamento a partir de um motivo . . . . .	82
5.3	Criar frisos utilizando o GeoGebra . . . . .	84
5.4	Translação . . . . .	87
5.5	Rotação . . . . .	90
5.6	Reflexão em relação a uma reta . . . . .	92
5.7	Rosáceas (Ornamentos limitados) . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Aplicação das sequências de atividades e resultados obtidos</b>	<b>99</b>
6.1	Grupo de simetria de um ornamento limitado . . . . .	99
6.2	Construir um ornamento a partir de um motivo . . . . .	106
6.3	Criar frisos utilizando o GeoGebra . . . . .	108
6.4	Análise dos resultados obtidos . . . . .	110
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>115</b>
<b>A</b>	<b>Simetria na natureza</b>	<b>117</b>
<b>B</b>	<b>Grupo de simetria</b>	<b>119</b>
<b>C</b>	<b>Modelo de motivo</b>	<b>121</b>
<b>D</b>	<b>Figura para construir frisos</b>	<b>123</b>

A DEUS, LUZ DO MEU CAMINHO.  
AO MEU ESPOSO LUIZ, MEU GRANDE AMOR.  
AOS MEUS PAIS LÚCIO E ROSA, RAZÃO DA MINHA  
EXISTÊNCIA.  
AOS MEUS IRMÃOS POLLY E THIAGO QUE COMIGO  
CAMINHAM LADO A LADO.





# Agradecimentos

À Deus que me carregou quando me faltaram forças.

Ao meu esposo Luiz, pelo amor e carinho dispensados a mim diariamente. Sem você do meu lado eu não teria conseguido.

Aos meus pais Lúcio e Rosa pelas orações, pelo amor incondicional, paciência, compreensão e o apoio constante em todos os momentos da minha vida. Agradeço por vibrarem comigo em cada vitória.

Aos meus irmãos Polly e Thiago por estarem sempre ao meu lado em todos os momentos.

À minha cunhada Vanessa e meu cunhado Diego, irmãos que Deus colocou em minha vida.

Aos meus sogros José e Catarina, meus cunhados Amilton e Juliana e suas filha Jéssica e Júlia por me acolherem em sua família.

À todos os familiares que torceram por mim.

Aos professores do IMECC pelos conhecimentos compartilhados.

À professora Claudina, exemplo de profissional, agradeço pela amizade, disponibilidade, paciência e sabedoria com que me orientou neste trabalho. Quando “crescer”, eu quero ser como você!

Aos professores membros da banca examinadora pela disponibilidade e atenção dispensadas ao meu trabalho.

Aos amigos do mestrado, em especial Sonia, Andréia e Marina pelos momentos vividos. Foi bom poder contar com vocês.

Ao Ederson Godoy que me presenteou com belíssimas imagens retratando a simetria na natureza.

À Escola Municipal Olegário Maciel e à Escola Estadual Marcos Geber Sirio que gentilmente permitiram o desenvolvimento das sequências de atividades relatadas neste trabalho.

À Secretaria Municipal de Educação de Governador Valadares pelo apoio concedido a mim para cursar o PROFMAT.

À agência CAPES pelo apoio financeiro concedido durante todo o período do mestrado.

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.

Madre Teresa de Calcutá



# Lista de Figuras

2.1	Rotação de centro $O$ e ângulo $\theta$ . . . . .	11
2.2	Reflexão em relação a reta $r$ . . . . .	13
2.3	Reflexão - caso 1 . . . . .	14
2.4	Reflexão - caso 2 . . . . .	14
2.5	Reflexão - caso 3 . . . . .	15
2.6	Reflexão - caso 4 . . . . .	15
2.7	Reflexão - caso 5 . . . . .	15
2.8	Translação: $A, B$ e $P$ não colineares . . . . .	16
2.9	Translação: $A, B$ e $P$ colineares . . . . .	16
2.10	Translação - caso 1 . . . . .	18
2.11	Translação - caso 2 . . . . .	18
2.12	Translação - caso 3 . . . . .	18
2.13	Reflexão deslizante . . . . .	19
2.14	Retas perpendiculares . . . . .	21
2.15	Proposição 2.3.5 - caso 3 . . . . .	22
2.16	Proposição 2.3.11 - caso 2 . . . . .	24
2.17	Proposição 2.3.11 - caso 3 . . . . .	24
2.18	Proposição 2.3.11 - caso 4 . . . . .	25
2.19	Translação - $\overline{OO'}$ paralelo ao deslocamento . . . . .	26
2.20	Reflexões $R_r$ e $R_s$ . . . . .	28
2.21	Corolário 2.5.2 . . . . .	29
2.22	Retas $r$ e $s$ perpendiculares em $O$ . . . . .	30
2.23	Retas $r$ e $s$ perpendiculares em $O'$ . . . . .	31
2.24	$R_r H_O = R_s H_{O'} H_O = R_s T$ . . . . .	31
2.25	$H_O R_r = H_O H_{O'} R_s = T R_s$ . . . . .	32
2.26	Produto de três reflexões em retas concorrentes . . . . .	32
2.27	Translação - produto de duas reflexões paralelas . . . . .	33
2.28	Retas $r, s, r', s'$ paralelas . . . . .	34
2.29	Retas $r, s$ paralelas e $P \notin r$ . . . . .	34
2.30	Retas $r$ e $s$ perpendiculares à reta $a$ . . . . .	35
2.31	Proposição 2.5.11 . . . . .	36

2.32	Produto de rotações - (a)	42
2.33	Produto de rotações - (b)	42
2.34	Produto de rotações - (c)	44
3.1	Exemplo 1	46
3.2	Exemplo 2	47
3.3	Exemplo 3	47
3.4	Simetrias do triângulo	48
3.5	Simetrias do quadrado	49
3.6	Simetrias do pentágono	50
3.7	Teorema de Leonardo - caso 1	51
3.8	Teorema de Leonardo - caso 2	52
3.9	Algoritmo I - possíveis grupos de simetria de ornamentos limitados	54
3.10	Ornamento limitado	54
3.11	Ornamentos limitados	55
4.1	Ponto de simetria	58
4.2	Reta de simetria	58
4.3	Árvore de possibilidades para grupos de frisos	59
4.4	Em destaque os 7 ramos possíveis para grupos de frisos	63
4.5	Notação para classificação dos grupos de frisos	63
4.6	Grupo de simetria $\mathcal{F}_1$	64
4.7	Grupo de simetria $\mathcal{F}_1^3$	66
4.8	Grupo de simetria $\mathcal{F}_1^2$	67
4.9	Grupo de simetria $\mathcal{F}_1^1$	68
4.10	Ponto médio do segmento $\overline{AA_n}$	69
4.11	Grupo de simetria $\mathcal{F}_2$	69
4.12	Mediatriz de $\overline{AM}$	70
4.13	Grupo de simetria $\mathcal{F}_2^2$	71
4.14	Retas $a$ e $c$ perpendiculares no ponto $A$	71
4.15	Retas $m$ e $c$ perpendiculares no ponto $M$	72
4.16	Grupo de simetria $\mathcal{F}_2^1$	72
4.17	Algoritmo para determinar o grupo de simetria de frisos.	73
4.18	Exemplo	74
4.19	Grupo $\mathcal{F}_1$	74
4.20	Grupo $\mathcal{F}_1^3$	74
4.21	Grupo $\mathcal{F}_1^2$	74
4.22	Grupo $\mathcal{F}_1^1$	74
4.23	Grupo $\mathcal{F}_2$	75
4.24	Grupo $\mathcal{F}_2^2$	75
4.25	Grupo $\mathcal{F}_2^1$	75
4.26	Frisos decorativos	77
5.1	Visualização do GeoGebra	85

5.2	Barra de ferramentas do GeoGebra . . . . .	86
5.3	Segmento $\overline{AB}$ e vetor $\vec{v}$ . . . . .	87
5.4	Triângulo $ABC$ e vetor $\vec{v}$ . . . . .	88
5.5	Circunferência $\mathcal{C}$ e vetor $\vec{v}$ . . . . .	89
5.6	Translação da figura $F$ pelo vetor $\vec{v}$ . . . . .	89
5.7	Segmento $\overline{AB}$ e ponto $O$ . . . . .	91
5.8	Triângulo $ABC$ e ponto $O$ . . . . .	91
5.9	Rotação da figura $F$ em torno do ponto $O$ . . . . .	92
5.10	Espelho mágico . . . . .	92
5.11	Atividade 1 . . . . .	94
5.12	Atividade 2 . . . . .	94
5.13	Atividade 3 . . . . .	95
5.14	Triângulo $ABC$ e reta $r$ . . . . .	95
5.15	Reflexão da figura $F$ em relação à reta $r$ . . . . .	96
5.16	Construção da rosácea - 1 . . . . .	97
5.17	Construção da rosácea - 2 . . . . .	98
6.1	Simetria na natureza . . . . .	100
6.2	Ornamento limitado e transferidor . . . . .	100
6.3	Material usado na investigação do grupo de simetria do ornamento limitado . . . . .	101
6.4	Alunos identificando as retas de simetria . . . . .	101
6.5	Alunos identificando as rotações . . . . .	102
6.6	Figuras utilizadas na verificação da aprendizagem . . . . .	103
6.7	Exemplo de conjunto numérico . . . . .	103
6.8	Tipos de isometrias . . . . .	104
6.9	Verificando a existência de simetria na letra N . . . . .	105
6.10	Algoritmo I - Grupo de simetria de ornamentos limitados . . . . .	106
6.11	Molde usado na construção do ornamento limitado . . . . .	106
6.12	Alunos desenhando o ornamento limitado . . . . .	107
6.13	Alunos verificando a existência de retas de simetria . . . . .	107
6.14	Figura usada para mostrar os tipos de isometrias . . . . .	108
6.15	Frisos confeccionados na lousa . . . . .	108
6.16	Frisos decorativas . . . . .	109
6.17	Sete tipos de frisos . . . . .	109
6.18	Explorando o GeoGebra . . . . .	110





# Lista de Tabelas

3.1	Tábua de multiplicação de $D_1$ . . . . .	46
3.2	Tábua de multiplicação de $C_2$ . . . . .	47
3.3	Tábua de multiplicação de $C_4$ . . . . .	48
4.1	Características dos grupos de frisos . . . . .	76



# Lista de notações

$\overline{AB}$ : o segmento de reta cujas extremidades são os pontos  $A$  e  $B$ .

$\vec{v}_{AB}$ : o vetor com origem no ponto  $A$  e orientado na direção do ponto  $B$ .

$\overleftrightarrow{AB}$ : reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .

$\overrightarrow{AB}$ : semirreta com origem no ponto  $A$  e que passa pelo ponto  $B$ .

$A\hat{O}B$ : o ângulo determinado por  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .

$AB$ : distância entre os pontos  $A$  e  $B$ , como também o comprimento do segmento de extremidades  $A$  e  $B$ .



# Introdução geral

De acordo com Weyl [15], a simetria é um assunto bastante amplo e significativo na arte e na natureza. O sentido da simetria é a ideia pela qual o homem tem tentado compreender e criar a ordem, a beleza e a perfeição através dos tempos.

Percebemos que o ensino da geometria é por vezes deixado de lado na Educação Básica. Nem sempre é dado ao ensino da geometria a sua devida importância. Pensamos então em contribuir de alguma forma com o ensino desse ramo da matemática que é indispensável para a formação básica do aluno.

Escolhemos como objeto de estudo as isometrias e as propriedades relacionadas ao produto das mesmas. Além disso, nos dedicamos a um breve estudo sobre grupos e sobre transformações geométricas, a fim de chegar em aplicações relacionadas à simetria. As aplicações apresentadas neste trabalho são a identificação do grupo de simetria de um ornamento limitado e a identificação do grupo de frisos.

O propósito deste trabalho é contribuir com professores de matemática da Educação Básica, apresentando um referencial teórico acerca dos temas isometrias e grupos de simetria e sugerindo atividades sobre os mesmos. As atividades envolvendo grupos de simetria desenvolvem a ideia de grupos, ainda que o aluno não conheça formalmente tal estrutura. A ideia de explorar a estrutura de grupos através do grupo de simetria é sugerida em Rose [11].

Neste trabalho, em alguns momentos faremos uso de certas definições e proposições da Geometria Euclidiana. No entanto, não é nosso propósito tratar aqui tais resultados. Assim, no que diz respeito à definições e demonstrações, remetemos o leitor à [8] para um estudo detalhado.

No primeiro capítulo faremos uma breve introdução sobre a teoria de grupos e transformações geométricas no plano, apresentando algumas definições e resultados. Tais resultados serão fundamentais na definição de isometrias e para demonstrar que o conjunto de todas as isometrias no plano apresenta a estrutura algébrica de grupo.

No segundo capítulo abordaremos o tema isometrias no plano. Aprofundaremos nosso estudo sobre as transformações identidade, rotação, reflexão em relação à uma reta, translação e reflexão deslizante. Apresentaremos o teorema da classificação das isometrias no plano e algumas proposições relacionadas à composição das mesmas que serão utilizadas na classificação do grupo de

simetria de ornamentos limitados e na classificação dos grupos de frisos.

No terceiro capítulo apresentaremos a definição de simetria de figuras e faremos um estudo, a partir de exemplos, sobre o grupo de simetria de ornamentos limitados. Demonstraremos o teorema de Leonardo que estabelece os grupos de simetria finitos.

No quarto capítulo abordaremos os grupos de frisos. A partir das isometrias que podem ser identificadas em um grupo de friso, faremos uma análise, através da árvore de possibilidades, de todas as combinações existentes. Demonstraremos o teorema da classificação de grupos de frisos que assegura a existência de apenas sete grupos.

No quinto capítulo apresentaremos como sugestões aos professores sete sequências de atividades. Tais sequências têm como objetivos principais identificar o grupo de simetria de ornamentos limitados, perceber as isometrias presentes em cada um dos sete grupos de frisos, construir um friso ornamental usando as ferramentas do GeoGebra e identificar propriedades das isometrias no plano. Além destes, outros conteúdos relacionados à Geometria Euclidiana podem ser abordados no desenvolvimento das atividades.

As três primeiras sequências de atividades foram aplicadas em escolas públicas de Ensino Fundamental e Médio. No sexto capítulo relataremos como foi esta experiência e os objetivos alcançados.

# Grupos e transformações

De acordo com [6], o objeto algébrico conhecido por grupo é uma das pedras angulares para a matéria que hoje é denominada por álgebra abstrata.

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, proposições e teoremas sobre grupos e sobre transformações. Nosso objetivo é fornecer ao leitor tais resultados, já que no Capítulo 2 faremos uso de conceitos relacionados a grupos e relacionados a transformações para classificar as isometrias no plano. Este capítulo é baseado principalmente nas Referências [3] e [6].

## 1.1 Grupos

**Definição 1.1.1.** *Dado um conjunto  $G$  não vazio, diz-se que  $G$  tem a estrutura algébrica de grupo se em  $G$  está definida uma operação binária, designada “produto” e indicada por  $\cdot$ , tal que:*

- 1 - *Dados  $a, b \in G$ , o produto  $a \cdot b \in G$ . Isto significa que  $G$  é fechado em relação ao produto.*
- 2 - *Dados  $a, b$  e  $c \in G$ , então vale a relação  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ , isto é, o produto é associativo.*
- 3 - *Existe um elemento  $e \in G$ , tal que para todo  $a \in G$  temos  $a \cdot e = e \cdot a = a$ . Tal elemento é chamado identidade.*

4 - *Para qualquer  $a \in G$ , existe um elemento  $b \in G$ , tal que  $a \cdot b = b \cdot a = e$ . O elemento  $b$  é chamado inverso de  $a$  e é denotado por  $a^{-1}$ , isto é,  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ , para todo  $a \in G$ .*

**Definição 1.1.2.** *Seja  $G$  um grupo. Se para todo  $a, b \in G$ , tivermos  $a \cdot b = b \cdot a$ , então  $G$  é chamado abeliano ou comutativo.*

**Definição 1.1.3.** *A ordem de um grupo  $G$  é o número de elementos que ele contém. Se o número de elementos de  $G$  é finito e igual a  $n$ , dizemos que o grupo  $G$  é finito e sua ordem é  $n$ . Caso contrário, dizemos que  $G$  é infinito.*

**Exemplo 1.1.4.** *Consideremos  $G$  o conjunto formado pelos números inteiros  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  em que para todo  $a, b \in G$  temos  $a \cdot b \equiv a + b$ , ou seja, a operação é a soma usual de inteiros. Verificamos que  $G$  é um grupo abeliano que tem infinitos elementos, com  $e = 0$  e  $a^{-1} = -a$ .*

**Definição 1.1.5.** *Seja  $G$  um grupo e  $a$  um elemento em  $G$ . Definimos:*

$$\begin{aligned} a^0 &= e \\ a^1 &= a \\ a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a \cdot a^2 \\ &\vdots \\ a^k &= a \cdot a^{k-1}. \end{aligned}$$

$e$

$$\begin{aligned} a^{-2} &= (a^{-1})^2 \\ a^{-3} &= (a^{-1})^3 \\ &\vdots \\ a^{-k} &= (a^{-1})^k. \end{aligned}$$

**Proposição 1.1.6.** *Sejam  $G$  um grupo e  $a$  um elemento de  $G$ . Para quaisquer dois inteiros  $m$  e  $n$  valem o seguinte:*

- (i)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- (ii)  $(a^m)^n = a^{mn}$

*Demonstração.* (i) Usando o Princípio de Indução Finita em  $n$ , mostraremos que  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .

- Para  $n = 1$ , vale  $a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$ , pela Definição 1.1.5.
- Suponhamos que o item (i) seja verdadeiro para  $n = k - 1$ , ou seja,  $a^m \cdot a^{k-1} = a^{m+(k-1)}$ .
- Verificaremos que o item (i) é verdadeiro para  $n = k$ .

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^k &= a^m \cdot (a^{k-1} \cdot a), \text{ pela Definição 1.1.5.} \\ &= (a^m \cdot a^{k-1}) \cdot a, \text{ pela associatividade da definição de grupo.} \\ &= a^{m+(k-1)} \cdot a, \text{ pela Hipótese de Indução} \\ &= a^{m+k-1+1}, \text{ pela Definição 1.1.5.} \\ &= a^{m+k}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos que  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$  para qualquer inteiro  $n$ .



(ii) Usando o Princípio de Indução Finita em  $n$ , mostraremos que  $(a^m)^n = a^{mn}$ :

- Para  $n = 1$ , vale  $(a^m)^1 = a^m$ , pela Definição 1.1.5.
- Suponhamos que o item (ii) seja verdadeiro para  $n = k - 1$ , ou seja,  $(a^m)^{k-1} = a^{m(k-1)}$ .
- Verificaremos que o item (ii) é verdadeiro para  $n = k$ .

$$\begin{aligned}
 (a^m)^k &= a^m \cdot (a^m)^{k-1}, \text{ pela Definição 1.1.5.} \\
 &= a^m \cdot a^{m(k-1)}, \text{ pela Hipótese de Indução.} \\
 &= a^{m+m(k-1)}, \text{ por (i).} \\
 &= a^{m+mk-m}. \\
 &= a^{mk}.
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, temos que  $(a^m)^n = a^{mn}$  para qualquer inteiro  $n$ .  $\square$

**Proposição 1.1.7.** *O elemento identidade de um grupo  $G$  é único.*

*Demonstração.* Suponhamos que existam  $e_1, e_2 \in G$  tais que  $e_1$  e  $e_2$  sejam ambos elementos identidade de  $G$ . Como  $e_2$  é elemento identidade,  $e_1 = e_1 \cdot e_2$  pelo item 3 da definição de grupo. Da mesma forma, como  $e_1$  é também elemento identidade, temos  $e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$ . Assim,  $e_1 = e_2$  e, portanto, o elemento identidade é único.  $\square$

**Proposição 1.1.8.** *O inverso de um elemento  $a$  em um grupo  $G$  é único.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y$  em  $G$ , com  $x$  e  $y$  inversos do elemento  $a$ . Logo,  $x \cdot a = a \cdot x = e$  e  $y \cdot a = a \cdot y = e$ , pelo item 4 da definição de grupo. Assim:

$$\begin{aligned}
 x &= x \cdot e, \text{ pelo item 3 da definição de grupo} \\
 &= x \cdot (a \cdot y) \\
 &= (x \cdot a) \cdot y, \text{ pela associatividade} \\
 &= e \cdot y \\
 &= y.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $x = y$ , ou seja, o elemento inverso é único.  $\square$

**Proposição 1.1.9.** *Dado um grupo  $G$ , para todos os elementos  $a, b \in G$ , temos:  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $a, b \in G$  e  $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = e$ , pelo item 4 da definição de grupo. Mostraremos que  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ .

Observemos que:

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) &= ((a \cdot b) \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = (a \cdot (b \cdot b^{-1})) \cdot a^{-1}, \text{ pela associatividade.} \\
&= (a \cdot e) \cdot a^{-1}, \text{ pois } b^{-1} \text{ é o inverso de } b. \\
&= a \cdot a^{-1}, \text{ pois } e \text{ é o elemento identidade.} \\
&= e.
\end{aligned}$$

Da mesma maneira, temos que:

$$\begin{aligned}
(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) &= ((b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot a) \cdot b, \text{ pela associatividade.} \\
&= (b^{-1} \cdot e) \cdot b, \text{ pois } a^{-1} \text{ é o inverso de } a. \\
&= b^{-1} \cdot b, \text{ pois } e \text{ é o elemento identidade.} \\
&= e.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Assim, pela unicidade do elemento inverso em um grupo temos que  $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ .  $\square$

**Definição 1.1.10.** Se  $G$  é um grupo e  $a \in G$ , a ordem (ou período) de  $a$  é o menor inteiro positivo  $n$  tal que  $a^n = e$ . Se não existe tal inteiro, dizemos que  $a$  tem ordem infinita.

**Definição 1.1.11.** Seja  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  um subconjunto de um grupo  $G$ . Dizemos que o grupo  $G$  é gerado por  $X$  se todo elemento de  $G$  pode ser representado como um produto de elementos de  $X$ , elevados a expoentes inteiros positivos, nulos ou negativos. Neste caso, denotamos  $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  e dizemos que  $a_1, a_2, \dots$  e  $a_n$  são geradores de  $G$ . Também dizemos que  $G$  é gerado por  $a_1, a_2, \dots$  e  $a_n$ .

**Definição 1.1.12.** Dizemos que  $G$  é um **grupo cíclico** se existe um elemento  $a \in G$  tal que  $G = \{a^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  e escrevemos  $G = \langle a \rangle$ . Todo elemento  $a$  que satisfaz esta condição é denominado gerador do grupo cíclico  $G$ .

**Definição 1.1.13.** Seja  $G = \langle a \rangle$  um grupo cíclico. Se existe um menor inteiro positivo  $n$  tal que  $a^n = e$  dizemos que  $G$  é um **grupo cíclico finito** de ordem  $n$ . Caso contrário, dizemos que  $G$  é um **grupo cíclico infinito**.

**Definição 1.1.14.** Um grupo cíclico  $C_n$  é o grupo de ordem  $n$  gerado por um elemento  $a$  que satisfaz a relação  $a^n = e$ .

**Definição 1.1.15.** Um grupo diedral<sup>1</sup>  $D_n$ ,  $n \geq 1$ , é o grupo de ordem  $2n$  gerado por dois elementos  $a$  e  $b$  que satisfazem as relações  $a^n = e$ ,  $b^2 = e$  e  $a \cdot b = b^{-1} \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1}$  ou equivalentemente  $a^n = e$ ,  $b^2 = e$  e  $b \cdot a \cdot b = a^{-1}$ .

<sup>1</sup>Na Seção 3.2 do Capítulo 3 apresentaremos realizações geométricas dos grupos diedrais de ordem  $2n$ , sendo que, para  $n > 2$  consideraremos os grupos de simetrias de polígonos regulares de  $n$  lados.

### 1.1.1 Subgrupos

**Definição 1.1.16.** *Seja  $H$  um subconjunto não vazio de um grupo  $G$ . Dizemos que  $H$  é um subgrupo de  $G$  se  $H$  é um grupo com relação ao produto de  $G$  (relação binária de  $G$ ).*

Dado um grupo  $G$  e um subconjunto não vazio  $H \subset G$ , para decidirmos se  $H$  é um subgrupo de  $G$  é necessário verificar se valem algumas condições.

**Lema 1.1.17.** *Se  $H$  é um subconjunto não vazio do grupo  $G$ , então  $H$  será um subgrupo de  $G$  se, e somente se*

$$(i) \ a, b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H$$

$$(ii) \ a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H.$$

*Demonstração.* Primeiramente, suponhamos que  $H$  seja um subgrupo de  $G$ . Então  $H$  é grupo. Assim, pelos itens 1 e 4 da definição de grupo, para quaisquer  $a$  e  $b$  em  $H$ , temos  $a \cdot b \in H$  e  $a^{-1} \in H$ . Logo, valem (i) e (ii).

Agora suponhamos que  $H$  seja um subconjunto de  $G$ , tais que (i) e (ii) sejam válidas.

De (i) temos que  $H$  é fechado em relação ao produto, e por (ii), todo elemento de  $H$  tem inverso.

Assim, precisamos verificar que  $e \in H$  e que vale a associatividade. Como a associatividade vale para  $G$ , vale também para  $H$  que é um subconjunto de  $G$ . Se  $a \in H$ , por (ii),  $a^{-1} \in H$  e portanto, por (i),  $e = a \cdot a^{-1} \in H$ . Isto completa a demonstração.  $\square$

**Exemplo 1.1.18.** *Sejam  $G$  o grupo dos inteiros com a operação adição e  $H$  o subconjunto de  $G$  constituído de todos os múltiplos de 5. Observemos que  $H$  é um grupo, pois se tomarmos quaisquer dois elementos  $5a$  e  $5b$  em  $H$  temos que  $5a + 5b = 5(a + b)$  está em  $H$ . Além disso,  $5a$  e  $-5a$  estão em  $H$  para cada natural  $a$ , pois  $H$  é um subconjunto dos inteiros.*

## 1.2 Transformações

**Terminologia.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios. Uma função  $f$  de  $A$  para  $B$  é injetiva se para cada par de pontos distintos de  $A$ , suas imagens por  $f$  são distintas. E,  $f$  é sobrejetiva se todo elemento de  $B$  é a imagem de algum elemento de  $A$ . Se  $f$  é injetiva e sobrejetiva dizemos simplesmente que  $f$  é uma **correspondência um-a-um** entre  $A$  e  $B$  (ver [7] e [13]). Neste caso, também dizemos que  $f$  é uma *função* bijetiva (ou biunívoca) de  $A$  para  $B$ .

**Definição 1.2.1.** *Uma transformação no plano é uma **correspondência um-a-um** entre o conjunto dos pontos do plano e o próprio conjunto dos pontos do plano.*

**Exemplo 1.2.2.** *A identidade do plano no plano, denotada por  $I$ , e definida por  $I(P) = P$  para cada ponto  $P$  no plano, é uma transformação, pois é uma correspondência biunívoca.*

**Observação 1.2.3.** *Notemos que  $t$  é uma transformação se para cada ponto  $P$  existe um único ponto  $Q$  tal que  $t(P) = Q$  e, reciprocamente, para cada ponto  $Q$  existe um único ponto  $P$  tal que  $t(Q) = P$ . Temos que a inversa  $t^{-1}$  está definida e também é uma transformação. Além disso,  $t^{-1}(A) = B$  se e somente se  $A = t(B)$ .*

**Definição 1.2.4.** *Sejam  $t_1$  e  $t_2$  transformações no plano. O produto de  $t_1$  e  $t_2$ , denotado por  $t_1t_2$ , e definido da seguinte maneira:  $t_1t_2$  é a correspondência tal que  $t_1t_2(P) = (t_2 \circ t_1)(P)$  para qualquer ponto  $P$  do plano, ou seja, a transformação  $t_1t_2$  é a composição  $t_2 \circ t_1$ , das transformações  $t_1$  e  $t_2$ . Notemos que, dado um ponto  $P$ , primeiro devemos aplicar  $t_1$  e depois aplicar  $t_2$ .*

Denotamos o produto das transformações  $t_1$  e  $t_2$  por  $t_1t_2$  em vez de  $t_1 \cdot t_2$ , com o objetivo de simplificar a redação de resultados (e suas respectivas demonstrações) que apresentaremos nos capítulos seguintes.

**Teorema 1.2.5.** *O produto  $t_1t_2$  das transformações  $t_1$  e  $t_2$  é uma transformação.*

*Demonstração.* Sejam  $P$  e  $Q$  pontos no plano tais que  $t_1t_2(P) = t_1t_2(Q)$ . Temos  $(t_2 \circ t_1)(P) = (t_2 \circ t_1)(Q)$  e portanto,  $t_2(t_1(P)) = t_2(t_1(Q))$ . Como  $t_2$  é injetiva, pois é uma transformação, obtemos  $t_1(P) = t_1(Q)$  e sendo  $t_1$  também injetiva temos  $P = Q$ , ou seja,  $t_1t_2$  é injetiva.

Para mostrarmos que  $t_1t_2$  é sobrejetiva, consideremos  $P$  um ponto qualquer no plano. Como  $t_2$  é sobrejetiva, existe  $P'$  no plano tal que  $t_2(P') = P$ . Como  $t_1$  é sobrejetiva, existe  $P''$  no plano tal que  $t_1(P'') = P'$ . Portanto,  $t_1t_2(P'') = t_2(t_1(P'')) = t_2(P') = P$ , o que implica que  $t_1t_2$  é sobrejetiva.  $\square$

**Teorema 1.2.6.** *O conjunto de todas as transformações forma um grupo.*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{T}$  o conjunto de todas as transformações no plano. Consideremos a operação dada pela Definição 1.2.4. Então, pelo Teorema 1.2.5 para cada  $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$  temos  $t_1t_2 \in \mathcal{T}$ . Assim,  $\mathcal{T}$  possui a propriedade do fechamento.

Se uma transformação  $t \in \mathcal{T}$ , pela Observação 1.2.3 temos  $t^{-1} \in \mathcal{T}$ . Além disso, como o conjunto  $\mathcal{T}$  é fechado em relação ao produto temos que  $tt^{-1} = t^{-1}t \in \mathcal{T}$ . Para cada ponto  $P \in \mathcal{T}$  temos  $tt^{-1}(P) = (t^{-1} \circ t)(P) = P$  e também  $t^{-1}t(P) = (t \circ t^{-1})(P) = P$ . Assim  $tt^{-1} = t^{-1}t = I$  e portanto, o conjunto  $\mathcal{T}$  de todas as transformações possui o elemento identidade  $I$  e além disso,  $t^{-1}$  é o inverso de  $t$ .

O conjunto  $\mathcal{T}$  de transformações possui a propriedade associativa, isto é, para quaisquer elementos  $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T}$  temos  $t_1(t_2t_3) = (t_1t_2)t_3$ , pois, para cada ponto  $P$  pertencente ao plano temos:  $[(t_1t_2)t_3](P) = [t_3 \circ (t_2 \circ t_1)](P) = t_3((t_2 \circ t_1)(P)) = t_3(t_2(t_1(P))) = (t_3 \circ t_2)(t_1(P)) = [(t_3 \circ t_2) \circ t_1](P) = [t_1(t_2t_3)](P)$ .  $\square$

**Observação 1.2.7.** *O grupo das transformações não é abeliano, pois existem transformações  $t_1$  e  $t_2$ , tais que,  $t_1t_2 \neq t_2t_1$ , como veremos no Capítulo 2.*

# Isometrias

Neste capítulo estudaremos o grupo das transformações do plano no plano que preservam distâncias entre pontos, ou sejam, as isometrias. Nossos objetivos são caracterizar as transformações identidade, rotação, reflexão em relação à uma reta, translação e reflexão deslizante como isometrias, e demonstrar o Teorema de Classificação das Isometrias no Plano.

Apresentaremos algumas proposições sobre isometrias e sobre produtos de isometrias que serão utilizados na classificação dos grupos de simetrias de ornamentos limitados e na classificação dos grupos de frisos, abordados nos Capítulos 3 e 4.

A fim de buscar subsídios para compor este capítulo, consultamos as Referências [1], [5], [6] e [10].

## 2.1 Definição de isometria

**Definição 2.1.1.** *Uma isometria no plano  $\Pi$  é uma transformação  $f : \Pi \rightarrow \Pi$  que preserva distância entre pontos. Isto é,  $f$  é uma isometria se dados  $P$  e  $Q$  pontos no plano  $\Pi$ , tal que  $f(P) = P'$  e  $f(Q) = Q'$  então  $PQ = P'Q'$ .*

Uma isometria é por definição, uma transformação. Portanto, toda isometria no plano é injetiva e sobrejetiva<sup>1</sup>. Vamos provar que o conjunto de todas as isometrias é um subgrupo do grupo das transformações.

**Proposição 2.1.2.** *O conjunto de todas as isometrias do plano é um subgrupo do grupo das transformações.*

*Demonstração.* Pela Definição 2.1.1, uma isometria é uma transformação. Assim, o conjunto de todas as isometrias no plano é um subconjunto do grupo das transformações. Pelo Lema

---

<sup>1</sup>Na definição 2.1.1 de isometria, a condição de  $f$  ser uma transformação pode ser suprimida, pois o fato de  $f$  preservar distâncias implica na injetividade e sobrejetividade, como pode ser conferido em [5].

1.1.17 do Capítulo 1, para mostrar que o subconjunto das isometrias é um subgrupo do grupo das transformações, precisamos demonstrar que valem os dois itens seguintes:

*i.* Se  $f$  e  $g$  são isometrias, então o produto  $fg$  é isometria.

*ii.* Se  $f$  é isometria então  $f^{-1}$  é isometria.

(i) Consideremos  $f$  e  $g$  isometrias,  $A$  e  $B$  pontos do plano e  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$ ,  $g(A') = A''$ ,  $g(B') = B''$ . Assim,

$$\begin{aligned} fg(A) &= g(f(A)) = g(A') = A'' \\ fg(B) &= g(f(B)) = g(B') = B''. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como  $f$  e  $g$  preservam distâncias, pois são isometrias, temos  $AB = A'B'$  e  $A'B' = A''B''$ . Logo,

$$AB = A''B''. \tag{2.2}$$

De 2.1 e 2.2, concluímos que o produto  $fg$  preserva distâncias. Portanto, o produto  $fg$  é isometria.

(ii) Consideremos  $f$  isometria e  $A$  e  $B$  pontos do plano. Notemos que, uma isometria  $f$  admite inversa  $f^{-1}$ , pois  $f$  é uma transformação e, portanto, uma bijeção. Como  $f^{-1}(f(A)) = A$  se, e somente se,  $f(A) = A$  e  $f^{-1}(f(B)) = B$  se, e somente se,  $f(B) = B$  e, além disso,  $f^{-1}(A'B') = AB$ , pois  $f$  é isometria, concluímos que  $f^{-1}$  preserva distâncias, ou seja,  $f^{-1}$  é isometria.

Portanto, como o produto de isometrias é uma isometria e, além disso, a inversa de uma isometria é uma isometria, pelo Lema 1.1.17, o conjunto de todas as isometrias no plano é um subgrupo do grupo das transformações.  $\square$

**Definição 2.1.3.** *Seja  $f$  uma isometria no plano. Um ponto  $P$  do plano é chamado ponto invariante (ou fixo) de  $f$  se  $f(P) = P$ . Um subconjunto  $\mathcal{F}$  do plano é chamado invariante pela isometria  $f$  se  $f(\mathcal{F}) = \{f(P)/P \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}$  (isto não implica que  $f(P) = P, \forall P \in \mathcal{F}$ ).*

## 2.2 Isometrias fundamentais no plano

### 2.2.1 Identidade

**Proposição 2.2.1.** *A identidade  $I$ , definida no Exemplo 1.2.2 do Capítulo 1, é uma isometria.*

*Demonstração.* Vamos dividir a demonstração em duas partes. Mostraremos que:

- (i) a identidade é uma transformação do plano no plano.
- (ii) a identidade preserva distâncias entre pontos..

(i) Pelo Exemplo 1.2.2 do Capítulo 1, a identidade  $I$  é bijetiva e, portanto, é uma transformação.

(ii) Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos no plano. Pelo Exemplo 1.2.2 do Capítulo 1 temos  $I(A) = A$  e  $I(B) = B$ . Como  $AB = AB$ , a identidade  $I$  preserva distância entre pontos.

Portanto, pela Definição 2.1.1, por (i) e (ii), a **identidade  $I$  é uma isometria** do plano no plano.  $\square$

### 2.2.2 Rotação

**Definição 2.2.2.** *Seja  $O$  um ponto no plano e  $\theta = \widehat{A\hat{O}B}$  um ângulo de vértice  $O$ . A rotação de ângulo  $\theta$  em torno de  $O$  denotada por  $R_{O\theta}$  é definida por:*

(a)  $R_{O\theta}(O) = O$ .

(b)  $R_{O\theta}(P) = P'$  é o ponto do plano tal que  $OP = OP'$  e  $\widehat{P\hat{O}P'} = \widehat{A\hat{O}B} = \theta$ , para todo ponto  $P$  distinto de  $O$  no plano. E, o sentido de rotação de  $A$  para  $B$  é o mesmo de  $P$  para  $P'$ .

A exigência de que o sentido de rotação de  $P$  para  $P'$  seja o mesmo que o sentido de  $A$  para  $B$  é clara e intuitiva. No entanto, essa condição pode ser dada de uma maneira formal dizendo que os ângulos  $\widehat{B\hat{O}P}$  e  $\widehat{A\hat{O}P'}$  têm a mesma bissetriz, como mostra a Figura 2.1. Isso implica que as medidas dos ângulos  $\widehat{A\hat{O}B}$  e  $\widehat{P\hat{O}P'}$  são iguais. Assim, para quaisquer pontos  $P$  e  $Q$ , em que  $R_{O\theta}(P) = P'$  e  $R_{O\theta}(Q) = Q'$ , as medidas dos ângulos  $\widehat{P\hat{O}P'}$  e  $\widehat{Q\hat{O}Q'}$  são iguais. Assim, os ângulos  $\widehat{P'\hat{O}Q}$  e  $\widehat{P\hat{O}Q'}$  têm a mesma bissetriz. Quando o ponto  $P$  pertence à semirreta  $\overrightarrow{OB}$  podemos entender a bissetriz de  $\widehat{B\hat{O}P}$  como sendo a própria semirreta  $\overrightarrow{OB}$ .

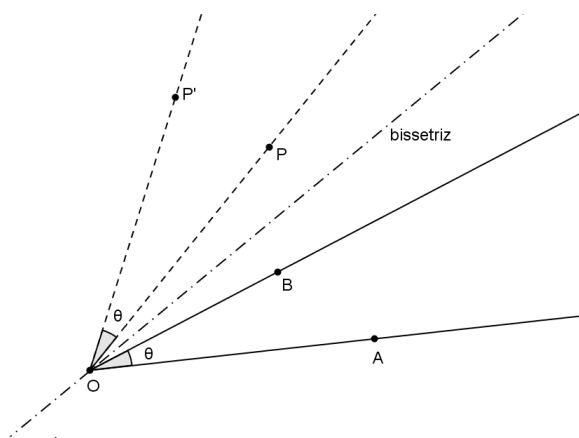


Figura 2.1: Rotação de centro  $O$  e ângulo  $\theta$

**Proposição 2.2.3.** *Seja  $O$  um ponto no plano e  $\theta = \widehat{A\hat{O}B}$  um ângulo no plano. A rotação  $R_{O\theta}$  de centro  $O$  e ângulo  $\theta = \widehat{A\hat{O}B}$  está bem definida e é uma isometria do plano no plano.*

*Demonstração.* Vamos dividir a demonstração em três partes. Mostraremos que a rotação:

- (i) está bem definida.
- (ii) é uma transformação do plano no plano.
- (iii) preserva distâncias entre pontos.

(i) Seja  $P \neq O$  um ponto no plano. Mostraremos que existe um único ponto  $P'$  tal que  $R_{O\theta}(P) = P'$ . Para isso, suponhamos os pontos  $P'$  e  $P''$  tais que  $R_{O\theta}(P) = P'$  e  $R_{O\theta}(P) = P''$ . Como  $B\hat{O}P$  e  $A\hat{O}P'$  têm a mesma bissetriz, assim como  $B\hat{O}P$  e  $A\hat{O}P''$  têm a mesma bissetriz, temos que  $A\hat{O}P'$  e  $A\hat{O}P''$  têm a mesma bissetriz. Logo, as semirretas  $\overrightarrow{OP'}$  e  $\overrightarrow{OP''}$  coincidem e, como, pela Definição 2.2.2,  $OP = OP' = OP''$ , concluímos que  $P' = P''$ . Portanto, a rotação está bem definida.

(ii) Agora mostraremos que a rotação é injetiva e sobrejetiva, o que implica que é uma transformação. Para mostrar que é injetiva, suponhamos os pontos  $P$  e  $Q$  tais que  $R_{O\theta}(P) = R_{O\theta}(Q) = P'$ . Assim, pela Definição 2.2.2, temos que  $B\hat{O}P$  e  $A\hat{O}P'$  têm a mesma bissetriz, assim como  $B\hat{O}Q$  e  $A\hat{O}P'$  têm a mesma bissetriz. Logo,  $B\hat{O}P$  e  $B\hat{O}Q$  têm a mesma bissetriz e, portanto, as semirretas  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OQ}$  coincidem. Como  $OP = OQ = OP'$ , concluímos que  $P = Q$ . Logo, a rotação é injetiva.

Para mostrar que é sobrejetiva, consideremos um ponto  $Q$  arbitrário no plano. Vamos encontrar  $P$  tal que  $R_{O\theta}(P) = Q$ . Se  $Q$  pertence à semirreta  $\overrightarrow{OA}$ , consideremos  $P$  com  $OP = OQ$  e tal que a semirreta  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ}$  é a bissetriz de  $P\hat{O}B$ . Se  $Q$  pertence à semirreta  $\overrightarrow{OB}$ , consideremos  $P$  com  $OP = OQ$  na semirreta  $\overrightarrow{OA}$ . Caso contrário, consideremos  $P$  com  $OP = OQ$  e tal que os ângulos  $A\hat{O}Q$  e  $B\hat{O}P$  têm a mesma bissetriz. Logo,  $R_{O\theta}(P) = Q$ . Assim, temos que a rotação é sobrejetiva.

Portanto, a rotação é uma transformação.

(iii) Primeiramente suponhamos os pontos  $P$  e  $Q$  no plano distintos de  $O$  com as semirretas  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OQ}$  também distintas. Sejam  $R_{O\theta}(P) = P'$  e  $R_{O\theta}(Q) = Q'$ , respectivamente suas imagens. Como as medidas dos ângulos  $P\hat{O}P'$  e  $Q\hat{O}Q'$  são iguais e além disso os ângulos  $P'\hat{O}Q$  e  $P\hat{O}Q'$  têm a mesma bissetriz, segue que as medidas dos ângulos  $P\hat{O}Q$  e  $P'\hat{O}Q'$  são iguais. Da Definição 2.2.2 temos  $OP = OP'$  e  $OQ = OQ'$ . Assim concluímos que os triângulos  $POQ$  e  $P'OQ'$  são congruentes pelo caso LAL. Logo,  $PQ = P'Q'$ . Em outras possibilidades para os pontos  $P$  e  $Q$ , por exemplo, quando  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ , também podemos verificar facilmente que a rotação preserva distâncias, utilizando congruência de triângulos.

Portanto, pela Definição 2.1.1, por (i), (ii) e (iii), a **rotação é uma isometria** do plano no plano.  $\square$

O centro  $O$  da rotação é um ponto invariante da mesma, pois, pela Definição 2.2.2,  $R_{O\theta}(O) = O$ .

A inversa da rotação  $R_{O\theta}$  é a rotação  $R_{O(-\theta)}$ , isto é,  $R_{O\theta}^{-1} = R_{O(-\theta)}$ .

Quando  $\theta = 180^\circ$ , a rotação  $R_{O\theta}$  é chamada de *simetria em relação ao ponto  $O$*  ou *meia-volta de centro  $O$*  e será denotada por  $H_O$ .

### 2.2.3 Reflexão em relação a uma reta

**Definição 2.2.4.** *Seja  $r$  uma reta no plano. A reflexão em torno da reta  $r$ , denotada por  $R_r$ , é definida da seguinte forma: dado um ponto  $P$  no plano, se  $P \in r$  então  $R_r(P) = P$ , se  $P \notin r$  então  $R_r(P) = P'$  em que  $P'$  é o ponto tal que  $r$  é a mediatriz do segmento  $\overline{PP'}$ . Em outras palavras, se*



$M$  é o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre  $r$ , então  $P'$  é tal que  $M$  é o ponto médio de  $\overline{PP'}$  (veja a Figura 2.2).

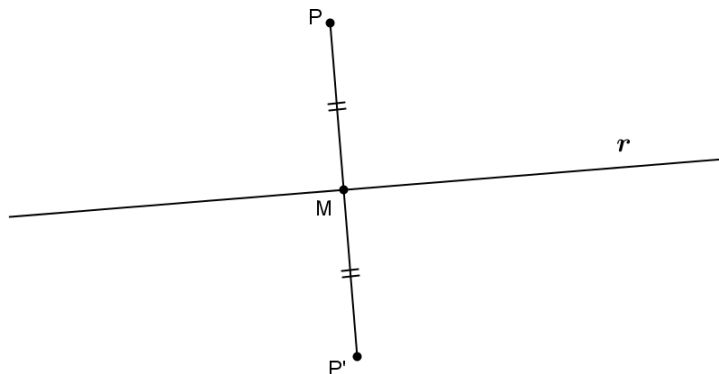


Figura 2.2: Reflexão em relação a reta  $r$

**Proposição 2.2.5.** *Seja  $r$  uma reta no plano. A reflexão  $R_r$  em torno da reta  $r$  é uma isometria do plano no plano.*

*Demonstração.* Vamos dividir a demonstração em três partes. Mostraremos que:

- (i) a reflexão está bem definida.
- (ii) a reflexão é uma transformação do plano no plano.
- (iii) a reflexão preserva distâncias entre pontos, ou seja, é uma isometria.

(i) Seja  $P$  um ponto no plano. Se  $P \in r$  não há o que provar, pois por definição  $R_r(P) = P$ . Se  $P \notin r$ , vamos verificar que existe um único ponto  $P'$  tal que  $R_r(P) = P'$ . Para isso, suponhamos que exista um ponto  $P'' \notin r$  tal que  $R_r(P) = P''$ . Então  $\overline{PP'}$  e  $\overline{PP''}$  têm ambos a reta  $r$  como mediatriz. Logo, se  $P$  e  $P'$  fossem pontos distintos teríamos duas perpendiculares à reta  $r$  passando pelo ponto  $P$ , o que, pela unicidade da perpendicular a uma reta por um ponto, é impossível. Portanto,  $P' = P''$ , o que implica que a reflexão  $R_r$  está bem definida.

(ii) Vamos verificar que  $R_r$  é injetiva. Sejam  $P_1, P_2 \in r$  tais que  $R_r(P_1) = P'$  e  $R_r(P_2) = P'$ . A unicidade da perpendicular a uma reta por um ponto implica que  $P_1 = P_2$ . Portanto,  $R_r$  é injetiva.

Agora mostraremos que dado um ponto  $Q$  no plano existe um único ponto  $P$  tal que  $R_r(P) = Q$ . Para mostrar a existência, consideremos a perpendicular à reta  $r$  passando por  $Q$  e denotemos por  $M$  o ponto de interseção dessa perpendicular com a reta  $r$ . Consideremos o ponto  $P$  na reta perpendicular a  $r$  tal que  $M$  é o ponto médio de  $\overline{PQ}$ . Assim  $R_r(P) = Q$ . Pela unicidade da reta perpendicular por um ponto temos que  $P$  é único. Logo,  $R_r$  é sobrejetiva.

Portanto,  $R_r$  é uma transformação.

(iii) Para mostrar que a reflexão  $R_r$  preserva distâncias entre pontos, vamos considerar cinco casos:

**Caso 1:** Consideremos  $P$  e  $Q$  dois pontos no plano situados do mesmo lado da reta  $r$  com  $\overline{PQ}$  paralelo a  $r$  e sejam  $R_r(P) = P'$  e  $R_r(Q) = Q'$ , como mostra a Figura 2.3. Pela Definição 2.2.4,  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$  são perpendiculares à reta  $r$  e, assim,  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$  são paralelos. Além disso, notemos que  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$  são perpendiculares à  $\overline{PQ}$  e  $\overline{P'Q'}$ . Então  $PQQ'P'$  é um retângulo. Portanto,  $PQ = P'Q'$  e  $R_r$  preserva distâncias entre pontos.



Figura 2.3: Reflexão - caso 1

**Caso 2:** Consideremos  $P$  e  $Q$  dois pontos no plano situados no mesmo lado da reta  $r$  com  $\overline{PQ}$  não paralelo à  $r$  e sejam  $R_r(P) = P'$  e  $R_r(Q) = Q'$ , como mostra a Figura 2.4, com a distância de  $P$  a  $r$  menor do que a distância de  $Q$  a  $r$ . Consideremos as retas passando por  $P$  e  $P'$  e paralelas à reta  $r$ . Denotemos por  $X$  e  $X'$ , respectivamente, as interseções dessas retas com  $\overline{QQ'}$ . Notemos que os triângulos  $PXQ$  e  $P'X'Q'$  possuem um ângulo de  $90^\circ$ . Pelo caso 1 temos  $PX = P'X'$ . Denotemos por  $M$  o ponto médio de  $\overline{QQ'}$ . Notemos que  $QM = MQ'$  e  $XM = MX'$ , o que implica que  $QX = X'Q'$ . Assim, pelo caso de congruência LAL, concluímos que os triângulos  $PXQ$  e  $P'X'Q'$  são congruentes. Portanto,  $PQ = P'Q'$ , e neste caso, a reflexão  $R_r$  preserva distâncias entre pontos.

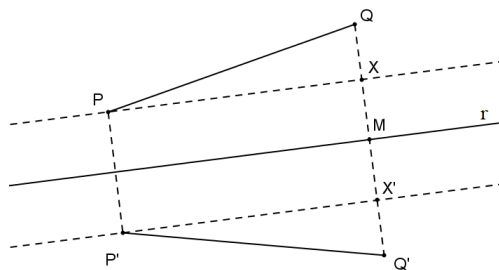


Figura 2.4: Reflexão - caso 2

**Caso 3:** Consideremos  $P$  e  $Q$  pontos situados em lados opostos em relação a reta  $r$  e sejam  $R_r(P) = P'$  e  $R_r(Q) = Q'$ , como mostra a Figura 2.5. Denotemos por  $M$  e  $N$  os pontos médios de  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$  respectivamente. Assim temos  $PM = MP'$  e  $QN = NQ'$ . Denotemos por  $X$  a

interseção do segmento  $\overline{PQ}$  com a reta  $r$ . Notemos que os ângulos  $P\hat{X}M$  e  $Q\hat{X}N$  são congruentes, pois são ângulos opostos pelo vértice. Também os ângulos  $P\hat{X}M$  e  $P'\hat{X}M$  são congruentes, pois a reta  $r$  é a mediatriz de  $\overline{PP'}$ . Analogamente, os ângulos  $Q\hat{X}N$  e  $Q'\hat{X}N$  são congruentes. Assim os ângulos  $P'\hat{X}M$  e  $Q'\hat{X}N$  são congruentes e portanto, os pontos  $P'$ ,  $X$  e  $Q'$  são colineares. Portanto,  $PQ = P'Q'$ , pois  $PQ = PX + XQ = P'X + XQ' = P'Q'$ , e temos que  $R_r$  preserva distância entre pontos.

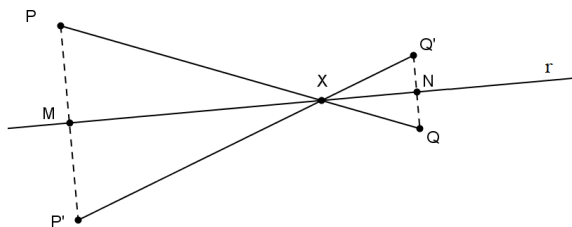


Figura 2.5: Reflexão - caso 3

**Caso 4:** Consideremos os pontos  $P$  e  $Q$  em que  $P$  não pertence à reta  $r$  e  $Q$  pertence a  $r$  e sejam  $R_r(P) = P'$  e  $R_r(Q) = Q'$ , como mostra a Figura 2.6. Pela Definição 2.2.4, a reta  $r$  é a mediatriz do segmento  $\overline{PP'}$  e  $R_r(Q) = Q$ , pois  $Q \in r$ . Assim, temos  $PQ = P'Q$  e, portanto,  $R_r$  preserva distância.

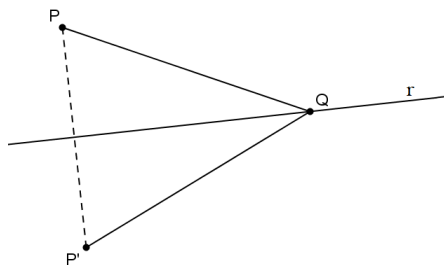


Figura 2.6: Reflexão - caso 4

**Caso 5:** Consideremos os pontos  $P$  e  $Q$  ambos pertencentes à reta  $r$  e sejam  $R_r(P) = P'$  e  $R_r(Q) = Q'$ , como mostra a Figura 2.7. Pela Definição 2.2.4 temos  $R_r(P) = P$  e  $R_r(Q) = Q$  para quaisquer pontos  $P, Q \in r$ . Portanto,  $PQ = P'Q'$ , ou seja,  $R_r$  preserva distâncias entre pontos.



Figura 2.7: Reflexão - caso 5

Portanto, pela Definição 2.1.1, por (i), (ii) e (iii), a **reflexão**  $R_r$  é **uma isometria** do plano no plano.  $\square$

Os pontos invariantes da reflexão em relação à reta  $r$  são os pontos da reta  $r$ , pois, pela Definição 2.2.4, dado um ponto  $P$  no plano, se  $P \in r$  então  $R_r(P) = P$  para todo  $P$  em  $r$ .

O produto de duas reflexões em relação a uma mesma reta é a identidade, ou seja, dada uma reta  $r$  no plano, temos  $R_r R_r = I$ . Assim, a inversa da reflexão em relação à uma reta é igual a ela mesma, isto é, dada uma reta  $r$  no plano, temos  $R_r^{-1} = R_r$ .

## 2.2.4 Translação

**Definição 2.2.6.** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos no plano. Se  $A$  e  $B$  são distintos, a translação denotada por  $T_{AB}$  é definida por:*

(a) *Se  $P$  é um ponto no plano tal que  $A$ ,  $B$  e  $P$  não são colineares, sua imagem  $P' = T_{AB}(P)$  é o quarto vértice do paralelogramo cujos lados são  $\overline{AB}$  e  $\overline{AP}$  (veja a Figura 2.8).*

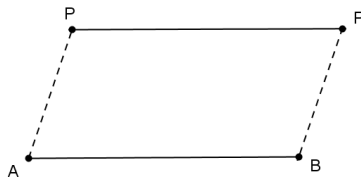


Figura 2.8: Translação:  $A$ ,  $B$  e  $P$  não colineares

(b) *Se  $A$ ,  $B$  e  $P$  são colineares então  $P'$  é o ponto tal que  $PP' = AB$  e, além disso, os segmentos  $\overline{AP'}$  e  $\overline{BP}$  têm o mesmo ponto médio (veja a Figura 2.9).*

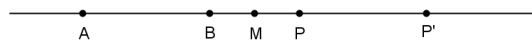


Figura 2.9: Translação:  $A$ ,  $B$  e  $P$  colineares

Se  $A = B$ , a translação é a identidade e dizemos que é a translação trivial e que tem deslocamento nulo.

**Observação 2.2.7.** *Na definição da translação  $T_{AB}$  é necessário levar em conta a ordem em que aparecem os pontos  $A$  e  $B$ . A translação  $T_{AB}$  é diferente de  $T_{BA}$ .*

Tanto para  $P$  pertencente à reta  $\overleftrightarrow{AB}$  quanto para  $P$  não pertencente a esta reta, o ponto  $P'$ , imagem de  $P$  pela translação  $T_{AB}$ , é tal que os pontos médios de  $\overline{BP}$  e  $\overline{AP'}$  coincidem.

**Proposição 2.2.8.** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos do plano. A translação  $T_{AB}$  é uma isometria do plano no plano.*

*Demonstração.* Vamos dividir a demonstração em três partes. Mostraremos que:

- (i) a translação está bem definida.
- (ii) a translação é uma transformação do plano no plano.
- (iii) a translação preserva distâncias entre pontos.

(i) Para provar que a translação  $T_{AB}$  está bem definida, verificaremos que dado um ponto  $P$  no plano, existe um único ponto  $P'$  tal que  $T_{AB}(P) = P'$ . Suponhamos que exista  $P''$  tal que  $T_{AB}(P) = P''$ . Se  $P$  pertence à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , como  $PP' = AB = PP''$  e os pontos médios dos segmentos  $\overline{AP'}$ ,  $\overline{AP''}$  e  $\overline{BP}$  coincidem, temos que  $P' = P''$ . Se  $P$  não pertence à reta  $\overleftrightarrow{AB}$  então  $P''$  é o quarto vértice do paralelogramo de lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AP}$ , assim como o ponto  $P'$ . Assim temos  $\overline{PP''}$  paralelo à  $\overline{AB}$ . Como o segmento  $\overline{PP'}$  é também paralelo à  $\overline{AB}$ , pela unicidade da reta paralela por um ponto,  $P''$  está na reta que contém  $\overline{PP'}$ . Por outro lado  $PP' = AB = PP''$  o que implica que  $P' = P''$ . Portanto, a translação está bem definida.

(ii) Vamos verificar que  $T_{AB}$  é injetiva. Sejam os pontos  $P_1, P_2$  tais que  $T_{AB}(P_1) = P'$  e  $T_{AB}(P_2) = P'$ . Pela Observação 2.2.7, os pontos médios dos segmentos  $\overline{BP_1}$ ,  $\overline{BP_2}$  e  $\overline{AP'}$  coincidem, o que implica que  $P_1 = P_2$ . Logo,  $T_{AB}$  é injetiva.

Agora verificaremos que para cada ponto  $Q'$  no plano existe um único ponto  $Q$  tal que  $T_{AB}(Q) = Q'$ . Para isso traçamos por  $Q'$  uma reta  $r$  paralela à  $\overline{AB}$  e por  $A$  traçamos uma reta  $s$  paralela à  $\overline{Q'B}$ . A interseção das retas  $r$  e  $s$  é um único ponto, pois  $\overline{Q'B}$  e  $\overline{AB}$  são concorrentes. Tal ponto de interseção é o ponto  $Q$  onde  $T_{AB}(Q) = Q'$ . Logo, a translação é sobrejetiva.

Portanto, a translação é uma transformação do plano no plano.

(iii) Para mostrar que a translação  $T_{AB}$  preserva distâncias entre pontos, vamos considerar três casos.

**Caso 1:** Sejam  $P$  e  $Q$  pontos pertencentes à uma reta paralela à reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e sejam suas imagens pela translação  $T_{AB}$ ,  $P'$  e  $Q'$  respectivamente, como mostra a Figura 2.10. Pela Definição 2.2.6, os pontos  $P'$  e  $Q'$  são os quartos vértices dos paralelogramos  $ABP'P$  e  $ABQ'Q$ , respectivamente. Assim, o segmento  $\overline{P'Q'}$  está contido na reta  $\overleftrightarrow{PQ}$ ,  $\overline{P'Q'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$  e  $PA = P'B$  e  $QA = Q'B$ .

Consideremos um ponto  $X$  na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , como mostra a Figura 2.10. Observemos que  $P\hat{A}B = P'\hat{B}X$  e  $Q\hat{A}B = Q'\hat{B}X$ , pois são ângulos correspondentes entre retas paralelas. Isso implica que  $P\hat{A}Q = P'\hat{B}Q'$ .

Dessa forma, pelo caso de congruência de triângulos LAL, concluímos que os triângulos  $PAQ$  e  $P'BQ'$  são congruentes.

Portanto,  $PQ = P'Q'$  e neste caso, a translação preserva distâncias entre pontos.

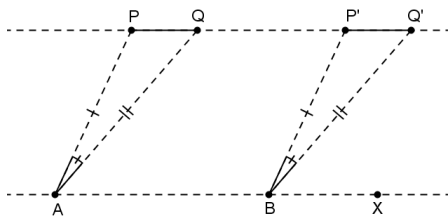


Figura 2.10: Translação - caso 1

**Caso 2:** Sejam  $P$  e  $Q$  pontos no plano tais que a reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  não é paralela à reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e sejam suas imagens pela translação  $T_{AB}$ ,  $P'$  e  $Q'$  respectivamente, como mostra a Figura 2.11. Observemos que  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$  são ambos paralelos à  $\overline{AB}$ , logo  $\overline{PP'}$  e  $\overline{QQ'}$  são paralelos. Além disso,  $PP' = AB = QQ'$  o que implica que  $PP' = QQ'$  e logo,  $PP'Q'Q$  é um paralelogramo. Portanto,  $PQ = P'Q'$  e neste caso, a translação preserva distâncias entre pontos.

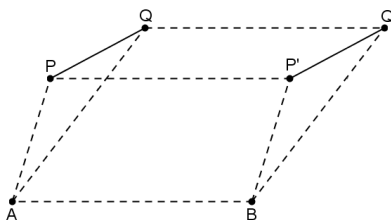


Figura 2.11: Translação - caso 2

**Caso 3:** Sejam  $P$  e  $Q$  pontos pertencentes à reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e suas imagens pela translação  $T_{AB}$ ,  $P'$  e  $Q'$  respectivamente. Considerando  $P$  e  $Q$ , como mostra a Figura 2.12, sendo  $AB = PP' = QQ'$  e, além disso,  $PP'$  e  $QQ'$  não tendo pontos interiores em comum, temos  $P'Q' = P'Q + QQ' = P'Q + PP' = PQ$ . Assim, neste caso a translação preserva distâncias. De modo análogo podemos verificar que preserva distâncias para outras possibilidades de posições relativas entre os pontos  $P$ ,  $P'$ ,  $Q$  e  $Q'$  na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

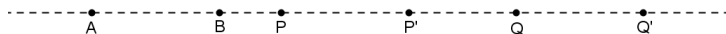


Figura 2.12: Translação - caso 3

Portanto, pela Definição 2.1.1, por (i), (ii) e (iii), a **translação  $T_{AB}$  é uma isometria** do plano no plano.  $\square$

Uma translação  $T_{AB}$  não possui ponto invariante, pois para cada ponto  $P$  no plano com  $T_{AB}(P) = P'$ , temos  $PP' = AB$  o que implica  $P \neq P'$ .

Uma translação  $T_{AB}$  possui reta invariante. Cada reta paralela à reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  são invariantes. Nenhum ponto isolado é, entretanto, invariante por uma translação.

A inversa de uma translação  $T_{AB}$ , denotada por  $(T_{AB})^{-1}$  é a translação  $T_{BA}$ , ou seja,  $(T_{AB})^{-1} = T_{BA}$ .

### 2.2.5 Reflexão deslizante

**Definição 2.2.9.** *Sejam  $R_r$  uma reflexão em relação à reta  $r$  e  $T_{AB}$  uma translação paralela à reta  $r$ . A reflexão deslizante, denotada por  $\gamma$ , é definida pelo produto  $R_r T_{AB}$ . Dado um ponto  $P$  no plano, temos  $R_r T_{AB}(P) = P'$ , como mostra a Figura 2.13. A reta  $r$  é denominada eixo da reflexão deslizante.*

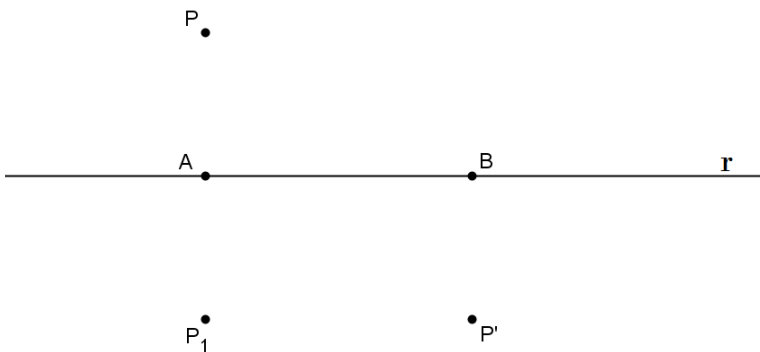


Figura 2.13: Reflexão deslizante

**Proposição 2.2.10.** *Seja  $r$  uma reta no plano. A reflexão deslizante  $\gamma$  de eixo  $r$  é uma isometria.*

*Demonstração.* De fato a reflexão deslizante é o produto de duas isometrias, e o produto de duas isometrias é também uma isometria.

Portanto, a **reflexão deslizante  $\gamma$  é uma isometria** do plano no plano. □

Seja  $\gamma = R_r T_{AB}$  uma reflexão deslizante. Embora a movimentação dos pontos do plano seja diferente, como por definição a translação  $T_{AB}$  é paralela à reta de reflexão, temos  $\gamma = R_r T_{AB} = T_{AB} R_r$ . Provaremos isso mais adiante.

A reflexão deslizante  $\gamma$  tem a reta  $r$  invariante, mas os pontos pertencentes à reta  $r$  não são invariantes, ou sejam, fixos.

## 2.3 Proposições sobre isometrias no plano

**Proposição 2.3.1.** *A imagem de um segmento  $\overline{AB}$  por uma isometria  $f$  é o segmento  $\overline{A'B'}$ , tal que  $f(A) = A'$  e  $f(B) = B'$ .*

*Demonstração.* Seja  $P$ , distinto de  $A$  e de  $B$ , um ponto pertencente ao segmento  $\overline{AB}$  e  $f(P) = P'$ . Como  $AB = A'B'$ ,  $AP = A'P'$ ,  $PB = P'B'$ , pois  $f$  é uma isometria, e  $AB = AP + PB$ , pois  $P$  pertence ao segmento  $\overline{AB}$ , temos

$$\begin{aligned} A'B' &= AB \\ &= AP + PB \\ &= A'P' + P'B'. \end{aligned}$$

Logo,  $A'B' = A'P' + P'B'$ , o que implica que  $P'$  pertence ao segmento  $A'B'$ . Então, a imagem do segmento  $\overline{AB}$  pela isometria  $f$  está contida no segmento  $\overline{A'B'}$ , ou seja,

$$f(\overline{AB}) \subset \overline{A'B'}. \quad (2.3)$$

Por outro lado, se  $P'$  pertence ao segmento  $\overline{A'B'}$ , então  $A'B' = A'P' + P'B'$ . E, sendo  $x = A'P'$ , temos  $x < A'B' = AB$ . Consideremos  $P$  no segmento  $\overline{AB}$ , com  $AP = x$ . Logo,  $AP = A'P'$  e  $PB = P'B'$  e, portanto,  $f(P) = P'$ , pois  $f$  é isometria e preserva as distâncias de  $A$  e  $P$  e de  $P$  e  $B$ . Logo, todo ponto de  $\overline{A'B'}$  está na imagem de  $\overline{AB}$  pela isometria  $f$  e, assim, o segmento  $\overline{A'B'}$  está contido na imagem do segmento  $\overline{AB}$  pela isometria  $f$ , ou seja,

$$\overline{A'B'} \subset f(\overline{AB}). \quad (2.4)$$

Pelas Equações 2.3 e 2.4 concluímos que  $f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ , isto é, a imagem do segmento  $\overline{AB}$  pela isometria  $f$  é o segmento  $\overline{A'B'}$ .  $\square$

**Corolário 2.3.2.** *Uma isometria transforma um triângulo em um triângulo congruente. Em outras palavras, se  $f$  é uma isometria,  $ABC$  um triângulo e  $A' = f(A)$ ,  $B' = f(B)$ ,  $C' = f(C)$ , então o triângulo  $A'B'C'$  é congruente ao triângulo  $ABC$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.3.1,  $f$  transforma os segmentos  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  nos segmentos  $A'B'$ ,  $A'C'$ ,  $B'C'$ , respectivamente. Além disso, como  $f$  é isometria,  $A'B' = AB$ ,  $A'C' = AC$ ,  $B'C' = BC$ . Logo, pelo caso LLL de congruência de triângulos, os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes.  $\square$

**Proposição 2.3.3.** *A imagem da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  pela isometria  $f$  é a reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$ , sendo  $f(A) = A'$  e  $f(B) = B'$ .*



*Demonstração.* Seja  $P$  um ponto na reta  $\overleftrightarrow{AB}$  distinto dos pontos  $A$  e  $B$ . Sejam  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  e  $f(P) = P'$ .

Se  $B$  está entre  $A$  e  $P$ , temos  $AP = AB + BP$ . Sendo  $f$  isometria, como na demonstração da proposição 2.3.1, temos  $A'P' = A'B' + B'P'$ , ou seja,  $B'$  está entre  $A'$  e  $P'$  e, portanto, os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $P'$  são colineares. De modo análogo verificamos a colinearidade dos pontos  $A'$ ,  $B'$ ,  $P'$ , quando  $P$  está entre  $A$  e  $B$ , e quando  $A$  está entre  $P$  e  $B$ . Isto mostra que  $f(\overleftrightarrow{AB}) \subset \overleftrightarrow{A'B'}$ .

Por outro lado, seja  $P'$  pertencente à reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$ , distinto de  $A'$  e  $B'$ . Se  $B'$  está entre  $A'$  e  $P'$ , então,  $A'P' = A'B' + B'P'$ . Consideremos  $x = B'P' < A'P'$  e  $P$  na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , tal que  $B$  está entre  $A$  e  $P$ , com  $PB = x$ . Logo, pela definição de isometria 2.1.1 e pelo fato já mostrado de que  $f(\overleftrightarrow{AB}) \subset \overleftrightarrow{A'B'}$ , temos  $f(P) = P'$ . Assim, encontramos  $P$  em  $\overleftrightarrow{AB}$  cuja imagem é o dado ponto  $P'$  na reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$ . De modo análogo encontramos  $P$  em  $\overleftrightarrow{AB}$ , quando  $P'$  está entre  $A'$  e  $B'$ , e quando  $A'$  está entre  $P'$  e  $B'$ . Assim, todo ponto da reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$  é imagem de um ponto da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , ou seja,  $\overleftrightarrow{A'B'} \subset f(\overleftrightarrow{AB})$ .

Como valem  $f(\overleftrightarrow{AB}) \subset \overleftrightarrow{A'B'}$  e  $\overleftrightarrow{A'B'} \subset f(\overleftrightarrow{AB})$ , temos  $f(\overleftrightarrow{AB}) = \overleftrightarrow{A'B'}$ , isto é, a imagem da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  pela isometria  $f$  é a reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$ . □

**Proposição 2.3.4.** *Uma isometria  $f$  no plano transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

*Demonstração.* Sejam  $r$  e  $s$  retas perpendiculares no plano. Consideremos os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  distintos, tais que,  $A$  seja o ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$ ,  $B$  e  $C$  sejam pontos em  $r$ , equidistantes do ponto  $A$ , e  $D$  seja um ponto qualquer em  $s$ , como mostra a Figura 2.14.

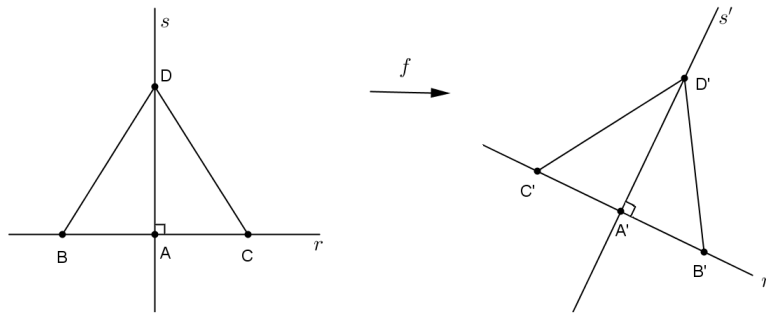


Figura 2.14: Retas perpendiculares

Consideremos  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$ ,  $f(C) = C'$  e  $f(D) = D'$ . Pela definição de isometria, temos  $BD = B'D'$ ,  $CD = C'D'$ ,  $BC = B'C'$  e  $AD = A'D'$ . Portanto, pelo caso LLL de congruência de triângulos, os triângulos  $BCD$  e  $B'C'D'$  são congruentes e o segmento  $\overline{A'D'}$  é a mediana do triângulo isósceles  $B'C'D'$ . Logo,  $A'D'$  é perpendicular à  $C'B'$ .

Além disso, pela Proposição 2.3.3,  $f(r) = f(\overleftrightarrow{BC}) = \overleftrightarrow{B'C'} = r'$  e  $f(s) = f(\overleftrightarrow{AD}) = \overleftrightarrow{A'D'} = s'$ . Assim, como  $\overline{C'B'} \perp \overline{A'D'}$ , então,  $r' \perp s'$ . □

**Proposição 2.3.5.** *Seja  $f$  uma isometria no plano. Se  $f$  possui três pontos não colineares invariantes, então  $f$  é a identidade, isto é,  $f(P) = P$  para todo ponto  $P$  no plano.*

*Demonstração.* Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares tal que  $f(A) = A$ ,  $f(B) = B$  e  $f(C) = C$ . Dado um ponto  $P$  qualquer no plano, mostraremos que  $f(P) = P$  considerando três casos.

**Caso 1:** Sejam  $P$  pertencente à reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $f(P) = P'$ . Pela Proposição 2.3.3,  $P'$  pertence à reta  $\overleftrightarrow{AB} = f(\overleftrightarrow{AB})$ . Como  $f$  é uma isometria temos  $AP = AP'$  e  $PB = P'B$ . Se  $P$  está entre  $A$  e  $B$  então  $P'$  também está entre  $A$  e  $B$ . Além disso,  $P'A = PA$  e  $P'B = PB$ . Então a única possibilidade é  $P = P'$ , isto é,  $f(P) = P' = P$ .

De modo análogo verificamos o caso em que  $A$  está entre  $P$  e  $B$ , e o caso em que  $B$  está entre  $A$  e  $P$ . Concluimos que todos os pontos da reta  $\overleftrightarrow{AB}$  são invariantes.

**Caso 2:** De modo análogo ao caso 1, verificamos que todos os pontos pertencentes à reta  $\overleftrightarrow{AC}$  são invariantes.

**Caso 3:** Seja  $P$  um ponto não pertencente às retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ . Consideremos uma reta  $r$  passando por  $P$  e intersectando as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  nos pontos distintos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, como mostra a Figura 2.15.

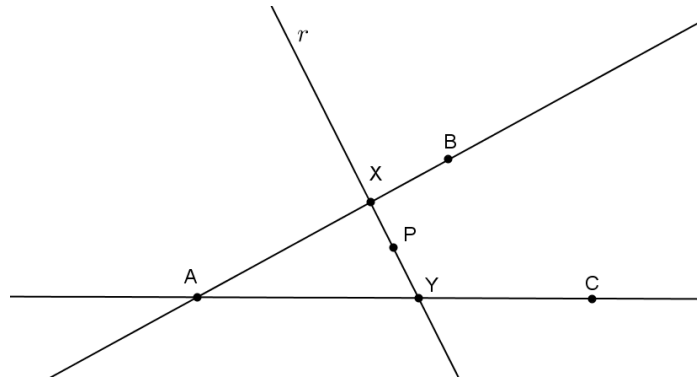


Figura 2.15: Proposição 2.3.5 - caso 3

Como  $X \in \overleftrightarrow{AB}$  e  $Y \in \overleftrightarrow{AC}$ , pelos casos 1 e 2, temos  $f(X) = X$  e  $f(Y) = Y$ . Assim, de modo análogo ao caso 1 verificamos que a isometria  $f$  fixa todos os pontos da reta  $\overleftrightarrow{XY}$ . Em particular, como  $P$  pertence à reta  $\overleftrightarrow{XY}$ , temos  $f(P) = P$ .

Portanto, a isometria  $f$  fixa todos os pontos do plano. Logo, a isometria  $f$  é a identidade.  $\square$

**Observação 2.3.6.** *A recíproca da Proposição 2.3.5 é óbvia.*

**Observação 2.3.7.** *Em Geometria Analítica a Proposição 2.3.5, segue do fato dos vetores  $B - A$  e  $C - A$  serem linearmente independentes.*

**Corolário 2.3.8.** *Sejam as isometrias  $f_1$  e  $f_2$  no plano. Se  $f_1$  e  $f_2$  coincidem em três pontos não colineares, então  $f_1 = f_2$ . Em outras palavras, se existem três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , tais que  $f_1(A) = f_2(A)$ ,  $f_1(B) = f_2(B)$  e  $f_1(C) = f_2(C)$ , então  $f_1 = f_2$ , isto é,  $f_1(P) = f_2(P)$  para todo ponto  $P$  no plano.*

*Demonstração.* Consideremos a isometria  $f_1 f_2^{-1}$ . Temos  $f_1 f_2^{-1}(A) = f_2^{-1}(f_1(A)) = f_2^{-1}(f_2(A)) = A$ . Do mesmo modo verificamos que  $f_1 f_2^{-1}(B) = B$  e  $f_1 f_2^{-1}(C) = C$ . Como a isometria  $f_1 f_2^{-1}$  deixa os pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$  invariantes, pela Proposição 2.3.5, temos que  $f_1 f_2^{-1}$  é a identidade, ou seja,  $f_1 f_2^{-1} = I$ . Portanto,  $f_1 = f_2$ .  $\square$

**Proposição 2.3.9.** *Se uma isometria tem mais de um ponto invariante, então a isometria é a identidade ou é uma reflexão. Mais precisamente, se a isometria fixa os pontos distintos  $A$  e  $B$ , então  $f$  é a identidade ou  $f$  é a reflexão em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos invariantes pela isometria  $f$ . Assim,  $f(A) = A$  e  $f(B) = B$ .

Seja  $C$  um ponto não pertencente à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ . Se  $f(C) = C$ , então  $f$  é a identidade, pois tem três pontos invariantes não colineares. Se  $f(C) = C' \neq C$ , então, como  $AC = AC'$  e  $BC = BC'$ , a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é a mediatriz do segmento  $\overline{CC'}$ . Assim, sendo  $r$  a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $R_r$  a reflexão em relação a  $r$ , temos  $f(C) = R_r(C)$ . E, como  $f(A) = A = R_r(A)$  e  $f(B) = B = R_r(B)$ , temos que  $f$  e a reflexão  $R_r$  coincidem em três pontos não colineares. Portanto, pelo Corolário 2.3.8,  $f = R_r$ , ou seja,  $f$  é a reflexão em relação à reta  $r = \overleftrightarrow{AB}$ .  $\square$

**Corolário 2.3.10.** *Sejam as isometrias  $f_1$  e  $f_2$  no plano. Se  $f_1$  e  $f_2$  coincidem em dois pontos distintos, então  $f_1 = f_2$  ou  $f_2 f_1^{-1} = R_r$ , em que  $r$  é a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ . Em outras palavras, se existem dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , tais que  $f_1(A) = f_2(A)$  e  $f_1(B) = f_2(B)$ , então  $f_1 = f_2$  ou  $f_2 = R_r f_1$ .*

*Demonstração.* Consideremos a isometria  $f_1 f_2^{-1}$ . Temos  $f_1 f_2^{-1}(A) = f_2^{-1}(f_1(A)) = f_2^{-1}(f_2(A)) = A$ . Do mesmo modo verificamos que  $f_1 f_2^{-1}(B) = B$ . Como a isometria  $f_1 f_2^{-1}$  deixa os pontos distintos  $A$  e  $B$  invariantes, pela Proposição 2.3.9, temos que  $f_1 f_2^{-1} = I$ , onde  $I$  é a identidade, ou  $f_1 f_2^{-1} = R_r$ , onde  $R_r$  é a reflexão em relação à reta  $r = \overleftrightarrow{AB}$ . Portanto,  $f_1 = f_2$  ou  $f_2 = R_r f_1$ .  $\square$

**Proposição 2.3.11.** *Toda isometria no plano pode ser expressa como o produto de uma, duas ou três reflexões. Além disso, se a isometria tem um ponto invariante, ela é uma reflexão ou pode ser expressa como o produto duas reflexões.*

*Demonstração.* Pelo Corolário 2.3.8, uma isometria fica completamente determinada por suas imagens em três pontos não colineares. Sendo assim, dados três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$  e suas imagens  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , respectivamente, dividiremos a demonstração em quatro casos.

**Caso 1:** Se  $A = A'$ ,  $B = B'$  e  $C = C'$ , então pela Proposição 2.3.5 temos que a isometria é a identidade. E, como o produto de duas reflexões em relação à mesma reta é a identidade, temos que a isometria pode ser expressa como o produto de duas reflexões.

**Caso 2:** Se  $A = A'$ ,  $B = B'$  e  $C \neq C'$  então os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são relacionados por uma reflexão em relação à reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , como vemos na Figura 2.16, pois  $AC = AC'$  e  $BC = BC'$ . Assim, a isometria pode ser expressa por uma reflexão (ver Proposição 2.3.9).

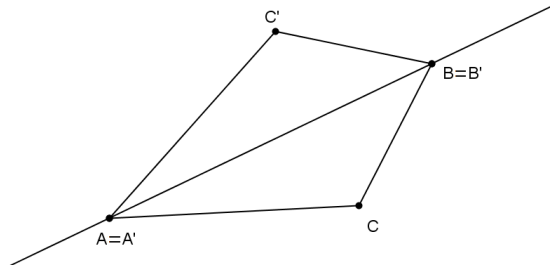


Figura 2.16: Proposição 2.3.11 - caso 2

**Caso 3:** Se  $A = A'$ ,  $B \neq B'$  e  $C \neq C'$ , consideremos a reflexão do triângulo  $ABC$  em relação à mediatriz do segmento  $\overline{BB'}$ , denotada por  $m$ . Seja o triângulo  $AB'C_1$  a imagem do triângulo  $ABC$  por esta reflexão. Assim temos duas possibilidades para o ponto  $C'$ , como mostra a Figura 2.17.

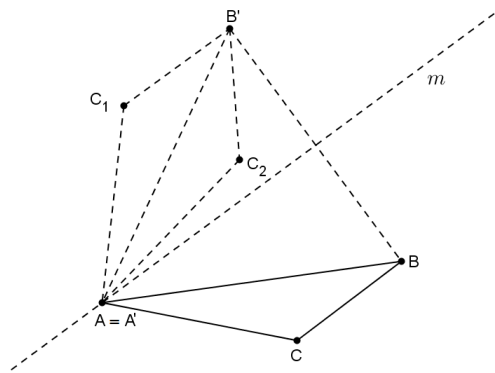


Figura 2.17: Proposição 2.3.11 - caso 3

Se  $C' = C_1$ , a isometria é a reflexão em relação à reta  $m$ . Caso contrário,  $C' = C_2$ , sendo  $C_2$  a reflexão de  $C_1$  em relação à reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$ . Assim, fazendo a composição da reflexão em relação à reta  $m$  com a reflexão em relação à reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$ , a imagem do triângulo  $ABC$  por esta composição será o triângulo  $A'B'C'$ . Nesse caso, a isometria é o produto de duas reflexões.

**Caso 4:** Se  $A \neq A'$ ,  $B \neq B'$  e  $C \neq C'$ , consideremos a mediatriz do segmento  $\overline{AA'}$  denotada por  $m$ . Seja  $B_1$  a imagem de  $B$  pela reflexão em relação à  $m$ .

Se  $B' = B_1$  (veja Figura 2.18(a)) temos duas possibilidades para  $C'$ :

-  $C' = C_1$ , em que  $C_1$  é a imagem de  $C$  pela reflexão em  $m$ . Neste caso a isometria é a reflexão em relação à reta  $m$ .

-  $C' = C_2$ , em que  $C_2$  é a imagem de  $C_1$  pela reflexão em relação à reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$  e, nesse caso, a isometria é o produto de duas reflexões em relação às retas  $m$  e  $\overleftrightarrow{A'B'}$ .

Se  $B' \neq B_1$  (veja Figura 2.18(b)), consideremos a mediatriz do segmento  $\overline{B_1B'}$  denotada por  $n$ . Assim temos duas possibilidades para  $C'$ :

-  $C' = C_2$ , em que  $C_2$  é a imagem de  $C_1$  pela reflexão em  $n$ . Neste caso a isometria é o produto de duas reflexões em relação às retas  $m$  e  $n$ .

-  $C' = C_3$ , em que  $C_3$  é a imagem de  $C_2$  pela reflexão em relação a reta  $\overleftrightarrow{A'B'}$ . Neste caso a isometria é o produto de três reflexões em relação às retas  $m$ ,  $n$  e  $\overleftrightarrow{A'B'}$ .

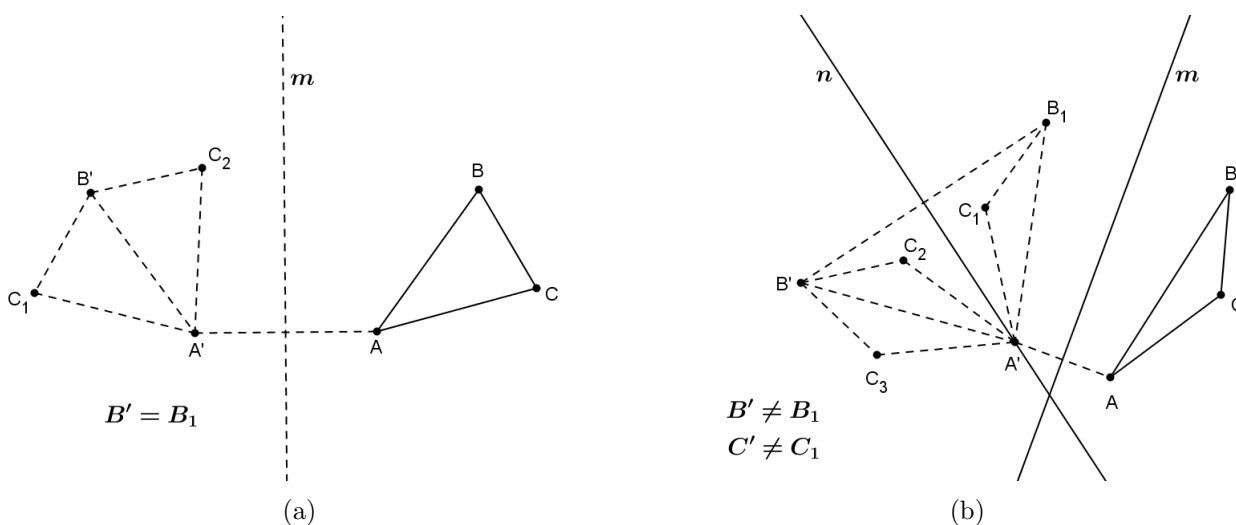


Figura 2.18: Proposição 2.3.11 - caso 4

Assim, mostramos que uma isometria pode ser expressa por uma reflexão, ou produto de duas reflexões ou o produto de três reflexões.

Agora, se a isometria tem um ponto invariante, pelos casos 1, 2 e 3, concluímos que a isometria é uma reflexão ou pode ser expressa pelo produto de duas reflexões.  $\square$

**Observação 2.3.12.** O método utilizado na demonstração da Proposição 2.3.11 pode ser utilizado para mostrar que dados dois triângulos congruentes  $ABC$  e  $A'B'C'$  existe uma isometria  $f$  que transforma o triângulo  $ABC$  no triângulo  $A'B'C'$ , com  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  e  $f(C) = C'$ . Além disso, o Corolário 2.3.8 implica que esta isometria  $f$  é única.

**Observação 2.3.13.** O produto de reflexões é uma isometria, pois preserva distâncias e, por outro lado, a Proposição 2.3.11 mostra que toda isometria pode ser expressa como produto de no máximo reflexões.

## 2.4 Translações e meia-voltas

**Proposição 2.4.1.** *Uma translação  $T_{AB}$  pode ser expressa como produto de duas meia-voltas em relação a dois pontos distintos  $O$  e  $O'$ , ou seja,  $T_{AB} = H_O H_{O'}$ , tais que  $\overline{OO'}$  seja paralelo ao deslocamento de  $T_{AB}$  e  $OO'$  seja igual à metade do deslocamento de  $T_{AB}$ , isto é,  $OO' = \frac{1}{2}AB$ . Além disso, o sentido do deslocamento de  $A$  para  $B$  é o mesmo que o sentido de  $O$  para  $O'$ .*

*Demonstração.* Seja a translação  $T_{AB}$ . Consideremos um ponto  $O$  qualquer e  $O'$  tal que o segmento  $\overline{OO'}$  é paralelo ou contido na reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $AB = 2 \cdot (OO')$ , ou seja, com o deslocamento de  $T_{AB}$  igual a duas vezes o comprimento do segmento  $\overline{OO'}$ . Além disso, o sentido do deslocamento de  $A$  para  $B$  é o mesmo que o sentido de  $O$  para  $O'$ .

Sejam  $P$  um ponto no plano não pertencente à reta  $\overleftrightarrow{OO'}$  e  $T_{AB}(P) = P'$ . Assim, os pontos  $O$ ,  $O'$  e  $P$  são não colineares, como mostra a Figura 2.19. Mostraremos que  $T_{AB}$  e  $H_O H_{O'}$  coincidem nos pontos não colineares  $P$ ,  $O$  e  $O'$ .

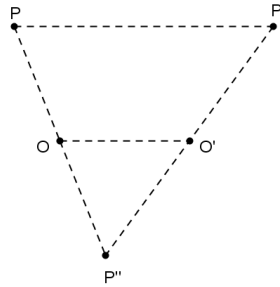


Figura 2.19: Translação -  $\overline{OO'}$  paralelo ao deslocamento

Consideremos a meia-volta  $H_O$  e  $H_O(P) = P''$ . Assim, pela Definição 2.2.2, temos  $PO = OP''$ . Como  $\overline{OO'}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{PP'}$  são paralelos e  $OO' = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}PP'$ , então  $\overline{OO'}$  é a base média do triângulo  $PP'P''$ . Logo,  $P''$ ,  $O'$  e  $P'$  são colineares e  $P''O' = O'P'$ . Assim  $H_{O'}(P'') = P'$ . Então temos:

$$\begin{aligned} H_O H_{O'}(P) &= H_{O'}(H_O(P)) \\ &= H_{O'}(P'') \\ &= P' \\ &= T_{AB}(P). \end{aligned}$$

Portanto,  $T_{AB}(P) = H_O H_{O'}(P)$ . Além disso, pode ser facilmente verificado que  $H_O H_{O'}(O) = T_{AB}(O)$  e  $H_O H_{O'}(O') = T_{AB}(O')$ , o que, pelo Corolário 2.3.8, implica em  $T_{AB} = H_O H_{O'}$ , pois  $T_{AB}$  e  $H_O H_{O'}$  coincidem em três pontos não colineares.  $\square$

<sup>2</sup>A condição de que o sentido do deslocamento de  $A$  para  $B$  é o mesmo que o sentido de  $O$  para  $O'$  pode ser formulada mais formalmente da seguinte forma: considerando o ponto  $O''$  tal que  $O'$  é o ponto médio de  $\overline{OO''}$ , os segmentos  $\overline{OB}$  e  $\overline{O''A}$  têm o mesmo ponto médio. Isto é equivalente a tomar  $O'$  o ponto médio do segmento  $\overline{OO''}$ , em que  $O'' = T_{AB}(O)$ .

**Observação 2.4.2.** *Pela demonstração da Proposição 2.4.1, podemos notar que o produto de duas meia-voltas quaisquer é uma translação, ou seja, dadas as meia-voltas  $H_A$  e  $H_B$ , o produto  $H_A H_B$  é uma translação paralela ao segmento  $\overline{AB}$ , com deslocamento igual ao dobro do comprimento de  $\overline{AB}$  e sentido de  $A$  para  $B$ .*

**Observação 2.4.3.** *Notemos que na demonstração da Proposição 2.4.1 o ponto  $O$  é tomado de modo arbitrário e o ponto  $O'$  é determinado a partir de  $O$ ,  $A$  e  $B$ . O produto  $H_O H_{O'}$  das meia-voltas  $H_O$  e  $H_{O'}$  é o mesmo que o produto  $H_Q H_{Q'}$  das meia-voltas  $H_Q$  e  $H_{Q'}$ , com  $Q$  e  $Q'$  tais que  $QQ' = OO'$ ,  $QQ' \parallel OO'$  e o sentido de  $Q$  para  $Q'$  igual ao sentido de  $O$  para  $O'$ . Enfim,  $H_Q H_{Q'} = H_O H_{O'}$ .*

**Proposição 2.4.4.** *O produto de duas translações é uma translação.*

*Demonstração.* Sejam as translações  $T_1$  e  $T_2$ . Consideremos três meia-voltas  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  de centros  $O_1$ ,  $O_2$  e  $O_3$  respectivamente, tais que:

- O sentido do deslocamento de  $T_1$  é de  $O_1$  para  $O_2$  e, o segmento  $\overline{O_1 O_2}$  é paralelo ao deslocamento de  $T_1$  e igual à metade do mesmo;
- O sentido do deslocamento de  $T_2$  é de  $O_2$  para  $O_3$  e, o segmento  $\overline{O_2 O_3}$  é paralelo ao deslocamento de  $T_2$  e igual à metade do mesmo.

Assim, pela Proposição 2.4.1, temos  $T_1 = H_1 H_2$  e  $T_2 = H_2 H_3$ . Logo,

$$\begin{aligned} T_1 T_2 &= H_1 H_2 H_2 H_3 \\ &= H_1 H_3, \text{ pois } H_2 H_2 \text{ é igual à identidade} \\ &= T, (T \text{ é uma translação, pela Observação 2.4.2}). \end{aligned}$$

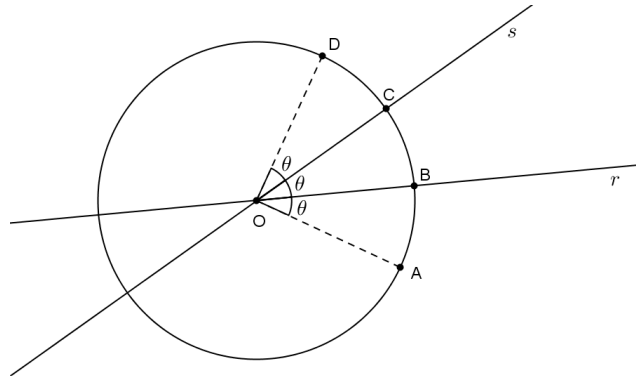
Portanto, o produto  $T_1 T_2$  é uma translação, com deslocamento igual ao dobro do comprimento do segmento  $\overline{O_1 O_3}$  e sentido de  $O_1$  para  $O_3$ .  $\square$

## 2.5 O produto de reflexões e consequências

**Proposição 2.5.1.** *O produto de duas reflexões em relação a duas retas distintas e concorrentes é uma rotação de ângulo igual ao dobro do ângulo entre as retas. Mais precisamente, o produto  $R_r R_s$  das reflexões  $R_r$  e  $R_s$  em relação às retas  $r$  e  $s$ , respectivamente, concorrentes no ponto  $O$ , como na figura 2.20, é a rotação de centro em  $O$  e ângulo igual ao dobro do ângulo entre as retas e sentido da reta  $r$  da primeira reflexão para a reta  $s$  da segunda<sup>3</sup>.*

*Demonstração.* Sejam as reflexões  $R_r$  e  $R_s$ , com retas de reflexão  $r$  e  $s$  concorrentes no ponto  $O$ . Consideremos que o ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  seja igual a  $\theta$ . Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  pontos em uma circunferência de centro  $O$ , com  $B$  e  $C$  nas retas  $r$  e  $s$  respectivamente e tais que,  $AB = BC = CD$ , como mostra a Figura 2.20.

<sup>3</sup>A condição de que o sentido da reta  $r$  da primeira reflexão para a reta  $s$  da segunda reflexão pode ser expressa de modo formal dizendo que a reta  $s$  é bissetriz das retas  $r$  e  $R_{O(2\theta)}(r)$ .

Figura 2.20: Reflexões  $R_r$  e  $R_s$ 

Notemos que, os triângulos  $AOB$ ,  $BOC$  e  $COD$  são congruentes pelo caso LLL e assim os ângulos  $A\hat{O}B$ ,  $B\hat{O}C$  e  $C\hat{O}D$  têm medidas iguais, pois são ângulos correspondentes.

Aplicando o produto  $R_r R_s$  nos pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $O$ , temos:

$$\begin{aligned} R_r R_s(A) &= R_s(R_r(A)) = R_s(C) = C \\ R_r R_s(B) &= R_s(R_r(B)) = R_s(D) = D \\ R_r R_s(O) &= R_s(R_r(O)) = R_s(O) = O. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Consideremos a rotação de centro  $O$  e ângulo de medida  $2\theta$ . Aplicando  $R_{O(2\theta)}$  nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $O$ , temos:

$$\begin{aligned} R_{O(2\theta)}(A) &= C \\ R_{O(2\theta)}(B) &= D \\ R_{O(2\theta)}(O) &= O. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Como uma isometria fica completamente determinada por seu efeito em três pontos não colineares, pelas Equações 2.5 e 2.6 temos  $R_r R_s = R_{O(2\theta)}$ .  $\square$

**Corolário 2.5.2.** (a) Sejam  $R_r$ ,  $R_s$ ,  $R_{r'}$ ,  $R_{s'}$  reflexões em relação às retas  $r$ ,  $s$ ,  $r'$ ,  $s'$ , respectivamente, concorrentes no ponto  $O$ , como na Figura 2.21(a). Se o ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  é igual ao ângulo entre as retas  $r'$  e  $s'$  e o sentido de  $r$  para  $s$  é o mesmo que o sentido de  $r'$  para  $s'$ <sup>4</sup>, então  $R_r R_s = R_{r'} R_{s'}$ .

(b) Sejam as retas  $r$ ,  $s$  concorrentes no ponto  $O$  e um ponto  $P$  não pertencente à reta  $r$ . Existem retas  $r'$  e  $s'$  com  $P$  pertencente à  $r'$  tal que  $R_r R_s = R_{r'} R_{s'}$  onde  $R_r$ ,  $R_s$ ,  $R_{r'}$ ,  $R_{s'}$  são as reflexões em relação às retas  $r$ ,  $s$ ,  $r'$ ,  $s'$ , respectivamente. No caso em que  $P \in s$ ,  $r' = s$ .

<sup>4</sup>O sentido de  $r$  para  $s$  é o mesmo que o sentido de  $r'$  para  $s'$ , de modo formal, significa que as bissetrizes de  $r$  e  $s'$  e de  $s$  e  $r'$  coincidem.



*Demonstração.* (a) Considerando as reflexões  $R_r, R_s, R_{r'}, R_{s'}$  em relação às retas  $r, s, r', s'$ , respectivamente, concorrentes no ponto  $O$ , como na Figura 2.21(a), onde o ângulo  $\theta$  entre  $r$  e  $s$  é igual ao ângulo  $\theta$  entre  $r'$  e  $s'$ , temos  $R_r R_s = R_{r'} R_{s'}$ , pois, como na demonstração da Proposição 2.5.1, o produto  $R_{r'} R_{s'}$  também é a rotação de centro no ponto  $O$  e ângulo  $2\theta$ , no sentido de  $r'$  para  $s'$ , assim como  $R_r R_s$ .

(b) Consideremos a reta  $r'$  determinada pelos pontos  $P$  e  $O$  e a reta  $s'$  passando pelo ponto  $O$  tal que o ângulo entre  $r'$  e  $s'$  seja igual ao ângulo entre  $r$  e  $s$ . Além disso, o sentido de  $r$  para  $s$  deve ser o mesmo que o sentido de  $r'$  para  $s'$ , como na Figura 2.21(b). Pelo item (a) temos o resultado. Notemos que, no caso em que  $P \in s, r' = s$ .

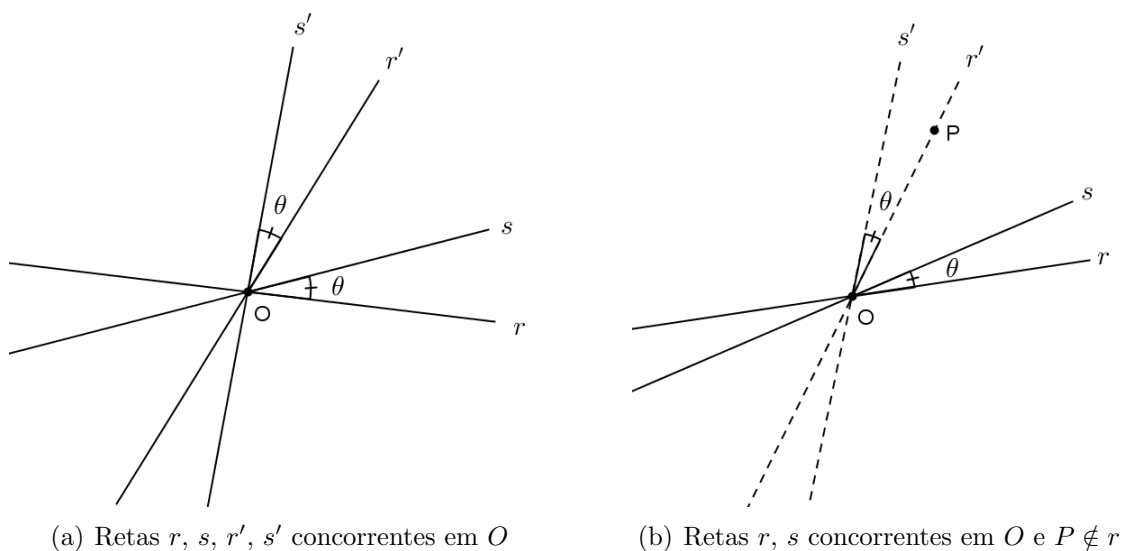


Figura 2.21: Corolário 2.5.2

□

**Corolário 2.5.3.** Se as retas de reflexão de  $R_r$  e  $R_s$  forem perpendiculares, o produto  $R_r R_s$  é a meia-volta cujo centro é a interseção entre as retas  $r$  e  $s$ .

*Demonstração.* Sejam  $R_r$  e  $R_s$  reflexões em relação às retas  $r$  e  $s$ , respectivamente, com  $r$  e  $s$  perpendiculares no ponto  $O$ . Pela Proposição 2.5.1,  $R_r R_s = R_{O\theta}$ , com  $\theta$  igual ao dobro do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$ , ou seja,  $\theta = 2(90^\circ) = 180^\circ$ .

Assim,  $R_r R_s = R_{O(180^\circ)} = H_O$ , sendo  $H_O$  a meia-volta de centro no ponto  $O$ . □

**Proposição 2.5.4.** A reflexão  $R_r$  em relação à reta  $r$  pode ser expressa como o produto de uma meia-volta  $H_O$  em relação a um ponto  $O$  qualquer, pertencente à reta  $r$ , e uma reflexão em relação à reta  $s$ , em que  $s$  passa por  $O$  e é perpendicular à reta  $r$ . Além disso,  $H_O R_s = R_s H_O = R_r$ .

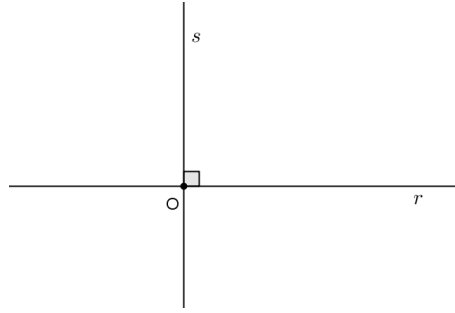


Figura 2.22: Retas  $r$  e  $s$  perpendiculares em  $O$

*Demonstração.* Consideremos um ponto  $O$  qualquer em  $r$  e a reta  $s$  perpendicular a  $r$  passando pelo ponto  $O$ , como mostra a Figura 2.22.

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} R_r &= R_r R_s R_s, \text{ pois o produto } R_s R_s \text{ é igual a identidade} \\ &= H_O R_s, \text{ pelo Corolário 2.5.3.} \end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} R_r &= R_s R_s R_r, \text{ pois o produto } R_s R_s \text{ é igual a identidade} \\ &= R_s H_O, \text{ pelo Corolário 2.5.3.} \end{aligned}$$

Portanto, a reflexão  $R_r$  pode ser expressa como  $H_O R_s = R_s H_O$ , com as retas  $r$  e  $s$  perpendiculares no ponto  $O$ .  $\square$

**Corolário 2.5.5.** *Sejam  $R_s$  uma reflexão em relação à reta  $s$  e  $H_O$  uma meia-volta de centro  $O$ , tal que  $O \in s$ . O produto  $H_O R_s$  é comutativo, isto é,  $H_O R_s = R_s H_O$ . Notemos que o produto  $H_O R_s$  é uma reflexão  $R$ .*

*Demonstração.* Consideremos a reflexão  $R_s$  em relação à reta  $s$  e a meia-volta  $H_O$  de centro no ponto  $O$ , tal que  $O \in s$ . Pela Proposição 2.5.4,  $H_O R_s = R_s H_O = R$ , sendo  $R$  uma reflexão em relação à uma reta perpendicular à reta  $s$  passando pelo ponto  $O$ . Portanto, o produto  $H_O R_s$  é comutativo.  $\square$

**Proposição 2.5.6.** *O produto de uma reflexão e uma meia-volta (ou vice-versa) é uma reflexão deslizante, desde que o centro da meia-volta não pertença à reta de reflexão.*

*Demonstração.* Sejam  $R_r$  a reflexão em relação à reta  $r$  e  $H_O$  uma meia-volta com  $O \notin r$ . Consideremos a reta  $s$  perpendicular à reta  $r$  e passando pelo ponto  $O$ , e seja o ponto  $O'$  a interseção das retas  $r$  e  $s$ , como mostra a Figura 2.23.

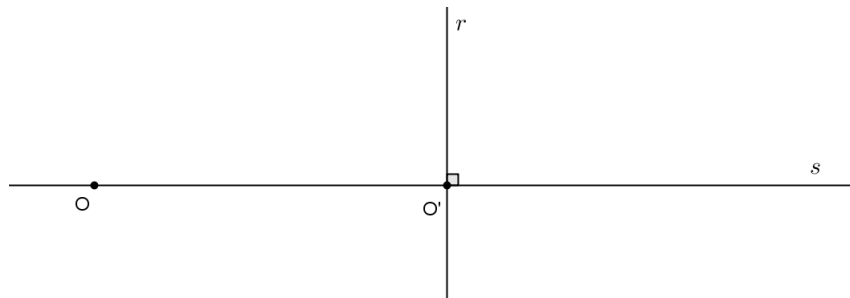


Figura 2.23: Retas  $r$  e  $s$  perpendiculares em  $O'$

Pela Proposição 2.5.4,  $R_r = R_s H_{O'} = H_{O'} R_s$ . Assim temos:

$$\begin{aligned}
 R_r &= R_s H_{O'} \\
 R_r H_O &= R_s H_{O'} H_O \\
 R_r H_O &= R_s T, \text{ com } T = H_{O'} H_O \text{ que, pela Proposição 2.4.1, é uma translação.}
 \end{aligned}$$

Observemos que o segmento  $\overline{OO'}$  está contido na reta  $s$ , e assim o deslocamento da translação é na direção de  $s$ . Portanto, o produto de uma reflexão  $R_r$  e uma meia-volta  $H_O$  é uma reflexão deslizante, desde que o centro da meia-volta não pertença à reta de reflexão (veja a Figura 2.24).

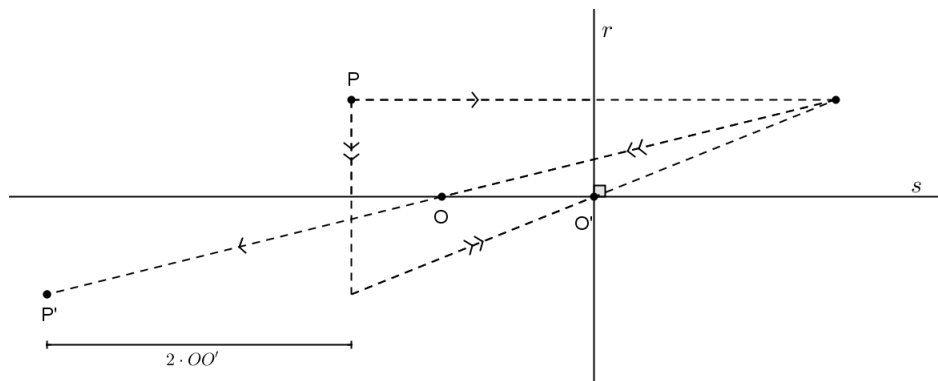


Figura 2.24:  $R_r H_O = R_s H_{O'} H_O = R_s T$

Da mesma forma, temos:

$$\begin{aligned}
 R_r &= H_{O'} R_s \\
 H_O R_r &= H_O H_{O'} R_s \\
 H_O R_r &= T R_s, \text{ com } T = H_O H_{O'} \text{ que, pela Proposição 2.4.1, é uma translação.}
 \end{aligned}$$

Assim  $H_O R_r = T R_s$ , com  $T = H_O H_{O'}$ , é também uma reflexão deslizante (veja a Figura 2.25).

□

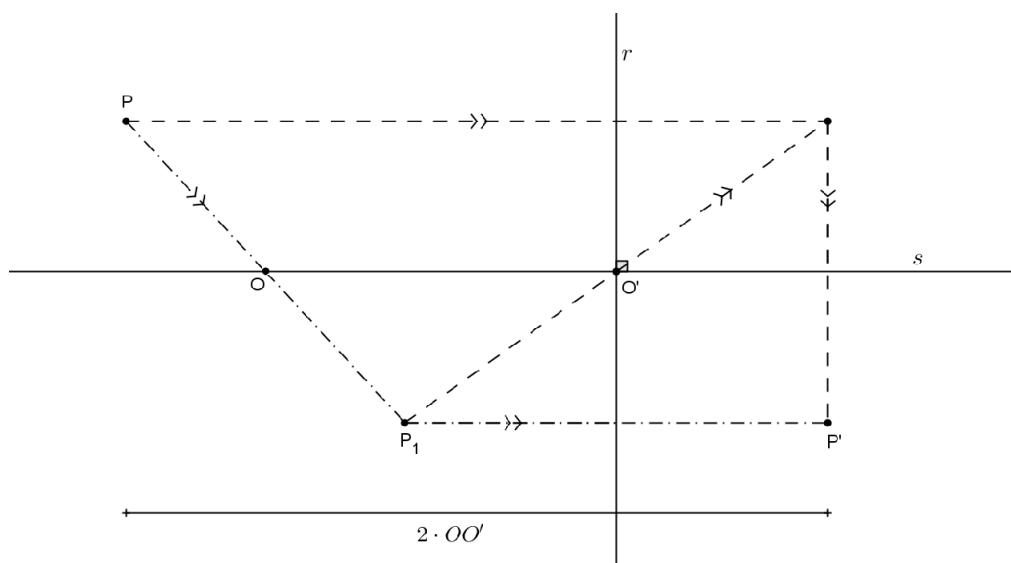


Figura 2.25:  $H_O R_r = H_O H_{O'} R_s = T R_s$

**Proposição 2.5.7.** *O produto de três reflexões em relação a três retas distintas e concorrentes em um ponto é uma reflexão com relação a uma reta passando pelo ponto de concorrência.*

*Demonstração.* Consideremos as reflexões  $R_r, R_s, R_t$  em relação às retas  $r, s$  e  $t$ , respectivamente, concorrentes no ponto  $O$ , como na Figura 2.26. Tomemos a reta  $l$  passando pelo ponto  $O$  de concorrência das três retas, tal que o ângulo entre  $l$  e  $t$  é igual ao ângulo entre  $r$  e  $s$  e, ainda, o sentido de  $l$  para  $t$  é o mesmo de  $r$  para  $s$ . Pela proposição 2.5.2,  $R_r R_s = R_l R_t$ . Assim,  $R_r R_s R_t = R_l R_t R_t = R_l$ . Portanto, o produto das três reflexões  $R_r, R_s, R_t$  é a reflexão  $R_l$  em relação à reta  $l$ .

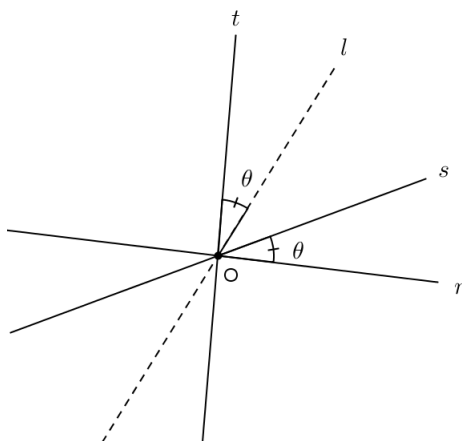


Figura 2.26: Produto de três reflexões em retas concorrentes

□

**Proposição 2.5.8.** *O produto de reflexões em duas retas paralelas é uma translação com deslocamento igual ao dobro da distância entre as retas, na direção perpendicular às duas retas e sentido da primeira para a segunda reta. Mais precisamente, o produto  $R_r R_s$  das reflexões  $R_r$  e  $R_s$  em relação às retas paralelas  $r$  e  $s$ , respectivamente, como na figura 2.27, é a translação  $T$  na direção perpendicular às duas retas e com deslocamento igual ao dobro da distância entre as retas  $r$  e  $s$  e sentido da reta  $r$  da primeira reflexão para a reta  $s$  da segunda<sup>5</sup>.*

*Demonstração.* Sejam  $R_r$  e  $R_s$  duas reflexões em relação às retas  $r$  e  $s$ , com  $r$  e  $s$  paralelas. Consideremos o ponto arbitrário  $O_1$  na reta  $r$  e  $O_2$  na reta  $s$  tal que a reta  $t$  determinada por  $O_1$  e  $O_2$  seja perpendicular às retas de reflexão  $r$  e  $s$ . Assim, pela Proposição 2.5.4, temos  $R_r = H_{O_1} R_t = R_t H_{O_1}$  e  $R_s = H_{O_2} R_t = R_t H_{O_2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} R_r R_s &= H_{O_1} R_t R_t H_{O_2} \\ &= H_{O_1} H_{O_2}, \text{ pois o produto de duas reflexões na mesma reta é igual à identidade} \\ &= T_{AB}, \text{ onde } T_{AB}, \text{ pela Proposição 2.4.1, é uma translação, com } AB = 2(O_1 O_2) \text{ e } \overline{AB} \parallel \overline{O_1 O_2}. \end{aligned}$$

Portanto,  $R_r R_s$  é a translação paralela à reta  $\overleftrightarrow{O_1 O_2}$ , sentido de  $O_1$  para  $O_2$  e deslocamento igual ao dobro do comprimento do segmento  $\overline{O_1 O_2}$ , como mostra a Figura 2.27.

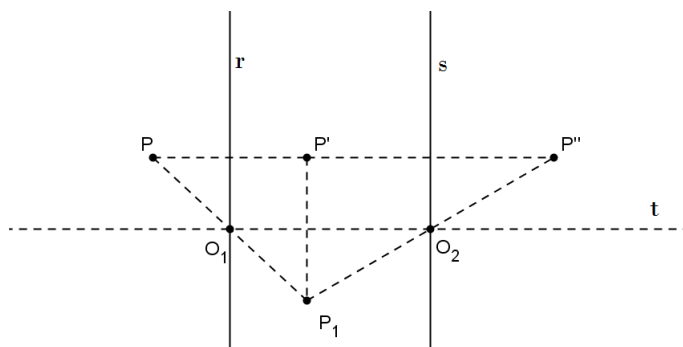


Figura 2.27: Translação - produto de duas reflexões paralelas

□

**Corolário 2.5.9.** (a) *Sejam  $R_r, R_s, R_{r'}, R_{s'}$  reflexões em relação às retas paralelas  $r, s, r', s'$ , respectivamente, como na Figura 2.28. Se a distância entre  $r$  e  $s$  é igual a distância entre as retas  $r'$  e  $s'$ , então  $R_r R_s = R_{r'} R_{s'}$ . Além disso, o sentido de  $r$  para  $s$  é o mesmo que o sentido de  $r'$  para  $s'$ .<sup>6</sup>*

<sup>5</sup>O sentido da reta  $r$  da primeira reflexão para a reta  $s$  da segunda pode ser estabelecido de modo formal dizendo que a reta  $s$  equidista das retas  $r$  e  $T(r)$ .

<sup>6</sup>A condição de que o sentido de  $r$  para  $s$  deve ser o mesmo que o sentido de  $r'$  para  $s'$ , pode ser estabelecida de modo formal dizendo que o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $r$  e  $s'$  e o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $s$  e  $r'$  coincidem.

(b) Sejam as retas  $r, s$  paralelas e um ponto  $P$  não pertencente à  $r$ . Existem retas  $r'$  e  $s'$  com  $P$  pertencente à  $r'$  tal que  $R_r R_s = R_{r'} R_{s'}$  onde  $R_r, R_s, R_{r'}, R_{s'}$  são as reflexões em relação às retas  $r, s, r', s'$ , respectivamente. No caso em que  $P \in s, r' = s$ .

*Demonstração.* (a) Considerando as reflexões  $R_r, R_s, R_{r'}, R_{s'}$  em relação às retas paralelas  $r, s, r', s'$ , respectivamente, como na Figura 2.28, em que as distâncias entre  $r$  e  $s$  e entre  $r'$  e  $s'$  são iguais a  $d$ , temos  $R_r R_s = R_{r'} R_{s'}$ , pois, como na demonstração da Proposição 2.5.8, o produto  $R_{r'} R_{s'}$  também é a translação de deslocamento  $2d$ , no sentido de  $r'$  para  $s'$ , assim como  $R_r R_s$ .

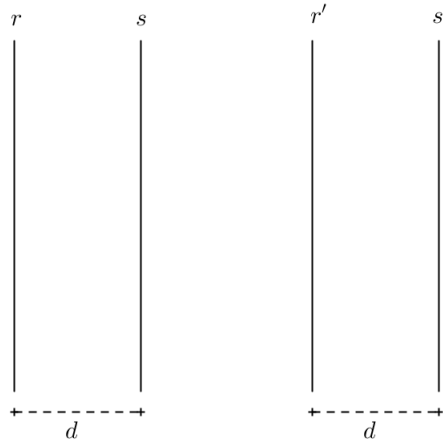


Figura 2.28: Retas  $r, s, r', s'$  paralelas

(b) Consideremos as retas  $r'$  e  $s'$  paralelas às retas  $r$  e  $s$  com  $r'$  passando pelo ponto  $P$  tal que a distância entre  $r$  e  $s$  e a distância entre  $r'$  e  $s'$  sejam iguais. Além disso, o sentido de  $r$  para  $s$  deve ser o mesmo que o sentido de  $r'$  para  $s'$ , como na Figura 2.29. Pelo item (a) temos o resultado. Notemos que, no caso em que  $P \in s, r' = s$ .

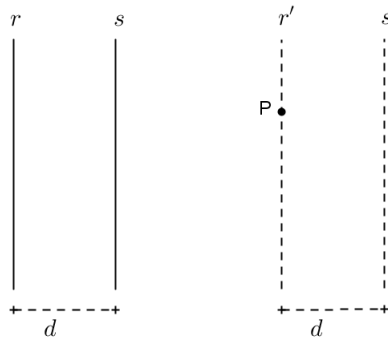


Figura 2.29: Retas  $r, s$  paralelas e  $P \notin r$

□

**Proposição 2.5.10.** *Sejam  $R_a$  uma reflexão em relação à reta  $a$  e  $T$  uma translação em direção paralela à reta  $a$ . O produto  $R_a T$  é comutativo, isto é,  $R_a T = T R_a$ .*

*Demonstração.* Mostraremos que  $R_a T = T R_a$ , em que  $T = T_{AB}$  é uma translação de deslocamento  $d$ , tal que o segmento  $\overline{AB}$  é paralelo à reta  $a$ . Sejam  $r$  e  $s$  retas paralelas, ambas perpendiculares à reta  $a$  cuja distância é igual a  $\frac{d}{2}$  e, além disso, o sentido de  $r$  para  $s$  e o sentido da translação coincidem. Consideremos os pontos  $O$  e  $P$  sendo as interseções entre as retas  $r$  e  $a$  e entre  $s$  e  $a$ , respectivamente. Veja a Figura 2.30.

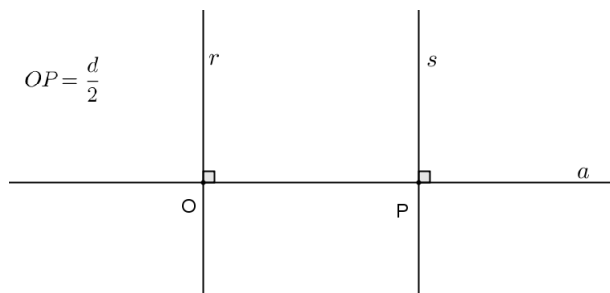


Figura 2.30: Retas  $r$  e  $s$  perpendiculares à reta  $a$

Como  $a$  é perpendicular a  $r$ , pelo Corolário 2.5.3 temos que  $R_a R_r$  é uma meia-volta com centro no ponto  $O$ . Notemos que uma meia-volta é igual à sua inversa. Assim  $R_a R_r = H_O = (H_O)^{-1} = (R_a R_r)^{-1}$ .

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
 R_a T &= R_a R_r R_s, \text{ pela Proposição 2.5.8} \\
 &= (R_a R_r)^{-1} R_s, \text{ pois, pelo Corolário 2.5.3, } R_a R_r = H_O \text{ e } H_O = (H_O)^{-1} \\
 &= R_r^{-1} R_a^{-1} R_s \\
 &= R_r R_a R_s, \text{ pois uma reflexão é igual à sua inversa.}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Analogamente, como  $a \perp s$  temos:

$$\begin{aligned}
 T R_a &= R_r R_s R_a, \text{ pela Proposição 2.5.8} \\
 &= R_r (R_s R_a)^{-1}, \text{ pois, pelo Corolário 2.5.3, } R_s R_a = H_P \text{ e } H_P = (H_P)^{-1} \\
 &= R_r R_a^{-1} R_s^{-1} \\
 &= R_r R_a R_s, \text{ pois uma reflexão é igual à sua inversa.}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pelas Equações 2.7 e 2.8 temos que  $R_a T = R_r R_a R_s = T R_a$ . Portanto,  $R_a T = T R_a$ .  $\square$

**Proposição 2.5.11.** *Sejam  $R_a$  uma reflexão em relação à reta  $a$  e  $T$  uma translação tal que, a reta  $a$  seja perpendicular ao deslocamento de  $T$ . Dessa forma valem:*

- (i)  $R_a T = T^{-1} R_a$
- (ii)  $T R_a = R_a T^{-1}$

*Demonstração.* Notemos que, se a translação  $T$  tem deslocamento nulo, então  $T = I$ , sendo  $I$  a identidade. Assim, (i) e (ii) valem trivialmente, neste caso.

(i) Primeiro verificaremos a igualdade  $R_a T = T^{-1} R_a$ .

Seja a reflexão  $R_r$  com  $r$  paralela à reta  $a$  da reflexão  $R_a$ , a distância entre  $r$  e  $a$  igual à metade do deslocamento  $d$  da translação  $T$  e o sentido de  $a$  para  $r$  igual ao sentido da translação  $T$ . Assim, como as retas  $a$  e  $r$  são perpendiculares ao deslocamento de  $T$ , pela proposição 2.5.8, temos  $T = R_a R_r$ , como na Figura 2.31.



Figura 2.31: Proposição 2.5.11

Assim,

$$\begin{aligned} R_a T &= R_a R_a R_r, \text{ pois } T = R_a R_r. \\ &= R_r, \text{ pois o produto } R_a R_a \text{ é igual à identidade.} \end{aligned} \quad (2.9)$$

e,

$$\begin{aligned} T^{-1} R_a &= (R_a R_r)^{-1} R_a, \text{ pois } T = R_a R_r \\ &= R_r^{-1} R_a^{-1} R_a \\ &= R_r^{-1} \\ &= R_r. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pelas Equações 2.9 e 2.10, temos  $R_a T = T^{-1} R_a$ .

(ii) Agora mostraremos que vale a igualdade  $T R_a = R_a T^{-1}$ .

Por (i) temos  $R_a T = T^{-1} R_a$ . Assim:

$$\begin{aligned} R_a T &= T^{-1} R_a \\ R_a T T^{-1} &= T^{-1} R_a T^{-1} \\ R_a &= T^{-1} R_a T^{-1} \\ T R_a &= T T^{-1} R_a T^{-1} \\ T R_a &= R_a T^{-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$



Pela Equação 2.11, temos  $TR_a = R_a T^{-1}$ . □

**Proposição 2.5.12.** *O produto de quatro reflexões pode ser expresso pelo produto de duas reflexões.*

*Demonstração.* Sejam as reflexões  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  em relação às retas  $r_1, r_2, r_3$  e  $r_4$ , respectivamente.

Consideremos um ponto  $P$  na reta  $r_1$ . Pelos Corolários 2.5.2 e 2.5.9, existem retas  $r'_2$  e  $r'_3$ , com  $P$  pertencente à  $r'_2$ , tal que,  $R_2 R_3 = R_{2'} R_{3'}$ , onde  $R_{2'}$  e  $R_{3'}$  são reflexões em relação às retas  $r'_2$  e  $r'_3$ , respectivamente. Assim,  $R_1 R_2 R_3 R_4 = R_1 R_{2'} R_{3'} R_4$ .

Consideremos as retas  $r''_3$  e  $r'_4$ , com  $P$  pertencente à reta  $r''_3$ , tal que  $R_{3'} R_4 = R_{3''} R_{4'}$ , onde  $R_{3''}$  e  $R_{4'}$  são reflexões em relação às retas  $r''_3$  e  $r'_4$ , respectivamente. Logo,  $R_1 R_2 R_3 R_4 = R_1 R_{2'} R_{3''} R_{4'} = R_1 R_{2'} R_{3''} R_{4'}$ , com  $P$  pertencente às três primeiras retas de reflexão.

Assim, pela Proposição 2.5.7, existe uma reta  $r$  passando pelo ponto de concorrência  $P$ , tal que,  $R_1 R_{2'} R_{3''} = R_r$ , onde  $R_r$  é a reflexão em relação à reta  $r$ .

Portanto,  $R_1 R_2 R_3 R_4 = R_r R_{4'}$ , ou seja, o produto de quatro reflexões pode ser expresso como produto de duas reflexões. □

**Proposição 2.5.13.** *O produto de um número par de reflexões pode ser expresso como produto de duas reflexões.*

*Demonstração.* Consideremos o produto de um número par reflexões, ou seja,  $2n$  reflexões. Vamos demonstrar o resultado usando o Princípio de Indução Finita em  $n$ .

1. se  $n = 1$  vale o resultado.
2. suponhamos que para  $n = k - 1$  o produto de  $2(k - 1)$  reflexões possa ser expresso pelo produto de duas reflexões.
3. vamos mostrar que o resultado vale para  $n = k$ .

$$\begin{aligned}
 2k &= 2k - 2 + 2 \\
 &= 2(k - 1) + 2 \\
 &= 2 + 2, \text{ pela Hipótese de Indução} \\
 &= 2 \text{ pela Proposição 2.5.12.}
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, o produto de um número par de reflexões pode ser expresso como produto de duas reflexões. □

**Proposição 2.5.14.** *O produto de um número ímpar de reflexões pode ser expresso como produto de três reflexões ou é igual a uma reflexão.*

*Demonstração.* Consideremos o produto  $R_1R_2R_3 \dots R_{2n}R_{2n+1}$ , de  $2n+1$  reflexões. Pela Proposição 2.5.13,  $R_1R_2R_3 \dots R_{2n}$  pode ser expresso como o produto de duas reflexões, digamos  $R_r$  e  $R_s$ . Assim,  $R_1R_2R_3 \dots R_{2n} = R_rR_s$  e, portanto,

$$R_1R_2R_3 \dots R_{2n}R_{2n+1} = R_rR_sR_{2n+1}.$$

Logo, o produto de um número ímpar de reflexões pode ser expresso pelo produto de três reflexões que pode ou não ser expresso como uma reflexão dependendo das posições relativas das retas de reflexão de  $R_r$ ,  $R_s$  e  $R_{2n+1}$ .  $\square$

**Proposição 2.5.15.** *Uma isometria não pode ser expressa como o produto de duas e também de três reflexões. Também, o produto de duas reflexões não pode ser igual a uma reflexão.*

*Demonstração.* Sejam as reflexões  $R_{r_1}, R_{r_2}, R_{r_3}, R_{r_4}, R_{r_5}$  e suponhamos que  $R_{r_1}R_{r_2} = R_{r_3}R_{r_4}R_{r_5}$ . Pela Proposição 2.5.13 existem reflexões  $R_s$  e  $R_t$  tais que  $R_{r_1}R_{r_3}R_{r_4}R_{r_5} = R_sR_t$ . Assim,  $R_sR_t = R_{r_1}R_{r_3}R_{r_4}R_{r_5} = R_{r_1}R_{r_1}R_{r_2} = R_{r_2}$ , o que não é possível, pois, pelas Proposições 2.5.1 e 2.5.8,  $R_sR_t$  é uma rotação ou uma translação e, portanto, não pode ser igual à reflexão  $R_{r_2}$ . Da mesma forma, o produto de duas reflexões não pode ser igual a uma reflexão.  $\square$

## 2.6 Isometrias diretas e opostas

**Definição 2.6.1.** *Uma isometria que é dada pelo produto de um número par de reflexões é chamada direta (ou própria ou par), e uma isometria que é dada pelo produto de um número ímpar de reflexões é chamada oposta (ou imprópria ou ímpar).*

Pelas Proposições 2.5.13, 2.5.14 e 2.5.15, uma isometria não pode ser expressa por um número ímpar de reflexões e também por um número par de reflexões, o que implica que a Definição 2.6.1 está bem posta.

A identidade  $I$  é uma isometria par, pois pode ser expressa como o produto de duas reflexões, ou seja,  $I = R_rR_r$ , em que  $r$  é uma reta qualquer.

Além disso, sabemos que o produto de reflexões é uma isometria e, por outro lado, pela Proposição 2.3.11, toda isometria pode ser expressa pelo produto de uma, duas ou três reflexões.

**Proposição 2.6.2.** *Uma isometria direta é ou uma translação ou uma rotação.*

*Demonstração.* Pela Definição 2.6.1, uma isometria direta é o produto de um número par de reflexões. Assim, pela Proposição 2.5.13, uma isometria direta é o produto de duas reflexões. Sejam  $f$  uma isometria direta,  $R_r$  e  $R_s$  reflexões em relação às retas  $r$  e  $s$ , respectivamente, tais que  $f = R_rR_s$ .

Se as retas  $r$  e  $s$  são paralelas, então pela Proposição 2.5.8,  $R_rR_s$  é uma translação com deslocamento igual ao dobro da distância entre  $r$  e  $s$  e na direção de  $r$  para  $s$ . Dessa forma,  $f = R_rR_s$  é uma translação  $T$ .

Se as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes no ponto denotado por  $O$ , então, pela Proposição 2.5.1,  $R_r R_s$  é uma rotação de centro  $O$  e ângulo igual ao dobro do ângulo entre  $r$  e  $s$ . Assim,  $f = R_r R_s = R_{O\theta}$  é uma rotação de centro  $O$  e ângulo  $\theta$ , com  $\theta$  igual ao dobro do ângulo entre as retas  $r$  e  $s$ , e sentido da reta  $r$  para a reta  $s$ .  $\square$

**Proposição 2.6.3.** *Uma isometria oposta com um ponto invariante é uma reflexão.*

*Demonstração.* Pela Definição 2.6.1, uma isometria oposta é o produto de um número ímpar de reflexões. Assim, pela Proposição 2.5.14, uma isometria oposta é uma reflexão ou produto de três reflexões. Logo, como a isometria tem um ponto invariante, pela Proposição 2.3.11, então a isometria é uma reflexão.  $\square$

**Proposição 2.6.4.** *Toda isometria oposta sem ponto invariante é uma reflexão deslizante.*

*Demonstração.* Seja  $f$  uma isometria oposta sem ponto invariante e  $A$  um ponto do plano com  $f(A) = A'$ . Logo,  $A \neq A'$ , pois  $f$  não tem ponto invariante. Seja a meia volta  $H_O$  tal que  $O$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AA'}$ . Assim,  $H_O(A) = A'$  e  $H_O(A') = A$ .

Consideremos a isometria dada pelo produto  $H_O f$ , que é oposta, pois  $H_O$  é direta (rotação de  $180^\circ$ ) e  $f$  é oposta. Então  $(H_O f)(A') = f(H_O(A')) = f(A) = A'$ , pois  $H_O(A') = A$  e  $f(A) = A'$ . Assim, a isometria oposta  $H_O f$  tem o ponto invariante  $A'$ , e isto implica, pela Proposição 2.6.3, que  $H_O f$  é uma reflexão  $R_r$ , isto é,  $H_O f = R_r$ . Portanto,  $f = H_O R_r$  e  $R_r(O) = H_O f(O) = f(H_O(O)) = f(O) \neq O$ , pois  $f$  não tem ponto invariante. Assim, a reta  $r$  da reflexão  $R_r$  não contém o ponto  $O$  e, então  $f$  é o produto da meia volta  $H_O$  e a reflexão  $R_r$  em relação à reta  $r$  que não passa pelo centro  $O$  da meia volta. Logo, pela Proposição 2.5.6,  $f$  é uma reflexão deslizante.  $\square$

**Proposição 2.6.5.** *Uma isometria oposta é ou uma reflexão ou uma reflexão deslizante.*

*Demonstração.* Considere uma isometria oposta. Se tiver um ponto invariante, pela Proposição 2.6.3, é uma reflexão e se não tiver ponto invariante, pela Proposição 2.6.4, é uma reflexão deslizante.  $\square$

## 2.7 Classificação das isometrias no plano

**Teorema 2.7.1** (*Teorema de Classificação das Isometrias do Plano*). *Uma isometria distinta da identidade no plano é exatamente uma das seguintes: ou uma reflexão, ou uma rotação, ou uma translação, ou uma reflexão deslizante.*

*Demonstração.* Uma isometria no plano pode ser expressa pelo produto de reflexões. Assim, a isometria é direta ou oposta. Temos:

- (i) Se a isometria é direta, pela Proposição 2.6.2, é ou uma translação ou uma rotação.
- (ii) Se a isometria é oposta, pela Proposição 2.6.5, é ou uma reflexão ou uma reflexão deslizante.  $\square$

**Observação 2.7.2.** *Notemos que uma rotação de  $360^\circ$  pode ser vista como a identidade.*

## 2.8 O produto de reflexões e translações

A seguir apresentamos alguns resultados sobre o produto  $RT$ , para qualquer reflexão  $R$  e qualquer translação  $T$ .

O produto  $RT$ , para qualquer reflexão  $R$  e qualquer translação  $T$ , é uma isometria oposta, pois, como  $T$  pode ser expressa como o produto de duas reflexões, o produto  $RT$  é o produto de três reflexões. Assim, pela Proposição 2.6.5, o produto  $RT$  é uma reflexão deslizante ou uma reflexão. Pela definição de reflexão deslizante, se o deslocamento da translação  $T$  for paralelo à reta da reflexão  $R$ , o produto  $RT$  é uma reflexão deslizante e o eixo da reflexão deslizante é a reta  $r$  da reflexão  $R$ .

A proposição seguinte apresenta condição para o produto  $RT$  ser uma reflexão.

**Proposição 2.8.1.** *Sejam  $R$  uma reflexão qualquer e  $T$  uma translação qualquer. O produto  $RT$  é uma reflexão se, e somente se, a reta  $r$  da reflexão  $R$  é perpendicular ao deslocamento da translação  $T$ .*

*Demonstração.* Se  $RT$  é uma reflexão, então  $RT = R_l$ , com  $R_l$  uma reflexão em relação à uma reta  $l$ . Assim temos:

$$\begin{aligned} RT &= R_l \\ RRT &= RR_l \\ T &= RR_l. \end{aligned}$$

Como  $T = RR_l$ , pela Proposição 2.5.8, as retas de reflexão de  $R$  e  $R_l$  são paralelas e perpendiculares ao deslocamento da translação  $T$ . Portanto, a reta  $r$  da reflexão  $R$  é perpendicular ao deslocamento da translação  $T$ .

Por outro lado, se a reta  $r$  da reflexão  $R$  é perpendicular ao deslocamento, então, pela Proposição 2.5.8, a translação  $T$  pode ser expressa como o produto da reflexão  $R$  e outra reflexão  $R_l$  cuja reta  $l$  é perpendicular ao deslocamento e a distância entre as retas  $r$  e  $l$  é metade do deslocamento de  $T$ . Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} T &= RR_l \\ RT &= RRR_l \\ RT &= R_l. \end{aligned}$$

Logo,  $RT$  é uma reflexão. □

**Proposição 2.8.2.** *Sejam  $R$  uma reflexão qualquer e  $T$  uma translação qualquer. O produto  $RT$  é uma reflexão deslizante se, e somente se, o deslocamento da translação  $T$  não é perpendicular à reta da reflexão  $R$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.6.5, o produto  $TR$  é uma reflexão ou uma reflexão deslizante. Pela Proposição 2.8.1, o produto  $RT$  é uma reflexão se, e somente se, o deslocamento da translação  $T$  é perpendicular à reta de reflexão de  $R$ .

Portanto,  $RT$  é uma reflexão deslizante.  $\square$

**Observação 2.8.3.** *O produto  $RT$  é uma reflexão deslizante, não apenas quando a reta  $r$  é paralela ao deslocamento, mas para qualquer reflexão em reta não perpendicular ao deslocamento de  $T$ .*

## 2.9 O produto de rotações

Consideremos  $R_1$  e  $R_2$  duas rotações quaisquer. Pela Proposição 2.5.1, as rotações  $R_1$  e  $R_2$  podem ser expressas pelo produto de duas reflexões em retas concorrentes. Sejam  $R_a, R_b, R_c$  e  $R_d$  reflexões em relação às retas  $a, b, c$  e  $d$  respectivamente, tais que,  $R_1 = R_a R_b$  e  $R_2 = R_c R_d$ . Assim, o produto  $R_1 R_2$  é igual ao produto de quatro reflexões, ou seja,  $R_1 R_2 = R_a R_b R_c R_d$ .

Pela Proposição 2.5.13, o produto de um número par de reflexões pode ser expresso pelo produto de duas reflexões. Dessa forma,  $R_1 R_2 = R_a R_b R_c R_d = R_r R_s$ , com  $R_r$  e  $R_s$  reflexões em relação às retas  $r$  e  $s$  respectivamente. Pela Proposição 2.6.2, o produto  $R_r R_s$  de duas reflexões, é uma rotação se  $r$  e  $s$  são concorrentes ou é uma translação se  $r$  e  $s$  são paralelas.

Tomemos  $R_{A\theta}$  e  $R_{B\varphi}$ , duas rotações de centros nos pontos  $A$  e  $B$ , e ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  respectivamente. Se os pontos  $A$  e  $B$  são coincidentes, então  $R_{A\theta} R_{B\varphi} = R_{A\theta} R_{A\varphi} = R_{A(\theta+\varphi)}$ . Apresentaremos a seguir alguns resultados sobre o produto de rotações para casos em que os pontos  $A$  e  $B$  são distintos.

**Proposição 2.9.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos. Valem os seguintes resultados:*

- (a) *O produto das rotações  $R_{A\theta}$  e  $R_{B(-\theta)}$  é uma translação.*
- (b) *A isometria  $R_{A\theta} R_{B\varphi}$  é uma rotação com centro em  $C$ , distinto de  $A$  e  $B$ , e ângulo  $\theta + \varphi$ , ou é uma translação caso  $\varphi = -\theta$ .*
- (c) *A isometria  $R_{A\theta} R_{B\varphi} R_{A\theta}^{-1} R_{B\varphi}^{-1}$  é uma translação distinta da identidade.*

*Demonstração.* (a) Consideremos, sem perda de generalidade, a rotação  $R_{A\theta}$  no sentido anti-horário e  $R_{B(-\theta)}$  no sentido horário.

Seja  $r$  a reta determinada por  $A$  e  $B$ . Consideremos a reta  $s$  passando por  $A$  e tal que o ângulo de  $s$  para  $r$  seja  $\frac{\theta}{2}$ , e a reta  $t$  passando por  $B$ , com o ângulo de  $r$  para  $t$  igual a  $\frac{\theta}{2}$ , como mostra a Figura 2.32.

Assim, as retas  $s$  e  $t$  são paralelas. Além disso, pela Proposição 2.5.1, temos  $R_s R_r = R_{A\theta}$  e  $R_r R_t = R_{B(-\theta)}$ .

Logo, pela Proposição 2.5.8,  $R_{A\theta} R_{B(-\theta)} = R_s R_r R_r R_t = R_s R_t$  é uma translação, pois é o produto de reflexões em retas paralelas. O deslocamento da translação é o dobro da distância entre  $s$  e  $t$ , na direção perpendicular às retas  $s$  e  $t$ , e no sentido de  $s$  para  $t$ .

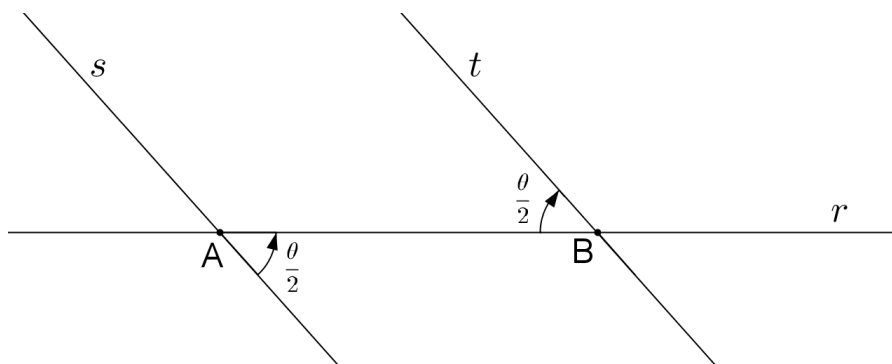


Figura 2.32: Produto de rotações - (a)

(b) Se  $\varphi = -\theta$ , por (a)  $R_{A\theta}R_{B\varphi}$  é uma translação. Assim, consideremos o caso em que  $\varphi \neq -\theta$ .

Seja  $r$  a reta determinada por  $A$  e  $B$ . Consideremos as rotações  $R_{A\theta}$  e  $R_{B\varphi}$  no sentido anti-horário. Tomemos a reta  $s$ , passando por  $A$ , tal que o ângulo de  $s$  para  $r$  seja  $\frac{\theta}{2}$ , e a reta  $t$ , passando por  $B$ , de modo que o ângulo de  $r$  para  $t$  seja  $\frac{\varphi}{2}$ . Como  $\varphi \neq -\theta$ , as retas  $s$  e  $t$  são concorrentes em um ponto  $C$ , como mostra a Figura 2.33.

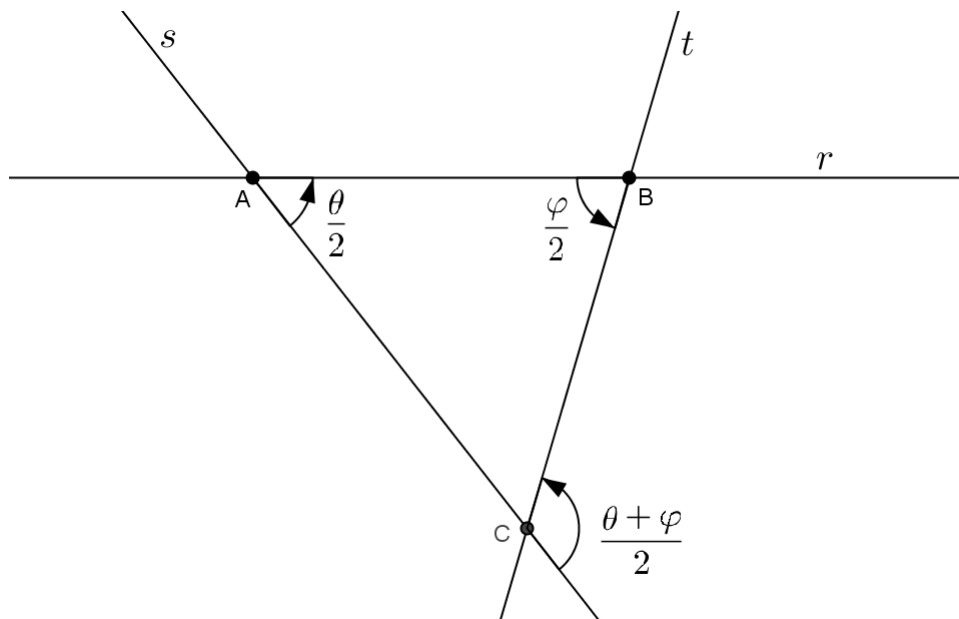


Figura 2.33: Produto de rotações - (b)

Assim, pela Proposição 2.5.1, temos  $R_{A\theta} = R_s R_r$  e  $R_{B\varphi} = R_r R_t$ . Logo  $R_{A\theta} R_{B\varphi} = R_s R_r R_r R_t = R_s R_t = R_{C(\theta+\varphi)}$ , ou seja, o produto  $R_{A\theta} R_{B\varphi}$  é a rotação de centro no ponto  $C$ , interseção das retas  $s$  e  $t$ , com ângulo igual ao dobro de  $\frac{\theta+\varphi}{2}$  e no sentido de  $s$  para  $t$ .

De modo análogo, é possível mostrar para os casos em que  $R_{A\theta}$  e  $R_{B\varphi}$  são no sentido horário e nos casos em que as rotações têm sentidos contrários.

(c) Se  $\varphi = -\theta$ , por (a),  $R_{A\theta}R_{B\varphi}$  e  $R_{B\varphi}R_{A\theta}$  são translações distintas da identidade.

Como  $R_{A\theta}R_{B\varphi}R_{A\theta}^{-1}R_{B\varphi}^{-1} = R_{A\theta}R_{B\varphi}(R_{B\varphi}R_{A\theta})^{-1}$ , temos que  $R_{A\theta}R_{B\varphi}R_{A\theta}^{-1}R_{B\varphi}^{-1}$  é uma translação distinta da identidade, pois, pela Proposição 2.4.4, o produto de translações é uma translação e a inversa de uma translação também é uma translação.

Se  $\varphi \neq -\theta$ , por (b),  $R_{A\theta}R_{B\varphi}$  é uma rotação com centro no ponto  $C_1$ , com o triângulo  $ABC$  tendo ângulo  $\frac{\theta}{2}$  em  $A$  e  $\frac{\varphi}{2}$  em  $B$ , como mostra a Figura 2.34(a).

Assim temos:

$$\begin{aligned} R_{A\theta}R_{B\varphi} &= (R_sR_r)(R_rR_t), \text{ pela Proposição 2.5.1} \\ &= R_sR_t \\ &= R_{C_1(\theta+\varphi)}. \end{aligned}$$

De modo análogo, concluímos que  $R_{B\varphi}R_{A\theta}$  é uma rotação de centro  $C_2$ , com  $C_2$  simétrico de  $C_1$  em relação à reta  $r$  e o triângulo  $ABC_2$  tendo ângulos  $\frac{\theta}{2}$  e  $\frac{\varphi}{2}$  em  $A$  e  $B$ , respectivamente, como mostra a Figura 2.34(b).

Assim temos:

$$\begin{aligned} R_{B\varphi}R_{A\theta} &= (R_{t'}R_r)(R_rR_{s'}), \text{ pela Proposição 2.5.1} \\ &= R_{t'}R_{s'} \\ &= R_{C_2(\theta+\varphi)}. \end{aligned}$$

O ângulo de  $t'$  para  $r$  é  $\frac{\varphi}{2}$  e o ângulo de  $r$  para  $s'$  é  $\frac{\theta}{2}$ . Assim,  $R_{B\varphi}R_{A\theta} = R_{C_2(\theta+\varphi)}$  é a rotação em  $C_2$ , com  $C_1 \neq C_2$ , e tendo o mesmo sentido de rotação de  $R_{A\theta}R_{B\varphi} = R_{C_1(\theta+\varphi)}$ .

Notemos que, os sentidos de rotação em  $C_1$  e  $C_2$  coincidem. Assim,  $(R_{B\varphi}R_{A\theta})^{-1}$  é a rotação de centro  $C_2$ , ângulo  $\theta + \varphi$  e sentido contrário ao de  $R_{B\varphi}R_{A\theta}$ .

Como  $R_{A\theta}^{-1}R_{B\varphi}^{-1} = (R_{B\varphi}R_{A\theta})^{-1}$ , o produto  $R_{A\theta}R_{B\varphi}R_{A\theta}^{-1}R_{B\varphi}^{-1} = R_{A\theta}R_{B\varphi}(R_{B\varphi}R_{A\theta})^{-1}$  é o produto de duas rotações com centros nos pontos distintos  $C_1$  e  $C_2$ , e ângulos  $\theta + \varphi$ , mas em sentidos contrários (veja a Figura 2.34(c)).

Assim, por (a), o produto é uma translação. □

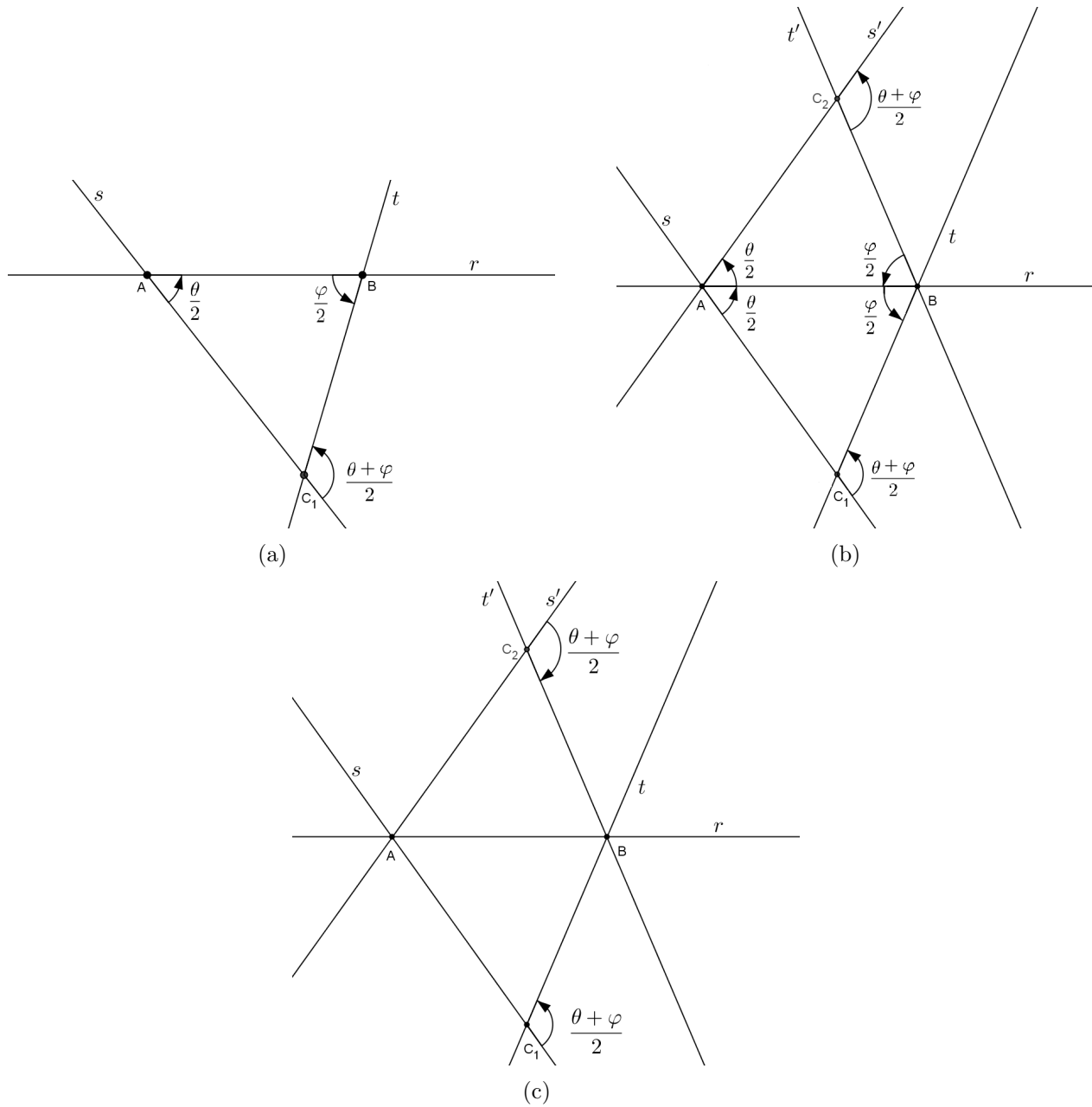


Figura 2.34: Produto de rotações - (c)



## Grupo de simetria de ornamentos limitados

A palavra simetria nos remete à ideia de equilíbrio, padrão, regularidade, harmonia, ordem e perfeição. A simetria está presente no cotidiano e na natureza nas mais diversas formas e diferentes locais. Encontramos simetria, por exemplo, nas borboletas, nas flores, estrelas do mar, nas criações artísticas, nos azulejos, na pintura, em logomarcas entre outros.

Neste capítulo analisaremos o grupo de simetria de ornamentos limitados. De acordo com Weyl [15], foi Leonardo da Vinci (1452-1519) quem descobriu quais os possíveis grupos de simetrias finitos no plano. Seu interesse nestes grupos era sob o ponto de vista de projetos de arquitetura. Demonstraremos o resultado de Leonardo, que estabelece que os únicos grupos finitos de simetria são os grupos cíclicos  $C_n$  e os grupos diedrais  $D_n$ . Também apresentaremos um algoritmo útil para determinarmos os grupos de simetrias de ornamentos limitados.

Este capítulo está fundamentado principalmente nas Referências [6], [10] e [14].

### 3.1 Simetria de figuras

**Definição 3.1.1.** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma figura geométrica e  $R_r$  uma reflexão em relação a uma reta  $r$ . Se a reflexão  $R_r$  deixa a figura  $\mathcal{F}$  invariante, então  $r$  é dita reta de simetria de  $\mathcal{F}$ .*

**Observação 3.1.2.** *Pela Definição 2.1.3 do Capítulo 2, a figura geométrica  $\mathcal{F}$  é invariante pela reflexão  $R_r$ , se  $R_r(\mathcal{F}) = \{R_r(P)/P \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}$ .*

**Definição 3.1.3.** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma figura geométrica e  $R_{O\theta}$  uma rotação de centro  $O$  e ângulo  $\theta$ . Se a rotação  $R_{O\theta}$  deixa a figura  $\mathcal{F}$  invariante, então dizemos que  $\mathcal{F}$  possui simetria rotacional de ângulo  $\theta$ .*

**Observação 3.1.4.** *Pela Definição 2.1.3 do Capítulo 2, a figura geométrica  $\mathcal{F}$  é invariante pela rotação  $R_{O\theta}$ , se  $R_{O\theta}(\mathcal{F}) = \{R_{O\theta}(P)/P \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}$ .*

Uma isometria que deixa uma figura geométrica  $\mathcal{F}$  invariante é chamada de simetria de  $\mathcal{F}$ , e dizemos que a isometria é uma operação de simetria. O conjunto de todas as simetrias de uma figura  $\mathcal{F}$ , incluindo a identidade, forma um subgrupo do grupo de isometrias chamado o grupo de simetria da figura  $\mathcal{F}$ .

Uma figura é simétrica se podemos aplicar certas isometrias, chamadas operações de simetria, que deixam toda a figura invariante.

## 3.2 Grupo de simetria de ornamentos limitados

**Exemplo 1:** As letras  $A$  e  $E$  possuem reflexão em relação a uma reta vertical e a uma reta horizontal respectivamente, como mostra a Figura 3.1. Se uma figura apresenta apenas uma reta de simetria, dizemos que a mesma possui simetria bilateral.



Figura 3.1: Exemplo 1

Denotemos por  $R$  tal reflexão. O grupo de simetria de cada uma das figuras é o grupo diedral  $D_1$  com dois elementos: a identidade denotada por  $I$  e uma reflexão  $R$  com  $R^2 = I$ . Além disso, o grupo de simetria é gerado pela reflexão, pois a identidade pode ser dada por  $R^2 = I$ . A ordem do grupo é 2 pois possui dois elementos.

Tabela 3.1: Tábua de multiplicação de  $D_1$

$D_1$	$I$	$R$
$I$	$I$	$R$
$R$	$R$	$I$

**Exemplo 2:** A letra  $N$  possui simetria rotacional com  $\theta = 180^\circ$  em relação ao ponto central da letra  $N$  (ponto de interseção das retas de reflexão), também chamada de simetria central ou inversão central. Essa simetria pode ser obtida pelo produto de duas reflexões  $R_1$  e  $R_2$ , uma vertical e outra horizontal com retas de reflexão perpendiculares, como mostra a Figura 3.2.

Notemos que o ângulo entre as retas de reflexão é a metade do ângulo da rotação. As reflexões não pertencem ao grupo de simetria da letra  $N$ , apenas o seu produto. O grupo de simetria é

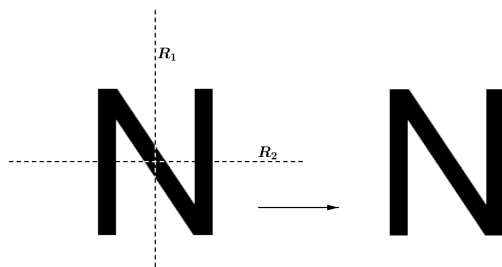


Figura 3.2: Exemplo 2

de ordem 2, pois tem 2 elementos: a identidade ( $I$ ) e a meia-volta ( $S$ ), sendo a meia-volta seu gerador, pois  $S^2 = I$ .

Tabela 3.2: Tábua de multiplicação de  $C_2$ 

$C_2$	$I$	$S$
$I$	$I$	$S$
$S$	$S$	$I$

**Exemplo 3:** A Figura 3.3 possui quatro operações de simetria distintas: as rotações de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ , sendo a rotação de  $360^\circ$  a identidade.

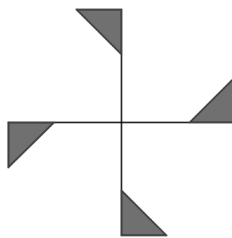


Figura 3.3: Exemplo 3

Denotando a rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário por  $S$ , as quatro operações de simetria da figura são:  $S$ ,  $S^1$ ,  $S^2$  e  $S^4$ , sendo  $S^4$  a identidade e  $S^3 = S^{-1}$ . Notemos que a menor potência de  $S$  que resulta na identidade é 4. Assim temos que  $S$  tem ordem 4.  $S^2$  tem ordem 2 e a identidade tem ordem 1.

O grupo de simetria dessa figura é  $C_4$ , isto é, grupo cíclico de ordem 4 gerado pela rotação  $S$ .

Tabela 3.3: Tábua de multiplicação de  $C_4$ 

$C_4$	$I$	$S$	$S^2$	$S^3$
$I$	$I$	$S$	$S^2$	$S^3$
$S$	$S$	$S^2$	$S^3$	$I$
$S^2$	$S^2$	$S^3$	$I$	$S$
$S^3$	$S^3$	$I$	$S$	$S^2$

Os polígonos regulares são figuras com notável simetria. Consideremos alguns exemplos como o triângulo, o quadrado e o pentágono.

**Exemplo 4:** Grupo de simetria do triângulo equilátero.

O triângulo equilátero possui seis operações de simetria distintas: três reflexões  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  em relação à retas distintas (determinadas por um vértice e o ponto médio do lado oposto ao mesmo vértice) e três rotações em relação ao ponto central  $O$  (ponto de interseção das retas de reflexão) com ângulos de  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  e  $360^\circ$  (veja a Figura 3.4). O grupo de simetria do triângulo é formado por seis elementos e é chamado de grupo diedral  $D_3$ .

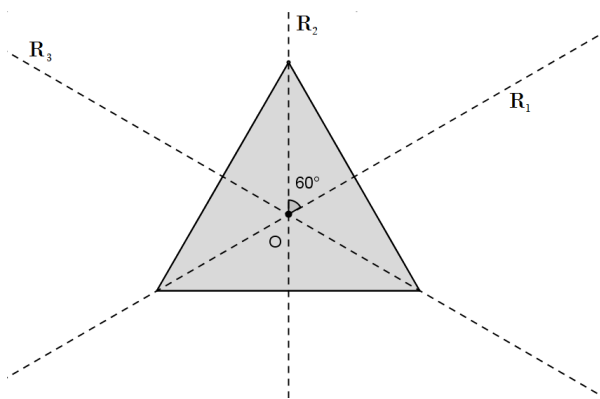


Figura 3.4: Simetrias do triângulo

As três rotações são operações do grupo cíclico  $C_3$ . Assim  $C_3$  é um subgrupo do grupo de isometrias  $D_3$  do triângulo equilátero. Denotando por  $S$  a rotação de  $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ , que gera o subgrupo cíclico, temos que as três rotações são  $S$ ,  $S^2$  e  $S^3$ . Além disso, pela Proposição 2.5.1, a rotação  $S$  pode ser descrita pelo produto  $R_1R_2 = S$ , pois o ângulo entre as retas de reflexão de  $R_1$  e  $R_2$  é igual a  $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ . Dessa forma  $S = R_1R_2$  e  $S^2 = R_1R_3$ . Logo, as três reflexões podem ser expressas como  $R_1$ ,  $R_2 = R_1S$  e  $R_3 = R_1S^2$ .

Portanto, o grupo de simetrias do triângulo equilátero tem ordem 6, e é gerado por  $R_1$  e  $S$  que satisfazem as relações  $R_1^2 = I$  e  $S^3 = I$ .

**Exemplo 5:** Grupo de simetria do quadrado.

O quadrado possui oito operações de simetria: quatro reflexões  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  em relação a retas distintas (duas determinadas por pares de vértices opostos e as outras duas pelos pontos médios de lados opostos) e quatro rotações em relação ao ponto central  $O$  (ponto de interseção das retas de reflexão) com ângulos de  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  e  $360^\circ$  (veja a Figura 3.5). O grupo de simetria do quadrado é formado por oito elementos e é o grupo diedral  $D_4$ .

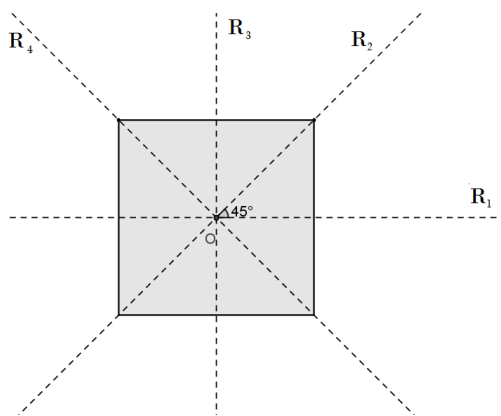


Figura 3.5: Simetrias do quadrado

As quatro rotações são operações do grupo cíclico  $C_4$ . Assim  $C_4$  é um subgrupo do grupo de isometrias  $D_4$  do quadrado. Denotando por  $S$  a rotação de  $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ , que gera o subgrupo cíclico, temos que as quatro rotações são  $S, S^2, S^3$  e  $S^4$ . Além disso, pela Proposição 2.5.1, a rotação  $S$  pode ser descrita pelo produto  $R_1R_2 = S$ , pois o ângulo entre as retas de reflexão de  $R_1$  e  $R_2$  é igual a  $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$ . Dessa forma  $S = R_1R_2, S^2 = R_1R_3$  e  $S^3 = R_1R_4$ . Logo, as quatro reflexões podem ser expressas como  $R_1, R_2 = R_1S, R_3 = R_1S^2$  e  $R_4 = R_1S^3$ .

Portanto, o grupo de simetrias do quadrado tem ordem 8, e é gerado por  $R_1$  e  $S$  que satisfazem as relações  $R_1^2 = I$  e  $S^4 = I$ .

**Exemplo 6:** Grupo de simetria do pentágono.

O pentágono possui dez operações de simetria: cinco reflexões  $R_1, R_2, R_3, R_4$  e  $R_5$  em relação a retas distintas (determinadas por um vértice e o ponto médio do lado oposto ao mesmo vértice) e cinco rotações em relação ao ponto central  $O$  (ponto de interseção das retas de reflexão) com ângulos de  $72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$  e  $360^\circ$  (veja a Figura 3.6). O grupo de simetria do pentágono é formado por dez elementos e é o grupo diedral  $D_5$ .

As cinco rotações são operações do grupo cíclico  $C_5$ . Assim  $C_5$  é um subgrupo do grupo de isometrias  $D_5$  do pentágono. Denotando por  $S$  a rotação de  $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ , que gera o subgrupo cíclico, temos que as cinco rotações são  $S, S^2, S^3, S^4$  e  $S^5$ . Além disso, pela Proposição 2.5.1, a rotação  $S$  pode ser descrita pelo produto  $R_1R_2 = S$ , pois o ângulo entre as retas de reflexão de  $R_1$  e  $R_2$  é igual a  $\frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ . Dessa forma  $S = R_1R_2, S^2 = R_1R_3, S^3 = R_1R_4$  e  $S^4 = R_1R_5$ . Logo, as cinco reflexões podem ser expressas como  $R_1, R_2 = R_1S, R_3 = R_1S^2, R_4 = R_1S^3$  e  $R_5 = R_1S^4$ .

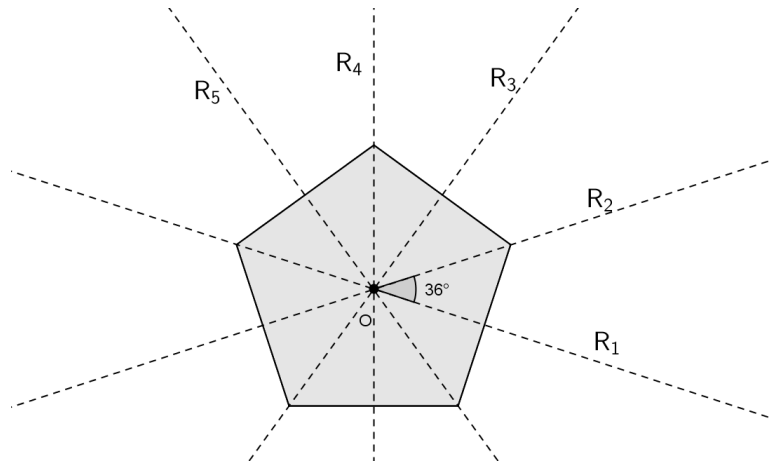


Figura 3.6: Simetrias do pentágono

Portanto, o grupo de simetrias do pentágono tem ordem 10, e é gerado por  $R_1$  e  $S$  que satisfazem as relações  $R_1^2 = I$  e  $S^5 = I$ .

### Grupo de simetria de um polígono regular de $n$ lados

O grupo de simetria de um **polígono regular** de  $n$  lados é o grupo diedral  $D_n$  de ordem  $2n$ , composto por  $n$  rotações e  $n$  reflexões, sendo:

**rotações:** ângulos iguais a  $k(\frac{360^\circ}{n})$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$  e centro no ponto de interseção das retas de reflexão;

**reflexões:** se  $n$  é ímpar as retas de reflexão são determinadas por um vértice e o ponto médio do lado oposto ao mesmo vértice, e se  $n$  é par as retas de reflexão são as retas determinadas pelos pontos médios de lados opostos e as retas determinadas por pares de vértices opostos.

As  $n$  rotações são as operações do grupo cíclico  $C_n$ , isto é,  $C_n$  é um subgrupo de  $D_n$ .

A operação de simetria que gera o grupo  $C_n$  é a rotação de ângulo  $\frac{360^\circ}{n}$ , que, pela Proposição 2.5.1, pode ser descrita como o produto  $S = R_1R_2$  de duas reflexões em retas adjacentes, cujo ângulo entre as mesmas é  $\frac{180^\circ}{n}$ . Sejam  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$  as  $n$  reflexões do grupo diedral  $D_n$ . Como a medida do ângulo entre as retas de reflexão de  $R_1$  e  $R_{k+1}$  é  $k(\frac{180^\circ}{n})$  então o produto  $R_1R_{k+1}$  é a rotação de ângulo  $k(\frac{360^\circ}{n})$ . Além disso  $R_1R_{k+1} = S^k$ . Assim  $R_{k+1} = R_1S^k$  e as  $n$  reflexões podem ser descritas como  $R_1, R_1S, R_1S^2, \dots, R_1S^{n-1}$ . Portanto,  $D_n$  é gerado por  $R_1$  e  $S$  que satisfazem as relações  $R_1^2 = I$  e  $S^n = I$ .

Substituindo  $S$  por  $R_1R_2$  percebemos que  $D_n$  também é gerado por  $R_1$  e  $R_2$ , que satisfazem as relações  $R_1^2 = I$ ,  $R_2^2 = I$  e  $(R_1R_2)^n = I$ .

### 3.3 O Teorema de Leonardo

**Teorema 3.3.1** (Teorema de Leonardo). *Um grupo finito de isometrias no plano é um grupo cíclico  $C_n$  ou um grupo diedral  $D_n$ .*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grupo finito de isometrias. Notemos que  $G$  não contém translações distintas da identidade e não contém reflexões deslizantes, pois caso contrário, estas isometrias gerariam um subgrupo infinito de  $G$ . Assim vamos dividir a prova em dois casos:

**Caso 1:** Seja  $G$  um grupo finito contendo apenas rotações. Uma possibilidade é o grupo  $G$  possuir apenas o elemento identidade. Nesse caso  $G = C_1$ , isto é,  $G$  é o grupo cíclico de ordem 1.

Outra possibilidade é o grupo  $G$  conter uma rotação  $R_{A\theta}$  distinta da identidade. Suponhamos que exista outra rotação  $R_{B\varphi}$  pertencente a  $G$  e distinta da identidade com  $A \neq B$ . Então  $G$  contém o produto  $R_{A\theta}R_{B\varphi}R_{A\theta}^{-1}R_{B\varphi}^{-1}$  que, pela Proposição 2.9.1 do Capítulo 2, é uma translação distinta da identidade, o que não pode ocorrer. Portanto, devemos ter  $A = B$ , ou seja, todas as rotações em  $G$  distintas da identidade tem centro em  $A$ .

Como  $R_{A(-\theta)}$  pertence a  $G$  se, e somente se,  $R_{A\theta}$  pertence a  $G$ , então todos os elementos em  $G$  podem ser expressos na forma  $R_{A\theta}$  para algum  $\theta$ , com  $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ . Suponhamos  $R_{A\theta}$  com  $\theta$  o menor valor positivo tal que  $R_{A\theta}$  pertence a  $G$ . Notemos que  $\theta$  existe, pois o grupo  $G$  é finito. Consideremos outra rotação  $R_{A\varphi}$  pertencente a  $G$  com  $\varphi > \theta$ , então  $\varphi - k\theta$  não pode ser positivo e menor que  $\theta$  para algum inteiro  $k$ , caso contrário  $\theta$  não seria o menor inteiro positivo com  $R_{A\theta}$  em  $G$  (ver Figura 3.7(a)). Assim, como  $\theta$  é o menor valor positivo com  $R_{A\theta}$  em  $G$ , temos que existe um inteiro positivo  $k$ , tal que  $\varphi = k\theta$  (veja a Figura 3.7(b)).

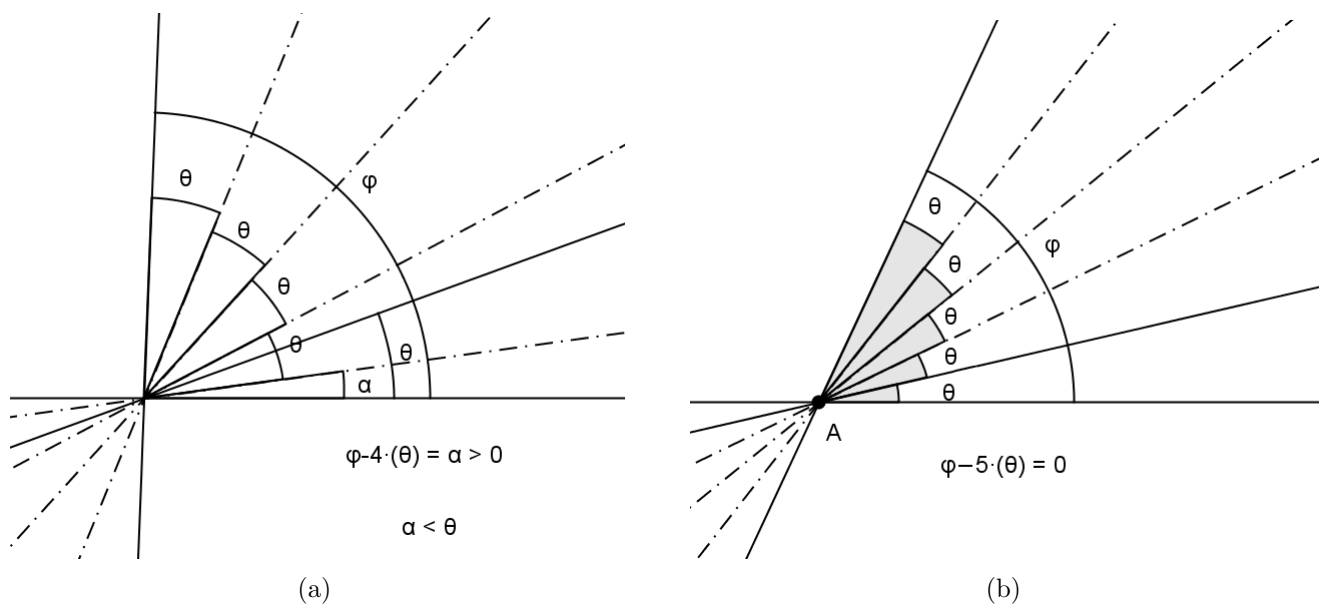


Figura 3.7: Teorema de Leonardo - caso 1

Assim,  $R_{A\varphi} = R_{A(k\theta)} = (R_{A\theta})^k$  e os elementos de  $G$  são potências de  $R_{A\theta}$ . Portanto, um grupo finito de isometrias que contém apenas rotações é um grupo cíclico  $C_n$  para algum inteiro positivo  $n$ .

**Caso 2:** Seja  $G$  um grupo finito de isometrias que contenha pelo menos uma reflexão.

Como a identidade pode ser expressa como produto de duas reflexões, temos que ela é direta. Além disso, o produto de isometrias direta é uma isometria direta e a inversa de uma isometria direta é também direta. Assim, o conjunto de todas as isometrias diretas de  $G$  formam um subgrupo finito de  $G$ , que é um subgrupo cíclico  $C_n$  gerado por uma rotação  $R_{A\theta}$ . Portanto, as isometrias diretas pertencentes a  $G$  são as  $n$  rotações  $R_{A\theta}, (R_{A\theta})^2, \dots, (R_{A\theta})^n$ , para algum inteiro positivo  $n$ .

Agora suponhamos que  $G$  tenha  $m$  reflexões.

Se  $m = 1$ , isto é, se  $G$  tem apenas uma reflexão  $R_1$ , então  $G$  não pode conter uma rotação  $R_{A\theta}$  distinta da identidade.

De fato, supondo que  $G$  contenha uma rotação  $R_{A\theta}$  distinta da identidade, se  $A$  não pertence à reta  $r_1$  da reflexão de  $R_1$ , então  $R_{A\theta}$  pode ser expressa pelo produto  $R_{A\theta} = R_r R_s$ , com as retas  $r$  e  $s$  concorrentes em  $A$  e  $r$  paralela à reta de reflexão  $R_1$ . Assim sendo, o produto  $R_1 R_{A\theta} = R_1 R_r R_s = T R_s$ , em que  $T$  é a translação  $R_1 R_r$ , como mostra a Figura 3.8(a).

Notemos que o produto de uma translação e uma reflexão é uma isometria oposta. Logo, pela Proposição 2.6.5 do Capítulo 2, esse produto é uma reflexão ou uma reflexão deslizante. Como não é possível ter no grupo  $G$  uma reflexão deslizante, então este produto deve ser uma reflexão, o que, pela Proposição 2.8.1 do Capítulo 2, implica que o deslocamento de  $T$  deve ser perpendicular à reta  $s$ .

Como o deslocamento é perpendicular a  $r$  e como  $s$  passa pelo ponto  $A$ , devemos ter  $r = s$ , como mostra a Figura 3.8(b). Assim,  $R_{A\theta} = R_r R_s = R_r R_r = I$ , o que contradiz a suposição de  $R_{A\theta}$  ser uma rotação distinta da identidade.

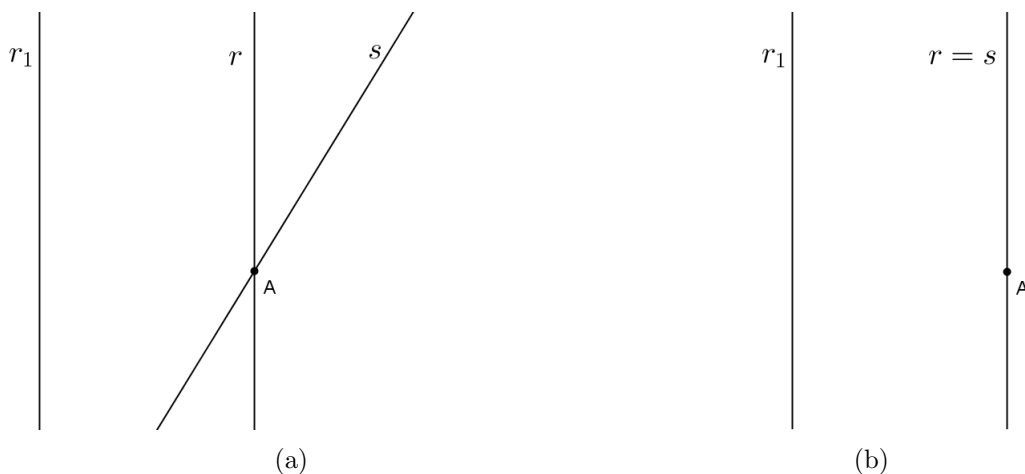


Figura 3.8: Teorema de Leonardo - caso 2

Por outro lado, se  $A$  pertence à reta da reflexão  $R_1$ , a rotação  $R_{A\theta}$  pode ser expressa como o pro-



duto  $R_1R$ , para alguma reflexão  $R$ , com  $R$  distinta de  $R_1$  e as retas de reflexão sendo concorrentes em  $A$ .

Assim,  $R_{A\theta} = R_1R$ , ou seja,  $R = R_1R_{A\theta}$ . Logo,  $R$  pertenceria a  $G$ , pois seria expressa pelo produto das isometrias  $R_1$  e  $R_{A\theta}$  que pertencem à  $G$ . Com isso, teríamos duas reflexões distintas em  $G$ , mas por hipótese  $m = 1$ .

Portanto, se  $m = 1$  então o grupo  $G$  é o grupo finito contendo apenas uma reflexão e a identidade, sendo o grupo diedral  $D_1 = \langle R_1 \rangle$ , com  $R_1^2 = I$ .

Se  $m > 1$ , então  $G$  contém as reflexões  $R_1, R_2, \dots, R_m$ . Notemos que todas as  $m$  retas das reflexões são concorrentes em um ponto  $A$ , pois se ocorrem retas de reflexão distintas paralelas, isso implica na existência de uma translação e se existem retas de reflexão concorrentes em um ponto  $B$ , com  $A \neq B$ , teríamos rotações com centros  $A$  e  $B$  e como já vimos, não podem ocorrer rotações com centros distintos em um grupo finito.

O grupo  $G$  contém uma rotação  $R_{A\theta}$  distinta da identidade, e assim contém o subgrupo cíclico  $C_n = \{R_{A\theta}, (R_{A\theta})^2, \dots, (R_{A\theta})^n\}$ .

Logo, as isometrias opostas  $R_1R_{A\theta}, R_1(R_{A\theta})^2, \dots, R_1(R_{A\theta})^n$  pertencem a  $G$ . Como  $G$  é finito, essas isometrias são  $n$  reflexões distintas, e assim  $n \leq m$ , pois as reflexões do grupo são  $R_1, R_2, \dots, R_m$ .

Por outro lado, as isometrias diretas  $R_1R_1, R_1R_2, \dots, R_1R_m$ , são isometrias distintas de  $G$ , e as isometrias diretas em  $G$  são as isometrias do grupo  $C_n$ . Logo, temos  $m \leq n$ .

Portanto,  $m = n$  e podemos concluir que  $G$  contém  $2n$  elementos gerados por  $R_1$  e  $R_{A\theta}$ . (Observe que dado  $i$  temos  $R_1R_i = (R_{A\theta})^j$  para algum  $j$  pelo exposto no parágrafo anterior e assim  $R_i = R_1(R_{A\theta})^j$ ).

Assim, se  $n = 1$  temos  $G = \langle R_1 \rangle$  e, se  $n > 1$  temos  $G = \langle R_1, R_{A\theta} \rangle$ , isto é,  $G$  é gerado por  $R_1$  e  $R_{A\theta}$  sendo  $R_1$  uma reflexão em uma reta passando pelo ponto  $A$ , pois como a isometria  $R_1R_{A\theta}$  pertence a  $G$  e  $G$  é finito, temos que  $R_1R_{A\theta}$  é uma reflexão  $R$ . Logo,  $R_1R_{A\theta} = R$  o que implica  $R_{A\theta} = R_1R$  e assim o produto  $R_1R$  é uma rotação de centro  $A$  e, portanto, as retas de reflexão de  $R_1$  e  $R$  são concorrentes no ponto  $A$  e, em especial, o ponto  $A$  pertence à reta de reflexão de  $R_1$ .

Concluindo, se  $G$  possui apenas uma reflexão então  $G = D_1$ , isto é,  $G$  é o grupo diedral  $D_1$  e, se  $G$  possui  $n$  reflexões distintas duas a duas,  $G = D_n$ , ou seja,  $G$  é o grupo diedral  $D_n$  com  $n$  reflexões e  $n$  rotações. Assim, um grupo finito de isometrias que possui reflexões é um grupo diedral  $D_n$  para algum inteiro positivo  $n$ .  $\square$

### 3.4 Identificação do grupo de simetria de um ornamento limitado

Para identificar o grupo de simetria de um ornamento limitado, levando em consideração a forma da região, as cores e as linhas que compõe o ornamento, podemos usar o algoritmo mostrado na Figura 3.9.

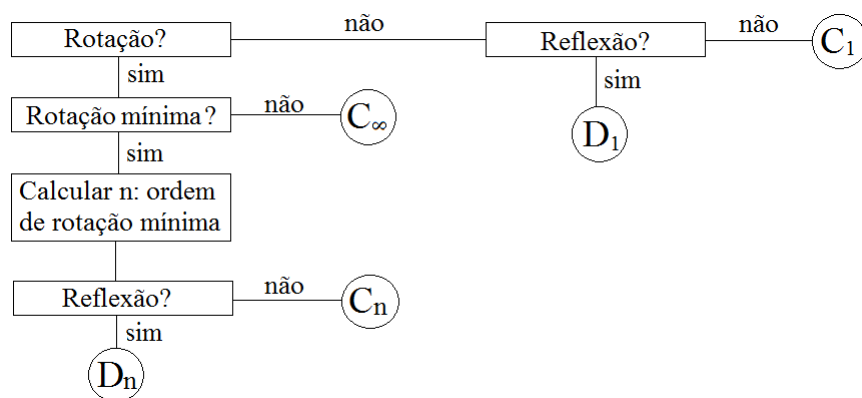


Figura 3.9: Algoritmo I - possíveis grupos de simetria de ornamentos limitados

Para exemplificar o uso do algoritmo vamos identificar do grupo de simetria de um ornamento limitado, mostrado na Figura 3.10. Para determinar o grupo de simetria por meio do algoritmo, devemos responder as perguntas como segue:

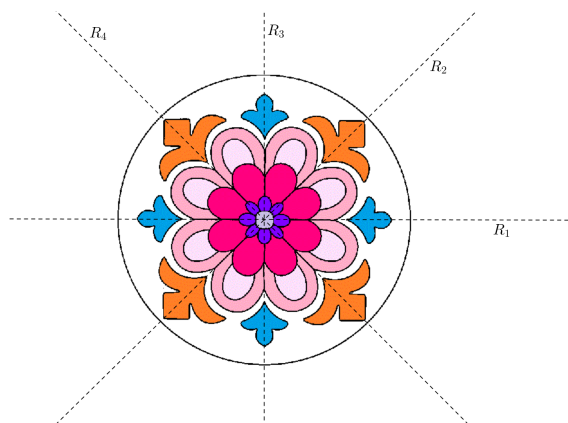


Figura 3.10: Ornamento limitado

A figura possui rotação? Sim.

A figura possui rotação mínima? Sim, rotação de  $90^\circ$ .

Calcular a orden  $n$ :  $\frac{360^\circ}{90^\circ} = 4$

A figura possui reflexão? Sim.

Portanto, o grupo de simetria da figura é  $D_4$ , isto é, o grupo diedral de ordem 4, com 4 rotações e 4 reflexões.

Alguns exemplos de ornamentos limitados

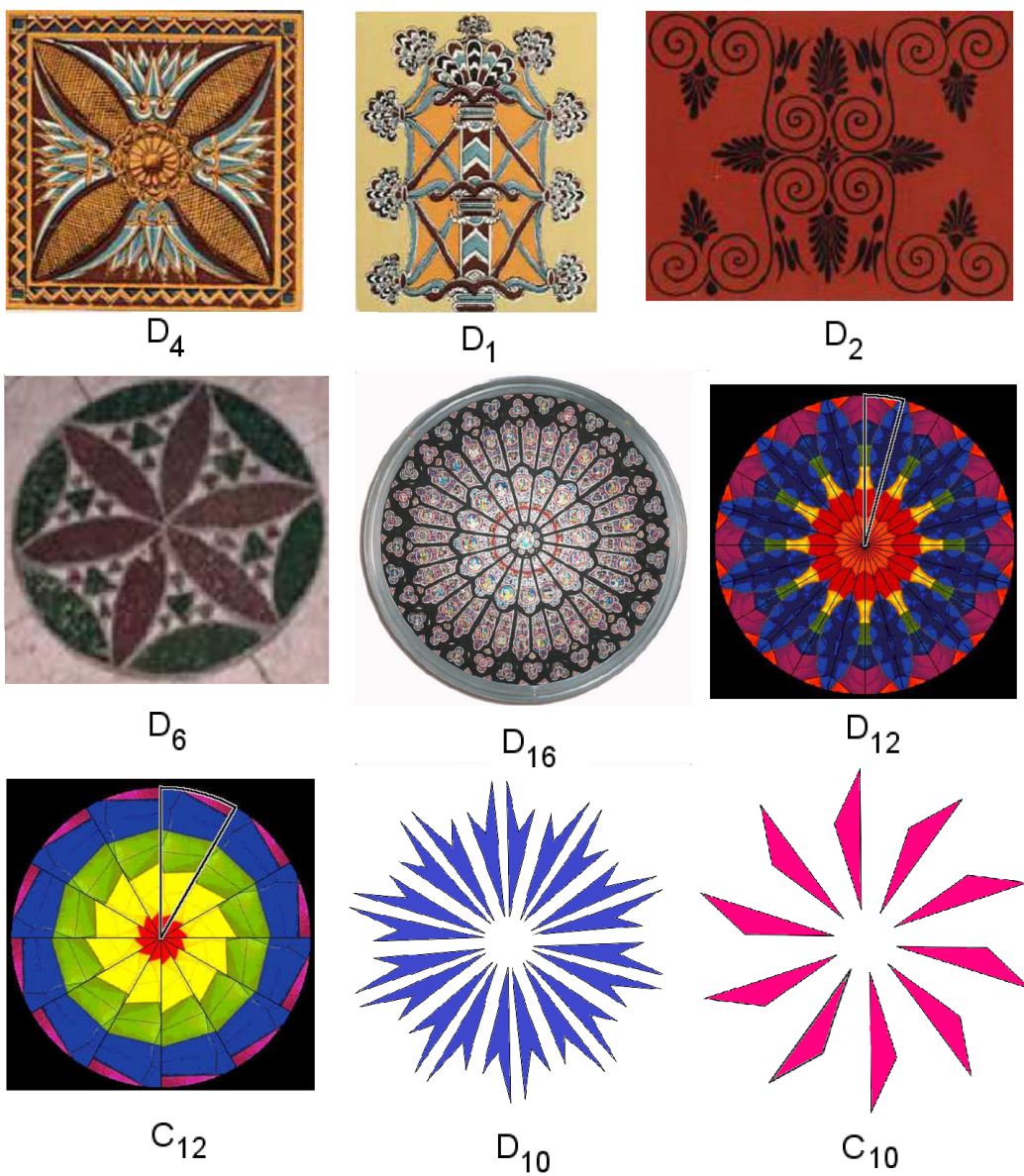


Figura 3.11: Ornamentos limitados



## Grupos de frisos

Frisos ornamentais são muito utilizados na arquitetura e na decoração. Encontramos frisos em pinturas, papel de parede, azulejos, entre outros.

Neste capítulo classificaremos os grupos de frisos e exibiremos o algoritmo utilizado em sua identificação. Este capítulo está fundamentado principalmente nas Referências [6], [10] e [14].

### 4.1 Definições e teoremas

**Definição 4.1.1.** *Um grupo de isometrias, cujos elementos deixam invariante uma dada reta  $c$  e cujas translações formam um grupo cíclico infinito é denominado **grupo de friso** com centro  $c$ .*

**Definição 4.1.2.** *Sejam  $S$  um conjunto de pontos no plano e  $A$  um ponto. Se a meia-volta  $H_A$  pertence ao grupo de simetrias de  $S$ , então dizemos que  $A$  é um **ponto de simetria** do conjunto  $S$ . Agora consideremos uma reta  $l$ . Dizemos que a reta  $l$  é uma **reta de simetria** de  $S$  se a reflexão  $R_l$  pertence ao grupo de simetrias do conjunto  $S$ .*

**Teorema 4.1.3.** *Se  $A$  é um ponto de simetria do conjunto de pontos  $S$  e  $\alpha$  é uma simetria de  $S$ , então  $\alpha(A)$  é um ponto de simetria de  $S$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $\alpha$  uma isometria de  $S$ ,  $A$  um ponto de simetria do conjunto de pontos  $S$  e  $P$  um ponto qualquer de  $S$ . Sejam  $A' = \alpha(A)$ ,  $P' = H_A(P)$ ,  $Q_1 = \alpha(P)$  e  $Q_2 = \alpha(P')$ , como mostra a Figura 4.1.

Então, como  $\alpha$  é uma isometria e os pontos  $P$ ,  $A$  e  $P'$  são colineares, temos que os pontos  $Q_1$ ,  $A'$  e  $Q_2$  também são colineares. Além disso,  $A'$  é o ponto médio do segmento  $\overline{Q_1Q_2}$ , pois  $A$  é o ponto médio do segmento  $\overline{PP'}$ . Assim  $H_{A'}(Q_1) = Q_2$ . Logo,  $H_A\alpha(P) = \alpha(H_A(P)) = \alpha(P') = Q_2 = H_{A'}(Q_1) = H_{A'}(\alpha(P)) = \alpha H_{A'}(P)$  para qualquer ponto  $P$  em  $S$ . Assim  $H_A\alpha = \alpha H_{A'}$  e portanto,  $H_{A'} = \alpha^{-1}H_A\alpha$ .

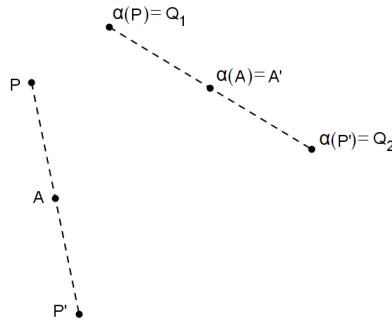


Figura 4.1: Ponto de simetria

Assim, sendo  $\alpha$  e  $H_A$  pertencentes ao grupo de simetrias do conjunto  $S$ , temos que  $H_{A'}$  também é uma simetria do conjunto  $S$ , pois  $H_{A'}$  é o produto de simetrias pertencentes ao grupo. Logo,  $\alpha(A) = A'$  é um ponto de simetria de  $S$ .  $\square$

**Teorema 4.1.4.** *Se  $l$  é uma reta de simetria do conjunto de pontos  $S$  e  $\alpha$  é uma simetria de  $S$ , então  $\alpha(l)$  é uma reta de simetria de  $S$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $\alpha$  uma simetria de  $S$ ,  $l$  uma reta de simetria do conjunto  $S$  e  $P$  um ponto qualquer de  $S$ . Sejam  $l' = \alpha(l)$ ,  $P' = R_l(P)$ ,  $M$  o ponto médio do segmento  $\overline{PP'}$ ,  $M' = \alpha(M)$ ,  $Q_1 = \alpha(P)$  e  $Q_2 = \alpha(P')$ , como mostra a Figura 4.2

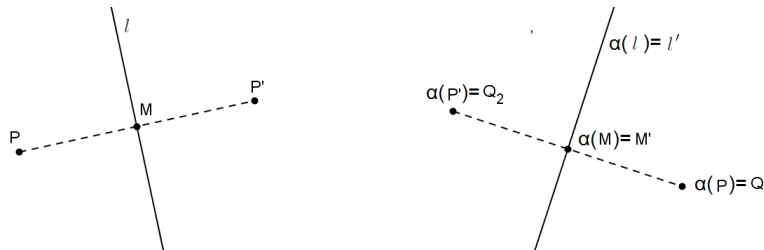


Figura 4.2: Reta de simetria

Como  $l$  é a mediatriz do segmento  $\overline{PP'}$  e  $\alpha$  é uma isometria, então  $l'$  é a mediatriz do segmento  $\overline{Q_1Q_2}$  e, portanto,

$$\begin{aligned} R_{l'}(Q_1) &= Q_2 \\ R_{l'}(\alpha(P)) &= \alpha(P') \\ R_{l'}(\alpha(P)) &= \alpha(R_l(P)) \\ \alpha R_{l'}(P) &= R_l(P), \text{ para qualquer } P \text{ em } S. \end{aligned}$$

Logo,  $R_l\alpha = \alpha R_{l'}$ , o que implica  $R_{l'} = \alpha^{-1}R_l\alpha$ .

Sendo  $\alpha$  e  $R_l$  pertencentes ao grupo de simetria conjunto  $S$ , temos que  $R_{l'}$  também pertence ao

grupo de simetrias de  $S$ , pois  $R_{l'}$  é o produto de isometrias pertencentes ao grupo. Logo,  $\alpha(l) = l'$  é uma reta de simetria do conjunto  $S$ . □

Um friso ornamental possui um padrão gerado pela repetição de alguma figura indefinidamente e se mantém invariante por alguma translação mínima. Considerando as simetrias que deixam o padrão invariante existem somente sete tipos possíveis de padrões de frisos ornamentais. Nosso objetivo é classificar os frisos por seus grupos de simetria.

## 4.2 Classificação dos grupos de frisos

Consideremos  $T$  uma translação não trivial, ou seja, com deslocamento não nulo, que deixa uma dada reta  $c$  invariante. Determinaremos todos os grupos de frisos  $\mathcal{F}$  com centro  $c$  e cujas translações formam um grupo cíclico infinito gerado por  $T$ .

Além da translação  $T$  e suas potências, pela Definição 4.1.1, em um grupo de friso  $\mathcal{F}$  podem estar presentes meia-voltas ( $H$ ) com centro de simetria na reta  $c$ , a reflexão  $R_c$  em relação à reta  $c$ , reflexões ( $R$ ) em retas perpendiculares à reta  $c$  e reflexões deslizantes ( $\alpha$ ) com eixo a reta  $c$ . Assim, construímos a árvore de possibilidades (Figura 4.3), que mostra todas as combinações possíveis para essas quatro simetrias sendo que todo grupo de friso  $\mathcal{F}$  contém a translação  $T$ .

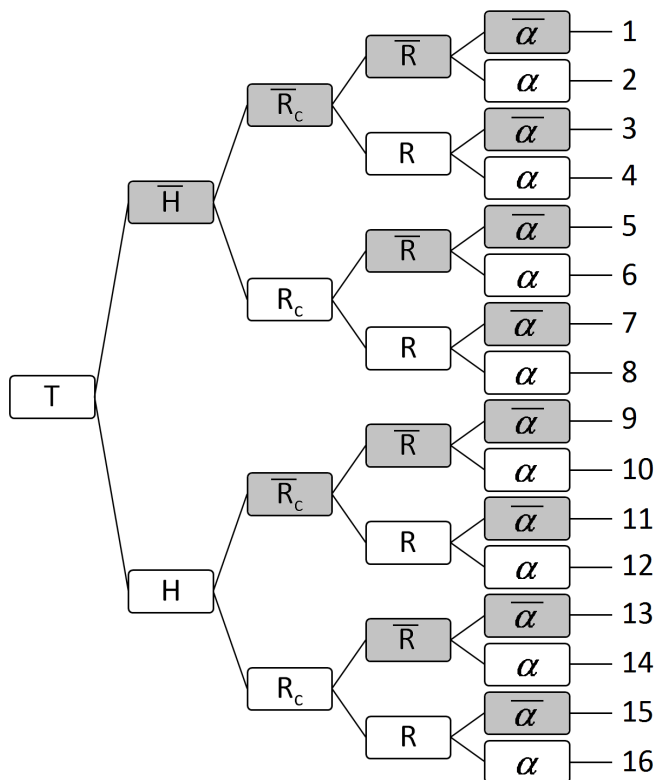


Figura 4.3: Árvore de possibilidades para grupos de frisos

Na árvore de possibilidades mostrada na Figura 4.3 consideremos:

$T$ : translação de deslocamento mínimo e paralelo à reta  $c$ .

$H$ : contém meia-volta.

$\overline{H}$ : não contém meia-volta.

$R_c$ : contém reflexão na reta  $c$ .

$\overline{R}_c$ : não contém reflexão na reta  $c$ .

$R$ : contém reflexão em reta perpendicular a reta  $c$ .

$\overline{R}$ : não contém reflexão em reta perpendicular a reta  $c$ .

$\alpha$ : contém reflexão deslizante com eixo a reta  $c$ .

$\overline{\alpha}$ : não contém reflexão deslizante com eixo a reta  $c$ .

Analisaremos cada um dos 16 ramos da árvore. Primeiramente vamos mostrar que 9 ramos, ou sejam, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14 e 15, não são possíveis. Assim ficaremos apenas com 7 ramos e, para estes, mostraremos a existência de frisos com as correspondentes isometrias e, também, exibiremos geradores para o grupo de simetrias correspondente a cada um deles.

O **ramo 4** é impossível, pois sejam a reflexão  $R_l$ , com  $l$  perpendicular à reta  $c$ , e a reflexão deslizante  $\alpha$ , com eixo a reta  $c$ , ambas no grupo de simetrias.

A reflexão deslizante  $\alpha$  pode ser expressa pelo produto de uma translação  $T_1$ , com deslocamento na direção da reta  $c$ , e a reflexão  $R_c$ , tal que  $\alpha = R_c T_1 = T_1 R_c$ . Além disso, a translação  $T_1$  pode ser expressa como o produto de duas reflexões em retas paralelas e perpendiculares à reta  $c$ . Assim, seja  $l_1$  paralela a  $l$  com a distância entre  $l_1$  e  $l$  igual à metade do deslocamento de  $T_1$ . Pela Proposição 2.5.8,  $T_1 = R_{l_1} R_l$ , supondo, sem perda de generalidade, que o deslocamento é no sentido de  $l_1$  para  $l$ .

Logo,  $\alpha = R_c T_1 = R_c R_{l_1} R_l = H_X R_l$ , sendo  $H_X = R_c R_{l_1}$  a meia-volta de centro o ponto  $X$ , interseção das retas  $c$  e  $l_1$ . Então,

$$\begin{aligned}\alpha &= H_X R_l \\ \alpha R_l^{-1} &= H_X R_l R_l^{-1} \\ \alpha R_l &= H_X.\end{aligned}$$

Assim, a meia-volta  $H_X = \alpha R_l$  estaria no grupo, pois é expressa como o produto de  $\alpha$  e  $R_l$  que estão no grupo. Portanto a presença de uma reflexão deslizante e uma reflexão em reta perpendicular a  $c$  acarreta a presença de meia-volta, o que implica que o ramo 4 não é possível, pois neste ramo não tem meia-volta.

O **ramo 5** é impossível. Como este ramo contém  $T$  e  $R_c$ , o grupo de simetrias deve conter o produto  $T R_c$  que é uma reflexão deslizante. Mas a reflexão deslizante não está presente nesse ramo. Portanto, essa combinação é impossível.

O **ramo 7** é impossível. Como este ramo também contém translação, reflexão  $R_c$  e não tem



reflexão deslizante, a justificativa é a mesma dada para a impossibilidade do ramo 5.

O **ramo 8** é impossível. Um grupo que contém reflexão em  $c$  e reflexão em  $l$  deveria conter a meia-volta  $H$ , com centro  $X$  na interseção das retas  $c$  e  $l$ , pois  $R_l R_c = H_X$ , mas este ramo não tem meia-volta.

O **ramo 10** é impossível, pois sejam a meia-volta  $H_X$ , com  $X$  pertencente à reta  $c$ , e a reflexão deslizante  $\alpha$ , com eixo a reta  $c$ , ambas no grupo de simetrias.

A reflexão deslizante  $\alpha$  pode ser expressa pelo produto de uma translação  $T_1$ , com deslocamento na direção da reta  $c$ , e a reflexão  $R_c$ , tal que  $\alpha = R_c T_1 = T_1 R_c$ . Além disso, a translação  $T_1$  pode ser expressa como o produto de duas meia-voltas em pontos distintos pertencentes à reta  $c$ . Assim, seja  $Y$  na reta  $c$  com a distância entre  $X$  e  $Y$  igual à metade do deslocamento de  $T_1$ . Pela Proposição 2.4.1,  $T_1 = H_X H_Y$ , supondo, sem perda de generalidade, que o deslocamento é no sentido de  $X$  para  $Y$ .

Logo,  $\alpha = R_c T_1 = T_1 R_c = H_X H_Y R_c$ . Agora, como a meia-volta  $H_Y$  pode ser expressa como o produto da reflexão na reta  $l$  perpendicular à reta  $c$  passando por  $Y$  e a reflexão na reta  $c$ , então

$$\begin{aligned}\alpha &= H_X H_Y R_c \\ \alpha &= H_X R_l R_c R_c \\ \alpha &= H_X R_l \\ H_X^{-1} \alpha &= H_X^{-1} H_X R_l \\ H_X \alpha &= R_l.\end{aligned}$$

Logo, a reflexão  $R_l = H_X \alpha$  estaria no grupo, pois é expressa como o produto de  $H_X$  e  $\alpha$  e que estão no grupo. Portanto a presença de uma reflexão deslizante e uma meia-volta acarreta a presença de reflexão em reta perpendicular à reta  $c$ , o que implica que o ramo 10 não é possível, pois neste ramo não tem reflexão em reta perpendicular a  $c$ .

O **ramo 11** é impossível. Se um grupo contém a meia-volta  $H_X$  e a reflexão  $R_l$  em  $l$ , com a reta  $l$  perpendicular a reta  $c$ , temos dois casos a considerar:

*i)* Se o centro  $X$  da meia-volta é tal que  $\{X\} = c \cap l$ , então  $H_X = R_l R_c$  e  $R_l H_X = R_l R_l R_c = R_c$ , o que implica que  $R_c$  estaria no grupo, pois seria expresso como o produto de  $R_l$  e  $H_X$  que estariam no grupo. E, isto não é possível, pois neste ramo não tem reflexão em  $c$ .

*ii)* Se  $\{Y\} = c \cap l$  com  $X \neq Y$ , seja  $l_1$  a reta perpendicular à reta  $c$  no ponto  $X$ . Assim,  $H_X = R_{l_1} R_c$ . Então,

$$R_l H_X = R_l R_{l_1} R_c.$$

Como as retas  $l$  e  $l_1$  são perpendiculares à reta  $c$ , então são paralelas e o produto  $R_l R_{l_1}$  é uma translação  $T_1$ , com deslocamento na direção da reta  $c$ . Logo, o produto  $T_1 R_c$  é uma reflexão deslizante  $\alpha$  com eixo  $c$ . Assim,  $R_l H_X = T_1 R_c = \alpha$ . Portanto, a reflexão deslizante  $\alpha$  estaria no grupo, pois seria expressa como o produto de  $R_l$  e  $H_X$ , mas no ramo 11 não tem reflexão deslizante.

O **ramo 13** é impossível. Como este ramo também contém translação, reflexão  $R_c$  e não tem reflexão deslizante, a justificativa é a mesma dada para a impossibilidade do ramo 5.

O **ramo 14** é impossível pois, se  $R_c$  e  $H$  estão no grupo, então o produto  $R_c H$  também deveria estar. E, notemos que  $R_c H = R_c R_c R_l = R_l$  com  $l$  perpendicular a  $c$  passando pelo centro da meia-volta  $H$ . Como  $R_l$  não está no grupo, então esse ramo é impossível.

O **ramo 15** é impossível. A justificativa é a mesma dada para a impossibilidade do ramo 5.

Na análise que fizemos, percebemos que apenas sete das dezesseis possibilidades podem acontecer. Faremos agora um estudo mais criterioso de cada uma dessas sete possibilidades para a classificação dos grupos de frisos.

Para cada um dos 7 ramos restantes, ou sejam, 1, 2, 3, 6, 9, 12, e 16 (ver Figura 4.4), mostraremos que existe um grupo de friso contendo as isometrias do ramo e exibiremos um padrão de friso ornamental tendo o grupo como seu grupo de simetrias. Além disso, exibiremos características de cada um dos grupos e também o conjunto de geradores.

Utilizaremos para os 7 grupos a notação devida ao matemático húngaro Fejes Tóth, ou sejam,  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_1^3$ ,  $\mathcal{F}_1^2$ ,  $\mathcal{F}_1^1$ ,  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_2^2$  e  $\mathcal{F}_2^1$ . Nesta notação, os subíndices 2 ou 1 indicam se existe ou não uma meia-volta, respectivamente, o sobreíndice 1 indica que o centro  $c$  é uma reta de simetria e o sobreíndice 2 indica que o centro  $c$  não é uma reta de simetria, mas existe uma reta de simetria perpendicular ao centro. O sobreíndice 3 é reservado para o caso especial em que o grupo é gerado por uma reflexão deslizante.

A notação a seguir será utilizada na classificação dos grupos de frisos (veja a Figura 4.5):

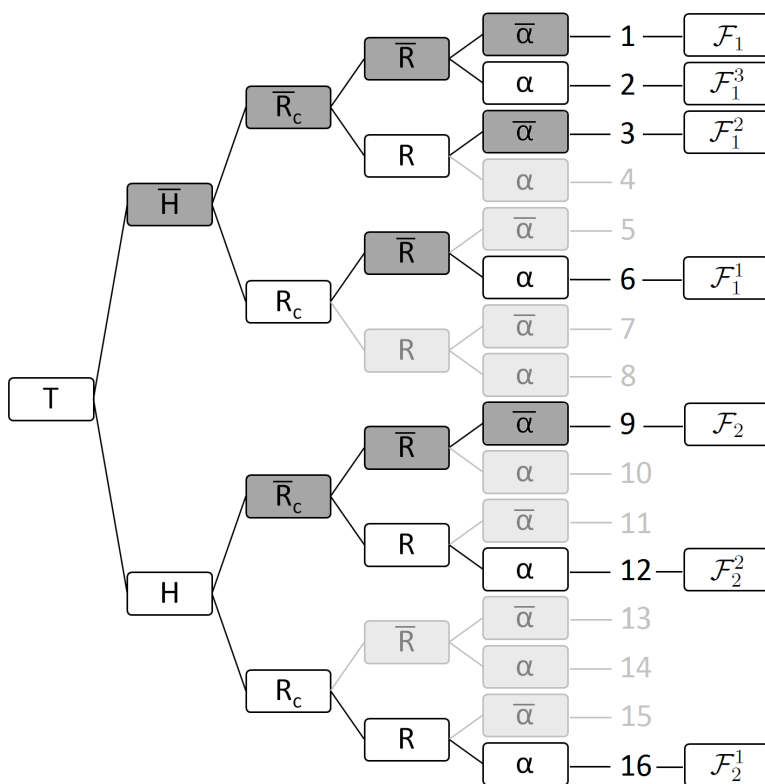


Figura 4.4: Em destaque os 7 ramos possíveis para grupos de frisos

- O ponto  $A$  será um ponto na reta  $c$  dado como segue:
  - Se  $\mathcal{F}$  contém meia-volta então  $A$  é o centro de uma meia-volta;
  - Se  $\mathcal{F}$  não contém meia-volta e tem reflexão em reta perpendicular a reta  $c$ , então  $A$  é a interseção dessas retas;
  - Se  $\mathcal{F}$  não tem meia-volta e não tem reflexões em retas perpendiculares a reta  $c$ , então  $A$  é um ponto qualquer em  $c$ .
- $A_1 = T(A)$ ,  $A_2 = T(A_1)$ , ...,  $A_{i+1} = T(A_i)$ , ...  
 $A_{-1} = T^{-1}(A)$ ,  $A_{-2} = T^{-1}(A_{-1})$ , ...,  $A_{-(i+1)} = T^{-1}(A_{-i})$ , ...
- $M$  é o ponto médio de  $A$  e  $A_1$  e  $M_i$  é o ponto médio de  $A_i$  e  $A_{i+1}$  para  $i$  um número inteiro.
- $M_1 = T(M)$ ,  $M_2 = T(M_1)$ , ...,  $M_{i+1} = T(M_i)$ , ...  
 $M_{-1} = T^{-1}(M)$ ,  $M_{-2} = T^{-1}(M_{-1})$ , ...,  $M_{-(i+1)} = T^{-1}(M_{-i})$ , ...
- $T^i(A) = A_i$  e  $T^i(M) = M_i$  para  $i$  um número inteiro.



Figura 4.5: Notação para classificação dos grupos de frisos

As sete proposições seguintes mostram que existe um único grupo de friso com as características de cada um dos 7 ramos restantes.

**Proposição 4.2.1.** *O grupo cíclico infinito gerado pela translação  $T$  é um grupo de friso que será denotado  $\mathcal{F}_1 = \langle T \rangle$ . Este grupo não apresenta meia-voltas, reflexões em retas e reflexões deslizantes, ou seja, tem as características do ramo 1 da árvore de possibilidades, e é gerado pela translação  $T$ . A Figura 4.6 mostra um padrão de friso ornamental que tem este grupo como seu grupo de simetrias.*

*Demonstração.* Pela Definição 4.1.1, o grupo  $\mathcal{F}_1 = \langle T \rangle$  é um grupo de friso, pois a translação  $T$  possui a reta  $c$  invariante.  $\square$



Figura 4.6: Grupo de simetria  $\mathcal{F}_1$

**Proposição 4.2.2.** *Seja a reflexão deslizante  $\gamma$ , tendo como eixo a reta  $c$ , e que leva o ponto  $A$  no ponto  $M$ . O grupo gerado por  $\gamma$ , que denotamos  $\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$ , é um grupo de friso que não contém meia-voltas e reflexões. Este grupo é o único que tem as características do ramo 2 da árvore de possibilidades e a Figura 4.7 mostra um padrão de friso ornamental tendo este grupo como seu grupo de simetrias.*

*Demonstração.* Vamos determinar o grupo tendo as características do ramo 2. Consideremos uma reflexão deslizante  $\alpha$ , com eixo a reta  $c$ , nesse grupo.

Como  $\gamma^2$  é uma translação na direção de  $c$  e as translações do grupo são as do grupo cíclico infinito gerado por  $T$ , temos  $\gamma^2 = T^i$  para algum inteiro  $i$ . Assim temos dois casos a considerar:  $\gamma^2 = T^{2n}$  ou  $\gamma^2 = T^{2n+1}$ , ou sejam,  $i$  par ou  $i$  ímpar.

*Caso 1:* Suponhamos  $\alpha^2 = T^{2n}$ . Notemos que  $\alpha T = T\alpha$  pois, a reflexão deslizante  $\alpha$  tem a mesma direção da translação  $T$ . Veja ainda que  $T^{-1}\alpha = \alpha T^{-1}$ , pois:

$$\begin{aligned} \alpha T &= T\alpha \\ T^{-1}\alpha T &= T^{-1}T\alpha \\ T^{-1}\alpha T T^{-1} &= \alpha T^{-1} \\ T^{-1}\alpha &= \alpha T^{-1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Como  $\alpha^2 = T^{2n}$ , temos:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= T^{2n} \\ \alpha^2 T^{-2n} &= T^{2n} T^{-2n} \\ \alpha^2 T^{-2n} &= I. \end{aligned} \tag{4.2}$$

De outra forma,

$$\begin{aligned}
\alpha^2 T^{-2n} &= \alpha \alpha T^{-1} T^{-2n+1} \\
&= \alpha T^{-1} \alpha T^{-2n+1}, \text{ por 4.1} \\
&= \alpha T^{-1} \alpha T^{-1} T^{-2n+2} \\
&= \alpha T^{-1} T^{-1} \alpha T^{-2n+2}, \text{ por 4.1} \\
&= \alpha T^{-2} \alpha T^{-2n+2} \\
&\vdots \\
&= \alpha T^{-(n-1)} \alpha T^{-2n+(n-1)} \\
&= \alpha T^{-(n-1)} \alpha T^{-1} T^{-2n+n} \\
&= \alpha T^{-(n-1)} T^{-1} \alpha T^{-n} \\
&= \alpha T^{-n} \alpha T^{-n} = (\alpha T^{-n})^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha^2 T^{-2n} = (\alpha T^{-n})^2. \quad (4.3)$$

Logo, pelas Equações 4.2 e 4.3,  $\alpha^2 T^{-2n} = (\alpha T^{-n})^2 = I$ , ou seja,  $\alpha T^{-n}$  tem período 2 e, como se trata de isometria oposta, pela demonstração do teorema da classificação das isometrias do plano, concluímos que é a reflexão  $R_c$  em relação à reta  $c$ , pois a reta  $c$  é o eixo da reflexão deslizante  $\alpha$  e  $T$  é translação na direção de  $c$ .

Portanto,  $\alpha T^{-n} = R_c$ , o que implica que  $R_c$  está no grupo, pois estamos considerando  $\alpha$  no grupo e as translações  $T^n$  estão no grupo. Assim, concluímos que para encontrar um grupo com as características do ramo 2, que não contém  $R_c$ , a reflexão deslizante não pode satisfazer  $\alpha^2 = T^{2n}$  (caso 1).

*Caso 2:* Suponhamos  $\alpha^2 = T^{2n+1}$ . Como no caso 1,  $\alpha T = T\alpha$  e  $T^{-1}\alpha = \alpha T^{-1}$ . Dessa forma temos:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= T^{2n+1} \\
\alpha^2 &= T^{2n} T \\
T^{-2n} \alpha^2 &= T^{-2n} T^{2n} T \\
T^{-2n} \alpha^2 &= T \\
(\alpha T^{-n})^2 &= T.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Neste caso,  $\alpha T^{-n}$  não tem período 2.

Consideremos  $\gamma = \alpha T^{-n}$ . Notemos que  $\gamma$  é uma isometria oposta e não é uma reflexão, pois  $(\alpha T^{-n})^2 = T \neq I$ , sendo portanto uma reflexão deslizante. Além disso,  $\gamma$  pertence ao grupo, pois é expressa pelo produto de isometrias que estão no grupo. Observemos que, por 4.4,  $\gamma^2 = T$  e, assim,  $\gamma^2(A) = T(A) = A_1$  o que implica  $\gamma(A) = M$ . Logo,  $\gamma$  é a única reflexão deslizante que

leva  $A$  em  $M$  e tem eixo na reta  $c$ , ou seja,  $\gamma = T_{AM}R_c$ , em que  $T_{AM}$  é a translação na direção de  $c$  com deslocamento de  $A$  para  $M$  igual ao comprimento do segmento  $\overline{AM}$ .

Agora, para um inteiro  $m$  qualquer, temos  $\gamma^{2m} = T^m$ , pois:

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= T \\ (\gamma^2)^m &= T^m \\ \gamma^{2m} &= T^m.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Logo, a translação  $T$  pode ser obtida a partir de  $\gamma$ , assim como qualquer translação do grupo cíclico infinito gerado por  $T$ . Além disso,  $\gamma^{2m+1} = T^m\gamma$ , pois, pela Equação 4.5:

$$\begin{aligned}\gamma^{2m}\gamma &= T^m\gamma \\ \gamma^{2m+1} &= T^m\gamma.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Sendo  $\gamma = T_{AM}R_c$ , pela Equação 4.6, temos  $\gamma^{2m+1} = T^mT_{AM}R_c$  e, como  $T^mT_{AM}$  é uma translação de deslocamento não nulo na direção de  $c$ , concluímos que  $\gamma^{2m+1}$  é uma reflexão deslizante, ou seja, potências ímpares de  $\gamma$  são reflexões deslizantes.

Agora, se no grupo existir outra reflexão deslizante  $\alpha_1$ , então existe um inteiro  $n_1$ , tal que  $\alpha_1^2 = T^{2n_1+1}$ , pois  $\alpha_1^2$  é uma translação e, como já excluimos o caso 1, deve ser uma potência ímpar de  $T$ . Assim,  $\alpha_1^2 = T^{2n_1+1} = (\gamma^2)^{2n_1+1} = \gamma^{2(2n_1+1)} = (\gamma^{2n_1+1})^2$ , o que implica que  $\alpha_1^2 = (\gamma^{2n_1+1})^2$ , com  $\alpha_1$  e  $\gamma^{2n_1+1}$  reflexões deslizantes, pois  $2n_1 + 1$  é ímpar. E assim,  $\alpha_1 = \gamma^{2n_1+1}$ , ou seja,  $\alpha_1$  é obtida a partir de  $\gamma$ .

Assim, considerando o grupo cíclico infinito gerado por  $\gamma$ , que denotaremos  $\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$ , pelo que acabamos de ver, contém todas as translações do grupo cíclico gerado por  $T$  e todas as reflexões deslizantes possíveis para um grupo que tem as características do ramo 2.

Além disso, como  $\gamma^i$  é uma translação quando  $i$  é par e uma reflexão deslizante se  $i$  é ímpar, concluímos que este grupo não tem reflexões e nem meia-voltas.

Portanto, o grupo  $\mathcal{F}_1^3$  tem todas as características do ramo 2, é um grupo de friso, pois todos os seus elementos tem a reta  $c$  invariante e, além disso, é único com essas características.  $\square$

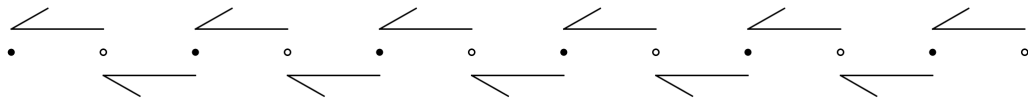


Figura 4.7: Grupo de simetria  $\mathcal{F}_1^3$

**Proposição 4.2.3.** *Sejam  $A$  um ponto qualquer da reta  $c$  e a reta  $a$  perpendicular a  $c$  passando por  $A$ . O grupo gerado por  $T$  e a reflexão  $R_a$  em relação à reta  $a$ , que denotamos  $\mathcal{F}_1^2 = \langle T, R_a \rangle$ , é um grupo de friso e não contém meia-voltas, reflexão em  $c$  e reflexões deslizantes. Este grupo*

é o único que tem as características do ramo 3 da árvore de possibilidades e a Figura 4.8 mostra um padrão de friso ornamental tendo este grupo como seu grupo de simetrias. Além disso,  $\mathcal{F}_1^2 = \langle T, R_a \rangle = \langle R_a, R_m \rangle$ , sendo  $m$  a reta perpendicular à reta  $c$  passando por  $M$ , ou seja, as reflexões  $R_a$  e  $R_m$  também geram o grupo.

*Demonstração.* Suponhamos que o grupo tenha as características do ramo 3, isto é, tenha a translação mínima  $T$  e a reflexão em relação à reta  $a$  perpendicular à reta  $c$  no ponto  $A$ , não tenha meia-voltas, reflexão em  $c$  e reflexão deslizante.

Então o grupo contém  $R_a T^n$ . Considerando as retas  $a_i$  passando por  $A_i$  e  $m_i$  passando por  $M_i$  e perpendiculares à  $c$ , temos  $R_a T^{2i} = R_a R_a R_{a_i} = R_{a_i}$  e  $R_a T^{2i+1} = R_a R_a R_{m_i} = R_{m_i}$ . Assim, concluímos que  $R_{a_i}$  e  $R_{m_i}$  pertencem ao grupo. Também, como  $R_a T = R_a R_a R_m = R_m$ , em que  $m$  é a reta perpendicular à  $c$  passando por  $M$ , concluímos que a reflexão na reta perpendicular à  $c$  passando por  $M$  também pertence ao grupo.

Suponhamos que o grupo tenha outra reflexão  $R_l$ . Notemos que  $l \neq c$ , pois  $R_a R_c = H_A$  e estamos considerando o grupo sem meia-volta. Assim,  $l$  é perpendicular a  $c$  e o produto  $R_a R_l$  é uma translação que pertence ao grupo. Assim,  $R_a R_l = T^n$ , para algum inteiro  $n$ , e  $R_a R_l(A) = R_l(R_a(A)) = R_l(A) = T^n(A) = A_n$ , ou seja,  $R_l(A) = A_n$ . Logo,  $l$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AA_n}$ . Se  $n$  é par, com  $n = 2i$ , então  $l$  é a reta perpendicular à reta  $c$  em  $A_i$  e se  $n$  é ímpar, com  $n = 2i + 1$ , então  $l$  é a reta perpendicular à reta  $c$  em  $M_i$ . Portanto,  $l = a_i$  ou  $l = m_i$ . Assim o grupo deve conter exatamente as reflexões  $R_{a_i}$ 's e  $R_{m_i}$ 's, ou seja, as reflexões em retas perpendiculares à  $c$  por  $A_i$  para cada  $i$  e as reflexões em retas perpendiculares a  $c$  por  $M_i$  para cada  $i$ .

Consideremos o grupo gerado por  $T$  e  $R_a$ , denotado  $\mathcal{F}_1^2 = \langle T, R_a \rangle$ .

Como  $T = R_a R_m$  e  $T^{-1} = R_m R_a$ , temos  $R_a T = R_a R_a R_m = R_m$  e  $T^{-1} R_a = R_m R_a R_a = R_m$ . Assim,  $R_a T = T^{-1} R_a$ . Portanto, todo elemento de  $\mathcal{F}_1^2$  é da forma  $T^j R_a^k$ , para  $j$  e  $k$  inteiros. Logo, se  $k$  for par,  $R_a^k = I$  e  $T^j R_a^k = T^j$ , ou seja,  $T^j R_a^k$  é uma translação do grupo cíclico gerado por  $T$ . Agora, se  $k$  for ímpar,  $R_a^k = R_a$  e, como  $T^j$  pode ser expressa como o produto de uma reflexão em reta  $l$  conveniente perpendicular à  $c$ , passando por um dos  $A_i$ 's ou um dos  $M_i$ 's, e a reflexão  $R_a$ , concluímos que  $T^j R_a^k = R_l R_a R_a = R_l$ ,  $l$  sendo uma das retas  $a_i$ 's ou uma das retas  $m_i$ 's, ou seja,  $T^j R_a^k$  é uma reflexão em torno de uma reta perpendicular a  $c$ , passando por um  $A_i$  ou um  $M_i$ .

Portanto, o grupo  $\mathcal{F}_1^2$  é um grupo de friso, pois contém o grupo cíclico gerado por  $T$ , e tem apenas reflexões em retas perpendiculares à  $c$ . Logo, tem as características do ramo 3, ou seja não tem meia-voltas, reflexão em  $c$  e reflexões deslizantes e, além disso, é único. (veja a Figura 4.8).  $\square$

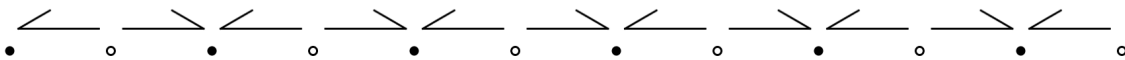


Figura 4.8: Grupo de simetria  $\mathcal{F}_1^2$

**Proposição 4.2.4.** *O grupo gerado por  $T$  e a reflexão  $R_c$  em relação ao centro  $c$ , que denotamos  $\mathcal{F}_1^1 = \langle T, R_c \rangle$ , é um grupo de friso e não contém meia-voltas e reflexões em retas perpendiculares ao centro  $c$ . Este grupo é o único que tem as características do ramo 6 da árvore de possibilidades e a Figura 4.9 mostra um padrão de friso ornamental tendo este grupo como seu grupo de simetrias.*

*Demonstração.* Suponhamos que o grupo tenha as características do ramo 6, isto é, tenha a translação mínima  $T$ , a reflexão em relação à reta  $c$  e reflexão deslizante  $\alpha$ .

Como  $\alpha$  pode ser expressa como o produto de uma translação  $T_1$  na direção de  $c$  e  $R_c$ , ou seja,  $\alpha = T_1 R_c$ , temos  $T_1 = \alpha R_c$  e, assim,  $T_1$  pertence ao grupo, pois  $\alpha$  e  $R_c$  pertencem. Assim, como as translações do grupo são as do grupo cíclico infinito gerado por  $T$ , concluímos que as reflexões deslizantes podem ser obtidas a partir de  $T$  e  $R_c$ .

Agora, consideremos o grupo gerado por  $T$  e  $R_c$ , denotado por  $\mathcal{F}_1^1 = \langle T, R_c \rangle$ .

Pela Proposição 2.5.10,  $TR_c = R_c T$  e, assim,  $\mathcal{F}_1^1$  é abeliano e todo elemento é da forma  $T^i R_c^j$ .

Se  $j$  é par, então  $T^i R_c^j$  é uma translação e se  $j$  for ímpar é uma reflexão deslizante. Assim,  $\mathcal{F}_1^1$  não tem ponto de simetria e não tem reflexão em reta perpendicular ao centro  $c$ . Além disso,  $\mathcal{F}_1^1$  é o único grupo que tem as características do ramo 6, pois como já vimos acima para um grupo com as características desse ramo, as reflexões deslizantes podem ser obtidas a partir de  $T$  e  $R_c$  (veja a Figura 4.9).  $\square$

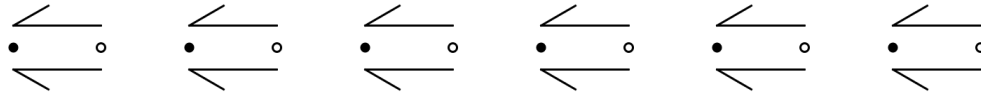


Figura 4.9: Grupo de simetria  $\mathcal{F}_1^1$

**Proposição 4.2.5.** *Seja  $A$  um ponto da reta  $c$ . O grupo gerado por  $T$  e a meia-volta  $H_A$ , que denotamos  $\mathcal{F}_2 = \langle T, H_A \rangle$ , é um grupo de friso e não contém reflexões e reflexões deslizantes. Este grupo é o único que tem as características do ramo 9 da árvore de possibilidades e a Figura 4.11 mostra um padrão de friso ornamental tendo este grupo como seu grupo de simetrias. Além disso,  $\mathcal{F}_2 = \langle T, H_A \rangle = \langle H_A, H_M \rangle$ , em que  $M$  é o ponto médio entre  $A$  e  $T(A) = A_1$ , ou seja, as meia-voltas  $H_A$  e  $H_M$  também geram o grupo.*

*Demonstração.* Suponhamos que o grupo tenha as características do ramo 9, isto é, tenha a translação mínima  $T$  e a meia-volta  $H_A$ . Como  $H_A$  e  $T$  pertencem ao grupo, então o produto  $H_A T$  também pertence. Como  $\overline{AM}$  é paralelo ao deslocamento e de comprimento igual à metade do deslocamento de  $T$ , pela Proposição 2.4.1, temos que

$$\begin{aligned} T &= H_A H_M \\ H_A T &= H_A H_A H_M \\ H_A T &= H_M. \end{aligned} \tag{4.7}$$



Logo,  $H_M$  também pertence ao grupo.

Como  $H_A$  e  $H_M$  pertencem ao grupo, então  $A$  e  $M$  são pontos de simetria. Pelo Teorema 4.1.3 as imagens dos pontos  $A$  e  $M$  pelas isometrias do grupo são pontos de simetria. Assim, as imagens desses pontos pelas translações  $T^i$ , ou sejam, os pontos  $A_i$  e  $M_i$ , também são pontos de simetria. Logo, as meia-voltas  $H_{A_i}$  e  $H_{M_i}$  pertencem ao grupo.

Agora suponhamos que exista um ponto  $P$  distinto dos pontos  $A_i$  e  $M_i$  tal que  $H_P$  esteja no grupo. Notemos que  $H_A H_P$  é uma translação e assim devemos ter  $H_A H_P = T^n$ , para algum  $n$  inteiro. E, como  $H_A H_P(A) = H_P(H_A(A)) = H_P(A)$  e  $T^n(A) = A_n$ , obtemos  $H_P(A) = A_n$ . Logo,  $P$  é o ponto médio de  $\overline{AA_n}$ , como vemos na Figura 4.10.

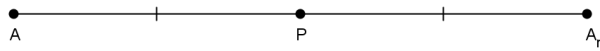


Figura 4.10: Ponto médio do segmento  $\overline{AA_n}$

Se  $n$  é par, então  $P$  é algum  $A_i$ , e se  $n$  é ímpar então  $P$  é algum  $M_i$ , o que contradiz o fato de  $P$  ser distinto dos  $A_i$ 's e dos  $M_i$ 's. Portanto, não existe meia-volta em pontos distintos dos  $A_i$ 's e  $M_i$ 's.

Consideremos o grupo gerado por  $T$  e  $H_A$ , denotado por  $\mathcal{F}_2 = \langle T, H_A \rangle$ .

Como, pela Equação 4.7,  $T^{-1}H_A = T^{-1}H_A^{-1} = (H_A T)^{-1} = H_M^{-1} = H_M = H_A T$ , temos  $T^{-1}H_A = H_A T$ . Assim, todo elemento do grupo  $\mathcal{F}_2$  é do tipo  $T^j H_A^k$ .

Se  $k$  é par  $T^j H_A^k$  é uma translação obtida a partir de  $T$ , pois  $H_A^2 = I$ , e se  $k$  é ímpar  $T^j H_A^k = T^j H_A$  e, como  $T^j$  pode ser expressa como o produto de uma meia-volta conveniente com centro  $X$  em um dos  $A_i$ 's ou em um dos  $M_i$ 's, e a meia-volta  $H_A$ , concluímos que  $T^j H_A^k = T^j H_A = H_X H_A H_A = H_X$ , ou seja,  $T^j H_A^k$  é uma meia-volta com centro em algum  $A_i$  ou em algum  $M_i$ . Portanto,  $T^j H_A^k$  é uma translação do grupo cíclico infinito gerado por  $T$  ou é uma meia-volta em algum  $A_i$  ou em algum  $M_i$ . Assim,  $\mathcal{F}_2$  não tem reflexões nem reflexões deslizantes e, portanto, tem as características do ramo 9 e é único.

Notemos também que  $\mathcal{F}_2 = \langle T, H_A \rangle = \langle H_A, H_M \rangle$  pela Equação 4.7. □

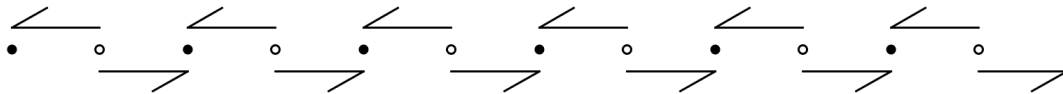


Figura 4.11: Grupo de simetria  $\mathcal{F}_2$

**Proposição 4.2.6.** *Seja  $A$  um ponto na reta  $c$ ,  $H_A$  a meia-volta de centro em  $A$  e  $R_p$  a reflexão em relação à reta  $p$  perpendicular à  $c$  passando pelo ponto médio do segmento  $\overline{AM}$ . O grupo gerado por  $T$ ,  $H_A$  e a reflexão  $R_p$ , que denotamos  $\mathcal{F}_2^2 = \langle T, H_A, R_p \rangle$ , é um grupo de friso e não*

contém a reflexão  $R_c$ . Este grupo é o único que tem as características do ramo 12 da árvore de possibilidades e a Figura 4.13 mostra um padrão de friso ornamental tendo este grupo como seu grupo de simetrias. Além disso,  $\mathcal{F}_2^2 = \langle T, H_A, R_p \rangle = \langle R_p, H_A \rangle = \langle \gamma, H_A \rangle$ , com  $\gamma$  a reflexão deslizante  $H_A R_p$ .

*Demonstração.* Suponhamos que o grupo tenha as características do ramo 12, e que tenha translação mínima  $T$ , meia-volta  $H_A$  e reflexão  $R_q$  em reta  $q$  perpendicular ao centro  $c$ .

Pelo Teorema 4.1.3, os pontos  $A_i$ 's e  $M_i$ 's são pontos de simetria e somente estes são possíveis, pois se existisse uma meia-volta em um ponto diferente dos  $A_i$ 's e  $M_i$ 's, o grupo teria uma translação mais curta que a translação mínima  $T$ , o que não é possível, já que o produto de duas meia-voltas é uma translação.

Notemos que  $q$  não pode ser uma das retas  $a_i$ 's ou  $m_i$ 's, que passam pelos pontos  $A_i$ 's ou  $M_i$ 's, respectivamente, pois neste caso, como  $H_{A_i} = R_{a_i} R_c$  e  $H_{M_i} = R_{m_i} R_c$ , teríamos que  $R_c$  estaria no grupo e estamos supondo que o grupo não tem a reflexão em  $c$ . De modo análogo, concluímos que  $q \neq a$ .

Também, pelo Teorema 4.1.3, o ponto  $R_q(A)$  é um ponto de simetria. Logo, existem duas possibilidades: a reta  $q$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AA_n}$  para algum inteiro  $n$ , ou a reta  $q$  é a mediatriz do segmento  $\overline{AM_n}$  para algum inteiro  $n$ . Como a mediatriz de  $\overline{AA_n}$  é um ponto  $A_i$  ou  $M_i$ , e as reflexões nas retas  $a_i$  e  $m_i$  não ocorrem, então a reta  $p$  deve ser a mediatriz do segmento  $\overline{AM_n}$  para algum  $n$ . Pelo Teorema 4.1.4, se  $R_q$  pertence ao grupo, sendo  $q$  a mediatriz de  $\overline{AM_n}$ , então a reflexão em relação à mediatriz de  $\overline{AM}$  pertence ao grupo.

Seja  $p$  a mediatriz de  $\overline{AM}$ , como mostra a Figura 4.12.

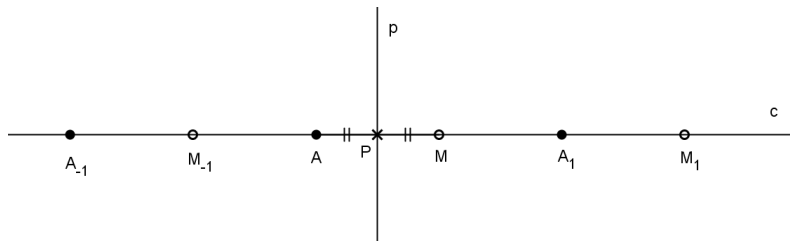


Figura 4.12: Mediatriz de  $\overline{AM}$

Agora, suponhamos uma reflexão deslizante em um grupo com as características do ramo 12. De modo análogo aos casos 1 e 2 analisados na demonstração da Proposição 4.2.2 concluímos que é do tipo  $\gamma^i$ , com  $i$  inteiro, sendo  $\gamma$  a reflexão deslizante que leva  $A$  em  $M$  e tem eixo o centro  $c$ .

Por outro lado, o produto  $H_A R_p$  está no grupo e, pela Proposição 2.5.6, este produto é uma reflexão deslizante. Além disso, como  $H_A R_p(A) = R_p(H_A(A)) = R_p(A) = M$ , temos  $\gamma = H_A R_p$ .

Consideremos o grupo gerado por  $T$ ,  $H_A$  e  $R_p$ , denotado por  $\mathcal{F}_2^2 = \langle T, H_A, R_p \rangle$ .

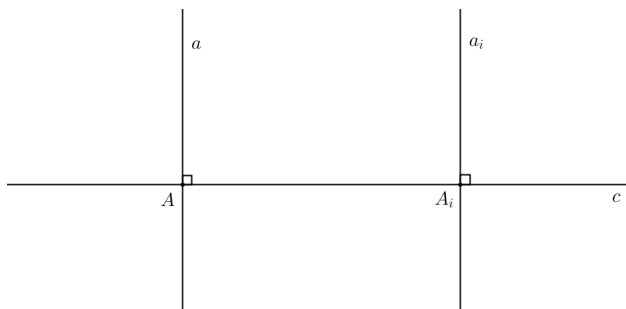
$\mathcal{F}_2^2$  é um grupo de friso e é o único que tem todas as características do ramo 12. Além disso, como  $\gamma^2 = T$  e  $\gamma = H_A R_p$ , temos  $\mathcal{F}_2^2 = \langle T, H_A, R_p \rangle = \langle R_p, H_A \rangle = \langle \gamma, H_A \rangle$ .  $\square$

Figura 4.13: Grupo de simetria  $\mathcal{F}_2^2$ 

**Proposição 4.2.7.** *Seja  $A$  um ponto na reta  $c$  e  $H_A$  a meia-volta de centro em  $A$ . O grupo gerado por  $T$ ,  $H_A$  e a reflexão  $R_c$ , que denotamos  $\mathcal{F}_2^1 = \langle T, H_A, R_c \rangle$ , é um grupo de friso. Este grupo é o único que tem as características do ramo 16 da árvore de possibilidades e a Figura 4.16 mostra um padrão de friso ornamental tendo este grupo como seu grupo de simetrias. Além disso,  $\mathcal{F}_2^1 = \langle T, H_A, R_c \rangle = \langle T, R_a, R_c \rangle = \langle R_a, R_c, R_m \rangle$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que o grupo tenha as características do ramo 16.

Notemos que a meia-volta  $H_A$  pode ser escrita como produto de duas reflexões em retas perpendiculares, como podemos verificar no Corolário 2.5.3. Consideremos a reta  $a$  perpendicular à reta  $c$  no ponto  $A$ , como mostra a Figura 4.14.

Figura 4.14: Retas  $a$  e  $c$  perpendiculares no ponto  $A$ 

Assim  $H_A = R_a R_c$ . Portanto, o grupo também contém a reflexão na reta  $a$ , perpendicular à reta  $c$ . Logo, pelo teorema 4.1.4, o grupo contém todas as reflexões nas retas  $a_i$ 's.

Pela Proposição 2.5.8, uma translação pode ser dada pelo produto de duas reflexões em retas paralelas cuja distância é igual à metade do deslocamento da translação. Consideremos a reta  $m$  perpendicular à reta  $c$  no ponto  $M$ , como mostra a Figura 4.15.

A translação mínima  $T$  tem deslocamento igual a  $AA_1$  e  $M$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AA_1}$ , isto é,  $AM = MA_1$  e  $AA_1 = AM + MA_1$ . Logo, a distância entre as retas  $a$  e  $m$  é igual à metade do deslocamento de  $T$ . Assim  $T = R_a R_m$ . Portanto, o grupo também contém a reflexão na reta  $m$  perpendicular à reta  $c$ . Assim, novamente pelo Teorema 4.1.4, o grupo contém todas as reflexões nas retas  $m_i$ 's.

O grupo não pode ter reflexão em reta  $l$  perpendicular à  $c$  diferente das  $a_i$ 's e  $m_i$ 's, pois, caso contrário, o grupo teria uma translação de deslocamento menor do que o deslocamento de  $T$ , o que não é possível.

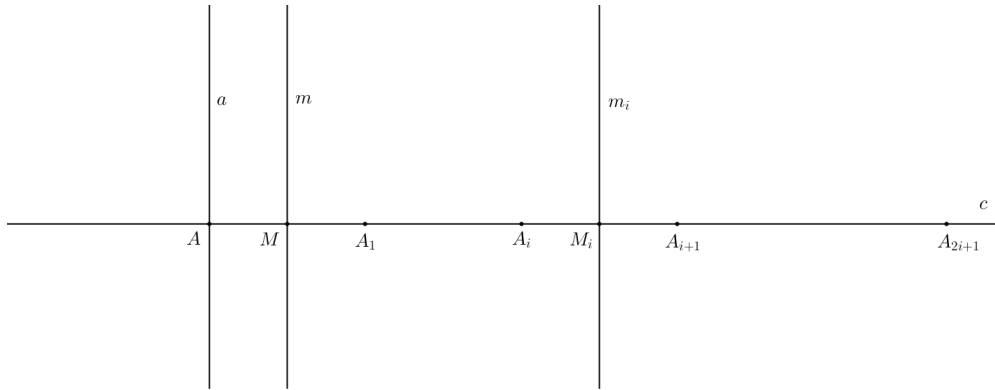


Figura 4.15: Retas  $m$  e  $c$  perpendiculares no ponto  $M$

Agora, suponhamos uma reflexão deslizante  $\alpha$  no grupo. Como a reflexão deslizante tem eixo a reta  $c$ , então é expressa pelo produto de uma translação  $T_1$  na direção de  $c$  e  $R_c$ , ou seja,  $\alpha = T_1 R_c$ . Logo, como  $R_c$  pertence ao grupo, concluímos que  $T_1$  também pertence, sendo, portanto, uma translação do grupo cíclico gerado por  $T$ . Assim, as reflexões deslizantes do grupo são obtidas a partir de  $R_c$  e  $T$ .

Consideremos  $\mathcal{F}_2^1 = \langle T, H_A, R_c \rangle$ . Este grupo é um grupo de friso e, pelo que vimos, é o único grupo que tem todas as características do ramo 16.

Pelo Corolário 2.5.5 e pelas Proposições 2.5.10 e 2.5.11 temos que  $R_c T = T R_c$ ,  $H_A R_c = R_c H_A$  e  $H_A T = T^{-1} H_A$ . Assim, todo elemento de  $\mathcal{F}_2^1$  é da forma  $T^i H_A^j R_c^k$ .

Além disso, como  $H_A = R_a R_c$ , o grupo  $\mathcal{F}_2^1$  também é gerado por  $T$ ,  $R_a$  e  $R_c$ . E, como  $T = R_a R_m$ ,  $\mathcal{F}_2^1$  também é gerado por  $R_a$ ,  $R_c$ , e  $R_m$ .

Portanto,  $\mathcal{F}_2^1 = \langle T, H_A, R_c \rangle = \langle T, R_a, R_c \rangle = \langle R_a, R_c, R_m \rangle$ . □

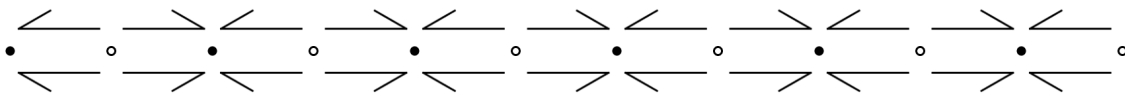


Figura 4.16: Grupo de simetria  $\mathcal{F}_2^1$

Pelas 7 últimas proposições, temos o teorema de classificação de grupos de frisos.

**Teorema 4.2.8.** *Seja  $\mathcal{F}$  um grupo de friso com centro  $c$  cujas translações formam o grupo gerado pela translação  $T$ . Se  $\mathcal{F}$  contém uma meia-volta, suponha que contenha  $H_A$ ; se  $\mathcal{F}$  contém uma reflexão em uma reta perpendicular à  $c$ , suponha que  $\mathcal{F}$  contenha  $R_a$  com a perpendicular à  $c$ . Seja  $\gamma$  a reflexão deslizante tal que  $\gamma^2 = T$ . Então,  $\mathcal{F}$  é um dos sete grupos distintos definidos como seguem:*

$$\mathcal{F}_1 = \langle T \rangle, \quad \mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle, \quad \mathcal{F}_1^2 = \langle T, R_a \rangle, \quad \mathcal{F}_1^1 = \langle T, R_c \rangle,$$

$$\mathcal{F}_2 = \langle T, H_A \rangle, \quad \mathcal{F}_2^2 = \langle \gamma, H_A \rangle, \quad \mathcal{F}_2^1 = \langle T, H_A, R_c \rangle.$$

Na Tabela 4.1 apresentamos os sete tipos de grupos de frisos e as principais características de cada um deles.

Quando um grupo de isometrias contém duas translações linearmente independentes, tal grupo é chamado de grupo cristalográfico. Para um estudo aprofundado sobre cristalografia, remetemos o leitor a Martin [6].

### 4.3 Identificação do grupo de friso

A identificação do grupo de friso pode ser feita através de algumas perguntas. A Figura 4.17 mostra o algoritmo usado para determinar o grupo de simetria de frisos. Observe que cada um dos ramos do algoritmo na Figura 4.17 corresponde a um ramo dos 7 possíveis da árvore de possibilidades da Figura 4.4 e na mesma ordem.

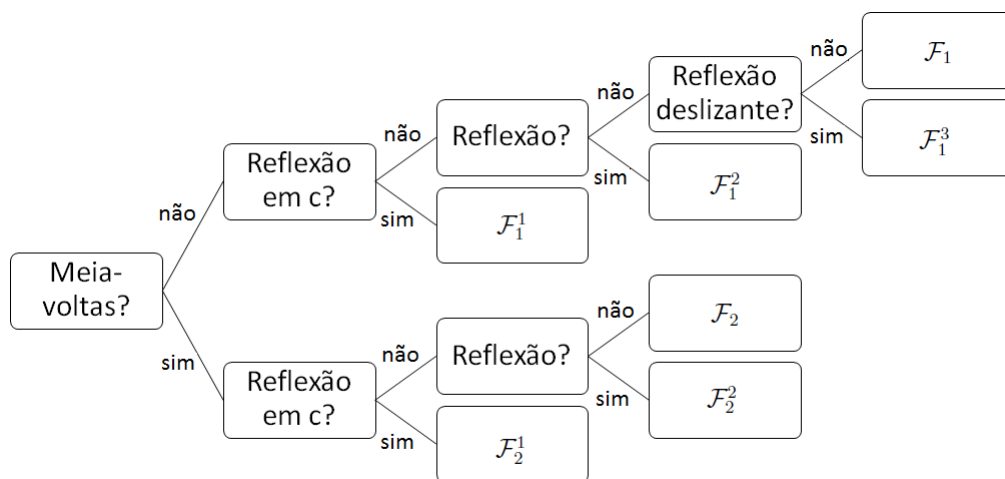


Figura 4.17: Algoritmo para determinar o grupo de simetria de frisos.

Como exemplo de como utilizar o algoritmo, vamos determinar o grupo de simetrias do friso da Figura 4.18. O friso tem meia-volta, tem reflexão em  $c$  e tem reflexão em reta perpendicular a  $c$ , portanto, pelo algoritmo, o grupo de simetria do friso é  $\mathcal{F}_2^1$ .

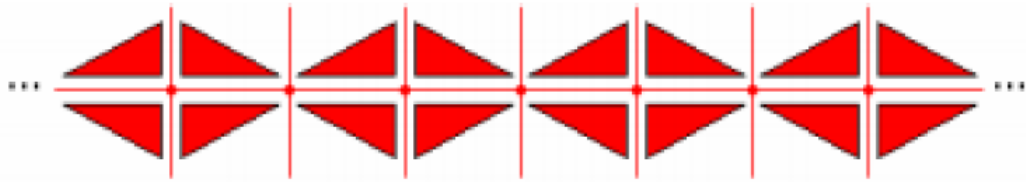


Figura 4.18: Exemplo

As sete figuras a seguir são exemplos de frisos decorativos feitos com um mesmo motivo. A Figura 4.26 mostra alguns exemplos de frisos decorativos com motivos diversos.

Figura 4.19: Grupo  $\mathcal{F}_1$ Figura 4.20: Grupo  $\mathcal{F}_1^3$ Figura 4.21: Grupo  $\mathcal{F}_1^2$ Figura 4.22: Grupo  $\mathcal{F}_1^1$

Figura 4.23: Grupo  $\mathcal{F}_2$ Figura 4.24: Grupo  $\mathcal{F}_2^2$ Figura 4.25: Grupo  $\mathcal{F}_2^1$

Tabela 4.1: Características dos grupos de frisos

Grupo	Geradores	Características
$\mathcal{F}_1$	Uma translação.	É um grupo cíclico infinito. <u>Não tem</u> : ponto de simetria; reta de simetria; reflexão deslizante.
$\mathcal{F}_1^3$	Uma reflexão deslizante.	É um grupo cíclico infinito. <u>Tem</u> : reflexão deslizante. <u>Não tem</u> : ponto de simetria; reta de simetria.
$\mathcal{F}_1^2$	Uma translação e uma reflexão em reta perpendicular ao centro ou Duas reflexões paralelas e perpendiculares ao centro.	<u>Tem</u> : reta de simetria perpendicular ao centro. <u>Não tem</u> : ponto de simetria; reta de simetria em relação ao centro; reflexão deslizante.
$\mathcal{F}_1^1$	Uma translação e uma reflexão em relação ao centro.	<u>Tem</u> : reflexão deslizante; reta de simetria em relação ao centro. <u>Não tem</u> : ponto de simetria; reta de simetria perpendicular ao centro.
$\mathcal{F}_2$	Uma translação e uma meia-volta ou Duas meia-voltas.	<u>Tem</u> : ponto de simetria. <u>Não tem</u> : reta de simetria; reflexão deslizante.
$\mathcal{F}_2^2$	Uma translação, uma meia-volta e uma reflexão em reta perpendicular ao centro ou Uma reflexão em reta perpendicular ao centro e uma meia-volta ou Uma reflexão deslizante e uma meia-volta.	<u>Tem</u> : ponto de simetria; reta de simetria perpendicular ao centro; reflexão deslizante <u>Não tem</u> : reta de simetria em relação ao centro.
$\mathcal{F}_2^1$	Uma translação, uma meia-volta e uma reflexão em relação ao centro ou Uma translação e duas reflexões em retas perpendiculares ou Uma reflexão em relação ao centro e duas reflexões em retas perpendiculares ao centro.	<u>Tem</u> : ponto de simetria; reta de simetria em relação ao centro; reta de simetria perpendicular ao centro; reflexão deslizante.



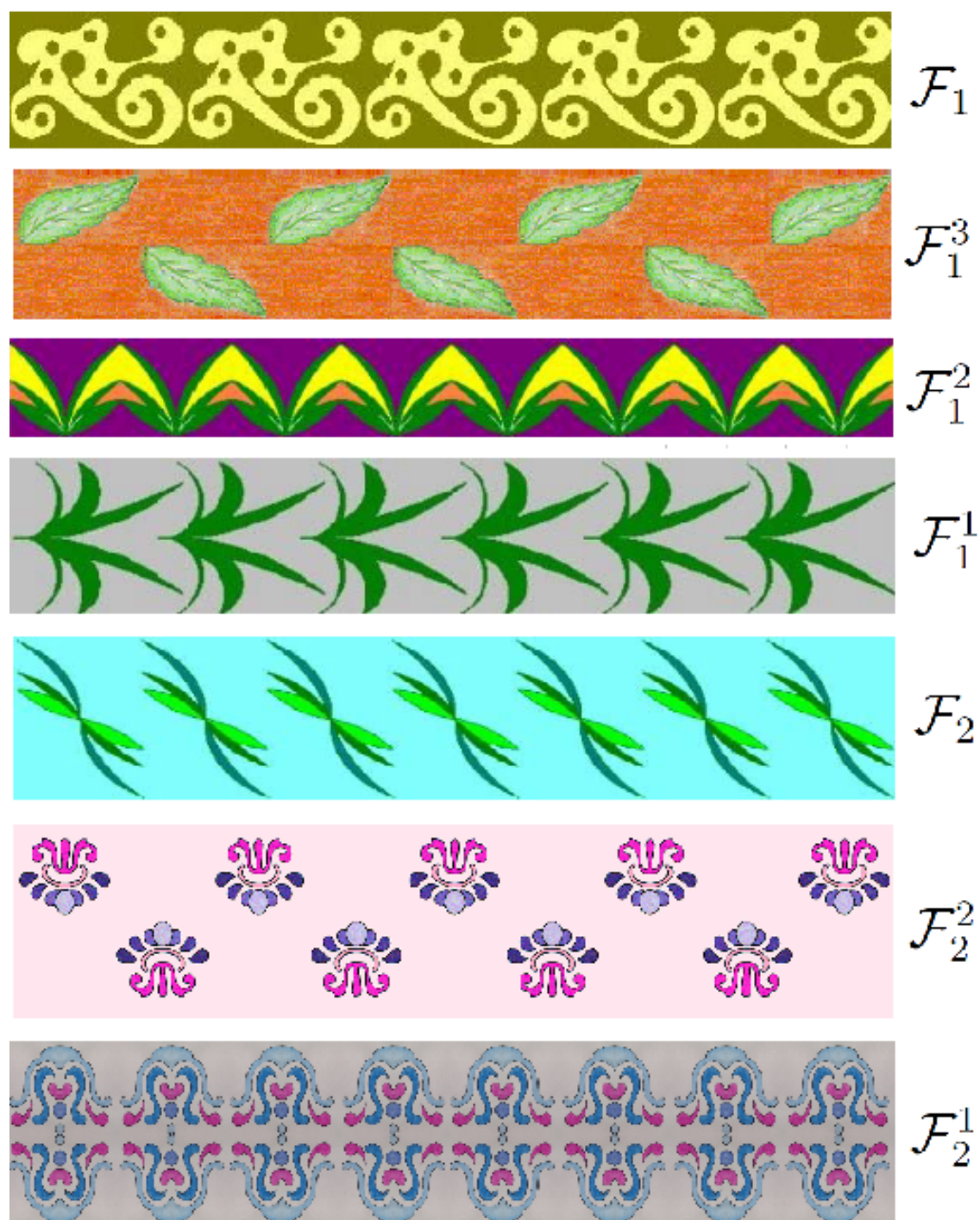


Figura 4.26: Frisos decorativos



## Sequências de atividades

De acordo com Veloso [14], a existência de padrões nos objetos produzidos pelas várias culturas, como cerâmica, tapeçaria e renda, ou ainda nos revestimentos das paredes, ou nas calçadas, é um fator importante na decisão de alguns professores de fazer trabalhos com seus alunos acerca deste tipo de regularidades geométricas. Os exemplos abundam logo à saída da escola, e o estudo e construção de padrões atrai e motiva os alunos, porque apela fortemente ao seu senso estético e à sua atividade.

Neste capítulo apresentaremos sugestões de atividades cujos objetivos principais são o estudo das isometrias e o estudo do grupo de simetria de ornamentos limitados e grupos de frisos. As atividades envolvendo grupos de simetria desenvolvem a ideia de grupos, ainda que o aluno não conheça formalmente tal estrutura. A ideia de explorar a estrutura de grupos através do grupo de simetria é sugerida em Rose [11]. Apresentaremos sequências de atividades, bem como a metodologia a ser utilizada pelo professor. Ressaltamos que é necessário que o professor faça as adaptações pertinentes à idade e nível de aprendizagem de seus alunos.

Apresentaremos sete sequências de atividades. As três primeiras sequências, foram desenvolvidas a partir de estudos acerca do tema grupos de simetria e foram aplicadas na educação básica, como veremos no Capítulo 6. As demais sequências apresentadas neste capítulo, foram adaptadas de Rezende e Rodrigues [9]. Tais atividades são desenvolvidas de forma lúdica podendo ser utilizadas no Ensino Fundamental, Ensino Médio ou Ensino Superior fazendo as adequações necessárias a cada nível de ensino.

## 5.1 Grupo de simetria de um ornamento limitado

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 5 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

### Materiais utilizados:

- Imagens que retratem a simetria na natureza.
- Espelho, régua, lápis-de-cor, e cópias do Apêndice B.

### Recursos multimídia:

- Projetor de slides (opcional).

### Objetivos:

- Recordar os conceitos de geometria plana: ponto, reta, semirreta e ângulos;
- Apresentar o conceito de simetria;
- Estabelecer a noção de conjuntos finitos e infinitos;
- Estabelecer noção das propriedades que um determinado conjunto deve satisfazer para ser um grupo;
- Identificar o grupo de simetria de um ornamento limitado.

### Descrição e metodologia das atividades propostas

#### Atividade 1

*Orientações para o professor:*

- *Expor imagens que retratem a simetria na natureza (sugestões no Apêndice A). As imagens podem ser mostradas através de slides ou cartazes.*
- *Explorar o conhecimento prévio dos alunos sobre simetria em cada imagem apresentada.*
- *Explicar de maneira informal os conceitos de figura invariante e de simetria.*

#### Atividade 2

*Orientações para o professor:*

- *Para realização desta atividade, sugerimos que seja escolhida uma figura do grupo diedral  $D_4$ , pois acreditamos que tal escolha pode facilitar o aprendizado, já que as rotações deste grupo são múltiplos de  $90^\circ$  (sugestão Apêndice B).*
- *Sugerimos que o professor oriente a pintura do ornamento a fim de garantir que o mesmo seja*

*simétrico em relação à forma e às cores.*

**Roteiro:**

- Você recebeu uma folha onde estão impressos um ornamento limitado, um transferidor e uma instrução. Pinte o ornamento e recorte-o para colocá-lo sobre o transferidor, como mostra a instrução.
- Use um espelho e/ou uma régua para encontrar as retas de simetria do ornamento.
- Registre as reflexões encontradas.
- Fixe os centros do ornamento e do transferidor, como mostra a instrução.
- Faça rotações do ornamento sobre o transferidor e identifique quais rotações deixam o mesmo invariante. Registre as rotações encontradas.
- O conjunto formado pelas reflexões e rotações que deixam o ornamento invariante é chamado conjunto de simetrias do ornamento. Denotaremos esse conjunto por  $S$ .

**Atividade 3**

*Orientações para o professor:*

- Nesta atividade o aluno deverá perceber intuitivamente as propriedades que um conjunto deve satisfazer para ter a estrutura algébrica de grupo.
- Sugerimos que o professor oriente a escolha do ponto onde serão aplicadas as composições de isometrias (reflexões e rotações), para que seja mais simples a visualização das mesmas.
- Ao trabalhar a última tarefa desta atividade (relacionada a associatividade), deve ficar claro para o aluno que a composição não é comutativa. Por exemplo, considerando o Exemplo 5 do Capítulo 3 e supondo que foram escolhidas as simetrias  $R_1$ ,  $R_2$  e  $S$ , a composição dessas três isometrias de duas maneiras diferentes é dada como segue:

$$(R_1 \circ R_2) \circ S = S \circ S = S^2 \text{ e } R_1 \circ (R_2 \circ S) = R_1 \circ R_3 = S^2.$$

**Roteiro:**

- Escolha duas simetrias do conjunto  $S$  e aplique-as em um ponto pertencente ao ornamento. Registre suas conclusões.
- Escolha uma reflexão do conjunto  $S$  e aplique-a duas vezes em um ponto pertencente ao ornamento. Faça o mesmo com as outras reflexões do conjunto  $S$ . Registre suas conclusões.
- Faça uma rotação de  $360^\circ$  em um ponto pertencente ao ornamento. Registre suas conclusões.
- O conjunto  $S$  tem a rotação de  $180^\circ$ ? Em caso afirmativo, aplique-a duas vezes em um ponto do ornamento. Registre suas conclusões.
- Entre as demais rotações do conjunto  $S$ , procure duas, que aplicadas em um ponto, voltem ao mesmo ponto. Registre suas conclusões.
- Escolha três simetrias do conjunto  $S$ . Aplique-as em um ponto do ornamento de duas maneiras diferentes. Escolha outras três simetrias do conjunto  $S$  e faça o mesmo. Registre suas conclusões.

## 5.2 Construir um ornamento a partir de um motivo

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 4 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

### Materiais utilizados:

- Papel sulfite;
- Lápis, caneta e borracha;
- Espelho;
- Régua;
- Cópias do Apêndice C.

### Objetivos:

- Fixar as definições de reflexão em relação a uma reta e de rotação;
- Construir um ornamento limitado a partir de um motivo (veja a Figura 6.11);
- Identificar o grupo de simetria de um ornamento limitado.

### Descrição e metodologia das atividades propostas

#### Atividade 1

*Orientações para o professor:*

- Divida a turma em duplas e entregue para cada dupla uma folha de papel sulfite e uma cópia do Apêndice C. Apresentamos o Apêndice C como sugestão. A Atividade pode ser feita com um outro molde, desde que o mesmo tenha como ângulo central um divisor de  $360^\circ$ .

#### Roteiro:

- Você recebeu uma folha de papel sulfite e uma folha onde estão impressos um molde e uma instrução. Recorte o molde que será usado na construção de um ornamento limitado.
- Fixe o centro de rotação do molde na folha de papel sulfite, como mostra a instrução.
- Desenhe o molde na folha de papel sulfite.
- Rotacione o molde e continue desenhando até completar o ornamento limitado.

#### Atividade 2

*Orientações para o professor:*

- *Explicar de maneira informal os conceitos de figura invariante e de simetria.*

**Roteiro:**

- Use um espelho e/ou uma régua para buscar as possíveis retas de simetria do ornamento desenhado na atividade 1.
- Você encontrou retas de simetria?
- Registre suas conclusões.
- Fixe os centros do ornamento e do transferidor. Use o transferidor que você recebeu na sequência de atividades “Grupo de simetria de um ornamento limitado”.
- Faça rotações do ornamento sobre o transferidor para identificar quais rotações deixam o mesmo invariante.
- Registre as rotações encontradas.
- O conjunto formado pelas rotações que deixam o ornamento invariante é chamado conjunto de simetrias do ornamento. Denotaremos esse conjunto por  $R$ .

**Atividade 3**

*Orientações para o professor:*

- *Nesta atividade o aluno deverá perceber intuitivamente as propriedades que um conjunto deve satisfazer para ter a estrutura algébrica de grupo.*
- *Sugerimos que o professor oriente a escolha do ponto onde serão aplicadas as composições de isometrias (reflexões e rotações), para que seja mais simples a visualização das mesmas.*
- *Ao trabalhar a última tarefa desta atividade (relacionada a associatividade), deve ficar claro para o aluno que a composição não é comutativa.*

**Roteiro:**

- Escolha duas simetrias do conjunto  $R$  e aplique-as em um ponto pertencente ao ornamento.
- Registre suas conclusões.
- Faça uma rotação de  $360^\circ$  em um ponto pertencente ao ornamento.
- Registre suas conclusões.
- O conjunto  $R$  tem a rotação de  $180^\circ$ ? Em caso afirmativo, aplique-a duas vezes em um ponto do ornamento.
- Registre suas conclusões.
- Entre as demais rotações do conjunto  $R$ , procure duas, que aplicadas em um ponto, voltem ao mesmo ponto. Registre suas conclusões.
- Escolha três simetrias do conjunto  $R$ . Aplique-as em um ponto do ornamento de duas maneiras diferentes. Escolha outras três simetrias do conjunto  $R$  e faça o mesmo.
- Registre suas conclusões.

## 5.3 Criar frisos utilizando o GeoGebra

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 5 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

### Materiais utilizados:

- Cópias do Apêndice D.

### Recursos multimídia:

- Laboratório de informática.

- *Software* GeoGebra [2].

**Observação:** A proposta para esta sequência, são atividades a serem realizadas com o uso do *software* GeoGebra.

### Objetivos:

- Definir as isometrias: translação, rotação, reflexão em relação a uma reta e reflexão deslizante;
- Apresentar a definição de frisos;
- Mostrar através de exemplos os sete grupos de frisos;
- Apresentar algumas ferramentas do *software* GeoGebra;
- Construir frisos decorativos usando o *software* GeoGebra.

### Descrição e metodologia das atividades propostas

#### Atividade 1

*Orientações para o professor:*

- As cópias da figura a ser usada na explicação das isometrias devem ser confeccionadas em duas faces, como mostra o Apêndice D, para que seja possível fazer as reflexões.
- Apresentar o conceito de vetor como “segmento de reta que apresenta direção e sentido”.
- Movimentando figuras (sugestão no Apêndice D) na lousa, apresentar a definição das isometrias translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante.

#### Atividade 2

*Orientações para o professor:*

- Apresentar o conceito de frisos que pode ser dado informalmente como “uma tira infinita que apresenta alguma isometria”.



- Exibir imagens de ambientes contendo frisos decorativos. As imagens podem ser apresentadas usando slides ou cartazes. Durante a exibição das imagens o professor deve explorar as isometrias presentes em cada um.
- Expor um exemplo de cada tipo de friso e explorar as isometrias presentes em cada um. Sugerimos que os exemplos de grupos de frisos a serem apresentados sejam feitos com motivos iguais. Mostraremos um exemplo no próximo capítulo.
- Explicar que qualquer friso apresenta as mesmas isometrias que algum dos sete tipos de frisos exibidos.

### Atividade 3

Orientações para o professor:

- Nesta atividade o aluno deverá explorar o software GeoGebra, a fim de conhecer algumas de suas ferramentas. Sugerimos que o professor motive os alunos a selecionar outras ferramentas, diferente das sugeridas nesta atividade, para que os mesmos se familiarizem com o software.

### Roteiro:

- Abra o software GeoGebra. Ao abrir o GeoGebra aparece o menu, a barra de ferramentas, a janela de visualização e a janela de álgebra, veja na Figura 5.1.

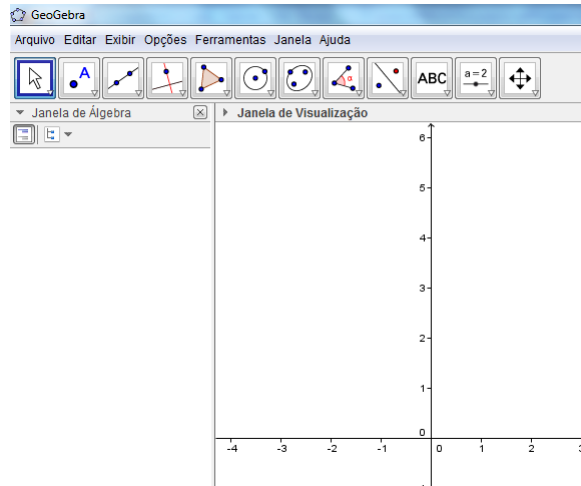


Figura 5.1: Visualização do GeoGebra

- Como selecionar uma ferramenta: a barra de ferramentas, Figura 5.2, é composta por 12 caixas de ferramentas. Para abrir uma caixa de ferramentas, clique na seta pequena localizada em seu canto inferior direito. Em seguida selecione a ferramenta desejada.

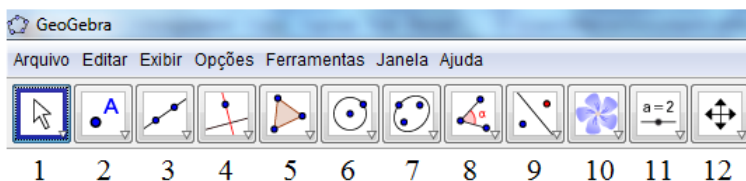


Figura 5.2: Barra de ferramentas do GeoGebra

- Selecione a ferramenta *segmento*.

Como fazer: Clique na seta localizada no canto inferior direito da caixa de ferramentas número 3 e selecione a ferramenta *segmento*.

- Selecione a ferramenta *polígono regular*.

Como fazer: Clique na seta localizada no canto inferior direito da caixa de ferramentas número 5 e selecione a ferramenta *polígono regular*.

#### Atividade 4

*Orientações para o professor:*

*Sugerimos nesta atividade a construção de um friso decorativo do grupo de friso  $\mathcal{F}_1$ , que contém apenas translações. O professor pode construir frisos decorativos com os outros tipos de frisos.*

#### Roteiro:

- Para criar um friso decorativo com o recurso do *software* GeoGebra, siga os passos abaixo:

1. Inserir uma figura

Como fazer: Abra a caixa de ferramentas número 10 e selecione a ferramenta *inserir imagem*. Em seguida clique na janela de visualização e selecione a imagem desejada.

2. Criar um vetor

Como fazer: Abra a caixa de ferramentas de número 3 e selecione a ferramenta *vetor*. Em seguida, na janela de visualização, clique em um ponto que será a origem do vetor e clique em outro ponto que será a extremidade.

3. Transladar a figura por um vetor

Como fazer: Abra a caixa de ferramentas de número 9 e selecione a ferramenta *translação por um vetor*. Em seguida selecione a figura a ser transladada e depois selecione o vetor criado no passo 2.

4. Repetir translações

Como fazer: Repita o passo 3 até obter o friso desejado.

## 5.4 Translação

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 3 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

**Recursos multimídia:** *Software* GeoGebra [2].

**Observação:** A proposta para esta sequência, são atividades a serem realizadas com o uso do *software* GeoGebra.

### Objetivos:

- Mostrar que um segmento  $\overline{AB}$  e sua imagem  $\overline{A'B'}$  pela translação  $T_{\vec{v}}$ , são paralelas e suas medidas são iguais;
- Mostrar que o comprimento do vetor  $\vec{v}$  utilizado para fazer a translação é igual ao comprimento dos segmentos  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$ ;
- Mostrar que os segmentos  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$  são ambos paralelos ao vetor  $\vec{v}$ .

### Descrição e metodologia das atividades propostas

#### Atividade 1:

##### Roteiro:

- Desenhe um segmento  $\overline{AB}$  e um vetor  $\vec{v}$ , como na Figura 5.3.

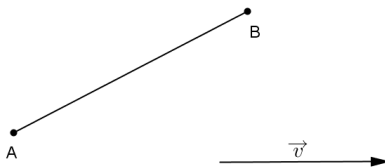


Figura 5.3: Segmento  $\overline{AB}$  e vetor  $\vec{v}$

- Utilizando a ferramenta *translação por um vetor*, construa a translação  $\overline{A'B'}$ , do segmento  $\overline{AB}$ , pelo vetor  $\vec{v}$ .
- Compare as figuras e registre suas observações. Use a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro* para encontrar medidas de segmentos e distância entre pontos.

- O que pode ser dito com relação aos segmentos  $\overline{AA'}$  e  $\overline{BB'}$ ? Anote suas conclusões.

### Atividade 2:

#### Roteiro:

- Desenhe um triângulo  $ABC$  e um vetor  $\vec{v}$ , como na Figura 5.4.

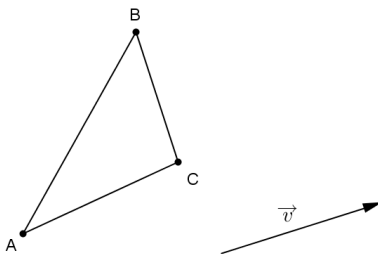


Figura 5.4: Triângulo  $ABC$  e vetor  $\vec{v}$

- Utilizando a ferramenta *translação por um vetor*, construa a translação  $A'B'C'$ , do triângulo  $ABC$  pelo vetor  $\vec{v}$ .
- Meça os lados dos dois triângulos. Para isso, use a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro*. Compare as medidas e escreva suas conclusões.
- Meça as distâncias entre os pontos  $A$  e  $A'$ ,  $B$  e  $B'$ , e entre  $C$  e  $C'$ . Use a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro*.
- Quais as relações entre estas medidas e o comprimento do vetor  $\vec{v}$ ? Registre suas conclusões.
- Movimente os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
- Repita todas as etapas desta atividade para o novo triângulo formado pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e veja se suas conclusões continuam as mesmas.
- Calcule os perímetros dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  e compare os resultados.
- Calcule as áreas das regiões triangulares determinadas pelos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  e compare os resultados. Use a ferramenta *área*.

### Atividade 3:

#### Roteiro:

- Desenhe uma circunferência  $\mathcal{C}$  de centro  $O$  e um vetor  $\vec{v}$ , como na Figura 5.5.
- Utilizando a ferramenta *translação por um vetor*, construa a translação  $\mathcal{C}'$  de centro  $O'$ , da circunferência  $\mathcal{C}$  pelo vetor  $\vec{v}$ .
- Meça a distância entre  $O$  e  $O'$  e compare com o comprimento do vetor  $\vec{v}$  utilizado para fazer a translação. Use a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro*. Anote suas conclusões.
- Compare os comprimentos das duas circunferências. Use a ferramenta *distância, comprimento*

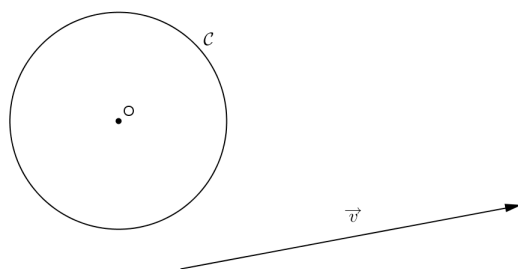


Figura 5.5: Circunferência  $\mathcal{C}$  e vetor  $\vec{v}$

ou perímetro. Escreva seus resultados.

- Considere  $A$  um ponto qualquer na circunferência  $\mathcal{C}$ . Faça a translação  $A'$  do ponto  $A$  considerando o mesmo vetor  $\vec{v}$  utilizado para fazer a translação da circunferência  $\mathcal{C}$ .
- Qual a relação entre o ponto  $A'$  e a circunferência  $\mathcal{C}'$ ?
- Movimente o ponto  $A$  na circunferência  $\mathcal{C}$  e observe as mudanças na construção feita e nas medidas tomadas. Anote suas conclusões.
- Meça as áreas dos círculos determinados por  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  e compare-as. Use a ferramenta *área*. Anote seus resultados.

#### Atividade 4:

##### Roteiro:

- Na *janela de visualização* do GeoGebra, criar um vetor  $\vec{v}$  e, usando a ferramenta *inserir imagem* inserir uma figura  $F$ .
- Usando a ferramenta *translação por um vetor*, faça a translação  $F'$  da figura  $F$  pelo vetor  $\vec{v}$ , como na Figura 5.6.

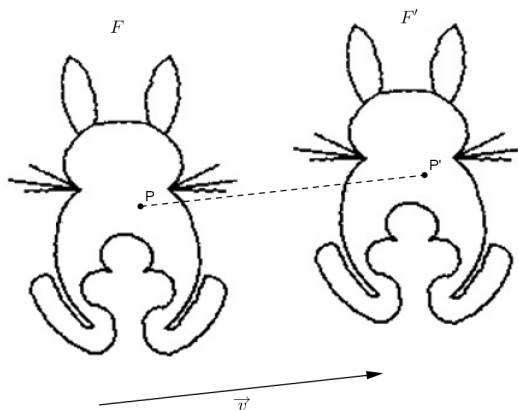


Figura 5.6: Translação da figura  $F$  pelo vetor  $\vec{v}$

- Formalização de conceitos:

Uma translação é determinada por uma direção, sentido e uma distância, que podem ser especificadas por um vetor, onde a distância é o comprimento do vetor e a direção é paralela ao vetor (e sentido do vetor).

Assim, a imagem  $F'$  de uma figura  $F$  pela translação é obtida deslocando-se a figura  $F$  paralelamente à direção e no sentido dados pelo vetor, e cada ponto  $P$  da figura  $F$  é deslocado, paralelamente ao vetor  $\vec{v}$  e no sentido de  $\vec{v}$ , para o ponto  $P'$ , com a distância de  $P$  a  $P'$  igual ao comprimento de  $\vec{v}$ .

## 5.5 Rotação

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 3 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

### Recursos multimídia:

- *Software* GeoGebra [2].

**Observação:** A proposta para esta sequência, são atividades a serem realizadas com o uso do *software* GeoGebra.

### Objetivos:

- Mostrar que o segmento  $\overline{AB}$  e sua imagem  $\overline{A'B'}$  pela rotação  $R_{O\theta}$ , tem medidas iguais.
- Mostrar que os ângulos  $\widehat{AOA'}$  e  $\widehat{BOB'}$  são congruentes.
- Observar que os segmentos  $\overline{AO}$  e  $\overline{A'O}$  tem medidas iguais.

### Descrição e metodologia das atividades propostas

#### Atividade 1:

##### Roteiro:

- Na *janela de visualização* do GeoGebra, desenhe um segmento  $\overline{AB}$  e marque um ponto  $O$  não pertencente ao segmento, como na Figura 5.7
- Usando a ferramenta *rotação em torno de um ponto*, construa a imagem  $\overline{A'B'}$ , pela rotação do segmento  $\overline{AB}$  de um ângulo de  $60^\circ$ , ao redor do ponto  $O$ , no sentido anti-horário.
- Compare as figuras e registre suas observações.

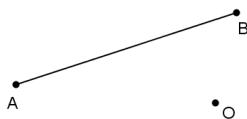


Figura 5.7: Segmento  $\overline{AB}$  e ponto  $O$

- Meça as distâncias entre os pontos  $A$  e  $O$ ,  $A'$  e  $O$ ,  $B$  e  $O$  e entre  $B'$  e  $O$ . Use a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro*.
- Compare essas medidas. Escreva suas conclusões.
- Meça os ângulos  $A\hat{O}A'$  e  $B\hat{O}B'$ . Use a ferramenta *ângulos*. - O que pode ser dito com relação às medidas dos ângulos  $A\hat{O}A'$  e  $B\hat{O}B'$ ? Anote suas conclusões.

### Atividade 2:

#### Roteiro:

- Na *janela de visualização* do GeoGebra, desenhe um triângulo  $ABC$  e marque um ponto  $O$  não pertencente ao segmento, como na Figura 5.8

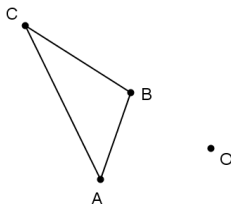


Figura 5.8: Triângulo  $ABC$  e ponto  $O$

- Utilizando a ferramenta *rotação em torno de um ponto*, construa a imagem  $A'B'C'$ , pela rotação do triângulo  $ABC$  de um ângulo de  $60^\circ$ , ao redor do ponto  $O$ , no sentido anti-horário.
- Compare as figuras e registre suas observações.
- Meça os lados e os ângulos dos dois triângulos. Use a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro*.
- Compare as medidas e anote suas conclusões.
- Calcule os perímetros dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  e compare os resultados. Use a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro*. Anote suas conclusões.

### Atividade 3:

#### Roteiro:

- Usando a ferramenta *inserir imagem*, insira uma figura  $F$  na *janela de visualização* do GeoGebra, e insira também um ponto  $O$  fora da figura.
- Usando a ferramenta *rotação em torno de um ponto*, faça a rotação  $F'$  da figura  $F$  em relação

ao ponto  $O$  de ângulo  $90^\circ$  no sentido anti-horário, como na Figura 5.9.

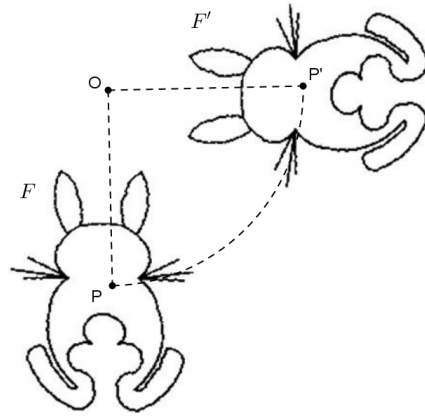


Figura 5.9: Rotação da figura  $F$  em torno do ponto  $O$

- Formalização de conceitos:

*Uma rotação de centro  $O$  e ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário é uma transformação cuja imagem  $F'$ , de uma figura  $F$ , é obtida girando-se a figura  $F$  de um ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário em torno de  $O$ , onde cada ponto  $P$  da figura  $F$  percorre um arco de circunferência de centro  $O$  e ângulo  $\theta$  no sentido anti-horário, e denotamos sua imagem  $P'$ . De modo análogo, obtêm-se a rotação de centro  $O$  e ângulo  $\theta$  no sentido horário.*

## 5.6 Reflexão em relação a uma reta

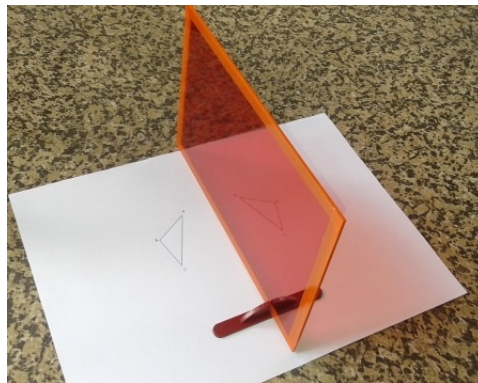


Figura 5.10: Espelho mágico



**Orientações**

**Número de aulas previstas:** 5 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

**Materiais utilizados:**

- Cópias das atividades 1, 2 e 3.
- Lápis
- Espelho mágico

**Recursos multimídia:**

- *Software* GeoGebra [2].

**Observações:**

- A proposta para esta sequência, são atividades a serem realizadas com o uso do *software* GeoGebra.
- O material espelho mágico é uma placa retangular de acrílico vermelho transparente com aproximadamente 3mm de espessura, através do qual é possível visualizar uma figura refletida e assim desenhar sua imagem pela reflexão, veja a Figura 5.10.

**Objetivos:**

- Desenhar a imagem de uma figura refletida em relação a uma reta usando o espelho mágico.
- Usar o espelho mágico para encontrar a reta de simetria, dadas uma figura e sua imagem por uma reflexão.
- Mostrar que a distância entre um ponto  $P$  e sua imagem  $P'$  pela reflexão em relação a uma reta  $r$  é igual ao dobro da distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$ .
- Mostrar que o segmento  $\overline{PP'}$  é perpendicular a reta  $r$ .
- Mostrar que o ponto de interseção entre o segmento  $\overline{PP'}$  e a reta  $r$  coincide com o ponto médio de  $\overline{PP'}$ .

**Descrição e metodologia das atividades propostas****Atividade 1:****Roteiro:**

- Usando o espelho mágico, desenhe a imagem da figura refletida em relação a reta  $r$  (veja a Figura 5.11).

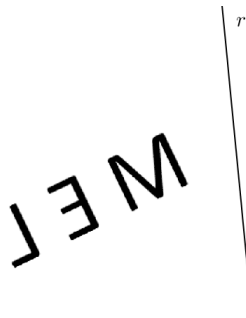


Figura 5.11: Atividade 1

**Atividade 2:****Roteiro:**

- Usando o espelho mágico, encontre a reta  $s$  de simetria entre os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  (veja a Figura 5.12).

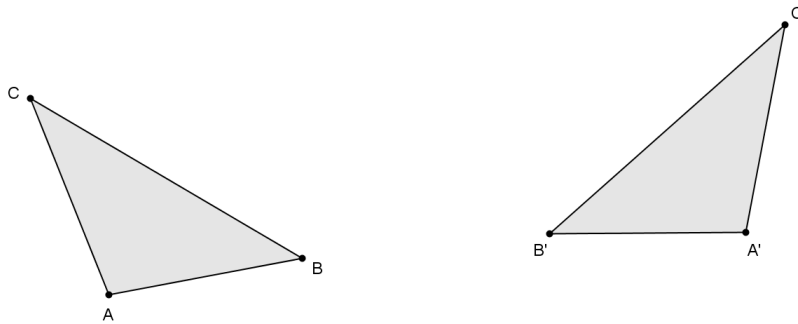


Figura 5.12: Atividade 2

**Atividade 3:****Roteiro:**

- Na Figura 5.13, desenhe a imagem do triângulo  $ABC$  em relação à reta  $r$ .

- Compare as distâncias de cada um dos vértices do triângulo  $ABC$  às suas correspondentes imagens no triângulo  $A'B'C'$ . Escreva suas conclusões. - O que acontece com a imagem de um ponto que está na reta  $r$ ? Anote suas conclusões.

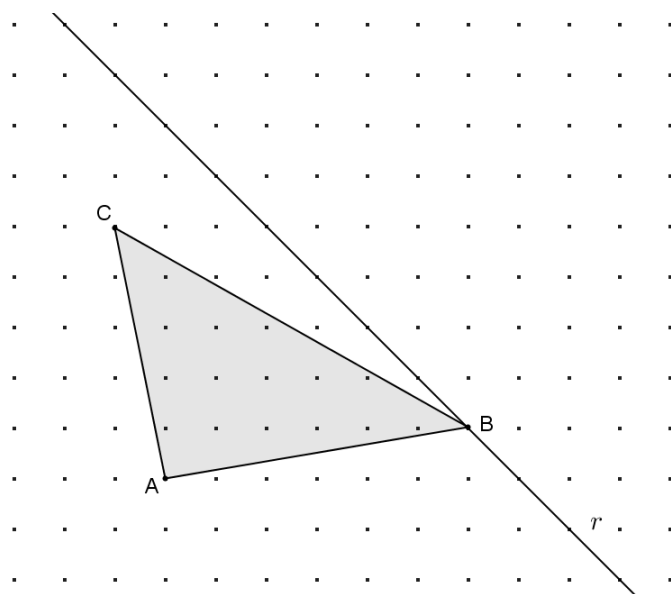
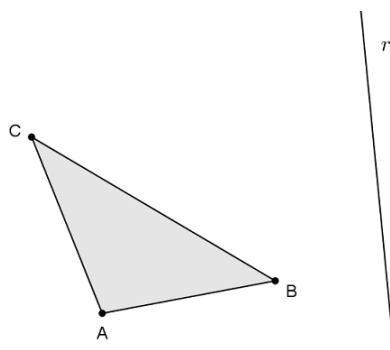


Figura 5.13: Atividade 3

**Atividade 4:****Roteiro:**

- Utilizando o *software* GeoGebra, desenhe um triângulo  $ABC$  e uma reta  $r$ , como na Figura 5.14.

Figura 5.14: Triângulo  $ABC$  e reta  $r$ 

- No GeoGebra, usando a ferramenta *reflexão em relação a uma reta*, construa a reflexão  $A'B'C'$  do triângulo  $ABC$  em relação à reta  $r$ .
- Trace os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$ .
- Usando a ferramenta *interseção de dois objetos*, encontre a interseção entre a reta  $r$  e os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$ , denotando-os por  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  respectivamente.
- Usando a ferramenta *distância, comprimento ou perímetro*, meça os comprimentos dos segmentos  $\overline{AM_1}$  e  $\overline{M_1A'}$ . Repita o mesmo procedimento para os segmentos  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$ . Anote suas conclusões.

- Usando a ferramenta *ângulos*, meça os ângulos entre a reta  $r$  e os segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$ . Registre suas conclusões.

### Atividade 5:

#### Roteiro:

- Utilizando a ferramenta inserir imagem, inserir uma figura  $F$  e uma reta  $r$  na *janela de visualização* do GeoGebra.
- Usando a ferramenta *reflexão em relação à uma reta*, construir a reflexão  $F'$  da figura  $F$  em relação à reta  $r$ , como mostra a Figura 5.15.

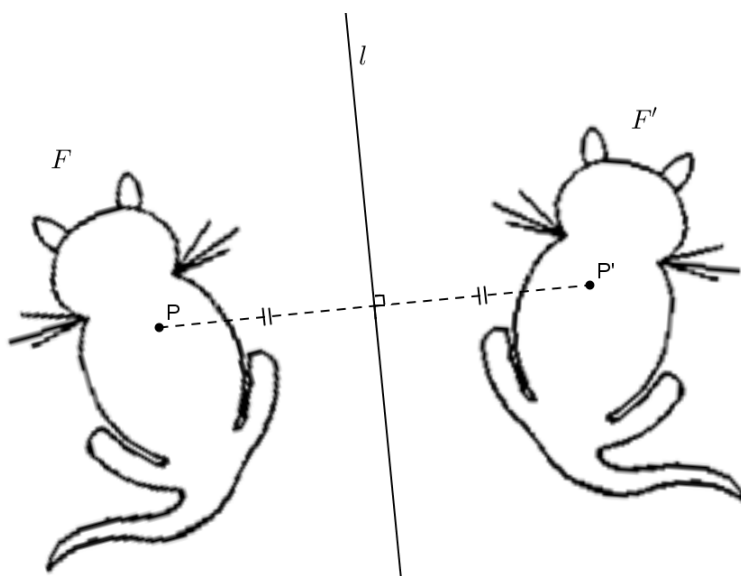


Figura 5.15: Reflexão da figura  $F$  em relação à reta  $r$

- Formalização de conceitos:

*Uma reflexão em relação a uma reta  $l$  é um movimento no plano que leva cada ponto  $P$  do plano a um ponto  $P'$  com o segmento  $PP'$  perpendicular a  $l$  e a distância do ponto de interseção da reta  $l$  e o segmento  $PP'$  ao ponto  $P$  é igual à distância desta interseção ao ponto  $P'$ , se o ponto  $P$  não pertence a  $l$ . Se  $P$  pertence à reta  $l$ , então  $P'$  é o próprio  $P$ , isto é,  $P$  e sua imagem coincidem.*

## 5.7 Rosáceas (Ornamentos limitados)

### Orientações

**Número de aulas previstas:** 2 aulas

**Público alvo:** Alunos do Ensino Fundamental ou Ensino Médio.

### Recursos multimídia:

- *Software* GeoGebra [2].

**Observação:** A proposta para esta sequência, são atividades a serem realizadas com o uso do *software* GeoGebra.

### Objetivos:

- Construir rosáceas usando o GeoGebra;
- Usar as ferramentas *rotação em torno de um ponto* e *reflexão em relação a uma reta* do *software* GeoGebra.

### Descrição e metodologia das atividades propostas

#### Atividade 1:

##### Roteiro:

- Construa um círculo e divida-o em 4 setores de ângulo central de  $90^\circ$  cada um.
- Desenhe em um dos setores um motivo, como mostra a Figura 5.16(a).
- Utilizando a ferramenta *rotação em torno de um ponto* do GeoGebra, construa a rosácea como mostra a Figura 5.16(b)

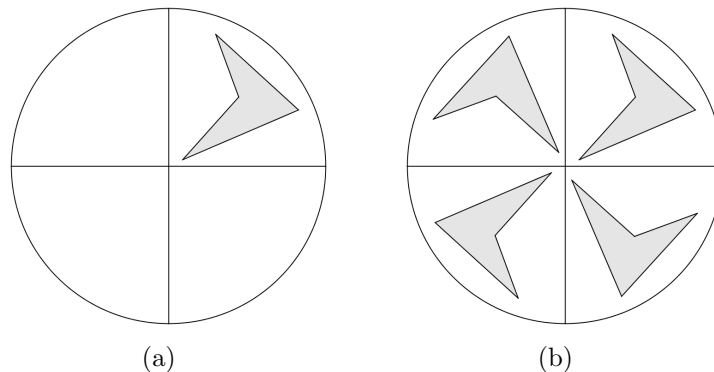


Figura 5.16: Construção da rosácea - 1

**Atividade 2:****Roteiro:**

- Construa um círculo e divida-o em 8 setores de ângulo central de  $45^\circ$  cada um.
- Desenhe em um dos setores um motivo, como mostra a Figura 5.17(a).
- Utilizando a ferramenta *reflexão em relação a uma reta* do GeoGebra, obtenha a Figura 5.17(b).
- Finalmente usando as ferramentas *reflexão em relação a uma reta* ou *rotação em torno de um ponto*, complete a Figura 5.17(c).

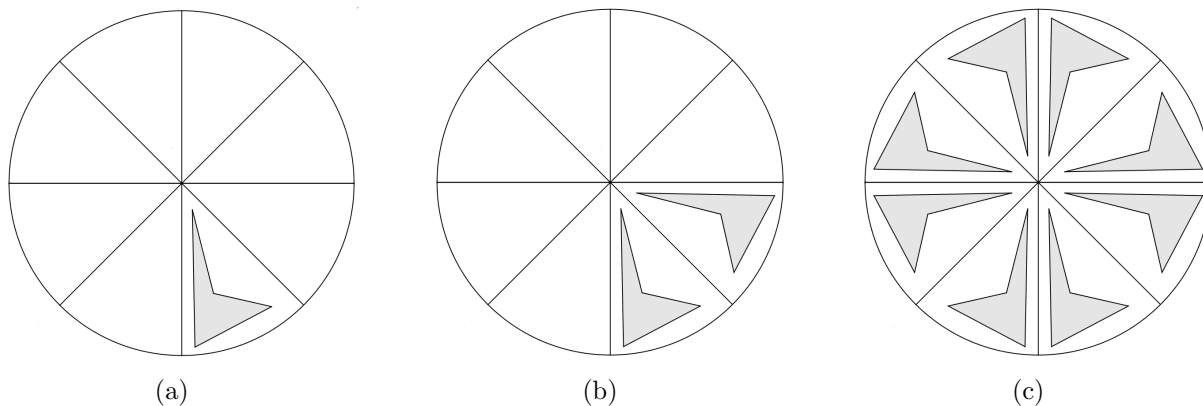


Figura 5.17: Construção da rosácea - 2

## Aplicação das sequências de atividades e resultados obtidos

Como experimentação das atividades propostas no capítulo anterior, aplicamos as três primeiras sequências de atividades propostas. Escolhemos uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Olegário Maciel situada na cidade de Governador Valadares em Minas Gerais e uma turma do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Marcos Geber Sirio situada no Distrito de Baguari em Minas Gerais para aplicar as atividades propostas.

Experimentamos as três primeiras sequências de atividades na turma do 8º ano, composta de 31 alunos. Já com a turma do Ensino Médio, composta de 38 alunos, experimentamos apenas a primeira sequência de atividades, porém ampliamos a mesma, fazendo uma abordagem das isometrias através de exemplos e também, apresentamos a estrutura de grupos em um conjunto numérico.

Neste capítulo descreveremos como foi a experimentação das três sequências de atividades propostas no Capítulo 5, bem como os resultados obtidos.

### 6.1 Grupo de simetria de um ornamento limitado

Experimentamos esta sequência de atividades em dois níveis de ensino: Fundamental e Médio. Primeiro relataremos como foram os procedimentos adotados com o Ensino Fundamental e em seguida os procedimentos adotados com o Ensino Médio.

#### Descrição da sequência de atividades com o Ensino Fundamental

Para realização desta sequência de atividades foram necessárias 5 aulas. Preparamos *slides* com imagens retratando a simetria na natureza e reproduzimos o Apêndice B ampliado. Além disso, levamos para a sala de aula cópias do Apêndice B para serem distribuídas aos alunos e um espelho,

objeto útil na investigação das retas de simetria.

Como motivação inicial, começamos a atividade mostrando algumas imagens, como vemos na Figura 6.1, nas quais podem ser exploradas as simetrias das fotos de flores e de animais. Exploramos o conhecimento prévio dos alunos a respeito do conceito de simetria. Aproveitamos o momento para recordar alguns conceitos de geometria plana. Explicamos de maneira informal os conceitos de figura invariante e simetria. Neste momento muitos alunos fizeram comentários a respeito da simetria existente em cada imagem apresentada.



Figura 6.1: Simetria na natureza

Em seguida cada aluno recebeu uma cópia do Apêndice B, mostrado na Figura 6.2 , material utilizado para investigação do grupo de simetria do ornamento limitado. Orientamos os alunos a colorir e recortar o ornamento, colocando-o sobre o transferidor como mostra a instrução do Apêndice B. Todos os alunos tiveram facilidade para colorir o ornamento. Seguiram as orientações corretamente e obtivemos um bom resultado nesta etapa.

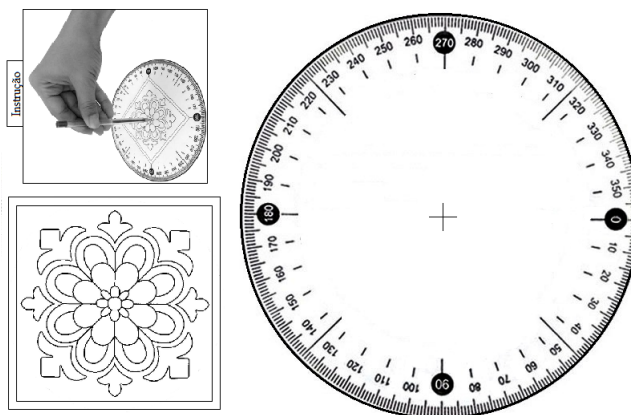


Figura 6.2: Ornamento limitado e transferidor



No intuito de dinamizar a comunicação com os alunos durante a investigação das simetrias da figura, levamos o ornamento e transferidor ampliados, como vemos na Figura 6.3. Percebemos que o uso do material ampliado contribuiu para o rápido entendimento dos alunos em cada instrução ou conceitos dados.

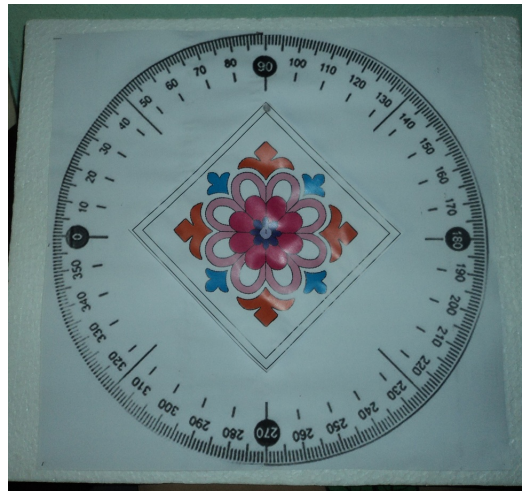


Figura 6.3: Material usado na investigação do grupo de simetria do ornamento limitado

Usando um espelho e traçando retas sobre o ornamento, os alunos identificaram as quatro retas de simetria que denotamos por  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$ . Alguns alunos tiveram certa dificuldade em perceber as retas de simetria com o uso da régua, mas utilizando o espelho para identificar tais retas os mesmos relataram que conseguiram compreender (veja Figura 6.4).

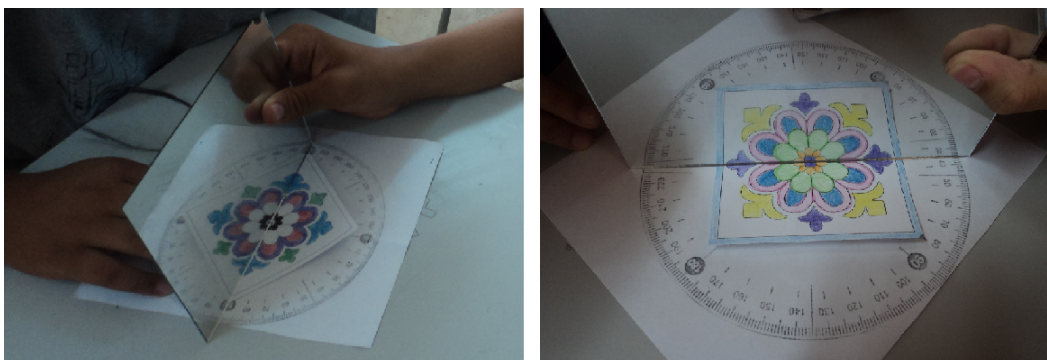


Figura 6.4: Alunos identificando as retas de simetria

Explicamos o conceito de conjunto invariante e pedimos aos alunos que fizessem várias rotações do ornamento sobre o transferidor verificando quais eram os ângulos de rotação que deixavam o ornamento invariante. Para fazer tais rotações, os alunos fixaram o centro do transferidor e do ornamento com a ponta do lápis, como mostra a Figura 6.5. Denotamos as rotações por  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ .

Depois de identificar as reflexões e rotações, reunimos todas as simetrias do ornamento em um conjunto que denotamos por  $S$ . Definimos  $S$  como o conjunto de simetrias do ornamento.

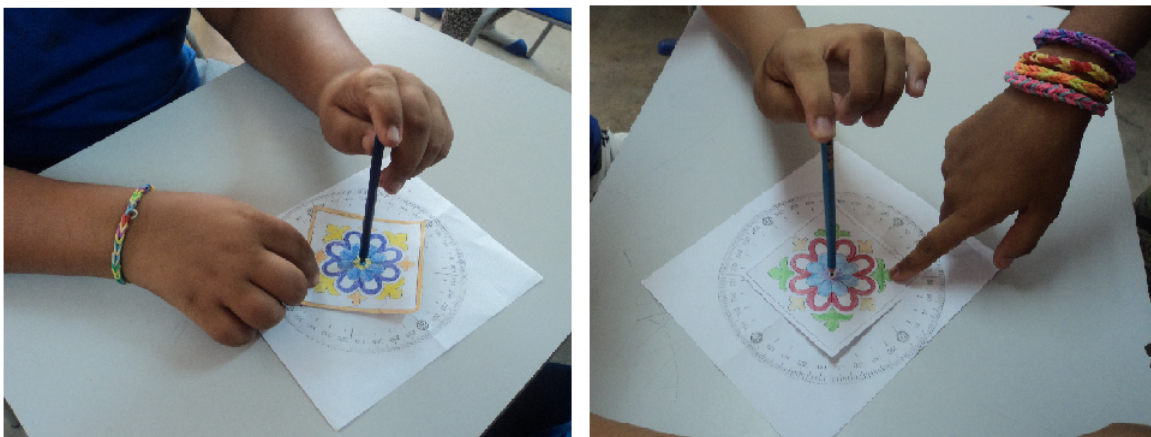


Figura 6.5: Alunos identificando as rotações

Pedimos para cada aluno escolher duas simetrias do conjunto  $S$  e aplicá-las em um ponto do ornamento. Fizemos um exemplo no material ampliado e auxiliamos individualmente quem teve dificuldade. Em seguida, cada aluno mostrou, no material ampliado, a composição que fez. Assim, os alunos perceberam intuitivamente que o conjunto  $S$  é fechado em relação à operação composição.

Orientamos aos alunos a aplicar as seguintes composições em um ponto do ornamento:

- 1- Escolher uma reflexão do conjunto  $S$  e aplicá-la duas vezes seguidas.
- 2- Repetir o procedimento com as demais reflexões.
- 3- Aplicar duas rotações de  $180^\circ$ .
- 4- Aplicar uma rotação de  $360^\circ$ .
- 5- Aplicar a rotação de  $90^\circ$  seguida da rotação de  $270^\circ$ .

Após aplicarem tais composições, os alunos concluíram que sempre voltavam ao ponto inicial. Dessa forma, observaram intuitivamente que cada elemento do conjunto  $S$  possui inverso e que o elemento identidade está em  $S$ .

Pedimos aos alunos que escolhessem três simetrias do grupo  $S$  e em seguida aplicassem-as de duas maneiras diferentes em um ponto do ornamento. Assim, os alunos perceberam que a composição é associativa.

Apresentamos mais dois ornamentos limitados e pedimos que os alunos identificassem as simetrias presentes em cada um, veja na Figura 6.6.

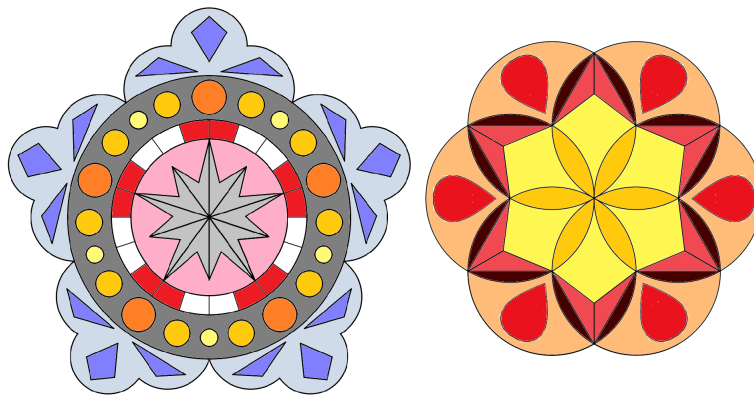


Figura 6.6: Figuras utilizadas na verificação da aprendizagem

### Descrição da sequência de atividades com o Ensino Médio

Para realização dessa sequência de atividades foram necessárias 4 aulas. Utilizamos *slides* para mostrar imagens da simetria na natureza e para explicar os tipos de isometrias e suas características. Levamos para a sala de aula cópias do Apêndice B para serem distribuídas aos alunos, um espelho e o Apêndice B ampliado.

Iniciamos a atividade apresentando, através de um exemplo, as propriedades que um conjunto deve satisfazer para ter a estrutura algébrica de grupo. O conjunto escolhido como exemplo foi o conjunto dos números inteiros e a operação, a adição. Mostramos quais são as condições necessárias para que tal conjunto tenha a estrutura de grupo. Usamos um exemplo numérico para facilitar a percepção pelos alunos. Incentivamos em todos os momentos a participação dos mesmos.

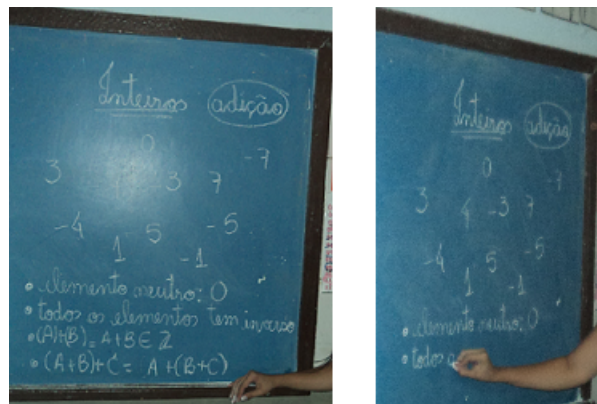


Figura 6.7: Exemplo de conjunto numérico

Apresentamos o conceito de isometria da seguinte forma: *Uma isometria no plano é uma transformação geométrica que preserva distâncias entre pontos.* Conceituamos vetor como *segmento de reta com direção e sentido.* Em seguida, apresentamos exemplos (veja a Figura 6.8)

a fim de dar o conceito e características das isometrias translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante. Questionamos os alunos a respeito de conceitos básicos de geometria euclidiana que apareciam nas definições, o que tornou a aula participativa e dinâmica.

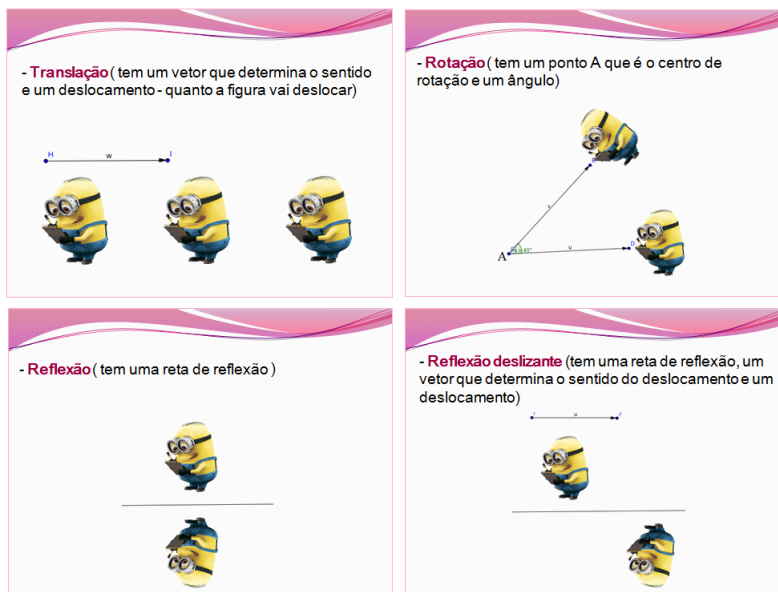


Figura 6.8: Tipos de isometrias

Como motivação para o tema simetria, mostramos algumas imagens, como vemos na Figura 6.1, que retratam a simetria na natureza. Exploramos o conhecimento prévio dos alunos a respeito do conceito de simetria. Questionamos os alunos sobre a simetria existente em cada imagem apresentada.

Explicamos informalmente os conceitos de simetria e figura invariante. Usamos como exemplo as letras A, E e N a fim de identificar alguma isometria que deixasse tais letras invariantes. Os alunos analisaram as letras e, a partir dos conceitos dados anteriormente, argumentaram sobre a existência de simetria em cada uma.

Para identificar a simetria das letras A e E os alunos não apresentaram dificuldade chegando à conclusão que a letra A possui simetria em torno de uma reta vertical e a letra E possui simetria em relação à uma reta horizontal. Ao analisarem a existência de simetria na letra N, a princípio os alunos procuravam por alguma reta de simetria e chegaram a conclusão que a letra N não teria simetria. Fixamos o centro da letra N no centro do transferidor, como mostra a Figura 6.9, e solicitamos que um aluno fizesse rotações da letra N a fim de encontrar uma que a deixasse invariante. Após algumas tentativas os alunos concluíram que a letra N possui simetria rotacional.

Entregamos a cada aluno uma cópia do Apêndice B e orientamos que recortassem o ornamento colocando-o sobre o transferidor, como mostra a instrução. Pedimos aos alunos que indicassem as reflexões e rotações que deixassem o ornamento invariante. Para identificar as retas de simetria os alunos usaram régua e espelho. Denotamos as reflexões encontradas por  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$ . Orientamos



Figura 6.9: Verificando a existência de simetria na letra N

os alunos a fixar o centro do ornamento sobre o centro do transferidor a fim de fazer rotações com o mesmo, buscando as que o deixassem invariante. As rotações encontradas foram  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ . Vale ressaltar que no momento em que os alunos estavam buscando as rotações que deixavam o ornamento invariante não tiveram a mesma dificuldade que ocorreu ao analisar a simetria da letra N.

Denotamos por  $S$  o conjunto formado pelas reflexões  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  e  $r_4$  e pelas rotações  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ .

Pedimos para cada aluno escolher duas simetrias do conjunto  $S$  e aplicá-las em um ponto do ornamento. Fizemos um exemplo no material ampliado e auxiliamos individualmente quem teve dificuldade. Cada aluno mostrou, no material ampliado, a composição que fez e em seguida foi questionado a encontrar no conjunto  $S$  uma isometria que levasse o ponto escolhido inicialmente à mesma imagem pela composição. Assim os alunos perceberam através da experimentação que o conjunto  $S$  é fechado em relação a operação composição.

Além disso, escolhidas três isometrias do conjunto  $S$ , pedimos que os alunos fizessem a composição das mesmas de duas formas diferentes, a fim de verificar que a composição de isometrias é associativa.

Orientamos os alunos a aplicar as seguintes composições em um ponto do ornamento:

- 1- Escolher uma reflexão do conjunto  $S$  e aplicá-la duas vezes seguidas.
- 2- Repetir o procedimento com as demais reflexões.
- 3- Aplicar duas rotações de  $180^\circ$ .
- 4- Aplicar uma rotação de  $360^\circ$ .
- 5- Aplicar a rotação de  $90^\circ$  seguida da rotação de  $270^\circ$ .

Dessa forma, os alunos perceberam que todos os elementos do conjunto  $S$  possuem inverso. Além disso encontraram o elemento identidade no conjunto  $S$ .

Dessa forma, os alunos conseguiram identificar no conjunto  $S$ , as propriedades que um conjunto deve satisfazer para ter a estrutura algébrica de grupo. Assim, definimos tal conjunto como grupo de simetria do ornamento.



De maneira informal, definimos grupo diedral e grupo cíclico como:

*Grupo diedral  $D_n$  é o grupo de simetria com  $2n$  elementos, sendo  $n$  reflexões e  $n$  rotações.*

*Grupo cíclico  $C_n$  é o grupo de simetria contendo  $n$  rotações.*

Finalizamos esta sequência de atividades apresentando o algoritmo I, veja a Figura 6.10, para que os alunos encontrassem o grupo de simetria do ornamento seguindo os passos indicados no mesmo.

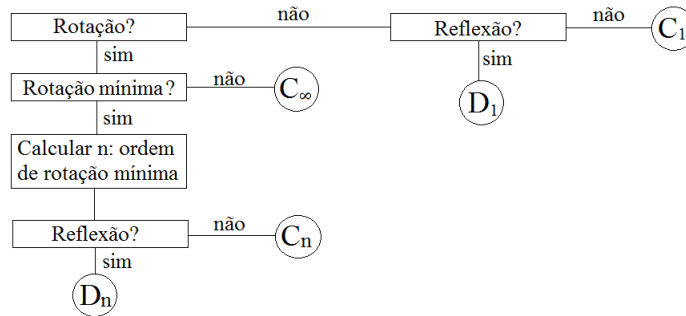


Figura 6.10: Algoritmo I - Grupo de simetria de ornamentos limitados

## 6.2 Construir um ornamento a partir de um motivo

Primeiramente dividimos a turma em duplas visto que para realizar tal atividade seria necessário que um aluno ajudasse o outro. Em seguida distribuimos uma folha de papel sulfite e uma cópia do Apêndice C, para cada dupla. Escolhemos um motivo com ângulo central igual a  $45^\circ$ , como mostra a Figura 6.11. Cada dupla recortou seu molde.

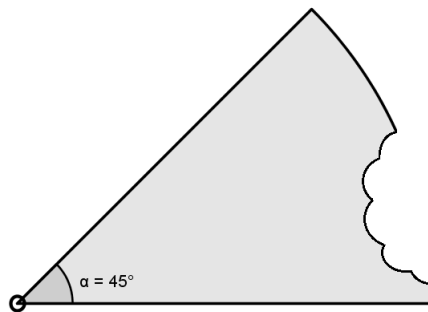


Figura 6.11: Molde usado na construção do ornamento limitado

Solicitamos que um aluno de cada dupla fixasse o molde sobre a folha de sulfite no centro de rotação usando para isso uma caneta. Após fixados os moldes, pedimos que o outro aluno de cada dupla desenhasse o contorno do molde com lápis, como mostra a Figura 6.12. Os alunos

que estavam desenhando foram orientados a rotacionar o molde e continuar fazendo o contorno do mesmo até completar o ornamento.

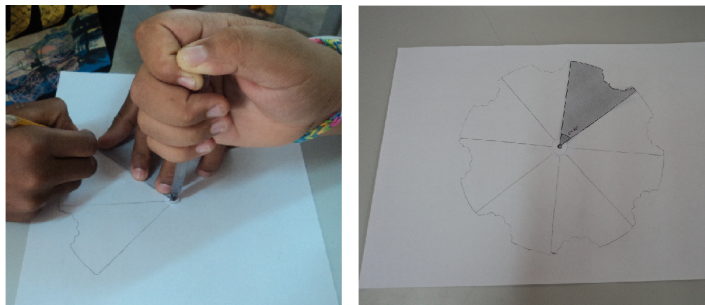


Figura 6.12: Alunos desenhando o ornamento limitado

Pedimos aos alunos que verificassem a existência de retas de simetria no ornamento. Inicialmente a resposta foi positiva, mas usando o espelho concluíram que o mesmo não apresentava reflexão (veja a Figura 6.13).

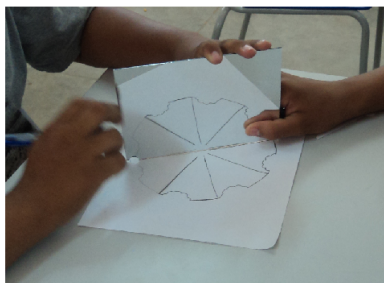


Figura 6.13: Alunos verificando a existência de retas de simetria

Pela construção do ornamento, os alunos perceberam que haviam oito rotações que deixavam a figura invariante. Notaram também que oito vezes  $45^\circ$  dá  $360^\circ$ . Denotamos as rotações por  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $315^\circ$  e  $360^\circ$  e chamamos de  $R$  o conjunto das mesmas.

Pedimos para cada aluno escolher duas rotações do conjunto  $R$  e aplicá-las em um ponto do ornamento. Assim, os alunos perceberam intuitivamente que o conjunto  $R$  é fechado em relação à operação composição.

Orientamos aos alunos a aplicarem as seguintes composições em um ponto do ornamento:

- 1- Aplicar duas rotações de  $180^\circ$ .
- 2- Aplicar uma rotação de  $360^\circ$ .
- 3- Entre as demais rotações do conjunto  $R$ , procure duas, que aplicadas em um ponto, voltem ao mesmo ponto.

Após aplicarem tais composições, os alunos concluíram que sempre voltavam ao ponto inicial. Dessa forma, observaram intuitivamente que cada elemento do conjunto  $R$  possui inverso e que elemento identidade está em  $R$ .

Pedimos aos alunos que escolhessem três rotações do grupo  $R$  e em seguida aplicassem-as de duas maneiras diferentes em um ponto do ornamento. Assim, os alunos perceberam que a composição é associativa.

### 6.3 Criar frisos utilizando o GeoGebra

Iniciamos esta sequência de atividades dando o conceito de vetor como “*um segmento de reta que apresenta direção e sentido*”. Em seguida apresentamos informalmente os conceitos de translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante. Para desenvolver tais conceitos usamos pezinhos, mostrados na Figura 6.14. Movimentamos os pezinhos na lousa para explicar cada tipo de isometria. As figuras foram feitas frente e verso para que fosse possível mostrar na lousa a reflexão e a reflexão deslizante.

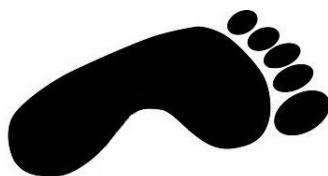


Figura 6.14: Figura usada para mostrar os tipos de isometrias

Apresentamos o conceito de frisos como: “friso é uma tira infinita que apresenta alguma isometria”. Construimos frisos na lousa usando os pezinhos, veja na Figura 6.15. Os alunos demonstraram curiosidade pelo tema, fizeram muitas perguntas e ajudaram na construção dos frisos na lousa.

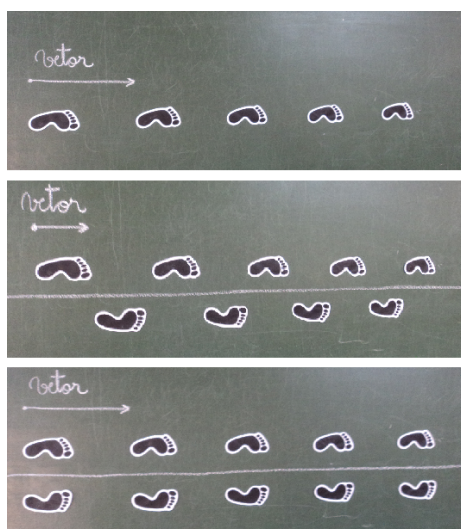


Figura 6.15: Frisos confeccionados na lousa



Mostramos várias imagens contendo frisos decorativas usadas em igrejas, cozinhas, banheiros entre outros, como mostra a Figura 6.16. As imagens foram apresentadas em *slides*. A cada imagem apresentada os alunos eram motivados a dizer quais isometrias estavam presentes na mesma. Percebemos que os alunos haviam internalizado os tipos de isometrias pois os mesmos conseguiram identificar corretamente as isometrias em cada imagem. Ao analisar uma imagem que apresentava rotação de  $180^\circ$  um aluno percebeu que o mesmo movimento poderia ser obtido fazendo duas reflexões em retas perpendiculares.

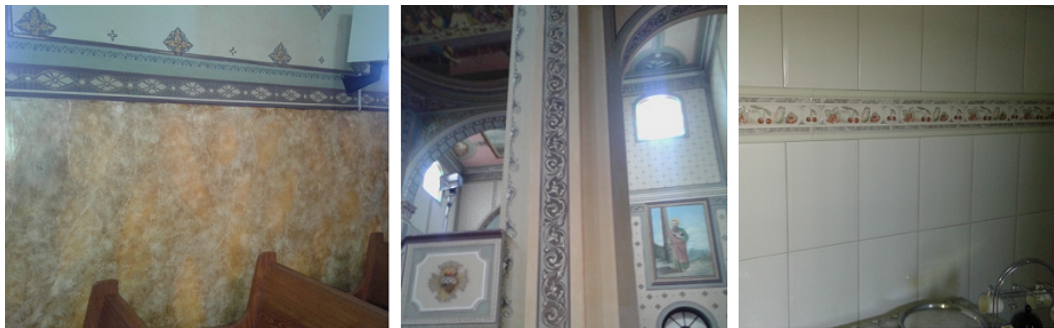


Figura 6.16: Frisos decorativas

Apresentamos por meio de *slides* os sete tipos de frisos, como vemos na Figura 6.17. Explicamos de maneira informal que qualquer friso pertence a um dos sete tipos.

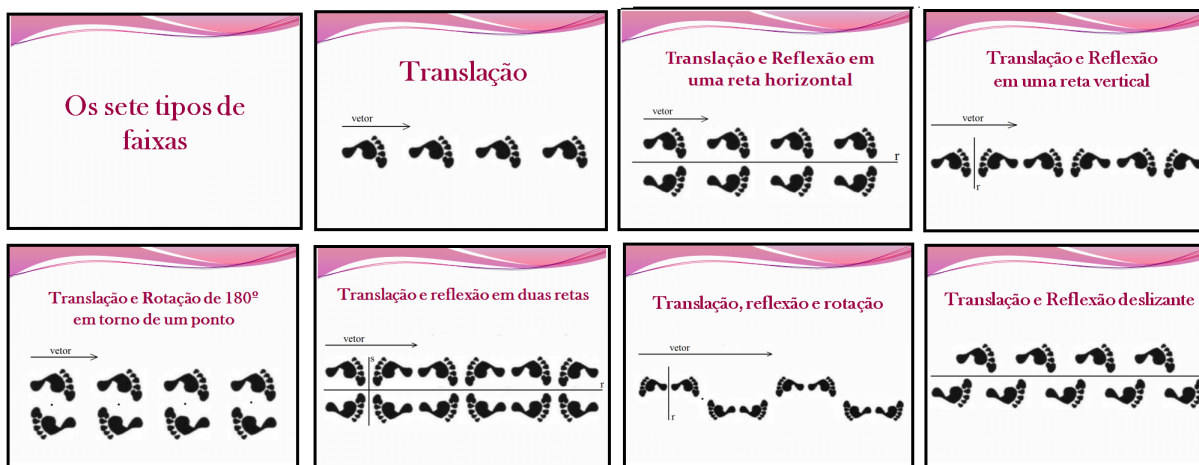


Figura 6.17: Sete tipos de frisos

A última etapa desta sequência de atividades foi realizada utilizando os recursos computacionais do programa GeoGebra. A cada aluno foi disponibilizado um computador. Iniciamos explorando os recursos do GeoGebra, apresentado algumas ferramentas e como usá-las. Todas as orientações foram dadas através da lousa interativa, veja Figura 6.18. Em princípio foi necessário dar atendimento individual aos alunos até que os mesmos se familiarizassem com o programa GeoGebra.

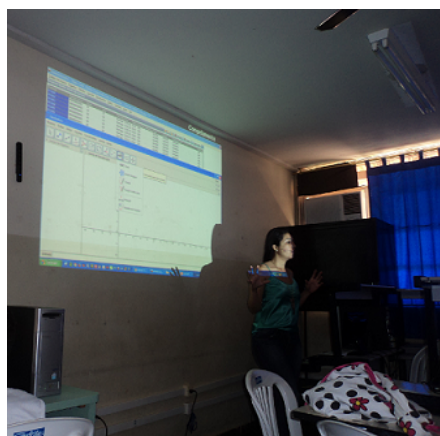


Figura 6.18: Explorando o GeoGebra

Orientamos os alunos a construir um friso contendo translações seguindo os passos descritos na Atividade 4 da Seção 5.3 do Capítulo 5.

## 6.4 Análise dos resultados obtidos

Um ponto positivo a respeito da realização das três sequências de atividades aplicadas é o interesse e a participação efetiva dos alunos. Atribuímos tal fato ao formato lúdico das atividades.

Relataremos a seguir os resultados obtidos com a aplicação da sequência de atividades *Grupo de simetria de um ornamento limitado*, numa turma de 8º ano do Ensino Fundamental. Um dos nossos objetivos com esta sequência de atividades foi retomar alguns conceitos como simetria, ângulos e retas. Percebemos que os alunos já haviam alcançado o aprendizado de tais conceitos ao questionar os mesmos sobre o assunto. O conhecimento prévio dos alunos a respeito de simetria era somente a reflexão em relação a uma reta. Outro objetivo desta sequência foi o estudo sobre reflexão em relação a uma reta e sobre a rotação. Notamos que o trabalho com o ornamento limitado (ver Figura 6.3) sobre o transferidor foi fundamental, pois manipulando este material os alunos conseguiram compreender o conceito de rotação, e também conseguiram identificar as rotações que deixam o ornamento invariante. Através desta atividade, os alunos conseguiram também perceber as propriedades que um conjunto deve satisfazer para ter a estrutura algébrica de grupo. Consideramos que os objetivos propostos nesta sequência de atividades foram alcançados.

Ao aplicar a sequência de atividade *Grupo de simetria de um ornamento limitado* no 3º ano do Ensino Médio fizemos uma abordagem diferente. De acordo com o nível de aprendizagem dos alunos, foi possível apresentar os conceitos de isometria, simetria e os tipos de isometrias de uma maneira um pouco mais formal. Pela participação dos alunos, notamos que os mesmos se interessaram pelo tema e demonstraram ter compreendido o mesmo. Por meio da manipulação do ornamento limitado (ver Figura 6.3) sobre o transferidor, os alunos conseguiram encontrar todas as reflexões e rotações que deixavam o mesmo invariante. Por meio da composição das reflexões

e rotações encontradas, conseguiram perceber a estrutura de grupo no conjunto das simetrias do ornamento. Assim concluímos que nossos objetivos com estas atividades foram alcançados.

Além de fixar os conceitos apresentados na primeira sequência de atividades, um objetivo da sequência de atividades *Construir um ornamento a partir de um motivo* foi reconhecer a parte mínima (motivo) necessária para compor um ornamento limitado. Ao fazer o desenho do ornamento limitado a partir do motivo fornecido (ver Figura 6.11), os alunos perceberam que multiplicando o ângulo central do motivo, no caso  $45^\circ$ , por oito dava  $360^\circ$ . Assim, encontraram as oito rotações do ornamento, desenhado por eles, sem auxílio do transferidor. Com relação à reflexão em relação a uma reta, foi necessária a nossa intervenção e o uso do espelho para que os alunos percebessem que o ornamento construído não apresentava reta de simetria. Este foi um importante momento da aula pois, os alunos notaram que nem toda figura apresenta rotações e reflexão. Consideramos que os objetivos propostos para esta atividade foram alcançados.

Com a sequência de atividades *Criar frisos utilizando o GeoGebra*, um dos nossos objetivos foi apresentar os conceitos de translação, rotação, reflexão em relação a uma reta e reflexão deslizante. Tais conceitos foram assimilados com facilidade pelos alunos, associando as definições das isometrias com a manipulação da Figura 6.14. Outro objetivo desta sequência foi introduzir o conceito de frisos e apresentar os sete grupos de frisos possíveis. Por meio da manipulação da Figura 6.14, os alunos conseguiram compreender e até mesmo identificar as isometrias presentes em cada friso. Por exemplo, ao mostrarmos duas reflexões em retas concorrentes, um aluno comentou que era equivalente a uma meia-volta. Por fim, o uso do GeoGebra para construir frisos ornamentais foi também um objetivo desta sequência de atividades. Todos os alunos conseguiram utilizar as ferramentas do GeoGebra com facilidade. Acreditamos que o uso da lousa interativa contribuiu para a assimilação das mesmas pelos alunos. Durante a construção dos frisos, percebemos que os alunos conseguiram apropriar-se tanto das quatro isometrias estudadas anteriormente, como das isometrias presentes em cada tipo de friso. Consideramos que os objetivos desta sequência foram alcançados.



# Considerações finais

Inicialmente fizemos um estudo sobre teoria de grupos e sobre transformações. Tal estudo ampliou nosso conhecimento sobre as propriedades que um conjunto deve satisfazer para ter a estrutura algébrica de grupo e assim foi possível demonstrar que o conjunto de todas as transformações geométricas é um grupo.

Durante este trabalho, aprofundamos nosso estudo sobre as isometrias e sobre algumas propriedades relacionadas à composição das mesmas. A partir do estudo inicial, foi possível mostrar que o conjunto de todas as isometrias é um subgrupo do grupo das transformações. Demonstramos também que as transformações identidade, rotação em torno de um ponto, reflexão em relação a uma reta, translação e reflexão deslizante são isometrias no plano.

Apresentamos neste trabalho uma investigação, a partir de exemplos, do grupo de simetria de ornamentos limitados. Procuramos estabelecer, através do teorema de Leonardo, que os únicos grupos de simetria finitos são os grupos cíclicos e os grupos diedrais.

A fim de classificar os grupos de simetria infinitos (grupos de frisos), analisamos todas as combinações possíveis entre as isometrias que podem estar em um grupo de friso. Assim, foi possível demonstrar o teorema da classificação dos grupos de frisos que estabelece a existência de apenas sete grupos.

Após um estudo bibliográfico, elaboramos sete sequências de atividades cujos principais objetivos foram identificar o grupo de simetria de ornamentos limitados, perceber as isometrias presentes em cada um dos sete grupos de frisos, construir um friso ornamental usando as ferramentas do GeoGebra e identificar características das isometrias no plano. Dentre as atividades apresentadas, aplicamos as que estão relacionadas a grupos de simetria. Tais atividades foram desenvolvidas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. A experimentação dessas atividades em sala de aula foi muito gratificante. Pelo fato de serem atividades lúdicas, percebemos um bom envolvimento dos alunos com as mesmas. A participação efetiva dos alunos no decorrer das atividades contribuiu para que alcançássemos nossos objetivos. Salientamos que as atividades com o GeoGebra chamaram muito a atenção dos alunos. Foi surpreendente a facilidade com que os mesmos assimilaram o funcionamento das ferramentas do GeoGebra e foram capazes de construir um friso ornamental.

Esperamos que as sequências de atividades propostas neste trabalho colaborem com a prática

dos professores que se interessarem em ensinar a Geometria através das isometrias e dos grupos de simetria. Almejamos que este trabalho contribua para a melhoria do ensino da Matemática.

### **Trabalhos Publicados**

Guimarães.M.C.L, Rodrigues.C.I. Transformações, Isometrias e grupos - do Ensino Básico ao Superior. Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (XXXV CNMAC). Natal-RN, Setembro de 2014.

# Referências Bibliográficas

- [1] COXETER, H.M.S. **Introduction to Geometry**. New York Wiley , 1961. 443 p.
- [2] GEOGEBRA: *software* livre. Matemática dinâmica. Disponível em: <<https://www.geogebra.org>>. Acesso em: 31 de março de 2015.
- [3] HERSTEIN, I. N. **Tópicos de álgebra**. São Paulo, SP: Editora da Universidade de São Paulo: Polígono, 1970. 414 p.
- [4] LEDERGERBER-RUOFF, Erika Brigitta. **Isometrias e ornamentos do plano euclidiano**. São Paulo, SP: Atual Ed.: Editora da USP, 1982. 191p.
- [5] LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. 94 p. (Coleção do professor de matemática)
- [6] MARTIN, George Edward. **Transformation geometry: an introduction to symmetry**. New York, NY: Springer, c1982. xii, 237p.
- [7] MUNKRES, James R. **Topology: a first course**. New Jersey: Prentice-Hall, c1975. 413p., il. ISBN 0139254951 (enc.).
- [8] NETO, Antônio Caminha Muniz. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROF-MAT)
- [9] REZENDE, Eliane Q. F.; Rodrigues, Claudina Izepe. **Minicurso: Transformações de figuras**. Campinas, 2006.
- [10] RODRIGUES, Claudina Izepe. **Notas de Aula da disciplina MA770 - Geometria**. Campinas: IMECC, Unicamp, 2014.
- [11] ROSE, Bruce I.; STAFFORD, Robert D. **An Elementary Course in Mathematical Symmetry**; Mathematical Association of America, Vol. 88, No. 1 (Jan., 1981), pp. 59-64.

- [12] SCHATTSCHEIDER, Doris. **The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation**; Mathematical Association of America, 85(6), 1978, pp. 439-450.
- [13] SINGER, I. M.; THORPE, John A. (Coaut. de). **Lecture notes on elementary topology and geometry**. Glenview, Ill.: Scott, Foresman and Company, c1967. 214 p., il.
- [14] VELOSO, Eduardo. **Geometria: temas actuais**; materiais para professores. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998. 399 p., il. (Desenvolvimento curricular no ensino secundario, 11).
- [15] WEYL, Hermann. **Symmetry**. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982, c1952. 168 p.



Apêndice **A**

## Simetria na natureza



FOTO: EDERSON GODOY



FOTO: EDERSON GODOY



FOTO: EDERSON GODOY



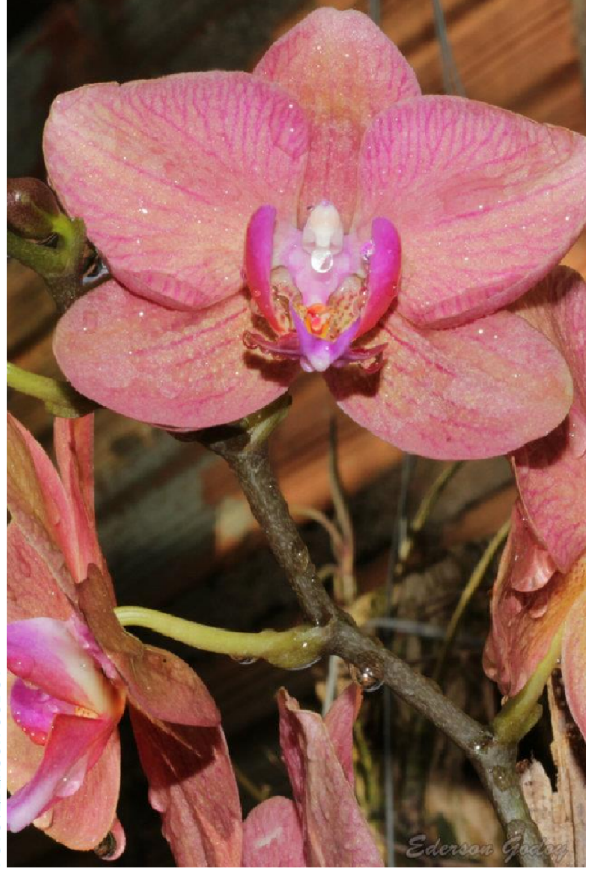
FOTO: EDERSON GODOY



FOTO: EDERSON GODOY



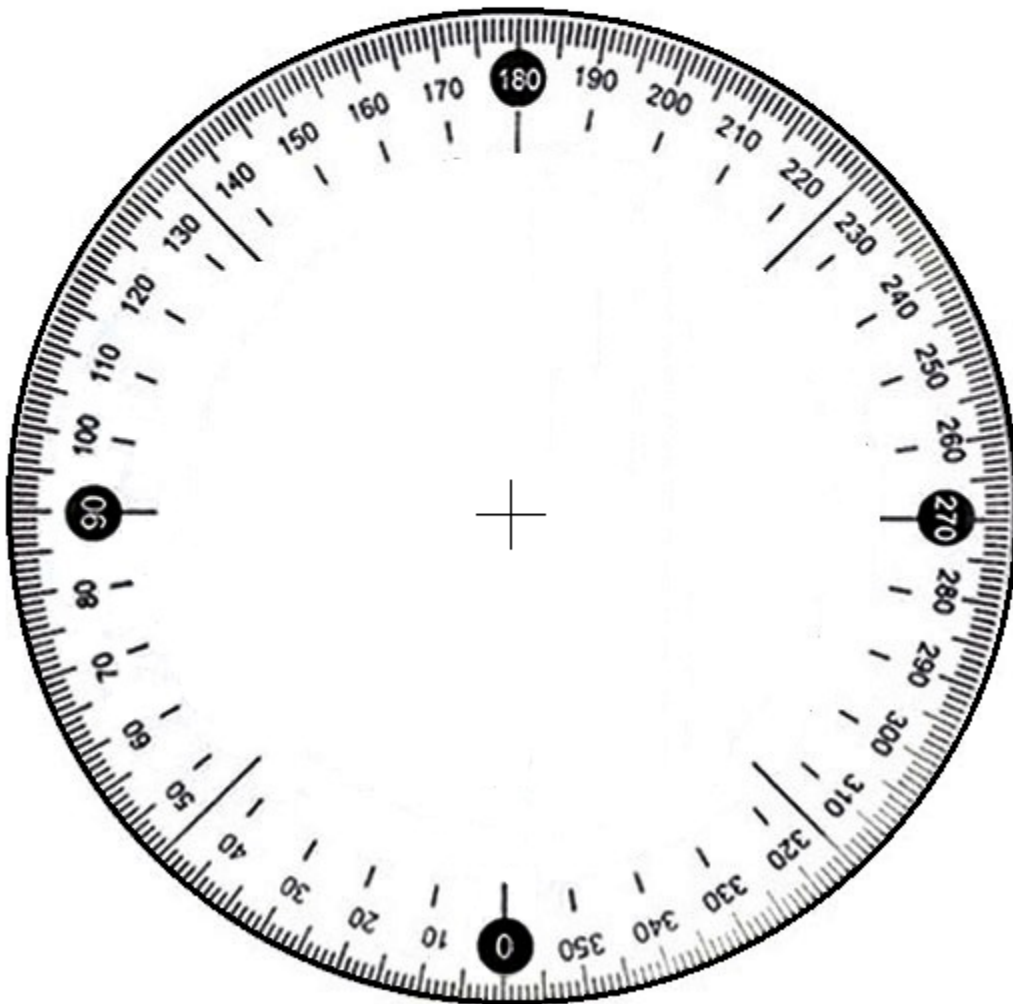
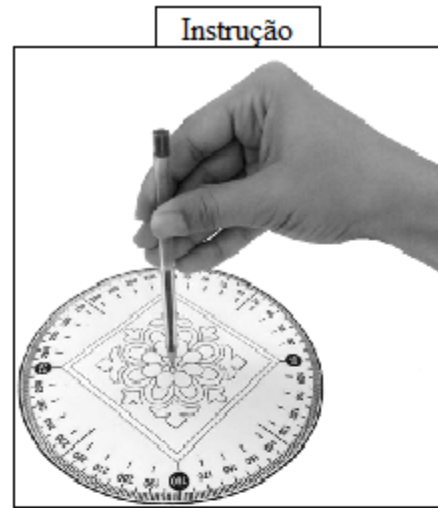
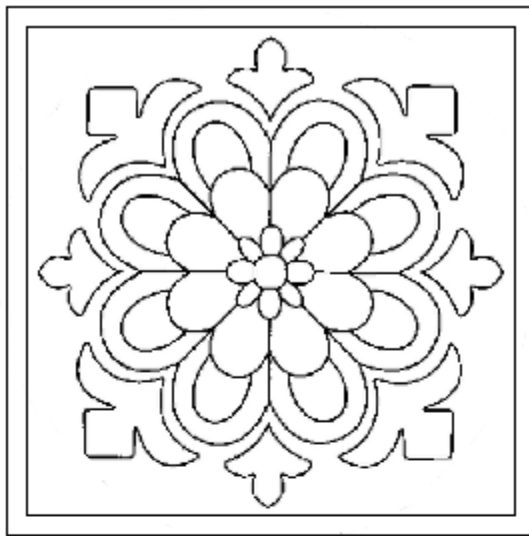
FOTO: EDERSON GODOY



Apêndice **B**

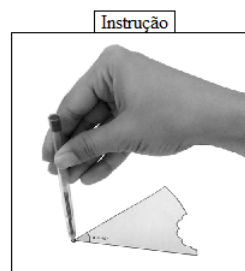
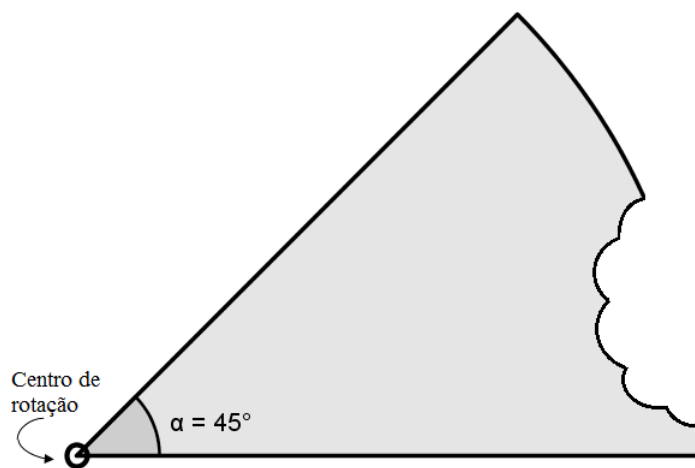
Grupo de simetria





Apêndice **C**

Modelo de motivo





Apêndice **D**

Figura para construir frisos

