Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Cálculo de Áreas de Figuras Planas e Espaciais com aplicações ao Ensino Fundamental e Médio

Alessandro Luis Custodio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

2015

516 C987c

Custodio, Alessandro Luis

Cálculo de áreas de figuras planas e espaciais com aplicações ao ensino fundamental e médio / Alessandro Luis Custódio. - Rio Claro, 2015

115 f. : il., figs., gráfs., tabs., fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Orientador: Marta Cilene Gadotti

1. Geometria. 2. Figuras espaciais. 3. Geoplano. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Alessandro Luis Custodio
Cálculo de Áreas de Figuras Planas e Espaciais com aplicações ao Ensino Fundamental e Médio

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora

Prof. Dr. Wladimir Seixas
Departamento de Física, Química e Matemática - UFSCar

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Departamento de Matemática - IGCE - Unesp

Rio Claro, 31 de Julho de 2015

Dedico este trabalho
aos meus familiares e amigos.

Agradecimentos

À Deus pela vida, saúde, trabalho e força que me faz lutar a cada dia.

À minha orientadora Professora Doutora Marta Cilene Gadotti que me ajudou, orientou e aperfeiçoou este trabalho.

À UNESP e a todos os professores do PROFMAT que me ensinaram com muita dedicação e carinho.

Aos professores monitores e auxiliares do PROFMAT que nos ajudaram no decorrer das disciplinas.

Aos meus pais Joaquim Custódio e Conceição Aparecida Varussa Custódio que sempre me ajudaram e me orientaram dando a devida educação para que eu conseguisse alcançar meus objetivos.

À minha esposa Luciane Andrade dos Anjos Custódio que me apoiou nos momentos difíceis e soube entender a importância desse Mestrado.

Ao meu irmão André Luiz Custódio, sua esposa Andrea Teles de Meneses Custódio e ao meu sobrinho que veio ao mundo para nos dar alegria; ao meu sogro Eronides Soares dos Anjos e minha sogra Luziene dos Santos Anjos e minhas cunhadas Érica dos Santos Anjos e Elaine dos Santos Anjos, que sempre rezavam e incentivavam nas vésperas das provas difíceis.

Aos meus amigos do PROFMAT Matheus, Marcílio Maeda, Franck, Gabriel, Paulo entre outros, que me auxiliaram nos estudos e que foram companheiros durante o curso.

À Professora Mestre Mariana Pecorari que me emprestou alguns livros e apostilas, me incentivou e me ajudou durante boa parte do mestrado.

À Professora Tereza Meirelles que me doou vários livros de matemática.

À direção, Elaine, Adriana e Cecília e à coordenação, Roade e Meire da Escola Odilon Corrêa que me apoiaram sempre em minhas atividades desenvolvidas em sala de aula.

Aos meus alunos da Escola Odilon Corrêa da turma de 2015 que contribuíram na aplicação das atividades.

Aos vários professores que trabalham comigo, principalmente as professoras Danubia, Sheila, Rosângela, Patrícia, Cristiane, Érika C., Érica S., Maria Ângela, Adalgisa, Maria de Aparecida, Rafaela, Maria Alzira entre outras e aos professores Fernando, Rafael, Ruben, Paulo, Rogério entre outros.

À CAPES pelo apoio financeiro para realização deste estudo.

E a todas as demais pessoas da minha família, comunidade, trabalho e convívio que sempre torceram pelo meu sucesso.

Um sonho que se sonha só, é só um sonho.
Um sonho que se sonha junto é realidade.
Raul Seixas

Resumo

Este trabalho tem por objetivo auxiliar o professor de Matemática através do estudo detalhado sobre área das figuras planas e espaciais vistas no Ensino Fundamental e Médio. Para isto apresentaremos um relato histórico muito breve, além de uma análise de livros didáticos e apostilas utilizados no Estado de São Paulo, tanto no Ensino Fundamental como no Médio. Será apresentado um embasamento teórico com as demonstrações dos principais resultados e finalmente algumas atividades do assunto para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio serão realizadas.

Palavras-chave: Geometria, Figuras Espaciais, Geoplano.

Abstract

The purpose of this work is to assist the mathematics teacher through the detailed study about area of the plane figures and spatial figures seen in high schools. We present a very short historical account, as well as an analysis about text books and handouts of State São Paulo used in high school. There will be a theoretical foundation in which we will prove of the results about area and finally we will present some activities of the theme for high school.

Keywords: Geometry, Figures space, Geoplano.

Lista de Figuras

2.1 Ilustração do Problema 51: Papirus de Rhind. 24
2.2 Ilustração do Problema 52: Papirus de Rhind. 24
2.3 Ilustração do Problema 50: Papirus de Rhind. 25
2.4 Ilustração do Problema 14: Papirus de Moscou. 25
2.5 Ilustração da demonstração do problema lunas no triângulo retângulo. . 28
2.6 Ilustração do problema lunas no trapézio isósceles. 29
2.7 Ilustração do primeiro problema lunas de Alexandre. 29
2.8 Ilustração do segundo problema lunas de Alexandre. 30
2.9 Ilustração de um exemplo de curva que Arquimedes estudou. 31

3.1 Polígonos em malhas quadriculadas. 36
3.2 Ilustração de exemplos de polígonos. 37
3.3 Figuras curvas em malhas. 38
3.4 Regiões circulares. 38

4.1 Exemplo de um polígono convexo e um não convexo. 44
4.2 Ilustração de polígono convexo, com $n = 7$. 44
4.3 Ilustração do paralelogramo. 48
4.4 Ilustração do triângulo. 48
4.5 Ilustração dos triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo. 49
4.6 Ilustração do triângulo equilátero. 50
4.7 Ilustração do losango. 51
4.8 Ilustração do trapézio. 51
4.9 Ilustração do polígono regular. 52
4.10 Ilustração do hexágono regular. 53
4.11 Ilustração do círculo e da circunferência. 54
4.12 Ilustração do círculo inscrito num hexágono regular. 54
4.13 Ilustração da coroa circular. 55
4.14 Ilustração do setor circular. 56
4.15 Ilustração do incentro. 56
4.16 Ilustração do triângulo e círculo inscrito. 57
4.17 Ilustração para a demonstração de Heron. 58
4.18 Ilustração do segmento circular. 59

4.19 Ilustração do prisma. 61
4.20 Ilustração de diedro e triedro. 62
4.21 Ilustração de pirâmide ilimitada e uma secção. 62
4.22 Ilustração da pirâmide convexa. 63
4.23 Ilustração geral do cilindro de diretriz C. 64
4.24 Ilustração do cilindro circular ilimitado e cilindro circular. 64
4.25 Ilustração do cilindro e sua planificação. 65
4.26 Ilustração geral do cone. 66
4.27 Ilustração do cone e sua planificação. 67
4.28 Ilustração do cone e seu tronco. 68
4.29 Ilustração do tronco do cone e sua planificação. 68
4.30 Ilustração da esfera. 69
4.31 Ilustração da área da esfera. 69
4.32 Ilustração do triângulo retângulo. 70

5.1 Fotos de alguns dos ambientes observados. 75
5.2 Atividade 1 desenvolvida em sala. 76
5.3 Atividade 2 desenvolvida em sala. 79
5.4 Atividade 2 desenvolvida em sala com o Geoplano. 80
5.5 Atividade 3 desenvolvidas em sala com o Geoplano. 82
5.6 Atividade 3 desenvolvida em sala. 82
5.7 Exemplo de construção para a Atividade 4. 83
5.8 Atividade 4 desenvolvida em sala. 85
5.9 Exemplos para a Atividade 5. 85
5.10 Atividade 5 desenvolvida em sala. 87
5.11 Exemplos para a atividade 6. 88
5.12 Atividade 6 desenvolvida em sala. 89
5.13 Atividade 7 desenvolvida em sala. 91
5.14 Atividade 8 desenvolvida em sala. 93

A.1 Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$. 103
A.2 Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$. 106
A.3 Ilustração da interpretação geométrica da derivada. 108
A.4 Ilustração da região S sob o gráfico de uma função. 109
A.5 Ilustração do região S sob o gráfico de uma função constante. 110
A.6 Ilustração da Soma de Riemann. 110

Lista de Tabelas

3.1 Fórmulas das áreas de alguns polígonos ou figuras vistas no EF. 39
3.2 Fórmulas das áreas de algumas figuras vistas no EM. 42

5.1 Nome de alguns polígonos vistos no EF. 73
5.2 Avaliação da Atividade 1. 75
5.3 Avaliação da Atividade 2. 79
5.4 Avaliação da Atividade 3. 83
5.5 Avaliação da Atividade 4. 84
5.6 Avaliação da Atividade 5. 86
5.7 Avaliação da Atividade 6. 89
5.8 Algumas fórmulas para a Atividade 7. 90
5.9 Avaliação da Atividade 7. 91
5.10 Avaliação da Atividade 8. 92

B.1 Propriedades da soma dos números reais. 115
B.2 Propriedades do produto dos números reais. 115

Sumário

1 Introdução **21**

2 Um pouco da História da Matemática em relação à Geometria **23**

2.1 Egito 23
2.2 Mesopotâmia 26
2.3 Grécia 27
2.4 China 32
2.5 Índia 33

3 Abordagem no Ensino Fundamental e Médio **35**

3.1 Ensino Fundamental 35
3.2 Ensino Médio 39

4 Desenvolvimento Teórico: Áreas **43**

4.1 Áreas de Figuras no Plano 43
4.2 Áreas de Figuras no Espaço 59

5 Atividades Didáticas **71**

5.1 Descrição da Escola e Alunos 71
5.2 Atividades para o Ensino Fundamental 72
5.2.1 ATIVIDADE 1: Polígonos 72
5.2.2 ATIVIDADE 2: Classificação de triângulos 76
5.2.3 ATIVIDADE 3: Quadriláteros 80
5.2.4 ATIVIDADE 4: Cálculo de áreas através do Geoplano 83
5.2.5 ATIVIDADE 5: Cálculo de áreas através da malha quadriculada 85
5.2.6 ATIVIDADE 6: Cálculo de áreas de qualquer figura através da malha quadriculada 87
5.2.7 ATIVIDADE 7: Aplicação de fórmulas para calcular áreas em exercícios simples 89
5.2.8 ATIVIDADE 8: Aplicação de fórmulas para calcular áreas em problemas 91
5.3 Atividades para o Ensino Médio 93
5.3.1 ATIVIDADE 1: Área de Polígonos Regulares 93

5.3.2 ATIVIDADE 2: Área de polígonos regulares inscritos na circunferência 94

6 Considerações Finais **97**

Referências **99**

A Algumas Noções de Cálculo Diferencial e Integral **101**

A.1 Noção de limite de uma função real 101

A.1.1 Limites no Infinito 105

A.2 Continuidade 106

A.3 Derivada 107

A.3.1 Conceito de Derivada 107

A.3.2 Função Derivada 108

A.3.3 Regras de Derivação 108

A.4 Integral 109

A.4.1 Teorema Fundamental do Cálculo 112

B O Conjunto dos Números Reais **115**

B.1 Definição 115

B.2 Limitantes 116

1 Introdução

Com o intuito de auxiliar o leitor e principalmente o professor de Matemática em sua contínua formação, este trabalho apresenta um estudo detalhado sobre área das principais figuras planas e espaciais vistas no Ensino Fundamental e Médio.

Apresentaremos no Capítulo 2 alguns fatos históricos importantes sobre o estudo de áreas na Antiguidade, iniciando uma "viagem"pelo Egito, passando pela Mesopotâmia, Grécia, Índia e China. Nesta parte histórica teremos alguns detalhes importantes sobre o número π.

No Capítulo 3 será apresentado uma análise de como alguns livros didáticos e as apostilas (caderno dos alunos) do Estado de São Paulo abordam o conteúdo sobre áreas. Com o objetivo de fazer o leitor relembrar ou até mesmo aprender alguns conceitos, o Capítulo 4 nos traz várias definições, teoremas e demonstrações. Praticamente serão vistas todas as fórmulas apresentadas nas escolas e suas respectivas demonstrações. Muitas dessas demonstrações podem ser realizadas com os alunos do Ensino Médio, enquanto que algumas não serão possíveis por envolverem conceitos que são vistos apenas no Ensino Superior.

Após esta importantíssima parte teórica, teremos no Capítulo 5 várias propostas de atividades para o professor, onde começaremos com o reconhecimento da nomenclatura de polígonos, depois um estudo sobre triângulos e os principais quadriláteros. As atividades tem como objetivo fazer com que os alunos calculem áreas de forma intuitiva através do Geoplano e malhas quadriculadas. Finalmente, serão realizadas atividades nas quais são apresentadas algumas fórmulas para calcular as áreas de figuras planas através de exercícios simples e problemas mais elaborados serão realizados. No final de cada atividade aplicada nos 6^{os} anos uma avaliação e os resultados dessas aplicações são discutidos. Todas as figuras apresentadas neste trabalho foram feitas pelo autor através do software GeoGebra [1].

Apresentaremos no final deste trabalho dois Apêndices que têm como objetivo de-

[1] www.geogebra.org

senvolver certas teorias necessárias para algumas demonstrações, definições e teoremas. Os principais assuntos vistos no Apêndice A são: limite, derivada e integral. Já o Apêndice B, descreve uma importante característica do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) de ser um corpo ordenado completo.

Esperamos que seja uma leitura prazerosa e que o leitor desse trabalho possa aproveitar o máximo. Bons estudos!

2 Um pouco da História da Matemática em relação à Geometria

Este capítulo foi escrito tendo como referência o livro História da Matemática de Carl Benjamin Boyer [1], sendo que uma demonstração é baseada na referência [2].

É difícil ter certeza quanto ao surgimento da geometria, pois acredita-se que a matemática surgiu bem antes da escrita e por isso não temos muitas provas concretas sobre o assunto. O historiador Heródoto e o filósofo Aristóteles acreditavam que a geometria surgiu no Egito, com os agrimensores, que tinham que recalcular as dimensões dos terrenos após cada inundação que acontecia anualmente no vale do rio Nilo. Para isso, os egípcios utilizavam cordas como instrumento de medida.

Também os sacerdotes, que utilizavam a geometria como lazer, usavam as cordas para traçarem as bases dos seus templos. Os homens neolíticos, que viveram entre 10000 a.C. a 3000 a.C., tinham a necessidade de relações espaciais, devido às construções de potes, tecidos e cestas. Os resultados mais antigos de geometria encontrados nas Índias tratam das "regras das cordas", que mostram relações simples aplicadas às construções de templos e altares. Com tudo isso acredita-se que a geometria surgiu por necessidades práticas de construções e demarcações de terras.

Agora vamos ter uma visão geral de como o tema áreas e volumes foi se desenvolvendo em determinadas épocas e lugares específicos como, por exemplo, Egito, Mesopotâmia, Grécia, China e Índia.

2.1 Egito

Os dados mais importantes registrados sobre o Egito encontram-se em diversos Papirus. Um dos mais importante é o **Papirus de Rhind**, que mede cerca de 0,30 metros de altura por 5 metros de comprimento. Foi comprado em 1858 pelo escocês Henry Rhind (daí o seu nome) e que também é conhecido por Papirus de Ahmes (em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C). Vamos destacar alguns problemas contidos no Papirus que tratam de áreas e veremos em seguida alguns exemplos.

Com respeito a notação nos parágrafos seguintes omitiremos em vários trechos a palavra medida, como por exemplo em vez de medida da altura, escreveremos simplesmente altura, para ficar de acordo com a notação presente na referência utilizada.

O problema 51 fornece uma maneira para se calcular a área de um triângulo isóceles multiplicando a metade da base pela altura. Isso era feito pensando no triângulo isósceles como sendo dois triângulos retângulos, onde um completa o outro, formando assim um retângulo. Esse problema está ilustrado na Figura 2.1 onde temos um triângulo isósceles de base b, os lados congruentes com medida l e altura h, que se transforma num retângulo de base $\frac{b}{2}$ e altura h.

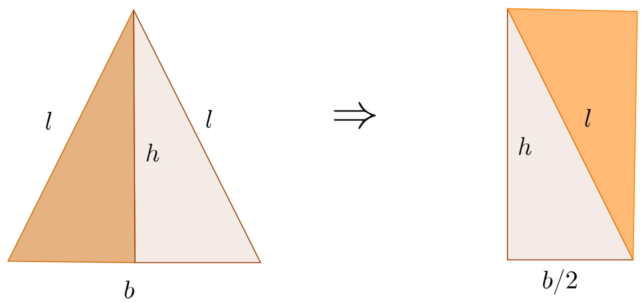


Figura 2.1: Ilustração do Problema 51: Papirus de Rhind.

O problema 52 mostra como calcular a área do trapézio isósceles e como exemplo ele nos traz um trapézio cuja base menor mede 4 unidades, base maior 6 unidades e altura 20 unidades. Os egípcios multiplicavam a medida da altura pela metade da medida da soma das bases, que é o mesmo que calcular a área de um retângulo. A seguir temos a Figura 2.2 que ilustra o problema.

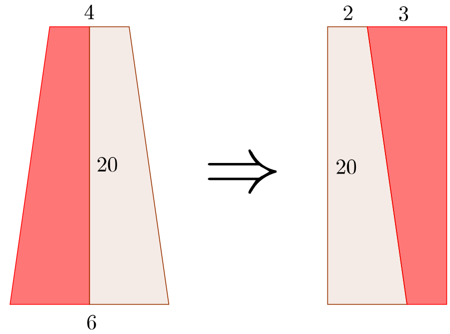


Figura 2.2: Ilustração do Problema 52: Papirus de Rhind.

O problema 50 retrata que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades, implicando que o valor de π era igual a $3\,\frac{1}{6}$. A Figura 2.3 apresenta um círculo de raio $4,5$ e um quadrado de lado 8 que, quando sobrepostos, fica fácil observar que os valores de suas áreas ficam bem próximos.

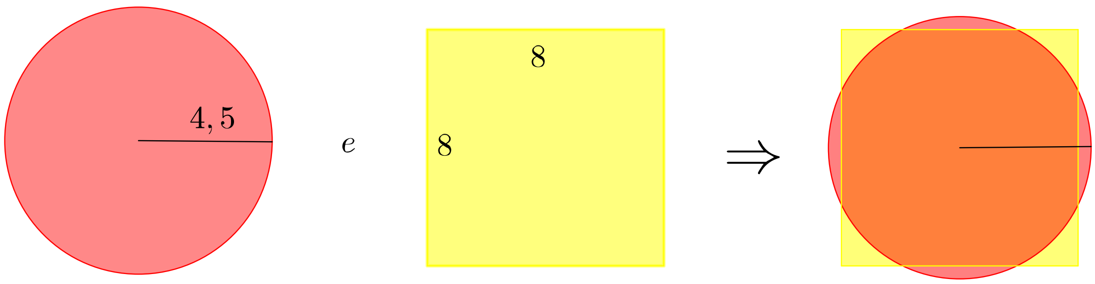


Figura 2.3: Ilustração do Problema 50: Papirus de Rhind.

Apesar do estudo principal deste trabalho ser sobre áreas temos um problema interessante sobre volume que está descrito no **Papirus de Golonishev** ou de **Moscou**, comprado em 1893, que é quase do tamanho do Papirus de Rhind porém com um quarto de largura. Este traz o problema 14 que mostra uma figura similar a um tronco de pirâmide de bases quadradas, porém aparenta um trapézio. A figura indica que a medida da base menor é 2 unidades, a da base maior é 4 unidades, a sua altura é 6 unidades , e temos dentro da mesma o número 56.(veja a Figura 2.4).

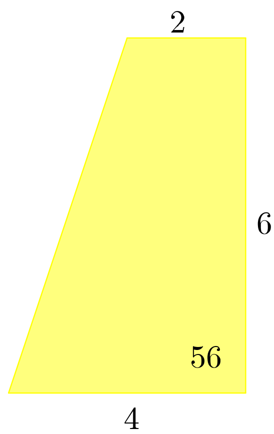


Figura 2.4: Ilustração do Problema 14: Papirus de Moscou.

Os egípcios determinavam o volume tomando a soma do quadrado de 2 com o quadrado de 4 e somando esse resultado com o produto de 2 por 4. Na sequência, multiplicavam esse novo resultado por um terço de 6 chegando no valor 56. O volume encontrado equivale à fórmula moderna para calcular o tronco de uma pirâmide $V = h.(\frac{a^2+ab+b^2}{3})$, onde a e b são as respectivas medidas das arestas das bases do tronco da pirâmide e h é a medida da altura.

Uma curiosidade é a unidade de medida utilizada pelos egípcios, o cúbito (aproximadamente 45 cm), que era utilizada para medir comprimento vertical e também a mão, igual a um sétimo do cúbito e que era utilizada para medir o comprimento horizontal.

2.2 Mesopotâmia

Enquanto no Egito utilizavam os papirus para armazenarem informações, na Mesopotâmia era utilizada a escrita cuneiforme, ou seja, as escritas em forma de cunha, que eram incisas em tabletas de barro mole que posteriormente eram cozidas em forno ou ao sol. Este método ou material era muito mais resistente que os papirus usados no Egito. Só na antiga Nipur, antiga cidade suméria, encontra-se aproximadamente 50.000 tabletas. Também encontra-se essas tabletas nas bibliotecas universitárias em Columbia, Pensylvania e Yale (EUA) entre outras.

Um fato curioso é que a escrita egípcia começou a ser decifrada nos tempos modernos enquanto que a mesopotâmica só no começo do século XIX, porém a parte matemática apenas no segundo quarto do século XX. Com isso foi descoberto que os mesopotâmicos tinham um sistema de numeração de base sessenta. Acredita-se que era base sessenta, pois 60 unidades pode ser facilmente dividida por 2,3,4,5,6,10,12,15,20 e 30, fornecendo assim dez possíveis subdivisões.

Por exemplo, para escrever o numero 46 o escriba mesopotâmico podia representar numa tableta de barro por 10 marcas de cunhas, sendo 4 cunhas largas colocadas de lado e cada uma representando 10 unidades e 6 cunhas verticais finas, cada uma valendo uma unidade e todas justapostas num grupo bem arrumando. Mais a frente veremos como os mesopotâmicos representavam números com representações sexagesimais.

Até pouco tempo atrás acreditava-se que os babilônios eram melhores que os egípcios em relação à álgebra, porém contribuiram pouco com a geometria. Um exemplo geométrico é que a área do círculo era encontrada normalmente tomando 3 vezes o quadrado do raio e isso era bem inferior à medida egípcia. Se voltarmos ao problema 50 do Papirus de Rhind, veremos que a área do círculo de raio 4,5 era próxima de 64. Se o mesmo problema fosse resolvido pelos babilônios teria como resultado o valor 60,75.

Em 1936 na cidade de Susa, distante aproximadamente 300 km da Babilônia, foi desenterrado um grupo de tabletas matemáticas que continha resultados matemáticos significativos. Uma dessas tabletas compara as áreas e os quadrados dos lados de polígonos regulares com três, quatro, cinco, seis e sete lados.

Por exemplo, a razão da área do pentágono para o quadrado do lado é 1;40. Lembrando que a base do sistema de numeração em questão é 60, o número antes do símbolo (;) representa 1 mesmo, mas o número que está depois do símbolo(;)representa $\frac{40}{60}$. Concluindo assim que 1;40 é o mesmo que 1,6666... no sistema de numeração decimal. Outra razão encontrada numa dessas tabletas é que para o hexágono regular a razão entre sua área e o quadrado do lado é 2;37,30, que no sistema decimal fica $2 + \frac{37}{60} + \frac{30}{3600}$ que é igual a 2,625. Já para o heptágono regular a razão entre sua área e o quadrado do lado é 3;41, que para nós hoje é 3,68333....

Na mesma tableta temos 0;57,36 como a razão entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito. Com isso temos que o valor aproximado de π era tomado por 3;7,30 ou $3\,\frac{1}{8}$, ou seja, $3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{3600} = 3,125$. Também a área de um quadrilátero era determinada através do produto das médias aritméticas dos pares de lados opostos, chegando na maioria dos casos numa aproximação grosseira.

2.3 Grécia

A matemática na Grécia apareceu de forma significativa durante o sexto século a.C. com Tales e Pitágoras. Porém não se tem nenhuma obra deles e alguns fatos desses matemáticos foram reconstruídos com base na tradição, o que não pode ser totalmente confiável. Tales de Mileto (624-548 a.C., aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-500 a.C., aproximadamente) se inspiraram nos egípcios e mesopotâmicos. Mas a diferença principal entre os gregos e os dois povos anteriores é que os gregos atacavam os problemas de matemática tentando demonstrá-los.

Na Grécia, por volta da segunda metade do século V a.C., surge a "Idade Heróica da Matemática", pois alguns matemáticos, mesmo sem muitos recursos, pensaram em problemas com significados matemáticos interessantes. A seguir temos os nomes de alguns desses matemáticos: Arquitas de Tarento (nasceu aproximadamente em 428 a.C.), Hiposus de Metapontum (viveu por volta de 400 a.C.), Demócrito (nasceu aproximadamente em 460 a.C.), Hípias de Elis (nasceu aproximadamente em 460 a.C.), Hipócrates de Chios (viveu por volta de 430 a.C.), Anaxágoras de Clazomene (morreu em 428 a.C) e Zeno de Elea (viveu por volta de 450 a.C.).

Seguindo as escolas de Tales e Pitágoras, Anaxágoras pensou no problema de quadrar o círculo e mais tarde tentaram resolvê-lo utilizando régua e compasso. Não se tem certeza de que um discípulo de Anaxágoras, chamado Perícles tenha pensado no segundo problema de geometria famoso, o da "duplicação do cubo": dada a aresta de um cubo, deve-se construir, utilizando apenas régua e compasso, a aresta de um segundo cubo, sendo que o volume deste deve ser o dobro do volume do primeiro. Mais de 2200 anos se passaram e foi provado que esses dois problemas são impossíveis de serem resolvidos só com régua e compasso.

Hipócrates trabalhou com a quadratura le lunas, que são figuras limitadas por dois arcos circulares de raios diferentes. Possivelmente este problema se originou a partir da quadratura do círculo. Hipócrates elaborou o seguinte teorema: "segmentos de círculos semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases."A partir desse teorema Hipócrates deduziu a primeira quadratura de uma área curvílinea com rigor. E uma quadratura estudada por Hipócrates, foi a de um semicírculo circunscrito a um triângulo retângulo isósceles e sobre a hipotenusa construiu um segmento semelhante aos segmentos circulares sobre os dois lados conguentes.

> ... Hipócrates deduziu a primeira quadratura rigorosa de uma área curvilínea, da história da matemática. Começou com um semicírculo circunscrito a um triângulo isósceles retângulo e sobre a base (hipotenusa) construiu um segmento semelhante aos segmentos circulares sobre os lados do triângulo. Como os segmentos estão entre si como os quadrados de suas bases, resulta, usando o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo, que a soma dos dois segmentos circulares menores é igual ao segmento maior. Portanto, a diferença entre o semicírculo sobre AC e o segmento $ADCE$ é igual ao triângulo ABC. Logo a luna $ABCD$ é exatamente igual ao triângulo ABC, como o triângulo ABC é igual ao quadrado sobre a metade de AC, conseguiu-se a quadratura da luna.[BOYER, 1974, p.49]

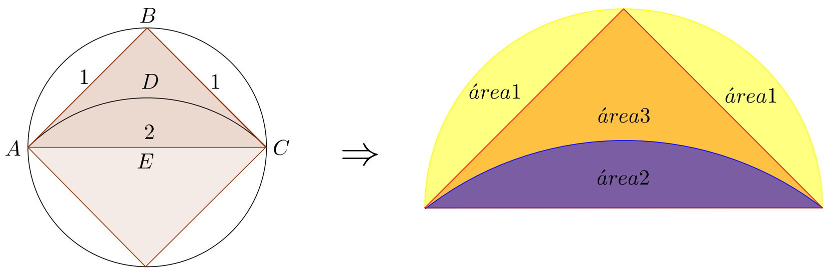


Figura 2.5: Ilustração da demonstração do problema lunas no triângulo retângulo.

Uma demonstração para este problema será descrita a seguir. Considere uma cincunferência com um quadrado inscrito $ABCD$, como na Figura 2.5. Seja o triângulo isósceles ABC reto em B , já que é vértice de um quadrado. Utilizando o Teorema de Pitágoras segue que $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ e como $BC = AB$ vale $(AC)^2 = 2(AB)^2$. Com isso chegamos nas seguintes proporções, $\frac{AB}{AC} = \frac{(AB)^2}{(AC)^2} = \frac{AB^2}{2(AB)^2} = \frac{1}{2}$. Desde que a área do arco do segmento 2 seja igual ao dobro das áreas dos arcos de segmento 1 segue que a área do triângulo é (área 3) + (área 2) = (área 3) + 2 (área 1) = LUNA.

A seguir teremos mais três exemplos de quadraturas de lunas. Eudemo (viveu por volta de 320 a.C.) relata uma quadratura de luna de Hipócrates baseando-se em um trapézio isósceles $ABCD$ inscrito em um semicírculo, tal que o quadrado sobre o lado maior AB seja igual à soma dos quadrados sobre os três lados menores e congruentes, AD, BC e CD. Então, construindo sobre o maior lado um segmento circular $AEBF$ semelhante aos que estão sobre os três lados menores congruentes, a área da luna será igual a área do trapézio.

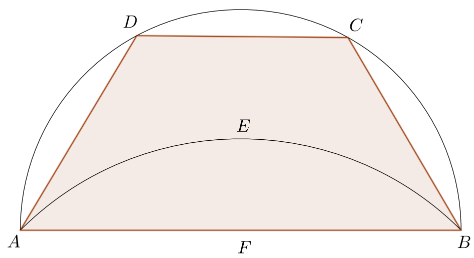


Figura 2.6: Ilustração do problema lunas no trapézio isósceles.

Alexandre de Afrodisias (que viveu por volta de 200 a.C.) descreveu mais duas quadraturas, além das duas anteriores. A primeira se considerarmos um triângulo retângulo e isósceles e construirmos semicírculos sobre a hipotenusa e cada lado menor. Então, a soma das áreas das lunas criadas sobre os lados menores será igual a área do triângulo.

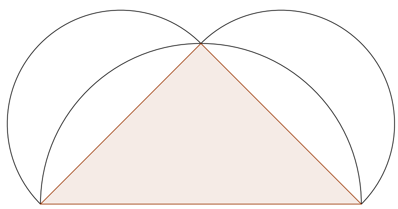


Figura 2.7: Ilustração do primeiro problema lunas de Alexandre.

O segundo problema de quadraturas de lunas descrito por Alexandre consiste em construirmos sobre o diâmetro de um semicírculo um trapézio isósceles com os três lados menores iguais (onde o lado maior é o próprio diâmetro do semicírculo) e sobre cada lado menor construirmos um semicírculo, então a área do trapézio será igual à soma de três áreas curvilíneas.

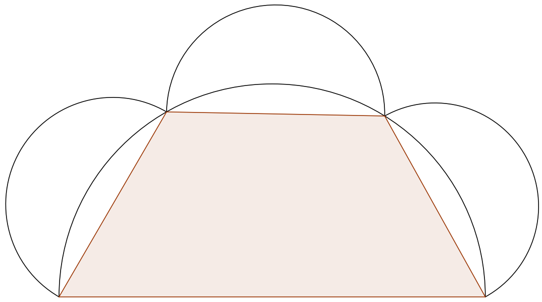


Figura 2.8: Ilustração do segundo problema lunas de Alexandre.

Os dados a seguir, são um pouco mais confiáveis que os anteriores, já que são baseados nos trabalhos de dois grandes líderes do quarto século a.C., Platão e Aristóteles. Temos nesta época outro importante matemático, Eudoxo de Cnido (que morreu em 355 a.C. aproximadamente).

Alguns matemáticos que precederam a Eudoxo, tentaram inscrever e circunscrever figuras retilíneas por dentro e por fora de uma figura curva e tentaram multiplicar indefinidamente o número de lados, para poderem comparar as respectivas áreas das figuras, curvas e retilíneas. Porém não sabiam concluir o problema, pois não conheciam o conceito de limite. Arquimedes de Siracusa estudou um tempo em Alexandria com os estudantes de Euclides, diz que foi Eudoxo quem criou o lema que hoje leva o nome de Arquimedes, e às vezes também é chamado axioma de Arquimedes e serviu como base para o método de exaustão.

O axioma de Arquimedes diz que dadas duas grandezas que tem uma razão, ambas diferentes de zero, pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. E desse axioma é fácil provar, por redução ao absurdo, uma proposição que era base do método de exaustão dos gregos.

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie.[BOYER, 1974, p.67]

Esta proposição equivale à seguinte formulação de hoje: se N é uma grandeza dada e ε uma grandeza de mesma espécie prefixada e uma razão, onde $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$, então podemos achar um inteiro M tal que $N(1-l)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > M$, ou seja $\lim\limits_{n\to\infty} N(1-l)^n = 0$. Essa propriedade era usada pelos gregos para provar o teorema sobre áreas e volumes de figuras curvilíneas.

Arquimedes relatou que Eudoxo provou pela primeira vez, que o volume do cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e mesma altura. E também, provalvelmente foi Eudoxo quem provou os teoremas sobre áreas de círculos e volumes de esferas.

Descreveremos agora alguns resultados importantes que Arquimedes estudou. Muitos tentantam dar uma aproximação para π contudo a melhor foi a de Arquimedes, pois este chegou que π pode ser expresso pela desigualdade $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$.

Arquimedes trabalhou com espirais em especial a que tem coordenadas polares $r = a\theta$, onde a é um número qualquer e $\theta > 0$. Por exemplo, a curva polar $r = \frac{1}{4}\theta$ está exemplificada na Figura 2.9.

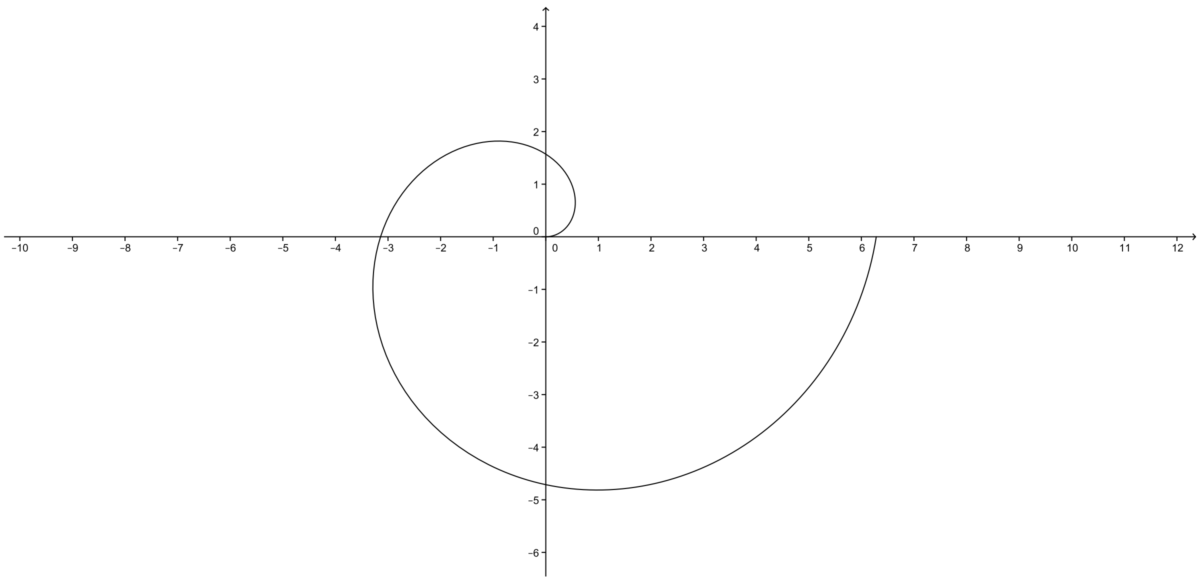


Figura 2.9: Ilustração de um exemplo de curva que Arquimedes estudou.

Um de seus trabalhos mostra que a área varrida pelo raio (vetor) na primeira rotação completa, equivale a um terço da área do "1^o círculo". Hoje este resultado pode ser verificado facilmente se utilizarmos o cálculo da integral definida $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta$ que gera a mesma área estuda por Arquimedes.

Os árabes dizem que a fórmula para a área de um triângulo qualquer, onde é conhecido o valor de seus lados, descrita como fórmula de Heron, era conhecida por Arquimedes vários séculos antes de Heron nascer. Esta fórmula será apresentada um pouco mais a frente, porém a prova mais antiga é a de Heron.

2.4 China

O povo chinês é mais antigo que o grego, porém não mais que povos egípcio e mesopotâmico. O primeiro império chinês para alguns historiadores surge por volta de 2750 a.C.. Um importante documento matemático chinês é o *Chou Pei Suang Ching*, escrito por vários autores num período de 1000 anos. Alguns historiadores dizem que este documento surge aproximadamente em 1200 a.C., enquanto que outros, dizem ser dos anos 300 d.C.. Outro documento importante datado por volta de 250 a.C. é o *Chiu Chang Suan-Shu*, cuja a tradução quer dizer: Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática. Este contém 246 problemas envolvendo mensuração de terras, agricultura, engenharia, impostos, sociedade, cálculos, soluções de equações e problemas com triângulos retângulos.

Para os chineses a geometria também surge da mensuração e eles desenvolvem vários exercícios de aritmética e álgebra. Um cuidado que devemos ter em relação aos relatos chineses, é que estes contém exercícios e fórmulas corretas e incorretas. Segue agora um exemplo que envolve o cálculo de área.

Os chineses usavam regras corretas para as áreas de triângulos, retângulos e trapézios. Enquanto que a área do círculo era determinada tomando três quartos do quadrado sobre o seu diâmetro ou um doze avos do quadrado da circunferência. A área do segmento é aproximadamente $\dfrac{s(s+c)}{2}$, onde s é a seta (raio menos apótema) e c a corda.

Um dado triste é que, em 213 a.C., o imperador da China mandou queimar livros. Algumas obras escaparam através de cópias ou por transmissão oral. Com isso os valores encontrados para π na China são: 3; $3,1547$; $\sqrt{10}$; $\frac{92}{29}$ e $\frac{142}{45}$. No terceiro século d.C. Liu Hui, um importante comentador do Nove Capítulos, chegou no valor $3,14$ para π utilizando um polígono de 96 lados. Considerando um polígono de 3072 lados obteve a aproximação $3,14159$.

A fascinação dos chineses pelo valor de π, leva Tsu Ch'ung-chih (430-501 d.C.) obter o valor $\frac{22}{7}$ descrito como "inexato", e $\frac{355}{113}$ para o valor "preciso". Tsu Ch'ung continuou indo mais a fundo em seus estudos chegando a $3,1415927$ como sendo um valor "em excesso"e $3,1415926$ como valor "em falta".

2.5 Índia

Segundo as escavações arqueológicas em Mohenjo Daro (Paquistão), temos provas de uma civilização antiga e de alta cultura na Índia, na mesma época das construções das pirâmides egípcias, mas não existem documentos matemáticos dessa época. Uma obra hindu chamada *Paulisha Siddhantas*, datada por volta de 380 d.C., usa π como sendo $3\frac{177}{1250}$. Acredita-se que este valor aproximado para π teve influência grega.

Depois da composição dos *Siddhantas*, surgem dois matemáticos hindus importantes. O primeiro foi Aryabhata que escreveu *Arybhatiya*, em 499 d.C.. Esta obra consiste num pequeno volume, contendo astronomia e matemática. Dizem que *Arybhatiya* é muito semelhante à obra *Os Elementos de Euclides*. Porém há mais diferenças que analogias entre as obras.

O *Arybhatiya* contém 123 estrofes que fornecem regras de cálculo usada na astronomia e matemática voltada para a mensuração. Nesta obra encontramos a área de um triângulo como sendo a metade do produto da base pela altura, o que é correto, mas como os chineses, os hindus também erravam, já que esta mesma fórmula era usada para determinar a área do triângulo e também era aplicada no cálculo do volume da pirâmide.

A área do círculo também está correta como sendo o produto do comprimento da circunferência pela metade do raio, ou seja, $S = 2\,\pi\,r\,\frac{r}{2}$. Em relação ao cálculo de áreas de quadriláteros, também aparecem regras corretas e incorretas. Por exemplo a área do trapézio é dada pela metade das somas das bases e multiplicado pelo segmento perpendicular às bases, ou seja, é a mesma fórmula que utilizamos hoje. Um erro cometido pelos hindus, foi afirmar que a área de qualquer figura plana é obtida multiplicando-se os dois lados determinados da figura.

O segundo matemático importante foi Brahmagupta (viveu em 628 d.C.). Ele diz que π tem o "valor prático"3 e o "valor bom"$\sqrt{10}$. Brahmagupta escreveu a obra *Brahmasphuta Siddhanta*, novamente com resultados certos e errados.

Brahmagupta traz que a área do triângulo isósceles é encontrada fazendo o produto da metade da base por um dos lados iguais. Para o triângulo escaleno de lados 13 e 15 e base 14, ele encontra a sua área como sendo a metade de 14 multiplicada pela média aritmética entre 13 e 15. O resultado mais belo de sua obra talvez seja a generalização da "fórmula de Heron", que determina a área de um quadrilátero. A fórmula é apresentada da seguinte maneira: $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, onde a, b, c e d são os lados e $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. Todavia esta fórmula só é válida para os quadriláteros cíclicos, ou seja, quadriláteros cujos os vértices estão sobre uma circunferência e os ângulos opostos são suplementares. A fórmula correta para um quadrilátero qualquer é $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c) - a\,b\,c\,d\cos^2\,\alpha}$, onde α é a metade de dois ângulos opostos.

O último matemático hindu importante foi Bháskara. Este escreveu um livro que leva o nome de sua filha, Lilavati. Este livro contém muitos problemas de Brahmagupta, mas Bháskara fazia suas próprias anotações e observações. Em um dos seus problemas a área do círculo está correta e é calculada multiplicando um quarto da circunferência pelo diâmetro, ou seja, $S = \frac{1}{4}\,2\,\pi\,r\,D$, sendo r o raio e D o diâmetro.

Após esta análise histórica sobre a geometria, principalmente com o tema áreas na antiguidade, no próximo capítulo teremos uma visão geral sobre como este tema é abordado no nosso cotidiano através de materiais didáticos que podem serem utilizados pelos professores de matemática.

3 Abordagem no Ensino Fundamental e Médio

Após termos "viajado"no capítulo anterior por alguns lugares importantes do mundo, que fornecem uma visão geral do desenvolvimento do cálculo de áreas no decorrer de 6.000 anos, vamos agora ter uma ideia de como hoje é apresentado esse mesmo conteúdo para os alunos do Ensino Fundamental (EF) e do Ensino Médio (EM) das escolas públicas.

O objetivo deste capítulo é apresentar uma análise dos principais textos que abordam o conteúdo a fim de, no próximo capítulo, apresentá-lo com mais detalhes e também as demonstrações dos resultados principais.

As áreas do retângulo, do quadrado, do paralelogramo, do triângulo, do losango, do trapézio, do círculo e em algumas vezes a área de um polígono regular estão apresentadas nos livros e apostilas analisados neste texto. A forma de calcular as áreas das superfícies de alguns sólidos como prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas também é dada.

As fórmulas presentes nos livros (que são do PNLD) e apostilas, são praticamente as mesmas, mudando apenas a nomenclatura das medidas dos lados e a sequência didática. Vamos analisar separadamente o EF e o EM, dando destaque para cada ano/série. Todas as fórmulas que serão mencionadas estão apresentadas, de forma sucinta, no final de cada uma dessas seções através de uma tabela.

3.1 Ensino Fundamental

Consideramos em nossa análise para o EF as seguintes coleções :

- A conquista da Matemática - veja a referência [3].
- Praticando Matemática - veja [4].

- Apostilas do Aluno e do Professor (EF) do Estado de São Paulo - veja [5].

Foi possível observar os seguintes fatos:

6^o **ano**: No 6^o ano (antiga 5^a série) as três coleções trabalham com polígonos sobrepostos em malha quadriculada, facilitando o entendimento do cálculo de algumas áreas de polígonos ou até mesmo outros tipos de figuras fechadas e curvas. Em especial, a apostila desta série apresenta o Geoplano, que se assemelha a uma malha quadriculada facilitando a compreensão e visualização do aluno no cálculo de áreas de polígonos.

O Geoplano pode ser construído com vários materiais, mas os que são fornecidos pelo governo às escolas públicas, são feitos com uma base de madeira e com vários pinos também de madeira, perpendiculares a esta base formando uma malha quadriculada. O aluno, utilizando vários elásticos, consegue formar a figura desejada e contando a quantidade total de quadrados encontra o valor total da área. Se, por exemplo, a figura contem dois triângulos, onde cada um é exatamente a metade do quadrado da malha, então soma-se estas duas partes formando assim um quadrado, que somado ao restante dos quadrados da figura determinam a área total.

A Figura 3.1 fornece exemplos de dois polígonos A e B sobrepostos numa malha quadriculada, onde alunos de 6^o ano podem determinar contando a quantidade de quadrados, que as áreas dos polígonos A e B são 15 e 14 unidades quadradas, respectivamente.

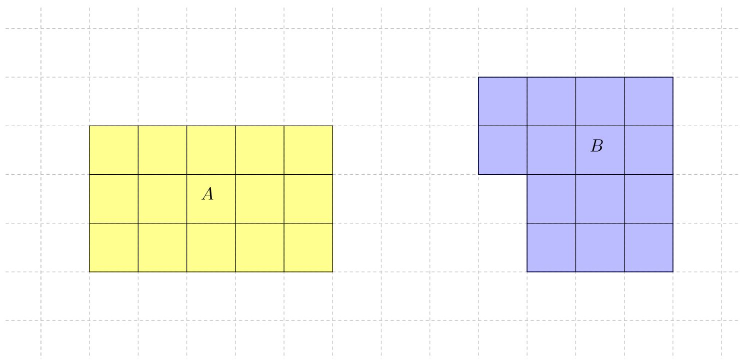


Figura 3.1: Polígonos em malhas quadriculadas.

Após o aluno trabalhar com vários exercícios em que precisa encontrar as áreas de polígonos sobrepostos em malha quadriculada, a apostila do aluno desta série não trata mais do conteúdo em questão. Por outro lado, além de desenvolver o tema através de malhas, o livro *A conquista da Matemática* também apresenta as fórmulas para calcular as áreas de retângulos, quadrados, paralelogramos, triângulos e trapézios. O livro *Praticando Matemática* acrescenta apenas as áreas de retângulos e quadrados.

Na sequência temos cinco exemplos de polígonos apresentados no livro *A conquista da Matemática*. A Figura 3.2 ilustra um retângulo de comprimento c e largura l, um quadrado de lado l, um paralelogramo de base b e altura h, um triângulo de base b e altura h e um trapézio de altura h, base maior B e base menor b, respectivamente.

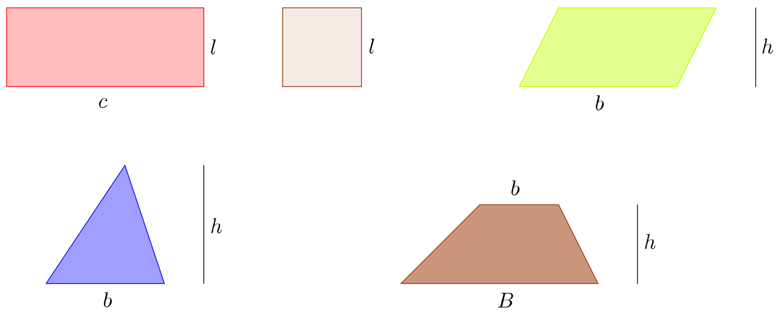


Figura 3.2: Ilustração de exemplos de polígonos.

7^o **ano**: Para o 7^o ano (antiga 6^a série) encontramos algumas divergências em relação ao material pesquisado. Enquanto que nas apostilas dos alunos não encontramos nenhum conteúdo sobre áreas, o livro *A conquista da Matemática* trabalha o assunto através de problemas de equação de 1^o grau e proporção. O livro *Praticando Matemática* trabalha novamente com as malhas, relacionando o tema com raiz quadrada e apresenta as fórmulas para o cálculo das áreas de retângulos, quadrados, paralelogramos, triângulos, losangos, trapézios através de problemas e exercícios simples.

8^o **ano**: No 8^o ano (antiga 7^a série) a apostila do aluno apresenta as fórmulas para calcular as áreas de paralelogramos, losango, triângulo, trapézio. No livro *A conquista da Matemática* não temos nada sobre o assunto e no livro *Praticando Matemática* o conteúdo de áreas é relacionado com trinômio quadrado perfeito.

9^o **ano**: O processo de utilização de malha avança no 9^o ano (antiga 8^a série). O aluno não trata apenas com polígonos, também trabalha com outros tipos de figuras, incluindo várias curvas fechadas, fazendo com que o aluno trabalhe com aproximações. A Figura 3.3 ilustra exemplos de duas curvas fechadas sobrepostas numa malha quadriculada, onde podemos verificar que as áreas das mesmas são aproximadamente 19 e 22 unidades quadradas, respectivamente.

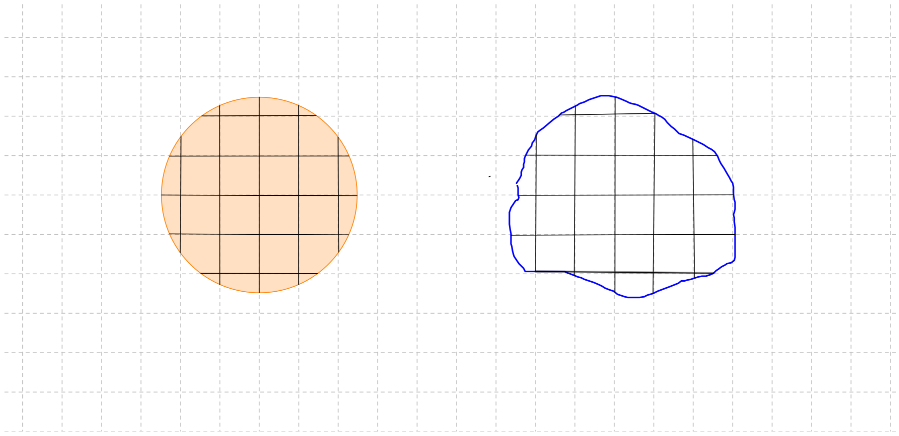


Figura 3.3: Figuras curvas em malhas.

No livro *Praticando Matemática* temos o cálculo de áreas de retângulos e quadrados contendo lados com medidas irracionais, relacionando com exercícios de equação do 2^o grau. Surge uma novidade para o aluno que é a fórmula para calcular o comprimento e a área do círculo. As malhas são aplicadas para cálculo de áreas de círculos com aproximações. Após o aluno trabalhar com essas aproximações é apresentada a fórmula para calcular a área de círculos, e na sequência o mesmo aprende a calcular o volume do cilindro, assim como a área da superfície cilíndrica.

Já o livro *A conquista da Matemática* recorda como calcular as áreas de triângulos, paralelogramos, losangos e trapézios da mesma forma que foi visto no 6^oano e também utiliza as malhas quadriculadas para determinar a área de uma figura qualquer. Depois de apresentada a fórmula para calcular a área do círculo são sugeridos vários exercícios para se determinar a área de regiões circulares como as ilustradas na Figura 3.4.

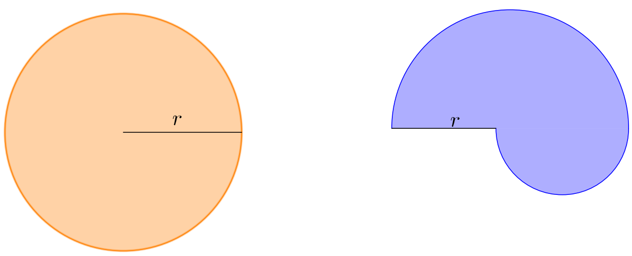


Figura 3.4: Regiões circulares.

Para finalizar esta seção apresentaremos um breve relato sobre a Apostila do Estado de São Paulo, que faz uma comparação de áreas de algumas figuras a partir da ampliação ou redução e calcula a área de círculo primeiramente através de aproximações por falta ou por excesso, utilizando malhas quadriculadas e, posteriormente, são apresentadas as fórmulas para calcular as áreas do círculo e do setor circular. Finalmente é apresentada a fórmula para calcular a área da superfície de um cilindro.

Podemos notar que são apresentadas várias fórmulas para os alunos aplicarem em problemas ou em exercícios simples. A malha quadriculada é um instrumento muito utilizado, fazendo com que o aluno pense em áreas aproximadas e depois compare com os resultados "exatos" utilizando as fórmulas. Um grande problema é a sequência didática, pois esta é diferente nas três referências vistas. O ideal é que o professor nunca se apoie em um único material e sim prepare suas aulas aproveitando o melhor de cada material.

A tabela apresentada na sequência traz todas as fórmulas das áreas citadas anteriormente. Utilizaremos S para denotar a área. A primeira coluna contém o nome da figura em questão, a segunda coluna traz as dimensões utilizadas nas referências e na terceira coluna as respectivas fórmulas.

Polígonos ou Figuras:	**Medidas:**	**Fórmulas:**
Quadrado	lado l	$S = l^2$
Paralelogramo	comprimento c e altura h	$S = ch$
Retângulo	comprimento c e largura l	$S = cl$
Losango	diagonal maior D e diagonal menor d	$S = \frac{Dd}{2}$
Trapézio	altura h, base maior B e base menor b	$S = \frac{(B+b)h}{2}$
Círculo	raio r	$S = \pi r^2$
Triângulo	base b e altura h	$S = \frac{bh}{2}$
Setor Circular	α em graus e raio r	$S = \frac{\alpha}{360}\pi r^2$

Tabela 3.1: Fórmulas das áreas de alguns polígonos ou figuras vistas no EF.

3.2 Ensino Médio

As coleções abordadas para o Ensino Médio foram:

- Matemática Contexto e Aplicações - veja [6].
- Matemática Aula por Aula - veja [7].
- Apostilas do Aluno e do Professor (EM) do Estado de São Paulo - veja [8].

Após a leitura podemos observar que todas as fórmulas vistas no Ensino Fundamental são revistas no Ensino Médio, além de serem inseridas várias fórmulas novas, como por exemplo, a área do triângulo é apresentada de três formas diferentes. Também temos a fórmula para calcular a área da coroa circular, setor circular (de duas formas diferentes) e a área do segmento circular, a definição de segmento circular (Definição 4.13) está na página 55 deste trabalho. Analisando as referências e separando por ano podemos descrever o resumo abaixo:

1^o **ano**. No Livro *Matemática Contexto e Aplicações* encontramos o cálculo de áreas através de malha quadriculada. Também encontramos as fórmulas vistas para o calculo das áreas do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio, losango, polígonos regulares, círculo, setor circular e a fórmula de Heron. Já no livro *Matemática Aula por Aula* e nas apostilas dos alunos não é apresentado nenhum conteúdo sobre áreas.

2^o **ano**. O livro *Matemática Aula por Aula* associa a área de um trapézio com Progressão Aritmética, enquanto que a área de triângulo é determinada de quatro maneiras diferentes (todas apresentadas na tabela 3.2). A primeira fórmula em relação ao triângulo é a mesma vista no EF, a segunda é associada à trigonometria, a terceira é dada pela fórmula de Heron onde conseguimos determinar a sua área conhecendo os seus três lados e o seu semiperímetro e a quarta fórmula é dada através da Geometria Analítica.

Através da Geometria Analítica os alunos aprendem a calcular a área de um triângulo qualquer, cujos vértices são $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ através da fórmula $S = \frac{1}{2}|D|$, onde D é seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Ainda no livro *Matemática Aula por Aula*, também no 2^o ano, são apresentadas as fórmulas para calcular a área de paralelogramo, trapézio, quadrado, retângulo, losango, círculo, superfície total de um prisma reto. Os sólidos estudados são as pirâmides, os cones e os cilindros, calculando suas respectivas áreas. Para a esfera surge a fórmula para calcular a área da superfície e do fuso (área da cunha esférica).

Segundo esta referência temos as definições de fuso e cunha esférica.

"Fuso esférico é a figura gerada pela rotação menor que 360^o de uma semicircunferência em torno do eixo que contém o seu diâmetro".

"Cunha esférica é um sólido gerado pela rotação menor que 360^o de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro."

O cone e o tronco de cone são outros dois sólidos estudados, onde se tem a fórmula para calcular a geratriz, a área da base, as áreas lateral e total. Por fim, para a esfera temos a fórmula para calcular a área da superfície.

3^o **ano**. Nos livros *Matemática Contexto e Aplicações*, *Matemática Aula por Aula* e nas apostilas dos alunos apenas é mencionado o cálculo da área de triângulo através da Geometria Analítica.

Podemos verificar que em todas as referências são apresentadas várias fórmulas para calcular áreas através de problemas e exercícios simples, mudando apenas a sequência didática. Novamente, o ideal é o professor preparar a sua aula considerando o melhor de cada referência e nunca se apoiar em apenas uma coleção.

Analisando duas coleções de livros didáticos para o EF, outras duas coleções para o EM e também as coleções das apostilas que os alunos e professores utilizam nas escolas públicas do Estado de São Paulo, tanto no EF como no EM, podemos observar de uma maneira geral, que a maioria dos livros e apostilas apresenta o cálculo de áreas através de malhas quadriculadas, resolução de problemas e até mesmo exercícios que simplesmente exigem que o aluno calcule uma determinada área.

Para finalizar este capítulo, fica a sugestão após estes comentários e também levando em conta a experiência do professor e do autor em sala de aula, que seria necessário trabalhar este tema em todos os anos dos EF e não apenas nos 6^{os} e 9^{os} anos como podemos observar nos livros e apostilas. Também se faz necessário fixar bem as definições e nomenclaturas dos diversos polígonos estudados, já que hoje em dia os alunos têm muita dificuldade em guardar conceitos e nomes de figuras.

Outra proposta é trabalhar o tema em questão de uma forma lúdica utilizando o Geoplano e malha quadriculada, por exemplo. No próximo capítulo teremos uma fundamentação teórica importante para a formação contínua do professor de matemática e logo em seguida serão apresentadas algumas propostas de atividades utilizando o Geoplano.

Polígonos:	**Medidas:**	**Fórmulas das Áreas:**
Triângulo (Fórmula de Heron)	lados a,b e c semiperímetro p	$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Triângulo Equilátero	lado l	$S=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$
Triângulo (Trigonometria)	lados a, b	$S=\frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\,C$
Hexágono Regular	lado l	$S=\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$
Polígono Regular	lado n e apótema a	$S=\frac{nla}{2}$
Setor Circular	α em graus e raio r	$S=\frac{\alpha}{360}\pi r^2$
Segmento Circular	α comprimento do arco do setor circular e raio r	$S=\frac{r^2}{2}(\alpha-\mathrm{sen}\,\alpha)$
Coroa Circular	raio maior R e raio menor r	$S=\pi(R^2-r^2)$
Área lateral do Cilindro	raio da base r e altura h	$S_l=2\pi rh$
Área total do Cilindro	altura h raio da base r	$S_t=2\pi r(h+r)$
Superfície Esférica	raio R	$S=4\pi R^2$
Área lateral do Cone	raio da base r e geratriz g	$S_l=\pi rg$
Área total do Cone	raio da base r e geratriz g	$S_t=\pi r(g+r)$
Área lateral do Tronco de cone	raio da base menor, raio da base maior R e geratriz g r	$S_l=\pi g(R+r)$

Tabela 3.2: Fórmulas das áreas de algumas figuras vistas no EM.

4 Desenvolvimento Teórico: Áreas

Neste capítulo desenvolveremos a teoria sobre áreas, com detalhes, justificando cada fórmula apresentada. Porém, algumas ferramentas utilizadas neste capítulo como, por exemplo, cálculo de limites estarão detalhadas no Apêndice A deste trabalho. Na maior parte deste capítulo usaremos as referências [9], [10] e [11].

4.1 Áreas de Figuras no Plano

Inicialmente daremos duas definições importantes para o desenvolvimento do trabalho.

Lembremos que um segmento com início no ponto A e término no ponto B é denotado por $\overline{AB}$ e sua medida por $|AB|$. Além disso, a reta passando por A e B será denotada por $\overleftrightarrow{AB}$. Denotaremos também o conjunto dos números naturais por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Definição 4.1. *Sejam $n \geqslant 3$ um número natural e $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos distintos de um plano, onde três pontos consecutivos não são colineares, isto é, não pertencem a uma mesma reta. Chama-se **polígono** à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ... $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$.*

Em seguida, veremos a definição de polígono com uma propriedade que é a de convexidade.

Definição 4.2. *Uma região R do plano é **convexa** quando, para todos os pontos $A, B \in R$, o segmento $\overline{AB} \subset R$. Caso contrário, diremos que R é uma região **não convexa**.*

Definição 4.3. *Sejam $n \geqslant 3$ um natural e $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que a reunião dos segmentos que unem os pontos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam um **polígono convexo** se, cada reta da forma $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $\overleftrightarrow{A_nA_1}$, não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina, veja Figura 4.2.*

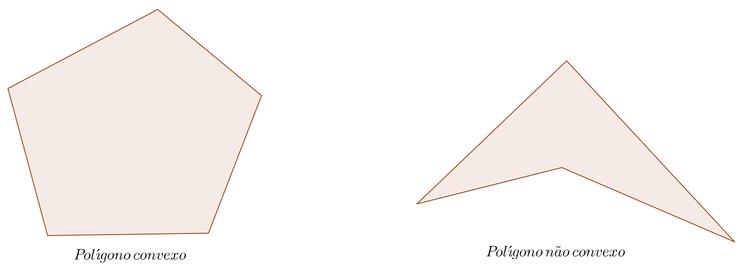


Figura 4.1: Exemplo de um polígono convexo e um não convexo.

Teremos a seguir alguns exemplos dos polígonos convexos mais utilizados em sala de aula.

1. Triângulo: polígono convexo com três lados e três ângulos.

2. Quadriláteros: polígonos convexos com quatro lados e quatro ângulos. Alguns quadriláteros podem ser classificados em paralelogramos e trapézios, onde os paralelogramos possuem dois pares de lados opostos paralelos e são classificados em paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados. Já os trapézios tem apenas um par de lados opostos paralelos.

3. Pentágonos: polígonos convexos com cinco lados e cinco ângulos.
   Mais geralmente, para em número n ($n \geqslant 3$) qualquer de lados dizemos que o polígono é um n-látero.

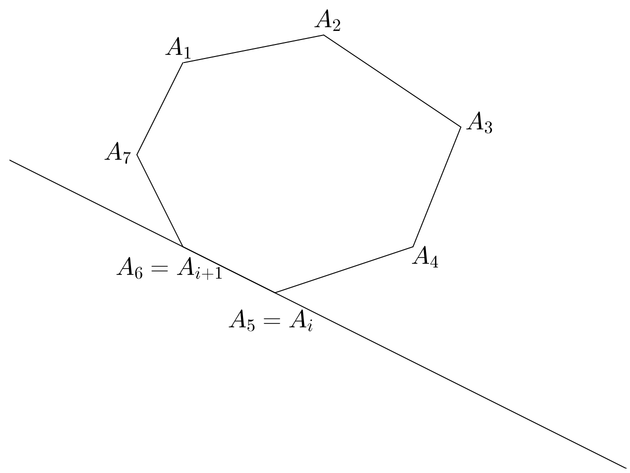


Figura 4.2: Ilustração de polígono convexo, com $n = 7$.

Para cada polígono citado há muitos pontos interessantes que podem ser estudados, com respeito aos ângulos, às diagonais, semelhanças, entre outros. Veja as referências

[12] e [13], por exemplo. Porém, nosso trabalho tem por objetivo o estudo de áreas de figuras planas e espaciais, assunto que será tratado a seguir.

Podemos afirmar intuitivamente que a área de uma região limitada no plano é um número positivo associado à mesma e que quantifica a região por ela ocupado. Em todo trabalho a área será denotada por S.
A seguir temos quatro axiomas que nos ajudarão nas futuras construções.

1. Polígonos congruentes [1] têm áreas iguais.

2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos. Observe que o polígono é a reunião de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta.

3. Se a região delimitada por um polígono convexo contém a região delimitada por outro polígono então a área da primeira região é maior que a da segunda.

4. A área de um quadrado de lado $1cm$ é igual a $1cm^2$.

Teorema 4.1. *Um quadrado cuja a medida do lado é l tem área l^2.*

Demonstração. Considerando os Axiomas de 1 a 4 e separando em três casos, onde o lado do quadrado é um número natural, um número racional positivo e por fim um número irracional positivo, temos:

1. Quadrado de lado $n \in \mathbb{N}$.

   Particione um quadrado de lado n em n^2 quadrados de lados 1 cada. Denotando a área do quadrado maior por S_n, devemos ter S_n igual à soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1, de maneira que:

$$S_n = n^2.$$

2. Quadrado de lado $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+^*$.

   Considere agora um quadrado de lado $\frac{m}{n}$, com m, $n \in \mathbb{N}$, e área $S_{\frac{m}{n}}$. Arranje n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de lado $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n}.n = m$.

   Tal quadrado maior terá, como já sabemos, área m^2. Por outro lado, como ele está particionado em n^2 quadrados, cada um dos quais de lado $\frac{m}{n}$, sua área é igual à soma das áreas desses n^2 quadrados, isto é, $m^2 = n^2.S_{\frac{m}{n}}$.

[1] A noção de congruência para polígonos é a mesma que para triângulos: podemos deslocar um deles no espaço, sem deformá-lo, até coincidir com o outro. Ver referêcia [9].

Portanto

$$S_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

3. Quadrado de lado $l \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, l > 0$.

   Tomamos agora números racionais [2] x_k e y_k tais que $x_k < l < y_k$ e $y_k - x_k < \frac{1}{k}$. Agora, construímos quadrados de lados x_k e y_k, o primeiro contido no quadrado dado e o segundo o contendo. Como sabemos calcular área de quadrados de lado racional, e utilizando o Axioma 3, temos a garantia qua a área S_l do quadrado de lado l deve satisfazer as desigualdades $x_k^2 < S_l < y_k^2$, mas, como $x_k^2 < l^2 < y_k^2$ deve pertencer ao intervalo (x_k^2, y_k^2) de maneira que:

$$\begin{aligned} \mid S_l - l^2 \mid < y_k^2 - x_k^2 = (y_k - x_k)(y_k + x_k) &= (y_k - x_k)(y_k + x_k - x_k + x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k) < \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right). \end{aligned}$$

   Assim

$$\mid S_l - l^2 \mid < \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right).$$

   E, aplicando limite [3]

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right) = 0.$$

   Portanto,

$$\mid S_l - l^2 \mid = 0 \Rightarrow S_l = l^2.$$

□

Teorema 4.2. *Um retângulo de lados medindo a e b tem área ab.*

Demonstração. Vamos utilizar um argumento análogo à demonstração da área do quadrado para provar este resultado. Considere um retângulo de lados m e n naturais e vamos particioná-lo em mn quadrados de lado 1 para mostrar que sua área é mn. Agora tomamos um retângulo de lados $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$, com m_1, m_2, n_1 e n_2 naturais. Com n_1n_2 cópias do mesmo, montamos um retângulo de lados m_1 e m_2. Somando áreas iguais, concluimos que a área do retângulo dado originalmente é igual a $\frac{m_1m_2}{n_1n_2} = \frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2}$. Por fim, tomamos um retângulo de lados a e $b \in \mathbb{R}_+^*$ e para um $k \in \mathbb{N}$ e racionais x_k, y_k, u_k, v_k tais que $x_k < a < y_k$, $u_k < b < v_k$, $y_k - x_k < \frac{1}{k}$ e $v_k - u_k < \frac{1}{k}$. Sendo S a área

[2] Veja Apêndice B, Teorema B1.
[3] Ver a definição de limite no Apêndice A.

do retângulo de lados a e b, um argumento análogo ao feito para quadrados garante que S e ab pertencem ambos ao intervalo (u_kx_k, v_ky_k) e, daí, para todo k natural,

$$\begin{aligned}
\mid S - ab \mid &< v_ky_k - u_kx_k = (v_k - u_k)y_k + (y_k - x_k)u_k \\
&< \frac{1}{k}(y_k + u_k) \\
&< \frac{1}{k}((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u_k) \\
&< \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\mid S - ab \mid < \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right).$$

Aplicando limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right) = 0,$$

obtemos

$$0 \leqslant\mid S - ab \mid\leqslant 0 \Rightarrow S = ab.$$

□

Teorema 4.3. *A área do paralelogramo cuja a medida da base é a e a da altura é h é igual a ah.*

Demonstração. Sejam $ABCD$ um paralelogramo de diagonais $|AC|$ e $|BD|$ e E e F respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Agora suponha que $E \in \overleftrightarrow{AB}$, como ilustra a Figura 4.3. Podemos verificar que os triângulos ADE e o triângulo BCF são congruentes (LAL) de modo que $|AE| = |BF|$ e pelo Axioma 1 tem-se $S_{(ADE)} = S_{(BCF)}$.

Então temos:

$$S_{(ABCD)} = S_{(ADE)} + S_{(BEDC)} = S_{(BCF)} + S_{(BEDC)} = S_{(CDEF)}.$$

Mas $CDEF$ é um retângulo de altura h e base $|EF|$ e $|EF| = |EB| + |BF| = |EB| + |AE| = |AB| = a$.

Portanto $S_{(ABCD)} = S_{(EFCD)} = ah$. □

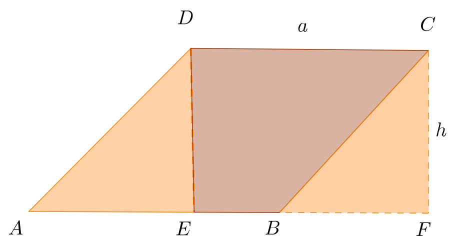


Figura 4.3: Ilustração do paralelogramo.

Teorema 4.4. *Seja ABC um triângulo cujas medidas dos lados sejam $|AB| = c$, $|AC| = b$ e $|BC| = a$, e alturas h_a, h_b e h_c, respectivamente relativas aos lados a, b e c. Então:*

$$S_{(ABC)} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Em particular $ah_a = bh_b = ch_c$.

Demonstração. Sejam $S = S_{(ABC)}$ e D a interseção da paralela a reta $\overleftrightarrow{BC}$ por A com a paralela a reta $\overleftrightarrow{AB}$ por C, veja a Figura 4.4. Então $ABC \simeq CDA$, isto é, são semelhantes por (ALA) já que $B\widehat{A}C = D\widehat{C}A$; $\overline{AC}$ lado comum e $B\widehat{C}A = B\widehat{A}C$. E pelo Axioma 1 segue que $S_{(ABC)} = S_{(CDA)}$. Como $ABCD$ é um paralelogramo de base a e altura ah_a. Segue da demonstração da área do paralelogramo que:

$$2S = S_{(ABC)} + S_{(CDA)} = S_{(ABCD)} = a\,h_a.$$

Portanto,

$$S_{(ABC)} = S = \frac{1}{2}\,a\,h_a.$$

Analogamente, obtemos $S = \frac{1}{2}\,b\,h_b$ e $S = \frac{1}{2}\,c\,h_c$.

□

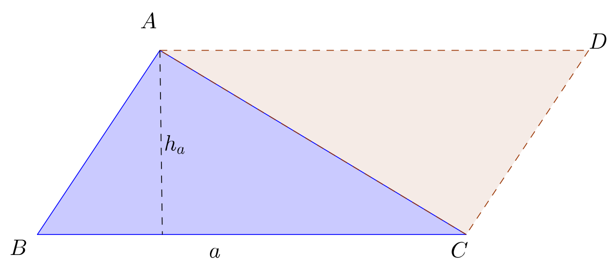


Figura 4.4: Ilustração do triângulo.

A Figura 4.5 abaixo contém três triângulos. O primeiro é um triângulo acutângulo, isto é, um triângulo que possui os três ângulos agudos (ângulos entre 0^o e 90^o graus) e será utilizado na parte 1 da demonstração do próximo resultado. O segundo é um triângulo retângulo, ou seja, triângulo que possui um ângulo reto (ângulo medido 90^o graus) e será utilizado na segunda parte da demonstração. O terceiro é um triângulo obtusângulo, ou seja, com um de seus ângulos obtuso (ângulo maior que 90^o graus e menor que 180^o graus) e será utilizado na parte 3 da demonstração.

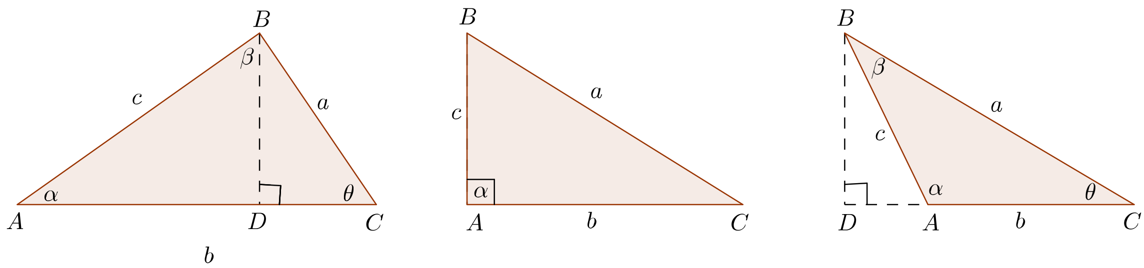


Figura 4.5: Ilustração dos triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo.

Teorema 4.5. *Em qualquer triângulo, a sua área é igual ao semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.*

Demonstração. 1. Seja ABC um triângulo com o ângulo α menor que 90^o. No triângulo ADB que é retângulo, temos: $|DB| = c\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

Então: $S = \dfrac{|AC||DB|}{2} = \dfrac{bc}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

2. Seja ABC um triângulo retângulo em A e com seus catetos medindo b e c e sua hipotenusa medindo a. Observe que $h = c$, então $S = \frac{bc}{2}$, como neste caso $\mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{sen}\,90^o = 1$ segue que a área do triângulo retângulo será $S = \frac{bc}{2}.\mathrm{sen}\alpha$

3. Seja ABC um triângulo com $90^o < \alpha < 180^o$. No triângulo ABD que é retângulo, temos: $|DB| = c\,\mathrm{sen}\,(180^o - \alpha) = c\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

Então, $S = \dfrac{|AC||DB|}{2} = \dfrac{bc}{2}\mathrm{sen}\,\alpha$.

Analogamente, demonstra-se para os casos 1 e 3 em relação aos ângulos β e θ. □

Definição 4.4. *Um triângulo que possui seus três lados e seus três ângulos congruentes recebe o nome de* ***triângulo equilátero****.*

Da geometria sabemos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180^o, logo cada ângulo do triângulo equilátero mede 60^o. Também a altura, a bissetriz e a mediatriz são representados pela mesma reta.

Teorema 4.6. *Seja ABC um triângulo equilátero com cada lado medindo l, então a área deste triângulo é $S = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$.*

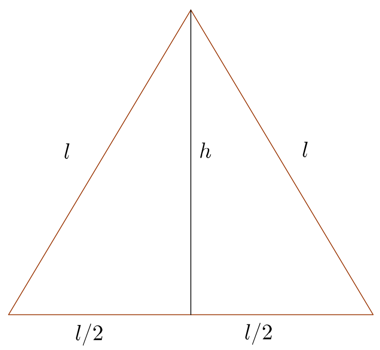


Figura 4.6: Ilustração do triângulo equilátero.

Demonstração. Como vimos pelo Teorema 4.5 a área de um triângulo qualquer pode ser representada por $S = \dfrac{bc}{2}\operatorname{sen}\alpha$ e como o lado do triângulo mede l e o ângulo 60^o segue que $S = \dfrac{l.l}{2}\operatorname{sen} 60^o$, ou seja, $S = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. $\square$

Teorema 4.7. *Em qualquer triângulo, a área é igual ao produto dos três lados dividido pelo quádruplo do raio da circunferência circunscrita.*

Demonstração. Segundo a Lei dos Senos [4], temos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R}.$$

Pelo Teorema 4.5 segue que $S = \dfrac{bc}{2}\operatorname{sen}\alpha$.

Logo, substituindo $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{2R}$ em $S = \dfrac{bc}{2}\operatorname{sen}\alpha$, obtemos $S = \frac{a\,b\,c}{4R}$. $\square$

Teorema 4.8. *Se $ABCD$ é um losango de diagonais $|AC|$ e $|BD|$ então*

$$S_{(ABCD)} = \frac{1}{2}\Big(|AC||BD|\Big).$$

Demonstração. Observando a Figura 4.7 temos:

$$S_{(ABC)}+S_{(ACD)} = \frac{1}{2}|AC||BM|+\frac{1}{2}|AC||DM| = \frac{1}{2}|AC|(|BM|+|MD|) = \frac{1}{2}(|AC||BD|).$$

$\square$

[4]Veja a referência [10], p.158,159-C.

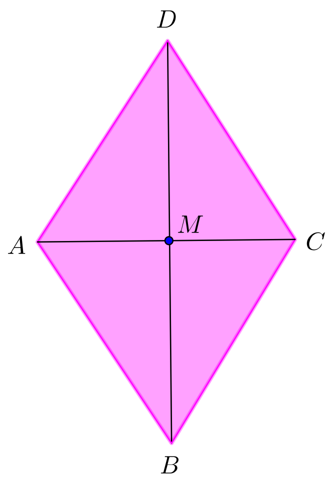


Figura 4.7: Ilustração do losango.

Teorema 4.9. *Se $ABCD$ é um trapézio cujas as medidas das bases são $|AB| = a$, $|CD| = b$ e a medida da altura é h, então:*

$$S_{(ABCD)} = \frac{(a+b)h}{2}.$$

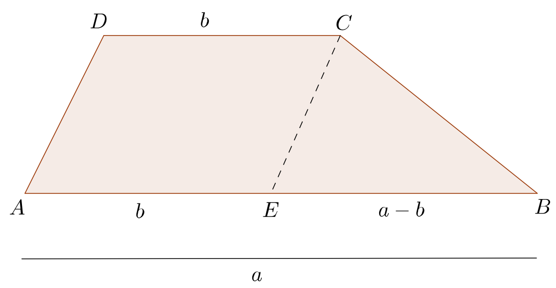


Figura 4.8: Ilustração do trapézio.

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade que $a > b$. Se $E \in \overline{AB}$ for tal que $|AE| = b$, então o quadrilátero $AECD$ tem dois lados paralelos e iguais, de modo que é um paralelogramo, veja a Figura 4.8 . Como $|BE| = a - b$, temos:

$$S_{(ABCD)} = S_{(AECD)} + S_{(EBC)} = bh + \frac{(a-b)h}{2} = \frac{2bh}{2} + \frac{(a-b)h}{2} = \frac{(2bh + ah - bh)}{2} = \frac{(ah+bh)}{2} = \frac{(a+b)h}{2}.$$

□

Definição 4.5. *Um **polígono regular** é todo polígono convexo que possui todos os lados e ângulos congruentes, ou seja, com medidas iguais.*

Lembremos que o apótema de um polígono regular é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado. O apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.

Teorema 4.10. *Sejam $n \geqslant 3$ e o polígono regular definido pela união dos pontos $A_1, A_2, ..., A_n$. Então, a área S desse polígono é dada por $S = p.a$, onde a é o comprimento do apótema do polígono e p o semiperímetro do polígono.*

Demonstração. Considere um polígono regular de n lados, como na Figura 4.9. Observe que teremos n triângulos $OA_iA_{(i+1)}$ onde a área de cada um desses triângulos é dada por $S_t = \frac{l.a}{2}$. Logo a área total do polígono de n lados será a soma das áreas desses triângulos, ou seja, $S = n.\frac{la}{2}$. Note que $n.l$ é o perímetro do polígono, isto é, $n.l = 2p$. Assim, a área de um polígono regular pode ser determinada por $S = p.a$. □

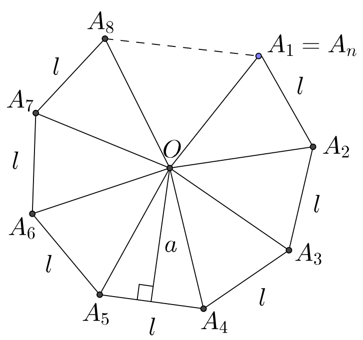


Figura 4.9: Ilustração do polígono regular.

Definição 4.6. *Um **hexágono regular** possui todos os seus 6 lados e 6 ângulos congruentes.*

Teorema 4.11. *Um hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros com cada lado medindo l. Esse hexágono regular tem área $S = \dfrac{3\,l^2\sqrt{3}}{2}$.*

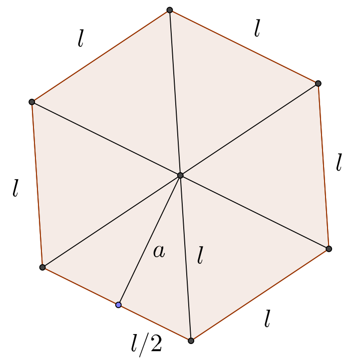


Figura 4.10: Ilustração do hexágono regular.

Demonstração. Como vimos a área de um triângulo equilátero de lado medindo l é $S = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Como o hexágono regular é formado por 6 triangulos equiláteros, então a sua área será $S = \dfrac{6\,l^2\sqrt{3}}{4}$, ou seja, $S = \dfrac{3\,l^2\sqrt{3}}{2}$. □

Para concluir a seção temos o próximo resultado que mostra como é o cálculo da área de um círculo. Embora não seja um polígono, para se obter este resultado utilizamos o método de exaustão que é baseado na ideia de aproximarmos a figura do círculo por uma família de polígonos e então sua área é obtida através de um limite.

Definição 4.7. *Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano o* ***lugar geométrico*** *(LG) dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto L do plano que satisfaz as duas condições a seguir:*
(a) Todo ponto de L possui a propriedade P.
(b) Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a L.

Definição 4.8. *Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o LG dos pontos do plano que estão à distância menor ou igual a r do ponto O é o círculo de centro O e raio r, denotado por $\Gamma(O;r)$, isto é,*

$$\overline{AO} \leqslant r \Leftrightarrow A \in \Gamma(O;r).$$

Definição 4.9. *Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o LG dos pontos do plano que estão à distância r do ponto O é a circunferência de centro O e raio r, denotado por $\Gamma(O;r)$, isto é,*

$$\overline{AO} = r \Leftrightarrow A \in \Gamma(O;r).$$

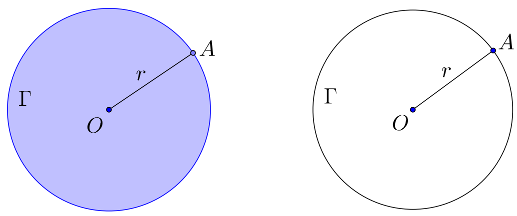


Figura 4.11: Ilustração do círculo e da circunferência.

Teorema 4.12. *Seja* Γ *um círculo de raio* r*, então a área* S *de* Γ *é dada por* $S = \pi r^2$*.*

Demonstração. Para esta demonstração utilizaremos conceitos básicos de Geometria e limites. Já vimos anteriormente que a área de um polígono regular é $S = n.(\frac{l.a}{2})$. Agora, dado um círculo inscrito a um polígono regular, o raio deste círculo é igual ao apótema do polígono. (ver Figura 4.12). Também temos que π é a razão entre o comprimento C da circunferência e o diâmetro D do círculo, isto é, $\pi = \frac{C}{D}$.

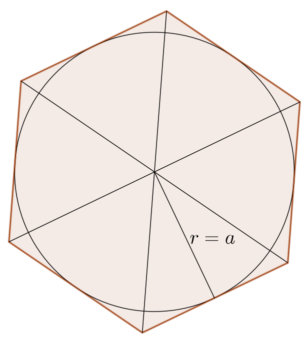


Figura 4.12: Ilustração do círculo inscrito num hexágono regular.

Com os dados acima construímos um círculo de raio r inscrito a um polígono regular de n lados. O apótema deste polígono é igual ao raio do círculo. Seja S_c a área do círculo e S_p a área do polígono. Então S_p é aproximadamente S_c, isto é, $S_p = \frac{r.n.l}{2} \cong S_c$ e o perímetro P do polígono é aproximadamente o comprimento C da circunferência, isto é, $P = n.l \cong C$.

Além disso, se n tender ao infinito, o polígono de n lados tende ao círculo e obtemos os limites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r.n.l}{2} = S_c$$

e

$$\lim_{n\to\infty} n.l = C.$$

Uma vez que π é a razão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, segue que $\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2r}$ e considerando o segundo limite acima obtemos:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{n.l}{2r}.$$

Agora considerando o primeiro limite e multiplicando a fração por $\frac{r}{r}$ temos:

$$S_c = \lim_{n\to\infty} \frac{r.n.l}{2}.\frac{r}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^2.n.l}{2r} = r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n.l}{2r}.$$

Logo

$$S_c = r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n.l}{2r} = \pi r^2.$$

Omitiremos a prova para o caso do círculo circunscrito a um polígono regular, por ser muito semelhante a do círculo inscrito. □

A seguir estabelecemos a área de figuras obtidas através de círculos, a coroa circular e o setor circular.

Definição 4.10. *Sejam dois círculos de mesmo centro O porém o maior com raio R e o menor com raio r, veja a Figura 4.13. O lugar geométrico dos pontos do plano que estão à distância menor ou igual que R de O e à distância maior ou igual que r de O, é chamada de* ***coroa circular.***

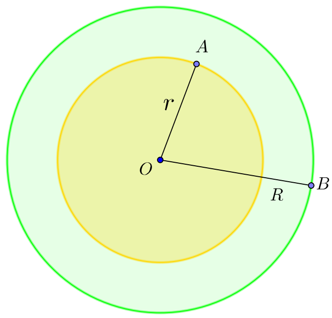


Figura 4.13: Ilustração da coroa circular.

Teorema 4.13. *A área de uma coroa circular correspondente aos círculos concêntricos onde o maior tem raio R e o menor tem raio r é dada pela diferença entre a área do maior círculo e a área do menor círculo, ou seja, $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.12 segue que a área de um círculo de raio r é $S = \pi r^2$. Logo a área do círculo de raio R será $S_R = \pi R^2$ e a área do círculo de raio r será $S_r = \pi r^2$. Fazendo a diferença entre as duas áreas obtemos $S = \pi R^2 - \pi r^2$ e colocando π em evidência temos $S = \pi\left(R^2 - r^2\right)$. □

Definição 4.11. *Dado um círculo Γ de raio r. Um* ***setor circular*** *é uma parte desse círculo limitado por dois raios e um arco central α (em radianos) - veja a Figura 4.14.*

Teorema 4.14. *Seja Γ um círculo de raio r. A área de um setor circular corresponde ao ângulo α (em radianos [5]) é dada por $S = \frac{\alpha r^2}{2}$.*

[5] Veja referência [10]

Demonstração. A área do setor circular vai depender da medida do ângulo α e do raio r da circunferência. Como uma volta completa na circunferência equivale a 360^o ou melhor 2π radianos utilizaremos a regra de três simples para determinar a área do setor circular:

$$2\pi \longrightarrow \pi r^2$$

$$\alpha \longrightarrow S$$

Com isso,

$$S = \frac{\alpha r^2}{2}.$$

$\square$

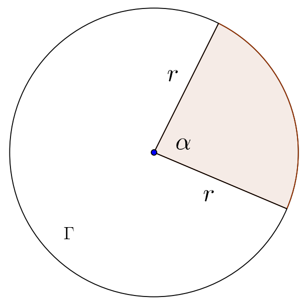


Figura 4.14: Ilustração do setor circular.

Definição 4.12. *Dado um ângulo $A\widehat{O}B$, a* ***bissetriz*** *de $A\widehat{O}B$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que divide $A\widehat{O}B$ em dois ângulos iguais. Neste caso, dizemos ainda que $\overrightarrow{OC}$ bissecta $A\widehat{O}B$. Assim, $\overrightarrow{OC}$ bissecta $A\widehat{O}B \Leftrightarrow A\widehat{O}C = B\widehat{O}C$. Seja ABC um triângulo qualquer, o encontro das bissetrizes internas desse triângulo é chamado de* ***incentro****. (veja a Figura 4.15).*

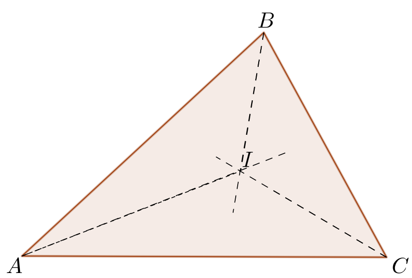


Figura 4.15: Ilustração do incentro.

Teorema 4.15. *Seja ABC um triângulo de lados $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ e semiperímetro p, como na Figura 4.16. Se r é o raio do círculo inscrito em ABC, então a área do triângulo é dada por $S = pr$.*

Demonstração. Seja I o incentro de ABC, uma vez que as alturas dos triângulos AIB, AIC e BIC, respectivamente relativas aos lados $|AB|$, $|AC|$ e $|BC|$, são todas iguais a r, temos

$$S_{(ABC)} = S_{(AIB)} + S_{(AIC)} + S_{(BIC)} = \frac{cr}{2} + \frac{br}{2} + \frac{ar}{2} = \frac{r}{2}(a+b+c) = \left(\frac{r}{2}\right) 2p = pr.$$

□

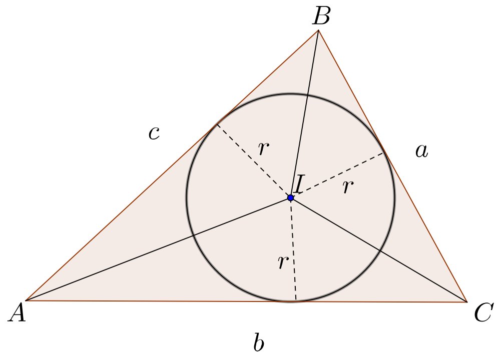


Figura 4.16: Ilustração do triângulo e círculo inscrito.

Teorema 4.16. *Sejam ABC triângulo qualquer e a, b e c seus respectivos lados. Considere também p o semiperímetro, ou seja, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então a área S desse triângulo é dada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ conhecida pela fórmula de Heron.*

Demonstração. A Figura 4.17 ilustra um triângulo ABC qualquer e uma circunferência de raio R e centro O inscrita no triângulo ABC. Segue que $|AC| = b$, $|AB| = c$ e $|BC| = a$. Note que as medidas dos segmentos $|OA'| = |OB'| = |OC'| = R$ além disso o segmento $\overline{OA'}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$, $\overline{OB'}$ é perpendicular ao lado $\overline{AC}$ e $\overline{OC'}$ é perpendicular ao lado $\overline{AB}$. Segue também que os ângulos $A'\widehat{C}O = O\widehat{C}B' = \theta$, $B'\widehat{O}A = A\widehat{O}C' = \alpha$, $C'\widehat{O}B = B\widehat{O}A' = \beta$ e $|AC'| = |AB'| = x$, $|C'B| = |BA'| = y$, $|A'C| = |CB'| = z$.

Logo $a = z + y$, $b = x + z$, $c = x + y$ e que o semiperímetro é $p = x + y + z$, assim $p = x + a$, $p = y + b$ e $p = z + c$. Sabemos pelo Teorema 4.15 que:

$$S = pR \Rightarrow R = \frac{S}{p}.$$

São conhecidas as igualdades [6]

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{x}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{R}{y}; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{R}{z}.$$

[6] Veja a referência [10], p.146-C

Como $\alpha+\beta+\theta=90^o$, então $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta=1$.

De fato, como

$$\alpha+\beta=90^o-\theta \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(90^o-\theta)=\operatorname{cotg}\theta=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\Rightarrow\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Assim,

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\Rightarrow 1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta)+(\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\theta)$$
$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta=1. \quad (4.1)$$

Com essa informação e observando a Figura 4.17 temos:

$$p=x+y+z=x+a=y+b=z+c$$

e

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{R}{x};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{R}{y}\quad e\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{R}{z}.$$

Finalmente, considerando (4.1) obtemos:

$$\frac{R}{x}\frac{R}{y}+\frac{R}{y}\frac{R}{z}+\frac{R}{x}\frac{R}{z}=1\Rightarrow$$
$$\frac{R^2(x+y+z)}{x\,y\,z}=\frac{R^2\,p}{x\,y\,z}=\frac{S^2}{p\,x\,y\,z}=1\Rightarrow$$
$$S^2=p\,x\,y\,z=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Portanto $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. □

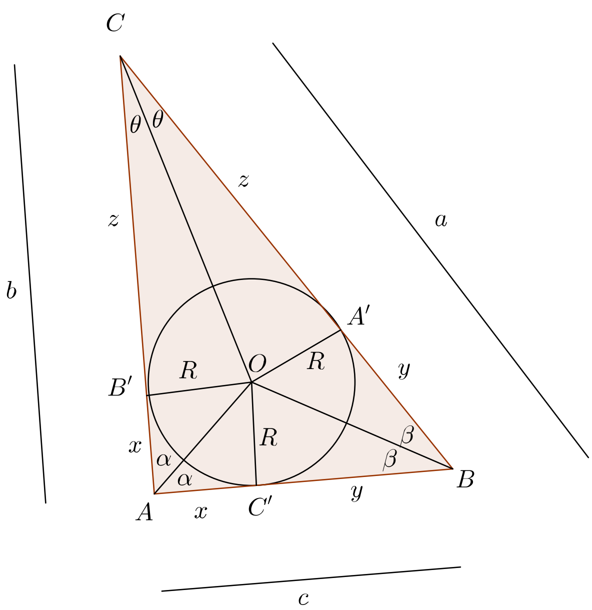


Figura 4.17: Ilustração para a demonstração de Heron.

Definição 4.13. *Em um círculo de centro O e raio r, qualquer corda $|AB|$ divide o círculo em dois segmentos circulares. O menor deles está indicado na Figura 4.18 (parte azul). Sendo α o ângulo central $A\widehat{O}B$ a área S do menor dos dois segmentos circulares é a diferença entre a área do setor AOB e a área do triângulo AOB.*

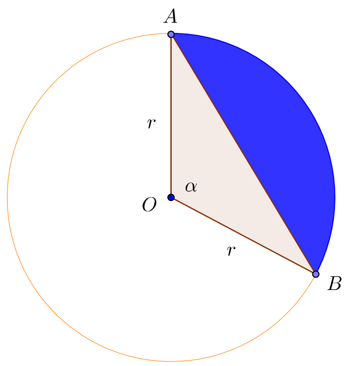


Figura 4.18: Ilustração do segmento circular.

Teorema 4.17. *A área de um segmento circular com α sendo o comprimento do arco do setor circular e r a medida do raio do círculo é dada por $S = \dfrac{r^2}{2}(\alpha - sen\,\alpha)$.*

Demonstração. Pela Definição 4.13 vimos que a área do menor segmento circular é dada pela diferença entre a área do setor AOB e a área do triângulo AOB. Assim pelos Teoremas 4.14 e 4.5 temos

$$S = \frac{\alpha\, r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

ou seja,

$$S = \frac{r^2}{2}(\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha).$$

□

4.2 Áreas de Figuras no Espaço

Nesta seção apresentaremos as demonstrações do cálculo das áreas envolvendo alguns sólidos vistos no ensino médio, que são o prisma, a pirâmide, o cilindro, o cone e a esfera. Usaremos na maior parte do texto as referências [14] e [15].

Definição 4.14. ***Superfície poliédrica limitada convexa*** *é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos, tais que:*
a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
b) cada lado de um polígono está exatamente em dois polígonos;

c) havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, estes devem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
d) o plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semiespaço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas possuem os seguintes elementos:
Faces: são os polígonos;
Arestas: são os lados dos polígonos;
Vértices: são os vértices dos polígonos;
Ângulos: são os ângulos dos polígonos.

Definição 4.15. *Consideremos um número finito $n\,(n \geqslant 4)$ de polígonos planos convexos tais que:*
a) dois polígonos não estão num mesmo plano;
b) cada lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semiespaço.
Nestas condições, ficam determinados n semiespaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção destes semiespaços é chamado ***poliedro convexo.***

Definição 4.16. *Considere um polígono convexo (ou região poligonal) $A_1A_2...A_n$ em um plano α e um segmento $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta α. Chama-se* ***prisma*** *à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados no mesmo semiespaço determinado por α.*

Vamos agora descrever a construção de um prisma de base sendo uma região poligonal $A_1A_2...A_n$, contida em um plano α. Escolha um ponto A_1' qualquer não pertencente a α. Por A_1' trace o plano β paralelo a α. Pelos demais pontos A_2 até A_n trace retas paralelas ao segmento $\overline{A_1A_1'}$ que cortam β nos pontos A_2' até A_n'. Essas retas são paralelas entre si. Considere dois segmentos consecutivos assim determinados, por exemplo $\overline{A_1A_1'}$ e $\overline{A_2A_2'}$. O quadrilátero $A_1A_1'A_2'A_2$ é plano, pois seus lados $\overline{A_1A_1'}$ e $\overline{A_2A_2'}$ são paralelos. Isso implica que $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_1'A_2'}$ também são paralelos, já que estão contidos em retas coplanares que não se intersectam por estarem contidas em planos paralelos, e com isso, o quadrilátero $A_1A_1'A_2'A_2$ é um paralelogramo. As regiões limitadas por paralelogramos assim determinados, juntamente com as regiões poligonais $A_1A_2...A_n$ e $A_1'A_2'...A_n'$, determinam o **prisma** de bases $A_1A_2...A_n$ e $A_1'A_2'...A_n'$, veja a Figura 4.19.

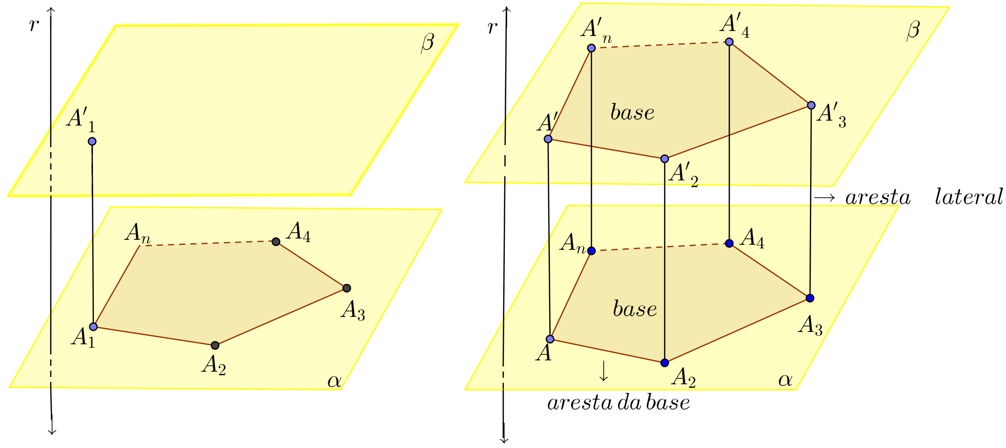


Figura 4.19: Ilustração do prisma.

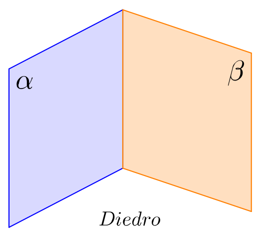
A região do espaço ocupada por um prisma é formada pelos pontos dos segmentos nos quais cada extremidade está em uma das bases. As **arestas** $\overline{A_1A_1'}$, $\overline{A_2A_2'}$ e $\overline{A_3A_3'}$ são chamadas arestas laterais e todos as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento. Arestas laterais consecutivas determinam regiões que têm a forma de paralelogramos e são chamadas de **faces** laterais do prisma. As **bases** $A_1A_2A_3$ e $A_1'A_2'A_3'$ são congruentes. A **altura** do prisma é a distância entre as bases.

Para determinarmos a área da superfície de um prisma, temos que considerar a **superfície lateral** que é formada pelas faces laterais (paralelogramos) e com isso, a área lateral será a soma de todas as áreas das faces. Observe que se a base do prisma for triangular teremos 3 faces laterais, se for um quadrilátero, teremos 4 faces laterais e assim por diante. Já para determinarmos a área da **superfície total** de um prisma, temos que somar a área lateral com as áreas das bases.

Definição 4.17. ***Ângulo diedro*** *ou* ***diedro*** *ou* ***ângulo diédrico*** *é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos num mesmo plano.*

Definição 4.18. *Dadas três semirretas V_a, V_b, V_c, de mesma origem V, não coplanares, consideremos os semiespaços E_1, E_2 e E_3 como segue:*
E_1, com origem no plano (bc) e contendo V_a;
E_2, com origem no plano (ac) e contendo V_b;
E_3, com origem no plano (ab) e contendo V_c.
Triedro *determinado por V_a, V_b e V_c é a interseção dos semiespaços E_1, E_2 e E_3.*

A Figura 4.20 nos traz um exemplo de diedro e um de triedro.



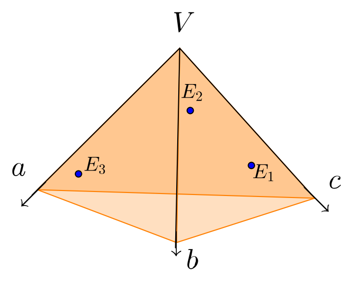


Figura 4.20: Ilustração de diedro e triedro.

Definição 4.19. *Considere uma região poligonal plana convexa* $A_1A_2...A_n$ *de* n *lados e um ponto* V *fora de seu plano. Chama-se* ***pirâmide convexa indefinida*** *à reunião das semirretas de origem em* V *e que passam pelos pontos da região poligonal dada.*

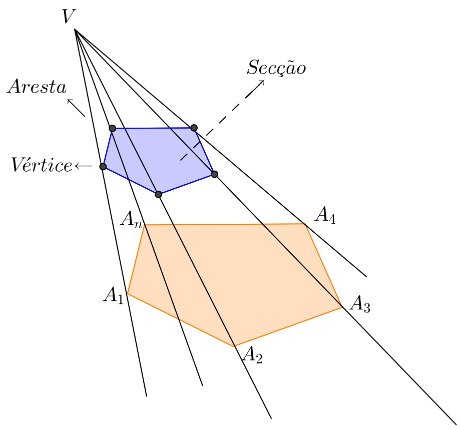


Figura 4.21: Ilustração de pirâmide ilimitada e uma secção.

Uma pirâmide ilimitada convexa possui: n arestas, n diedros (ângulos ou setores angulares planos) e n faces. A superfície de uma pirâmide ilimitada convexa é a reunião das faces desta pirâmide. A secção é uma região poligonal plana com um só vértice em cada aresta, veja um exemplo (na página anterior) de secção na Figura 4.21.

Definição 4.20. ***Pirâmide convexa limitada*** *ou* ***pirâmide convexa definida*** *é a parte da pirâmide ilimitada que contém o vértice quando se divide esta pirâmide pelo plano de uma secção, reunida com esta secção.*

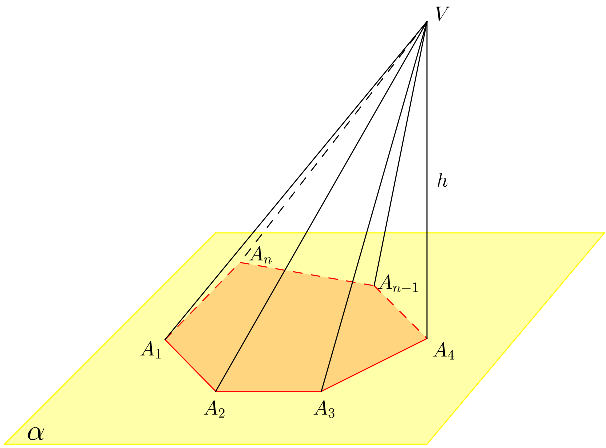


Figura 4.22: Ilustração da pirâmide convexa.

A seguir temos a definição de pirâmide vista no ensino médio.

Definição 4.21. *Considere um polígono convexo $A_1A_2...A_n$ situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se **pirâmide** ou **pirâmide convexa** à reunião dos segmentos com extremidade em V e a outra nos pontos do polígono, onde V é o vértice e o polígono $A_1A_2...A_n$ a base da pirâmide.*

Uma pirâmide possui: uma base (polígono da base), n faces laterais (triângulos), $n+1$ faces (polígono da base mais as faces laterais), n arestas laterais, $2n$ arestas, $2n$ diedros, $n+1$ vértices, $n+1$ ângulos poliédricos e n triedros. A altura de uma pirâmide é a distância h entre o vértice V e o plano da base. A superfície lateral é a reunião das faces laterais da pirâmide, logo a área desta superfície é chamada área lateral e geralmente indicada por S_l. A superfície total é a reunião da superfície lateral com a superfície da base da pirâmide, com isso a área desta superfície é chamada área total e geralmente indicada por S_t. Dependendo do polígono da base, uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc.

Para a superfície cilindro temos várias definições, onde a primeira dada no EM e as demais são encontradas nas referências citadas no início dessa seção e serão definidas aqui por que são interessantes para a formação contínua do professor.

Definição 4.22. *Considere um círculo de centro O em um plano α e raio r e um segmento $\overline{PQ}$, não nulo, não paralelo nem contido em um plano α. Chama-se **cilindro circular** ou **cilindro** à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α, veja a Figura 4.24.*

Definição 4.23. *Considere uma curva plana C no espaço, e $\overline{AB}$ um segmento transversal (não paralelo) ao plano da curva. O **cilindro** de diretriz C e geratrizes paralelas a $\overline{AB}$ é a reunião das retas que passam por um ponto de C e são paralelas a $\overline{AB}$. Ou* *seja, é o conjunto dos pontos P que podem ser escritos na forma $P = Q + s\,\overline{AB}$ em que $Q \in C$ e $s \in \mathbb{R}$.*

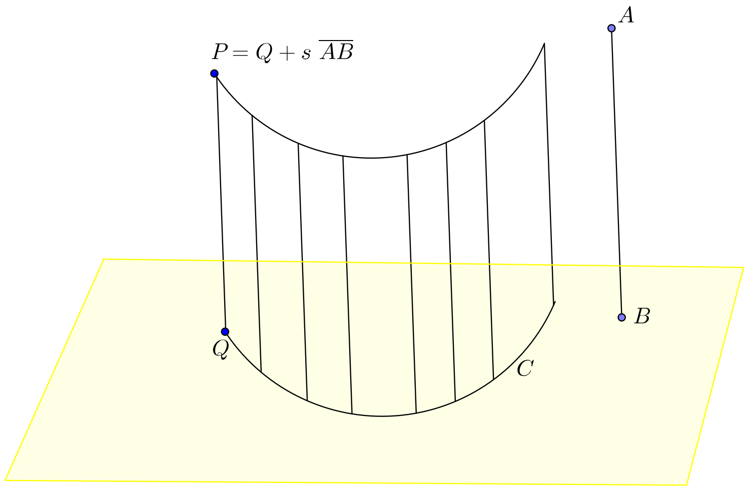


Figura 4.23: Ilustração geral do cilindro de diretriz C.

Definição 4.24. *Considere um círculo de centro O e raio r e uma reta s não paralela nem contida no plano do círculo. Chama-se* ***cilindro circular ilimitado*** *ou* ***cilindro circular indefinido*** *à reunião das retas paralelas a s e que passam pelos pontos do círculo, veja a Figura 4.24.*

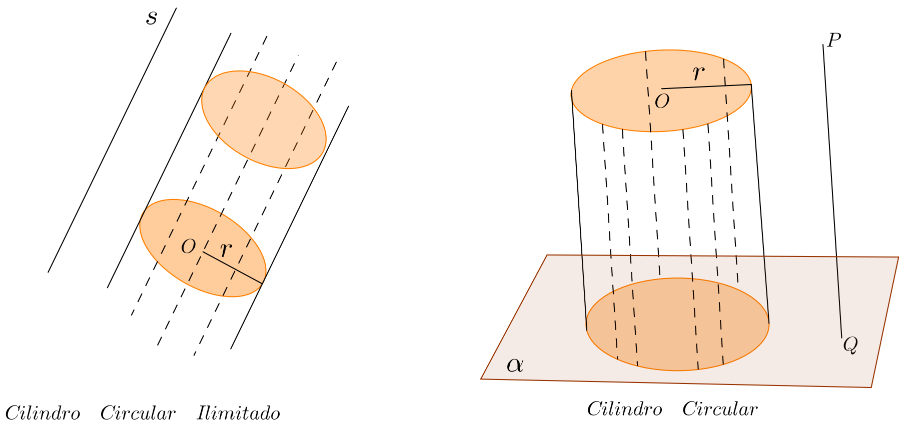


Figura 4.24: Ilustração do cilindro circular ilimitado e cilindro circular.

Definição 4.25. ***Cilindro*** *é a reunião da parte do cilindro circular ilimitado, compreendida entre os planos de duas secções circulares paralelas e distintas, com estas secções.*

O cilindro limitado, geralmente possui duas **bases** que são círculos congruentes situados em planos paralelos; as **geratrizes** são os segmentos com uma extremidade nos pontos do círculo de centro O e raio r, onde r é o raio da base; a **altura** de um cilindro é a distância h entre os planos das bases; a **superfície lateral** é a reunião das geratrizes; **superfície total** é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases. Se as geratrizes são oblíquas aos planos das bases temos um **cilindro circular oblíquo**; se as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases temos um **cilindro circular reto**; o cilindro circular reto também é chamado de **cilindro de revolução**, já que é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.

A Figura 4.25 auxiliará na demonstração do próximo teorema.

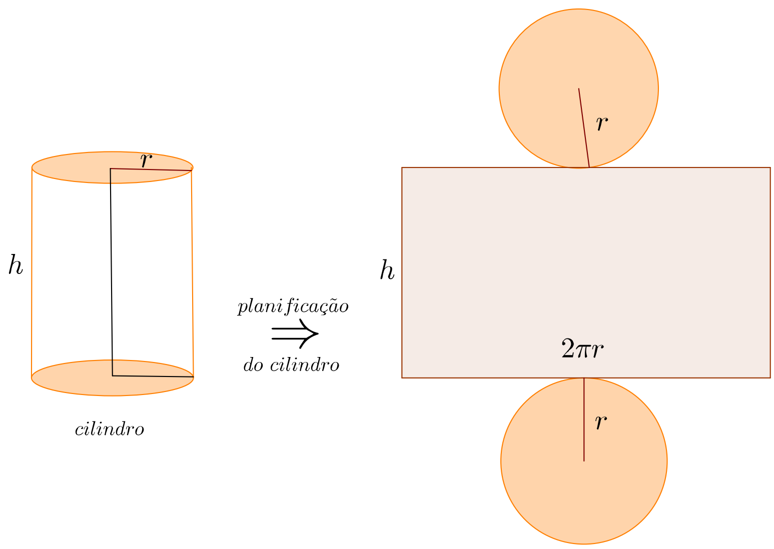


Figura 4.25: Ilustração do cilindro e sua planificação.

Teorema 4.18. *Considere um cilindro de raio r e altura h, então a área lateral desse cilindro é dada por $S_l = 2\,\pi\,r\,h$ e a área total $S_t = 2\,\pi\,r\,(h + r)$.*

Demonstração. Como podemos notar pela Figura 4.25 a planificação de um cilindro de raio r e altura h gera três figuras planas. Um retângulo de altura h e base $2\,\pi\,r$ que corresponde ao comprimento do círculo das bases do cilindro e dois círculos idênticos correspondentes às duas bases do cilindro. Logo, para determinarmos a área lateral do cilindro, basta calcular a área do retângulo de altura h e base $2\,\pi\,r$ e como já sabemos calcular a área do retângulo pelo Teorema 4.2, segue que a área lateral do cilindro será $S_l = 2\,\pi\,r\,h$.

Agora para determinarmos a área total deste cilindro, basta somarmos a área do retângulo anterior com as áreas dos dois círculos. Como sabemos pelo Teorema 4.12 calcular a área de um círculo, então a área total do cilindro será $S_t = 2\,\pi\,r\,h + 2\,\pi\,r^2 = 2\,\pi\,r\,(h + r)$. $\square$

Para o cone também teremos várias definições, onde a primeira é vista no EM e as demais também são encontradas nas referências citadas no início dessa seção e que podem auxiliar na formação contínua do professor.

Definição 4.26. *Considere um círculo de centro O e raio r num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se* ***cone circular*** *ou* ***cone*** *à reunião dos segmentos de retas com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.*

Definição 4.27. *Seja C uma curva plana no espaço e V um ponto não pertencente ao plano da curva. O* ***cone*** *de diretriz C e vértice V é a reunião das retas passando por V e por um ponto da curva C.*

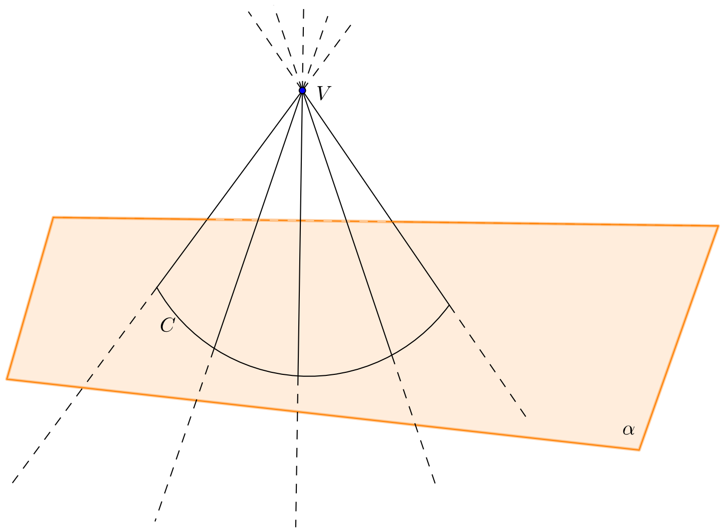


Figura 4.26: Ilustração geral do cone.

Definição 4.28. *Considere um círculo de centro O e raio r e um ponto V fora de seu plano. Chama-se* ***cone circular ilimitado*** *ou* ***cone circular indefinido*** *à reunião das semirretas de origem em V e passam pelos pontos do círculo.*

Definição 4.29. ***Cone*** *é a parte do cone circular ilimitado, que contém o vértice quando se divide este cone pelo plano de uma secção circular, reunida com esta secção.*

O cone limitado possui uma **base** que é um círculo de centro O e raio r; as **geratrizes** são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo da base; **vértice** é o ponto V já citado anteriormente; a **altura** de um cone é a distância h entre o plano da base e o vértice V; a **superfície lateral** é a reunião das geratrizes; **superfície total** é a reunião da superfície lateral com o círculo da base; se a reta $\overleftrightarrow{VO}$ é oblíqua ao plano da base temos um **cone circular oblíquo**; se a reta $\overleftrightarrow{VO}$ é perpendicular ao plano da base temos um **cone circular reto**; o cone circular reto também é chamado de **cone de revolução**, já que é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus catetos.

Teorema 4.19. *Considere um cone circular reto com raio da base r, altura h e geratriz g, então a área lateral do cone será $S_l = \pi\, r\, g$ enquanto que a área total será $S_t = \pi\, r\,(g + r)$.*

Demonstração. Através da Figura 4.27 podemos observar que a planificação do cone gera um setor circular e um círculo. O setor circular tem raio igual a geratriz, ou seja, raio igual a g e o comprimento do arco igual a $2\,\pi\, g$. Logo, para calcularmos a área lateral do cone devemos calcular a área do setor circular e para isso vamos utilizar uma regra de três simples envolvendo o comprimento do arco e a área do setor:

$$2\,\pi\, g \longrightarrow \pi\, g^2$$

$$2\,\pi\, r \longrightarrow S_l$$

Portanto, $\dfrac{2\,\pi\, g}{2\,\pi\, r} = \dfrac{\pi\, g^2}{S_l} \Rightarrow S_l = \pi\, g\, r.$

Logo a área total do cone será a área lateral mais a área do círculo da base, ou seja, $S_t = \pi\, g\, r + \pi\, r^2 \Rightarrow S_t = \pi\, r(g + r).$ □

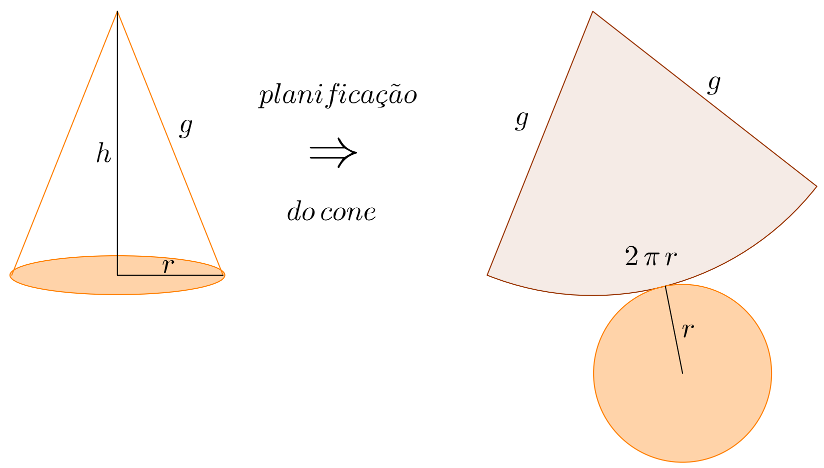


Figura 4.27: Ilustração do cone e sua planificação.

Teorema 4.20. *Dado um tronco de cone circular reto de raio da base menor r e raio da base maior R e geratriz igual a g_t. Então sua área lateral será $S_l = \pi g_t(R + r)$.*

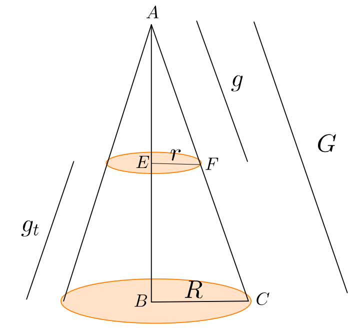


Figura 4.28: Ilustração do cone e seu tronco.

Demonstração. Analisando a Figura 4.28 segue que se g é a geratriz do cone menor e G a geratriz do cone maior, então a diferença $G-g$ é a geratriz do tronco do cone que será denotada por g_t. Agora considere os triângulos semelhantes ABC e AEF, logo:

$$\frac{G}{g}=\frac{R}{r}\Rightarrow\frac{G}{g}-1=\frac{R}{r}-1\Rightarrow\frac{G-g}{g}=\frac{R-r}{r}\Rightarrow\frac{g_t}{g}=\frac{R-r}{r}\Rightarrow\frac{g_t}{R-r}=\frac{g}{r}.$$

A área lateral do tronco será a diferença entre a área do cone maior e o cone menor, veja a Figura 4.29. Logo

$$S_l=\pi RG-\pi rg=\pi R\frac{gR}{r}-\frac{\pi r^2 g}{r}=$$
$$\frac{\pi g}{r}(R^2-r^2)=\frac{\pi g_t}{R-r}(R+r)(R-r)=\pi g_t(R+r).$$

$\square$

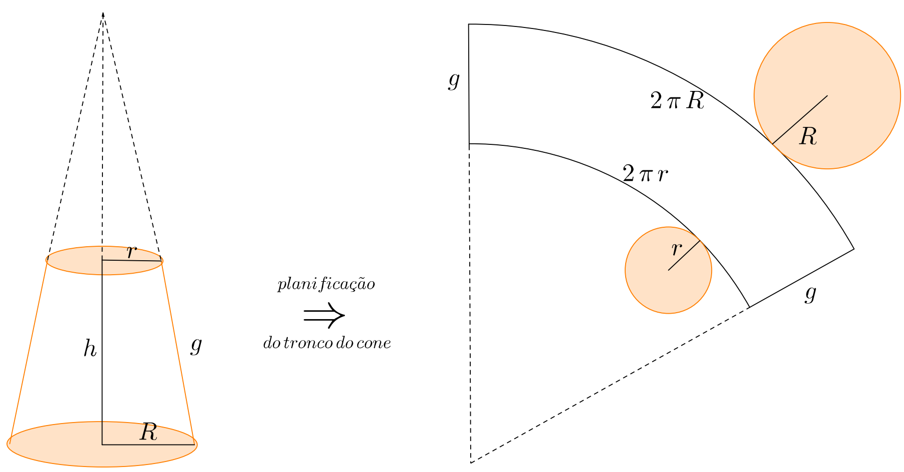


Figura 4.29: Ilustração do tronco do cone e sua planificação.

Definição 4.30. *Dados um real positivo R e um ponto O do espaço, o LG dos pontos do espaço que estão à distância menor ou igual a R do ponto O é a **esfera** de centro O e raio R.*

Teorema 4.21. *Seja Φ uma esfera de raio R então a área dessa superfície esférica é dada por $S = 4\,\pi\,R^2$.*

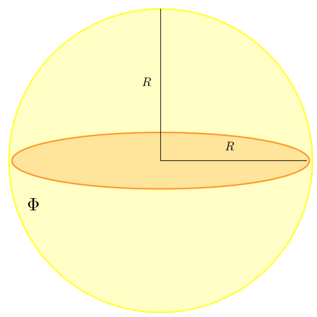


Figura 4.30: Ilustração da esfera.

Demonstração. Considere uma esfera e um anel dessa esfera medindo l como ilustra a Figura 4.31. A largura desse anel pode ser descrita pensando na fórmula do arco $l = r\,d\theta$, onde r é o raio da circunferência e $d\theta$ a variação infinitesimal (a variação é tão pequena quanto se queira) do ângulo central. Porém, se estes anéis tiverem larguras infinitesimais, os raios se confundem e o perímetro do anel de largura infinitesimal é dado por $P(x) = 2\,\pi\,x$. Observe que o perímetro P está em função do raio x. Vamos fazer agora uma transformação para coordenadas polares, vejam a Figura 4.32.

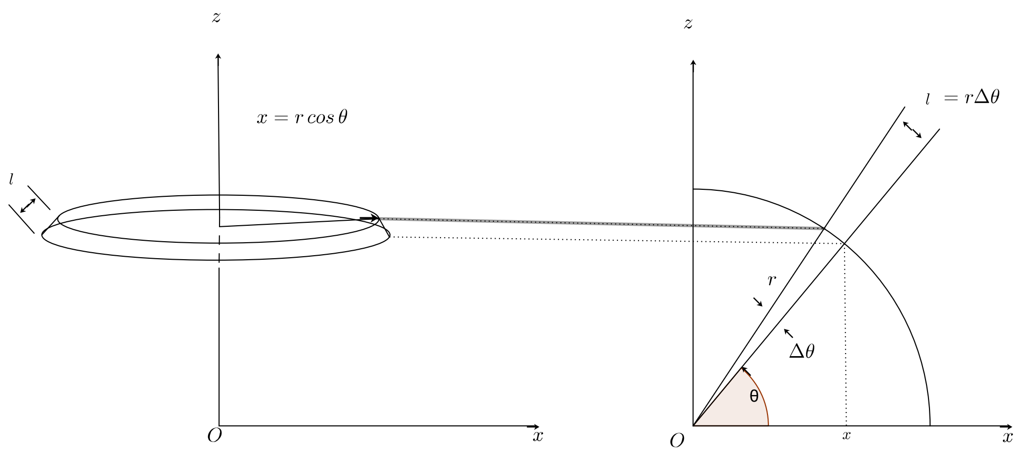


Figura 4.31: Ilustração da área da esfera.

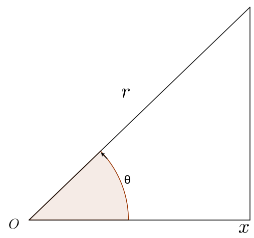


Figura 4.32: Ilustração do triângulo retângulo.

Segue que $\cos\theta = \dfrac{x}{r} \Rightarrow x = r\,\cos\theta$ e substituindo esta última igualdade na equação $P(x) = 2\,\pi\,x$ obtemos $P(\theta) = 2\,\pi\,r\,\cos\theta$ e portanto o perímetro passa a ser função do ângulo central θ. Então, a área da superfície do anel de largura infinitesimal será dada pelo produto do seu perímetro P por sua altura l, isto é,

$$S(\theta) = P(\theta)\,l \Rightarrow S(\theta) = 2\,\pi\,r\,\cos\theta\,r\,\Delta\theta \Rightarrow S(\theta) = 2\,\pi\,r^2\,\cos\theta\,\Delta\theta,\ \text{com}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Como $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, obtemos anéis da esfera somente na parte superior do eixo x e consequentemente somente a metade da área da sua superfície. Para encontrar a área total, basta multiplicar por 2. Aplicando então a integral [7] definida.

$$S(r) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \cos\theta\,d\theta \Rightarrow S(r) = 4\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \Rightarrow S(r) = 4\pi r^2[\text{sen}\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$
$$S(r) = 4\pi r^2[\text{sen}\frac{\pi}{2} - \text{sen}0] \Rightarrow S(r) = 4\pi r^2[1-0] \Rightarrow S(r) = 4\pi r^2.$$

□

Concluído o embasamento teórico do tema áreas, iremos, no próximo capítulo, apresentar atividades envolvendo o tema que podem ser utilizada pelos professores como sugestões de aulas práticas e como motivação para introduzir o assunto.

[7] Ver Apêndice A o conceito de integral definida.

5 Atividades Didáticas

Neste capítulo apresentaremos algumas sugestões de atividades envolvendo áreas de figuras planas, geralmente vistas ao longo do Ensino Fundamental (Ciclo II), ou seja, do 6^o ao 9^o ano. As atividades apresentadas para o EF foram aplicadas nos quatro 6^{os} anos da Escola Estadual Odilon Corrêa, na cidade de Rio Claro $-$ SP, no ano de 2015.

Apresentaremos algumas atividades, onde no início de cada uma delas, descreveremos o objetivo da mesma e no final teremos uma avaliação e uma tabela com a quantidade de alunos que realizaram a atividade com as porcentagens de acertos ou erros em relação a cada questão. Nesta tabela foram separadas as questões em correta, parcialmente correta e incorreta. Consideraremos uma questão parcialmente correta se o aluno resolver corretamente alguns dos itens que compõe a mesma questão.

Algumas atividades para o EM também estão apresentadas nesse capítulo, porém não foram aplicadas. Para confeccionar as atividades que serão apresentadas na sequência, foram utilizados os livros didáticos citados no Capítulo 3, o caderno do professor e aluno do Estado de São Paulo e algumas foram elaboradas pelo autor.

5.1 Descrição da Escola e Alunos

A escola E.E. Prof. Odilon Corrêa está localizada no bairro Jd. Claret que fica numa região entre o centro e a periferia da cidade de Rio Claro. A escola atinge praticamente a área de um quarteirão inteiro, sendo que a maioria dos quarteirões desta cidade são quadriláteros e o comprimento de seu perímetro é de aproximadamente 200 metros. O bairro Jd. Claret é formado praticamente por residências e terrenos ainda sem construções. Nossa diretoria de ensino é a DE de Limeira.

A maioria dos alunos desta escola é de bairros que ficam na periferia da cidade, por exemplo Jd. Bom Sucesso, Jd. Novo Wenzel, Bom Retiro, Santa Eliza, etc. A distância destes bairros à escola é de aproximadamente 3 km. Por isso, uma grande parte de alunos utiliza o ônibus escolar que é disponibilizado sem custo algum, enquanto que outros se locomovem de bicicletas ou carro próprio.

Alguns alunos chegam para cursar o 6^o ano sem saber ler e escrever e a maioria com muita dificuldade de aprendizagem, geralmente os alunos estudam os anos iniciais do EF em escolas do município localizadas próximas aos bairros de suas residências. A escola Odilon também é uma das únicas da cidade que é adaptada para receber alunos com deficiências visuais, cadeirantes, etc. A escola contém um laboratório de informática que foi restaurado e começou a funcionar no 1^o semestre de 2015.

O índice do IDESP desta escola em 2012 foi de 3,05, em 2013 3,24, já no ano de 2014 o índice recuou para 2,84, as tabelas completas destes índices estão disponibilizadas no site *idesp.edunet.sp.gov.br*. Todos os que trabalham nesta escola se esforçam para melhorar estes índices. A grande dificuldade é que poucos alunos são organizados e tem o material em ordem e poucos estudam fora da sala de aula. A participação dos pais também é baixa e a maioria deles trabalham o dia todo deixando a educação para um segundo momento.

5.2 Atividades para o Ensino Fundamental

Para o desenvolvimento das atividades que foram aplicadas, escolhemos trabalhar com o Geoplano, pois é um material que está disponível na escola, porém nunca foi utilizado pelos professores de matemática desta escola. Não foram feitas avaliações diagnósticas, mas pelas observações feitas nos anos anteriores pelo autor, verificamos que geralmente os alunos chegam para cursar o 6^o ano com muita dificuldade e quase sempre não sabem nem o que é um quadrado. Por isso as três primeiras atividades têm como objetivo principal fazer com que o aluno assimili alguns nomes e conceitos.

5.2.1 ATIVIDADE 1: Polígonos

Objetivo: Fazer com que os alunos aprendam o significado da palavra e conceito polígono e a nomenclatura dos principais polígonos estudados durante o ano.

Parte teórica: A palavra Polígono vem do grego e significa *muitos ângulos* ou **muitos lados**, já que *poli* equivale a muitos e *gonos* equivale a lados ou ângulos. Polígono é uma figura geométrica *plana* limitada apenas por segmentos de retas, chamados lados do polígono.

A Tabela 5.1 apresenta o nome de alguns polígonos convexos.

Número de lados	**Nome do polígono**
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octogono
9	eneágono
10	decágono
12	dodecágono

Tabela 5.1: Nome de alguns polígonos vistos no EF.

***Parte prática*:** Após estabelecer a teoria com os alunos (por texto ou lousa) iremos levá-los para fora da sala de aula, ou seja, refeitório, quadra poli esportiva e pátio em geral e pedir para que eles observem todos os objetos e ambientes encontrados pelo caminho. Com isso os alunos deverão anotar o nome do objeto ou ambiente em seus respectivos cadernos fazendo uma análise com qual figura geométrica a superfície do objeto se parece.

Retornando para a sala, os alunos receberão uma folha com a qual eles deverão, de forma individual, responder as seguintes questões:

1. Quais objetos ou ambientes você observou no pátio?

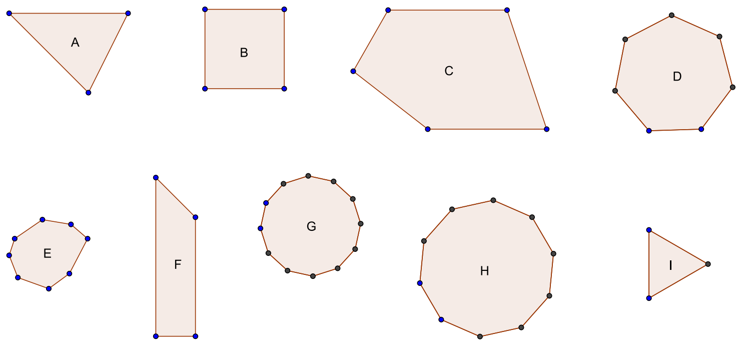
2. Com quais figuras geométricas eles se parecem?

3. Cite pelo menos 5 objetos que você pode encontrar na rua ou em sua casa, diferentes dos encontrados na escola, escrevendo o nome desse objeto e com qual polígono ele se parece.

4. Entre os polígonos representados na figura abaixo, indique quais são:

a) triângulos
b) quadriláteros
c) pentágonos
d) hexágonos
e) heptágonos
f) octogonos
g) eneágonos
h) decágonos

i) dodecágonos



5. Construa, utilizando uma régua, um polígono com:
a) 3 lados
b) 4 lados
c) 5 lados
d) 6 lados
e) 7 lados
f) 8 lados
g) 9 lados
h) 10 lados
i) 12 lados

Importante que o professor durante o decorrer da aula, principalmente no momento em que os alunos estão resolvendo os exercícios, passe de mesa em mesa e converse com os alunos verificando suas dúvidas e com isso auxilie os alunos que ainda estão com dificuldades.

Avaliação da aplicação: Foram utilizadas duas aulas de 50 minutos cada, porém o ideal seria utilizar pelo menos três aulas, já que os alunos neste ano (6^o) tem dificuldade em se concentrar, em escrever corretamente e também em utilizar a régua. Os alunos gostaram de fazer as observações fora da sala de aula e comentaram que a maior parte dos objetos observados são formados por quadriláteros.

Para facilitar a análise da avaliação temos a Tabela 5.2. Nesta atividade estavam presentes 105 alunos, porém 3 não quiseram realizar (2,8 % do total).

Questões	**Porcentagemde corretas**	**Porcentagemde parcialmente corretas**	**Porcentagemde erradas**
Questão 1	89,2	8,8	1,9
Questão 2	43,1	14,7	42,1
Questão 3	38,2	46	15,6
Questão 4	56,8	26,4	16,6
Questão 5	63,7	11,7	24,5

Tabela 5.2: Avaliação da Atividade 1.

A Figura 5.1 nos traz alguns ambientes e objetos observados pelos alunos antes de realizar a atividade.

Figura 5.1: Fotos de alguns dos ambientes observados.

Segue a Figura 5.2 que apresenta duas atividades desenvolvidas em sala de aula. As duas primeiras imagens são de um mesmo aluno que terminou tudo e esta foi bem desenvolvida, ou seja, o aluno atingiu os objetivos da atividade enquanto que a terceira imagem é de outro aluno que não conseguiu terminar a atividade.

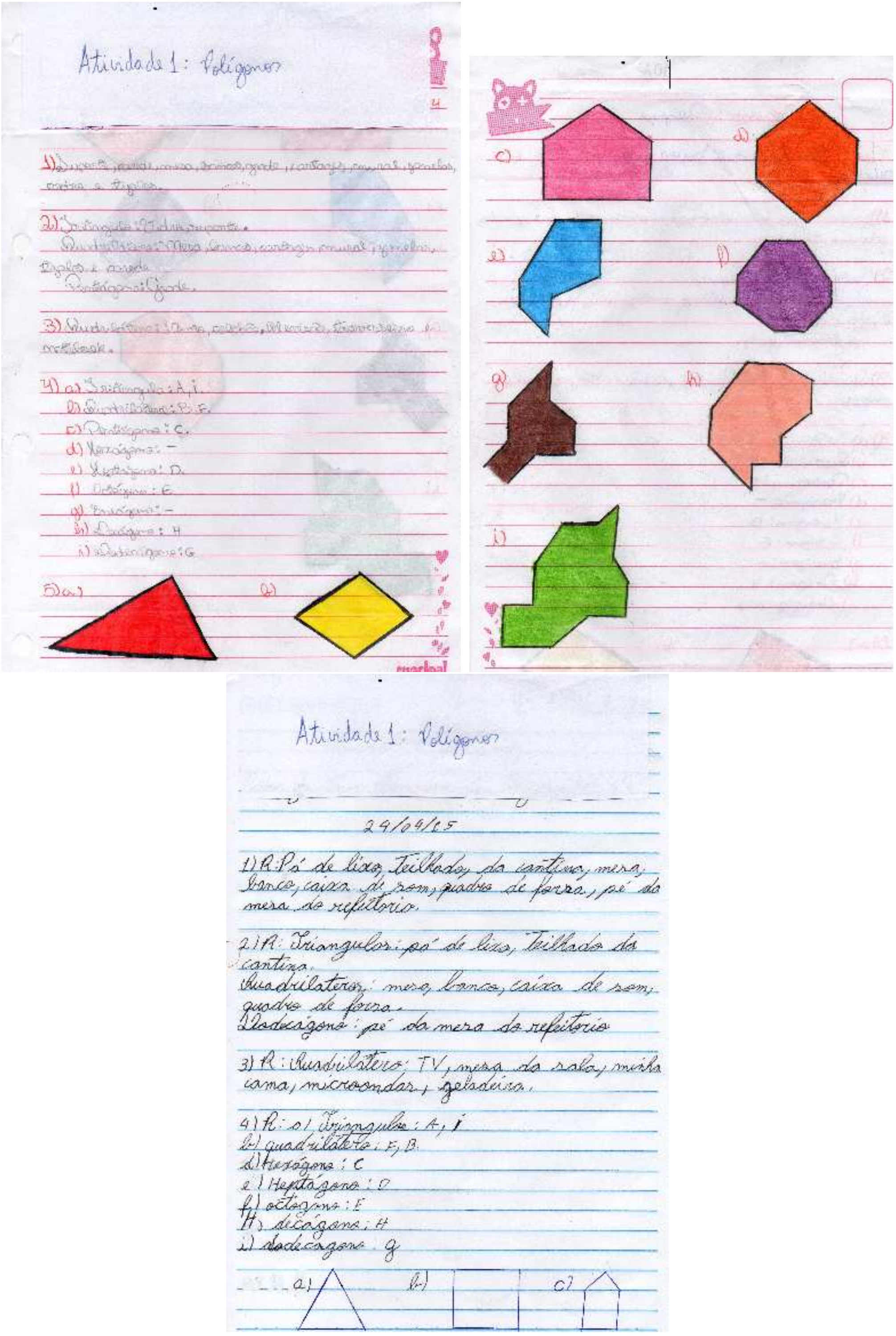


Figura 5.2: Atividade 1 desenvolvida em sala.

5.2.2 ATIVIDADE 2: Classificação de triângulos

***Objetivo*:** Ajudar os alunos a guardar a classificação e nomenclaturas dos triângulos em relação aos lados e aos ângulos. Também fazer com que o aluno conheça e aprenda a trabalhar com o Geoplano.

***Parte teórica*:** Um triângulo é um polígono que possui três lados e três ângulos. É considerado uma figura rígida, ou seja, não deforma. Os triângulos são classificados em seis categorias, onde três em relação a seus lados e três em relação a seus ângulos. É importante o professor explicar com antecedência a definição de ângulo e como se utiliza o Geoplano.

***Classificação em relação aos lados*:**

EQUILÁTERO: Chama-se triângulo **equilátero** todo triângulo que possui três lados congruentes, ou seja, seus três lados tem a mesma medida.

ISÓSCELES: Chama-se triângulo **isósceles** todo triângulo que possui pelo menos dois lados congruentes.

ESCALENO: Chama-se triângulo **escaleno** todo triângulo que possui os três lados com medidas diferentes.

***Classificação em relação aos ângulos*:**

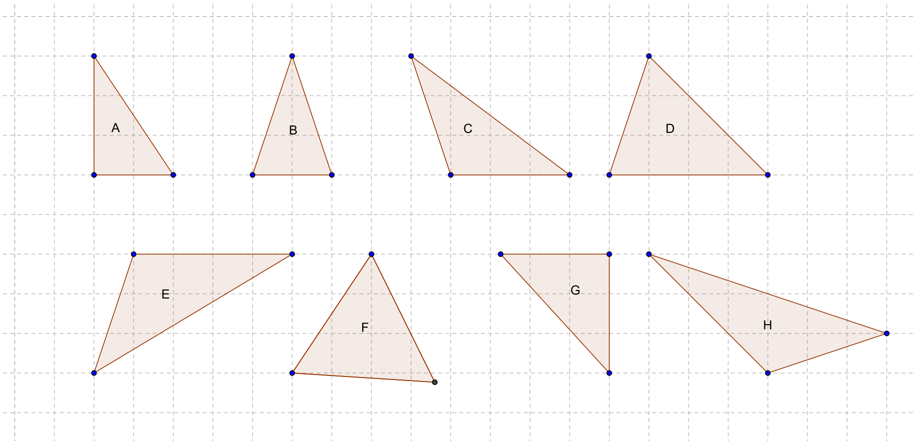
ACUTÂNGULO: Chama-se triângulo **acutângulo** todo triângulo que possui os três ângulos agudos, isto é, ângulo que tem medida maior que 0^o grau e menor que 90^o graus.

RETÂNGULO: Chama-se triângulo **retângulo** todo triângulo que possui um ângulo reto, isto é, ângulo com medida de 90^o graus.

OBTUSÂNGULO: Chama-se triângulo **obtusângulo** todo triângulo que possui um ângulo obtuso, isto é, ângulo que tem medida maior que 90^o graus e menor que 180^o graus.

***Parte Prática*:** Após o professor discutir a teoria com os alunos, os mesmos deverão desenvolver os seguintes itens:
1. Utilize o Geoplano para construir, se possível, os seguintes triângulos:
a) equilátero;
b) escaleno;
c) isósceles;
d) retângulo;
e) acutângulo;
f) obtusângulo.

2. Classifique cada triângulo abaixo segundo a medida de seus lados e segundo a medida de seus ângulos. Utilize a própria malha para considerar as medidas dos lados e as medidas dos ângulos ou também você pode utilizar a régua para descobrir o valor de cada lado.



3. Em relação ao exercício 1, qual foi o item que você mais sentiu dificuldade para construir?

4. Construa utilizando régua os seguintes triângulos:
a) equilátero;
b) escaleno;
c) isósceles;
d) retângulo;
e) acutângulo;
f) obtusângulo.

Avaliação da aplicação: Foram utilizadas três aulas, sendo que uma para a parte teórica e duas para os exercícios. Os alunos gostaram de fazer as construções no Geoplano, já que nunca tinham utilizado ou visto este material.

Para facilitar a análise da avaliação em relação a cada questão teremos a Tabela 5.3 e a questão 3 apresenta 100 por cento correta pois é uma questão de nível pessoal. Nesta atividade estavam presentes 109 alunos e todos tentaram realizar.

Questões	**Porcentagemde corretas**	**Porcentagemde parcialmente corretas**	**Porcentagemde erradas**
Questão 1	83,4	14,6	1,8
Questão 2	0	83,4	16,5
Questão 3	100	0	0
Questão 4	14,6	57,7	27,5

Tabela 5.3: Avaliação da Atividade 2.

A Figura 5.3 apresenta uma atividade desenvolvida em sala de aula. As imagens são de um mesmo aluno que terminou todos os itens e a atividade foi bem desenvolvida.

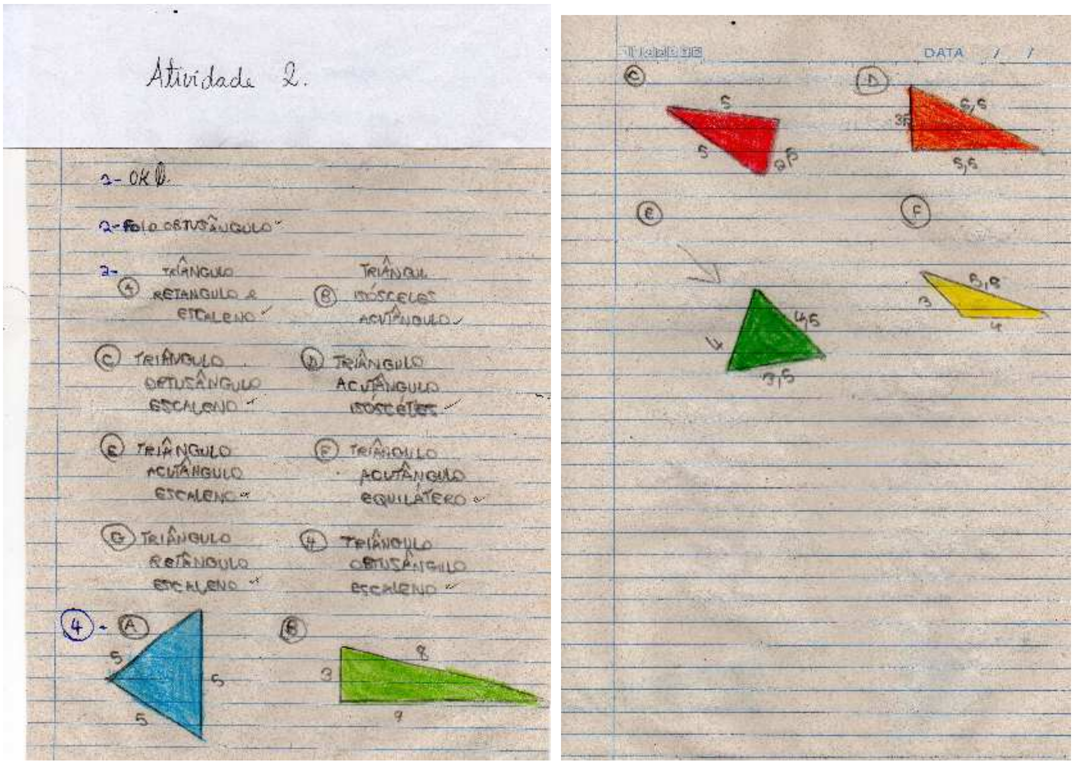


Figura 5.3: Atividade 2 desenvolvida em sala.

A Figura 5.4 nos traz três fotos que ilustram a construção de triângulos no Geoplano, onde a primeira feita pelo autor e as duas seguintes por dois alunos do 6^o ano.

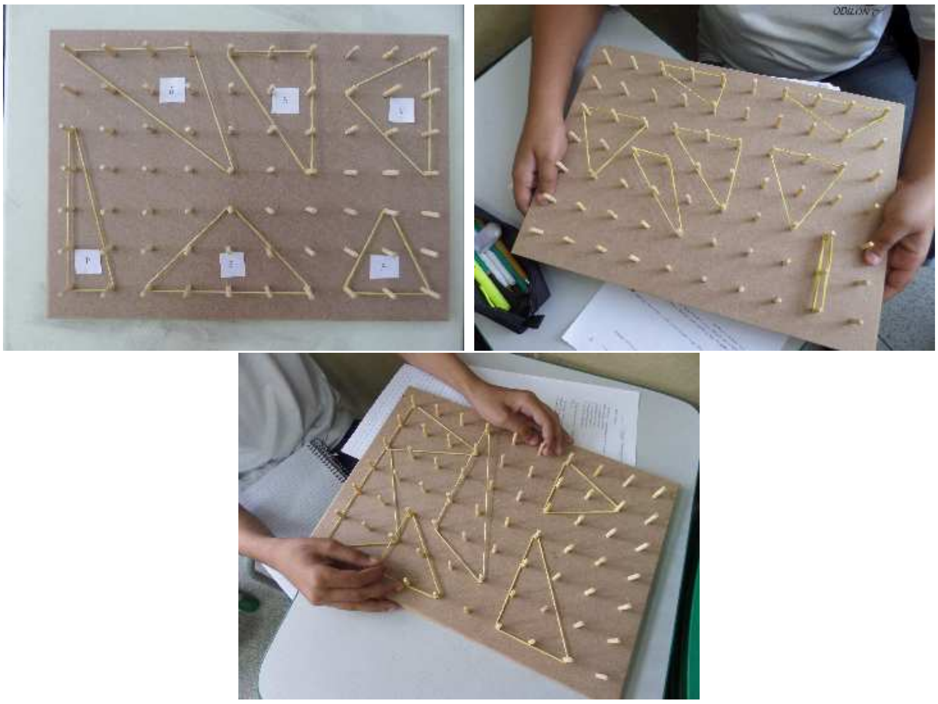


Figura 5.4: Atividade 2 desenvolvida em sala com o Geoplano.

5.2.3 ATIVIDADE 3: Quadriláteros

Objetivos: Fazer com que os alunos aprendam os nomes e características dos principais quadriláteros.

***Parte teórica*:** Um polígono que possui quatro lados é chamado de quadrilátero. Observe que os quadriláteros também possuem quatro ângulos e quatro vértices. Os mais estudados e importantes são:

TRAPÉZIOS: São os quadriláteros que apresentam 1 par de lados paralelos, ou seja, lados que se prolongados não se encontram.

PARALELOGRAMOS: Quadriláteros que apresentam 2 pares de lados paralelos. Entre os paralelogramos temos:

RETÂNGULO: paralelogramos que possuem os quatro ângulos retos.

LOSANGO: paralelogramos que possuem os quatro lados congruentes.

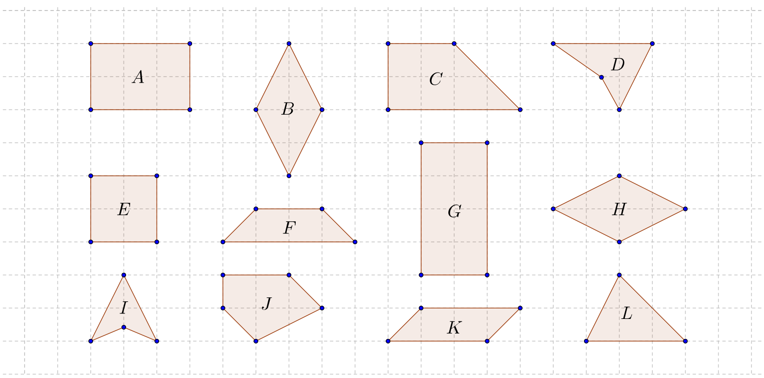
QUADRADO: paralelogramos que possuem os quatros ângulos retos e os quatro lados congruentes.

***Parte prática*:** O aluno deve desenvolver os seguintes itens:

1. Utilize o Geoplano para construir, se possível, os seguintes quadriláteros:
a) Um losango;
b) Um paralelogramo;
c) Um trapézio;
d) Um quadrado;
e) Um retângulo;
f) Um quadrilátero qualquer diferente dos anteriores.

2.Construa utilizando régua os seguintes quadriláteros e coloque as medidas que você utilizou na construção:
a) Um losango;
b) Um paralelogramo;
c) Um trapézio;
d) Um quadrado;
e) Um retângulo;
f) Um quadrilátero qualquer diferente dos anteriores.

3. Indique quais figuras abaixo representam um:
a) triângulo
b) quadrilátero
c) pentágono
d) paralelogramo
e) trapézio
f) retângulo
g) quadrado
h) losango



Avaliação da aplicação: Foram utilizadas três aulas, sendo que uma para a parte teórica e duas para os exercícios. Os alunos foram bem melhor no desenvolvimento desta atividade, já que essa foi a segunda atividade com o Geoplano.

A Figura 5.5 nos traz duas fotos que ilustram a construção de quadriláteros no Geoplano construídas por dois alunos do 6^o ano.

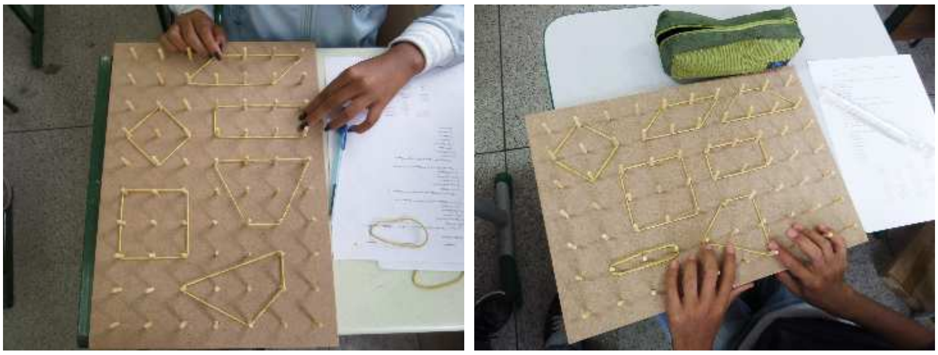


Figura 5.5: Atividade 3 desenvolvidas em sala com o Geoplano.

A Figura 5.6 apresenta uma atividade desenvolvida em sala de aula por um aluno.

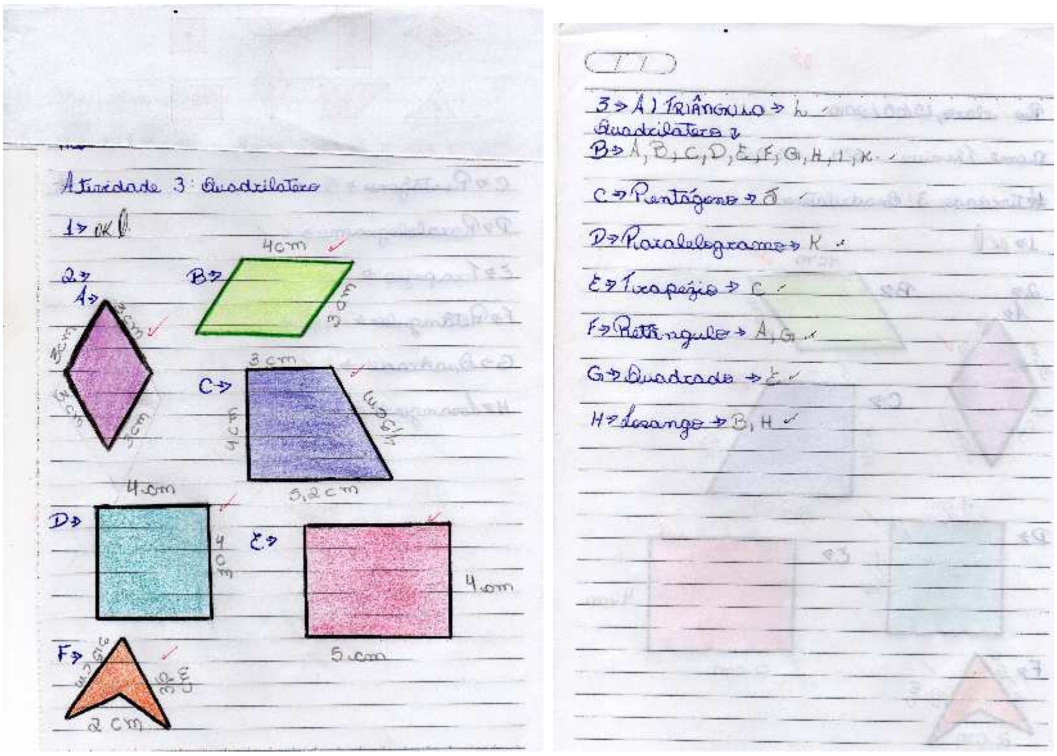


Figura 5.6: Atividade 3 desenvolvida em sala.

Para facilitar a análise da avaliação dessa atividade, apresentaremos a Tabela 5.4. Nesta atividade estavam presentes 114 alunos e todos tentaram realizar.

Questões	**Porcentagemde corretas**	**Porcentagemde parcialmente corretas**	**Porcentagemde erradas**
Questão 1	96,5	3,5	0
Questão 2	10,5	86,8	2,6
Questão 3	0	93	7

Tabela 5.4: Avaliação da Atividade 3.

5.2.4 ATIVIDADE 4: Cálculo de áreas através do Geoplano

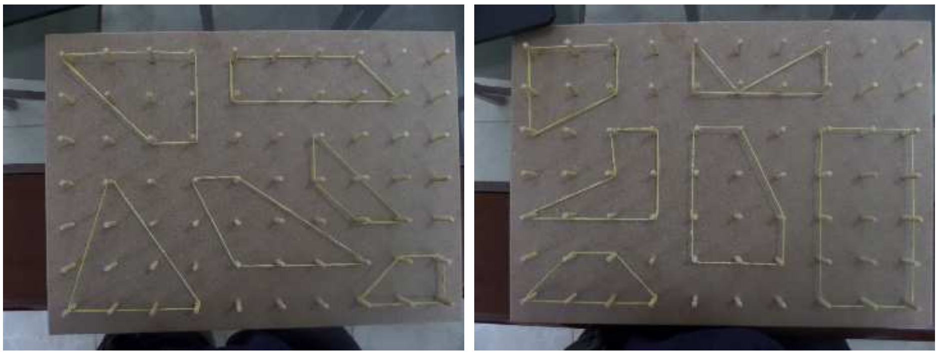
Objetivos: Fazer com que os alunos aprendam a determinar o valor das áreas de determinadas figuras somente utilizando o Geoplano sem fórmula alguma.

Parte prática: Distribuir um Geoplano para cada aluno. Depois o professor deverá construir algumas figuras como nos mostra a Figura 5.7 e pedir para que os alunos construam as mesmas figuras em seus respectivos Geoplanos. Através destas figuras o professor deverá perguntar ao aluno se ele seria capaz de encontrar o valor da área de cada figura construída anteriormente. Caso não tivermos nenhum aluno que saiba calcular, então o professor deverá encontrar o valor de cada área explicando como fazer.

Figura 5.7: Exemplo de construção para a Atividade 4.

Foram elaboradas 4 questões, porém apenas as duas primeiras foram aplicadas e as duas últimas ficam como sugestões para o professor.

1. Construa o mesmo modelo que o professor construir no Geoplano e encontre a área de cada figura construída no seu Geoplano.



2. Construa através do Geoplano três triângulos quaisquer, porém diferentes. Mostre para o professor e depois calcule suas respectivas áreas.

3. Construa através do Geoplano três quadriláteros quaisquer, porém diferentes. Mostre para o professor e depois calcule suas respectivas áreas.

4. Construa através do Geoplano três polígonos quaisquer, porém diferentes. Mostre para o professor e depois calcule suas respectivas áreas.

Avaliação da aplicação: Foram utilizadas duas aulas para explicar a parte teórica e os exercícios. Para facilitar a análise da avaliação em relação a cada questão, apresentaremos a Tabela 5.5. Nesta atividade estavam presentes 108 alunos e somente 1 aluno não entregou a atividade.

Questões	**Porcentagemde corretas**	**Porcentagemde parcialmente corretas**	**Porcentagemde erradas**
Questão 1	0	91	9
Questão 2	12	38	50

Tabela 5.5: Avaliação da Atividade 4.

A Figura 5.8 apresenta uma atividade bem desenvolvida em sala de aula.

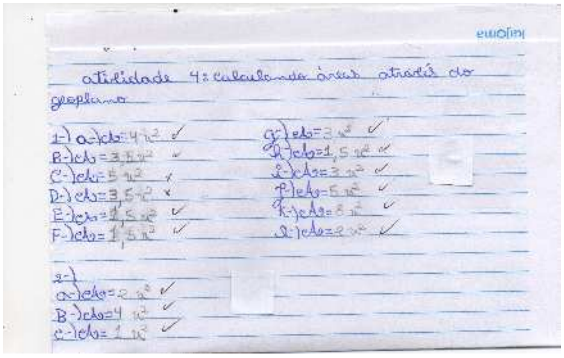


Figura 5.8: Atividade 4 desenvolvida em sala.

5.2.5 ATIVIDADE 5: Cálculo de áreas através da malha quadriculada

Objetivos: Fazer com que os alunos aprendam a determinar o valor das áreas de determinadas figuras somente utilizando a malha quadriculada sem fórmula alguma.

Parte prática: Distribuir uma folha quadriculada para cada aluno. Depois o professor deverá construir algumas figuras, como por exemplo iguais as da Figura 5.9 e pedir para que os alunos construam as mesmas figuras em suas respectivas folhas. Através destas figuras o professor deverá perguntar ao aluno se ele seria capaz de encontrar o valor da área de cada figura construída anteriormente. Se caso não tivermos nenhum aluno que saiba calcular então o professor deverá encontrar o valor de cada área explicando como fazer. É importante fazer com que os alunos consigam verificar que o Geoplano e a malha quadriculada tem a mesma função.

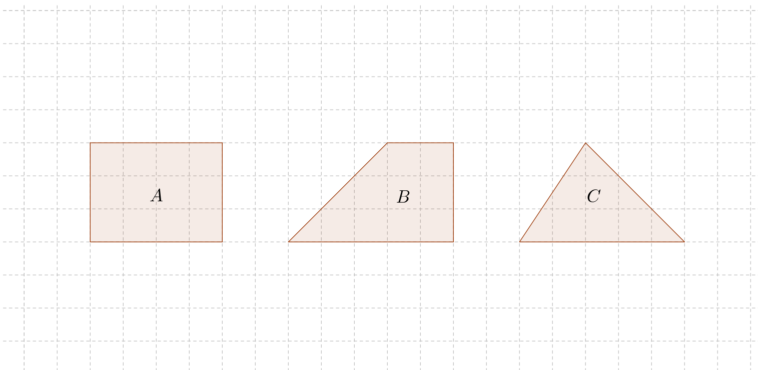
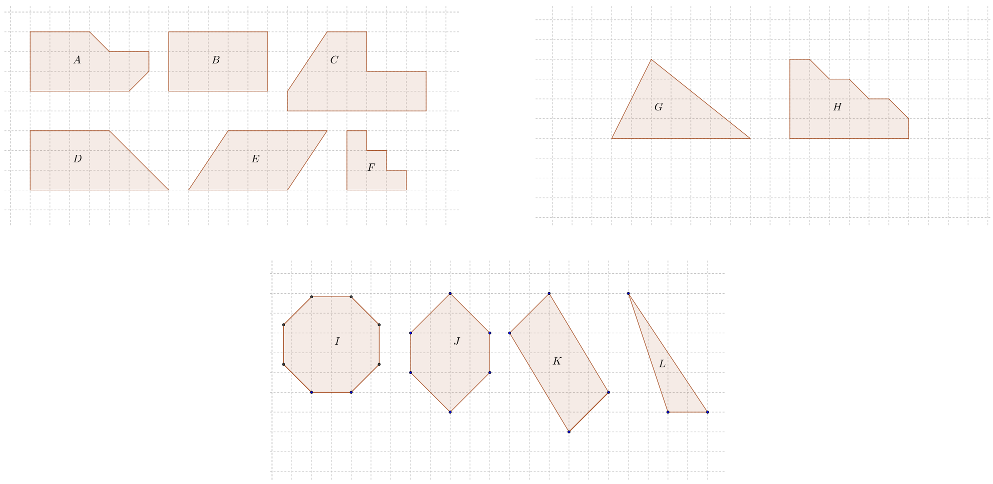


Figura 5.9: Exemplos para a Atividade 5.

O aluno deve desenvolver os itens abaixo. Uma cópia das figuras deverá ser entregue aos alunos para utilizarem no item 1.



1. Encontre a área de cada figura construída na sua malha quadriculada.

2. Construa através da malha quadriculada três triângulos quaisquer, porém diferentes, e calcule suas respectivas áreas.

3. Construa através da malha quadriculada três quadriláteros quaisquer, porém diferentes, e calcule suas respectivas áreas.

4. Construa através da malha quadriculada três polígonos quaisquer, porém diferentes, e calcule suas respectivas áreas.

Avaliação da aplicação: Foram utilizadas duas aulas para explicar a parte teórica e os exercícios. Para facilitar a análise da avaliação em relação a cada questão, teremos a Tabela 5.6. Nesta atividade estavam presentes 115 alunos e todos entregaram a atividade.

Questões	**Porcentagem de corretas**	**Porcentagem de parcialmente corretas**	**Porcentagem de erradas**
Questão 1	0	81,7	18,3
Questão 2	14,8	35,6	49,6
Questão 3	46,1	25,2	28,7
Questão 4	42,6	21,7	35,7

Tabela 5.6: Avaliação da Atividade 5.

A Figura 5.10 apresenta uma atividade bem desenvolvida em sala de aula.

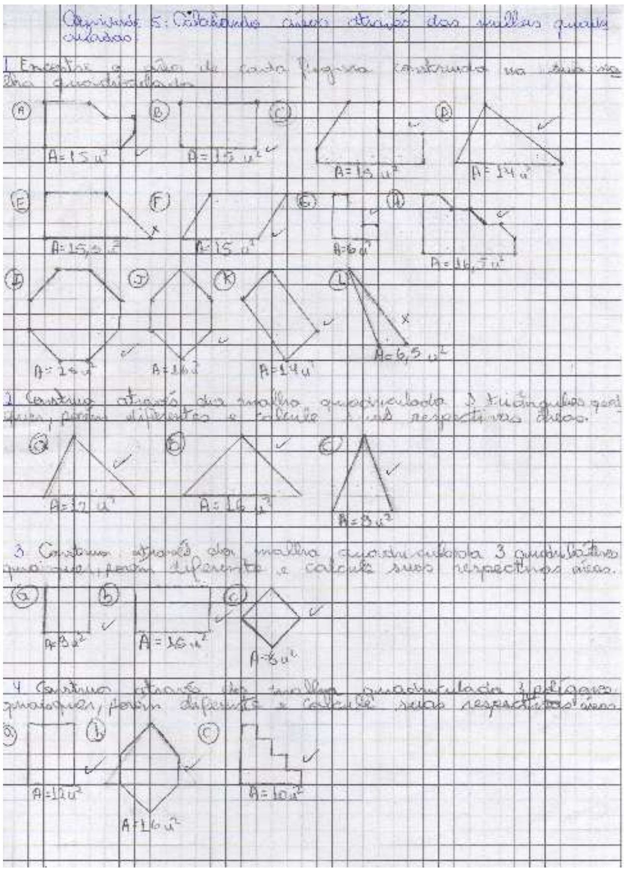


Figura 5.10: Atividade 5 desenvolvida em sala.

5.2.6 ATIVIDADE 6: Cálculo de áreas de qualquer figura através da malha quadriculada

Objetivos: Esta atividade tem como objetivo fazer com que os alunos aprendam a determinar o valor das áreas de figuras que necessáriamente não são polígonos utilizando somente a malha quadriculada sem fórmula alguma.

Parte prática: Nesta atividade é importante o professor entregar uma cópia para cada aluno para exemplificar como se calcula a área de uma figura plana qualquer por aproximações. A Figura 5.11 nos mostra dois exemplos que podem ser utilizados nesta atividade. Através destas figuras o professor deverá perguntar ao aluno se ele seria capaz de encontrar o valor da área de cada figura construída na folha entregue. Se caso não tivermos nenhum aluno que saiba calcular então o professor deverá encontrar o valor de cada área explicando como fazer.

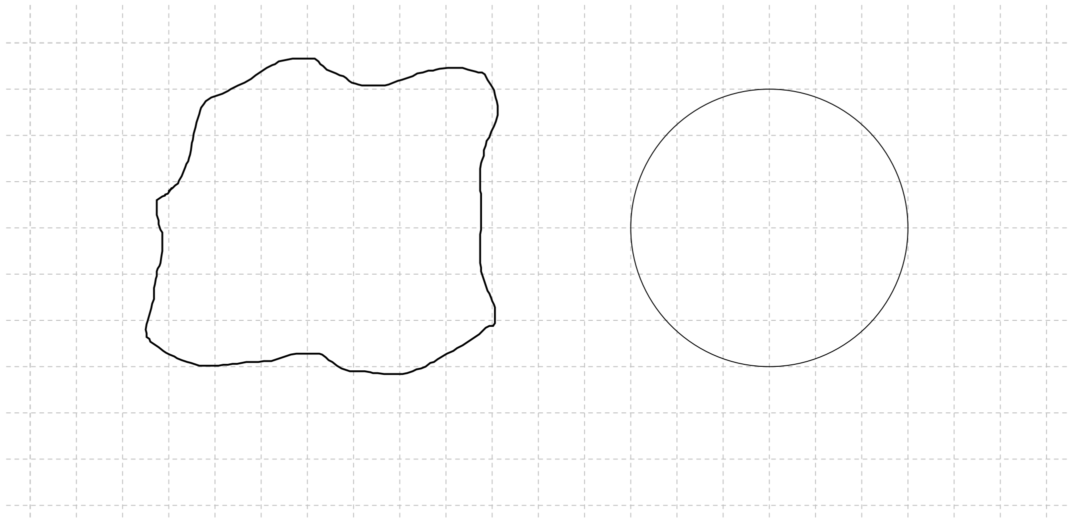
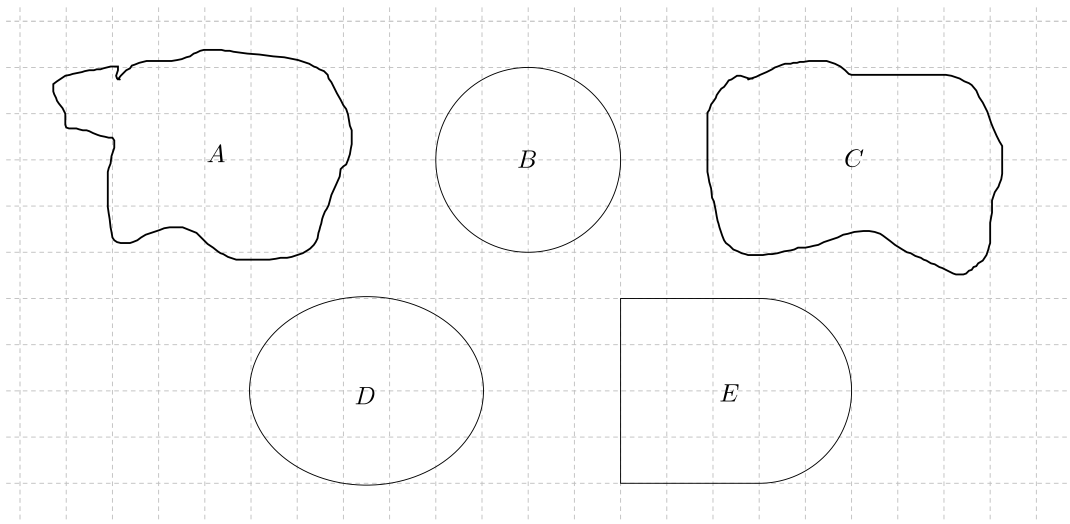


Figura 5.11: Exemplos para a atividade 6.

O aluno deve desenvolver os seguintes itens:

1. Encontre a área aproximada de cada figura construída na sua malha quadriculada.



2. Construa através da malha quadriculada três figuras quaisquer, onde seus lados devem conter partes curvas e retas e depois calcule suas respectivas áreas.

Avaliação da aplicação: Foram utilizadas duas aulas para explicar a parte teórica e os exercícios. Para facilitar a análise da avaliação em relação a cada questão, teremos a Tabela 5.7. Nesta atividade estavam presentes 100 alunos e todos entregaram a atividade.

Questões	**Porcentagem de corretas**	**Porcentagem de parcialmente corretas**	**Porcentagem de erradas**
Questão 1	3	85	12
Questão 2	44	38	18

Tabela 5.7: Avaliação da Atividade 6.

A Figura 5.12 apresenta uma atividade bem desenvolvidada em sala de aula.

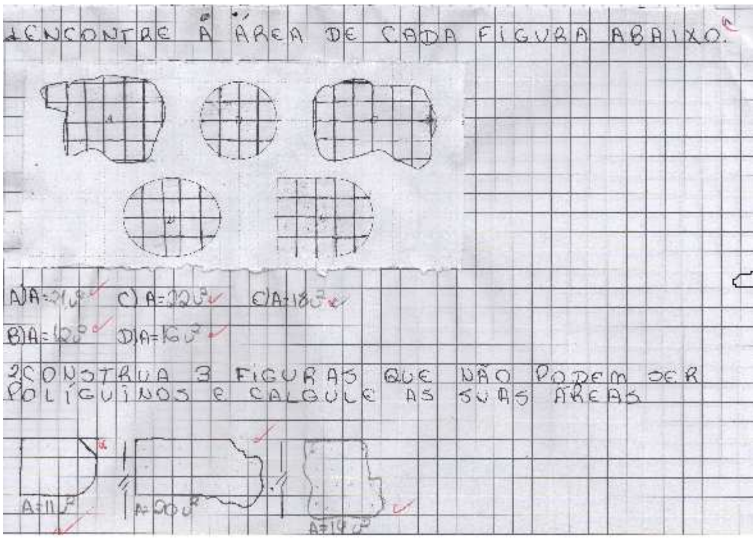


Figura 5.12: Atividade 6 desenvolvida em sala.

5.2.7 ATIVIDADE 7: Aplicação de fórmulas para calcular áreas em exercícios simples

Objetivos: Fazer com que os alunos aprendam a aplicar as principais fórmulas vistas nesta série em exercícios simples.

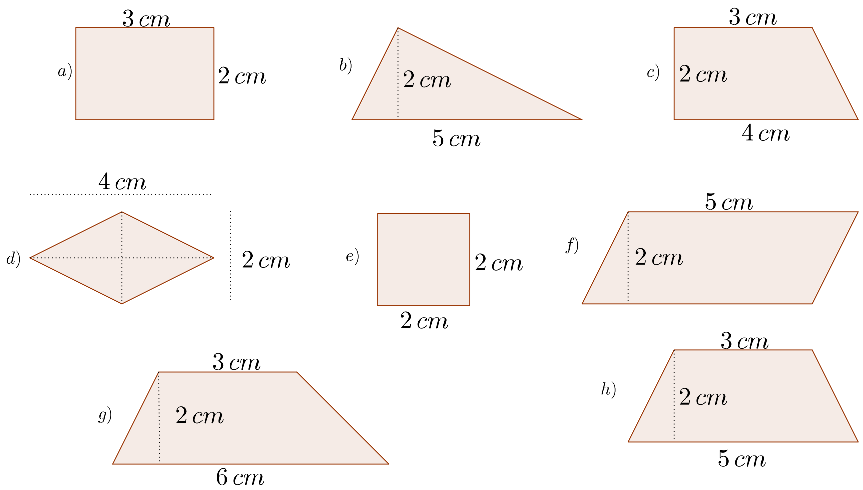
Parte teórica: A Tabela 5.8 nos mostra as áreas que utilizaremos nos itens desta atividade.

Polígonos:	**Medidas:**	**Fórmulas:**
Quadrado	lado l	$S = l^2$
Paralelogramo	comprimento c e altura h	$S = ch$
Retângulo	comprimento c e largura l	$S = cl$
Losango	diagonal maior D e diagonal menor d	$S = \frac{Dd}{2}$
Trapézio	altura h, base maior B e base menor b	$S = \frac{(B+b)h}{2}$
Triângulo	base b e altura h	$S = \frac{bh}{2}$

Tabela 5.8: Algumas fórmulas para a Atividade 7.

Parte prática: O aluno deve desenvolver os seguintes itens:

1. Calcule a área das figuras abaixo utilizando as fórmulas vistas em sala de aula e deixando todos os cálculos em sua folha.



2. Construa cada item abaixo, utilizando régua e depois calcule a área de cada figura construída.
a) Um quadrado de lado 3cm.
b) um retângulo de comprimento 4cm e altura 2cm.
c) um triângulo de base 3cm e altura 6cm.
d) um trapézio de base maior 5cm, base menor 3cm e altura 2cm.
e) um losango de diagonal maior 6cm e diagonal menor 4cm.

Avaliação da aplicação: Foram utilizadas duas aulas para explicar a parte teórica e os exercícios. Para facilitar a análise da avaliação em relação a cada questão, teremos a Tabela 5.9. Nesta atividade estavam presentes 102 alunos e todos entregaram a atividade.

Questões	**Porcentagem de corretas**	**Porcentagem de parcialmente corretas**	**Porcentagem de erradas**
Questão 1	5	60	35
Questão 2	2	42	56

Tabela 5.9: Avaliação da Atividade 7.

A Figura 5.13 apresenta uma atividade bem desenvolvida em sala de aula.

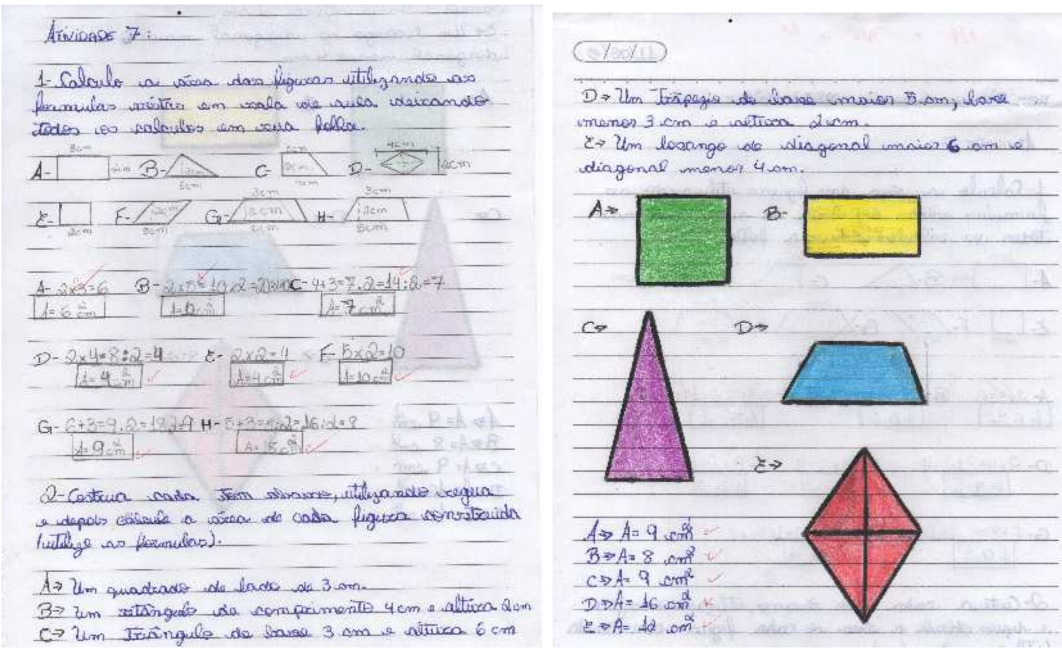


Figura 5.13: Atividade 7 desenvolvida em sala.

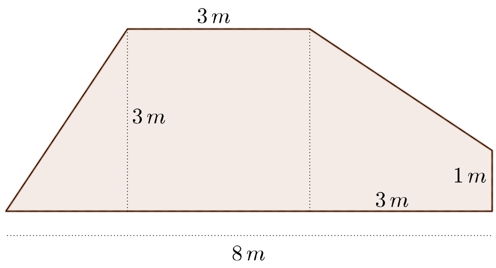
Podemos observar através da Figura 5.13 que o aluno atingiu o objetivo que era encontrar o valor da área, mas é preciso melhorar a escrita matemática. Por exemplo a resposta da questão 1d está da seguinte maneira: 2x4=8:2=4, o que não está escrito corretamente.

5.2.8 ATIVIDADE 8: Aplicação de fórmulas para calcular áreas em problemas

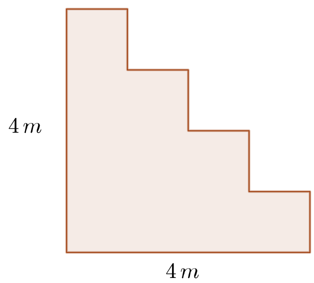
Objetivos: Fazer com que os alunos aprendam a aplicar as principais fórmulas vistas nesta série em problemas diversos.

Parte prática: O aluno deve desenvolver os seguintes itens:

1. João irá comprar um terreno igual a figura abaixo. Ele irá pagar por esse terreno R$ 300,00 por metro quadrado. Quanto João irá pagar por esse terreno inteiro?



2. Qual será a área da escada ilustrada abaixo, sabendo que a parte horizontal e vertical de cada degrau tem a mesma medida ?



Avaliação da aplicação: Foram utilizadas duas aulas para explicar a parte teórica e os exercícios. Para facilitar a análise da avaliação em relação a cada questão, teremos a Tabela 5.10. Nesta atividade estavam presentes 96 alunos e todos entregaram a atividade.

Questões	**Porcentagem de corretas**	**Porcentagem de parcialmente corretas**	**Porcentagem de erradas**
Questão 1	23	19	58
Questão 2	20	1	79

Tabela 5.10: Avaliação da Atividade 8.

Podemos notar que a porcentagem de corretas, tanto para o item 1 como para o item 2 desta atividade, foi baixa. Isso se deve à falta de costume e prática por parte dos alunos em resolverem e interpretarem problemas. Também de um modo geral utilizamos pouco tempo para aplicar as atividades e o ideal seria aumentar esse tempo. É importante que o professor retome com os alunos os principais erros e com isso possa aplicar atividades semelhantes de recuperação reforçando assim o assunto.

A Figura 5.14 apresenta uma atividade desenvolvidada em sala de aula.

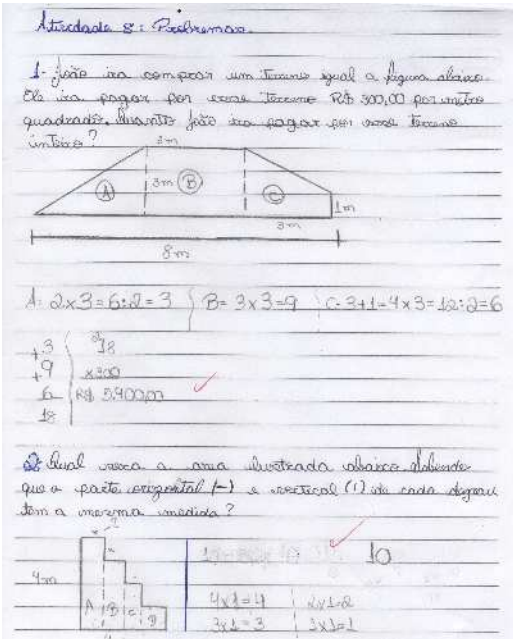


Figura 5.14: Atividade 8 desenvolvida em sala.

5.3 Atividades para o Ensino Médio

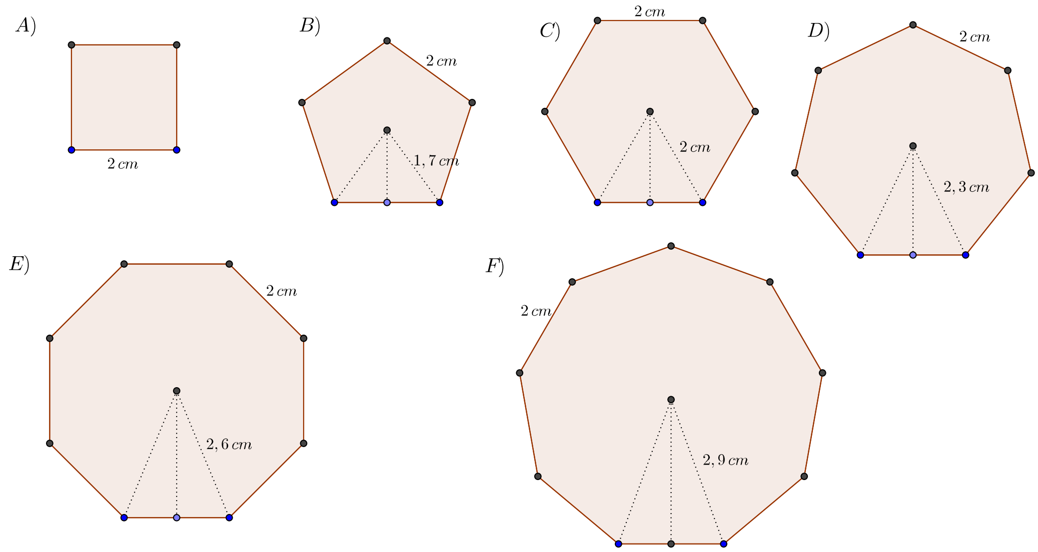
Nesta seção teremos uma proposta de atividade sobre o cálculo da área de alguns polígonos regulares e da circunferência que pode ser aplicada no Ensino Médio. Ela será dividida em três partes para melhor compreensão do aluno. Relembremos que as atividades desta seção não foram aplicadas em sala de aula, porém são propostas ao professor do ensino médio.

5.3.1 ATIVIDADE 1: Área de Polígonos Regulares

Objetivos: Fazer com que os alunos calculem a área de alguns polígonos regulares através da fórmula $S = p.a$, onde a é o comprimento do apótema do polígono, p é o semiperímetro do polígono como já vimos no Capítulo 4 deste trabalho.

Parte prática: Após o professor apresentar a fórmula $S = p.a$ (o ideal seria o professor demonstrar esta fórmula antes), ele pode solicitar aos alunos que resolvam o seguinte exercício.

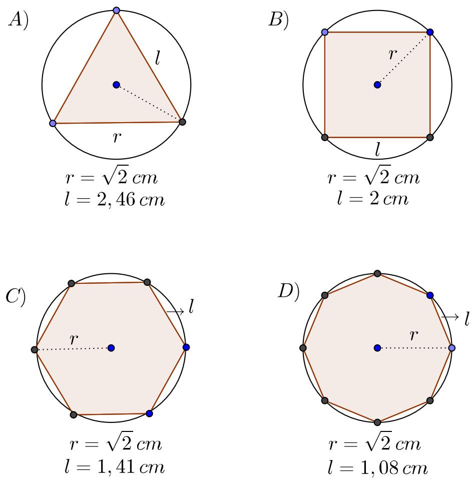
1. Calcule a área de cada polígono regular abaixo utilizando a fórmula $S = p.a$. Utilize calculadora e faça aproximações com no máximo duas casas decimais:



5.3.2 ATIVIDADE 2: Área de polígonos regulares inscritos na circunferência

Objetivos: Fazer com que os alunos calculem a área dos polígonos regulares inscritos numa circunferência comparando a diferença entre as áreas. Comentar sobre o método da exaustão.

Parte prática: 1. Calcule a área de cada polígono regular e depois calcule a diferença entre a área de cada polígono e a área da circunferência.



2. Responda as seguintes questões:

a) Compare as diferenças encontradas no exercício 1. O que está acontecendo com

essas diferenças?
b) O que vai acontecer com esta diferença se o polígono tiver 20 lados? E se tiver 100 lados? E se o números de lados tender ao infinito?

Na sequências teremos algumas considerações finais.

6 Considerações Finais

Neste trabalho propusemos uma abordagem para o ensino-aprendizagem do cálculo de áreas de figuras planas e espaciais no EF e EM de uma maneira que geralmente não são encontradas nos livros e apostilas adotadas pelas escolas do Estado de São Paulo. Iniciamos a parte prática com três atividades que tinham por objetivo fixar nomes e alguns conceitos importantes sobre polígonos. Na sequências as atividades 4,5 e 6 tinham como objetivo fazer com que os alunos calculassem as áreas de algumas figuras planas (polígonos ou não) através do Geoplano e malhas quadriculadas de maneira intuitiva sem fórmula alguma. Somente nas duas últimas atividades os alunos trabalharam com exercícios simples e até problemas envolvendo áreas através de várias fórmulas vistas no EF.

Sugerimos ao professor que for trabalhar de maneira semelhante utilizando as atividades prospostas que aumente o número de aulas trabalhadas, para que os alunos possam compreender e fixar melhor o conteúdo estudado. Também é interessante trabalhar outras atividades envolvendo o uso de régua, já que muitos alunos geralmente tem esta dificuldade. Importante que o professor devolva as atividades para cada aluno e faça uma correção comentando os principais erros e em um segundo momento reaplique novas atividades semelhantes para verificar se realmente melhorou a compreensão dos alunos. Se possível vale apena após estas atividades montar uma aula com a parte histórica, mostrando para os alunos como alguns povos trabalhavam na antiguidade.

Em relação ao material didático analisado, é muito importante que o professor, principalmente os do Estado de São Paulo que devem trabalhar com as apostilas, nunca sigam apenas um material para montar suas aulas e sim consulte pelo menos dois, como exemplo a apostila do estado e o livro que a escola adotou para o atual ano letivo, ou que o professor siga dois livros didáticos.

Já a maioria das demonstrações vistas neste trabalho podem ser apresentadas para os alunos do EM como aprendizagem e até mesmo curiosidade, já que geralmente não são apresentadas nos materiais didáticos. Outra sugestão é que para as escolas que tem laboratórios de informática, que o professor trabalhe com algumas atividades envolvendo áreas através do GeoGebra, que é um software gratuíto.

Esperamos assim, com este trabalho, não apenas incentivar o professor a trabalhar de forma diferenciada e motivadora, mas também contribuir para que desperte no aluno um grande gosto e compreensão dos conteúdos matemáticos, estimulando seu interesse pela disciplina. Esperamos também que este trabalho tenha sido útil para o aprendizado do leitor.

Referências

[1] BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1974.

[2] GOMES, K. *A Quadratura das Lunas de Hipocrates de Chios*. [S.l.], < www.fe.unicamp.br/cempem/lapemmec/cursos/el654/alunos/kleber/lunas %20hipocrates.pdf>. Acesso em 08 / 07/ 2015.

[3] JOSÉ, R. G. J.; CASTRUCCI, B. *A conquista da Matemática*. São Paulo: Editora FTD, 2009.

[4] ANDRINI, Á.; VASCONCELOS, M. J. *Praticando Matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora Brasil S.A., 2012.

[5] SÃO PAULO, Caderno do Aluno - Ensino Fundamental - Anos Finais. São Paulo (Estado): São Paulo SEE, 2014–2017.

[6] DANTE, L. R. *Matemática Contexto e Aplicações*. 1. ed. São Paulo: Editora Ática., 2011.

[7] BARRETO, B. F.; SILVA, C. X. *Matemática Aula por Aula - Volumes 1,2 e 3*. São Paulo: FTD, 2009.

[8] SÃO PAULO, Caderno do Aluno - Ensino Médio. São Paulo (Estado): São Paulo SEE, 2014–2017.

[9] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar (Trigonometria)*. São Paulo: Atual Editora, 1977 – 78.

[11] [S.l.], < http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2009/12/ demonstracao–formula–da–area–da–esfera.html>. Acesso em 08 / 07/ 2015.

[12] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana*. 7. ed. São Paulo: Editora Saraiva S.A., 2000.

[13] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar (Geometria Plana)*. São Paulo: Atual Editora, 1977 – 78.

[14] BALDIN, Y. Y.; FURUYA, Y. K. S. *Geometria Analítica Para Todos*. São Carlos: EduFSCar, 2011.

[15] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar (Geometria Espacial)*. São Paulo: Atual Editora, 1978.

[16] PECORARI, M. *Logaritmos e Aplicações*. São Paulo: Dissertação (Mestrado)-PROFMAT, UNESP, Rio Claro, 2013.

[17] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1. ed. São Paulo: SBM, 2013.

[18] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo - Volume 1*. 5. ed. São Paulo: LTC, 2001.

[19] IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar (Limites, Derivadas, Noções de Integral)*. São Paulo: Atual Editora, 1977.

A Algumas Noções de Cálculo Diferencial e Integral

Esta parte do trabalho será baseada nas referências [16], [17], [18] e [19]. Como o objetivo é apresentar as ferramentas utilizadas no trabalho, omitiremos as demonstrações, que podem ser encontradas nas referências citadas.

O conceito de limite é o mais fundamental do Cálculo Diferencial e Integral, já que é nele que se baseiam na Matemática atual as definições de convergência, continuidade, derivada e integral.

A.1 Noção de limite de uma função real

Antes de introduzir o conceito de limites, vamos dar uma ideia intuitiva através de um exemplo. Seja a função $f(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)}$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 1$. Se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador por $x - 1$ e vemos que a função f se comporta como a função $g(x) = 2x + 1$. Estudemos os valores da função f quando x assume valores próximos de 1, mas diferentes de 1.
Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Se atribuirmos a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Podemos observar que nas duas tabelas, quando x se aproxima cada vez mais de 1, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 3, ou seja, quanto mais próximo de 1 estiver x, tanto mais próximo de 3 estará $f(x)$.

Notemos na primeira tabela que:

$$x = 0,9 \Rightarrow f(x) = 2,8, \text{ ou seja, } x - 1 = -0,1 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,2,$$
$$x = 0,99 \Rightarrow f(x) = 2,98, \text{ ou seja, } x - 1 = -0,01 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,02,$$
$$x = 0,999 \Rightarrow f(x) = 2,998, \text{ ou seja, } x - 1 = -0,001 \Rightarrow f(x) - 3 = -0,002.$$

Da segunda tabela temos:

$$x = 1,1 \Rightarrow f(x) = 3,2, \text{ ou seja, } x - 1 = 0,1 \Rightarrow f(x) - 3 = 0,2,$$
$$x = 1,01 \Rightarrow f(x) = 3,02, \text{ ou seja, } x - 1 = 0,01 \Rightarrow f(x) - 3 = 0,02,$$
$$x = 1,001 \Rightarrow f(x) = 3,002, \text{ ou seja, } x - 1 = 0,001 \Rightarrow f(x) - 3 = 0,002.$$

Logo, pelas duas tabelas vemos que:

$$|x - 1| = 0,1 \Rightarrow |f(x) - 3| = 0,2,$$
$$|x - 1| = 0,01 \Rightarrow |f(x) - 3| = 0,02,$$
$$|x - 1| = 0,001 \Rightarrow |f(x) - 3| = 0,002.$$

Observe que podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 3 quanto desejarmos, bastando para isto tomarmos x suficientemente próximo de 1. Um outro modo de dizermos isto é: podemos tornar o módulo da diferença entre $f(x)$ e 3 tão pequeno quanto desejarmos desde que tomemos o módulo da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Utilizando uma linguagem matemática para o exemplo acima, vamos usar símbolos para indicar essas diferenças pequenas. Os símbolos usualmente são as letras gregas ε (epsilon) e δ (delta).

Assim, dado um número positivo ε, se desejarmos $|f(x) - 3|$ menor que ε, devemos tomar $|x - 1|$ suficientemente pequeno, isto é, devemos encontrar um número positivo δ, suficientemente pequeno, de tal modo que

$$0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

A condição $0 < |x - 1|$ é neste caso equivalente a $0 \neq |x - 1|$, isto é, $x \neq 1$, porque estamos interessados nos valores de $f(x)$, quando x está próximo de 1, não importando o que acontece para $x = 1$. É importante perceber que δ depende do ε considerado. Notando que f é crescente, nas duas tabelas vemos que:

1. Se $|x - 1| = 0,1 \Rightarrow |f(x) - 3| = 0,2$, então se for dado $\varepsilon = 0,2$, tomamos $\delta = 0,1$ e afirmamos que $0 < |x - 1| < 0,1 \Longrightarrow |f(x) - 3| < 0,2$.

2. Se $|x - 1| = 0,01 \Rightarrow |f(x) - 3| = 0,02$, então se for dado $\varepsilon = 0,02$, tomamos $\delta = 0,01$ e afirmamos que $0 < |x - 1| < 0,01 \Longrightarrow |f(x) - 3| < 0,02$.

3. Se $|x-1| = 0,001 \Rightarrow |f(x)-3| = 0,002$, então se for dado $\varepsilon = 0,002$, tomamos $\delta = 0,001$ e afirmamos que $0 < |x-1| < 0,001 \Longrightarrow |f(x)-3| < 0,002$.

Notemos que, dado ε, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Generalizando, afirmamos que, qualquer que seja o valor positivo ε, podemos tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ de modo que

$$0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |f(x)-3| < \varepsilon.$$

De fato,

$$\begin{aligned} 0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} &\Longrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Longrightarrow 2|x-1| < \varepsilon \Longrightarrow |2x-2| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |2x+1-3| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x)-3| < \varepsilon \end{aligned}$$

Agora vejamos qual é o significado do ε e δ através da Figura A.1.

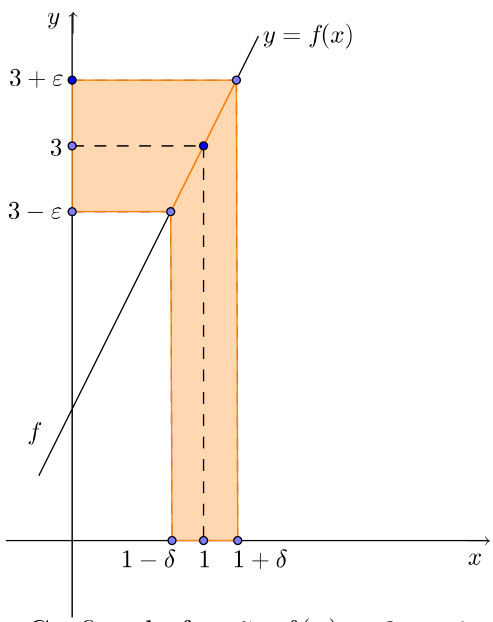


Figura A.1: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

Note que

$$\begin{aligned} 0 < |x-1| < \delta &\Longleftrightarrow 1-\delta < x < 1+\delta \quad \text{e} \quad x \neq 1 \\ \text{e} \quad |f(x)-3| < \varepsilon &\Longleftrightarrow 3-\varepsilon < f(x) < 3+\varepsilon. \end{aligned}$$

Para todo x entre $1-\delta$ e $1+\delta$ e $x \neq 1$, temos os valores de $f(x)$ entre $3-\varepsilon$ e $3+\varepsilon$.

Observe que o valor considerado $\frac{\varepsilon}{2}$ para δ não é único. Por exemplo, se considerarmos $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{3}$ teremos também

$$0 < |x-1| < \delta_1 = \frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow |f(x)-3| < \varepsilon.$$

De fato:

$$0 < |x-1| < \delta_1 = \frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow$$
$$2|x-1| < \frac{2\varepsilon}{3} \Longrightarrow |2x-2| < \frac{2\varepsilon}{3} \Longrightarrow |2x+1-3| < \frac{2\varepsilon}{3} \Longrightarrow$$
$$|f(x)-3| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \Longrightarrow |f(x)-3| < \varepsilon.$$

Considerando $\delta_1 < \delta$, percebemos que o intervalo de extremos $1-\delta_1$ e $1+\delta_1$ está contido no intervalo de extremos $1-\delta$ e $1+\delta$ e, portanto, todo x que satisfaz $1-\delta_1 < x < 1+\delta_1$ e $x \neq 1$ satisfará $1-\delta < x < 1+\delta$ e $x \neq 1$ e consequentemente, teremos $3-\varepsilon < f(x) < 3+\varepsilon$.
Desde que, para qualquer valor positivo ε, podemos encontrar um valor aproximado para δ tal que $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-3| < \varepsilon$ e dizemos que o limite de $f(x)$, para x tendendo a 1, é 3, ou seja,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$$

Definição A.1. *Seja $I =]a,b[$ um intervalo aberto contendo l e seja f uma função definida em I, exceto possivelmente em $x = l$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x se aproxima de l pela direita, será L e escrevemos*

$$\lim_{x\to l^+} f(x) = L$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que se $x \in]a,b[$ e $0 < x-l < \delta$ então $|f(x)-L| < \varepsilon$. L também é chamado de limite lateral à direita. O limite de $f(x)$, quando x se aproxima de l pela esquerda será M e escrevemos

$$\lim_{x\to l^-} f(x) = M$$

quando, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que se $x \in]a,b[$ e $-\delta < x-l < 0$ então $|f(x)-M| < \varepsilon$. M também é chamado de limite lateral à esquerda.

Teorema A.1. *O limite, quando existe, é único.*

Teorema A.2. *Seja I um intervalo aberto contendo l e seja f uma função definida para $x \in I$ exceto possivelmente em $x = l$. Temos $\lim_{x\to l} f(x) = L$ se, e somente se, existirem $\lim_{x\to l^+} f(x)$ e $\lim_{x\to l^-} f(x)$ e forem ambos igual a L.*

Algumas propriedades importantes sobre limites estão descritas na sequência.

Proposição A.1. *Sejam f, g duas funções tais que existam os limites $\lim_{x\to l} f(x)$ e $\lim_{x\to l} g(x)$, e seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante, então:*

1. *Se h é a função definida por $h(x) = c$ onde $c \in \mathbb{R}$, para todo x real então $\lim_{x\to l} c = c$.*

2. $\lim\limits_{x\to l}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to l} f(x) + \lim\limits_{x\to l} g(x).$

3. $\lim\limits_{x\to l}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to l} f(x) - \lim\limits_{x\to l} g(x).$

4.$\lim\limits_{x\to l}[cf(x)] = c\lim\limits_{x\to l} f(x).$

5.$\lim\limits_{x\to l}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to l} f(x).\lim\limits_{x\to l} g(x).$

6.$\lim\limits_{x\to l}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim\limits_{x\to l} f(x)}{\lim\limits_{x\to l} g(x)}, \quad se \quad \lim\limits_{x\to l} g(x) \neq 0.$

Teorema A.3. ***(do Confronto)*** *Se f, g, h são funções tais que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ para todo $x \in I - \{l\}$ onde I é o intervalo aberto que contém l e se $\lim\limits_{x\to l} g(x) = \lim\limits_{x\to l} h(x) = b$ então $\lim\limits_{x\to l} f(x) = b$.*

Teorema A.4. *Se $\lim\limits_{x\to l} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x\to l} g(x) = c$, com $b < c$ então existe um intervalo aberto I contendo l, tal que $f(x) < g(x)$ em $I - \{l\}$.*

A.1.1 Limites no Infinito

Definição A.2. *Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]l, +\infty[$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,$$

quando, para qualquer número $\varepsilon > 0$, existir $N > 0$ tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Um exemplo está ilustrado através da Figura A.2, que foi utilizado nas demonstrações das áreas do quadrado e do retângulo no capílulo 4, páginas 43 a 45.

Definição A.3. *Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]-\infty, l[$. Dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,$$

quando, para qualquer número $\varepsilon > 0$, existir $N < 0$ tal que se $x < N$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Note que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$$

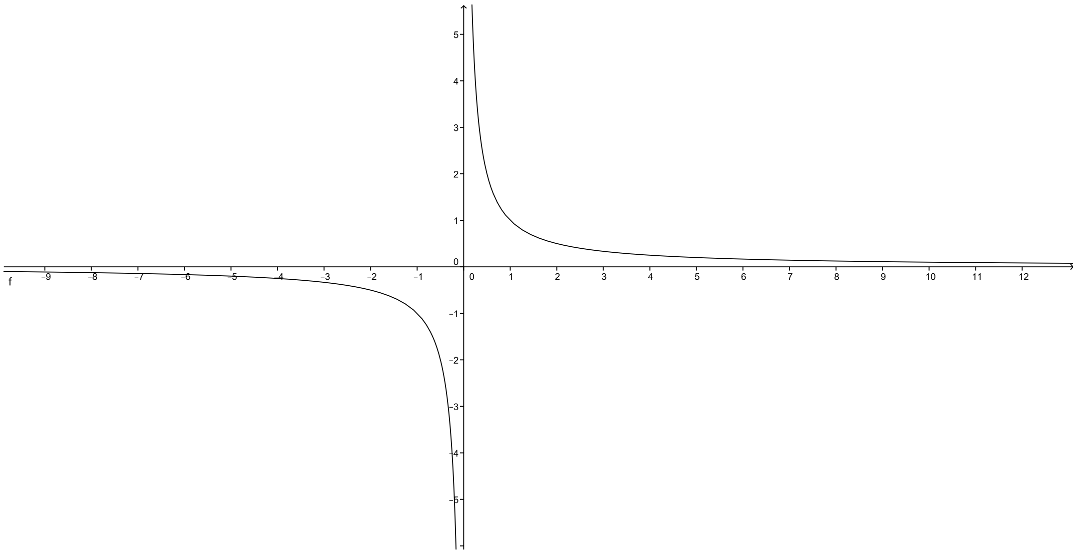


Figura A.2: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

A.2 Continuidade

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$. Note que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = 2(0) + 1 = f(0).$$

Esse tipo de função é chamada de função contínua no ponto 0, isto é, o limite da função, quando x tende a 0 é o valor da função em 0. ($\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$).

Definição A.4. *Sejam f uma função definida em um intervalo aberto I e $l \in I$. Dizemos que f é contínua em l quando*

$$\lim_{x \to l} f(x) = f(l).$$

A continuidade da função em um ponto é estudada apenas para pontos do domínio da função.

Proposição A.2. *Se f e g são funções contínuas em l e se c for uma constante, então as seguintes funções são contínuas em l :*

1. $f + g$,
2. $f - g$,
3. $c.f$,
4. $f.g$,
5. $\frac{f}{g}$ *se* $g(l) \neq 0$.

O próximo teorema é um resultado importante do Cálculo que vale para funções contínuas.

Teorema A.5. *(do Valor Intermediário) Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$ onde $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em $]a, b[$ tal que $f(c) = N$.*

A.3 Derivada

A.3.1 Conceito de Derivada

O resultado importante desta seção facilita o cálculo de algumas áreas planas, que é o objetivo deste trabalho. Este resultado é conhecido como **Teorema Fundamental do Cálculo**. Este resultado relaciona os conceitos de integração e derivação. Portanto, precisamos definir derivada de uma função e apresentar algumas propriedades.

Definição A.5. *Sejam f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I. Chama-se **derivada** de f no ponto x_0 o limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

se existir e for finito.

Usaremos a notação $f'(x_0)$ para indicar a derivada de f no ponto x_0. Dizemos que f é derivável no intervalo aberto I quando existir $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

Como exemplo vamos considerar novamente a função $f(x) = 2x + 1$ e calcularmos a derivada dessa função no ponto $x_0 = 1$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x + 1) - (2.1 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2.$$

Podemos interpretar geometricamente a derivada de uma função.

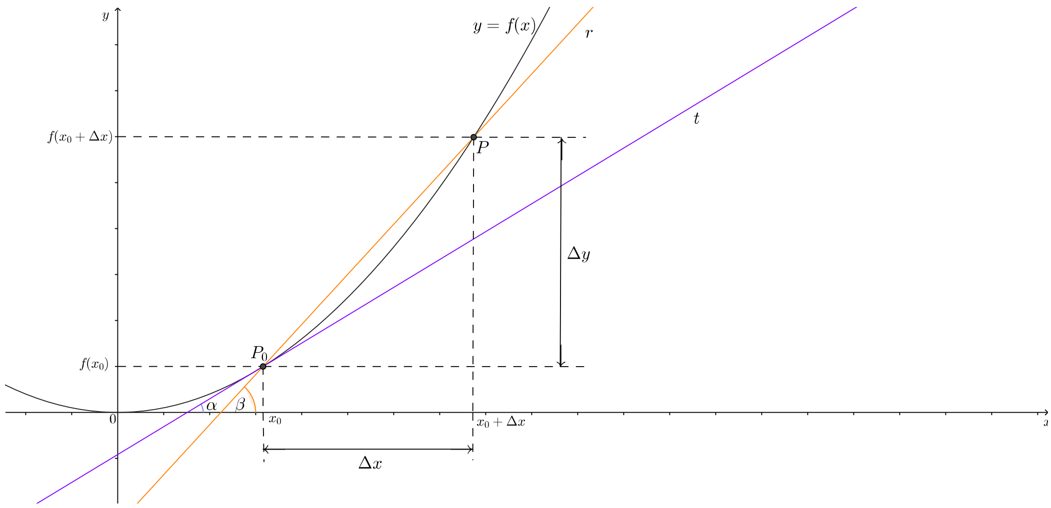


Figura A.3: Ilustração da interpretação geométrica da derivada.

Note que o quociente $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ representa geometricamente o coeficiente angular (β) da reta secante (reta r) ao gráfico de $y = f(x)$, que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Quando Δx tende a 0 nota-se que $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tende ao coeficiente angular (α) da tangente (reta t) ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$. Se chamarmos $x - x_0 = \Delta x$ poderemos também escrever a derivada como sendo:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

A.3.2 Função Derivada

Seja f uma função derivável no intervalo aberto I. Se para cada $x_0 \in I$ existir, e sabemos que é único, o limite:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

então podemos definir uma função $f' : I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x_0 \in I$ a sua derivada $f'(x_0)$ no ponto x_0. Esta função é chamada função derivada de f ou, simplesmente, derivada de f. A lei $f'(x)$ pode ser determinada a partir da lei $f(x)$, aplicando-se a definição de derivada de uma função, num ponto genérico $x \in I$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

A.3.3 Regras de Derivação

Dados $I \subset \mathbb{R}$ e $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$, duas funções deriváveis, então:

1. A soma $f(x) = u(x) + v(x), \forall x \in I$ é derivável e vale $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

2. O produto $f(x) = u(x).v(x), \forall x \in I$ é derivável e vale

$$f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x).$$

3. Se $v(x) \neq 0, \forall x \in I$ o quociente se $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ então

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

4. Derivada de uma função composta (Regra da Cadeia): Seja $f : A \to B$ uma função dada tal que $y = f(x)$. Seja $g : B \to C$ uma função dada por $z = g(y)$. Considere a função composta $F : A \to C$ tal que $F(x) = g(f(x))$. Se f for derivável no ponto x e g for derivável no ponto $y = f(x)$ então F também é derivável em x e sua derivada é:

$$F'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Como exemplo, considere $f(x) = (x^3 + 2)^2$. Neste caso $f(x) = h(g(x))$, onde $g(x) = x^3 + 2$ e $h(x) = x^2$. Então $f'(x) = 2(x^3 + 2)(3x^2) = 6x^5 + 12x^2$.

A.4 Integral

Nesse trabalho foram apresentadas várias fórmulas para calcular as áreas de polígonos, círculos e até algumas figuras curvas, fechadas e planas através de malhas quadriculadas. Porém para determinarmos exatamente o valor da área de figuras, cujos contornos não são segmentos de retas, precisamos utilizar o conceito de integral.

Vamos supor por exemplo que desejamos encontrar o valor da área S da região sob o gráfico da função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, onde $f(x) \geqslant 0$. (veja a Figura A.4).

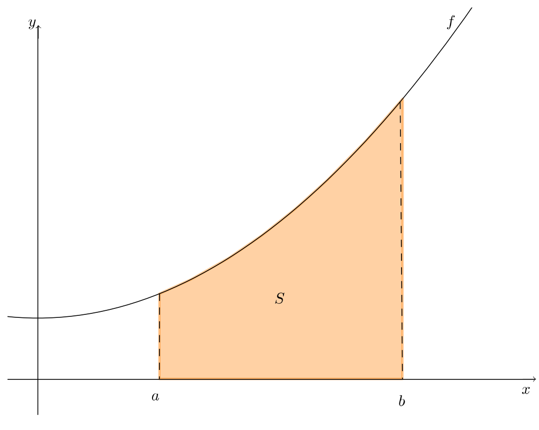


Figura A.4: Ilustração da região S sob o gráfico de uma função.

Para determinarmos a área sob o gráfico do exemplo anterior, vamos primeiramente relembrar que a área de um retângulo é determinada através da multiplicação do comprimento da base pelo o comprimento da altura. Se f fosse uma função constante e igual a k em $[a, b]$, a área procurada seria a área de um retângulo de altura k e base $b - a$ e então: $S = k(b - a)$. (veja a Figura A.5).

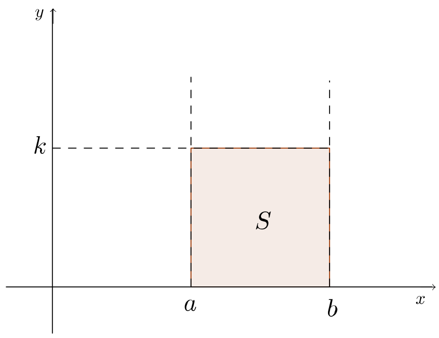


Figura A.5: Ilustração do região S sob o gráfico de uma função constante.

Agora se f não for constante, dividimos o intervalo $[a, b]$ em pequenos subintervalos. Para fazer isto considere o conjunto de pontos $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ de forma que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

O conjunto desses pontos $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ é chamado de partição de $[a, b]$. O intervalo $[a, b]$ fica dividido em subintervalos de comprimentos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$. Escolhemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ e consideremos $f(x_i^*)$.

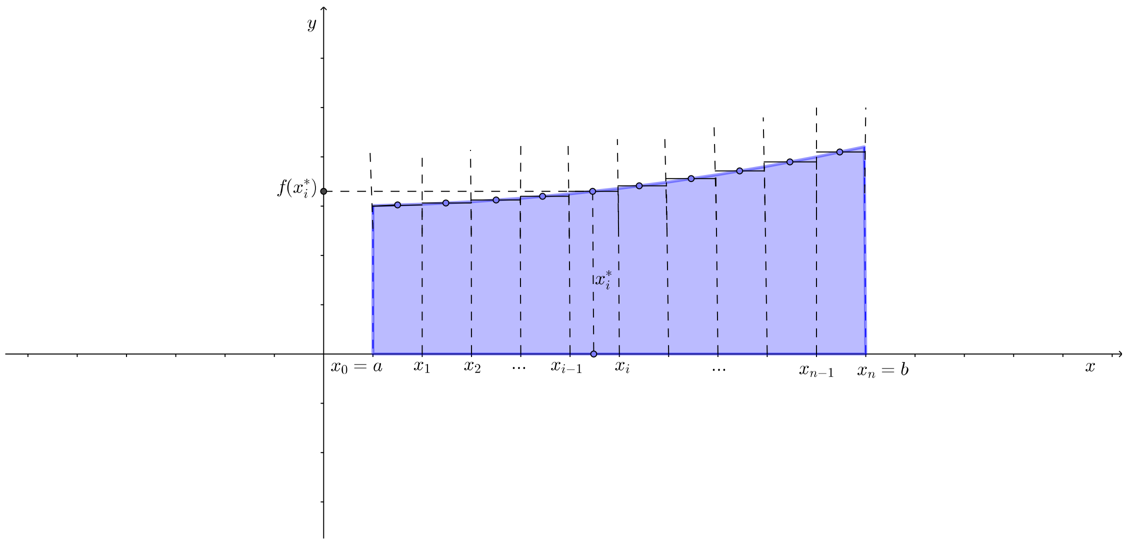


Figura A.6: Ilustração da Soma de Riemann.

A área S é aproximadamente a soma das áreas dos retângulos e escrevemos:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Através da Figura A.6, podemos ver graficamente o que acabamos de descrever e essa soma é conhecida como Soma de Riemann da função f relativa à partição P e aos pontos x_i^*.

À medida que dividimos cada vez mais o intervalo $[a, b]$, a área dada pela soma das áreas dos retângulos se aproxima mais da área procurada. Podemos então definir a área da região que está sob o gráfico de uma função contínua como o limite das somas das áreas dos retângulos caso ele exista, isto é,

$$S = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i,$$

onde $\|P\| = \max\{\Delta x_i\}$.

Definição A.6. *Se f é uma função contínua definida em $[a, b]$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento igual a $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ os extremos desses subintervalos e escolhemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Então a integral definida de f de a para b é dada por:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i. \tag{A.1}$$

Definição A.7. *Dizemos que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$ se o limite em* (A.1) *existir e for finito.*

Vamos ver algumas propriedades da Integral Definida.

Proposição A.3. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis, então:*

1. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$,
2. *Se* $a = b$ *então* $\Delta x = 0$ *e* $\int_a^b f(x)\, dx = 0$,
3. $\int_a^b c\, dx = c.(b - a)$ *onde* c *é qualquer constante,*
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$,
5. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$,
6. $\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$,
7. *Se* $f(x) \geqslant 0$ *para* $a \leqslant x \leqslant b$ *então* $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$,
8. *Se* $f(x) \geqslant g(x)$ *para* $a \leqslant x \leqslant b$ *então* $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$,
9. *Se* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *para* $a \leqslant x \leqslant b$ *então* $m.(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant M.(b - a)$.

A.4.1 Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo é um resultado que relaciona o conceito de integral e derivada e será apresentado na sequência em duas partes.

Teorema A.6. ***(Fundamental do Cálculo)*** 1^a *parte: Se f for contínua em $[a,b]$ então a função g definida por*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,\ x \in [a,b],$$

é contínua em $[a,b]$, diferenciável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$.

Demonstração. Precisamos mostrar primeiro que g é contínua em $[a,b]$. Para isto basta mostrar que $\lim\limits_{h\to 0} |g(x+h) - g(x)| = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Por hipótese f é contínua em $[a,b]$, logo existe o $\max\{|f(t)|; t \in [a,b]\} = L$.

Tome $x \in [a,b]$ arbitrário e dado $\varepsilon > 0$, considere $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$, assim para $|h| < \delta$, temos:

$$|g(x+h) - g(x)| = \left|\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right|,$$

pela Propriedade 6 da integral segue que:

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| = \\ \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt\right| \leqslant \\ \leqslant L\left|\int_x^{x+h} dt\right| = L|h| < L\delta < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Agora, sejam $x \in [a,b]$ e h suficientemente pequeno de forma que $x+h \in (a,b)$ então:

$$g(x+h) - g(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Logo, para $h \neq 0$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt. \tag{A.2}$$

Vamos assumir que $h > 0$. Uma vez que f é contínua em $[x, x+h]$ o Teorema do Valor Extremo estabelece que há números u e v em $[x, x+h]$ tais que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde m e M são valores mínimo e máximo absolutos de f em $[x, x+h]$.
Então pela Propriedade 9 de integrais temos:

$$m.h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant M.h,$$

ou seja,

$$f(u).h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v).h.$$

Como $h \neq 0$, podemos dividir a desigualdade por h e assim:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v).$$

Substituindo (A.2), teremos a desigualdade da seguinte forma

$$f(u) \leqslant \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leqslant f(v). \tag{A.3}$$

De forma análoga podemos provar que (A.3) vale para $h < 0$.
Se fizermos $h \to 0$, então $u \to x$ e $v \to x$ pois u e $v \in [x, x+h]$ e pela continuidade da f, tem-se

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x)$$

e

$$\lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x).$$

De (A.3) e do Teorema do Confronto concluímos que:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x), \quad \forall x \in (a,b). \tag{A.4}$$

Note que se $x = a$ ou $x = b$ então (A.4) pode ser interpretada como um limite lateral e portanto g é contínua em $[a,b]$. □

Teorema A.7. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se F é uma função qualquer que satisfaz a condição $F'(x) = f(x)$ em $[a,b]$, então $F(x) = A(x) + c$ onde c é uma constante e*

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Definição A.8. *Uma função F satisfazendo a condição $F'(x) = f(x)$ é chamada **primitiva** de f ou ainda, integral indefinida de f.*

Se F é uma primitiva de f, então $F(x) + c$ também é (onde c é uma constante). De modo geral, representamos uma primitiva genérica de f por $\int f(x)\,dx$.

Teorema A.8. ***(Fundamental do Cálculo)*** *2^a parte: Se f for contínua em $[a,b]$ então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde F é uma primitiva de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Demonstração. Seja $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Sabemos da 1^a parte que $g'(x) = f(x)$, isto é, g é uma primitiva de f. Se F for qualquer outra primitiva de f em $[a, b]$, então sabemos do Teorema A.7 que F e g diferem por uma constante $C \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = g(x) + C, \quad x \in [a, b]. \tag{A.5}$$

Mas, tanto F quanto g são contínuas em $[a, b]$ e, portanto, tomando limites de ambos os lados de (A.5) (quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$), vemos que isso também é válido quando $x = a$ e $x = b$.
Se fizermos $x = a$ na fórmula de $g(x)$, obtemos

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0.$$

Portanto, usando (A.5) com $x = b$ e $x = a$, temos:

$$F(b) - F(a) = [g(b) + C] - [g(a) + C] = g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

No final da seção 4.2 vimos que se $S(r) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 cos\theta\,d\theta$ então $S(r) = 4\pi r^2$. Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo e as propriedades, temos:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \cos\theta\,d\theta = 4\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = 4\pi r^2[\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} - \mathrm{sen}0] = 4\pi r^2.$$

B O Conjunto dos Números Reais

B.1 Definição

i) Considere em $\mathbb{R}$, duas operações:

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto x + y \in \mathbb{R}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto x.y \in \mathbb{R}$$

ditas respectivamente **soma** e **produto**, que satisfazem as seguintes propriedades:

Propriedades da Soma	**Nome da Propriedade**
$(x + y) + z = x + (y + z)$	associativa
$x + y = y + x$	comutativa
$\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 + x = x$	elemento neutro
para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exists(-x) \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$	elemento oposto

Tabela B.1: Propriedades da soma dos números reais.

Propriedades do Produto	**Nome da Propriedade**
$(x.y).z = x.(y.z)$	associativa
$x.y = y.x$	comutativa
$\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ tal que $1 \neq 0$ e $1.x = x$	elemento neutro
para cada $x \neq 0$ em $\mathbb{R}$, $\exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ tal que $x.\frac{1}{x} = 1$	elemento inverso

Tabela B.2: Propriedades do produto dos números reais.

Também temos a propriedade $x.(y + z) = x.y + x.z$ chamada **distributiva em relação a soma.**

Nas Tabelas B.1 e B.2 utilizamos os símbolos 0, 1, $(-x)$ e $\frac{1}{x}$ que recebem as respectivas nomenclaturas zero, um, simétrico ou oposto de x e inverso de x.

Então $(R, +, .)$ tem estrutura de corpo [1].

ii) Dizer que o corpo $\mathbb{R}$ é **ordenado** é postular:

a) a existência de um subconjunto $P \subset \mathbb{R}$, de elementos ditos positivos, tal que

$$x, y \in P \Rightarrow x + y \in P \quad \text{e} \quad x.y \in P;$$

b) para cada $x \in \mathbb{R}$, há somente as seguintes alternativas, que se excluem: $x = 0$ ou $x \in P$ ou $(-x) \in P$. Neste último caso x é dito negativo.

iii) Finalmente dizer que o corpo ordenado $\mathbb{R}$ é **completo** é impor-lhe o axioma do sup, que será apresentado na sequência.

B.2 Limitantes

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio de números reais. Dizemos que X é limitado superiormente por um número c se $c \geqslant x$ para todo $x \in X$. Neste caso, c é um limitante superior de X.

Um número s é o supremo de X se é um limitante superior mínimo de X, no seguinte sentido:
i) s é limitante superior de X;
ii) e se t é limitante superior de X então $t \geqslant s$.

Se existir supremo, este é único. De fato, se s e s' são supremos de X então, por ii), $s' \geqslant s$ e $s \geqslant s'$, donde $s = s'$. Indica-se s por sup$X$. Quando sup$X \in X$, ele é dito o máximo de X.

Proposição B.1. *$s = supX$ se, e somente se, s é limitante superior de X e, para cada número $\varepsilon > 0$ dado, existe um $x_\varepsilon \in X$ tal que $x_\varepsilon > s - \varepsilon$.*

Demonstração. Sejam $s = \sup X$ e $\varepsilon > 0$. Então, como $s - \varepsilon < s$, o número $s - \varepsilon$ não é limitante superior de X; logo existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $x_\varepsilon > s - \varepsilon$.
Reciprocamente, suponha que sup$X = s' \neq s$. Então $s' > s$ donde $s - s' = \varepsilon > 0$. Portanto, existe em X um $x_\varepsilon > s - \varepsilon$ ou $x_\varepsilon > s'$ pela hipótese, em contradição com $s' = \sup X$.

□

Trocando $>$ por $<$ na exposição anterior, obtemos os conceitos e as propriedades de limitante inferior, ínfimo (inf) e mínimo. Em particular, $i =$inf$X$ se, e somente se,

[1] A definição de corpo é encontrada em livros de Estruturas Algébricas, como exemplo [].

i é limitante inferior de X e, para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $x_\varepsilon < i + \varepsilon$.
O conjunto X é dito limitado se for limitado inferior e superiormente. Isto equivale à existência de um número $c > 0$ tal que $|x| \leqslant c$ para todo $x \in X$.
O corpo ordenado $\mathbb{R}$ é completo porque lhe impomos o seguinte Axioma:

Axioma B.1. ***(da Completeza:)*** *Todo conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente admite supremo.*

O significado intuitivo deste axioma é que não existem lacunas ("buracos") em $\mathbb{R}$.

Uma outra forma de dizer que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$, ou seja, dizer que os números racionais e irracionais estão por toda parte em $\mathbb{R}$, será descrito na sequência.

Teorema B.1. *Todo intervalo não-degenerado contém números racionais e números irracionais.*

Demonstração. Vamos considerar o caso em que se tem um intervalo aberto (a, b). Seja $c = b - a$. Como (a, b) não é degenerado, temos $c > 0$. Fixamos um número natural $n > \frac{1}{c}$, logo $\frac{1}{c} < c$. Os números racionais $0, \pm\frac{1}{n}, \pm\frac{2}{n}, ...$ se espalham espaçadamente por toda a reta real $\mathbb{R}$, sendo a distância de cada um deles para os dois mais próximos (à direita e à esquerda) igual a $\frac{1}{n}$, portanto menor que c. Deste modo, não é possível ter-se $\frac{k}{n} < a < b < \frac{(k+1)}{n}$, isto é, pelo menos um dos números racionais $\frac{k}{n}$, $(k \in \mathbb{Z})$ cai no interior do intervalo (a, b). Se quisermos obter um número irracional pertencente a (a, b) basta tomar, por exemplo, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\sqrt{2}}{n} < c$. Então os intervalos $(k\frac{\sqrt{2}}{n}, (k+1)\frac{\sqrt{2}}{n})$, todos de comprimento $\frac{\sqrt{2}}{n}$, cobrem a reta $\mathbb{R}$ e um de seus extremos é um número irracional pertencente ao intervalo (a, b). $\square$