UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
(Mestrado)

ANDERSON LEANDRO ZULIN

NÚMEROS REAIS E A EDUCAÇÃO BÁSICA

Maringá-PR
2013

ANDERSON LEANDRO ZULIN

NÚMEROS REAIS E A EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Dr. Cícero Lopes Frota

Maringá

2013

ANDERSON LEANDRO ZULIN

NÚMEROS REAIS E A EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Cícero Lopes Frota
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. André Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Cascavel - PR

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 14 de março de 2013.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial a minha esposa, pelo companheirismo e pela compreensão.

Agradecimentos

$\mathcal{A}$o concluir este trabalho, agradeço:

$\grave{\mathcal{A}}$ a Deus pelos meus familiares que, com grande amor, incentivaram-me neste tempo de estudos. Em especial, a minha esposa Maria e aos meus filhos Fernanda e Rafael, que suportaram as ausências de cada dia.

$\mathcal{M}$inha mãe Edite, pelas orações.

$\mathcal{M}$eu orientador Cícero pelas horas dedicadas a leituras e discussões.

$\mathcal{A}$ todos os professores e colegas do Profmat, turma de 2011, primeira na UEM, pela dedicação e incentivo para não desistir jamais. Sempre pensar que conseguimos.

$\grave{\mathcal{A}}$ CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

"Os grandes feitos são conseguidos não pela força,

mas pela perseverança."

Samuel Johnson.

Resumo

Neste trabalho buscamos, em primeiro lugar, realizar um estudo sobre a construção dos números reais através de dois métodos distintos: Cortes de Dedekind e Classes de Equivalência de Sequência de Cauchy. Em um segundo momento, realizamos a caracterização dos números reais por meio de expressões decimais. Na sequência, analisamos alguns livros didáticos do ensino médio e aplicamos um questionário para um grupo de professores do núcleo regional de educação de Maringá. Concluímos com comentários e indicativos de mudanças.

Palavras chave: números reais, construção e caracterização dos números reais, educação básica.

Abstract

In this work, first of all, we study the construction of real numbers by two methods: Dedekind's cuts and Equivalence Classes of Cauchy Sequence. In a second step we perform the characterization to the real numbers as decimals. Next we did an analysis of some high school textbooks and apply a questionnaire to a set of teachers of core regional education Maringá. We conclude with some comments and changes indications.

key words: real numbers, construction and characterization of the real numbers, basic education.

Sumário

Introdução **9**

1 Números Racionais **11**

1.1 Corpo 11

1.2 O corpo dos números racionais 14

1.3 Insuficiência de $\mathbb{Q}$ 17

2 Números Reais **20**

2.1 Cortes de Dedekind 20

2.2 Sequências de Cauchy 35

2.3 Caracterização via decimais 51

2.4 Propriedades dos números reais 59

3 Números Reais no Ensino Médio **62**

3.1 Livro didático 62

3.2 Questionário dos professores 64

3.3 Conclusões 77

Bibliografia **78**

Introdução

Observa-se que os primeiros números surgiram, na antiguidade, para possibilitar as diversas operações de contagem que se mostraram necessárias para o desenvolvimento da humanidade. Já o processo de medição das grandezas ditas contínuas conduziu-nos à noção de número real e isso se fez de forma tão significativa que o conjunto dos números reais é também conhecido como reta real, ou simplesmente, reta numérica.

Inicialmente, para representar quantidades inteiras de objetos, animais ou qualquer coisa que se quisesse contar, o homem criou símbolos que, hoje, são os números naturais. Porém, estes números foram insuficientes no trato de problemas que envolvem divisões em partes iguais fazendo com que surgissem as frações.

Com as frações surgiu uma grande crise nos alicerces do pitagorismo envolvendo a descoberta dos segmentos incomensuráveis. Esta crise foi superada com grande genialidade pelo sábio Eudoxo com a teoria das proporções, que quase dois mil anos depois, inspirou Dedekind a criar uma rigorosa teoria para construção dos números reais.

Da necessidade de ampliar o conceito de números para além daqueles que podem ser representados pela razão de dois números inteiros, com o passar dos tempos, foram desenvolvidos estudos e descobriram-se diversos resultados relativos a frações decimais e a números racionais e irracionais que tiveram e ainda têm fundamental importância no desenvolvimento da Matemática.

Durante a segunda metade do século XIX um crescente número de artigos e livros foram publicados, dedicados a um único assunto: a definição precisa de número real e a investigação de funções reais baseada nessa definição. Podemos destacar três campos distintos de construção da definição de número real. Hankel (1839 - 1873) e Frege (1848 - 1925) defenderam a ideia tradicional de que a Análise deveria ser fundada na noção de quantidade contínua. Dedekind, Weierstrass (1815 - 1897) e Cantor defenderam que a noção de quantidade deveria ser substituída por uma rigorosa construção aritmética dos números reais, isto é, uma construção baseada na noção de números naturais ou racionais, que assumiu-se ser menos problemática do que a noção de quantidade contínua. Heine (1821 - 1881), Thomae (1840 - 1921) e Hilbert (1862 - 1943) defenderam que os conceitos fundamentais da Análise poderiam, e deveriam, ser construídos simplesmente de uma maneira formal, desprezando, tanto quanto possível, os assuntos de ordem filosófica.

Neste trabalho buscamos através da análise e da álgebra construir o conjunto dos números reais a partir do conjunto dos números racionais. Isto é, "ampliamos" o conjunto dos números racionais para um novo conjunto que seja ordenado e completo, pois os racionais são ordenados mas não completos. Esta construção foi feita de duas maneiras distintas: através de Cortes de Dedekind e Classes de Equivalência de Sequências de Cauchy. Fizemos também a caracterização dos números reais através de decimais, o qual é feito, de forma bem incompleta, nos livros didáticos adotados para o ensino básico.

O estudo da construção dos números reais foi de tamanha importância para a sequência do trabalho. No terceiro capítulo fizemos uma análise dos livros didáticos em relação ao tratamento sobre os conjuntos numéricos. Com o estudo realizado nos dois primeiros capítulos, podemos perceber o quanto está falho as exibições sobre o conjunto dos números reais nesses livros. Para confrontar o que existia nos livros, elaboramos um questionário para os professores da educação básica responderem. O resultado foi o esperado, os professores estão utilizando os livros como certo e verdadeiro. Não estão se questionando se há algo errado. E mais, percebemos também que professores não estão estudando, isto é, não estão se aperfeiçoando de maneira adequada.

Capítulo 1

Números Racionais

Assumimos aqui familiaridade com as definições e conceitos básicos sobre conjuntos. Assumimos também conhecidos o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, bem como as operações aritméticas em tais conjuntos. Agora, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais precisa de uma atenção especial.

1.1 Corpo

Definição 1.1 (Corpo)**.** *Seja K um conjunto munido de duas operações binárias chamadas de adição e mulplicação tais que a cada $x, y \in K$ a adição e a multiplicação fazem corresporder, respectivamente, a sua soma $x + y \in K$ e o seu produto $x \cdot y \in K$. Dizemos que a terna $(K, +, \cdot)$ é um corpo se valem as seguintes propriedades:*

C1. Existência de elementos neutros. Existe $0 \in K$ denotado elemento neutro da adição e $1 \in K$ denotado elementro neutro da multiplicação, com $1 \neq 0$ satisfazendo

$$t + 0 = t \quad \text{e} \quad t \cdot 1 = t, \text{ para todo } t \in K.$$

O elemento 0 chama-se zero e o elemento 1 chama-se um.

C2. Existência de elementos inversos. Aditivo: para cada $t \in K$ existe um elemento denotado por $-t \in K$ tal que $t + (-t) = 0$. Multiplicativo: para cada $t \in K$, $t \neq 0$, existe um elemento denotado por $t^{-1} \in K$ tal que $t \cdot t^{-1} = 1$.

C3. Propriedades comutativas, asociativas e distributiva.

Comutativa: $t + v = v + t$ e $t \cdot v = v \cdot t$, $\forall t, v \in K$.

Associativa: $(t+v)+w = t+(v+w)$ e $(t\cdot v)\cdot w = t\cdot(v\cdot w)$, $\forall t, v, w \in K$.

Distributiva: $t\cdot(v+w) = t\cdot v + t\cdot w$, $\forall t, v, w \in K$.

Para simplificação de notação denotamos um corpo $(K, +, \cdot)$ simplesmente por K.

Observemos que em todo corpo K o zero é único. De fato, suponhamos que 0 e $0'$ sejam dois elementos neutros da adição. Então temos que $0+y = y$ para todo $y \in K$. Em particular, para $y = 0'$, temos $0+0' = 0'$. Da mesma forma, obtemos $0'+0 = 0$. Portanto, $0' = 0+0' = 0'+0 = 0$, o que prova a unicidade do zero. Do mesmo modo, a existência do elemento neutro da multiplicação implica sua unicidade. De fato, suponhamos que 1 e $1'$ sejam dois elementos neutros da multiplicação. Como 1 é o elemento neutro da multiplicação, temos $x\cdot 1 = x$ para todo $x \in K$. Em particular para $x = 1'$, temos $1'\cdot 1 = 1'$. Da mesma maneira, obtemos $1\cdot 1' = 1$. Portanto $1' = 1\cdot 1' = 1'\cdot 1 = 1$.

Notemos também que em todo corpo K o inverso aditivo é único. De fato, suponhamos que y e z são inversos aditivos de x. Isto significa que $x+y = 0$ e $x+z = 0$, logo $x+y = x+z$. Adicionando y em ambos os lados da última igualdade, obtemos $y+x+y = y+x+z$, isto é, $(y+x)+y = (y+x)+z$. Como $x+y = y+x = 0$, segue que $(y+x)+y = (y+x)+z$, isto é, $0+y = 0+z$ ou ainda $y = z$. Do mesmo modo, podemos verificar a unicidade do inverso multiplicativo. De fato, tomemos $x \in K$ fixado não nulo e suponhamos que y e y' são inversos multiplicativos de x. Assim temos $x\cdot y = 1$ e $x\cdot y' = 1$. Logo $x\cdot y = x\cdot y'$. Multiplicando por y em ambos os lados dessa última igualdade, obtemos, $x\cdot y\cdot y = x\cdot y\cdot y'$ assim $(x\cdot y)\cdot y = (x\cdot y)\cdot y'$ e com isso obtemos $y = y'$.

Da comutatividade, segue-se que $0+t = t$ e $-t+t = 0$, seja qual for $t \in K$. A soma $t+(-v)$ será indicada com a notação $t-v$ e chamada a diferença entre t e v. A operação $(t, v) \mapsto t-v$ chama-se subtração. Também, por comutatividade, tem-se $(t+v)\cdot w = t\cdot w + v\cdot w$. Resulta, desta propriedade que $t\cdot 0 = 0$ para todo $t \in K$. Com efeito, $t\cdot 0 + t = t\cdot 0 + t\cdot 1 = t(0+1) = t\cdot 1 = t$, donde $t\cdot 0 = 0$. Por outro lado, dados $t, v \in K$ com $t\cdot v = 0$, segue-se que $t = 0$ ou $v = 0$. Com efeito, se for $t\cdot v = 0$ e $t \neq 0$, então obtemos $t\cdot v = t\cdot 0$. Desde que

$t \neq 0$, existe t^{-1} e multiplicando ambos os membros por t^{-1} resulta que $v = 0$. Assim em todo corpo K, tem-se que $t \cdot v \neq 0$ sempre que os dois fatores t e v forem ambos diferentes de zero.

Definição 1.2 (Corpo ordenado). *Um corpo K é ordenado se contém um subconjunto P, chamado subconjunto dos elementos positivos de K, satisfazendo as seguintes propriedades:*

P1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Isto é, $x, y \in P$ então $x+y \in P$ e $x \cdot y \in P$.

P2. Dados $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

Assim, se indicarmos com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, temos $K = P \cup (-P) \cup \{0\}$, sendo os conjuntos P, $-P$ e $\{0\}$ dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ chamam-se *negativos*.

Definição 1.3 (Ordem). *Dado um cunjunto $\xi \neq \emptyset$ uma relação de ordem em ξ é uma relação binária $\mathcal{R}$ que satisfaz:*

i) $x\mathcal{R}x$, $\forall x \in \xi$ *(reflexiva).*

ii) *Se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ então $x = y$ (antissimétrica).*

iii) *Se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ então $x\mathcal{R}z$ (transitiva).*

Em todo corpo ordenado K temos uma relação de ordem natural definida por

$$x \leqslant y \Leftrightarrow (y - x) \in (P \cup \{0\}).$$

Quando $x \leqslant y$ dizemos que x é menor ou igual a y.

Também podemos definir uma relação

$$x < y \Leftrightarrow (y - x) \in P,$$

e podemos verificar as seguintes propriedades:

O1. se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$ (transitiva).

O2. dados $x, y \in K$, ocorre exatamente uma das alternativas seguintes: ou $x = y$, ou $x < y$, ou $y < x$ (tricotomia).

O3. se $x < y$, então $x + z < y + z$ $\forall z \in K$ (adição é monótona).

O4. se $x < y$, então $x \cdot z < y \cdot z$ quando $0 < z$ e $y \cdot z < x \cdot z$ quanto $z < 0$ (multiplicação é monótona).

Demonstraremos estas propriedades:

O1. Dizer $x < y$ e $y < z$ significa afirmar que $y - x \in P$ e $z - y \in P$. Por **P1** concluímos que $(z - y) + (y - x) \in P$, ou seja, $z - x \in P$, o que significa $x < z$.

O2. Dados $x, y \in K$, ou $y - x \in P$, ou $y - x = 0$, ou $y - x \in -P$ (isto é, $x - y \in P$). No primeiro caso tem-se $x < y$, no segundo $x = y$ e no terceiro $x > y$. Estas possibilidades se excluem mutuamente, por **P2**.

O3. Se $x < y$ então $y - x \in P$, donde $(y + z) - (x + z) = y - x \in P$. Isto significa que $x + y < y + z$.

O4. Se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x \in P$ e $z \in P$. Logo $(y - x) \cdot z \in P$, isto é, $y \cdot z - x \cdot z \in P$, o que significa $x \cdot z < y \cdot z$. Se porém, $x < y$ e $z < 0$, então $y - x \in P$ e $-z \in P$, donde $(y - x) \cdot (-z) \in P$, isto é $x \cdot z - y \cdot z \in P$, o que significa $y \cdot z < x \cdot z$.

Quando $x < y$ dizemos que x é menor do que y e a relação "$<$" não é reflexiva nem antissimétrica, logo não é uma relação de ordem segundo a definição 1.3.

1.2 O corpo dos números racionais

Consideremos o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) | a \in \mathbb{Z} \;\; e \;\; b \in \mathbb{Z}^*\}$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. Definamos nele a relação: $(a, b) \sim (c, d)$ quando $ad = bc$.

Teorema 1.1. *A relação acima é de equivalência*

Prova: Devemos mostrar que a relação acima safistaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Reflexiva: $(a, b) \sim (a, b)$ pois $ab = ba$. Simétrica: seja $(a, b) \sim (c, d)$, assim $ad = bc$, logo resulta que, $da = cb$ ou $cb = da$, portanto, $(c, d) \sim (a, b)$. Transitiva: seja $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, assim obtemos $ad = bc$ e $cf = de$. Multiplicando ambos os membros da primeira igualdade acima por f e da segunda igualdade por b, obtemos $adf = bcf$ e $bcf = bde$, de onde segue que $adf = bde$. Cancelando o fator $d \neq 0$, obtemos $af = be$, portanto $(a, b) \sim (e, f)$. ■

Definição 1.4. *Dado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por $\dfrac{a}{b}$ (que se lê "a sobre b") a classe de equivalência do par (a, b) pela relação $\sim$ acima. Assim,*

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ \ | \ \ (x, y) \sim (a, b)\}.$$

Teorema 1.2 (Propriedade fundamental das frações)**.** *Se (a, b) e (c, d) são elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$.*

Prova: Temos que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc,$$

provando o resultado. ■

Temos agora um significado preciso para o símbolo de fração $\dfrac{a}{b}$. Trata-se de uma classe de equivalência com respeito à relação de equivalência que acabamos de introduzir.

Definição 1.5. *Denotamos por $\mathbb{Q}$, e denominamos conjunto dos números racionais, o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, isto é,*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim) = \left\{ \frac{a}{b} \ \ | \ \ a \in \mathbb{Z} \ \ \text{e} \ \ b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Vamos agora definir duas operações em $\mathbb{Q}$, dotando-o, portanto, de uma estrutra algébrica.

Definição 1.6. *Sejam $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ números racionais, isto é, elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos as* *operações chamadas de adição e de multiplicação, respectivamente, por:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad e \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Teorema 1.3. *As operações em $\mathbb{Q}$, acima, estão bem definidas.*

Prova: Tomemos, por hipótese, que $ab' = ba'$ e $cd' = dc'$. Assim

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}$$

Queremos provar que as duas somas são iguais, ou seja, que $(ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd$, isto é, $adb'd' + bcb'd' = a'd'bd + b'c'bd$, ou, $(ab')(dd') + (bb')(cd') = (a'b)(dd') + (bb')(c'd)$, o que segue imediatamente da hipótese acima. Agora temos

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

Da mesma forma, vamos mostrar que esses dois produtos são iguais, isto é, $acb'd' = a'c'bd$, ou, $(ab')(cd') = (a'b)(c'd)$ o que segue imediatamente da hipótese acima. ■

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo ordenado. De fato, considere $P = \{p/q \in \mathbb{Q}; p \cdot q \in \mathbb{N}\}$. Se x e y são elementos quaisquer em $\mathbb{Q}$, temos

P1.

$$x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$$

Sendo $(ps + rq)(qs) = pqs^2 + rsq^2$ e $pq, rs \in \mathbb{N}$, segue que $(ps + rq)(qs) \in \mathbb{N}$ uma vez que $s^2, q^2 \in \mathbb{N}$. Logo, $x + y \in \mathbb{Q}$.

$$x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

Como $(pr)(qs) = (pq)(rs)$ e $pq, rs \in \mathbb{N}$, segue que $xy \in \mathbb{Q}$.

P2. Seja $p/q \in \mathbb{Q}$ e suponha que $p/q \neq \mathbb{Q}$. Então $pq \neq \mathbb{N}$, isto é, $pq \leq 0$. Desta fora $pq = 0$ ou $pq < 0$. Se $pq < 0$ então $(-p)q > 0$, ou seja, $(-p)q \in \mathbb{N}$ e portanto $(-p)/q \in P$. Mas então $-(p/q) \in P$.

1.3 Insuficiência de $\mathbb{Q}$

Os racionais são obtidos por subdivisões adequadas do segmento unidade. Se imaginarmos os números racionais marcados sobre uma reta, veremos que eles formam um subconjunto dessa reta que é denso no seguinte sentido: dado um ponto qualquer da reta, poderemos obter racionais tão perto dele quanto se queira; basta tomar subdivisões cada vez mais finas da unidade. Com este raciocínio pode parecer que os racionais cobrem toda a reta $\mathbb{R}$, isto é, que a cada ponto da reta corresponde um número racional. Que isso não é verdade já era conhecido pelos matemáticos da Escola Pitagórica. Sabiam eles que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos tem comprimento igual a 1, então a medida da hipotenusa não é número racional. Portanto, o ponto P da reta $\mathbb{R}$, obtido traçando-se a circunferência centrada em 0 e raio igual a hipotenusa, não corresponde a um racional (ver Figura 1.1). Desta forma os números racionais não são suficientes para expressar medida de segmentos.

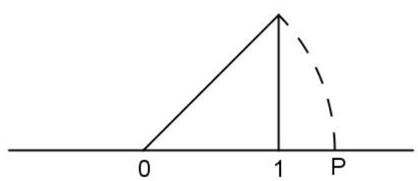

Figura 1.1: indicação da $\sqrt{2}$

Teorema 1.4. $\sqrt{2}$ *não é racional.*

Prova: suponhamos, por contradição, que a hipotenusa seja um número racional da forma $\dfrac{p}{q}$. Podemos supor que p e q são primos entre si. Pelo Teorema de Pitágoras, $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 1+1$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é um inteiro par, o que implica que p é par, isto é, $p = 2r$ para algum $r \in \mathbb{Z}$. Portanto, $4r^2 = 2q^2$, ou seja, $q^2 = 2r^2$, de onde segue que q também é par. Ora, p e q sendo números pares não podem ser primos entre si. ∎

Definição 1.7. ***i.*** *Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se limitado superiormente quando existe $b \in K$ tal que $b \geqslant x$ para todo $x \in X$. Cada $b \in K$ com esta propriedade chama-se uma cota superior de X.*

ii. *Analogamente,* $X \subset K$ *diz-se limitado inferiormente quando existe* $a \in K$ *tal que* $x \in X \Rightarrow a \leqslant x$. *Um elemento* $a \in K$ *com esta propriedade chama-se uma cota inferior de* X.

iii. *Um subconjunto* X *de um corpo ordenado* K *chama-se limitado quando é limitado superior e inferiormente.*

Definição 1.8. ***i.*** *Sejam* K *um corpo ordenado e* $X \subset K$ *um subconjunto limitado superiormente. Um elemento* $b \in K$ *chama-se supremo do subconjunto* X *quando* b *é a menor das cotas superiores de* X *em* K.

ii. *Analogamente, um elemento* $a \in K$ *chama-se ínfimo de um conjunto* $Y \subset K$, *limitado inferiormente, quando* a *é a maior das cotas inferiores de* k.

A insuficiência dos números racionais, para efeitos da Análise Matemática, é o fato de que neste corpo ordenado alguns conjuntos limitados não possuem supremo (ou ínfimo). Este fato está ligado à inexistência de raízes quadradas racionais de certos números inteiros, o qual foi demonstrado acima a respeito de que não existe um número racional x tal que $x^2 = 2$.

Exemplo 1.1. *Sejam* $X = \{x \in \mathbb{Q}; x \geqslant 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ *e* $Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$. *Como* $x > 2$ *obtemos* $x^2 > 4$, *concluímos que se* $x > 2$ *então* $x \notin X$, *ou seja* $X \subset [0, 2]$. *Logo* X *é um conjunto limitado de números racionais. Por outro lado,* $Y \subset (0, +\infty)$, *de modo que* Y *é limitado inferiormente. Mostraremos agora que não existem supremo de* X *nem ínfimo de* Y *em* $\mathbb{Q}$. *Para isto estabelecemos os seguintes fatos:*

I. *O conjunto* X *não possui elemento máximo. Com efeito, para cada* $x \in X$, *vemos que* $\dfrac{2 - x^2}{2x + 1} > 0$. *Portanto escolhendo um número racional* r *tal que* $r < 1$ *e* $0 < r < \dfrac{2 - x^2}{2x + 1}$ *teremos que* $x + r$ *ainda pertence a* X. *Com efeito, de* $r < 1$ *segue-se* $r^2 < r$. *Da outra desigualdade que* r *satisfaz segue-se* $r(2x + 1) < 2 - x^2$. *Por conseguinte,* $(x + r)^2 = x^2 + 2rx + r^2 < x^2 + 2rx + r = x^2 + r(2x + 1) < x^2 + 2 - x^2 = 2$. *Assim, dado qualquer* $x \in X$, *existe um número maior,* $x + r \in X$.

II. *O conjunto* Y *não possui elemento mínimo. De fato, dado qualquer* $y \in Y$, *temos* $y > 0$ *e* $y^2 > 2$. *Logo podemos obter um número racional* r *tal que* $0 < r < \dfrac{y^2 - 2}{2y}$. *Então* $2ry < y^2 - 2$ *e daí* $(y - r)^2 = y^2 - 2ry + r^2 > y^2 - 2ry > 2$. *Note-se também que*

$r < \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{y}$, donde $r < y$, isto é, $y - r > 0$. Assim, dado $y \in Y$ arbitrário, podemos obter $y - r \in Y$, $y - r < y$.

III. *Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$. Com efeito, tem-se $x^2 < 2 < y^2$ e, portanto, $x^2 < y^2$. Como x e y são ambos positivo, conclui-se que $x < y$.*

Usando os fatos I, II e III mostramos que, entre os números racionais, não existe supremo de X (ou $supX$) e nem ínfimo de Y (ou $infY$). Com efeito, suponhamos, primeiro, que exista $a = supX$. Seria forçosamente $a > 0$. Não poderia ser $a^2 < 2$ porque isto obrigaria $a \in X$ e, então, a seria o elemento máximo de X, que não existe, por I. Tampouco poderia ser $a^2 > 2$, porque isto faria $a \in Y$. Como, em virtude de II, Y não possui elemento mínimo, existiria $b \in Y$, com $b < a$. Usando III, concluímos que $x < b < a$ para todo $x \in X$, o que contradiz ser $a = supX$.

Assim, se existir $a = supX$, deverá ser $a^2 = 2$. Mas, nós já vimos que não existe número racinal com esta propriedade. Com um raciocício inteiramente análogo, baseado nos fatos I, II e III, mostramos que Y não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Definição 1.9. *Um corpo ordenado K chama-se completo quando todo sub-conjunto X não vazio e limitado superiormente possui supremo em K. Da mesma forma, num corpo ordenado completo, todo sub-conjunto Y não-vazio e limitado inferiormente possui ínfimo em K.*

Pelo que vimos acima, podemos concluir que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo. No próximo capítulo construímos um corpo ordenado completo que contém uma "cópia de $\mathbb{Q}$". Assim com um abuso de linguagem diremos que este é uma extensão de $\mathbb{Q}$ que o complete e elimina a "deficiência" apontada.

Capítulo 2

Números Reais

Neste capítulo construiremos os números reais utilizando dois métodos distintos e faremos ainda a caracterização dos números reais por meio de decimais.

2.1 Cortes de Dedekind

Nesta seção vamos apresentar a construção dos números reais via cortes de Dedekind.

Vamos considerar para esta construção, $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ o conjunto das partes de $\mathbb{Q}$ e dentro deste conjunto definimos o que é um corte.

Definição 2.1. *Dizemos que $A \subset \mathbb{Q}$ é um corte se valem as seguintes sentenças.*

i. $A \neq \emptyset$ *e* $A \neq \mathbb{Q}$.

ii. *Se $p \in A$ e $q < p$ então $q \in A$.*

iii. *Para todo $p \in A$ existe $q \in A$ tal que $p < q$.*

Denotamos por Ω o conjunto de todos os cortes. Note que $\Omega \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Exemplo 2.1. *Para todo $r \in \mathbb{Q}$ o conjunto $Z(r) = \{p \in \mathbb{Q}; p < r\}$ é um corte. De fato, é de verificação direta que $Z(r) \neq \emptyset$ e que $Z(r) \neq \mathbb{Q}$ pois $[Z(r)]^C = \{q \in \mathbb{Q}; q \geqslant r\}$. Agora seja $u \in Z(r)$, com isso temos $u < r$ e seja também $v < u$, assim obtemos $v < u < r$, ou ainda, $v < r$, portanto $v \in Z(r)$. Por último, se $s \in Z(r)$, então $s < \dfrac{s+r}{2} < r$ e, como $\dfrac{s+r}{2} \in \mathbb{Q}$, então $\dfrac{s+r}{2} \in Z(r)$. Portanto se tomarmos $t = \dfrac{s+r}{2}$, para todo $s \in Z(r)$ existe $t \in Z(r)$ tal que $s < t$.*

Observe que pelo exemplo 2.1, está definida uma função

$$\begin{aligned} Z: \mathbb{Q} &\longrightarrow \Omega \\ r &\longmapsto Z(r) \end{aligned}$$

e os cortes da forma $Z(r)$ são ditos cortes racionais. A função Z é injetiva. De fato, suponhamos que $Z(u) = Z(v)$. Se $u < v$ então tomando o ponto médio temos

$$u < \frac{u+v}{2} < v.$$

Logo $r = \dfrac{u+v}{2} \in Z(v) = Z(u) \Rightarrow r < u$ que é um contradição. Analogamente nã podemos ter $v < u$. Portanto $u = v$, o que prova a injetividade da função $Z : \mathbb{Q} \to \Omega$.

Exemplo 2.2. *É claro que existem sub-conjuntos de* $\mathbb{Q}$ *que não são cortes. Por exemplo* $A = \{p \in \mathbb{Q}; p > 1\}$ *não é um corte. Também existem cortes que não são racionais. Por exemplo* $B = \{x \in \mathbb{Q}^*; x^2 < 2\} \neq Z(r), \forall r \in \mathbb{Q}$, *onde* $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Proposição 2.1. *Dado* $A, B \in \Omega$ *o conjunto* $C = A \oplus B = \{r \in \mathbb{Q}; r = p + q \text{ com } p \in A \text{ e } q \in B\}$ *é ainda um corte.*

Prova: i. Claramente $C \neq \emptyset$. Sejam $p_o \in A^C$ e $q_o \in B^C$ os quais existem porque A e B são cortes. Vamos mostrar que $(p_o + q_o) \notin C$ e portanto que $C^C \neq \emptyset$. Suponhamos por absurdo que $(p_o + q_o) \in C$. Então, existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $p_o + q_o = p + q$. Não podemos ter $p_o \leq p$ (senão teríamos $p_o \in A$) nem $q_o \leq q$ (senão teríamos $q_o \in B$). Logo $p < p_o$ e $q < q_o$. Pela monotonia da adição $p + q < p + q_o < p_o + q_o$, que é absurdo.

ii. Sejam $r \in C$ e $s < r$. Existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $r = p + q$. Seja $t = s - p$. Mostremos que $t \in B$. De fato, devemos ter $t < q$ pois senão, se $q \leq t$, então $p+q \leq p+t$, isto é, $r \leq s$, o que não ocorre. Portanto $t < q$ e, como B é corte, segue que $t \in B$. Concluímos que $s = p + t$ com $p \in A$ e $t \in B$ e, portanto, $s \in C$.

iii. Finalmente, seja $r \in C$ e mostremos que existe $s \in C$ tal que $r < s$. Ora, $r \in C$ significa que $r = p+q$ com $p \in A$ e $q \in B$. Existe $t \in A$ tal que $p < t$, logo, $r = p+q < t+q$.

Para concluir, basta tomarmos $s = t + q$. ∎

Proposição 2.2. *Dado $A \in \Omega$ o conjunto $B = \ominus A = \{p \in \mathbb{Q}; -p \in A^C$ e $\exists q \in A^C$ tal que $q < -p\}$ é ainda um corte.*

Prova: i. Sejam $p \in A$ e $q \in A^C$. É fácil ver que $-(q+1) \in B$ e $-p \in B^C$. Portanto, $B \neq 0$ e $B^C \neq \emptyset$, este último mostra que $B \neq \mathbb{Q}$.

ii. Sejam $p \in B$ e $q < p$. Temos que $-p < -q$. Como $-p \in A^C$, segue que $-q \in A^C$ e que $-q$ não é mínimo de A^C. Concluímos que $q \in B$.

iii. Seja $p \in B$. Por definição de B, existe $q \in A^C$ tal que $q < -p$. Portanto $p < -q \Rightarrow \frac{p}{2} < \frac{-q}{2}$. Somando-se $\frac{p}{2}$ em ambos os membros obtemos que $p < \frac{p-q}{2}$. Também vemos que $q < -p$, tomando-se o ponto médio, devemos ter $q < \frac{q-p}{2}$. Logo tomando $r = \frac{p-q}{2}$ temos que $p < r$ e também que $q < -r$, logo, $r \in B$. ∎

De posse das proposições 2.1 e 2.2 podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *A operação (adição)*

$$\begin{array}{rccl} \oplus & : & \Omega \times \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & & (A, B) & \longmapsto & A \oplus B \end{array}$$

com $A \oplus B$ dado na proposição 2.1 satisfaz às seguintes propriedades:

i) *$A \oplus B = B \oplus A$, $\forall A, B \in \Omega$. (Comutativa)*

ii) *$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$, $\forall A, B, C \in \Omega$. (Associativa)*

iii) *$A \oplus Z(0) = A$, $\forall A \in \Omega$. (Existência de Neutro)*

iv) *$\forall A \in \Omega$, $\exists B = \ominus A$ (definido na proposição 2.2) tal que $A \oplus B = Z(0)$. (Existência do oposto)*

Prova: i. Seja $r \in (A \oplus B)$. Então $r = p + q$ com $p \in A$ e $q \in B$. Pela comutatividade da soma de números racionais, temos $r = q + p$ com $q \in B$ e $p \in A$. Concluímos que $r \in (B \oplus A)$ e, portanto, $(A \oplus B) \subset (B \oplus A)$. Analogamente mostra-se a inclusão contrária, provando-se que $A \oplus B = B \oplus A$.

ii. Seja $u \in [(A \oplus B) \oplus C]$. Então $u = r + s$ com $r \in (A \oplus B)$ e $s \in C$. Novamente pela definição de adição devemos ter $r = p+q$ com $p \in A$ e $q \in B$. Logo $u = (p+q)+s$ com $p \in A$, $q \in B$ e $s \in C$. Pela associatividade dos números racionais resulta que $u = p + (q + s)$ com $p \in A$ e $(q+s) \in (B \oplus C)$. Ou seja $u \in [A \oplus (B \oplus C)]$, ou ainda, $[(A \oplus B) \oplus C] \subset [A \oplus (B \oplus C)]$. Analogamente mostra-se a inclusão contrária, provando-se que $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

iii. Seja $r \in [A \oplus Z(0)]$. Então $r = p + q$ com $p \in A$ e $q \in Z(0)$. Ora $q \in Z(0)$ siginifica $q < 0$, logo $p + q < p + 0$, isto é, $r < p$. Como A é corte, segue que $r \in A$. Mostramos assim que $[A \oplus Z(0)] \subset A$. Reciprocamente, seja $r \in A$. Desde que A é corte, podemos escolher $p \in A$ tal que $r < p$. Se $q = r - p$ então $q = r - p < 0$ e portanto $q \in Z(0)$. Concluímos que $r = (p + q) \in [A \oplus Z(0)]$, isto é, $A \subset [A \oplus Z(0)]$. Portanto $A \oplus Z(0) = A$.

iv. Seja $A \in \Omega$ arbitrariamente fixado e $(\ominus A)$ o corte definido na proposição 2.2. Vamos mostrar que $A \oplus (\ominus A) = Z(0)$. De fato, seja $r \in [A \oplus (\ominus A)]$. Então existem $s \in A$, $p \in \ominus A$ e $q \in A^C$ tais que $r = s + p$ e $q < -p$. Como $s \in A$ e $q \in A^C$, temos que $s < q$. De $q < -p$, segue que $p < -q$ e, pela monotonia da adição, $s+p < s-q$. Portanto, $r = s+p < s-q < 0$. Concluímos que $r \in Z(0)$, provando que $[A \oplus (\ominus A)] \subset Z(0)$. Reciprocamente seja $r \in Z(0)$, isto é, $r < 0$. Sejam ainda $s \in A$ e n o menor natural tal que $\left(s - \dfrac{nr}{2}\right) \in A^C$. Tomemos $p = s - \dfrac{(n-1)r}{2}$, $t = -\dfrac{nr}{2}$ e $q = s - \dfrac{(n+1)r}{2}$. Assim vemos que $t, q \in A^C$ e $t < q$, logo, $-q \in \ominus A$. Também temos $p \in A$ e $r = p - q$. Segue que $r \in [A \oplus (\ominus A)]$. Portanto $A \oplus (\ominus A) = Z(0)$. ∎

Observação 2.1. *Note que em Ω o neutro $Z(0)$ é único. Da mesma forma o oposto também é único.*

Na próxima proposição reunimos algumas propriedades interessantes sobre os cortes racionais.

Proposição 2.3. ***a)*** *Dados $p, q \in \mathbb{Q}$ tem-se que $p \leqslant q \Leftrightarrow Z(p) \subset Z(q)$*

b) *$\ominus Z(p) = Z(-p)$, $\forall p \in \mathbb{Q}$*

c) *Para todos $p, q \in \mathbb{Q}$ tem-se que*

i) *$Z(p) \oplus Z(q) = Z(p+q)$;*

ii) *$Z(p) \oplus [\ominus Z(p)] = Z(p-q)$.*

Prova: **a)** Suponha $p \leqslant q$ e $r \in Z(p)$. Assim $r < p \leqslant q$ e portanto $r \in Z(p)$. Ou seja, $Z(p) \subset Z(q)$. Reciprocamente suponha que $Z(p) \subset Z(q)$ e $q < p$. Então $q < \dfrac{q+p}{2} < p$, de onde vemos que $r = \dfrac{p+q}{2} \in Z(p)$ e $r \notin Z(q)$, o que é um absurdo pois $Z(p) \subset Z(q)$. Logo devemos ter $p \leqslant q$.

b) Seja $r \in [\ominus Z(p)]$ então $-r \in [Z(p)]^C$ e $\exists q \in [Z(p)]^C$ tal que $q < -r$. Então $r < -q$ e de $q \in [Z(p)]^C$ resulta que $p \leqslant q$, ou ainda $-q \leqslant -p$. Logo $r < -q \leqslant -p$ e concluímos que $r \in Z(-p)$. Portanto $[\ominus Z(p)] \subset Z(-p)$. Reciprocamente suponhamos agora que $r \in Z(-p)$ então $r < -p$, ou seja, $p < -r \Rightarrow -r \in [Z(p)]^C$. Também observemos que existe $q = p \in [Z(p)]^C$ com $q < -r$. Logo $r \in [\ominus Z(p)]$, provando-se que $Z(-p) \subset [\ominus Z(p)]$.

c) *(i)* Seja $r \in Z(p+q)$, isto é, $r < p+q$. Decompomos r como segue $r = \left(p + \dfrac{r-p-q}{2}\right) + \left(q + \dfrac{r-p-q}{2}\right)$. Vemos que $r - (p+q) < 0$ e, portanto, $p + \dfrac{r-p-q}{2} < p$. Segue que $\left(p + \dfrac{r-p-q}{2}\right) \in Z(p)$. Analogamente, $\left(q + \dfrac{r-p-q}{2}\right) \in Z(q)$. Concluímos que $r \in [Z(p) \oplus Z(q)]$, isto é, $Z(p+q) \subset [Z(p) \oplus Z(q)]$.

Tomemos agora $r \in [Z(p) \oplus Z(q)]$ e sejam $s \in Z(p)$ e $t \in Z(q)$ tais que $r = s + t$ com $s < p$ e $t < q$. Temos $r = s + t < p + q$. Concluímos que $r \in Z(p+q)$, isto é, $Z(p) \oplus Z(q) \in Z(p+q)$. Portanto $Z(p+q) = Z(p) \oplus Z(q)$.

(ii) Basta usar a letra (b) e o item (i) anterior. ■

Proposição 2.4. *Para quaisquer $A, B \in \Omega$, temos:*

i) *$A \subset B$ ou $B \subset A$*

ii) $\ominus(\ominus A) = A$

iii) $\ominus(A \oplus B) = (\ominus A) \oplus (\ominus B)$

iv) $A = Z(0) \Longleftrightarrow \ominus A = Z(0)$

v) $A \neq Z(0) \Longleftrightarrow \ominus A \neq Z(0)$

vi) $Z(0) \subset A \Longleftrightarrow \ominus A \subset Z(0)$

vii) $Z(0) \subsetneq A \Longleftrightarrow \ominus A \subsetneq Z(0)$

Prova: i) Se $A = B$, então não há nada a ser demonstrado. Suponhamos $A \neq B$. Então existe $p \in B$ tal que $p \notin A$ ou existe $q \in A$ tal que $q \notin B$. No primeiro caso, qualquer que seja $r \in A$ temos $r < p$ (pois, se fosse $p \leq r$, então, como A é corte, teríamos $p \in A$) e, como B é corte, $r \in B$. Logo $A \subset B$. De maneira análoga, concluímos que no segundo caso $B \subset A$.

ii) Pela existência do oposto e a comutatividade temos que $(\ominus A) \oplus A = Z(0)$. Desta igualdade e a unicidade do oposto resulta que $\ominus(\ominus A) = A$.

iii) Basta ver que $(A \oplus B) \oplus [(\ominus A) \oplus (\ominus B)] = [A \oplus (\ominus A)] \oplus [B \oplus (\ominus B)] = Z(0)$, então pela unicidade do oposto segue que $\ominus(A \oplus B) = (\ominus A) \oplus (\ominus B)$.
iv) $A = Z(0) \Rightarrow \ominus A = \ominus Z(0) = Z(-0) = Z(0)$. Reciprocamente se $\ominus A = Z(0) \Rightarrow A = \ominus(\ominus A) = \ominus Z(0) = Z(-0) = Z(0)$.

v) Consequência imediata do ítem anterior.

vi) Suponha que $Z(0) \subset A$. Se $Z(0) = A$ pelo item (iii) o resultado é trivial e não há o que fazer. Suponhamos então que $Z(0) \subsetneq A$, Então $A^C \subset [Z(0)]^C = \{p \in \mathbb{Q}; p \geqslant 0\}$, ou seja, para todo $r \in A^C$ tem-se que $r \geqslant 0$. Agora como $(\ominus A)$ e $Z(0)$ são cortes, pelo ítem (i), devem ter que $(\ominus A) \subsetneq Z(0)$ ou $Z(0) \subsetneq (\ominus A)$. Suponha que $Z(0) \subsetneq (\ominus A)$. Logo deve existir $r > 0$ tal que $r \in (\ominus A)$. Então existe $r > 0$ tal que $-r \in A^C$ (absurdo!). Assim devemos ter

$(\ominus A) \subsetneq Z(0)$. De modo análogo provamos que se $(\ominus A) \subset Z(0)$ então $Z(0) \subset A$.

vii) Já está provado no ítem anterior. ∎

Podemos introduzir uma relação de ordem no conjunto dos cortes.

Definição 2.2. *Sejam $A, B \in \Omega$.*

i) *Se $A \subset B$ dizemos que o corte A é menor ou igual ao corte B e escrevemos $A \trianglelefteq B$.*

ii) *Se $A \subsetneq B$ dizemos que o corte A é menor do que B e denotamos $A \triangleleft B$.*

Teorema 2.2 (Tricotomia)**.** *Sejam $A, B \in \Omega$. Então uma, e somente uma, das possibilidades abaixo ocorre:*

i) *$A = B$;*

ii) *$A \triangleleft B$;*

iii) *$B \triangleleft A$.*

Prova: Inicialmente verificamos que as tres possibilidades se excluem mutualmente, ou seja, no máximo ocorre uma delas. De fato, se $A = B$ é óbvio, pela definição de igualdade de conjuntos, que as outras duas possibilidades (ii) e (iii) não podem ocorrer. Também é imediato que $A \triangleleft B$ ou $B \triangleleft A$ excluem $A = B$. Assim concluimos nossa afirmação mostrando que (ii) e (iii) também se excluem mutualmente. Para isto suponta que (ii) e (iii) ocorram simultaneamente, isto é, $A \triangleleft B$ e $B \triangleleft A$. Então $\exists r \in B$ tal que $r \notin A$ e $\exists s \in A$ tal que $s \notin B$. Claramente $r \neq s$. Como B é corte não podemos ter $s < r$. Também considerando que A é corte não podemos ter $r < s$. Isto é um absurdo, pois contradiz a tricotomia dos números racionais.

Agora vamos povar que necessariamente uma das possibilidades (i)-(iii) ocorre. Note que $A = B$ ou $A \neq B$. Se $A = B$ não há o que provar. Suponhamos que $A \neq B$, então $A \ominus B \neq \emptyset$ ou $B \ominus A \neq \emptyset$. No primeiro caso $B \subsetneq A$ e no segundo $A \subsetneq B$. Portano $A \triangleleft B$ ou $B \triangleleft A$. ∎

Teorema 2.3. *A relação $\trianglelefteq$ é uma relação de ordem em Ω, isto é, satisfaz às seguintes propriedades:*

i) *$A \trianglelefteq A$, $\forall A \in \Omega$. (reflexiva)*

ii) *Se $A \trianglelefteq B$ e $B \trianglelefteq A$ então $A = B$. (antissimétrica)*

iii) *Se $A \trianglelefteq B$ e $B \trianglelefteq C$ então $A \trianglelefteq C$. (transitiva)*

Prova: Trivial. ■

Observação 2.2. *Seja $A \in \Omega$. Quando $A \lhd Z(0)$ dizem que A é um corte negativo e quanto $Z(0) \lhd A$ dizemos que A é um corte positivo. Ainda nesta direção, Se $A \trianglelefteq Z(0)$ dizemos que A é um corte não positivo e se $Z(0) \trianglelefteq A$ dizemos que A é um corte não negativo.*

Proposição 2.5. *Dados A,$B \in \Omega$ com $Z(0) \trianglelefteq A$ e $Z(0) \trianglelefteq B$, então o conjunto*

$$C = A \odot B = \mathbb{Q}^- \cup \{r = p \cdot q \quad com \quad p \in A, \ q \in B, \ p \geq 0 \quad e \quad q \geq 0\}$$

é ainda um corte e satisfaz $Z(0) \trianglelefteq (A \odot B)$, onde $\mathbb{Q}^- = \{q \in \mathbb{Q}; q < 0\}$.

Prova: i. Claramente $-1 \in C$. Sejam $p_o \in A^C$ e $q_o \in B^C$ então $p_o \geqslant 0$ e $q_o \geqslant 0$. Vamos mostrar que $p_o \cdot q_o \notin C$ e, portanto, que $C^C \neq \emptyset$ e com isso $C \neq \emptyset$. Suponhamos, por absurdo, que $p_o \cdot q_o \in C$. Então, existem $p \in A$ e $q \in B$ tais que $p_o \cdot q_o = p \cdot q$. Não podemos ter $p_o \leq p$, senão teríamos $p_o \in A$ e nem $q_o \leq q$, senão teríamos $q_o \in B$. Logo $p < p_o$ e $q < q_o$. Pela monotonia da multiplicação, $p \cdot q \leq p \cdot q_o < p_o \cdot q_o$, que é absurso.

ii. Sejam $r \in C$ e $s < r$. Se $s < 0$, então é imediato que $s \in C$. Suponhamos $s \geq 0$ e, portanto $r > 0$. Da definição de C, segue que existem $p \in A$ e $q \in B$, tais que $r = p \cdot q$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Como $r > 0$, segue que $p > 0$. Seja $t = s/p$. Mostraremos que $t \in B$. De fato, devemos ter $t < q$ pois senão, se $q \leq t$, então $p \cdot q \leq p \cdot t$, isto é, $r \leq s$. Portanto, $t < q$ e como B é corte, segue que $t \in B$. Concluímos que $s = p \cdot t$ com $p \in A$ e $t \in B$ e, portanto, $s \in C$.

iii. Finalmente, seja $r \in C$ e mostraremos que existe $s \in C$ tal que $r < s$. Se $r < 0$, então basta tomar $s = r/2$. Suponhamos $r \geq 0$. Neste caso, $r \in C$ significa que $r = p \cdot q$ com $p \in A$ e $q \in B$, $p \geq 0$ e $q \geq 0$. Existem $t \in A$ e $u \in B$ tal que $p < t$ e $q < u$, logo $r = p \cdot q \leq t \cdot q < t \cdot u$. Para concluir, basta tomar $s = t \cdot u$.

Agora, seja $\alpha \in Z(0)$, logo $\alpha < 0$, de $\alpha \in A$ e $\alpha \in B$, segue que $\alpha \in A \cap B$, isto é, $\alpha \subset A \cap B$. ∎

Definição 2.3. *Definimos módulo de um corte $A \in \Omega$, como segue.*

$$|A| = \begin{cases} A \quad se \quad Z(0) \subset A \\ \ominus A \quad se \quad A \subsetneq Z(0) \end{cases}$$

Proposição 2.6. *Dado $A \in \Omega$ com $Z(0) \lhd A$, então o conjunto*

$$B = A^{\ominus 1} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \{p \in \mathbb{Q}^+ ; p^{-1} \in A^C \quad e \quad \exists q \in A^C, \quad tal \quad que \quad q < p^{-1}\}$$

é ainda um corte, onde $\mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q}; r > 0\}$.

Prova: **i.** Claramente temos $-1 \in B$. Seja $p \in A$ tal que $p > 0$. Temos que $p^{-1} \in B^C$. De fato, se fosse $p^{-1} \in B$, então teriamos $p = (p^{-1})^{-1} \in A^C$, que é absurdo. Desta forma mostramos que $B \neq \emptyset$ e que $B^C \neq \emptyset$, isto é, $B \neq \mathbb{Q}$.

ii. Sejam $p \in B$ e $q < p$. Se $q \leq 0$, então trivialmente temos $q \in B$. Suponhamos $q > 0$ e, portanto, $p > q > 0$. Temos $p^{-1} < q^{-1}$. Como $p^{-1} \in A^C$, segue que $q^{-1} \in A^C$ e que q^{-1} não é mínimo de A^C. Concluímos que $q \in B$.

iii. Seja $p \in B$. Vamos mostrar que existe $q \in B$ tal que $p < q$. Claramente existe $q \in B$ com $q > 0$, logo, se $p \leq 0$, então não há nada a ser demonstrado. Suponhamos $p > 0$. Por definição de B, existe $r \in A^C$ tal que $r < p^{-1}$. Tomando $s = \dfrac{r + p^{-1}}{2}$ temos $r < s < p^{-1}$ e, portanto, $s \in A^C$. Tomando $q = s^{-1}$ temos $s = q^{-1} \Rightarrow q^{-1} < p^{-1} \Rightarrow p < q$ e também $q \in B$ pois $q^{-1} \in A^C$ e $r < q^{-1}$. ∎

Teorema 2.4. *A operação (produto)*

$$\begin{array}{rccl} \odot & : & \Omega \times \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & & (A, B) & \longrightarrow & A \odot B \end{array}$$

com

$$A \odot B = \begin{cases} A \odot B & se \quad Z(0) \trianglelefteq (A \cap B) \\ \ominus(A \odot |B|) & se \quad Z(0) \trianglelefteq A \quad e \quad B \triangleleft Z(0) \\ \ominus(|A| \odot B) & se \quad A \triangleleft Z(0) \quad e \quad Z(0) \trianglelefteq B \\ (|A| \odot |B|) & se \quad A \triangleleft Z(0) \quad e \quad B \triangleleft Z(0) \end{cases}$$

satisfaz às seguintes propriedades

i) $A \odot B = B \odot A$, $\forall A, B \in \Omega$. *(Comutativa)*

ii) $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$, $\forall A, B, C \in \Omega$. *(Associativa)*

iii) $A \odot Z(1) = A$, $\forall A \in \Omega$. *(Existência de Neutro)*

iv) $\forall A \in \Omega$, *com* $A \neq Z(0)$, $\exists B \in \Omega$ *tal que* $A \odot B = Z(1)$. *(Existência do inverso)*

Além disso vale

v) $(A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$, $\forall A, B, C \in \Omega$. *(Distributiva)*

Prova: **i)** Seja $r \in (A \odot B)$. Se $r < 0$, então é imediato que $r \in (B \odot A)$. Suponhamos $r \geqslant 0$. Podemos escrever $r = p \cdot q$ com $p \in A$, $q \in B$, $p \geqslant 0$ e $q \geqslant 0$. Pela comutatividade do produto de números racionais, temos $r = q \cdot p$ com $q \in B$, $p \in A$, $q \geqslant 0$ e $p \geqslant 0$. Concluímos que $r \in (B \odot A)$ e, portanto, $(A \odot B) \subset (B \odot A)$. Da mesma maneira mostra-se a inclusão contrária.

ii) Seja $r \in [(A \odot B) \odot C]$ se $r < 0$ é imediato que $r \in [A \odot (B \odot C)]$. Então suponhamos $r \geqslant 0$. Podemos escrever $r = (p \cdot q) \cdot s$, com $p \in A$, $q \in B$, $s \in C$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ e $s \geqslant 0$. Pela associatividade do produto de números racionais, temos $r = p \cdot (q \cdot s)$, com $p \in A$, $q \in B$, $s \in C$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ e $s \geqslant 0$. Concluímos que $r \in [A \odot (B \odot C)]$ e, portanto,

$[(A \odot B) \odot C] \subset [A \odot (B \odot C)]$. Da mesma forma mostra-se a inclusão contrária.

iii) Observemos inicialmente que $Z(0) \subset Z(1)$. Seja $r \in [A \odot Z(1)]$. Novamente, se $r < 0$. então é imediato que $r \in Z(0) \subset A$. Suponhamos $r \geqslant 0$. Escrevemos $r = p \cdot q$ com $p \in A$, $q \in Z(1)$, $p \geqslant 0$ e $q \geqslant 0$. Ora $q \in Z(1)$ significa $q < 1$, logo $p \cdot q \leqslant p \cdot 1$, isto é, $r \leqslant p$. Como A é corte, segue que $r \in A$. Mostramos assim que $[A \odot Z(1)] \subset A$. Reciprocamente, seja $r \in A$. Se $r < 0$, então $r \in [A \odot Z(1)]$. Suponhamos $r \geqslant 0$. Tomemos $p \in A$ tal que $0 \leqslant r < p$. Se $q = \dfrac{r}{p}$, então $0 \leqslant q < 1$ e, portanto, $q \in Z(1)$. Concluímos que $r = p \cdot q \in [A \odot Z(1)]$, isto é, $A \subset [A \odot Z(1)]$.

iv) Neste caso temos que $Z(0) \lhd A$. Então denotemos $B = A^{\ominus 1}$, dado na proposição 2.6 e provemos que $A \odot B = Z(1)$. De fato, seja $r \in (A \odot B)$. Se $r \leqslant 0$, então $r \in Z(1)$. Suponhamos $r > 0$. Então existem $s \in A$, $p \in B$ e $q \in A^C$ tais que $r = s \cdot p$, $s > 0$, $p > 0$, $q < p^{-1}$. Como $s \in A$ e $q \in A^C$, temos $s < q$. De $q < p^{-1}$ segue que $p < q^{-1}$ e, pela monotonia da multiplicação, $s \cdot p < \dfrac{s}{q} < 1$. Concluímos que $r \in Z(1)$. Reciprocamente, seja $r \in Z(1)$. Como antes, se $r < 0$, então é imediato que $r \in (A \odot B)$. Por outro lado, se $r = 0$, então, como $0 \in A$ e $0 \in B$, temos $r = 0 \cdot 0 \in A \odot B$. Suponhamos $r > 0$. Seja $s \in A$ com $s > 0$ e n o menor natural tal que $s \cdot (r^{-1})^n \in B^C$, tal n existe pois $r \in Z(1) \Rightarrow r < 1$ e, portanto, $r^{-1} > 1$ e $(r^{-1})^n$ é crescente e ilimitada e, consequentemente, $s \cdot (r^{-1})^n$ é crescente e ilimitada. Tomemos $p_1 = s \cdot (r^{-1})^{n-1}$ e $t = s \cdot (r^{-1})^n$. Pela escolha de n, temos $p_1 \in A$ e $t \in A^C$. Seja $p \in A$ tal que $p_1 < p$ e tomemos $q = t^{-1} \cdot p^{-1} \cdot p_1$. De $p_1 < p$ segue que $t < t \cdot p \cdot p_1^{-1} = q^{-1}$. Obtemos assim que $q^{-1} \in A^C$ e daí que $q \in C$. Temos ainda $p \cdot q = p \cdot t^{-1} \cdot p^{-1} \cdot p_1 = s^{-1} \cdot r^n \cdot s \cdot (r^{-1})^{n-1} = r$. Concluímos que $r \in (A \odot B)$.

v) Seja $r \in [(A \oplus B) \odot C]$. Vamos mostrar que $r \in [(A \odot C) \oplus (B \odot C)]$. Temos $Z(0) \subset (A \odot C) \oplus (B \odot C)$ e, portanto, basta considerar o caso $r \geqslant 0$. Podemos supor ainda que $r > 0$ pois, neste caso, se r é elemento do corte $[(A \odot C) \oplus (B \odot C)]$, então 0 também é. Neste caso, existem $p \in (A \oplus B)$ e $q \in C$ tais que $r = p \cdot q$, $p > 0$ e $q > 0$. Ora de $p \in (A \oplus B)$ podemos escrever $p = s + t$ com $s \in A$ e $t \in B$. Vamos mostrar que $(s \cdot q) \in (A \odot C)$ (da mesma maneira mostra-se que $(t \cdot q) \in (B \odot C)$. Se $s \cdot q < 0$, então, é imediato que $(s \cdot q) \in (A \odot C)$. Por outro lado, se $0 \leqslant s \cdot q$, então, com $q > 0$, temos $s \geqslant 0$ e daí segue que $(s \cdot q) \in (A \odot C)$. Tendo $r = s \cdot q + t \cdot q$ com $(s \cdot q) \in (A \odot C)$ e $(t \cdot q) \in (B \odot C)$, concluímos que $r \in [(A \odot C) \oplus (B \odot C)]$.

Agora Seja $r \in [(A \odot C) \oplus (B \odot C)]$ e mostremos que $r \in [(A \oplus B) \odot C]$. Como antes, basta considerar o caso $r > 0$. Existem $p \in (A \odot C)$ e $q \in (B \odot C)$ tais que $r = p + q$. Como $0 < r$ temos $p > 0$ ou $q > 0$. Para fixar as idéias, suponhamos $p > 0$. Neste caso, exsitem $s \in A$ e $t \in C$ tais que $p = s \cdot t$, $s > 0$ e $t > 0$. Vamos considerar os casos $q > 0$, $q = 0$ e $q < 0$.

(1) $q > 0$**:** Existem $u \in B$ e $v \in C$ tais que $q = u \cdot v$, $u > 0$ e $v > 0$. Suponhamos $v \leqslant t$ (o caso $v > t$ se trata analogamente). Temos $r = s \cdot t + u \cdot v = (s + \frac{u \cdot v}{t}) \cdot t$. Como $\frac{v}{t} \leqslant 1$ temos que $\frac{u \cdot v}{t} \in B$. Segue que $r \in (A \oplus B) \odot C$.

(2) $q = 0$**:** Tomemos $q' \in (B \odot C)$ tal que $q < q'$. Como $r = p + q < p + q'$ e, pelo caso anterior, $(p + q') \in [(A \oplus B) \odot C]$, concluímos que $r \in [(A \oplus B) \odot C]$.

(3) $q < 0$**:** Escrevemos $r = (s + q \cdot t^{-1}) \cdot t$. Como $q \cdot t^{-1} < 0$, segue que $q \cdot t^{-1} \in B$. Concluímos que $r \in [(A \oplus B) \odot C]$. (observemos que $s + q \cdot t^{-1} > 0$)

Verificamos as propriedades (i)-(v) para cortes não negativos. Façamos o caso geral:

i) Comutativa:

<u>1º caso</u> (apenas um corte negativo). Digamos $Z(0) \trianglelefteq A$ *e* $B \triangleleft Z(0)$.

Então $A \odot B = \ominus(A \odot |B|) = \ominus(|B| \odot A) = B \odot A$

<u>2º caso</u> (ambos os cortes negativos). Suponha $A \triangleleft Z(0)$ *e* $B \triangleleft Z(0)$.

Então $A \odot B = |A| \odot |B| = |B| \odot |A| = B \odot A$.

ii) Associativa:

<u>1º caso</u> (apenas um corte negativo). Digamos $A \triangleleft Z(0)$, $Z(0) \trianglelefteq B$ *e* $Z(0) \trianglelefteq C$.

Então $A \odot (B \odot C) = \ominus[|A| \odot (B \odot C)] = \ominus[(|A| \odot B) \odot C] = (A \odot B) \odot C$.

2º caso (dois cortes negativos). Digamos $A \lhd Z(0)$, $B \lhd Z(0)$ e $Z(0) \unlhd C$.

Então $A \odot (B \odot C) = \ominus[|A| \odot (|B| \odot C)] = \ominus[(|A| \odot |B|) \odot C] = (A \odot B) \odot C$.

3º caso (os três cortes negativos). $A \lhd Z(0)$, $B \lhd Z(0)$ e $C \lhd Z(0)$.

Então $A \odot (B \odot C) = |A| \odot (|B| \odot |C|) = (|A| \odot |B|) \odot |C| = (A \odot B) \odot C$.

iii) Existência do Neutro:

Se $A \lhd Z(0)$ temos que $A \odot Z(1) = \ominus[|A| \odot Z(1)] = \ominus[Z(1) \odot |A|] = (\ominus|A|) = \ominus(\ominus A) = A$.

iv) Exisência do inverso:

Se $A \lhd Z(0)$ então $Z(0) \lhd |A|$ e tomamos $B = \ominus(|A|^{\ominus 1})$. Assim $A \odot B = A \odot (\ominus|A|^{\ominus 1}) = (\ominus|A|) \odot (\ominus|A|^{\ominus 1}) = (|A| \odot |A|^{\ominus 1}) = Z(1)$. ∎

Juntando os teoremas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 obtemos o resultado.

Teorema 2.5. $(\Omega, \oplus, \odot, \unlhd)$ *é um corpo ordenado.*

O próximo teorema mostra que a relação de ordem $\unlhd$ é compatível com as operações de adição e produto de cortes.

Teorema 2.6. *Sejam $A, B, C \in \Omega$. Temos:*

i. *Se $A \unlhd B$, então $A \oplus C \unlhd B \oplus C$.*

ii. *Se $A \unlhd B$ e $Z(0) \unlhd C$, então $A \odot C \unlhd B \odot C$.*

iii. *Se $A \unlhd B$ e $C \unlhd Z(0)$, então $B \odot C \unlhd A \odot C$.*

Prova: **i.** Seja $r \in A \oplus C$. Então existem $p \in A$ e $q \in C$ tais que $r = p + q$. Ora $A \subset B$ e, portanto, $p \in B$. Segue que $r \in B \oplus C$, logo $A \oplus C \subset B \oplus C$.

ii. Como $A \subset B$ temos $A \oplus (\ominus A) \subset B \oplus (\ominus A)$. Do item (**i**), tomando $C = \ominus A$, obtemos $Z(0) \subset B \oplus (\ominus A)$. Temos $Z(0) \subset (B \oplus (\ominus A)) \odot C = (B \odot C) \oplus (\ominus A) \odot C$. Somando $A \odot C$, obtemos $(A \odot C) \oplus Z(0) \subset (B \odot C) \oplus ((\ominus A) \odot C) \oplus (A \odot C) \Longrightarrow A \odot C \subset (B \odot C) \oplus (\ominus A \oplus A) \odot C \Longrightarrow$

$A \odot C \subset (B \odot C) \oplus Z(0) \odot C \Longrightarrow A \odot C \subset (B \odot C) \oplus Z(0) \Longrightarrow A \odot C \subset B \odot C.$

iii. Como o caso anterior, temos $Z(0) \subset (B \oplus (\ominus A)) \odot (\ominus C) = [B \odot (\ominus C)] \oplus [(\ominus A) \odot (\ominus C)] \Longrightarrow (B \odot C) \subset [B \odot (\ominus C)] \oplus [(\ominus A) \odot (\ominus C)] \oplus (B \odot C) \Longrightarrow (B \odot C) \subset [(\ominus C) \odot B)] \oplus (C \odot B) \oplus (A \odot C) \Longrightarrow (B \odot C) \subset [(\ominus C) \oplus C) \odot B \oplus (A \odot C) \Longrightarrow (B \odot C) \subset A \odot C.$ ∎

Proposição 2.7. $Z(p \cdot q) = Z(p) \odot Z(q)$.

Prova: Suponhamos inicialmente $p \geq 0$ e $q \geq 0$, de modo que $Z(0) \subset Z(p) \cap Z(q)$. Seja $r \in Z(p \cdot q)$, isto é, $r < p \cdot q$. Se $r < 0$, então temos inicialmente que $r \in Z(p) \odot Z(q)$. Suponhamos $r \geq 0$. Teremos $p > 0$ e $q > 0$. Seja $s = \dfrac{r + p \cdot q}{2}$, de modo que $r < s < p \cdot q$. Temos $r = \left(p \cdot \dfrac{r}{s}\right) \cdot \left(q \cdot \dfrac{s}{p \cdot q}\right)$. Vemos que $\dfrac{r}{s} < 1$ e, portanto, $\dfrac{p \cdot r}{s} < p$. Segue que $\dfrac{p \cdot r}{s} \in Z(p)$. Da mesma maneira $\dfrac{q \cdot s}{p \cdot q} \in Z(q)$. Concluímos que $r \in Z(p) \odot Z(q)$.

Seja agora $r \in Z(p) \odot Z(q)$. Se $r < 0$, então trivialmente temos $r \in Z(p \cdot q)$. Suponhamos $r \geq 0$. Existem $s \in Z(p)$ e $t \in Z(q)$ tais que $r = s \cdot t$, $s \geq 0$ e $t \geq 0$. De $0 \leq s < p$ e $0 \leq t, q$, graças a monotonia da multiplicação, obtemos $s \cdot t \leq p \cdot t < p \cdot q$. Concluímos que $r \in Z(p \cdot q)$. Suponhamos agora $p < 0$ e $q < 0$. Assim obtemos $-p > 0$ e $-q > 0$. Logo $Z(p \cdot q) = Z((-p) \odot (-q)) = Z(-p) \odot Z(-q) = \ominus Z(p) \odot \ominus Z(q) = Z(p) \odot Z(q)$.
Finalmente, suponhamos $p \geq 0$ e $q < 0$ (o caso $p < 0$ e $q \geq 0$ se trata de forma análoga). Assim $Z(p \cdot q) = \ominus Z(-p \cdot q) = \ominus Z(p \cdot (-q)) = \ominus(Z(p) \odot Z(-q)) = \ominus(Z(p) \odot \ominus Z(q)) = \ominus(\ominus Z(p) \odot Z(q)) = Z(p) \odot Z(q)$. ∎

Note que pelas proposições 2.3 e 2.7 vemos que a aplicação $Z : \mathbb{Q} \longrightarrow \Omega$ é um homomorfismo injetivo de corpos. Portanto a imagem $Z(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}'$ é um subconjunto de Ω isomorfo a $\mathbb{Q}$, ou seja, $\mathbb{Q}'$ é uma cópia dos racionais contida em Ω. Por um abuso de notação identificamos $\mathbb{Q} \approxeq \mathbb{Q}'$ e escrevemos $\mathbb{Q} \subset \Omega$.

Na sequência vamos verificar que o corpo ordenado $(\Omega, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ é completo.

Definição 2.4. i. *Seja $\Gamma \subset \Omega$, $\Gamma \neq \emptyset$. Dizemos que um corte $S \in \Omega$ é uma cota superior de*

Γ se $A \subset S, \forall A \in \Gamma$. (ou seja, $A \trianglelefteq S$ para todo $A \in \Gamma$).

ii. *Se $\Gamma \subset \Omega$ tem cota superior então dizemos que Γ é limitado superiormente.*

Definição 2.5. *Seja $\Gamma \subset \Omega, \Gamma \neq \emptyset$ e Γ limitado superiormente. Definimos o supremo de Γ como sendo a menor das cotas superiores de Γ, isto é, um corte $S \in \Omega$ é o supremo de Γ quando:*

i. *$A \trianglelefteq S, \forall A \in \Gamma$.*

ii. *Se R é uma cota superior de Γ, então $S \trianglelefteq R$.*

Observação 2.3. *Se $\Gamma \subset \Omega$ não é limitado superiormente dizemos que o supremo de Γ é $+\infty$.*
Notação: $sup\Gamma$ = supremo de Γ.

Proposição 2.8. *Para todo $\Gamma \subset \Omega$, não vazio e limitado superiormente tem-se que $S = \left(\bigcup_{A \in \Gamma} A\right)$. Então $S \in \Omega$.*

Prova: i. Como $\Gamma \neq \emptyset$, $\exists A \in \Omega$ com $A \in \Gamma \Rightarrow S \neq \emptyset$. Além disso, como Γ é limitado superiormente $\exists M \in \Omega$, cota superior de Γ, isto é, $A \subset M$, $\forall A \in \Gamma \Rightarrow S \subset M \Rightarrow M^C \subset S^C$. Logo $S^C \neq 0$.
ii. Seja $p \in S$ e $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < p$. Sendo $p \in S$ temos que $\exists A \in \Gamma$ tal que $p \in A$. Ora A é corte, $r \in A$, ou seja, $r \in S$.
iii. Seja $p \in S$. Então $p \in A$ para algum $A \in \Gamma$. Como A é um corte, vemos que existe $q \in A$ com $p < q$. Ou seja $\exists q \in S$ com $p < q$. ∎

Teorema 2.7. *O corpo ordenado $(\Omega, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ é completo.*

Prova: Devemos provar que todo subconjunto Γ de Ω não vazio e limitado superiormente tem supremo finito. Seja então $\Gamma \subset \Omega$, $\Gamma \neq \emptyset$ e Γ limitado superiormente. Pela proposição anterior sabemos que $S = \left(\bigcup_{A \in \Gamma} A\right)$ é um corte. Vamos provar que $Sup\Gamma = S$. Com efeito, é claro que para todo $B \in \Gamma$ tem-se $B \subset \left(\bigcup_{A \in \Gamma} A\right) = S$, ou seja, S é cota superior de Γ.

Além disso, se $M \in \Omega$ é cota superior de Γ $(A \subset M, \forall A \in \Gamma) \Rightarrow S = \left(\bigcup_{A\in\Gamma} A\right) \subset M$. Isto é, provamos que $S = sup\Gamma$. ∎

Mudamos as notações e nomenclaturas como segue: um corte será chamado de **número real**, o conjunto Ω passa a ser denotado por $\mathbb{R}$ e será chamado de **conjunto dos números reais**, os símbolos $\oplus$, $\odot$ e $\trianglelefteq$ serão substituídos por $+$, $\cdot$ e $\leqslant$ respectivamente.

2.2 Sequências de Cauchy

Cantor e Dedekind construíram, independentemente, o sistema dos números reais. Seus métodos eram distintos mas equivalentes. Apresentaremos aqui a construção de Cantor. Dedekind uilizou o método dos cortes, o qual foi mostrado na seção 2.1.

A ideia central na definição de Cantor para os números reais é muito simples. Se OP é um segmento cuja medida, com respeito a uma unidade de medida, não é um número racional, é possível encontrar segmentos de comprimentos racionais, os quais aproximam o comprimento de OP tão quanto se queira. Isto nos permitirá identificar o comprimento OP com a sequência dos comprimentos racionais de segmentos que aproximam OP.

A partir de agora examinaremos essa ideia com um ponto de vista mais rigoroso .

Adimita que nosso universo seja o conjunto dos números racionais e vejamos alguns fatos sobre sequências.

Definição 2.6. i) *Uma sequência de números racionais é uma função*

$$\begin{array}{rccl} X & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & n & \longmapsto & x(n) = x_n \end{array}$$

Denotamos a sequência x por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) *Dizemos que uma sequência de números racionais* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada quando* $\exists M \in \mathbb{Q}$ *tal que* $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

iii) *Diz-se que a sequência de números racionais* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para o número racional* L*, ou tende para* L *e escreve-se* $x_n \longmapsto L$ *ou* $\lim x_n = L$ *quando:* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o \in \mathbb{N}$ *(*n_o *que depende de* ε*) tal que* $|x_n - L| < \varepsilon$ *sempre que* $n \geq n_o$.

iv) *A sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é de Cauchy quando* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o \in \mathbb{N}$ *tal que se* $m, n \geq n_o$ *então* $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Teorema 2.8. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Prova: Seja $\lim x_n = L$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $m \geqslant n_o \Rightarrow |x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $n \geqslant n_o \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Logo, dados $m, n \geqslant n_o \Rightarrow |x_m - x_n| \leqslant |x_m - a| + |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, o que mostra ser (x_n) uma sequência de Cauchy. ■

Teorema 2.9. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Prova: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_o \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$. Em particular, $n \geq n_o \Rightarrow |x_{n_o} - x_n| < 1$, ou seja, $n \geq n_o \Rightarrow x_n \in (x_{n_o} - 1, x_{n_o} + 1)$. Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{(n_o-1)}, x_{n_o} - 1, x_{n_o} + 1\}$. Então $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo (x_n) é limitada. ■

A reciproca do teorema 2.8 é falsa, ou seja, nem toda sequência de Cauchy é convergente. No próximo exemplo exibimos uma sequência (de números racionais) de Cauchy mas que não é convergente nos racionais.

Exemplo 2.3. *Considere a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números racionais definida indutivamente por:*

$$x_0 = 1$$

e

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \quad n \geqslant 1.$$

É fácil de ver que essa sequência é decrescente e limitada. Também podemos verificar que (x_n) *é uma sequência de Cauchy. Por fim vemos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não converge. Com efeito, se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *fosse convergente, digamos existe* $c \in \mathbb{Q}$ *tal que*

$$\lim x_n = c,$$

então tomando o limite na expressão que define (x_n) *teríamos que*

$$c = \frac{c^2+2}{2c}$$

ou ainda

$$c^2 = 2$$

o que não pode ser, pois sabemos que não existe $c \in \mathbb{Q}$ *tal que* $c^2 = 2$.

Exemplo 2.4. *Nem toda sequência limitada é de Cauchy. Por exemplo, a sequência* $(1 + (-1)^n)$ *é limitada mas não é de Cauchy. Com efeito, seja* $\varepsilon_0 = 2$. *Então, qualquer que seja* $k \in \mathbb{N}$ *podemos tomar* $m_k = 2k > k$ *e* $n_k = 2k+1 > k$. *Como* $x_{2k} = 2$ *e* $x_{2k+1} = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$, *temos*

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = |x_{2k} - x_{2k+1}| = |2-0| = 2 = \varepsilon_0,$$

o que demonstra que $(1 + (-1)^n)$ *não é uma sequência de Cauchy.*

Denotamos por $S(\mathbb{Q})$ o conjunto constituído de todas as sequências de números racionais. Neste conjunto estão definidas duas operações, adição e multiplicação, como segue:

$$\begin{array}{rcrcl} + & : & S(\mathbb{Q}) \times S(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & S(\mathbb{Q}) \\ & & ((x_n),(y_n)) & \longmapsto & (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

onde $c_n = x_n + y_n$ e

$$\begin{array}{rcrcl} \cdot & : & S(\mathbb{Q}) \times S(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & S(\mathbb{Q}) \\ & & ((x_n),(y_n)) & \longmapsto & (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

onde $d_n = x_n \cdot y_n$

Claramente vemos que a adição de sequências de números racionais satisfaz às propriedades

i) Associativa;

ii) Comutativa;

iii) Existência do elemento neutro ($0_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$);

iv) Existência do oposto.

Também podemos ver que o produto do conjunto $S(\mathbb{Q})$ satisfaz

v) Associativa;

vi) Comutativa;

vii) Existência do elemento neutro ($1_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$).

Note que para o produto não temos a existência do inverso em todo conjunto $S(\mathbb{Q})$. Somente para as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. É que podemos obter o inverso $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $y_n = \dfrac{1}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

No que segue fixamos a seguinte notação:

$S_l(\mathbb{Q})$**:** Conjunto das sequências (de números racionais) que são limitadas;

$S_c(\mathbb{Q})$**:** Conjunto das sequências (de números racionais) que são convergentes;.

$S_f(\mathbb{Q})$**:** Conjunto das sequências (de números racionais) que são Cauchy;

$S_0(\mathbb{Q})$**:** Conjunto das sequências (de números racionais) que convergem para zero.

Pelo o que foi visto até o momento temos

$$S_c(\mathbb{Q}) \subsetneq S_f(\mathbb{Q}) \subsetneq S_l(\mathbb{Q}) \subset S(\mathbb{Q})$$

Proposição 2.9. i) *$S_c(\mathbb{Q})$ é um sub-anel de $S(\mathbb{Q})$;*

ii) *$S_f(\mathbb{Q})$ é um sub-anel de $S(\mathbb{Q})$;*

iii) *$S_l(\mathbb{Q})$ é um sub-anel de $S(\mathbb{Q})$.*

Prova: É imediato que os três itens estão fechados para as operações de adição e multiplicação. ∎

Definimos uma relação em $S_f(\mathbb{Q})$:

$$(x_n) \sim (y_n) \Longleftrightarrow (x_n - y_n) \in S_0(\mathbb{Q})$$

ou em outras palavras

$$(x_n) \sim (y_n) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0.$$

Proposição 2.10. *$\sim$ é uma relação de equivalência em $S_f(\mathbb{Q})$. Além disso, esta relação é compatível com a soma e o produto, isto é, satisfaz:*

$$\textit{se} \quad (x_n) \sim (y_n) \quad \textit{então para cada } (c_n) \in S_f(\mathbb{Q}) \textit{ tem-se que} \quad \begin{cases} I - (x_n + c_n) \sim (y_n + c_n) \\ II - (x_n c_n) \sim (y_n c_n) \end{cases}$$

Prova: De fato, é óbvio que $\sim$ é reflexiva pois $(x_n - x_n) = (0) \in S_0(\mathbb{Q})$, ou seja, $(x_n) \sim (x_n)$. Agora suponhamos que $(x_n), (y_n) \in S_f(\mathbb{Q})$ tais que $(x_n) \sim (y_n)$. Então $(x_n - y_n) \in S_0(\mathbb{Q}) \Longrightarrow -(x_n - y_n) \in S_0(\mathbb{Q}) \Longrightarrow (y_n - x_n) \in S_0(\mathbb{Q}) \Longrightarrow (y_n) \sim (x_n)$, provando-se que $\sim$ é simétrica. Provemos a transitividade. Sejam $(x_n), (y_n)$ *e* $(z_n) \in S_f(\mathbb{Q})$ tais que $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$. Então $(x_n - y_n) \in S_0(\mathbb{Q})$ e $(y_n - z_n) \in S_0(\mathbb{Q})$. Daí resulta que $[(x_n - y_n) + (y_n - z_n)] \in S_0(\mathbb{Q}) \Longrightarrow (x_n - z_n) \in S_0(\mathbb{Q}) \Longrightarrow (x_n) \sim (z_n)$, o que conlcui a prova de que "$\sim$" é uma relação de equivalência.

Agora verificamos a compatibilidade da soma e do produto:

I. Temos

$$\begin{aligned}
(x_n) \sim (y_n) &\Longrightarrow (x_n - y_n) \in S_0(\mathbb{Q}) \\
&\Longrightarrow (x_n - y_n + c_n - c_n) \in S_0(\mathbb{Q}) \\
&\Longrightarrow [(x_n + c_n) - (y_n + c_n)] \in S_0(\mathbb{Q}) \\
&\Longrightarrow (x_n + c_n) \sim (y_n + c_n)
\end{aligned}$$

II. Temos

$$\begin{aligned}
(x_n) \sim (y_n) &\Longrightarrow (x_n - y_n) \in S_0(\mathbb{Q}) \\
&\Longrightarrow (x_n - y_n)(c_n) \in S_0(\mathbb{Q}) \\
&\Longrightarrow (x_n c_n - y_n c_n) \in S_0(\mathbb{Q}) \\
&\Longrightarrow (x_n c_n) \sim (y_n c_n)
\end{aligned}$$

■

Corolário 2.1. *Se (x_n), (y_n), (c_n) e (d_n) são elementos de $S_f(\mathbb{Q})$ tais que $(x_n) \sim (y_n)$ e $(c_n) \sim (d_n)$ então $(x_n + c_n) \sim (y_n + d_n)$ e $(x_n c_n) \sim (y_n d_n)$.*

Desde que "$\sim$" é uma relação de equivalência em $S_f(\mathbb{Q})$, temos que $S_f(\mathbb{Q})$ se divide em classes de equivalência, ou seja, para toda sequência $(x_n) \in S_f(\mathbb{Q})$ temos sua classe de equivalência dada por

$$\overline{(x_n)} = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_f(\mathbb{Q}); (y_n) \sim (x_n)\}.$$

Também temos o conjunto quociente constituído de todas as classes de equivalência:

$$\Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big) \quad = \{\overline{(x_n)}; (x_n) \in S_f(\mathbb{Q})\}$$

isto é, $\Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$ é o conjunto de classes de equivalência das sequências de Cauchy. É claro que

$$\overline{(x_n)} = \overline{(y_n)}$$

se, e somente se,

$$(x_n - y_n) \in S_0(\mathbb{Q}).$$

Definição 2.7. *Definimos as operações de adição e de multiplicação*

$$\begin{array}{rcccc} \oplus & : & \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big) \times \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big) & \longrightarrow & \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big) \\ & & \Big(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}\Big) & \longmapsto & \overline{(x_n)} \oplus \overline{(y_n)} = \overline{(x_n + y_n)} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccc} \odot & : & \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big) \times \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big) & \longrightarrow & \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big) \\ & & \Big(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}\Big) & \longmapsto & \overline{(x_n)} \odot \overline{(y_n)} = \overline{(x_n \cdot y_n)} \end{array}$$

Teorema 2.10. $\Big(\Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big), \oplus, \odot\Big)$ *é um corpo.*

Prova: Sejam $\alpha = \overline{(x_n)}$, $\beta = \overline{(y_n)}$, $\lambda = \overline{(c_n)} \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$. Então

i)

$$\begin{aligned}(\alpha \oplus \beta) \oplus \lambda &= \left(\overline{(x_n)} \oplus \overline{(y_n)}\right) \oplus \overline{(c_n)} \\ &= \overline{(x_n + y_n)} \oplus \overline{(c_n)} \\ &= \overline{(x_n + y_n + c_n)} \\ &= \overline{(x_n)} \oplus \overline{(y_n + c_n)} \\ &= \overline{(x_n)} \oplus \left(\overline{(y_n)} \oplus \overline{(c_n)}\right) \\ &= \alpha \oplus (\beta \oplus \lambda)\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\alpha \oplus \beta &= \overline{(x_n)} \oplus \overline{(y_n)} \\ &= \overline{(x_n + y_n)} \\ &= \overline{(y_n + x_n)} \\ &= \overline{(y_n)} \oplus \overline{(x_n)} \\ &= \beta \oplus \alpha\end{aligned}$$

iii) Considere a classe de equivalência $0' = \overline{(0)}$, determinada pela sequência constante igual a zero. Para todo $\alpha = \overline{(x_n)} \in \left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ tem-se

$$\alpha \oplus 0' = \overline{(x_n)} \oplus \overline{(0)} = \overline{(x_n + 0)} = \overline{(x_n)} = \alpha$$

Portanto, $0'$ é o elemento neutro da adição definida sobre $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$. Notemos que uma sucessão (w_n) pertence à classe de equivalência $0'$ se, e somente se, (w_n) é congruente a zero. Então, $0' = S_0(\mathbb{Q})$.

iv) Seja $\alpha = \overline{(x_n)}$ um elemento qualquer de $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ e consideremos a classe de equivalência $-\alpha = \overline{(-x_n)}$. Temos

$$\alpha \oplus (-\alpha) = \overline{(x_n)} \oplus \overline{(-x_n)} = \overline{(x_n - x_n)} = \overline{(0)} = 0'$$

Portanto, $-\alpha = \overline{(-x_n)}$ é o oposto de $\alpha = \overline{(x_n)}$.

v)

$$\begin{aligned}(\alpha \odot \beta) \odot \lambda &= \left(\overline{(x_n)} \odot \overline{(y_n)}\right) \odot \overline{(c_n)} \\ &= \overline{(x_n y_n)} \odot \overline{(c_n)} \\ &= \overline{(x_n \cdot y_n \cdot c_n)} \\ &= \overline{(x_n)} \odot \overline{(y_n \cdot c_n)} \\ &= \overline{(x_n)} \odot \left(\overline{(y_n)} \odot \overline{(c_n)}\right) \\ &= \alpha \odot (\beta \odot \lambda)\end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned}\alpha \odot \beta &= \overline{(x_n)} \odot \overline{(y_n)} \\ &= \overline{(x_n \cdot y_n)} \\ &= \overline{(y_n \cdot x_n)} \\ &= \overline{(y_n)} \odot \overline{(x_n)} \\ &= \beta \odot \alpha\end{aligned}$$

vii) Considere a classe de equivalência $1' = \overline{(1)}$ determinada pela sequência constante igual a um, temos para todo $\alpha = \overline{(x_n)} \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$

$$\alpha \odot 1' = \overline{(x_n)} \odot \overline{(1)} = \overline{(x_n \cdot 1)} = \overline{(x_n)} = \alpha$$

Portanto, $1'$ é o elemento neutro da multiplicação definida sobre $\Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$.

viii) Seja $\alpha = \overline{(x_n)} \neq 0'$. Logo, $(x_n) \notin S_0(\mathbb{Q})$ e $(x_n) \in S_f(\mathbb{Q})$. Daqui resulta, que $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \neq 0 \;\; \forall n > p$. Consideremos então a sequência $(y_n) \in S(\mathbb{Q})$ definida por $y_i = 1$ para $i = 0, 1, \cdots, p$ e $y_n = x_n \;\; \forall n > p$. Vemos que $(y_n) \in S_f(\mathbb{Q})$, $(y_n) \sim (x_n)$, e $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Seja $z_n = \dfrac{1}{y_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Então $\alpha \odot \overline{(z_n)} = \overline{(y_n)} \odot \overline{(z_n)} = \overline{(y_n \cdot z_n)} = \overline{\left(y_n \cdot \dfrac{1}{y_n}\right)} = \overline{(1)} = 1'$, ou seja, $\overline{(z_n)}$ é o inverso de α o qual denotamos por α^{-1}.

viii)

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (\beta \oplus \lambda) &= \overline{(x_n)} \odot \left(\overline{(y_n)} \oplus \overline{(c_n)}\right) \\
&= \overline{(x_n)} \odot \left(\overline{(y_n + c_n)}\right) \\
&= \overline{(x_n \cdot (y_n + c_n))} \\
&= \overline{(x_n \cdot y_n + x_n \cdot c_n)} \\
&= \overline{(x_n \cdot y_n)} \oplus \overline{(x_n \cdot c_n)} \\
&= (\overline{(x_n)} \odot \overline{(y_n)}) \oplus \overline{(x_n)} \odot \overline{(c_n)} \\
&= \alpha \odot \beta \oplus \alpha \odot \lambda
\end{aligned}$$

■

Denotamos os seguintes conjuntos:

$$P_o = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0\} \text{ (racionais não negativos),}$$

$$P_o^* = \{x \in \mathbb{Q}; x > 0\} \text{ (racionais positivos).}$$

Definição 2.8. *Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_f(\mathbb{Q})$ é estritamente positiva se existem $M \in P_o^*$ e $n_o \in \mathbb{N}$ tais que $M < x_n$, $\forall n > n_o$.*

Proposição 2.11. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_f(\mathbb{Q})$ é estritamente positiva se, e somente se, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin S_0(\mathbb{Q})$ e $\exists n_o \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x_n$, $\forall n > n_o$.*

Prova: A ida é imediato. Por outro lado, suponha que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin S_0(\mathbb{Q})$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x_n, \forall n > n_o$, e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é estritamente positiva ($\forall M \in P_o^*$ e $\forall n_o \in \mathbb{N}$ sempre existe $n > n_o$ tal que $x_n < M$). Deste último fato podemos extrair uma subsequência (x_{n_k}) que converge para zero. Absurdo, pois $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_f(\mathbb{Q})$. ■

Proposição 2.12. *Sejam $(x_n), (y_n) \in S_f(\mathbb{Q})$ tais que $(y_n) \in \overline{(x_n)}$ e (x_n) é estritamente positiva. Então (y_n) também é estritamente positiva.*

Prova: Primeiramente note que das hipóteses resulta que (y_n) não converge para zero, pois caso contrário, se (y_n) convergisse para zero, como $(y_n - x_n)$ converge para zero, Teríamos que $x_n = (y_n - (y_n - x_n))$ convergiria para zero, o que não pode ser já que (x_n) é estritamente positiva.

Agora, $\exists M \in P_o^*$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $M < x_n$ $\forall n > n_1$. Como $(y_n - x_n)$ converge para zero, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$-\frac{M}{2} < y_n - x_n < \frac{M}{2} \Longrightarrow x_n - \frac{M}{2} < y_n < x_n + \frac{M}{2}, \quad \forall n > n_2$$

Seja $n_o = max\{n_1, n_2\}$ assim

$$\frac{M}{2} = M - \frac{M}{2} < x_n - \frac{M}{2} < y_n, \quad \forall n > n_o$$

$\blacksquare$

Definição 2.9. *Dizemos que um elemento $\alpha = \overline{(x_n)} \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$ é estritamente positivo se, e somente se, $(x_n) \in S_f(\mathbb{Q})$ é estritamente positiva.*

É claro que se α é estritamente positivo então $\alpha \neq 0' = \overline{(0)}$. Introduziremos o subconjunto $P = P^* \cup \{0'\}$ onde $P^* = \Big\{\alpha \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big); \alpha \text{ é estritamente positivo}\Big\}$. Os elementos $\alpha \in P$ são ditos não negativos. O próximo lema reuni importantes propriedades do conjunto P. Aqui $(\ominus P) = \{\ominus\alpha; \alpha \in P\}$

Lema 2.1. i. *$P \oplus P \subset P$ (A soma de elementos de P ainda está em P).*

ii. *$P \cap (\ominus P) = \{0'\}$ (O neutro é o único elemento que está em P e $\ominus P$).*

iii. *$P \cup (\ominus P) = \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$ (Quando reunimos P com $\ominus P$ obtemos o corpo $\Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$).*

iv. *$P \odot P \subset P$ (O produto de elementos de P ainda está em P).*

Prova: i. Sejam $\alpha = \overline{(x_n)}$ e $\beta = \overline{(y_n)}$ dois elementos quaiquer de P. Se $\alpha = 0'$ ou $\beta = 0'$, é imediato que $(\alpha \oplus \beta) \in P$. Logo podemos supor que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Neste caso existem $p, q \in \mathbb{N}$ e $M_1, M_2 \in P_o^*$ tais que $M_1 < x_n$ $\forall n > p$ e $M_2 < y_n$ $\forall n > q$. Tomando-se $n_o = max\{p, q\}$ teremos $0 < M_1 + M_2 < x_n + y_n$ $\forall n > n_o$. Portanto, $(x_n + y_n)$ é estritamente positiva e então $(\alpha \oplus \beta) \in P^*$.

ii. Seja $\alpha = \overline{(x_n)}$ um elemento de $P \cap (-P)$ e suponhamos, por absurdo, que $\alpha \neq 0'$. De $\alpha \in P^*$ resulta que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x_n$ $\forall n > p$. Por outro lado de $\alpha \in (\ominus P)$

vem $\ominus\alpha = \overline{(-x_n)} \in P^*$, logo existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $0 < -x_n$ ou $x_n < 0$, $\forall n > q$. Tomando-se $n > max\{p, q\}$ teremos $0 < x_n$ e $x_n < 0$, que é um absurdo. Logo $\alpha = 0'$.

iii. Seja $\alpha = \overline{(x_n)} \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$ e suponhamos que $\alpha \notin P$. Logo, (x_n) não é convergente a zero, portanto existe $M \in P_o^*$ e existe $n_o \in \mathbb{N}$ tais que $M < x_n$ ou $x_n < -M$ $\forall n > n_o$, ou seja, $\ominus\alpha \in P^*$ e então $\ominus\alpha \in P$.

iv. Sejam $\alpha = \overline{(x_n)}$ e $\beta = \overline{(y_n)}$ dois elementos quaiquer de P. Se $\alpha = 0'$ ou $\beta = 0'$, é imediato que $(\alpha \odot \beta) \in P$, logo podemos supor que $\alpha \neq 0'$ e $\beta \neq 0'$. Neste caso temos $\alpha \odot \beta = \overline{(x_n \cdot y_n)} \neq \overline{(0)}$, ou seja, $(x_n \cdot y_n)$ não é convergente a zero. Por outro lado, existem números naturais p e q tais que $x_n > 0$ $\forall n > p$ e $y_n > 0$ $\forall n > q$. Portanto, $\forall n > max\{p, q\}$ teremos $x_n \cdot y_n > 0$ e então, $(x_n \cdot y_n)$ é estritamente positiva, ou seja, $(\alpha \odot \beta) \in P^*$. ∎

Definição 2.10. *Dados* $\alpha, \beta \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$, *dizemos que* $\alpha \trianglelefteq \beta$ *se, e somente se,* $(\beta \ominus \alpha) \in P$. *Ou seja, sendo* $\alpha = \overline{(x_n)}$ *e* $\beta = \overline{(y_n)} \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$, $\alpha \trianglelefteq \beta$ *se, e somente se*

i. $\overline{(y_n - x_n)} = \overline{(0)} \Longleftrightarrow (y_n - x_n) \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \overline{(x_n)} = \overline{(y_n)}$

ou

ii. $\overline{(y_n - x_n)} \in P^*$, *isto é,* $(y_n - x_n) \notin S_0(\mathbb{Q})$ *e* $\exists n_o \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < (y_n - x_n)$, $\forall n > n_o$ *ou ainda* $x_n < y_n$, $\forall n > n_o$.

Teorema 2.11. "$\trianglelefteq$" *é uma relação de ordem total em* $\Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$ *que é compatível com a adição e a multiplicação. Isto é, Dados* $\alpha, \beta, \gamma \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$ *tem-se que*

(1) $\alpha \trianglelefteq \beta$ *ou* $\beta \trianglelefteq \alpha$

(2) **i.** $\alpha \trianglelefteq \alpha$,

ii. *Se* $\alpha \trianglelefteq \beta$ *e* $\beta \trianglelefteq \alpha$ *então* $\alpha = \beta$

iii. *Se* $\alpha \trianglelefteq \beta$ *e* $\beta \trianglelefteq \gamma$ *então* $\alpha \trianglelefteq \gamma$

(3) **i.** *Se* $\alpha \trianglelefteq \beta$ *então* $\alpha \oplus \gamma \trianglelefteq \beta \oplus \gamma$

ii. *Se* $\alpha \trianglelefteq \beta$ *então* $\alpha \odot \gamma \trianglelefteq \beta \odot \gamma$ *se* $\gamma \in P$

iii. *Se* $\alpha \trianglelefteq \beta$ *então* $\beta \odot \gamma \trianglelefteq \alpha \odot \gamma$ *se* $\gamma \in (-P)$

Prova: **(1)** Sejam $\alpha, \beta \in \left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ então pela propriedade (iii) do lema 2.1 temos que $(\beta \ominus \alpha) \in P$ ou $(\beta \ominus \alpha) \in \ominus P$. Logo $\alpha \trianglelefteq \beta$ ou $\beta \trianglelefteq \alpha$, o que prova (1).

(2) i. É óbvio que $\alpha \trianglelefteq \alpha$ pois $\alpha \ominus \alpha = \overline{(0)} \in P$.

ii. Suponha qu $\alpha \trianglelefteq \beta$ e $\beta \trianglelefteq \alpha$ então $(\beta \ominus \alpha) \in P$ e $(\alpha \ominus \beta) \in P$, ou ainda, $(\beta \ominus \alpha) \in (\ominus P)$. Mas como $(\beta \ominus \alpha) \in P$ e $(\beta \ominus \alpha) \in (\ominus P)$ pela propriedade (ii) do lema 2.1 temos que $\beta \ominus \alpha = \overline{(0)}$ então $\beta = \alpha$.

iii. Seja $\alpha \trianglelefteq \beta$ e $\beta \trianglelefteq \gamma$, então $(\beta \ominus \alpha) \in P$ e $(\gamma \ominus \beta) \in P$. Pela propriedade (i) do lema 2.1 temos que $[\beta \ominus \alpha) \oplus (\gamma \ominus \beta)] \in P$, isto é, $(\gamma \ominus \alpha) \in P$. Logo $\alpha \trianglelefteq \gamma$.

(3) i. Sejam $\alpha \trianglelefteq \beta$ e $\gamma \in \left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ então $(\beta \ominus \alpha) \in P$ ou ainda $(\beta \ominus \alpha \oplus \gamma \ominus \gamma) \in P$ segue que $[(\beta \oplus \gamma) \ominus (\alpha \oplus \gamma)] \in P$. Logo $\alpha \oplus \gamma \trianglelefteq \beta \oplus \gamma$.

ii. Sejam $\alpha \trianglelefteq \beta$ e $\gamma \in P$. De $\alpha \trianglelefteq \beta$ temos que $(\beta \ominus \alpha) \in P$. Logo pela propriedade (iv) do lema 2.1 temos que $(\beta \ominus \alpha) \odot \gamma \in P$, isto é $(\beta \odot \gamma \ominus \alpha \odot \gamma) \in P$, logo $\alpha \odot \gamma \trianglelefteq \beta \odot \gamma$.

iii. Sejam $\alpha \trianglelefteq \beta$ e $\gamma \in (\ominus P)$. De $\alpha \trianglelefteq \beta$ temos que $(\beta \ominus \alpha) \in P$ e $\ominus\gamma \in P$. Logo temos que $(\beta \ominus \alpha) \odot (\ominus\gamma) \in P$ segue $(\alpha \odot \gamma \ominus \beta \odot \gamma) \in P$ e portanto $\beta \odot \gamma \trianglelefteq \alpha \odot \gamma$. ∎

Associando os teoremas 2.10 e 2.11 concluímos que $\left(\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right), \oplus, \odot, \trianglelefteq\right)$ é um corpo ordenado. Definimos a seguinte função

$$\begin{array}{rccc} Z: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right) \\ & x & \longmapsto & Z(x) = \overline{(x)} \end{array}$$

onde $\overline{(x)}$ é a classe de equivalência definida pela sequência constante $x_n = x, \forall n \in \mathbb{N}$.

É fácil ver que a função Z é injetiva. De fato, se $Z(x) = Z(y)$ então $\overline{(x)} = \overline{(y)}$ se, e somente se, a sequência constante $(x - y)$ converge para zero, isto é, $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Além disso, podemos ver que:

Proposição 2.13. *Para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ temos que:*

i) $Z(x + y) = Z(x) \oplus Z(y)$*;*

ii) $Z(x \cdot y) = Z(x) \odot Z(y)$*;*

iii) $x \leqslant y$ *implica* $Z(x) \trianglelefteq Z(y)$.

Prova: i) $Z(x + y) = \overline{(x + y)} = \overline{(x)} \oplus \overline{(y)} = Z(x) \oplus Z(y)$.
ii) $Z(x \cdot y) = \overline{(x \cdot y)} = \overline{(x)} \odot \overline{(y)} = Z(x) \odot Z(y)$.
iii) Suponha que $x \leqslant y$. Então $(y - x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left(\overline{(y)} \ominus \overline{(x)}\right) \in P \Leftrightarrow \overline{(x)} \trianglelefteq \overline{(y)} \Leftrightarrow Z(x) \trianglelefteq Z(y)$.

■

Pela discussão acima, representando a imagem da função Z por $\mathbb{Q}'$, isto é, pondo

$$Z(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}'$$

temos que $\mathbb{Q}'$ é um subcorpo do corpo $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ e $Z : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}'$ é um isomorfismo de corpos. Identificando $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}'$ por meio do isomorfismo Z, escrevemos $0 = 0'$, $1 = 1'$ e, de um modo geral, $x = Z(x)$. Com tal identificação, com um abuso de linguagem, dizemos que o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um subcorpo de $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$.

Vejamos agora que para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_f(\mathbb{Q})$, por meio da aplicação Z, temos automaticamente uma sequência $\big(Z(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(Z(x_1), Z(x_2), \dots\big)$ em $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$. Também observamos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_f(\mathbb{Q})$ define uma classe no quociente $S_f(\mathbb{Q})$ que denotamos por $L = \overline{(x_n)}$

O fato surpreendente vem com o seguinte resultado:

Teorema 2.12. *Com a notação acima, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_f(\mathbb{Q})$ tem-se que $\big(Z(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ e $\lim Z(x_n) = L = \overline{(x_n)}$.*

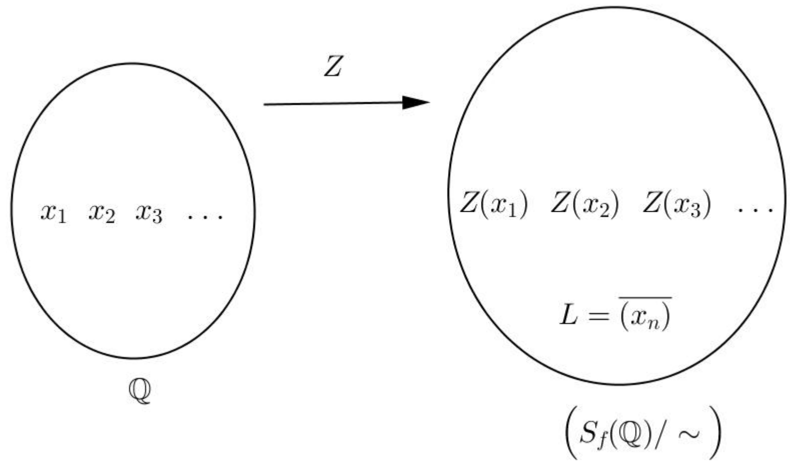

Figura 2.1: função Z

Prova: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_f(\mathbb{Q})$ e $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big)$. $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Como a sequência é de Cauchy $\exists n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon_1$, ou $x_n - \varepsilon_1 < x_m < x_n + \varepsilon_1$, $\forall m, n > n_o$. Fixemos $p > n_o$ e indiquemos x_p por x. Logo $x - \varepsilon_1 < x_m < x + \varepsilon_1$, $\forall m > n_o$. Assim $\overline{(x-\varepsilon_1)} \lhd \overline{(x_m)} \lhd \overline{(x+\varepsilon_1)}$ segue que $\overline{(x)} \ominus \overline{(\varepsilon_1)} \lhd \overline{(x_m)} \lhd \overline{(x)} \oplus \overline{(\varepsilon_1)}$ ou ainda $\ominus\overline{(\varepsilon_1)} \lhd L \ominus \overline{(x)} \lhd \overline{(\varepsilon_1)}$ com isso obtemos $|\overline{(x)} \ominus L| \lhd \overline{(\varepsilon_1)}$, isto é, $|\overline{(x_p)} \ominus L| \lhd \overline{(\varepsilon_1)}$. Portanto $|Z(x_p) - L| < \overline{(\varepsilon_1)} < \varepsilon$, $\forall p > n_o$. ∎

Definição 2.11. *Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado qualquer e seja o conjunto $\varphi = \{1', 1'+1', 1'+1'+1', \cdots\}$. O corpo $\mathbb{K}$ é arquimediano quando o conjunto φ é ilimitado superiormente, isto é, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \exists \beta \in \varphi$ tal que $\alpha < \beta$.*

Exemplo 2.5. *O corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais é arquimediano, neste caso o conjunto $\varphi = \mathbb{N}$ que é ilimitado.*

Exemplo 2.6. *O corpo definido pela sequência cujo n-ésimo termo é $x_n = \dfrac{1}{n}$ não é arquimediano.*

Teorema 2.13. $\Big(\Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big), \oplus, \odot, \trianglelefteq\Big)$ *é um corpo arquimediano*

Prova: Devemos provar que o conjunto $\varphi = \{\overline{(1)}, \overline{(1)}+\overline{(1)}, \overline{(1)}+\overline{(1)}+\overline{(1)}, \ldots\}$ não é limitado, ou seja, dado $\alpha = \overline{(x_n)} \in \Big(S_f(\mathbb{Q})/\sim\Big), \exists \beta \in \varphi$ tal que $\alpha < \beta$.
Veja que $\varphi = Z(\mathbb{N})$ então $\beta \in \varphi \Leftrightarrow \beta = \overline{(a)}$ para algum $a \in \mathbb{N}$. Como $(x_n) \in S_f(\mathbb{Q})$ temos

que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, ou seja, $\exists M \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -M \leq x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ é arquimediano. Logo deve existir $a \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq M < a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto $\overline{(x_n)} \lhd \overline{(a)}$ ou seja $\exists \beta = \overline{(a)} \in \varphi$ tal que $\alpha < \beta$. ■

Observação 2.4. *Como $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ é arquimediano, dado $\varepsilon \in \left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$, $\varepsilon > 0$, $\exists \varepsilon_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, de fato, dado $\varepsilon > 0$, $\dfrac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \varepsilon$, basta tomarmos $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{n}$.*

Observação 2.5. *$\mathbb{Q}$ é denso em $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$, isto é, se $a, b \in \left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$, $a \lhd b$ então existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$. De fato, por $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ ser arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{b-a} < n$ e portanto $a \cdot n + 1 < b \cdot n$. Por outro lado, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m - 1 \leqslant a \cdot n < m$, portanto $a \cdot n < m \leqslant a \cdot n + 1 < b \cdot n$ de onde segue que $a < \dfrac{m}{n} < b$.*

Lema 2.2. *Dado $\alpha \in \left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right), \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{Q})$ crescente talque $\lim Z(a_n) = \alpha$*

Prova: Por um abuso de notação escrevemos a_n no lugar de $Z(a_n)$. Se $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\alpha - 1) = a_o \in \mathbb{Q}$ e $a_o < \alpha$. Tome $a_1 = \dfrac{\alpha + a_o}{2}, a_2 = \dfrac{\alpha + a_1}{2}, \ldots, a_n = \dfrac{\alpha + a_{n-1}}{2}$, ou ainda, $|\alpha - a_1| = 1, |\alpha - a_2| = \dfrac{1}{2}, |\alpha - a_3| = \dfrac{1}{2^2}, \ldots, |\alpha - a_n| = \dfrac{1}{2^n}$

Mas a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \dfrac{1}{2^n}$ converge para zero, logo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{Q})$ crescente e $\lim a_n = \alpha$.

Agora para $\alpha \in \left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ basta observamos que $\mathbb{Q}$ é denso em $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ e seguirmos pelo mesmo caminho utilizado anteriormente. ■

Teorema 2.14. *O corpo $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ é completo.*

Prova: Já vimos que $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ é arquimediano, então basta mostrarmos que

$$S_f\left(\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)\right) = S_c\left(\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)\right).$$

Seja (α_n) uma sequência de Cauchy em $S_f(\mathbb{Q})/\sim$, então existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma sequência crescente $(a_{i,n})_{i\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{Q})$ que é convergente para α_n, logo, para todo $\varepsilon \in P_o^*$ existe um menor número natural i tal que $|a_{i,n} - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ e para este índice i colocaremos $b_n = a_{i,n}$.

Obtemos deste modo, uma sequência (b_n), de números racionais tal que $|b_n - \alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Mostraremos, inicialmente, que esta sequência é de Cauchy. Com efeito, como (α_n) é de Cauchy, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_m - \alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ quaisquer que sejam m e n, com $m > n_o$ e $n > n_o$. Portanto, se m e n são dois números naturais quaisquer, com $m > n_o$ e $n > n_o$, teremos

$$|b_m - b_n| \leq |b_m - \alpha_m| + |\alpha_m - \alpha_n| + |\alpha_n - b_n| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ou seja, (b_n) é de Cauchy. Logo (b_n) é convergente para $\alpha = \overline{(b_n)}$, assim, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b_n - \alpha| < \frac{2\varepsilon}{3} \quad \forall n > n_1$$

.

Por outro lado, tem-se

$$|\alpha_n - \alpha| \leq |\alpha_n - b_n| + |b_n - \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |b_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

portanto, qualquer que seja $n > n_1$, teremos

$$|\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

isto é, (α_n) é convergente para α. ∎

Mudamos as notações e nomenclaturas como segue: uma classe de equivalência será chamada de **número real**, o conjunto $\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right)$ passa a ser denotado por $\mathbb{R}$ e será chamado de **conjunto dos números reais**, os símbolos $\oplus$, $\odot$ e $\trianglelefteq$ serão substituídos por $+$, $\cdot$ e $\leqslant$ respectivamente.

Observação 2.6. *Podemos provar que* $(\Omega, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ *e* $\left(\left(S_f(\mathbb{Q})/\sim\right), \oplus, \odot, \trianglelefteq\right)$ *são isomorfos ou mais ainda, todos os corpos ordenados completos que contém um subcorpo isomorfo aos racionais, são isomorfos entre si.*

2.3 Caracterização via decimais

Neste ponto assumimos construido o corpo ordenado completo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$ dos números reais e o passo seguinte é caracterizar os números reais por meio de expressões decimais. Ou seja vamos verificar que é possível expressar um número real por meio de decimais e, além disso, é possível separá-los em duas classes distintas: a classe dos decimais periódicos que se identifica com os números racionais e os decimais não periódicos que se identifica com os números irracionais.

Denotamos

$$\mathcal{E} = \text{conjunto das expressões decimais}$$

veremos que é possível definir uma correspondência biunívoca entre uma parte de $\mathcal{E}$ e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Isto permite identificar os números reais com expressões decimais e, com isto, estes objetos a priori de natureza distinta passam a ser a "mesma coisa".

Nossa abordagem será construir uma função

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & F(\alpha) = \overline{\alpha} \end{array}$$

tal que F é sobrejetiva e "quase injetiva". Aqui o termo quase injetiva significa que eliminando certos elementos de $\mathcal{E}$, F torna-se injetiva. Depois, vamos caracterizar um subconjunto $D \subset \mathcal{E}$ tal que $F(D) = \mathbb{Q}$ ou, em outras palavras, vamos caracterizar as expressões decimais que são números racionais.

Vamos lembrar um resultado que será usado logo a frente. Dada uma progressão geométrica (PG) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ de razão q, temos que a soma dos n primeiros termos é dada por

$$S_n = \frac{x_1 \cdot (1 - q^n)}{(1 - q)}$$

Definição 2.12. *Denomina-se expressão decimal um par da forma*

$$\alpha = \big(a_0, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

onde a_o *é um inteiro não negativo* ($a_o \geqslant 0$) *e os* a_i *são inteiros tais que* $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, *ou em outras palavras,* a_o *é a parte inteira da expressão decimal e* a_n *é o n-ésimo dígito da expressão decimal.*

Para cada $\alpha \in \mathcal{E}$ podemos associar uma sequência de números racionais

$$\alpha_n = a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Claramente vemos que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não decrescente, ou seja,

$$a_o \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \ldots$$

Também é possível ver que para todo $n \in N$ tem-se

$$\alpha_n = a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant a_o + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} = a_o + 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^n}\right)$$

e nesta última igualdade utilizando soma de PG, obtemos

$$\alpha_n \leqslant a_o + 9 \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right] = a_o + \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) < (a_o + 1),$$

isto é, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

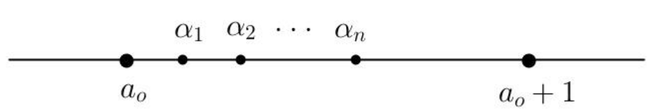

Figura 2.2: sequência limitada

Como $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não decrescente e limitada e $\mathbb{R}$ é completo temos que existe um número real $\overline{\alpha}$ tal que $\alpha_n \longrightarrow \overline{\alpha}$ (α_n tende a $\overline{\alpha}$, significa que α_n torna-se arbitrariamente próximo de $\overline{\alpha}$, à medida que n cresce. Dizemos que $\overline{\alpha}$ é o limite de α_n e escrevemos $\overline{\alpha} = \lim \alpha_n$), e escrevemos

$$\overline{\alpha} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Frisamos que ao afirmarmos que existe $\overline{\alpha}$ estamos assumindo que $\mathbb{R}$ é completo.

Resumindo, dado a expressão decimal

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$$

associamos a números real

$$\overline{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Por um abuso de notação escrevemos

$$\alpha = \overline{\alpha},$$

ou ainda,

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

A partir deste ponto não faremos distinção alguma entre o número real $\overline{\alpha}$ e a expressão decimal α.

Veja que definimos uma função

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots & \longmapsto & F(\alpha) = \overline{\alpha} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \end{array}$$

Na prática, sempre aproximamos o número real α por α_n, isto é,

$$\alpha \approx \alpha_n$$

Esta aproximação gera um erro

$$R_n = \alpha - \alpha_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{10^{n+k}} = \lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{j} \frac{a_{n+k}}{10^{n+k}}$$

Denotamos

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{a_{n+k}}{10^{n+k}}$$

Note que

$$\begin{aligned}
S_j &= \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+j}}{10^{n+j}} \leqslant \frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \ldots + \frac{9}{10^{n+j}} \\
&= 9 \cdot \left(\frac{1}{10^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{10^{n+j}} \right) \\
&= 9 \cdot \left[\frac{1}{10^n \cdot 9} \left(1 - \frac{1}{10^j} \right) \right] \\
&< \frac{1}{10^n} = 10^{-n}, \forall j
\end{aligned}$$

Logo $\lim\limits_{j \to \infty} S_j \leqslant 10^{-n}$. Assim vemos que o erro satisfaz $0 \leqslant R_n \leqslant 10^{-n}$.

Conclusão: Toda expressão decimal é um número real

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

e aproximando

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$$

o erro não ultrapassa 10^n.

A função $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva, ou seja, todo número real é uma expressão decimal. Com efeito, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sem perda de generalidade podemos supor $\alpha > 0$, (pois o caso $\alpha < 0$ é análogo, somente trocando de sinal) definimos

$a_0 =$ maior inteiro tal que $0 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$

$a_1 =$ maior dígito tal que $a_0 + \dfrac{a_1}{10} \leqslant \alpha$

$a_2 =$ maior dígito tal que $a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} \leqslant \alpha$

$\vdots$

$a_n =$ maior dígito tal que $a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \ldots + \dfrac{a_n}{10^n} \leqslant \alpha$

$\vdots$

Pela definição de F temos claramente que $F(a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots) = \alpha$.

$F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ é "quase injetiva"! Com o termo quase injetiva estamos querendo dizer que: retirando do cojunto $\mathcal{E}$ as expressões decimais que terminam por uma sequência de digitos 9, temos que F se torna uma função injetiva. Voltaremos sobre isto mais a frente. No que segue vamos estudar situações particulares, nas quais uma expressão decimal é um número racional. Dividimos nosso estudo em 3 casos:

1º caso: α é uma expressão decimal de modo que a partir de um certo índice, todos os dígitos a_n se tornam iguais a zero (decimal finita)

$$\alpha = a_0, a_1a_2 \ldots a_n000 \ldots$$

Neste caso, $\alpha = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \ldots + \dfrac{a_n}{10^n} = \dfrac{a_oa_1 \ldots a_n}{10^n}$ é um número racional (na verdade é uma fração decimal, fração cujo denominador é uma potência de 10). Resumindo, expressão decimal finita é uma fração decimal.

Exemplo 2.7. $13,428000 \ldots = 13 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{2}{10^2} + \dfrac{8}{10^3} = \dfrac{13428}{1000}$

2º caso: α é um expressão decimal de modo que os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem (Dízima períodica simples)

$$\alpha = 0, a_1a_2 \ldots a_pa_1a_2 \ldots a_p \ldots$$

(2.1) Caso $\alpha = 0, aaa \ldots$

$$\alpha = 0, aaa \ldots = \frac{a}{10} + \frac{a}{10^2} + \ldots + \frac{a}{10^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right] = \frac{a}{9}$$

Exemplo 2.8. $0,9999 \ldots = 1$. *Este símbolo* ($0,9999 \ldots$) *representa o número cujos valores aproximados são* $0,9$; $0,99$; $0,999$; *e etc. que é o número* 1

Observação 2.7. $F(0,999\ldots) = 1$, $F(1,0000\ldots) = 1$ *e no entanto enquanto expressões decimais* $0,999\ldots \neq 1,000\ldots$.

(2.2) Caso $\alpha = 0, ababab\ldots$

$$\alpha = 0, ababab\ldots = \frac{ab}{10^2} + \frac{ab}{10^4} + \frac{ab}{10^6} + \ldots + \frac{ab}{10^{2n}} + \ldots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ab \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{ab}{99} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^{2n}}\right) = \frac{ab}{99}.$$

Exemplo 2.9. $0,373737\ldots = \dfrac{37}{99}$

(2.3) Caso $\alpha = 0, a_1a_2\ldots a_pa_1a_2\ldots a_p\ldots$

$$\alpha = \frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^p} + \frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^{2p}} + \frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^{3p}} + \ldots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_1a_2\ldots a_p) \cdot \left(\frac{1}{10^p}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1a_2\ldots a_p}{99\ldots 9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^{np}}\right) = \frac{a_1a_2\ldots a_p}{\underbrace{99\ldots 9}_{p \text{ vezes}}}.$$

Exemplo 2.10. $0,521521521\ldots = \dfrac{521}{999}$

Resumindo: Toda Dízima periódica simples é uma fração (portanto um número racional) cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período.

3º caso: α é uma expressão decimal de modo que depois da vírgula tem uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica. (Dízima periódica composta)

$$\alpha = 0, \underbrace{b_1b_2\ldots b_k}_{\text{não se repete}}\, a_1a_2\ldots a_p\ \underbrace{a_1a_2\ldots a_p}_{\text{parte periódica}}\ \ldots$$

Temos:

$$
\begin{aligned}
10^k\alpha &= b_1b_2\ldots b_k, a_1a_2\ldots a_pa_1a_2\ldots a_p\ldots = b_1b_2\ldots b_k + 0, a_1a_2\ldots a_pa_1a_2\ldots a_p\ldots \\
&= b_1b_2\ldots b_k + \frac{a_1a_2\ldots a_p}{\underbrace{99\ldots 9}_{p \text{ vezes}}} = \frac{(b_1b_2\ldots b_k)\cdot(99\ldots 9) + (a_1a_2\ldots a_p)}{99\ldots 9} \\
&= \frac{(b_1b_2\ldots b_k)\cdot[10^p - 1] + (a_1a_2\ldots a_p)}{99\ldots 9} \\
&= \frac{(b_1b_2\ldots b_k)\cdot 10^p + (a_1a_2\ldots a_p) - (b_1b_2\ldots b_k)}{99\ldots 9} \\
&= \frac{(b_1b_2\ldots b_ka_1a_2\ldots a_p) - (b_1b_2\ldots b_k)}{99\ldots 9} \\
\Rightarrow \quad \alpha &= \frac{(b_1b_2\ldots b_ka_1a_2\ldots a_p) - (b_1b_2\ldots b_k)}{(99\ldots 9)\cdot 10^k}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.11. $0,35172172\ldots = \dfrac{35172-35}{99900} = \dfrac{35137}{99900}$

Resumindo: A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não-periódica (35) seguida de um período (172), menos a parte não-periódica e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica.

Pelos casos 1, 2 e 3 podemos ver que expressões decimais periódicas (simples ou compostas) representam números racionais, ou seja, denotando

$$\mathcal{D} = \text{conjunto de todas as expressões decimais periódicas},$$

temos que

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{E} \quad \text{e} \quad F(\mathcal{D}) \subset \mathbb{Q}$$

Reciprocamente, $\mathbb{Q} \subset F(\mathcal{D})$, ou seja, todo número racional é representado por uma expressão decimal periódica. De fato, dado um número racional $\dfrac{p}{q}$ efetuamos a divisão de p por q, acrescentando zero ao dividendo p enquanto se tiver um resto não-nulo. Como nas divisões sucessivas se pode ocorrer resto $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$ após, no máximo q divisões teremos uma repetição do resto e, a partir dai os digitos no quociente vão reaperecer na mesma ordem. Assim temos uma expressão decimal periódica.

Portanto

$$F(\mathcal{D}) = \mathbb{Q}.$$

e por conta disso dizemos que os números racionais são os decimais periódicos enquanto que os irracionais ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) são os decimais infinitos e não periódicos.

Uma confusão que ocorre entre professores de matemática do ensino regular, é achar que com este procedimento fizemos uma construção dos números reais utilizando expressões decimais. Com este raciocínio, nós apenas caracterizamos os números reais supostamente assumida a existência destes como decimais. A construção via decimais pode ser feita seguindo os passos seguintes:

1) Defina um número real como um par $\big(a, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b_n \in \{0, \ldots, 9\}$ de modo que não existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = 9$ para todo $n > M$, isto é, a sequência não é constante igual a 9 para índices grandes.

2) Represente por $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os números reais e defina uma relação de ordem em $\mathbb{R}$ do seguinte modo: dizemos que $\big(a, (b_n)\big) < \big(c, (d_n)\big)$ se $a < c$ ou, se $a = c$ e para algum $n \in \mathbb{N}$ tivermos $b_n < d_n$ mas $b_j = d_j$ para $1 \leq j < n$. Com essa definição prove que todo subconjunto limitado possui supremo.

3) Dado $\alpha = \big(a, (b_n)\big)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$\alpha_k = \big(a, (b'_n)\big)$$

onde

$$b'_n = \begin{cases} b_n & se \;\; 1 \leqslant n \leqslant k \\ 0 & se \;\; k > n \end{cases}.$$

Assim para $\alpha = \big(a, (b_n)\big)$ e $\beta = \big(c, (d_n)\big)$ defina

$$\alpha + \beta = sup\{(\alpha_k + \beta_k); k \in \mathbb{N}\}$$

e

$$\alpha \cdot \beta = sup\{(\alpha_k \cdot \beta_k); k \in \mathbb{N}\}.$$

4) Por fim prove que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um corpo.

2.4 Propriedades dos números reais

Proposição 2.14. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *é um corpo arquimediano, isto é, dado* $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x < n$. *Ou, equivalente,* $\forall x \in \mathbb{R}$ *com* $x > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \dfrac{1}{n} < x$.

Prova: Suponhamos, por absurdo, que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente e seja $s = sup\mathbb{N}$. Temos $n \leq s \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Segue que $n + 1 \leq s \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Logo $n \leq s - 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $s - 1$ é cota superior para $\mathbb{N}$ que é menor que $sup\mathbb{N}$, absurdo. ■

Teorema 2.15 (Dos Intervalos Encaixantes)**.** *Se* $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência de intervalos encaixantes, isto é,* $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, *então* $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Prova: Seja $A = \{a_m; m \in \mathbb{N}\}$. De $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ obtemos que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Daí segue, que $a_m \leq b_n$ quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Isto é, b_n é cota superior de A. Pelo Teorema da completeza de $\mathbb{R}$, $\exists s = supA$. Mostremos que $s \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Temos que s é cota superior de A, logo $a_n \leq s$. Além disso, s é a menor cota superior de A, portanto, $s \leq b_n$. Concluímos que $a_n \leq s \leq b_n$, ou seja, $s \in [a_n, b_n]$. ■

Teorema 2.16. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *é não-enumerável, ou seja,* $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$.

Prova: Para provar que $\mathbb{R}$ é não enumerável, vamos mostrar que não existe função sobrejetora de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ ou, de maneira equivalente, provamos que qualquer função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetiva.

Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ e seja $I_1 = [a_1, b_1]$ um intervalo fechado tal que $f(1) \notin I_1$. Dividimos este intervalo em três partes da seguinte maneira: Tomamos $b_1, c_1 \in I_1$ tais que $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$ e assim obtemos $I_1 = [a_1, b_1] \cup [b_1, c_1] \cup [c_1, d_1]$. Certamente $f(2)$ não pertence a alguns desses intervalos que denotaremos I_2. Repetimos o processo com o intervalo I_2, o dividimos em três partes e definimos I_3 como sendo uma dessas partes tal que $f(3) \notin I_3$. Continuando indefinidamente estre processo, construímos uma família $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos fechados e limitados tais que $I_n \supset I_{n+1}$ e $f(n) \notin I_n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema dos intervalos encaixantes, $\exists s$ tal que $s \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Segue imediatamente que $s \neq f(n)$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ e portanto f não é sobrejetiva. ∎

Corolário 2.2. *O conjunto $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, o qual é chamado de* ***conjunto dos números irracionais****, não é enumerável.*

Prova: Temos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Se $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ também o fosse, $\mathbb{R}$ seria enumerável, como reunião de dois conjuntos enumeráveis. ∎

Teorema 2.17. i. *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

ii. *$(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ é denso em $\mathbb{R}$*

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ *com* $x < y$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $x < r < y$.

Prova: i. ***(a)*** Seja $x = 0 < y$. Pela proposição 3.0.8, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < y$, onde $\dfrac{1}{n} = r \in \mathbb{Q}$.

(b) Seja $0 < x < y$. Neste caso vamos provar que $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tais que $nx < m < ny \Longleftrightarrow x < \dfrac{m}{n} < y$.

Como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{y-x} < n \Longleftrightarrow 1 < ny - nx \Longleftrightarrow 1 + nx < ny$.

Além disso, como $0 < nx$ temos que $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $(m-1) \leq nx \leq m$. Logo $m = 1 + (m-1) \leq 1 + nx < ny$ ou ainda $nx < m < ny$.

(c) Seja $y < x = 0$ e seja $y < x < 0$. Em ambos os casos mensionados, basta multiplicarmos por (-1) que teremos os mesmos casos *(a)* e *(b)*.

ii. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$. Logo como $\sqrt{2}$ é irracional, temos $\dfrac{x}{\sqrt{2}} < \dfrac{y}{\sqrt{2}}$. Mas mostramos anteriormente que entre dois números reais sempre existe um racional, logo $\exists r \in \mathbb{Q}$, tal que $\dfrac{x}{\sqrt{2}} < r < \dfrac{y}{\sqrt{2}} \Longrightarrow x < r\sqrt{2} < y$. ∎

Capítulo 3

Números Reais no Ensino Médio

Neste capítulo discutimos como os livros didáticos, usados no ensino médio, introduzem o conceito de número real. Também abordamos como este conteúdo é compreendido pelos professores da educação básica.

3.1 Livro didático

Para a pesquisa desta seção foram analisados oito livros didáticos do primeiro ano do ensino médio. Um deles escolhido pela maioria das escolas estaduais da cidade de Maringá, estado do Paraná, para ser utilizado nos anos de 2012 a 2014.

Constatou-se, nesses livros, uma deficiência em relação às definições dos conjuntos que são objetos de estudos deste trabalho. Vamos mencionar, a título de análise, somente a partir dos números racionais. Em todos os livros analisados quando se define número racional, já se admite que exista algum número com as características dos números racionais. Uma definição comum a todos é a seguinte:

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma da razão $\frac{a}{b}$, *com* $a \in \mathbb{Z}$ *e* $b \in \mathbb{Z}^*$ *que indicamos por*

$$\mathbb{Q} = \left\{x; x = \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \ e \ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

onde $\mathbb{Z}^* = Z \setminus \{0\}$.

Note também que não se vê número racional como classes de equivalência conforme seção 1.2.

Já as definições dos números irracionais mais encontradas nos livros analisados são as seguintes:

i) "*Um número é irracional se não puder ser escrito na forma* $\frac{a}{b}$ *com* $a, b \in Z$ *e* b *não nulo*".

ii) "*Irracional é o número que não pode ser escrito na forma de fração*".

iii) "*Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não periódica*".

iv) "*Todo número escrito na forma de um decimal infinito e não periódico é um número irracional*".

v) "*De um modo geral, toda raiz não exata assim como todo número decimal não-exato e não-periódico são irracionais*".

Em todos os casos se pressuponhe a existência dos números reais. Na verdade todas as definições podem ser dadas pela seguinte:

"*Número irracional é todo número real que não é racional*"

Na sequência estes autores definem números reais como sendo a união dos números racionais com os números irracionais. Ou seja, para a definição de número real pressuponhe-se a existência (conhecimento) dos números irracionais.

Note que há uma inconcistência por meio de um ciclo e, na verdade, um mero jogo de palavras onde não se define coisa alguma.

Elon Lages Lima em [11] a mais de 10 anos atrás fez um comentário sobre análise de livros didáticos do ensino médio que ainda é atual para os dias de hoje e merece uma atenção especial. Elon diz

> Para ser justo, devo admitir que alguns (lamentavelmente poucos) textos analisados continham um número reduzido de erros matemáticos. A maioria porém trazia definições, raciocínios, métodos de resolução de problemas e respostas inteiramente inadequados e até disprovidos de significado. E o que é mais sério: os livros com maior número de erros são os mais vendidos no país! Uma possível explicação para este paradoxo desagradável é que aqueles livros são simples, não exigem muito raciocínio, não contêm problemas difíceis e trazem a solução completa de todas as questões propostas, todas rotineiras. Esta possível razão do seu êxito comercial é também um indicador do nível médio dos professores do país, que preferem esses livros por não lhes causarem o embaraço de conterem problemas que não sabem resolver ou argumentos que não sabem explicar. (Lima, 2001)

Um grande erro dos pofessores é achar que nos livros didáticos que utlizam vão encontrar a definição de número real. O que realmente encontramos nesses livros é uma caracterização dos números reais, feita em alguns livros de forma incompleta.

3.2 Questionário dos professores

Nesta seção apresentamos o resultado de um questionário aplicado para um grupo de professores da educação básica no núcleo regional de educação de Maringá, Paraná. Tivemos a resposta de 54 professores e o objetivo da pesquisa foi mensurar o conhecimento destes sobre números reais, eventuais inconsistência dos conceitos apresentados nos livros didáticos e cardinalidade. No que segue apresentamos o questionário aplicado a comentamos as respostas obtidas.

Pergunta 1: Qual sua formação?

( ) Matemática - Licenciatura

( ) Matemática - Bacharelado

( ) Outro:

Respostas: 93% - Matemática - Licenciatura

4% - Matemática - Bacharelado

3% - Outro

Pergunta 2: A quanto tempo está atuando como professor de matemática?

( ) não atuo

( ) inferior a 1 ano

( ) de 1 a 5 anos

( ) de 5 a 10 anos

( ) acima de 10 anos

Respostas: 2% - não atuo

0% - inferior a 1 ano

4% - de 1 a 5 anos

30% - de 5 a 10 anos

65% - acima de 10 anos

Comentário: Nestas duas questões nosso objetivo foi classificar o público pesquisado quanto a formação e experiência profissional. As respostas mostram que trata-se de um grupo de licenciados com bastante experiência profissional.

Pergunta 3: Existem mais números inteiros do que números naturais?

( ) sim

( ) não

Respostas: 44% - sim

54% - não

Pergunta 4: Existem mais números racionais do que números inteiros?

( ) sim

( ) não

Respostas: 52% - sim

46% - não

Comentário: As questões 3 e 4 tinham a intenção de investigar o conhecimento dos professores quanto a cardinalidade de conjuntos infinitos. De acordo com as respostas podemos afirmar que a metade desconhece a cardinalidade dos números naturais, inteiros e racionais.

Pergunta 5: O que é um número racional?

Respostas: Não vamos aqui listar todas as respostas. Respostas comuns ou parecidas serão omitidas.

1) O quociente de dois números inteiros.

2) Dada uma medida de unidade. Um número irracional é aquele cuja medida é incomensurável com a unidade adotada.

3) É um número escrito na forma a/b com a inteiro e b inteiro não nulo. Um número racional a pode ser inteiro, decimal finito ou decimal infinito e periódico.

4) É todo número que pode ser escrito na forma a/b, com a inteiro e b inteiro e diferente de zero.

5) A palavra racional refere-se a rateio, divisão. Portanto, um número racional é todo número que pode ser representado por uma fração que gere um número inteiro, um decimal exato ou uma dízima periódica.

6) É todo número que se pode representa-lo na forma de fração.

7) Um número na forma $\frac{a}{b}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

8) Todos os números que podem ser representados em forma de fração, incluindo os inteiros.

9) É um número expresso por um decimal finito ou infinito e periódico.

10) São todos os números que podem ser escritos na forma de fração de modo que numerador e denominador sejam números inteiros e com a restrição de que o denominador não pode ser zero.

11) Número racional pode ser representado por uma razão, que nada mais é que o resultado de uma divisão.

12) Todo número, é um racional.

13) É todo número que pode ser expresso através de uma fração a/b; portanto todos naturais e inteiros também são racionais.

14) Um número da forma a/b onde a e b são números inteiros.

15) É o quociente entre dois números inteiros.

16) O conjunto dos números racionais podem ser escrito na forma de fração , sendo sua divisão um número finito ou não-exata,periódica , número infinito.

17) Um número racional é todo número que pode ser representado da forma: a/b, com b diferente de zero. (a é número inteiro e b é número inteiro). Isso é muito abstrato para o aluno entender, logo: todo número natural é racional, todo número inteiro é racional, todo número decimal infinito não periódico é racional, todo número fracionário é racional...

18) Um número que pode ser escrito em forma de fração, uma aproximação de um número real.

19) É um número capaz de ser interpretado, como: a/b.

20) Acredito que seja todo número que pode ser escrito da forma a/b, com a e b inteiros.

Pergunta 6: Quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais?

( ) 2/3

( ) 0,12345678910111314526734518...

( ) 0,32

( ) π

( ) 0,01010101010101...

( ) 0,01001000100001...

( ) $\sqrt{6}$

Respostas: 93% - 2/3

4% - 0,12345678910111314526734518...

93% - 2/3

2% - π

74% - 0,01010101010101...

13% - 0,01001000100001...

0% - $\sqrt{6}$

Comentátio: Com as perguntas 5 e 6 pretendíamos coletar qual o conceito de número racional para os professores. De forma resumida e analisando a essência das respostas podemos afirmar que os professores reproduziram exatamente a definição encontrada nos livros didáticos. Além disso, pelas respostas da pergunta 6 vemos que a grande maioria dos professores não sabem a representação de um decimal.

Pergunta 7: O número 2-1,99999... é:

( ) maior do que zero

( ) menor do que zero

( ) igual a zero

Respostas: 43% - maior do que zero

6% - menor do que zero

50% - igual a zero

Comentário: Metade dos professores não sabe que o decimal 1,999... é representado pela soma da série $1 + 9/10 + 9/10^2 + 9/10^3 + \ldots + 9/10^n \ldots$ que é igual a 2.

Pergunta 8: Cite uma razão que ilustre a importância e/ou necessidade dos números reais.

Respostas:

1) Medir segmentos.

2) Apesar das aproximações utilizadas, todas as medidas concretas são representadas por um número real.

3) No nosso cotidiano, a representação de diversos situações não são possíveis utilizando números naturais, nem inteiros, em muitos casos, os números que representam são racionais e até mesmo irracionais. Logo o conjunto dos números reais é de fundamental importância para a quantificação de maneira geral.

4) No nosso dia-a-dia, muitas das coisas que nos cercam tem tamanhos ou medidas exatas, o que fica evidente os números reais, por exemplo, quanto temos de alutra, de peso, quantos custa os alimentos que consumimos, etc.

5) São várias as situações, medidas em geral, tudo que vamos medir necessitamos de números para isso, seja medida de tempo, comprimento valor monetário etc.

6) são utilizados no dia a dia, em quase todas as situações, independente do nível de formação das pessoas, de sua classe social, trabalho, etc. Para poder agir no mundo, é necessário dominar o sistema de numeração, o que implica em conhecer sua regra de formação, suas interrelações, seu significado, enfim, sua utilização de maneira global.

7) Os números reais são essenciais para todo estudo e aplicação da matemática em processos contínuos (não-discretos).

8) A necessidade de trabalhar com medidas mais precisas.

9) é um conjunto numérico que se estende ao cotidiano das pessoas, uma vez que ele é a reunião de todos os outros conjuntos.

10) Com os números reais é possível fazer qualquer relacionamento matemático. Tanto simples como os científicos, mais aprofundados.

11) Para expressarmos, por exemplo, o comprimento de uma circunferência de raio igual a 2 , aproximadamente 12,56 . Imagine um resultado de um hemograma se não existisse os números reais para expressar esses valores.

12) Não se pode considerar a incomensurabilidade entre dois seguimentos se não considerarmos os números irracionais, e daí, os números reais.

13) A reta por exemplo, é composta de números reais, ou melhor, numa sequência de números existem infinitos números reais.

14) para compreender o conceito de medida e o conceito de função real.

15) Resolver problemas que envolvam medidas.

16) Para determinar a medida da diagonal de um quadrado cujo lado tenha como medida um número racional.

17) Excetuando os complexos, os reais são um conjunto de elementos que se relacionam com cada situação.

18) Sem números reais com certeza não teríamos tido o desenvolvimento da humanidade, não teríamos o "porque"de trabalhar e portanto estaríamos vivendo como animais somente lutando pela nossa sobrevivência. Eles são de suma impotância para o nosso desenvolvimento.

19) Os números reais são importantes em várias situações, dentre elas, para o desenvolvimento da geometria, pois, sem eles, não seria possível determinar com tamanha precisão a medida da diagonal do quadrado, do comprimento da circunferência, etc.

20) Os números racionais não são suficientes para expressar todas as medidas. Independentemente da unidade que se escolha, sempre existirão medidas que serão incomensuráveis com esta unidade.

21) Medidas.

22) O Número de Ouro é um número irracional, portanto real, misterioso e enigmático que nos surge numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão.

23) Medição de segmentos incomensuráveis

24) Um jantar entre seis amigos que é rateado entre as partes de igual forma, custou R$63,00, quanto deverá pagar cada um?

25) O mundo opera com números. Os números estão presentes em nossa vida. É tão vital como o ar que respiramos. Não passamos um dia sequer sem conviver com eles.

26) Com reais podemos efetuarmos qualquer operação exceto a divisão por zero, e não esquecer que não existe raiz quadrada de número negativo

27) Por se tratar de fração e decimais sua aplicação esta em lidar com o dinheiro e com pedaços, ter que dividir algo, só isto já é uma grande necessidade.

28) calcular a área de um espaço circular.

29) O estudo das funções.

30) Os números reais são utilizados em várias situações a fim de facilitar a representação de quantidade, medidas, códigos, entre outras, em uma sociedade tão desenvolvida que não se pode mais representar tais grandezas de outra forma que seja tão simples.

31) Nosso dia a dia, escola, banco, tudo o que fazemos com quantidade, medida, etc...

32) Entender a correspondência biunívoca entre os reais e a reta numérica.

33) OS NÚMEROS FAZEM PARTE DA NOSSA VIDA.

34) Os números reais está presente em nosso dia a dia nas várias operações comerciais e financeiras.

35) Excluindo-se os números irracionais, as razões para necessidade e importância dos números naturais, inteiros ou racionais é patente seja no processo de contagem, manipulação de valores monetários, medidas de grandezas. Os números irracionais porém, de forma mais sutil, não tão palpável, exigem um conhecimento mais apurado para identificar a sua importância e necessidade como a precisão nos cálculos envolvendo círculos, circunferências ou esferas; ou ainda, na apreciação das curvas que representam um crescimento exponencial. Intrigante e de suma importância a presença dos irracionais na estatística.

36) Nas medições , construções (engenharia, arquitetura,...)

37) No mundo dos negócios, onde milésimos de centavos podem ser a diferença entre lucro e prejuizo

38) Os números aparecerão na história da matemática por duas necessidades elementares: contar e medir. Para contar quantidade discretas - animais, objetos etc. - os naturais dão conta de qualquer situação. Mas para a segunda necessidade, os naturais não são suficientes, podemos ter frações da unidade, diagonais de quadrados, entre outras situações justificam a importância dos reais.

39) na minha visão matemática toda situação depende dos números reias, por isso é importante saber lidar com eles e entender as divisões, digo, classificações em naturais, inteiros racionias, irracionais.

40) Cálculo da diagonal de um quadrado l, ou do comprimento de uma circunferência de raio r.

41) Na geometria iríamos ter resultados em conjuntos diferentes, para algo sólido. Tipo a medida da hipotenusa de um triângulo de lado l. Sendo l racional, a hipotenusa será irracional. Unindo estes dois conjuntos, teremos as medidas em um único conjunto.

42) Temos: 1/98. Faz-se necessário para uma notação. Ex.: escala de exames para detectar uma doença.

43) Soluções de equações

44) Quanto quisermos medir a distância entre duas pontas opostas em uma sala (pois o resultado muitas vezes é irracional)

45) Desculpe mas nunca pensei a respeito. Mas acredito que na realidade as coisas não são sempre inteiras, bonitinhas, nada é exato. Por isso a importância dos números reais.

46) São resultado de qualquer processo de medir.

Pergunta 9: Um arame de comprimento c é cortado por um alicate ideal (neste caso, o alicate tem a propriedade de cortar o arame em um único ponto). Podemos garantir que ambas as partes são números racionais?

( ) sim

( ) não

Respostas: 33% - sim

66% - não

Comentátio: Nenhuma resposta comenta de forma clara e explicita que os números reais são uma necessidade fundamentalmente teórica, ou seja, de que os números reais são essenciais para que se tenha uma teoria completa. Os números reais não estão presentes nos aparelhos de medição (relógios, balanças, réguas, velocímetros, computadores, etc).

Pergunta 10: O que é um número real? O que é um número irracional?

Respostas: Como foi feito na pegunta 5, respostas comuns serão desconsideradas.

1) real: é a união dos conjuntos racionais com os irracionais. irracional: são os reais menos os irracionais.

2) Dada uma mediada de unidade. Um número racional é aquele cuja medida é comensurável com a unidade adotada. Um número real é aquele cuja medida é comensurável ou não com a unidade adotada.

3) Um número que tem a foram decimal com infinita e não periódica é irracional. Os números racionas e os irracionais juntos formam o conjunto dos números reais, ou seja, todo número racional é real e todo número irracional é real.

4) Um número real é numero que pode ser natural, inteiro, racional ou irracional. Um número irracional é um número que não podemos escrevê-lo na forma a/b, ou seja, não pode ser escrtito como uma razão de dois números inteiros.

5) O conjunto dos números reais é a expansão do conjunto dos números racionais, englobando, assim, os números irracionais, que são aqueles que não podem ser colocados em forma da razão entre dois números inteiros, ou seja, os números decimais infinitos não-periódicos.

6) Um número real é uma fração decimal infinita, podendo ser também um número inteiro, racional e irracional. O conjunto dos números reais é uma expansão dos demais conjuntos, com excessão dos complexos. Um número irracional é um número real, onde esse número não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros. Defini-se por um número com infinitas casas decimais, sem um período definido.

7) Número real é o conjunto dos números que pertencem aos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais. E número irracional, são os demais números, que não pertencem aos reais.

8) um número é real se e só se é racional ou irracional. Um número é irracional quando não pode ser expresso sob a forma de uma dízima finita ou infinita e periódica.

9) Números reais são números racionais ou irracionais, excluindo-se, assim os números complexos. Números irracionais são números decimais dizima não períodica, ou melhor, que não apresentam raízes exatas.

10) Dado um segmento de reta AB e um segmento unitário u. Se u cabe um número exato de vezes em AB, então a medida de AB é um número inteiro. Caso exista uma partição comum entre AB e u, então a medida de AB é um número racional. No caso em que não exista uma partição comum entre AB e u, então a medida de AB é um número irracional. Desse modo, um numero real é racional ou irracional, sendo um número que expressa a medida de um segmento AB arbitrário dado um segmento unitário qualquer.

11) Um número real é um número racional ou irracional. Um número Irracional é um número que não pertence ao conjunto dos números racionais.

12) Número real é o conjunto maior dos números que envolve o conjunto dos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Número Irracional é todo número que não pode ser escrito como uma fração de numerador inteiro e de denominador inteiro diferente de zero.

13) Números irracionais são números que representam medidas de segmentos que não são comensuráveis com a unidade. Os numeros reais englobam os numeros racionais e os irracionais, e são os numeros capazes de representar todas as medidas.

14) Por que ele faz parte de toda história dos números em qualquer etapa da matemática OK!

15) O número real é usado para representar uma quantidade contínua (incluindo o zero e os negativos). Pode-se pensar num número real como uma fração decimal possivelmente infinita, é uma expansão do conjunto dos números racionais e irracionais. Número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros(raízes não exatas e decimais infinitos não periódicos).

16) Não sei definir número real, exceto como um elemento de um conjunto dado pela união do conjunto de racionais e irracionais. Número irracional é o número que não é racional (isto é, não satisfaz a definição de número racional)

17) Um número real é nem mais nem menos, Negativos, positivos, meios, quintos, com vírgula, sem vírgula, fraccionário, infinito... ect. Número irracional é um número real que não pode ser obtido pela divisão de dois números inteiros, ou seja, são números reais mas não racionais.

18) É o conjunto universo, os reais e os irracionais apenas uma parte deles...

19) Numa definição muito simplista podemos dizer que um número real é todo número que podemos escrever utilizando-se uma quantidade finita ou infinita de algarismos de 0 a 9 num sistema posicional decimal considerando-se também os que possuem uma única vírgula que pode ser colocada em qualquer posição entre dois algarismos e onde o primeiro algarismo não é o 0 exceto na situação em que a vírgula seja colocada logo após esse número. Um número irracional seria aquele número real que não puder ser escrito como resultado da divisão de dois inteiros.

20) Número real é todo número natural, inteiro, racional e irracional. Irracional é todo número decimal infinito e periódico (pi e todo número escrito na forma de radical e que não tem raiz exata).

21) numero irracional é todo numero que não pode ser escrito com numerador inteiro e denominador inteiro. sendo assim um número é racional ou irracional.

22) Um número real é um número que é racional, ou é irracional. Lembrando que entre os números reais não existe nenhum número que possa ser escrito como sendo a raiz par de radicando negativo. Irracional é um número que não pode ser escrito como sendo a razão entre dois números inteiros.

23) É todo número capaz de ser idealizado e escrito na sua amplitude. Enquanto que o número irracional, é possível de ser idealizado, mas escrito na sua amplitude, torna-se mais difícil.

24) Real: todos os números que representam quantidades, quantificam massa, determinam tamanhos, etc.. Irracional: o que não pode ser escrito como na pergunta 5 e o que faz o que os reais fazem.

25) Real- São todos os números da reta Irracional- Aqueles que são reais, mas não são racionais.

26) Um número a é irracional quando na correspondência da reta real o segmento OA = a, não é comensurável com a unidade, nem seu simétrico. Real é a união dos conjuntos racional e irracional.

Pergunta 11: Na sua opinião existe alguma inconsistência nas definições de número real e número irracional, comumente apresentadas nos livros didáticos que você usa?

( ) sim

( ) não

Respostas: 60% - sim

30% - não

Pergunta 12: Existem mais números racionais do que números irracionais?

( ) sim

( ) não

Respostas: 26% - sim

72% - não

Comentário: De modo geral podemos ver que os professores reproduzem as definições dadas nos livros didáticos. Interessante notar que a maioria indica a existência de inconsistência nas definições dadas pelos livros mas, as repetem quando questionados.

3.3 Conclusões

Pela análise dos livros didáticos e a aplicação do questionário aos professores da educação básica, percebemos que necessitamos de mudanças. Para qualquer proposta de mudança é essencial que o professor conheça as construções estudadas no capítulo 2. Assim é fundamental mudanças nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática, que contempla disciplina de análise, onde se faça este estudo por completo.

É claro que não é concebido, nem razoável apresentar no ensino fundamental e médio uma construção formal como as aqui estudadas. Talvez uma possibilidade seria dizer a verdade sobre os fatos e assumir a existência dos números reais. A partir deste ponto apresentar uma caracterização destes por meio de decimais.

Bibliografia

[1] BARROSO, J. M., et al. *Conexões com a Matemática*. Vol 1, 1 ed, Moderna, São Paulo (2010).

[2] BIANCHINI, E. e PACCOLA, H., *Matemática*. Vol 1, Moderna, São Paulo (2004).

[3] BIRKHOFF, G., MACLANE, S., *Álgebra Moderna Básica*. Traduzido por Carlos Alberto Aragão de Carvalho. 4. ed., Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro (1980).

[4] BUCCHI, P., *Curso Prático de Matemática*. Vol 1, 1 ed., Moderna, São Paulo (1998).

[5] DANTE, L. R., *Matemática: contexto e aplicações*. Vol 1, 1 ed, Ática, São Paulo (2010).

[6] FERREIRA, J., *A Construção dos Números*. 2. ed., coleção Texos Universitários, SBM, Rio de Janeiro (2011).

[7] FIGUEIREDO, D. G., *Números irracionais e transcendentes*. 3. ed., SBM, Rio de Janeiro (2011).

[8] FIGUEIREDO, D. G., *Análise 1*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro (1975).

[9] HEFEZ, A., *Curso de Álgebra*. Vol 1, 4 ed., IMPA, Rio de Janeiro (2010).

[10] IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*. Vol 1, 6 ed., Saraiva, São Paulo (2010).

[11] LIMA, E. L., *Matemática e Ensino*. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro (2001).

[12] LIMA, E. L., *Meu Professor de Matemática*. Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro (1991).

[13] LIMA, E. L., *Curso de Análise*. Vol 1, 13 ed., Projeto Euclides, IMPA (2011).

[14] LIMA, E. L., *Elementos de Topologia Geral*. Coleção Textos Universitários, SBM (2009).

[15] LIMA, E. L. et. al. *A Matemática do Ensino Médio*. Vol 1, 9 ed., Coleção do Professor de Matemática, SBM (2006).

[16] MONTEIRO, J., *Elementos de Álgebra*. Coleção Elementos de Matemática, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, Rio de Janeiro (1974).

[17] NERI, C., *Curso de Análise Real*. 2 ed., Rio de Janeiro (2011). Disponível em: http://www.labma.ufrj.br/˜mcabral/livros/.

[18] NETO, A. C. M., *Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais*. Vol 1, SBM, Rio de Janeiro (2012).

[19] NIVEN, I., *Números: Racionais e Irracionais*. 1 ed., traduzido por Renate Watanabe, Coleção Iniciação Científica, SBM, Rio de Janeiro (2012).

[20] PAIVA, M., *Matemática*. Vol 1, 1 ed., Moderna, São Paulo (2009).

[21] RIBEIRO, J., *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*. Vol 1, 1 ed., Scipione, São Paulo (2010).

[22] RIBENBOIM, P., *Funções, Limites e Continuidade*. 1 ed., coleção Textos Universitários, SBM, Rio de Janero (2012).

[23] RUDIN, W., *Princípios de Análise Matemática*. Traduzido por Eliana Rocha Henriques de Brito, Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro (1971).

[24] SA, C. C. de, ROCHA, J., *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática*. 2 ed., Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro (2012).

[25] SOUZA, J, *Matemática*. Coleção novo olhar, vol 1, 1 ed., FTD, São Paulo (2010).

[26] SPIVAK, M., *Calculus.* 3 ed., Library of Congress Catalog Card Number 80-82517, New York (1994).