UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

ÁREA, LOGARITMO E EXPONENCIAL

João Cruz Neto

MANAUS

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

João Cruz Neto

ÁREA, LOGARITMO E EXPONENCIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto

MANAUS
2015

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

	Cruz Neto, João
C957á	ÁREA, LOGARITMO E EXPONENCIAL / João Cruz Neto. 2015
	72 f.: il. color; 31 cm.
	Orientador: ALFREDO WAGNER MARTINS PINTO
	Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.
	1. Área. 2. Hipérbole. 3. Logaritmo Natural. 4. Função Exponencial. I. PINTO, ALFREDO WAGNER MARTINS II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

JOÃO CRUZ NETO

ÁREA, LOGARITMO E EXPONENCIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 12 de agosto de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto
Presidente - UFAM

Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos
Membro - UFABC

Prof. Dr. Michel Pinho Rebouças
Membro - UFAM

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e bênçãos a mim concedidas e por guiar meus passos nessa caminhada.

A meus pais, Eudóxio José Coelho e Jandira Gomes Coelho (embora sem a capacitada total de entender este momento), pelo esforço e incentivos dispensados, sem medidas, para que eu pudesse sempre seguir em frente. Além do meu muito obrigado por tudo aquilo que me instruíram e por todos os princípios que me foram passados.

A meus amores Ellen Nilce Ramos Pereira (esposa) e João Carlos Pereira Cruz (filho), pela dedicação, amor, compreensão, apoio e principalmente pelo incentivo constante sem o qual eu não estaria concretizando este sonho.

Ao meu orientador Prof. Dr. Alfredo Wagner Martins Pinto, pela confiança e dedicação, por ter acreditado em meu potencial, me conduzindo, com sua admirável forma peculiar, para esta realização. Obrigado pelas horas e apoio disponibilizados.

Ao Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela amizade, incentivo e apoio dispensados nos momentos que foi solicitado.

A todos meus professores do PROFMAT, pela arte de ensinar, por nos desafiar e acreditar em nossa capacidade de aprender sempre mais. Ao meu amigo Roquelane Batista, pela amizade, incentivo e apoio dispensados.

Enfim, agradeço aos amigos pelo companheirismo nas árduas vitórias conquistadas e todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução dessa Dissertação de Mestrado.

RESUMO

Muitos temas da Matemática são apresentados no ensino básico sem um contexto significativo, tanto nos livros didáticos quanto em sala de aula, isso ocorre, por exemplo, com a *função logaritmo natural* e a *função exponencial.* Neste trabalho faremos uma abordagem geométrica desses temas estabelecendo uma inter-relação entre a área de uma faixa da hipérbole $x \cdot y - 1 = 0$ com o *logaritmo natural*, introduzindo alguns aspectos básicos da teoria necessária a sua compreensão. Os prerrequisitos exigidos são os conhecimentos sólidos das funções elementares definidas no campo dos números reais. Apresentamos uma abordagem conceitual sobre limites de funções, sequências e séries numéricas, a hipérbole e o estudo sobre a área de uma faixa da hipérbole $x \cdot y - 1 = 0$, para a partir desta área definirmos o logaritmo natural e suas propriedades, a função logaritmo natural e sua inversa, a função exponencial. É inevitável, levando em conta a nossa proposta para esse trabalho, que alguns resultados sejam apresentados, admitidos e usados sem demonstração.

Palavras-chave: Hipérbole. Logaritmo natural. Função Exponencial. Área.

ABSTRACT

Many math topics are apresented in basic education without a meaningful context, both in textbooks and in the classroom, this is, for exemple, with the *natural logarithm function* and the *exponential function.* This work will make a geometric approach these issues by establishing an inter-relationship between the area of a track $x{\cdot}y{-}1 = 0$ hyperbole with the *natural logarithm,* introducing some basic aspects of the theory necessary to understand. The required prerequisites are the solid knowledge of the basic functions defined in the field of real numbers. Present a conceptual approach limits functions, sequences and numerical series, hyperbole and the study on the area of a track $x \cdot y - 1 = 0$ hyperbole, from this area define the natural logarithm and their properties, the natural logarithm function and its inverse, the exponential function. Is inevitable, considering our proposal for this work, that some results are presented, accepted and used in demonstration.

Keywords: Hyperbole. Natural logarithm. Exponential Function. Area.

Sumário

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$: Conjunto dos Números Naturais.

$\mathbb{N}^*$: Conjunto dos Números Naturais Positivos.

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos Números Inteiros.

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos números racionais.

$\mathbb{R}$: Conjunto dos Números Reais.

$\mathbb{R}^*$: Conjunto dos números reais diferente de zero.

$\mathbb{R}_+$: Números reais positivos.

$\mathbb{R}_-$: Números reais negativos.

$\ln(x)$: Logaritmo Natural de x.

$exp(x)$: Exponencial de x.

Introdução

Neste trabalho, definiremos as funções logaritmo natural e exponencial a partir de uma abordagem geométrica, mais precisamente, mostraremos que a partir da área sob uma faixa da hipérbole equilátera $y = \dfrac{1}{x}$ define-se a função logaritmo natural $f(x) = \ln(x)$ e a função exponencial $g(x) = e^x$. Definidas estas funções demonstraremos suas propriedades, continuidade e diferenciabilidade.

Pela nossa experiência em sala de aula, combinados com a forma de como são apresentados os conteúdos nos livros didáticos, que servem como referência aos estudos dos alunos no Ensino Médio e até mesmo para cursos de graduação, como Cálculo I, fomos motivados a escolher esse **Tema**, pois, dentre tantos, vimos a necessidade de apresentar uma abordagem diferenciada e significativa para as funções *logaritmo natural e a exponencial* fugindo daquela abordagem tradicional que definem os logaritmos de números reais ora como uma operação inversa da potenciação, ora como a função inversa da exponencial.

Nos primeiros capítulos apresentamos os conceitos preliminares que julgamos necessários como alicerce da nossa abordagem. Apresentamos as funções reais de variável real, limites de funções, a hipérbole, para finalmente tratarmos do nosso tema.

Capítulo 1

Funções reais de variável real

Neste capítulo abordaremos as funções reais de uma variável real, isto é, funções $f: \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ que tem como domínio um subconjunto $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$ e com valores em *f(x)*, para todo $x \in \mathbf{X}$, são números reais. Iniciaremos com uma abordagem geral sobre funções reais de uma variável real, precedido de um breve histórico do conceito de função.

1.1 Generalidade sobre Funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática, este conceito sofreu uma grande evolução ao longo dos séculos, sendo a introdução do método analítico na definição de função (séc. XVI, séc. XVII) veio revolucionar a Matemática. Desde do tempo dos Gregos até a Idade Média a teoria dominante era a Geometria Euclidiana. A partir de então que uma nova teoria, o Cálculo Infinitesimal, surge e acaba sendo um marco no desenvolvimento da Matemática Contemporânea e a noção de função torna-se um dos fundamentos do Cálculo Infinitesimal.

A origem da noção de função confunde-se com os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Ela surgiu de forma um tanto confusa nos *fluentes* e *fluxões* de Newton (1642-1727). Newton aproxima-se bastante do sentido atual de função com a utilização dos termos "relatia quantias" para designar variável dependente, e "genita" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatros operações aritméticas fundamentais.

Segundo Kline (1990), a definição mais explícita de função do século XVII foi dada por James Gregory em 1667, que definiu função como *"uma quantidade obtida de outras quantidades pela sucessão de operações algébricas ou por qualquer outra operação imaginável"*. Para Gregory, esta outra *operação imaginável* era a passagem ao limite, que só seria completamente esclarecida posteriormente.

Foi Leibniz (1646-1716) quem primeiro usou o termo "função" em 1673 em um manuscrito, para indicar quantidade que variam ao longo de uma curva, por exemplo, a tangente. Em suas obras, Leibniz, criou notações, introduziu o uso das palavras "constantes", "variáveis" e "parâmetro".

Johann Bernoulli (1667-1748) experimentou várias notações como **X**, ξ e finalmente ϕx para uma função de x. Em 1718, Bernoulli definiu função da seguinte maneira:

Chamamos aqui Função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constante (Rüthing, 1984).

Em sua primeira obra, o clássico *Introductio in Analysin Infinitorum*, de 1748, Leonhard Euler (1707-1783), o conceito de função desempenha um papel central, Euler enunciou, em 1748: "*uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de alguma maneira dessa quantidade variável e números ou quantidades constantes*". Embora não definindo "expressão analítica", Euler, segundo Boyer (1991), tinha em mente funções algébricas e as funções transcendentes elementares. Em 1755, Euler define função como: "*se x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x ou são determinadas por ele, são chamadas suas funções*" (Rüthing, 1984). Euler é responsável pela introdução, 1734, da notação *f(x)* para designar uma função que depende da variável x.

1.2 Definição de função real de variável real

Definição 1.1. *Dados os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, uma função $f : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{Y}$ é uma regra (ou conjuntos de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in \boldsymbol{X}$ um único elemento $y = f(x) \in \boldsymbol{Y}$. O conjunto $\boldsymbol{X}$ chama-se o domínio e $\boldsymbol{Y}$ é o contra-domínio da função f. Para cada $x \in \boldsymbol{X}$, o elemento $f(x) \in \boldsymbol{Y}$ chama-se imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$.*

Escreve-se $x \longmapsto f(x)$ para indicar que f transforma (ou leva) x em $f(x)$.

Como x é livre para variar no domínio da função, diz-se que x é a *variável independente*, e que y, por depender de x, é a *variável dependente.*

Devemos lembrar que uma função fica bem caracterizada quando consta de três elementos: domínio, contra-domínio e a lei de correspondência $x \longmapsto f(x)$.

Consideraremos que as funções $f : X \longrightarrow Y$ e $g : X' \longrightarrow Y'$ são iguais se, e somente se, $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Exemplo 1. *Sejam X o conjunto dos quadrados do plano Π e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Se, a cada $l \in X$, fizermos corresponder o número real $f(x) =$ área do quadrado l, obteremos uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

- Uma função $f : X \longrightarrow Y$ chama-se *injetiva* quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y. Isto é, f é injetiva quando

$$x_1 \neq x_2 \quad \text{em} \quad X \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Que também pode ser expressa em sua forma contrapositiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

- Diz-se que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é *sobrejetiva* quando, para qualquer elemento $y \in Y$, existe pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

  A *imagem* do subconjunto $A \subset X$ pela função $f : X \longrightarrow Y$ é o subconjunto $f(A) \subset Y$ formado pelos elementos $f(x)$, com $x \in A$. Quando se tem $f(X) = Y$, a função $f : X \to Y$ é sobrejetiva e o conjunto $f(X)$, imagem do domínio X pela função f, chama-se *imagem da função f*.

  No Exemplo (1) a imagem da função f é o conjunto dos números reais positivos.

- Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é *bijetiva*, ou uma *correspondência biunívoca* entre X e Y quando é simultaneamente *injetiva e sobrejetiva.*

- Se f e g são funções, a função **composta** $f \circ g$ (f composta com g) é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

  O domínio de $f \circ g$ consiste nos números x no domínio de g para os quais $g(x)$ fica no domínio de f.

- Diz-se que a função $g : Y \longrightarrow X$ é a **inversa** da função $f : X \longrightarrow Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g. Uma função f possui inversa então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre X e Y.

- Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é *par* se, para todo $x \in X$, se tem

$$f(-x) = f(x).$$

- Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é *ímpar* se, para todo $x \in X$, se tem

$$f(-x) = -f(x).$$

- Seja I um intervalo contido no domínio da função f. Dizemos que f é **crescente** em I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de I com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. Dizemos que f é **decrescente** em I se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de I com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

- Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é *periódica,* se existe um número real $T \neq 0$ tal que

$$f(x + T) = f(x), \ \forall \ x \in X.$$

  T é o período da função.

A continuidade de uma função será definida no capítulo a seguir.

Capítulo 2

Limites, Sequências e Séries

Neste capítulo faremos abordagens, sem aprofundamento, mas preservando o rigor Matemático, de alguns tópicos que iremos utilizar dentro dos nossos propósitos. Apresentaremos a noção de limite de uma sequência, que se entende as séries numéricas, até sua aplicação no estudo do comportamento de uma função. Faremos menção aos teoremas e as propriedades pertinentes sem as demonstrações, que podem ser encontradas em [5] e [8].

2.1 Sequências de números reais

Uma *sequência* de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado o *n-ésimo termo* ou *termo geral* da sequência.

Para indicar a sequência cujo n-ésimo termo geral é x_n, escreve-se

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n,\ \cdots) \quad \text{ou} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad (x_n).$$

Exemplo 2. *Vejamos alguns exemplos de sequências numéricas:*

a) Sendo $a_n = \dfrac{1}{n}$*, temos a sequência* $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots$

b) Sendo $a_n = 7$*, temos a sequência constante* $7, 7, 7, \cdots, 7, \cdots$

c) Sendo $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$*, temos a sequência* $0, 1, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{1}{4}, \cdots$

Uma sequência (x_n) diz-se *limitada superiormente* (respectivamente *inferiormente*) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência é *limitada* se for limitada superiormente e inferiormente.

Exemplo 3. *A sequência* $(2, 2^2, \cdots, 2^n, \cdots)$ *é limitada inferiormente, porém não superiormente.*

Exemplo 4. *Dado um número real $a < -1$, formemos a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números pares e $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}$ é o conjunto dos números ímpares então a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é limitada apenas inferiormente enquanto a sequência $(a^n)_{n \in \mathbb{N}''}$ é limitada apenas superiormente.*

O conceito fundamental para uma sequência é o de limite, que intuitivamente, pode assim ser considerado:

Se, quando n tende a ∞, x_n se aproxima de um número real L dizemos que a sequência (x_n) **converge** para L e indicaremos este fato por:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L \quad \text{ou por} \quad x_n \to L \quad \text{se} \quad n \to \infty.$$

Formalmente, defini-se limite uma sequência como:

Definição 2.1. *Diz-se que um número real L é limite da sequência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos de x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - L| < \varepsilon$.*

Significa que, para valores muito grandes de n, os termos (x_n) tornam-se e se mantêm tão próximos de L quanto se deseje.

Uma sequência que possui limite diz-se *convergente*, caso contrário, ela se chama *divergente*.

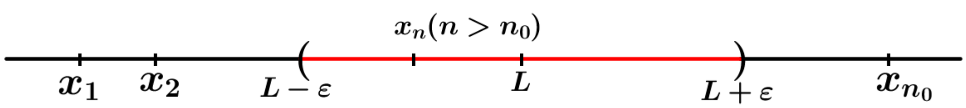

Figura 2.1: Quando $\lim x_n = L$, fora do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ estão no máximo os termos $x_1,\ x_2, \cdots,\ x_{n_0}$.

Enunciaremos alguns teoremas sobre limites de sequências sem as devidas demonstrações, que podem ser encontradas em [5].

Teorema 2.1 (Unicidade do limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.*

Teorema 2.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

Exemplo 5. *A sequência $(2, 0, 2, 0, 2, 0, \cdots)$, cujo n-ésimo termos é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$, é limitada mais não é convergente.*

Exemplo 6. *A sequência $(1, 2, 3, \cdots)$, com $x_n = n$, não converge porque não é limitada.*

Definição 2.2. *Uma sequência (x_n) chama-se monótona quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ou então $x_{n+1} \leq x_n$. No primeiro caso, diz-se que (x_n) é monótona não-decrescente e, no segundo, que (x_n) é monótona não-crescente.*

Toda sequência monótona não-decrescente (respectivamente não-crescente) é limitada inferiormente (respectivamente superiormente) pelo seu primeiro termo.

Teorema 2.3. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Exemplo 7. *A sequência cujo n-ésimo termo é* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *é monótona decrescente, limitada.*

Teorema 2.4. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada (convergente ou não) então* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = 0$.

Exemplo 8. *Se* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *e* $y_n = \operatorname{sen}(n)$, (y_n) *não converge, mas é limitada, pois* $-1 < y_n < 1$, *tem-se então que* $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0$, *pois* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *e pelo Teorema 2.4.*

Teorema 2.5 (Teorema do sanduíche)**.** *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = L$ *e* $x_n \leq z_n \leq y_n$, *então* $\lim \lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$.

Teorema 2.6. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L \quad e \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = M$ *então:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = L \pm M$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = L \cdot M$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{L}{M} \quad se \quad M \neq 0$.

Dada uma sequência (x_n), dizer que "o limite de x_n é mais infinito" e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, significa que dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n > A$.

Analogamente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ significa que, para todo $A > 0$ dado, pode-se achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $x_n < -A$.

Vale enfatizar que $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais e que, se $\lim x_n = +\infty$ e se $\lim y_n = -\infty$, as sequências (x_n) e (y_n) não são convergentes.

2.2 Séries numéricas

Em Matemática é comum usarmos símbolos para abreviar e facilitar notações, o que acontece, por exemplo, com o símbolo Σ que é uma notação padrão para indicar grandes somas.

Assim, se $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números dados, a soma desses elementos é indicada por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Lê-se: “a soma de a índice k, k variando de 1 até n”, $n \in \mathbb{N}$. A ideia central, é que estamos anotando e somando cada um dos números a_k quando o índice k varia de 1 até n, isto é,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n.$$

Uma série numérica é uma soma $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ com um número infinito de parcelas. Para que isso faça sentido, indicaremos $s = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ e, como todo limite, este pode existir ou não. Por isso há séries convergentes e séries divergentes. O principal objetivo desta seção é aprender a distinguir uma das outras.

Definição 2.3. *Dada a sequência (a_n) de números reais, sejam*

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \cdots, s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Cada s_n é referida como ***soma parcial de ordem n*** *da série $\sum a_n$. A parcela a_n é o n-ésimo termo ou termo geral da série.*

Se existe o limite, ou seja, se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, diremos que a série $\sum a_n$ é *convergente* e

$$s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

será chamado *soma* da série. Se $\lim_{n\to\infty} s_n$ não existir, diremos que $\sum a_n$ é uma série *divergente.*

Exemplo 9. *A* ***série geométrica*** $\sum_{n\geq 1} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots (a \neq 0)$ *é convergente se e somente se $|q| < 1$, caso em que sua soma é:*

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots &= \frac{a}{1-q} \\ a(1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots) &= a \cdot \frac{1}{1-q} \qquad (2.1) \end{aligned}$$

De fato,

- *Se $q = 1$, então $s_n = a + a + a + \cdots + a = na$, que tende a $+\infty$ ou $-\infty$, conforme seja $a > 0$ ou $a < 0$. Portanto, a série é divergente.*
- *$q \neq 1$, temos:*

$$\begin{aligned} s_n &= a(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \quad \textit{multiplicando por } q, \textit{ obtemos:} \qquad (2.2) \\ qs_n &= a(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}) \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Subtraindo estas equações membro a membro, vem:

$$s_n - qs_n = a(1 - q^{n+1}) \quad \Longrightarrow \quad s_n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^{n+1}$$

A sequência (q^{n+1}) *é divergente se* $q \leq -1$ *ou* $q > 1$, *logo, o mesmo sucede com* s_n, *e a série é divergente. Mas, para* $-1 < q < 1$, *a sequência* (q^{n+1}) *converge para 0, dessa forma:*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^{n+1} \right) = \frac{a}{1-q}$$

que é a soma da série.

Exemplo 10. *A série* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, *cujo termo geral é* $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, *tem n-ésima soma parcial*

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Portanto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, isto é, $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
De um modo mais geral se $a_n = b_n - b_{n+1}$, então:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_1 - b_{n+1} \end{aligned}$$

Portanto, existe o limite de s_n se e somente se existe o limite de b_{n+1}. Caso afirmativo,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} \tag{2.4}$$

onde o limite do segundo membro pode ser substituído por $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, temos, então:

$$\sum a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{2.5}$$

Exemplo 11. *Fazendo* $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, *temos* $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$. *Pela fórmula 2.5:*

$$\sum \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1.$$

Teorema 2.7. *O termo geral de uma série convergente tem limite zero.*

É importante ressaltar que a condição dada pelo Teorema acima não é suficiente para garantir a convergência de uma série, no entanto, este critério constitui a primeira coisa a verificar quando se quer saber se uma série é ou não convergente. Se não ocorrer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, a série $\sum a_n$ é divergente.

Exemplo 12. *As séries* $\sum\limits_{n>1} \dfrac{n+1}{n-1}$, $\sum\limits_{n\geq 0} n$, $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n$ *são todas divergentes, pois seus termos gerais não tendem a 0. No primeiro caso, tem-se:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$$

e nos demais casos não existe o limite do termo geral para n tendendo a ∞.

Exemplo 13 (A série harmônica)**.** *A série $\sum \dfrac{1}{n}$ é divergente. De fato, se $\sum \dfrac{1}{n}$ fosse convergente então $\sum \dfrac{1}{2n} = t$ e $\sum \dfrac{1}{2n-1} = u$ também seriam convergentes. Além disso, como $s_{2n} = t_n + u_n$, fazendo $n \to \infty$ teríamos $s = t + u$. Mas $t = \sum \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{n} = \dfrac{s}{2}$, portanto $u = t = \dfrac{s}{2}$. Por outro lado*

$$\begin{aligned} u - t &= \lim_{n\to\infty} (u_n - t_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n}\right) > 0, \end{aligned}$$

logo $u > t$. Contradição.

Ao estudar condições sobre as quais uma série converge ou diverge sem tentar a tarefa, em geral difícil, de calcular sua soma, existem critérios e testes que nos permitem decidir se uma série converge ou não. O resultado mais importante, sobre o qual os outros se apoiam, é o chamado *critério de comparação*:

Teorema 2.8 (Critério de comparação)**.** *Suponhamos que, a partir de um certo índice, verifica-se $0 \leq a_n \leq b_n$.*

a) Se $\sum b_n$ é convergente, então $\sum a_n$ é convergente.

b) Se $\sum a_n$ é divergente, então $\sum b_n$ é divergente.

2.3 Noção intuitiva de Limite de Função.

A palavra **limite** transmite a ideia de um ponto que pode ser eventualmente atingido mas que jamais pode ser ultrapassado. Matematicamente, o estudo de limite torna-se importante quando queremos estudar o comportamento de uma função em um ponto qualquer pertencente ou não ao domínio desta função. Ou mesmo o limite da soma de uma sequência com infinitos termos.

Podemos, por exemplo, querer saber o comportamento da função $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ para o valor 2, embora $f(2)$ não esteja definido, ou seja, 2 não pertence ao domínio da função $f(x)$. Ou ainda, obter o limite, se existir, da soma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Exemplo 14. *Como a função* $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ *se comporta próximo a* $x = 2$*? Vejamos.*

A função f está definida para todo x real, exceto x = 2. Na Tabela 3.1 mostramos esse comportamento. Mesmo que f(2) não seja definida, é fácil observar, veja Tabela, que podemos deixar o valor de f(x) tão próximo quanto quisermos de 0,25 ao escolher x próximo o suficiente de 2. Podemos dizer que f(x) se aproxima do limite 0,25 quando x se aproxima de 2, e escrevemos

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0,25 \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = 0,25$$

Tabela 3.1.										
Quanto mais x se aproxima de 2, mais perto $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ *parece se aproximar de 0,25.*										
1,97	1,98	1,99	1,999	$\cdots$	2	$\cdots$	2,001	2,003	2,005	2,006
0,2519	0,2513	0,2506	0,2501	$\cdots$		$\cdots$	0,2499	0,2498	0,2497	0,2495

Agora, generalizemos a ideia ilustrada no Exemplo 14. Suponhamos que $f(x)$ seja definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto, possivelmente no próprio x_0. Se $f(x)$ está arbitrariamente próxima a L (tão próxima de L quanto queiramos) para todo x próximo o suficiente de x_0, dizemos que f se aproxima do **limite** L quando x se aproxima de x_0, e escrevemos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \tag{2.6}$$

que lemos "*o limite de f(x) quando x tende a* x_0 *é L.*"

Exemplo 15. *Vejamos os exemplos a seguir:*

a) Se f é a função identidade, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x$*, então, para qualquer valor de* x_0*,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

b) Se f é função constante, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = k$ *(função com o valor k constante), então, para qualquer valor de* x_0*,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k.$$

c) $\lim_{x \to x_0} x^n = (x_0)^n \quad (n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{R}).$

Formalmente, a definição de limite de uma função é dada por:

Definição 2.4. *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida em um intervalo aberto $X \subset \mathbb{R}$ em torno x_0, exceto, possivelmente, no próprio x_0. Dizemos que* ***limite de f(x) quando x tende a** x_0 **é o número real L,*** *e escrevemos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se, para cada número $\varepsilon > 0$, existir um número correspondente $\delta > 0$, de modo que, para qualquer valor de x, tem-se:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Vejamos alguns teoremas sobre limites de uma função. As demonstrações podem ser encontradas em [5], [8] ou [9].

Teorema 2.9 (Teorema do sanduíche)**.** *Suponha que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0, exceto, possivelmente, no próprio $x = x_0$. Suponha também que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$. Então, $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$.*

Teorema 2.10. *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0, exceto possivelmente em $x = x_0$, e os limites de f e g existirem quando x se aproxima de x_0, então*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Teorema 2.11 (Unicidade do Limite)**.** *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = M$ então $L = M$.*

Propriedades do limite:

Se $L,\ M,\ x_0$ e k são números reais e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = M, \quad \text{então}$$

P.1) *Limite de uma constante*: $\lim_{x \to x_0} k = k$

P.2) *Limite da soma:* $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$

P.3) *Limite da diferença:* $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$

P.4) *Limite da multiplicação por uma constante:* $\lim_{x \to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot L$

P.5) *Limite do Produto:* $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

P.6) *Limite do quociente:* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0.$

As propriedades P.2) e P.5) podem ser generalizadas para n funções:$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \cdots,\ f_n$ tais que $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x) = L_i,\ 1 \leq i \leq n$, ou seja,

P.7) $\lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n.$

P.8) $\lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)] = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \ldots \cdot L_n.$

As demonstrações dessas propriedades você pode encontrar em [7].

Exemplo 16. *Para se calcular* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$, *observemos que sendo* $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$, *temos que* $2 \notin D(f)$. *Um cálculo direto, quando* x *se aproxima de 2, nos dá*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{0}{0}$$

este resultado, $\dfrac{0}{0}$, *é muito comum no cálculo de limites, mas não tem significado como valor de um limite. A expressão* $\dfrac{0}{0}$ *é um símbolo de indeterminação e significa que ainda não foi calculado. Para evitar essa indeterminação, neste exemplo, fazemos*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} (x^2+2x+4),\ (pois\ x-2 \neq 0) \\
&= 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 12.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = 12.$$

2.3.1 Limites laterais

Ao calcularmos o limite de uma função em um ponto x_0, estamos interessados no comportamento da função nos valores próximos de x_0, isto é, nos valores de x pertencentes a um intervalo aberto contendo x_0, mas diferente de x_0, e, portanto, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores do que x_0.

Entretanto, o comportamento em algumas funções, quando x está próximo de x_0, mas assume valores menores que x_0, é diferente do comportamento da mesma função, quando x está próximo de x_0, mas assume valores maiores do que x_0. Para se ter um limite L quando x se aproxima de x_0, uma função f deve ser definida em *ambos os lados de* x_0, e seus valores $f(x)$ devem se aproximar de L quando x se aproxima de x_0 de cada lado. E se a aproximação for pelo lado direito, o limite será um **limite à direita** (notação: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$). Se for feito pelo lado esquerdo, será um **limite à esquerda** (notação : $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = L$).

Então, existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais (à direita e à esquerda), isto é,

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L.$$

Exemplo 17. *Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & se \quad x \leq 2, \\ x + 3, & se \quad x > 2. \end{cases}$ Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?*

De como f está definida temos que:

i) $f_1(x) = x^2 - 1$, *se* $x \leq 2$

ii) $f_2(x) = x + 3$, *se* $x > 2$

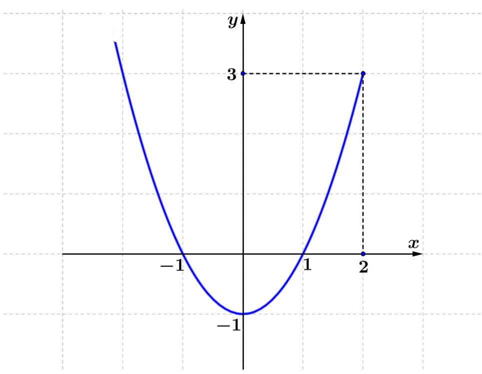

Figura 2.2: Gráfico da função $f_1(x) = x^2 - 1$, para $x \leq 2$.

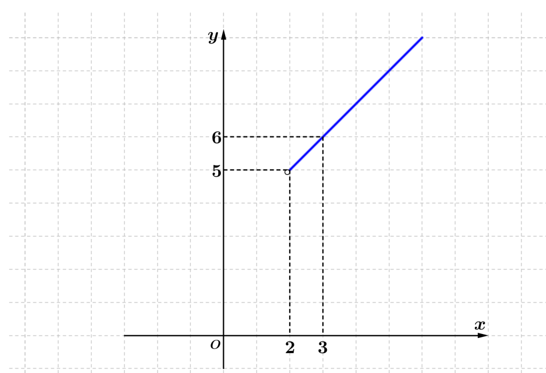

Figura 2.3: Gráfico da função $f_2(x) = x + 3$, para $x > 2$.

O gráfico da função f é a reunião dos gráficos 2.2 e 2.3.

Observando esse gráfico, temos que: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$ *e* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$. *Portanto, não existe* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, *pois* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

2.3.2 Limites infinitos. Limites no infinito

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, cujo domínio é o conjunto dos números reais diferentes de 0, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, e, cujo gráfico está representado na Figura 2.5.

Observando o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, Figura 2.5, vemos que quando x tende a 0 pela direita e pela esquerda, os valores de $f(x)$ se tornam arbitrariamente grandes. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a zero é "+ *infinito*" e escrevemos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

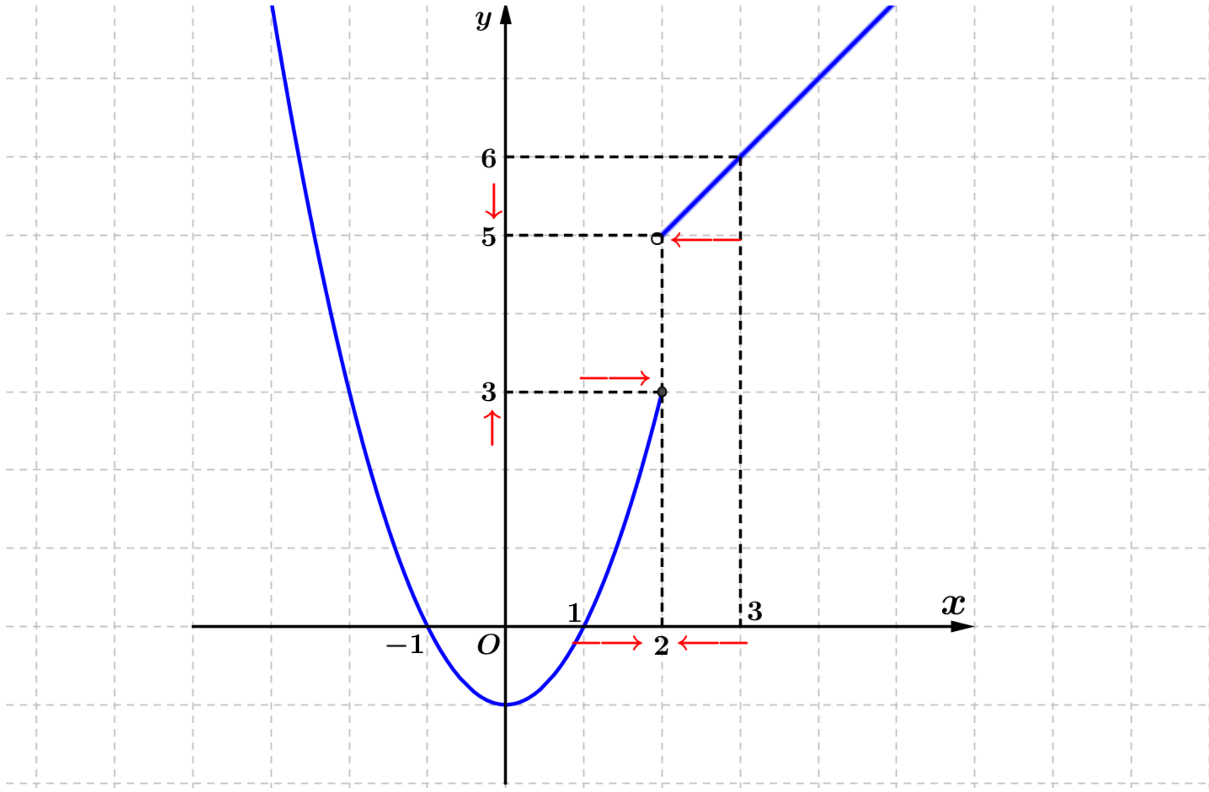

Figura 2.4: Gráfico da função $f(x) = f_1(x) \cup f_2(x)$.

ou seja,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Ainda observando o gráfico da função $f(x)$, Figura 2.5, a medida que x cresce indefinidamente, assumindo valores positivos cada vez maiores, $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de 0. O mesmo ocorre quando x assume valores negativos indefinidamente grandes. Neste caso, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a "$+$ *infinito*" ou a "$-$ *infinito*", é igual a 0, e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Vamos agora formalizar esses conceitos de limites.

Definição 2.5. *Formalizemos esses conceitos de limites.*

1. *Dizemos que f(x) possui* ***limite L quando x tende a mais infinito*** *e escrevemos*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

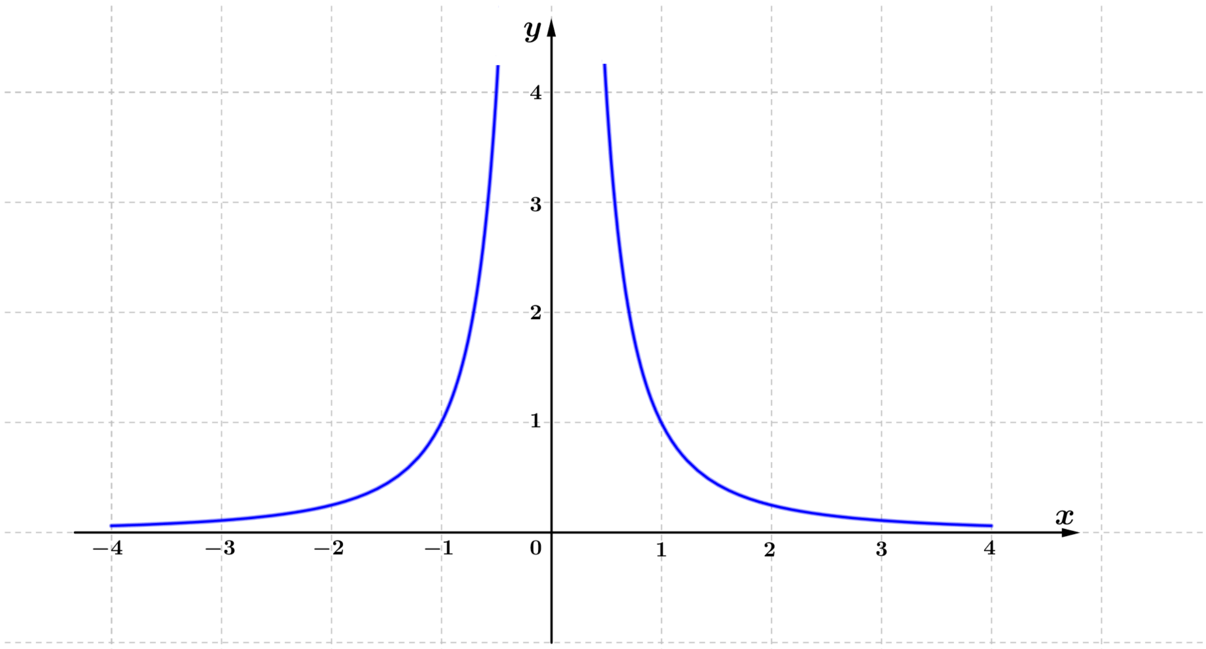

Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

se, para qualquer número $\varepsilon > 0$*, existir um número correspondente* M *de modo que*

$$x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2. *Dizemos que f(x) possui* ***limite L quando x tende a menos infinito*** *e escrevemos*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número $\varepsilon > 0$*, existe um número correspondente* N *de modo que para todo* x

$$x < N \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

3. *Dizemos que* ***f(x) tende a mais infinito quando x se aproxima de*** x_0*, e escrevemos*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

se para cada número real positivo B*, existir um* $\delta > 0$ *correspondente, de modo que para todo* x

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > B.$$

4. *Dizemos* ***f(x) tende a menos infinito quando x se aproxima de*** x_0***,*** *e escre-*

vemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

se para cada número real negativo $-B$, *existir um* $\delta > 0$ *correspondente, de modo que para todo* x

$$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -B.$$

Exemplo 18. *Vejamos alguns exemplos:*

1) Ao se calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 1}$, *em uma substituição direta nos dá*

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 4}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}, \quad \textit{(uma indeterminação).}$$

Para evitar essa indeterminação e calcular o limite, fazemos

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-2)}{x+1)} = \frac{2(1-2)}{1+1} = -1.$$

2) O $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 1}{(x^2 - 4)^6}$, *nos dá, em uma substituição direta:*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{(x^2 - 4)^6} = \frac{2^3 - 1}{2^2 - 4} = \frac{7}{0}.$$

Para x *próximo de 2, quer pela esquerda quer pela direita, o numerador e o denominador mantém-se positivo. Portanto o sinal da função é positivo para* x *próximo de 2, logo,*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{(x^2 - 4)^6} = +\infty.$$

3) Para se calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - x^3)$, *temos:*

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - x^3) = (-\infty)^5 - (-\infty)^3 = (-\infty) + (+\infty), \quad \textit{(uma indeterminação).}$$

Podemos no entanto fazer

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - x^3) = \lim_{x \to -\infty} x^5 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \cdot (1 - 0) = -\infty.$$

4) Já, para $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$, *podemos ser induzidos a dizer, tal como em* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ *que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ *é infinito. Mas, qual "infinito"?* $+\infty$ *ou* $-\infty$*? Neste caso, nenhum dos dois!*

Se x *se aproxima de 0 por valores positivos,* $\dfrac{1}{x}$ *tende a* $+\infty$. *Porém se* x *se aproxima* *de 0 assumindo somente valores negativos,* $\dfrac{1}{x}$ *tende a* $-\infty$. *Veja Figura 2.6.*

Neste caso, dizemos que não existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$.

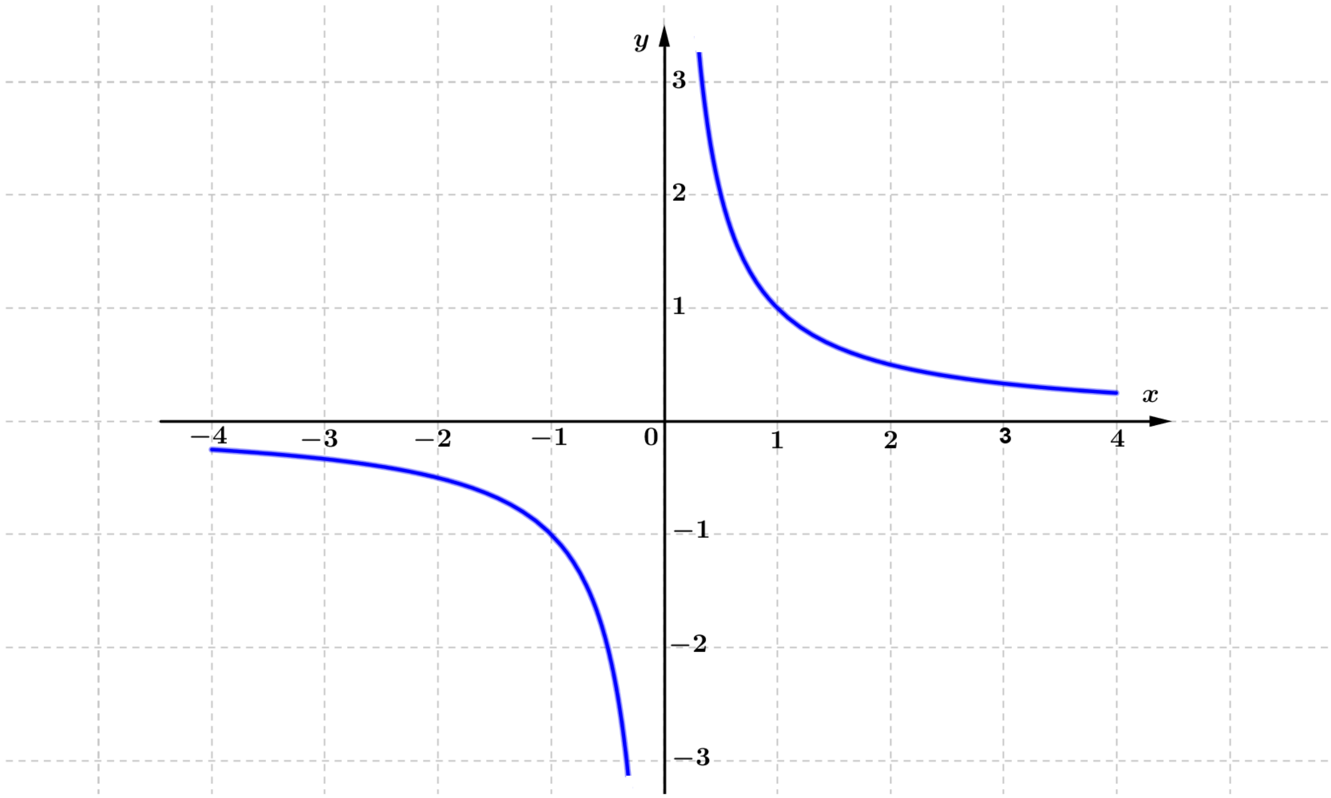

Figura 2.6: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.3.3 Continuidade de funções

Nesta seção será estudado os aspectos mais básicos sobre função contínua. Novamente, não apresentaremos as demonstrações das propriedades. Essas demonstrações podem ser encontradas em [5].

Definição 2.6. *Seja* x_0 *um ponto do domínio da função* f.

- *Dizemos que* f *é* ***contínua em*** x_0 *se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- *Se* f *não é contínua em* x_0*, ela se diz descontínua em* x_0*, e* x_0 *é chamado* ***ponto de descontinuidade*** *de* f.

Essa definição exige que sejam verificadas três condições:

i) x_0 é elemento do domínio de f e, portanto, existe $f(x_0)$;

ii) existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$;

iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Intuitivamente, uma função $y = f(x)$ é contínua em um intervalo I, $I \subset D(f)$, quando o gráfico de f, para $x \in I$, é uma linha sem interrupções.

Teorema 2.12. *Se $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $x_0 \in I$ então são contínuas nesse mesmo ponto as funções $f + g, f \cdot g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, bem como a função $\dfrac{f}{g}$, caso seja $g(x_0) \neq 0$.*

Teorema 2.13 (Teorema do valor intermediário)**.** *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Corolário 2.1. *Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f(I)$ é um intervalo*

Definição 2.7. *Seja f uma função real de variável real tal que existe um intervalo $[a, b]$, $a < b$, contido no domínio de f.*

1. *f é contínua à esquerda em b se, e somente se,*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

2. *f é contínua à direita em a se, e somente se,*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Em cada uma dessas definições, ficam subentendidas três condições. Vejamos.

I. existem $f(b)$ e $f(a)$;

II. existem $\lim_{x \to b^-} f(b)$ e $\lim_{x \to a^+} f(a)$

III. $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Dizemos que a função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ se, e somente se:

- f é contínua em $]a, b[$.
- f é contínua à direita em a.

- f é contínua à esquerda em b.

Analogamente define-se função contínua nos intervalos $[a,b[,\ ]a,b],\ [a,+\infty[$ e $]-\infty,b]$.

Teorema 2.14. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Toda função contínua injetiva $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona e sua inversa $g : J \longrightarrow I$, definida no intervalo $J = f(I)$, é contínua.*

2.4 Noção intuitiva da derivada de uma função

Nesta seção, definiremos a derivada de uma função. Mas antes, veremos alguns conceitos que facilitarão o entendimento da derivada.

Se uma curva $\mathcal{C}$ tiver uma equação $y = f(x)$ e quisermos encontrar a *reta tangente* à curva $\mathcal{C}$ em um ponto $P(a, f(a))$, consideramos um ponto $Q(x, f(x))$, onde $x \neq a$, e calculamos a inclinação da reta secante $\overleftrightarrow{PQ}$, Figura 2.7, dado pelo quociente

$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Então, aproximamos Q de P, ao longo de $\mathcal{C}$, fazendo x tender a a, ou seja, investigamos o limite de $q(x)$ quando $x \to a$, Figura 2.8. Geometricamente, como a distância entre os pontos Q e P está tendendo a zero, a reta que era secante à curva agora tende a torna-se uma tangente à curva no ponto considerado.

Definição 2.8. *A reta passando pelo ponto P e tendo inclinação q(x), é chamada reta tangente ao gráfico no ponto (a,f(a)).*

Se

$$q(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Fazendo a mudança $h = x - a$, quando $x \to a,\ h \to 0$, temos:

$$q(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

As interpretações deste limite, são respectivamente, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, a velocidade instantânea do móvel no instante $x = a$, em geral, a taxa de variação da função f no ponto a. Esse limite é uma das noções mais importante da Matemática e suas aplicações.

Definição 2.9. *Se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num domínio D que pode ser um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos ou ainda, D tal que para todo intervalo aberto I que contém $\underline{a}$, se tenha $I \cap (D - \{a\}) \neq \emptyset$. f é **derivável ou diferenciável** no ponto $\underline{a}$ quando existe o seguinte limite:*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{2.7}$$

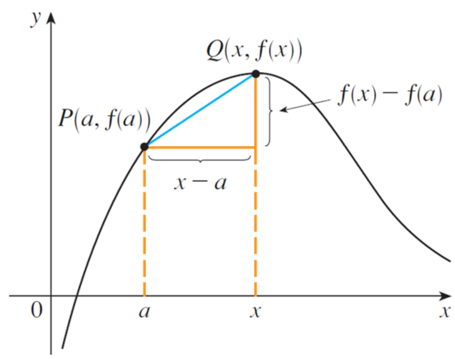

Figura 2.7: Inclinação da reta secante.

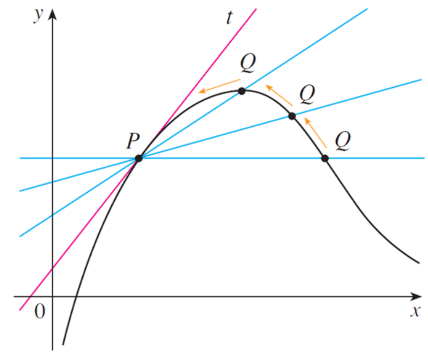

Figura 2.8: Obtenção da reta tangente.

$f'(a)$ é chamada a derivada de f no ponto $\underline{a}$. Como $\underline{a}$ é um ponto arbitrário, podemos calcular a derivada de f para qualquer ponto $x \in D(f)$;

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2.8}$$

Outras notações para a derivada de f no ponto a são:

$$Df(a), \quad \frac{df}{dx}(a) \quad \text{e} \quad \left.\frac{df}{d}\right|_{x=a}.$$

Corolário 2.2. *Uma função é contínua nos pontos em que é derivável.*

A prova deste corolário pode ser encontrado em [5].

Teorema 2.15. *Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções definidas e deriváveis no ponto $\underline{a}$. As funções $f \pm g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}(g \neq 0)$ são também deriváveis no ponto $\underline{a}$, sendo*

- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$.

A demonstração pode ser encontrada em qualquer livro de Cálculo, por exemplo em [9].

Teorema 2.16 (Regra da Cadeia)**.** *Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, se f é derivável no ponto $a \in D(f)$, g derivável no ponto $b \in D(g)$ e $f(a) = b$ então $g \circ f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável no ponto $\underline{a}$, com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Demonstração. Veja [5]. □

Corolário 2.3. *Seja* $f : X \longrightarrow Y$ *uma bijeção entre os conjuntos* $X, Y \subset \mathbb{R}$, *com inversa* $g = f^{-1} : Y \longrightarrow X$. *Se* f *é derivável no ponto* $\underline{a}$ *e* g *é contínua no ponto* $b = f(a)$ *então* g *é derivável no ponto* $\underline{b}$ *se, e somente se,* $f'(a) \neq 0$. *No caso afirmativo tem-se*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demonstração. Veja [5]. □

Capítulo 3

A Hipérbole

Neste capítulo, faremos uma abordagem superficial sobre a hipérbole. Maiores detalhes sobre o estudo da hipérbole pode ser encontrado em [7].

Definição 3.1. *Sejam F_1 e F_2 pontos distintos, **2c**, sua distância, e **a**, um número real tal que $0 < a < c$. O lugar geométrico $\mathbb{H}$ dos pontos $P(x, y)$ tais que a diferença, em módulo, das distâncias $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ é uma constante $2a$, chama-se **Hipérbole**, ou seja,*

$$\mathbb{H} = \{P(x, y); |d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 2a.\}$$

*Cada um dos pontos F_1 e F_2 é chamado **foco** da hipérbole, o segmento $\overline{F_1F_2}$ é chamado **segmento focal**, seu ponto médio **C**, **centro** da hipérbole, e **2c**, **distância focal**. A reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ chama-se **reta focal**, A_1 e A_2 são os **vértices da hipérbole**, o segmento $\overline{A_1A_2}$ é o seu **eixo real** e qualquer segmento cujas extremidades (distintas) pertencem a $\mathbb{H}$ chama-se **corda** da hipérbole. Figuras* 3.1 *e* 3.2

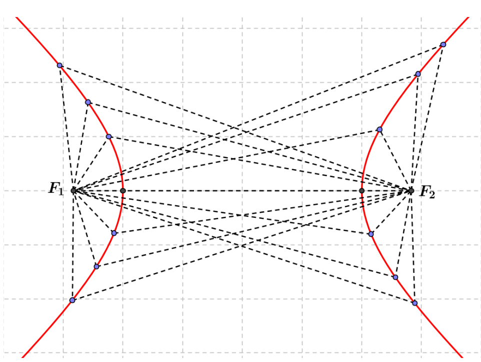

Figura 3.1: Hipérbole

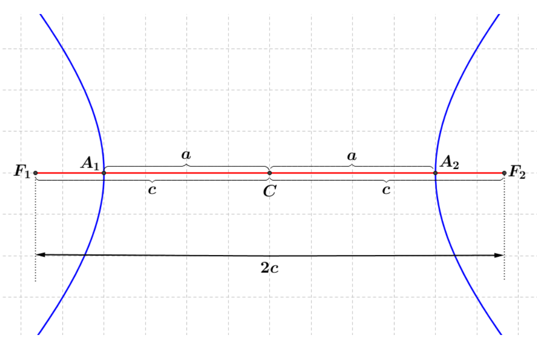

Figura 3.2: Hipérbole e seus elementos básicos.

Definição 3.2. *Chama-se **retângulo referência da hipérbole** o retângulo **MNPQ** de centro **C**, com **MQ** e **NP** perpendiculares ao eixo real em A_1 e A_2, respectivamente, e $d(C, N) = d(C, Q) = c$. O segmento $\overline{B_1B_2}$ perpendicular a $\overline{A_1A_2}$ em C, com $B_1 \in \overline{MN}$ e*

$B_2 \in \overline{PQ}$, é o ***eixo imaginário*** *da hipérbole. Os segmentos $\overline{B_1C}$ e $\overline{B_2C}$ são chamados de* ***semi-eixos imaginários.*** *Figura* (3.3)

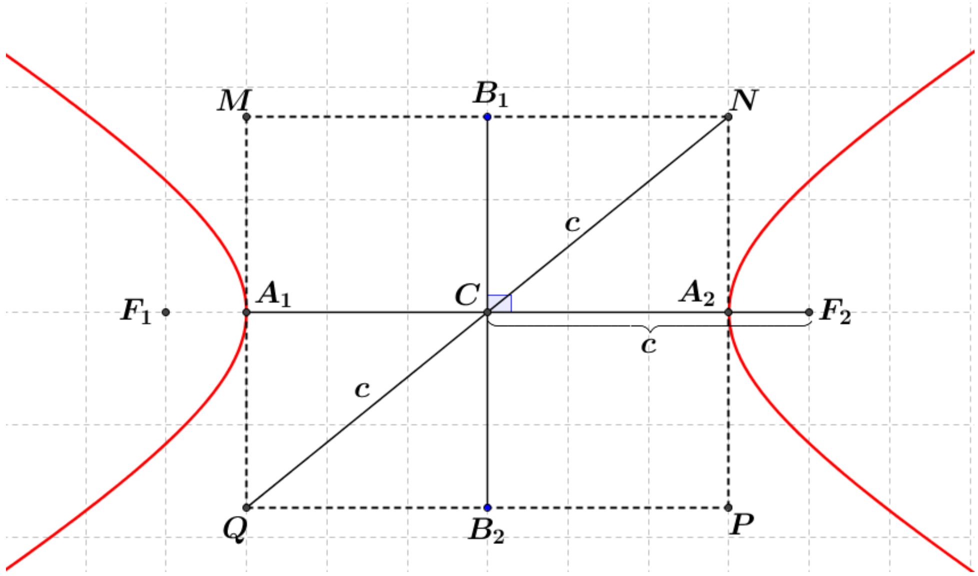

Figura 3.3: Retângulo referência da hipérbole.

3.1 Equação da hipérbole

Para deduzir uma equação da hipérbole $\mathbb{H}$, vamos escolher um sistema ortogonal de coordenadas na qual os focos pertencem ao eixo $0x$ e o centro é a origem, figura 3.4, assim,

$$F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0) \quad \text{e} \quad O(0, 0).$$

De acordo com a definição, um ponto $P(x, y)$ pertence à hipérbole se, e somente se, $|d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 2a$, ou seja, $d(P, F_2) - d(P, F_1) = \pm 2a$.

Como $d(P, F_2) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ e $d(P, F_1) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Queremos uma equação livre de radicais, para isso, elevamos ao quadrado ambos os membros, reagrupamos termos e elevamos novamente ao quadrado, chegando a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

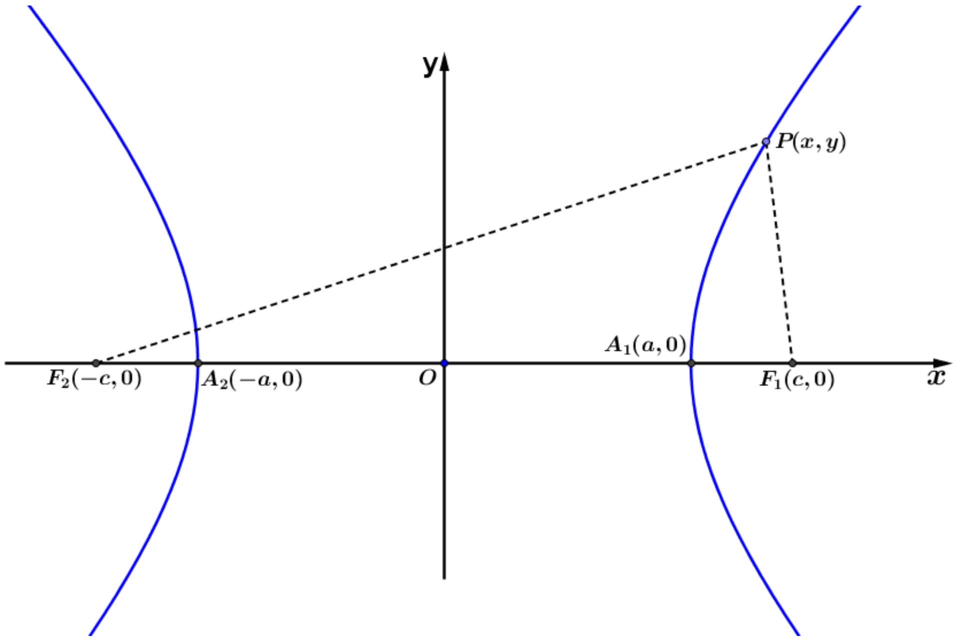

Figura 3.4: Hipérbole

Indicando por b o número real positivo $\sqrt{c^2 - a^2}$, temos $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ e dividindo membro a membro por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(equação resuzida da hipérbole.)} \tag{3.1}$$

São importantes as relações:

- $c^2 = a^2 + b^2$
- $c > b > 0$
- $c > a > 0$

Os números a, b e c são chamados **parâmetros geométricos** e a equação (3.1), **equação reduzida da hipérbole**. Maiores detalhes sobre a dedução da equação 3.1 encontra-se em [6].

Quando os focos estão sobre o eixo y e também equidistantes da origem, a equação reduzida da hipérbole será:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{3.2}$$

Considerando o centro da hipérbole $C(x_0, y_0)$, diferente da origem do sistema ortogonal adotado, e os eixos (real e imaginário) paralelos aos eixos x e y, temos as equações:

1º) Eixo real paralelo ao eixo x:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.3}$$

2º) Eixo real paralelo ao eixo y :

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \tag{3.4}$$

3.2 Assíntotas da hipérbole

Consideremos a hipérbole de equação

$$\mathbb{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

cujo gráfico é o da Figura 3.5.

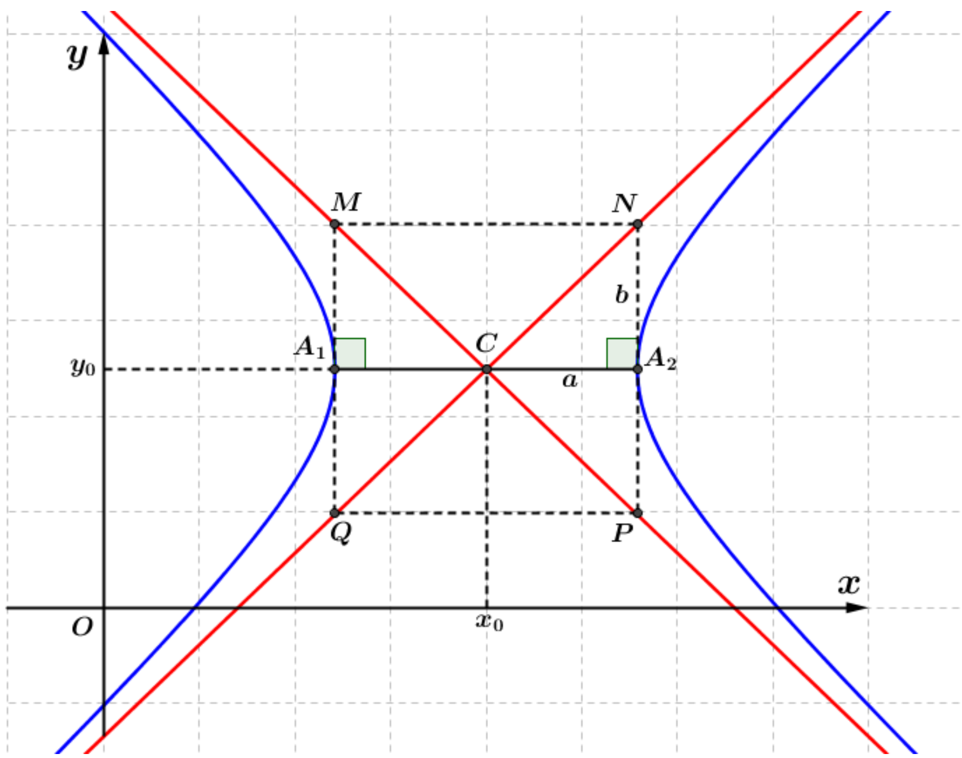

Figura 3.5: Gráfico da hipérbole $\mathbb{H}$ e suas assíntotas.

As assíntotas dessa hipérbole são as retas $\overleftrightarrow{NQ}$ e $\overleftrightarrow{MP}$, que contém as diagonais do retângulo referência $MNPQ$. Essas assíntotas passam pelo $C(x_0, y_0)$ e têm coeficientes angulares $m_1 = \dfrac{b}{a}$, $m_2 = -\dfrac{b}{a}$, respectivamente (observe os triângulos retângulos CNA_2 e

CMA_1) e cujas equações são dadas por:

$$\overleftrightarrow{NQ} \quad : \quad \begin{cases} C(x_0, y_0) \\ m_1 = \dfrac{b}{a} \end{cases} \Longrightarrow y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0); \tag{3.5}$$

$$\overleftrightarrow{MP} \quad : \quad \begin{cases} C(x_0, y_0) \\ m_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases} \Longrightarrow y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0). \tag{3.6}$$

Analogamente, obtêm-se as equações das assíntotas de uma hipérbole com o eixo real paralelo ao eixo das ordenadas, veja [7].

3.3 Hipérbole equilátera

Quando temos $b = a$, o retângulo referência da hipérbole $MNPQ$, veja Figura 3.3, se transforma em um quadrado. Nesse caso, as assíntotas tornam-se perpendiculares e a hipérbole é denominada **hipérbole equilátera**.

As equações de uma hipérbole equilátera de centro $C(x_0, y_0)$ são:

- $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$, quando o eixo focal for paralelo ao eixo das abscissas.

- $\dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$, quando o eixo focal for paralelo ao eixo das ordenadas.

3.4 Rotação de eixos no plano

Consideremos Ox e Oy os eixos primitivos do sistema cartesiano de eixos coordenados com origem $O(0, 0)$. Sejam Ox' e Oy' os novos eixos coordenados depois que o sistema primitivo foi rotacionado de um ângulo θ em torno da origem $O(0, 0)$, Figura 3.6. Assim, θ é o ângulo formado entre os eixos Ox e Ox'. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer do sistema primitivo, o mesmo ponto P terá coordenadas $P(x', y')$, em relação ao novo sistema. As equações de transformação do sistema original ao novo sistema são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{cases} \tag{3.7}$$

Demonstração. Considerando a Figura 3.6, temos: $\overline{ON} = x$, $\overline{OQ} = x'$, $\overline{PN} = y$, $\overline{NM} = \overline{RQ}$, $\overline{MQ} = \overline{NR}$. Do triângulo $\triangle OMQ$, obtemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{MQ}}{x'} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{\overline{OM}}{x'}.$$

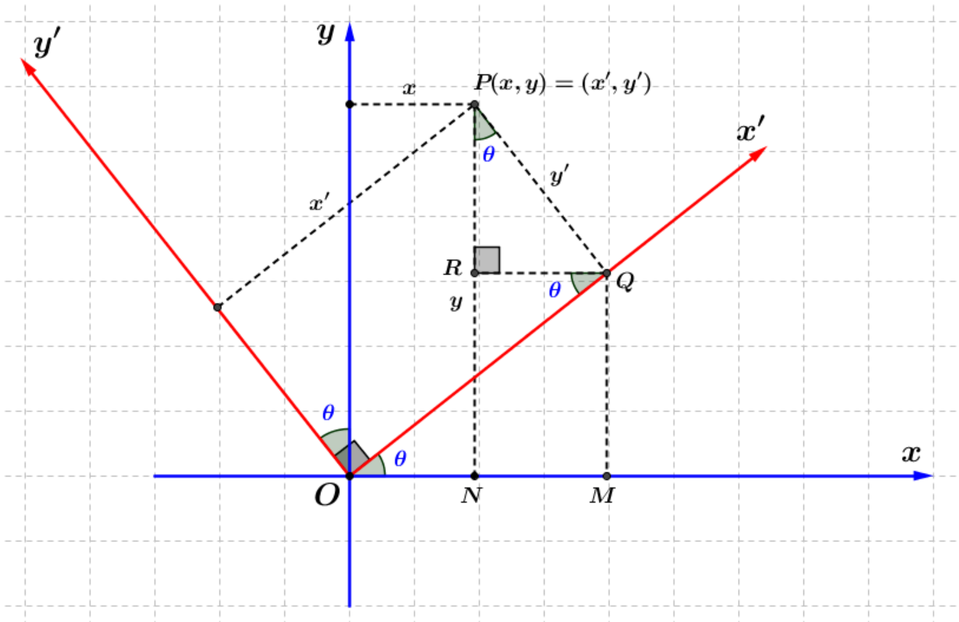

Figura 3.6: Rotação de eixos no plano.

Do triângulo $\triangle PRQ$, obtemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{RQ}}{y'} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{\overline{PR}}{y'}.$$

Assim,

$$\begin{cases} x = \overline{OM} - \overline{NM} = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y = \overline{PN} = \overline{PR} + \overline{RN} = y'\cos\theta + x'\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

■

Exemplo 19. *Qual é a figura representada pela equação* $\mathcal{C} : xy - 1 = 0$*?*

Devemos efetuar uma rotação θ no sistema xOy em torno do ponto O no sentindo anti-horário, de maneira a eliminar o termo xy, para isso, basta substituir na equação $\mathcal{C}$ as equações 3.7, ou seja,

$$\begin{aligned} &(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) - 1 = 0 \qquad (3.8)\\ &(x')^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + x'y'\cos^2\theta - x'y'\operatorname{sen}^2\theta - (y')^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 1 = 0\\ &(x')^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - (y')^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + x'y'(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - 1 = 0 \end{aligned}$$

Como queremos eliminar o termo em $x'y'$, então, a rotação que nos convém é aquela em que:

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0 \Longrightarrow \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta, \quad \text{ou seja,} \quad \cos\theta = \operatorname{sen}\theta \quad \text{ou} \quad \cos\theta = -\operatorname{sen}\theta.$$

Qualquer uma das duas igualdades resolve o problema. Tomemos a primeira:

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\theta, \text{ logo } \theta = 45° \Rightarrow \cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo em 3.8, obtemos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 1 = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1$$

Portanto, a equação representa uma **hipérbole equilátera**.

Capítulo 4

Área de uma faixa da hipérbole

Neste capítulo, veremos como calcular a área de uma faixa da hipérbole, especificamente da hipérbole tratada no **Exemplo 19** de equação $xy - 1 = 0$. Mas, antes, introduziremos algumas definições preliminares que iremos utilizar para obtermos o cálculo da referida área.

Definição 4.1. ***Transformação Geométrica*** *é uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de modo que, a partir de uma figura geométrica original se forma outra geometricamente igual ou semelhante à primeira.*

Definição 4.2. ***Isometria*** *é uma transformação geométrica que preserva distância entre pontos e amplitude dos ângulos, isto é, a figura inicial e o seu transformado são congruentes.*

Definição 4.3. *No plano,* ***reflexão****, em relação a um eixo r, é uma transformação geométrica que a cada ponto P faz corresponder um ponto P' tal que:*

- $\overline{PP'}$ *é perpendicular ao eixo r;*
- *a distâncias de P e de P' ao eixo r são iguais.*

Propriedades da Reflexão:

- Uma figura e a sua imagem por reflexão sobre um eixo de reflexão são congruentes;
- Se dobrarmos a folha pelo eixo de reflexão r, a figura original e a sua imagem sobrepõem-se ponto por ponto;
- A reflexão muda o sentido dos ângulos mas mantém a sua amplitude.

Considerando a reta $y = x$ como eixo de reflexão, Figura 4.2. observemos que a reflexão de um ponto $P = (x, y)$ qualquer, que indicaremos por $\mathrm{R}(x, y)$ é o ponto $P' = (y, x)$, ou seja,

$$\mathrm{R}(x, y) = (y, x).$$

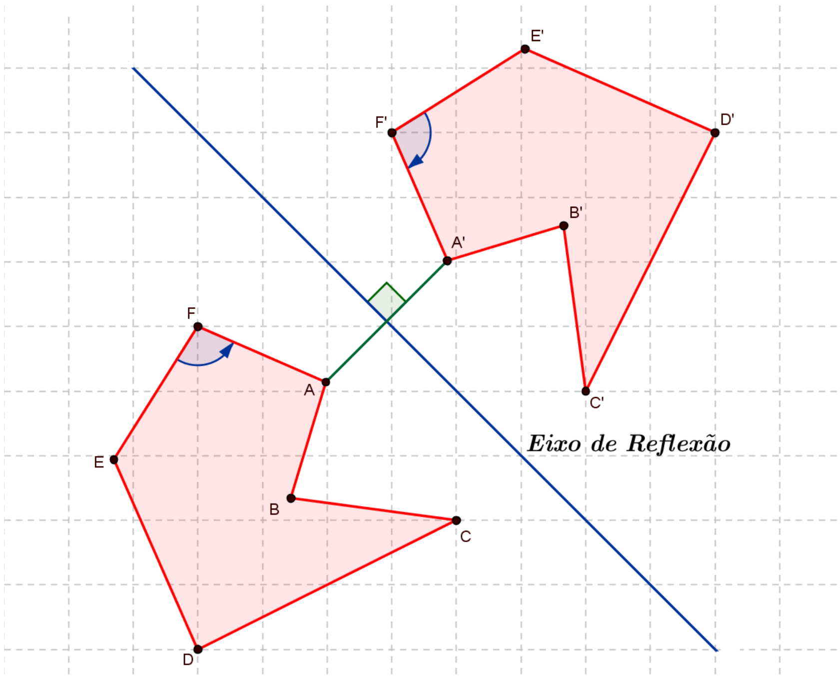

Figura 4.1: Exemplo de Reflexão de imagem.

Definição 4.4. *Seja $[a, b]$ um intervalo fechado e limitado da reta. Chamamos partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ um conjunto finitos de pontos $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$, ordenado da seguinte forma:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Note que tal partição divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Cada um destes subintervalos tem comprimento $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ e a soma destes comprimentos é igual a $b - a$, o comprimento do intervalo original:

$$\sum_{i=1}^{n} \triangle x_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

4.1 Convexidade da hipérbole

Nesta seção mostraremos que a hipérbole equilátera dada pela função $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $x > 0$, é convexa. Mas, antes de tratarmos diretamente da hipérbole, vejamos a definição de *função convexa.*

Definição 4.5. *Seja I um intervalo não vazio de $\mathbb{R}$. A função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **convexa** em I quando*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

para todos os pares $(x, y) \in I$ e todo $t \in (0, 1)$. É estritamente convexa se a desigualdade

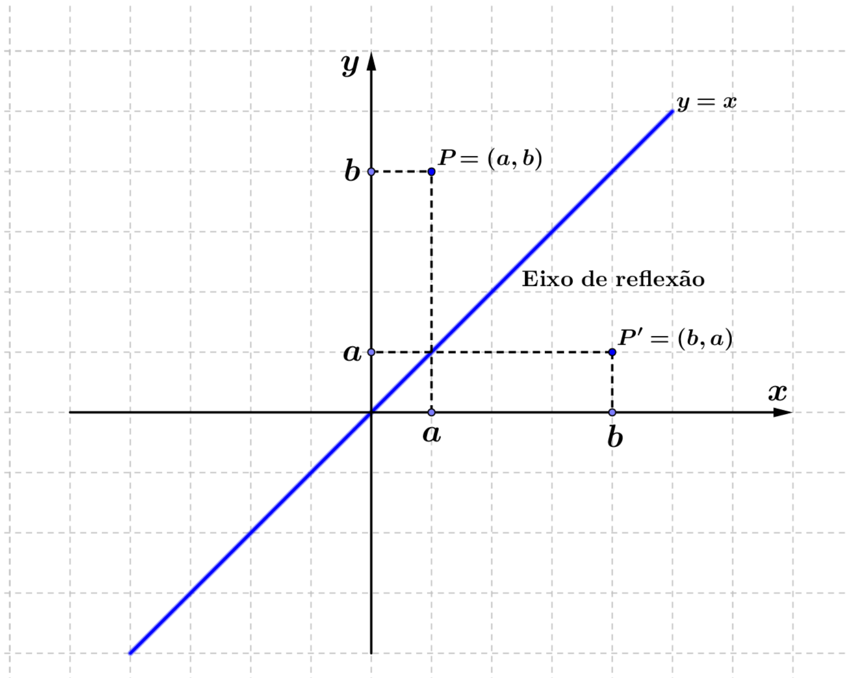

Figura 4.2: Reflexão do ponto $P = (a, b)$ em relação a reta $y = x$.

é estrita, isto é,

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Geometricamente, a desigualdade significa que o segmento de linha de $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$, que é a corda que une os dois pontos, está acima do gráfico de f.

Uma equivalência é que o gráfico de f está sempre acima da reta tangente em um ponto qualquer do seu gráfico, quando esta existir.

Agora, vejamos que a hipérbole equilátera dada por $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, é convexa.

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^*$, vamos mostrar que

$$f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Vejamos,

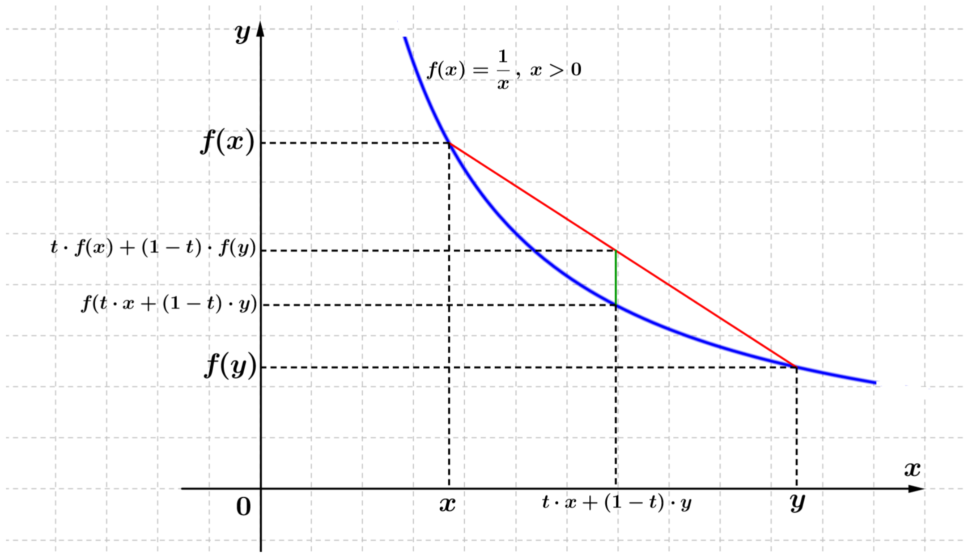

Figura 4.3: Convexidade de $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x > 0.$

$$
\begin{array}{rcl}
f((1-t)x+ty) & = & \dfrac{1}{(1-t)x+ty} < (1-t)\cdot\dfrac{1}{x} + t\cdot\dfrac{1}{y} \\
\dfrac{1}{(1-t)x+ty} & < & \dfrac{(1-t)y+tx}{xy} \\
 & \Updownarrow & \\
xy & < & [(1-t)y+tx]\cdot[(1-t)x+ty] \\
 & \Updownarrow & \\
xy & < & (1-t)^2xy + (1-t)ty^2 + (1-t)tx^2 + t^2xy \\
 & \Updownarrow & \\
xy & < & \left[(1-t)^2+t^2\right]xy + t(1-t)(x^2+y^2) \\
 & \Updownarrow & \\
xy & < & (1-2t+t^2+t^2)xy + (t-t^2)(x^2+y^2) \\
 & \Updownarrow & \\
xy & < & xy + (2t^2-2t)xy + (t-t^2)(x^2+y^2) \\
 & \Updownarrow & \\
0 & < & 2t(t-1)xy + t(1-t)(x^2+y^2) \\
 & \Updownarrow & \\
0 & < & t(1-t)(x^2+y^2-2xy) \\
 & \Updownarrow & \\
0 & < & t(1-t)(x-y)^2,
\end{array}
$$

verdadeiro, pois $1-t>0$ *e* $(x-y)^2>0\ \forall\, t\in(0,1)$ *e todo* $x,y>0$.

4.2 Área de uma faixa da hipérbole

Seja a função $f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{x}$. O gráfico desta função é a curva plana denominada Hipérbole Equilátera, veja Exemplo 19, sendo que um ramo da hipérbole está no primeiro quadrante e o outro está localizado no terceiro quadrante. O ramo do primeiro quadrante, Figura 4.4, que denotaremos por $\mathbb{H}$, é aquele que a função associa a cada número real positivo x o número $y=\dfrac{1}{x}$. Então $\mathbb{H}$ é o subconjunto do plano cujos elementos são os pontos da forma $\left(x,\dfrac{1}{x}\right)$, com $x>0$. Em símbolo,

$$\mathbb{H}=\left\{(x,y);\ \ y=\frac{1}{x},\ x>0\right\}.$$

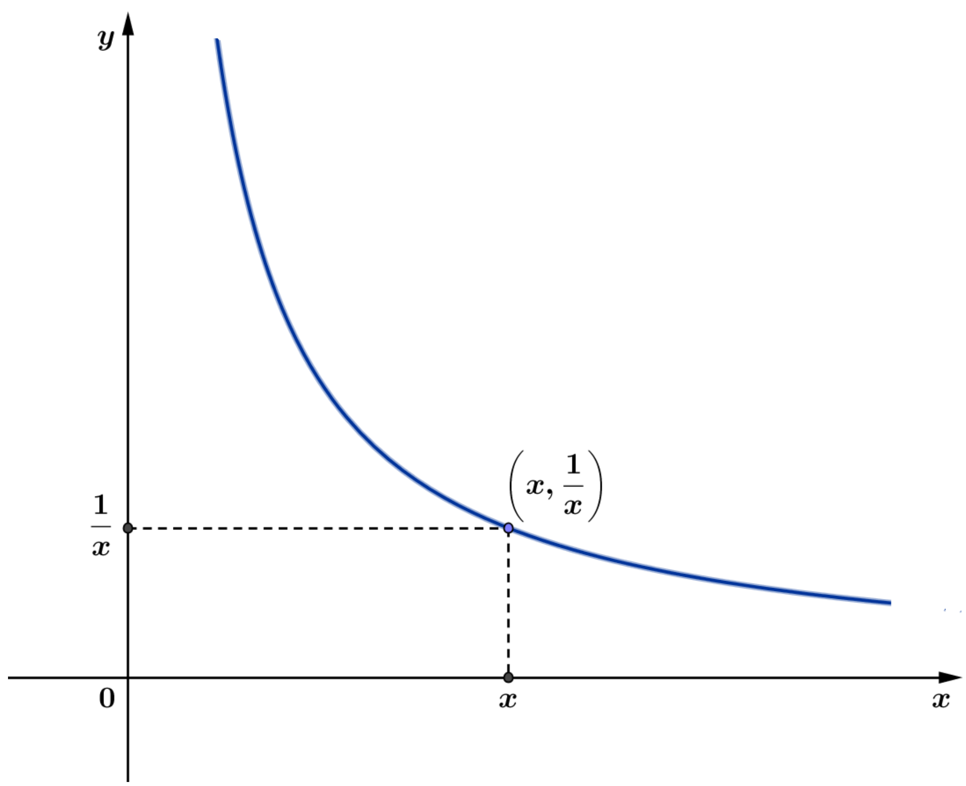

Figura 4.4: Gráfico de $f(x)=\dfrac{1}{x}$, com $x>0$.

Uma *faixa da hipérbole* é obtida quando fixamos dois números reais positivos $u,\ v$, com $u<v$, e consideramos a região do plano, que indicaremos por $\mathbb{H}_u^v$, limitada pelas retas verticais $x=u$ e $x=v$, pelo eixo das abscissas, e pela hipérbole $\mathbb{H}$. Portanto, a

faixa $\mathbb{H}_u^v$ é formada por todos os pontos (x, y) do plano cujas coordenadas satisfazem as condições $u \leq x \leq v$ e $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$, Figura 4.5. Em notação de conjunto, temos

$$\mathbb{H}_u^v = \left\{(x, y);\ u \leq x \leq v,\ \ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

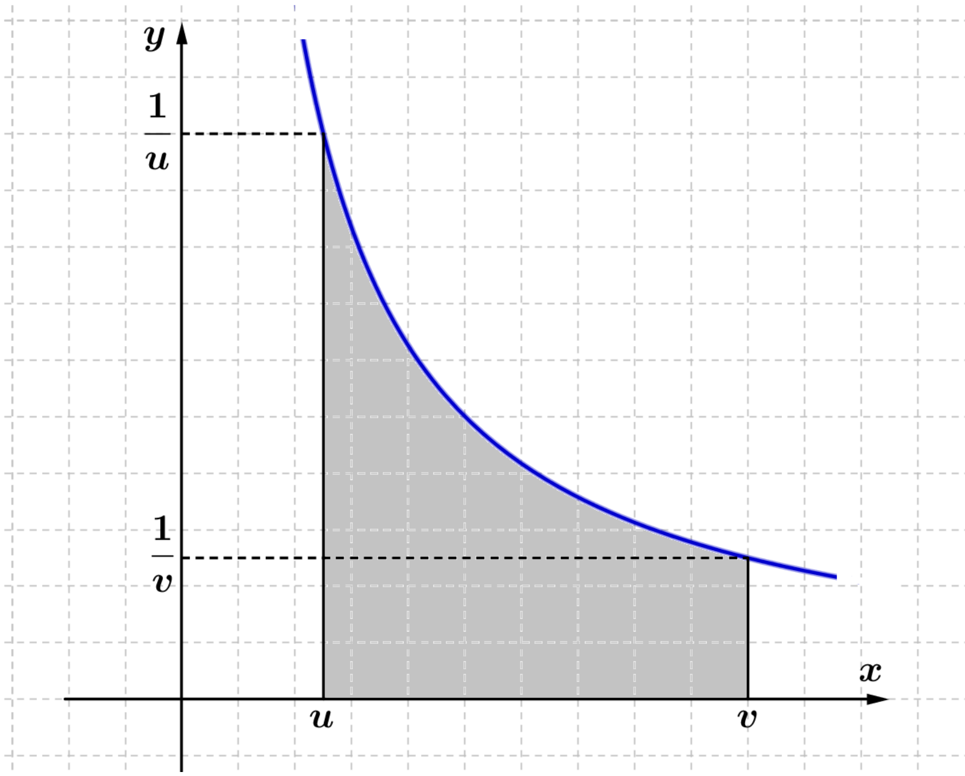

Figura 4.5: Faixa $\mathbb{H}_u^v$.

Vejamos uma maneira de como proceder a fim de calcular a área da região $\mathbb{H}_u^v$ em destaque na Figura 4.5. Para tanto, vamos considerar uma partição de intervalo $[u, v]$, constituída pelo conjunto de pontos $\mathcal{P} = \{u = p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ , p_n = v\}$. Assim, ficam determinados n subintervalos, cada um deles da forma $[p_{i-1}, p_i]$, sendo que o índice **i** varia de **1** até **n**, isto é, $1 \leq i \leq n$. No nosso caso, as n divisões de $[u, v]$ terão o mesmo tamanho, ou seja, cada subintervalo terá comprimento $\triangle p_i = p_i - p_{i-1}$, para $1 \leq i \leq n$, dado por $\dfrac{p_n - p_0}{n} = \dfrac{v - u}{n}$. Dessa forma, $\triangle p_1 = p_1 - p_0,\ \triangle p_2 = p_2 - p_1,\ \cdots\ , \triangle p_n = p_n - p_{n-1}$. Figura 4.6.

Em cada um dos intervalos $[p_{i-1}, p_i]$ da decomposição, consideramos a região $\mathcal{P}_i$ composta pelo retângulo $\mathcal{R}_i$ de base no intervalo $[p_{i-1}, p_i]$ e altura $\dfrac{1}{p_i}$, o triângulo $\mathcal{T}_i$ de base em $[p_{i-1}, p_i]$ e altura $\dfrac{1}{p_{i-1}} - \dfrac{1}{p_i}$ e o triângulo curvo $\mathcal{C}_i$, veja Figura 4.6. O vértice superior direito do retângulo toca a hipérbole $\mathbb{H}$.

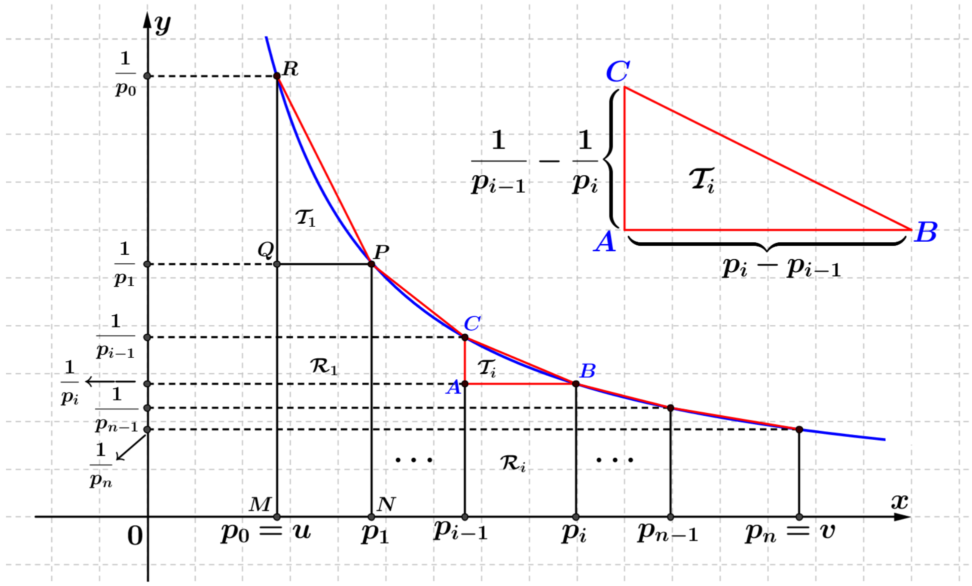

Figura 4.6: Divisão da faixa da hipérbole $\mathbb{H}_u^v$.

Podemos observar ainda, Figura 4.6, que:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= u \\
p_1 &= u + \frac{v-u}{n} \\
p_2 &= u + 2 \cdot \frac{v-u}{n} \\
p_3 &= u + 3 \cdot \frac{v-u}{n} \\
&\vdots \\
p_i &= u + i \cdot \frac{v-u}{n} \\
&\vdots \\
p_{n-1} &= u + (n-1) \cdot \frac{v-u}{n} \\
p_n &= v
\end{aligned}
$$

Assim, a divisão do intervalo $[u, v]$ fica delimitada pelos pontos

$$u < u + \frac{v-u}{n} < u + 2 \cdot \frac{v-u}{n} < \cdots < u + i \cdot \frac{v-u}{n} < \cdots < u + (n-1) \cdot \frac{v-u}{n} < v$$

dessa forma, o subintervalo $\left[u + (i-1) \cdot \frac{v-u}{n}, u + i \cdot \frac{v-u}{n}\right]$ será a base do retângulo $\mathcal{R}_i$, de altura $\dfrac{n}{nu + i(v-u)}$.

Designaremos por:

- $A(\mathcal{R}_i) \longrightarrow$ *área do i-ésimo retângulo.*
- $A(\mathcal{T}_i) \longrightarrow$ *área do i-ésimo triângulo.*
- $A(\mathcal{C}_i) \longrightarrow$ *área do i-ésimo triângulo curvo.*
- $A(\mathbb{H}_u^v) \longrightarrow$ *área da faixa da hipérbole de* u a v.

Exemplo 20. *Alguns exemplos com a simbologia adotada.*

1. $A(\mathcal{R}_1) = (p_1 - p_0) \cdot \dfrac{1}{p_1}$ *(área do retângulo $MNPQ$, Figura 4.6).*
2. $A(\mathcal{T}_1) = \dfrac{1}{2} \cdot (p_1 - p_0) \cdot \left(\dfrac{1}{p_0} - \dfrac{1}{p_1}\right)$*(área do triângulo PQR, Figura 4.6).*

Então, considerando uma região P_i qualquer da faixa $\mathbb{H}_u^v$ da hipérbole, Figura 4.6, temos:

- $A(\mathcal{R}_i) = (p_i - p_{i-1}) \cdot \dfrac{1}{p_i}$.
- $A(\mathcal{T}_i) = \dfrac{1}{2} \cdot (p_i - p_{i-1}) \cdot \left(\dfrac{1}{p_{i-1}} - \dfrac{1}{p_i}\right)$.

Podemos observar que a área da região $\mathbb{H}_u^v$ é dada por:

$$A(\mathbb{H}_u^v) = \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{R}_i) + \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{C}_i) \tag{4.1}$$

Observamos, ainda que, $A(\mathcal{C}_i) < A(\mathcal{T}_i)$ devido a convexidade da hipérbole. Calcular as áreas $A(\mathcal{R}_i)$ e $A(\mathcal{T}_i)$ é fácil quando se conhecem os pontos de subdivisão do intervalo $[u, v]$, então a dificuldade está em se calcular a área $A(\mathcal{C}_i)$. Para sanar esta dificuldade, vamos mostrar que, para n muito grande, ou seja, quanto maior o números de divisões de $[u, v]$ mais próximo estão as áreas $A(\mathcal{T}_i)$ e $A(\mathcal{C}_i)$. Então, se n tende ao infinito $A(\mathcal{T}_i)$ tende a zero, isto é,

$$n \to \infty \Rightarrow A(\mathcal{T}_i) \to 0$$

e o mesmo acontece com

$$A(\mathcal{C}_i).$$

Vejamos,

$$
\begin{aligned}
A(\mathcal{T}_i) &= \frac{1}{2}\cdot(p_i - p_{i-1})\cdot\left(\frac{1}{p_{i-1}} - \frac{1}{p_i}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{v-u}{n}\cdot\left[\frac{1}{(i-1)\cdot\dfrac{v-u}{n}+u} - \frac{1}{i\cdot\dfrac{v-u}{n}+u}\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{v-u}{n}\cdot\left[\frac{n}{(i-1)\cdot(v-u)+n\cdot u} - \frac{n}{i\cdot(v-u)+n\cdot u}\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{v-u}{n}\cdot\left[n\cdot\frac{i\cdot(v-u)+n\cdot u - i\cdot(v-u)+(v-u)-n\cdot u}{[(i-1)\cdot(v-u)+n\cdot u]\cdot[i\cdot(v-u)+n\cdot u]}\right]\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{v-u}{n}\cdot\frac{n\cdot(v-u)}{[(i-1)\cdot(v-u)+n\cdot u]\cdot[i\cdot(v-u)+n\cdot u]}\\
A(\mathcal{T}_i) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(v-u)^2}{[(i-1)\cdot(v-u)+n\cdot u]\cdot[i\cdot(v-u)+n\cdot u]}. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Observe que,

- $(i-1)\geq 0$
- $(i-1)\cdot(v-u)\geq 0$
- $(i-1)\cdot(v-u)+n\cdot u\geq n\cdot u$
- $\dfrac{1}{(i-1)\cdot(v-u)+n\cdot u}\leq\dfrac{1}{n\cdot u}$

e

- $i\cdot(v-u)\geq(v-u)>0$
- $i\cdot(v-u)+n\cdot u>n\cdot u$
- $\dfrac{1}{i\cdot(v-u)+n\cdot u}<\dfrac{1}{n\cdot u}$

logo,

$$\frac{1}{[(i-1)\cdot(v-u)+n\cdot u]\cdot[i\cdot(v-u)+n\cdot u]}\leq\frac{1}{n^2\cdot u^2}$$

então, da expressão 4.2, temos:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(v-u)^2}{[(i-1)\cdot(v-u)+n\cdot u]\cdot[i\cdot(v-u)+n\cdot u]}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{(v-u)^2}{u^2}\cdot\frac{1}{n^2}. \qquad (4.3)$$

Já sabemos que, veja Figura 4.6,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{C}_i) \leq \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{T}_i) \tag{4.4}$$

mas,

$$\sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{T}_i) \leq n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(v-u)^2}{u^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v-u}{u}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}\right]$$

e quando n tende ao infinito, $\dfrac{1}{n}$ tende a zero, logo $\sum\limits_{i=1}^{n} A(\mathcal{T}_i)$ tende a zero. Assim, da expressão 4.4 e pelo Teorema 2.9, $\sum\limits_{i=1}^{n} A(\mathcal{C}_i)$ também tende a zero. Portanto, a área da região $\mathbb{H}_u^v$ é dada por:

$$\lim \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{R}_i), \quad \text{quando } n \text{ tende ao infinito.}$$

Em símbolo,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{T}_i) \leq \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(v-u)^2}{u^2} \cdot \frac{1}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v-u}{u}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v-u}{u}\right)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.
\end{aligned}$$

Então, podemos afirmar que:

$$A(\mathbb{H}_u^v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{R}_i). \tag{4.5}$$

mas,

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{R}_i) &= (p_i - p_{i-1}) \cdot \frac{1}{p_i} \\
&= \frac{v-u}{n} \cdot \frac{n}{nu + i(v-u)} \\
&= \frac{v-u}{nu + i(v-u)}.
\end{aligned}$$

Portanto, a área de $\mathbb{H}_u^v$ é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em $\mathbb{H}_u^v$, dada por:

$$A(\mathbb{H}_u^v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{R}_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{v-u}{nu + i(v-u)}. \tag{4.6}$$

Exemplo 21. *Vamos calcular a área aproximada da região* $\mathbb{H}_1^3$.

Substituindo $u = 1$ e $v = 3$ na equação 4.6, temos:

$$A(\mathbb{H}_1^3) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{3-1}{n + i(3-1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n+2i} \tag{4.7}$$

Para $n = 8$ a área aproximada é dada por:

$$\begin{aligned} A(\mathbb{H}_1^3) &= \sum_{i=1}^{8} \frac{2}{8+2i} = \sum_{1}^{8} \frac{1}{4+i} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{28.271}{27.720} \approx 1,019877 \quad (Figura\ 4.7) \end{aligned}$$

Para $n = 50$ área aproximada é dada por:

$$\begin{aligned} A(\mathbb{H}_1^3) &\approx \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{25+i} \\ &= \frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \frac{1}{28} + \cdots + \frac{1}{73} + \frac{1}{74} + \frac{1}{75} \\ &\approx 1,08539745 \quad (Figura\ 4.8) \end{aligned}$$

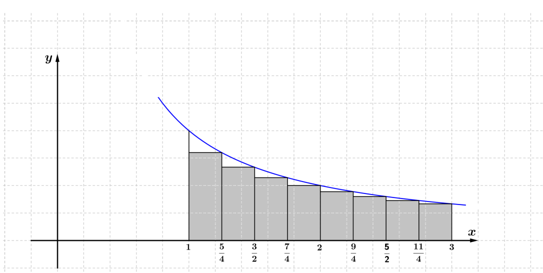

Figura 4.7: Uma aproximação para a área da região $\mathbb{H}_1^3$ com $n = 8$.

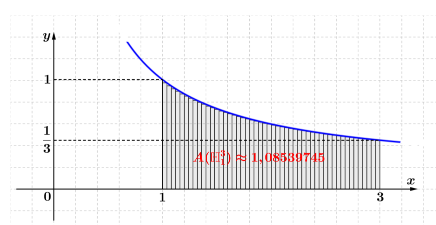

Figura 4.8: Uma aproximação para a área da região $\mathbb{H}_1^3$ com $n =$ 50.

Para $n = 1000$ área aproximada é dada por:

$$A(\mathbb{H}_1^3) \approx \sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{500+i} \approx 1,09794592$$

Tanto mais aproximado será o valor da área de $\mathbb{H}_u^v$ quanto mais refinarmos a divisão do intervalo $[u, v]$, isto é, quanto mais próximos uns dos outros estiverem os pontos de subdivisão, menor será a diferença entre o valor exato da área de $\mathbb{H}_u^v$ e as somas das áreas dos retângulos determinados.

Para calcular a área de uma faixa $\mathbb{H}_u^v$, em vez de retângulos inscritos, podemos adotar o seguinte método. Dada uma decomposição de $[u, v]$ em intervalos justapostos, sobre cada intervalo da decomposição consideramos o *trapézio secante*, o qual tem a base $p_i - p_{i-1} = \dfrac{v-u}{n}$, $1 \leq i \leq n$, e os dois lados verticais tem comprimentos $\dfrac{1}{p_i}$ e $\dfrac{1}{p_{i-1}}$, respectivamente, de modo que seus vértices toquem a hipérbole $\mathbb{H}$, Figura 4.9. Como a curva $y = \dfrac{1}{x}$ é convexa, esse trapézio contém a faixa $\mathbb{H}_{p_{i-1}}^{p_i}$ em seu interior. A reunião das áreas dos trapézios assim obtidos dá uma aproximação por excesso da área de $\mathbb{H}_u^v$, Figura 4.10.

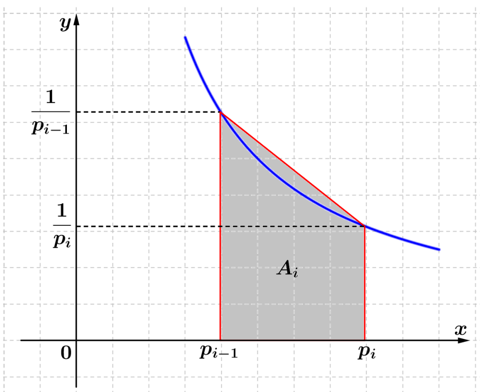

Figura 4.9: Região do Trapézio Secante.

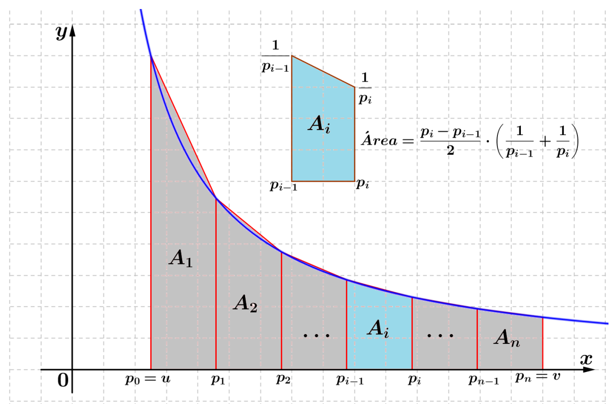

Figura 4.10: Área da região por Trapézios Secantes.

Dessa forma,

$$A(\mathbb{H}_u^v) \approx A(A_1) + A(A_2) + \cdots + A(A_i) + \cdots + A(A_n) = \sum_{i=1}^{n} A(A_i),$$

onde $A(A_i)$ representa a área do trapézio A_i, $1 \leq i \leq n$. Mas,

$$
\begin{aligned}
A(A_1) &= \frac{v-u}{2n} \cdot \left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} \right) \\
A(A_2) &= \frac{v-u}{2n} \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) \\
&\vdots \\
A(A_i) &= \frac{v-u}{2n} \cdot \left(\frac{1}{p_{i-1}} + \frac{1}{p_i} \right) \\
&\vdots \\
A(A_{n-1}) &= \frac{v-u}{2n} \cdot \left(\frac{1}{p_{n-2}} + \frac{1}{p_{n-1}} \right) \\
A(A_n) &= \frac{v-u}{2n} \cdot \left(\frac{1}{p_{n-1}} + \frac{1}{p_n} \right)
\end{aligned}
$$

Então,

$$
A(\mathbb{H}_u^v) \approx \frac{v-u}{2n} \cdot \left[\left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} \right) + \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{p_{i-1}} + \frac{1}{p_i} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{p_{n-1}} + \frac{1}{p_n} \right) \right]
$$

Os termos $\frac{1}{p_0}$ e $\frac{1}{p_n}$ aparecem uma vez na expressão acima, enquanto que os demais termos aparecem duas vezes, logo,

$$
A(\mathbb{H}_u^v) \approx \frac{v-u}{2n} \cdot \left[\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_n} + 2 \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots \frac{1}{p_i} \cdots + \frac{1}{p_{n-1}} \right) \right]
$$

ou

$$
A(\mathbb{H}_u^v) \approx \frac{v-u}{2n} \cdot \left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_n} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i} \right)
$$

Lembrando que

$$
\begin{aligned}
p_0 &= u \\
p_n &= v \\
p_i &= u + i \cdot \frac{v-u}{n}.
\end{aligned}
$$

Podemos, então, estabelecer um método para aproximar a área da faixa $\mathbb{H}_u^v$, que designaremos **método dos trapézios secantes**, dado pela expressão

$$A(\mathbb{H}_u^v) \quad \approx \quad \frac{v-u}{2n} \cdot \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{un + i \cdot (v-u)} \right). \tag{4.8}$$

Convém destacar que as aproximações obtidas desse modo são melhores do que as encontradas da maneira anterior, ou seja, pelo método dos retângulos.

Como ilustração, vamos obter uma aproximação para a área de $\mathbb{H}_1^2$ pelo método dos trapézios secantes. Decompondo o intervalo $[1, 2]$ em 1000 intervalos de mesmo comprimento, igual a $\frac{1}{1000}$. A área de cada um deles é igual a $\frac{1}{2000}$ (metade do lado horizontal) vezes a soma dos lados verticais. Os lados verticais desses trapézios têm medidas $\frac{1}{p_i}$, $i = 0,\ 1,\ \cdots,\ 1000$ onde

$$p_0 = 1,\ p_1 = \frac{1001}{1000},\ p_2 = \frac{1002}{1000},\ p_3 = \frac{1003}{1000},\ \cdots,\ p_{999} = \frac{1999}{1000},\ p_{1000} = 2.$$

Então, as medidas dos 1001 lados verticais são:

$$1,\ \frac{1000}{1001},\ \frac{1000}{1002},\ \frac{1000}{1003},\ \cdots,\ \frac{1000}{1999},\ \frac{1}{2}.$$

Portanto, a área dos trapézios assim obtidos, conforme a expressão 4.8 e as informações anteriores, vale

$$\begin{aligned} A(\mathbb{H}_1^2) &\approx \frac{1}{2000} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{999} \frac{1000}{1000+i} \right] = \\ &= \frac{1}{2000} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1000}{1001} + \frac{1000}{1002} + \cdots + \frac{1000}{1999} \right) \right] \\ A(\mathbb{H}_1^2) &\approx 0,69314724306. \end{aligned}$$

Um outro método para se obter a área de uma faixa $\mathbb{H}_u^v$, é considerar sobre cada intervalo $[p_{i-1}, p_i]$ da decomposição $[u, v]$, o trapézio com base $[p_{i-1}, p_i]$, dois lados verticais e cujo lado inclinado é o segmento $\overline{AB}$ da *tangente* à hipérbole tirada pelo ponto de abscissa $\frac{p_{i-1} + p_i}{2}$. Esse trapézio será chamado o *trapézio tangente* à hipérbole no intervalo $[p_{i-1}, p_i]$. Ficando subentendido que essa tangente será sempre traçada pelo ponto médio de cada intervalo $[p_{i-1}, p_i]$ pertencente à hipérbole, ou seja, pelo ponto $\left(\frac{p_{i-1} + p_i}{2}, \frac{2}{p_{i-1} + p_i} \right)$. Veja Figura 4.11.

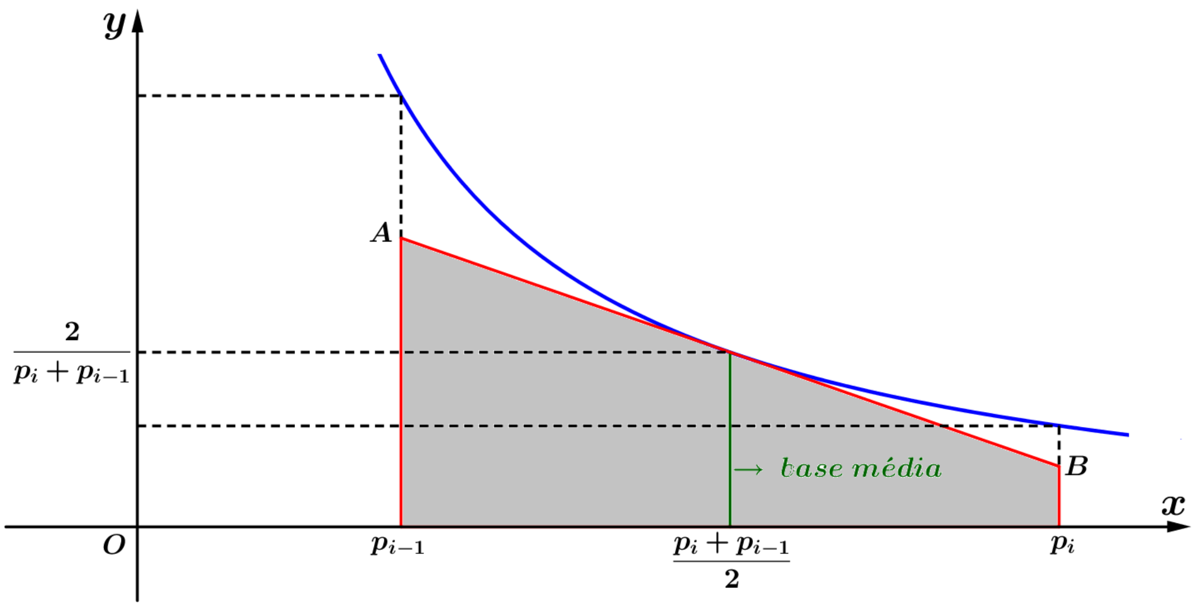

Figura 4.11: Trapézio tangente.

A área do trapézio tangente é

$$2 \cdot \frac{p_i - p_{i-1}}{p_i + p_{i-1}}$$

pois $\dfrac{2}{p_i + p_{i-1}}$ é sua base média e $p_i - p_{i-1}$ é sua altura.

A reunião das áreas dos trapézios tangentes, relativos a uma decomposição do intervalo $[u, v]$ é uma aproximação por falta da área de $\mathbb{H}_u^v$. Vamos obter uma expressão para aproximar essa área.

$$\begin{aligned} A(\mathbb{H}_u^v) &\approx \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \frac{p_i - p_{i-1}}{p_i + p_{i-1}} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \frac{\dfrac{v-u}{n}}{\dfrac{2nu + (v-u)(2i-1)}{n}} \\ A(\mathbb{H}_u^v) &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{2(v-u)}{2nu + (v-u)(2i-1)}. \qquad (4.9) \end{aligned}$$

Esta expressão nos dá uma aproximação para a área de $\mathbb{H}_u^v$ usando trapézios tangentes. Como exemplo, uma aproximação para $A(\mathbb{H}_1^2)$, com $n = 1000$, é:

$$A(\mathbb{H}_1^2) \approx \sum_{i=1}^{1000} \frac{2}{1999 + 2i} \approx 0,69314714930995.$$

Capítulo 5

O Logaritmo Natural e a Hipérbole

Neste capítulo daremos um significado geométrico para o *logaritmo natural*, ou seja, veremos que o logaritmo natural é definido como a área $A(\mathbb{H}_1^v)$ do ramo positivo da hipérbole equilátera $xy - 1 = 0$.

Definição 5.1. *Seja v um número real positivo. Definimos o Logaritmo Natural de v como sendo o valor atribuído a área orientada da faixa $\mathbb{H}_1^v$, ou seja, a área orientada entre a hipérbole $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e o eixo x, entre as retas $x = 1$ e $x = v$. Assim, escrevemos $ln(v)$ para indicar o logaritmo natural de v. Então,*

$$ln(v) = A(\mathbb{H}_1^v)$$

Vamos convencionar de se tomar $A(\mathbb{H}_1^v) < 0$ quando $0 < v < 1$, nesse caso,

$$ln(v) < 0, \text{ } se \text{ } 0 < v < 1.$$

Quando $v = 1$, a região se reduzirá a uma linha vertical, que não possui área, ou melhor, tem área igual a zero, assim sendo

$$ln(1) = A(\mathbb{H}_1^1) = 0.$$

Para $v > 1$, tem-se $ln(v) = A(\mathbb{H}_1^v) > 0$, ou seja,

$$ln(v) > 0, \text{ } se \text{ } v > 1.$$

Não está definido $ln(v)$ para $v < 0$.

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, também não está definido ln(0), ou seja, quando v se aproxima cada vez mais de zero a área $A(\mathbb{H}_1^v)$ cresce indefinidamente, porém, com o sinal menos.

Vimos no capítulo anterior que a área de uma faixa da hipérbole, $A(\mathbb{H}_u^v)$, pode ser

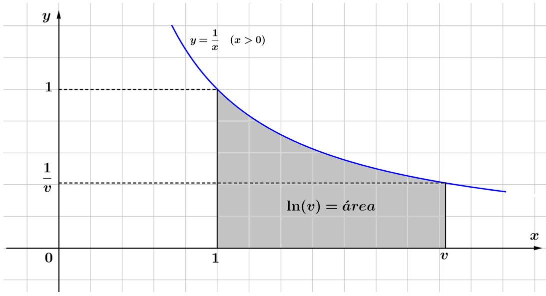

Figura 5.1: A área indicada é igual a $ln(v)$.

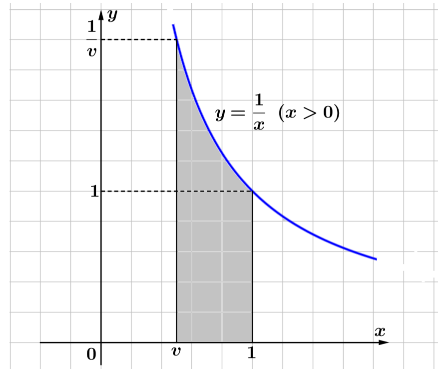

Figura 5.2: Como $0 < v < 1$, $ln(v)$ é a área em destaque, com o sinal menos.

aproximada pelas áreas de regiões retangulares dadas por:

$$A(\mathbb{H}_u^v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{R}_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{v-u}{nu + i(v-u)}.$$

Então, o logaritmo natural de v, $\ln(v)$, definido como $A(\mathbb{H}_1^v)$ é dado por:

$$\ln(v) = A(\mathbb{H}_1^v) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{v-1}{n + i(v-1)}. \tag{5.1}$$

No caso de usarmos os trapézios secantes, fazendo $u = 1$ em (4.8), o logaritmo natural de v é dado por:

$$\ln(v) = A(\mathbb{H}_1^v) \approx \frac{v-1}{2n} \cdot \left(\frac{v+1}{v} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{n + i(v-1)} \right). \tag{5.2}$$

Se usarmos trapézios tangentes, fazendo $u = 1$ em (4.9), o logaritmo natural pode ser aproximado por:

$$\ln(v) = A(\mathbb{H}_1^v) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{2(v-1)}{2n + (v-1)(2i-1)} \tag{5.3}$$

Exemplo 22. *Vamos obter uma aproximação para o logaritmo natural de* 2, *pelos métodos estudados, considerando* $n = 1000$.

- *Aproximação por regiões retangulares:*
  $\ln(2) = A(\mathbb{H}_1^2) \approx \sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{1000+i} \approx 0,69289724305994.$

- *Aproximação por trapézios secantes:*
  $\ln(2) = A(\mathbb{H}_1^2) \frac{1}{2000} \cdot \left(\frac{3}{2} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{999} \frac{1000}{1000+i} \right) \approx 0,69314724305994.$

- *Aproximação por trapézios tangentes:*
  $\ln(2) = A(\mathbb{H}_1^2) \approx \sum_{i=1}^{1000} \dfrac{2}{1999+2i} \approx 0,69314714930995.$

5.1 Propriedades do logaritmo natural

P.1) $\ln\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\ln(u),\ u > 1.$

Demonstração. Considerando a Figura 5.3, vamos mostrar que $A(\mathbb{H}_{\frac{1}{u}}^1) = A(\mathbb{H}_1^u)$, ou seja, $A(\mathcal{C}_1) + A(\mathcal{R}_1) = A(\mathcal{C}_2) + A(\mathcal{R}_2)$. Vejamos,

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}_1) &= A(\mathcal{R}_2), \text{ pois} \\ A(\mathcal{R}_1) &= \left(1 - \frac{1}{u}\right) \cdot 1 = 1 - \frac{1}{u} \quad \text{e} \\ A(\mathcal{R}_2) &= (u-1) \cdot \frac{1}{u} = 1 - \frac{1}{u} \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que $A(\mathcal{C}_1) = A(\mathcal{C}_2)$. Um ponto qualquer da região $\mathcal{C}_1$ é da forma $\left(\dfrac{1}{x}, y\right)$ e um ponto qualquer de $\mathcal{C}_2$ é da forma $(x, \dfrac{1}{y})$, portanto, a reflexão de $\mathcal{C}_1$, pois,

$$\text{em } \mathcal{C}_1 : \begin{cases} \dfrac{1}{u} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1, \text{ no eixo Ox} \\ 1 \leq y \leq \dfrac{1}{x}, \text{ no eixo Oy} \end{cases} \Longrightarrow \text{em } \mathcal{C}_2 : \begin{cases} 1 \leq x \leq u, \text{ no eixo Ox} \\ 1 \leq y \leq \dfrac{1}{x}, \text{ no eixo Oy} \end{cases}$$

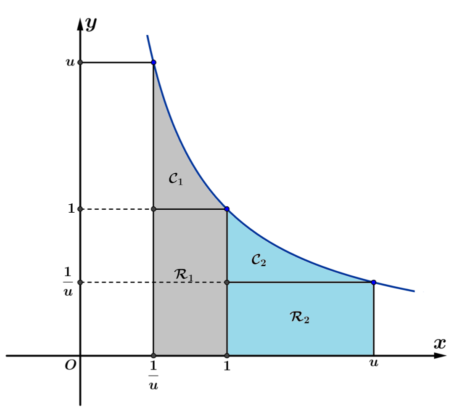

Figura 5.3: $A(\mathcal{C}_1) + A(\mathcal{R}_1) = A(\mathcal{C}_2) + A(\mathcal{R}_2)$.

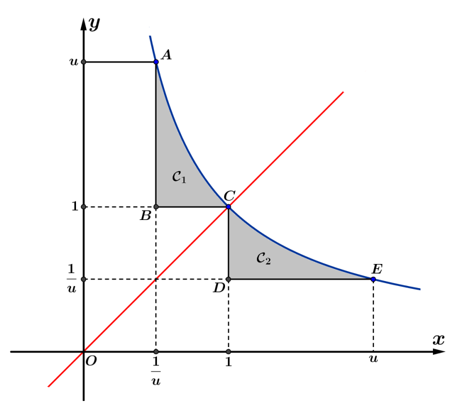

Figura 5.4: As regiões $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ têm mesma área.

Assim, as regiões $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ por **reflexão**, têm mesma área, e, como por convenção $A(\mathbb{H}_1^u) < 0$ quando $0 < u < 1$, está provado a afirmação. ■

P.2) Logaritmo de um produto é igual a soma dos logaritmos dos fatores, ou seja,

$$\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v), \text{ sendo } u,\ v > 0.$$

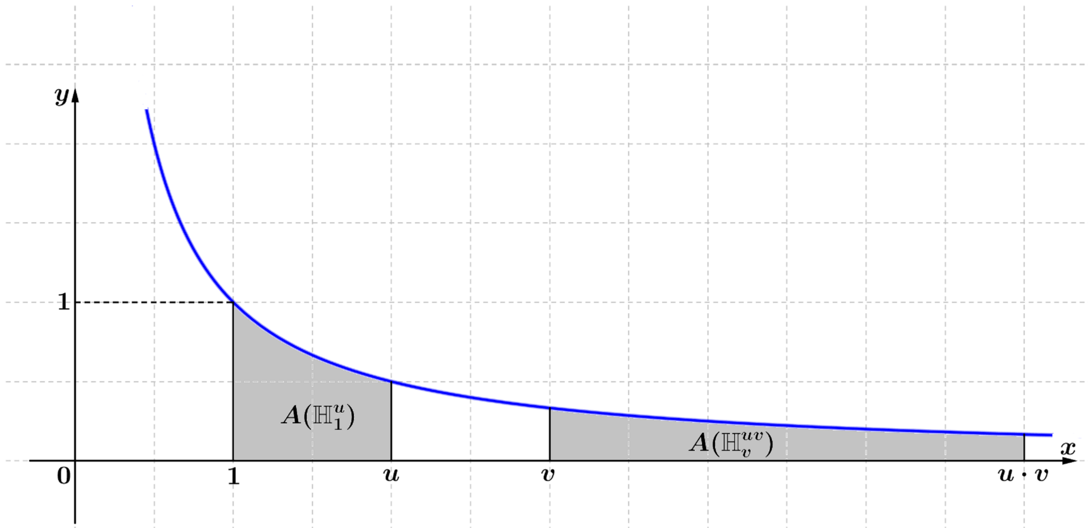

Figura 5.5: $A(\mathbb{H}_1^u)$ e $A(\mathbb{H}_v^{uv})$ são iguais.

i) Para $1 < u < v$:

Demonstração. Vamos mostrar que $A(\mathbb{H}_1^u)$ e $A(\mathbb{H}_v^{uv})$, destacadas na Figura 5.5, são iguais, ou seja

$$A(\mathbb{H}_1^u) = A(\mathbb{H}_1^{uv}) - A(\mathbb{H}_1^v),$$

aí teremos

$$\ln(u) = \ln(u \cdot v) - \ln(v).$$

Considerando as regiões $\mathbb{H}_1^u$ e $\mathbb{H}_v^{uv}$ da Figura 5.5, decompomos os intervalos $[1, u]$ e $[v, uv]$ em n intervalos justapostos da forma $\dfrac{u-1}{n}$ e $\dfrac{uv-v}{n} = v \cdot \dfrac{u-1}{n}$, respectivamente. Com base nessas divisões indicaremos os n pontos de $[1, u]$ por $\{1 = p_0, p_1, \cdots, p_n = u\}$ e os de $[v, uv]$ por $\{v = q_0, q_1, \cdots, q_n = uv\}$ formando retângulos, respectivamente, de alturas $\dfrac{1}{p_i}$ e $\dfrac{1}{q_j}$ e bases $(p_i - p_{i-1})$ e $(q_j - q_{j-1})$, $1 \leq i \leq n$ e $v \leq j \leq n$, cujos vértices superiores direito desses retângulos tocam a hipérbole $\mathbb{H}$.

Para a região $A(\mathbb{H}_1^u)$, indicaremos a área de cada retângulo por $A(\mathcal{P}_i)$, logo a área da região é:

$$A(\mathbb{H}_1^u) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(\mathcal{P}_i) \tag{5.4}$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
A(\mathcal{P}_i) &= \frac{u-1}{n}\cdot\frac{1}{p_i}\\
&= \frac{u-1}{n}\cdot\frac{1}{1+i\cdot\dfrac{u-1}{n}}\\
&= \frac{u-1}{n}\cdot\frac{n}{n+i\cdot(u-1)}\\
&= \frac{u-1}{n+i\cdot(u-1)} \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Então,

$$A(\mathbb{H}_1^u) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u-1}{n+i\cdot(u-1)} \qquad (5.6)$$

Para a região $A(\mathbb{H}_v^{uv})$, indicaremos a área de cada retângulo por $A(\mathcal{Q}_j)$, logo a área da região é:

$$A(\mathbb{H}_v^{uv}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=v}^{n}A(\mathcal{Q}_j) \qquad (5.7)$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
A(\mathcal{Q}_j) &= v\cdot\frac{u-1}{n}\cdot\frac{1}{q_j}\\
&= v\cdot\frac{u-1}{n}\cdot\frac{1}{v+jv\cdot\dfrac{u-1}{n}}\\
&= v\cdot\frac{u-1}{n}\cdot\frac{n}{nv+jv\cdot(u-1)}\\
&= v\cdot\frac{u-1}{n}\cdot\frac{n}{v[n+j\cdot(u-1)]}\\
&= \frac{u-1}{n+j\cdot(u-1)} \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

Então,

$$A(\mathbb{H}_v^{uv}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{u-1}{n+j\cdot(u-1)} \qquad (5.9)$$

De (5.6) e (5.9) o somatório das áreas são iguais quando n tende ao infinito. Portanto, podemos afirmar que

$$A(\mathbb{H}_1^{uv}) = A(\mathbb{H}_1^u) + A(\mathbb{H}_1^v)$$

ou seja,

$$\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v). \tag{5.10}$$

ii) Para $u,\ v \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{u},\ \dfrac{1}{v} \geq 1:$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{v}\right) &= \ln\left(\frac{1}{u}\right) + \ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln(u) - \ln(v)\\
-\ln(uv) &= -\ln(u) - \ln(v)\\
\ln(uv) &= \ln(u) + \ln(v). \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

iii) Para $u < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{u} \geq 1$ e $v \geq 1 \Rightarrow u \cdot v \geq 1$. Mas,

$$\begin{aligned}
v &= (u\cdot v)\cdot\frac{1}{u}\\
\ln(v) &= \ln\left[(uv)\cdot\frac{1}{u}\right] = \ln(uv) + \ln\left(\frac{1}{u}\right)\\
\ln(v) &= \ln(uv) - \ln(u)\\
\ln(uv) &= \ln(v) + \ln(u) \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

iv) Considerando:

- $v \geq 1$
- $u < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{u} > 1$
- $uv < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{uv} > 1$,

temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u} &= v\cdot\frac{1}{uv}\\
\ln\left(\frac{1}{u}\right) &= \ln\left(v\cdot\frac{1}{uv}\right) = \ln(v) + \ln\left(\frac{1}{uv}\right)\\
-\ln(u) &= \ln(v) - \ln(uv)\\
\ln(uv) &= \ln(u) + \ln(v).
\end{aligned}$$

Portanto, vale a propriedade, ou seja,

$$\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v). \tag{5.13}$$

□

P.3) Logaritmo de um quociente: $\ln\left(\dfrac{v}{u}\right) = \ln(v) - \ln(u)$

Demonstração. Aplicando a propriedade do produto, P.2, em $\ln\left(\frac{v}{u}\right) = \ln\left(\frac{1}{u}\cdot v\right)$, temos:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{v}{u}\right) &= \ln\left(\frac{1}{u}\cdot v\right) = \ln\left(\frac{1}{u}\right) + \ln(v) \\ \ln\left(\frac{v}{u}\right) &= -\ln(u) + \ln(v) \\ \ln\left(\frac{v}{u}\right) &= \ln(v) - \ln(u) \qquad (5.14) \end{aligned}$$

■

P.4) Para $m \in \mathbb{Z},\ m > 0,\ \ln(v^m) = m\cdot\ln(v)$. Verdade, pois:

$$\begin{aligned} \ln(v^m) &= \ln(\underbrace{v.v.\cdots.v}_{m\ vezes}) = \underbrace{\ln(v)+\ln(v)+\cdots+\ln(v)}_{m\ veze} \\ \ln(v^m) &= m\cdot\ln(v) \qquad (5.15) \end{aligned}$$

Para $m < 0$, lembramos que $-m > 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 &= \ln(1) = \ln\left(v^{-m}\cdot v^m\right) = \ln\left(v^{-m}\right) + ln\left(v^m\right) \\ 0 &= -m\cdot\ln(v) + \ln(v^m),\ \text{logo, por 5.15,} \\ \ln(v^m) &= m\cdot\ln(v). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $m \neq 0$,

$$\begin{aligned} \left(v^{\frac{1}{m}}\right)^m &= v,\ \text{tomando o logaritmo natural em ambos os lados, temos} \\ \ln(v) &= \ln\left(v^{\frac{1}{m}}\right)^m = m\cdot\ln\left(v^{\frac{1}{m}}\right),\ \text{dividindo por } m\text{, obtemos} \\ \frac{1}{m}\cdot\ln(v) &= \ln\left(v^{\frac{1}{m}}\right) \qquad (5.16) \end{aligned}$$

P.5) Sendo $r = \frac{p}{q}$ uma fração irredutível com p e $q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ \ln(v^r) = r\cdot\ln(v)$.

$$\begin{aligned} v^{\frac{p}{q}} &= \left(v^{\frac{1}{q}}\right)^p,\ \text{tomando o logaritmo natural, temos,} \\ \ln\left(v^{\frac{p}{q}}\right) &= \ln\left(v^{\frac{1}{q}}\right)^p = p\cdot\ln\left(v^{\frac{1}{q}}\right) \\ \ln\left(v^{\frac{p}{q}}\right) &= p\cdot\frac{1}{q}\cdot\ln(v) = \frac{p}{q}\cdot\ln(v),\ \text{logo,} \\ \ln(v^r) &= r\cdot\ln(v) \qquad (5.17) \end{aligned}$$

Exemplo 23. *Para obter o logaritmo natural de* $\frac{1}{2}$, $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$, *podemos usar a propriedade*

P.1, *isto é,*

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

Exemplo 24. *Para obter o logaritmo natural de* $\frac{4}{5}$ *observamos que, nesse caso, teremos* $\ln\frac{4}{5} < 0$*, pois* $0 < \frac{4}{5} < 1$*. Aplicando a propriedade P.3, temos*

$$\ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln(4) - \ln(5) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n+3i} - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{4}{n+4i}.$$

Calculando esses somatórios para $n = 1000$*, teremos*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{1000}\frac{3}{1000+3i} &\approx 1,385170064244219\\ \sum_{i=1}^{1000}\frac{4}{1000+4i} &= \sum_{i=1}^{1000}\frac{1}{250+i} \approx 1,607839192431969\end{aligned}$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{4}{5}\right) \approx \sum_{i=1}^{1000}\frac{3}{1000+3i} - \sum_{i=1}^{1000}\frac{1}{250+i} \approx -0,222669128187775.$$

Aproximações por regiões retangulares.

Considerando as definições e propriedades vistas sobre o logaritmo natural de um número real positivo, fica portanto, definida a função real

$$f(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f(x) = ln(x),$$

cujo domínio $\mathbb{R}_+$, conjunto dos números reais positivos. A cada número real $x > 0$, a função ln faz corresponder seu logaritmo natural, $\ln(x)$, definido acima.

A função $ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é *crescente*, pois, pela definição de $\ln(x)$ como sendo igual a área $A(\mathbb{H}_1^x)$, então:

Para $1 < u < v$, temos $\ln(u) < \ln(v)$, Figura 5.6.

Para $0 < u < v < 1$, temos $1 < \frac{1}{v} < \frac{1}{u}$, logo

$$\ln\left(\frac{1}{v}\right) < \ln\left(\frac{1}{u}\right) \Longrightarrow -\ln(v) < -\ln(u) \Longrightarrow \ln(u) < \ln(v).$$

Portanto, a função $f(x) = l(x)$ é crescente em todo seu domínio.

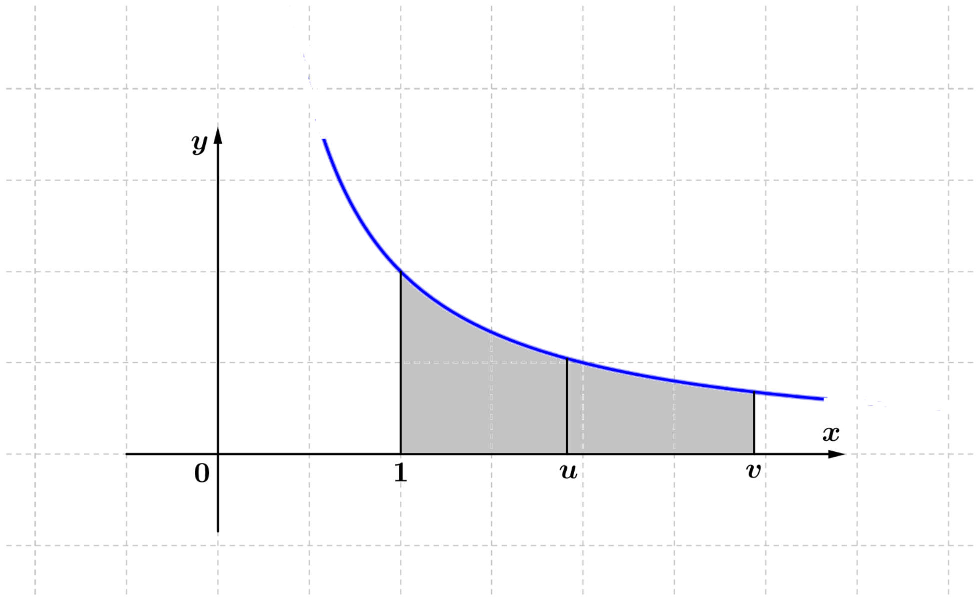

Figura 5.6: $\ln(u) < \ln(v)$, pois $A(\mathbb{H}_1^u) < A(\mathbb{H}_1^v)$.

5.2 Continuidade da função $f(x) = \ln(x)$.

Mostraremos, primeiramente, que a função f tal que $f(x) = \ln(x)$ é contínua no ponto $x = 1$. Vejamos,

- Já vimos, pela definição de $f(x) = \ln(x)$, que $\ln(1) = 0$, logo 1 é elemento do domínio de f;
- Agora, observando a Figura 5.7, temos que:

  i) Para $h > 0$, $\ln(h+1)$ é menor que a área do trapézio $(ABCD)$ e maior que a área do retângulo $(BCDE)$, assim,

  $$\frac{h}{h+1} < \ln(h+1) < \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{1}{h+1} + 1\right) = \frac{h(h+2)}{2(h+1)},$$

  tomando o limite para h tendendo a 0 pela direita, temos

  $$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h+1} &\leq \lim_{h\to 0^+} \ln(h+1) \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{h(h+2)}{2(h+1)} \\ 0 &\leq \lim_{h\to 0^+} \ln(h+1) \leq 0 \end{aligned}$$

  então, pelo Teorema 2.9, $\lim\limits_{h\to 0^+} \ln(h+1) = 0 = \ln(1)$.

  ii) Para $-1 < h < 0$, lembrando que nesse caso $\ln(h+1) < 0$, e considerando a Figura 5.8 vemos que $\ln(h+1)$ é maior do que a área do retângulo $(MNPT)$

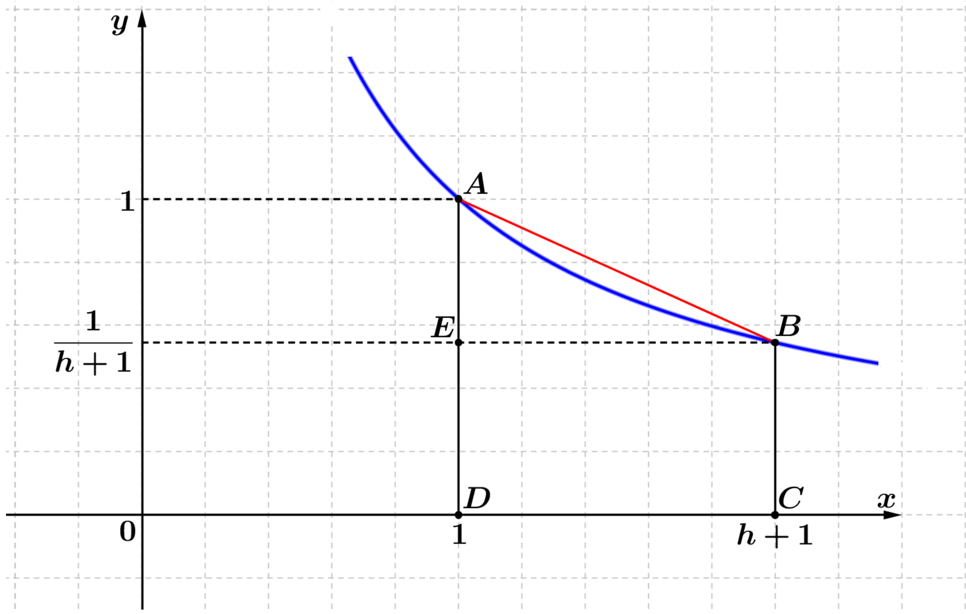

Figura 5.7: A função $\ln(x) = f(x)$ é contínua.

e menor do que a área do trapézio $(MNQT)$, assim,

$$\begin{aligned}
1 \cdot (1 - (h+1)) &< \ln(h+1) < \frac{1-(h+1)}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{h+1}\right) \\
-h &< \ln(h+1) < \frac{-h(h+2)}{2(h+1)} \\
\frac{h(h+2)}{2(h+1)} &< \ln(h+1) < h
\end{aligned}$$

tomando o limite para h tendendo a 0 pela esquerda, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^-} \frac{h(h+2)}{2(h+1)} &\leq \lim_{h \to 0^-} \ln(h+1) \leq \lim_{h \to 0^-} h \\
0 &\leq \lim_{h \to 0^-} \ln(h+1) \leq 0
\end{aligned}$$

logo, pelo Teorema 2.9, $\lim\limits_{h \to 0^-} (h+1) = 0 = \ln(1)$. Portanto, como

$$\lim_{h \to 0} \ln(h+1) = \ln(1),$$

ln é contínua em $x = 1$.

Para um ponto qualquer $x > 0$, temos que:

$$\ln(x+h) - \ln(x) = \ln \frac{x+h}{x} = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right),$$

então,

$$\lim_{h \to 0} [\ln(x+h) - \ln(x)] = 0,$$

logo

$$\lim_{h \to 0} [\ln(x+h) - \ln(x)] = 0 \Rightarrow \ln(x+h) = \ln(x).$$

Portanto, $\ln(x)$ é contínua em x real qualquer, $x > 0$.

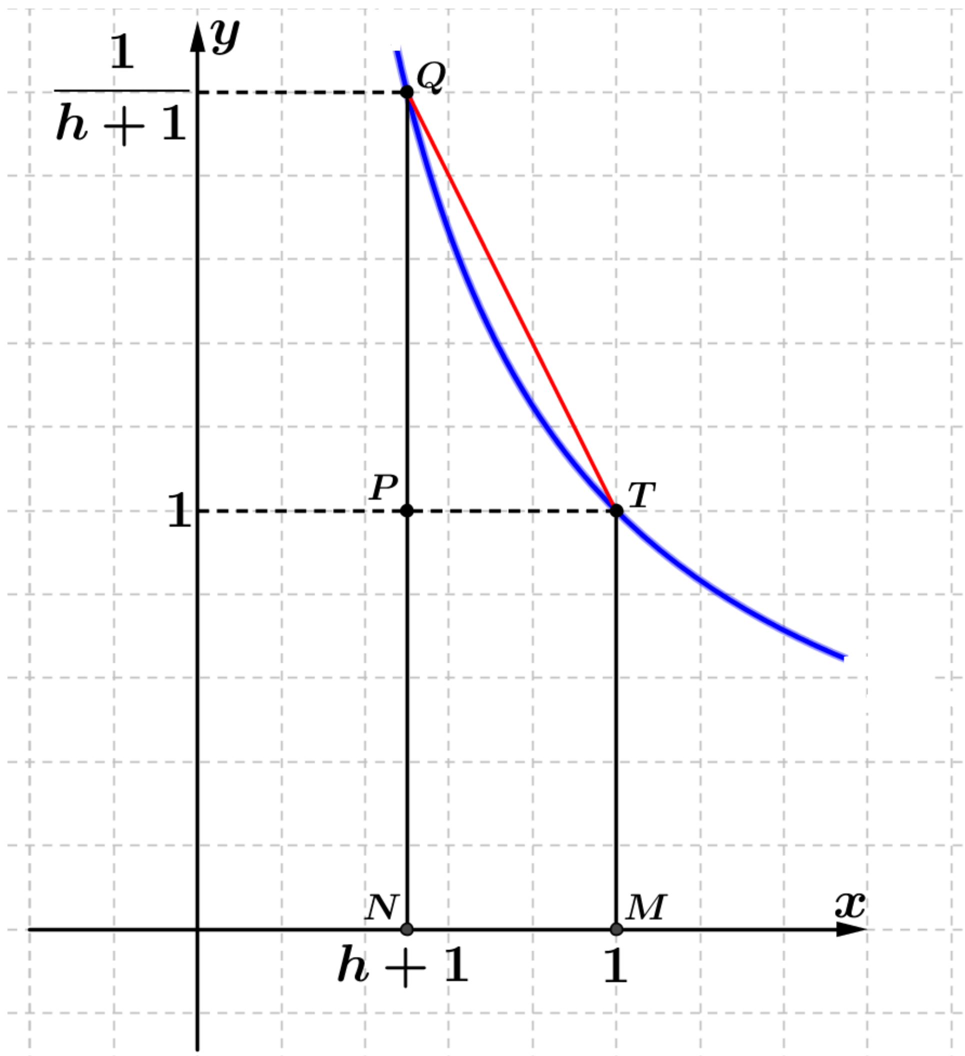

Figura 5.8: A função $\ln(x) = f(x)$ é contínua.

A função ln é ilimitada superior e inferiormente, o que decorre das igualdades $\ln(2^n) = n \cdot \ln(2)$ e $\ln(2^{-n}) = -n \cdot \ln(2)$. Sendo uma função crescente, ln é uma bijeção de $\mathbb{R}_+$ sobre $\mathbb{R}$. Sua inversa, $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, com $exp(x) = e^x$, é chamada a *função exponencial de base* e, a qual trataremos mais tarde.

5.3 Diferenciabilidade da função $f(x) = \ln(x)$.

Nesta seção, vamos mostrar que a função $\ln(x)$ é diferenciável no ponto x_0 de seu domínio. Antes, veremos a definição de derivada num ponto, mas para maiores detalhes sobre o estudo da derivada de uma função, pode-se consultar [7], [9], [8] ou qualquer livro de Cálculo I.

Definição 5.2. *Considere uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida num ponto x_0 e na sua vizinhança. Se o limite*

$$f'(x) \doteq \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \tag{5.18}$$

existir e for finito, diremos que f é derivável (ou diferenciável) em x_0.

Quando existe a derivada $f'(x)$ em todos os pontos $x \in X$ diz-se que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é *uma função derivável ou diferenciável* no conjunto X e obtém-se uma nova função $f'(x)$ chamada a função derivável de f.

Outras notações para a derivada de f no ponto x_0 são

$$Df(x_0), \quad \frac{df}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{df}{dx}\,|_{x=x_0}$$

Primeiro, vamos mostrar que $\ln(x)$ é derivável em $x = 1$, ou seja, que o limite

$$f'(1) \doteq \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

existe e é finito. Vejamos.

Para mostrar este fato, vamos dividir em casos.

1º caso. Suponhamos que $-1 < h < 0$. Observando a Figura 5.9 , é fácil ver que a área do trapézio $P'Q'C'D'$, dada por

$$A(P'Q'C'D') = h \cdot \frac{2+h}{2}$$

é menor que área da faixa $\mathbb{H}^1_{1+h}$, que por sua vez é menor que a área do trapézio $A'B'C'D'$, dada por

$$A(A'B'C'D') = \frac{h}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+h}\right) = \frac{h}{2} \cdot \frac{2+h}{1+h},$$

isto é,

$$A(P'Q'C'D') < A(\mathbb{H}^1_{1+h}) < A(A'B'C'D').$$

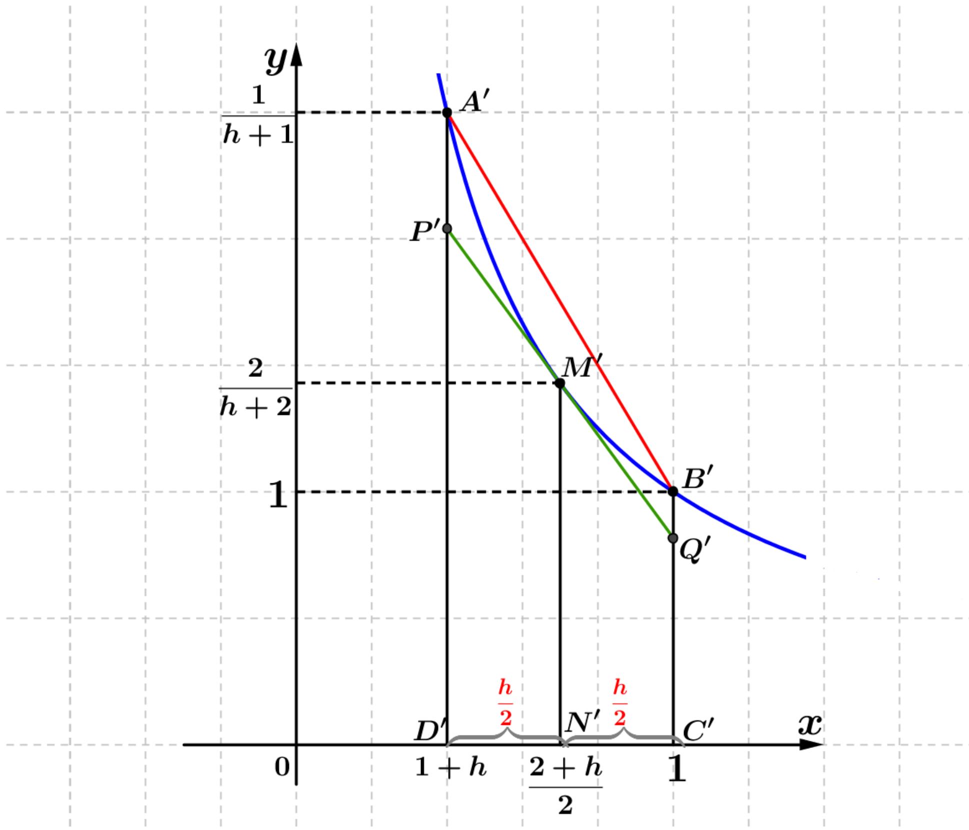

Figura 5.9: Diferenciabilidade de $\ln(x) = f(x)$.

Vimos que $A(\mathbb{H}^1_{1+h}) = \ln(1+h)$, então,

$$\begin{aligned}
h \cdot \frac{2+h}{2} &< \ln(1+h) < \frac{h}{2} \cdot \frac{2+h}{1+h}, \quad \text{divindo por} \quad h < 0 \quad \text{fica} \\
\frac{2+h}{2(1+h)} &< \frac{\ln(1+h)}{h} < \frac{2+h}{2}, \quad \text{tomando o limite com} \quad h \quad \text{tendendo} \quad 0^-, \quad \text{tem-se} \\
\lim_{h \to 0^-} \frac{2+h}{2(1+h)} &\leq \lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(1+h)}{h} \leq \lim_{h \to 0^-} \frac{2+h}{2} \\
1 &\leq \lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(1+h)}{h} \leq 1
\end{aligned}$$

que, pelo Teorema 2.9, nos dá

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1. \tag{5.19}$$

2º caso. Suponhamos que $0 < h < 1$. Como mostrado na Figura 5.10, é fácil ver que a área do trapézio $PQCD$ dada por

$$A(PQCD) = h \cdot \frac{2+h}{2}$$

é menor do que a área da faixa $\mathbb{H}_1^{1+h}$, que por sua vez é menor do que a área do trapézio $ABCD$ dada por

$$A(ABCD) = \frac{h}{2} \cdot \frac{2+h}{1+h}.$$

Isto é,

$$A(PQCD) < A(\mathbb{H}_1^{1+h}) < A(ABCD).$$

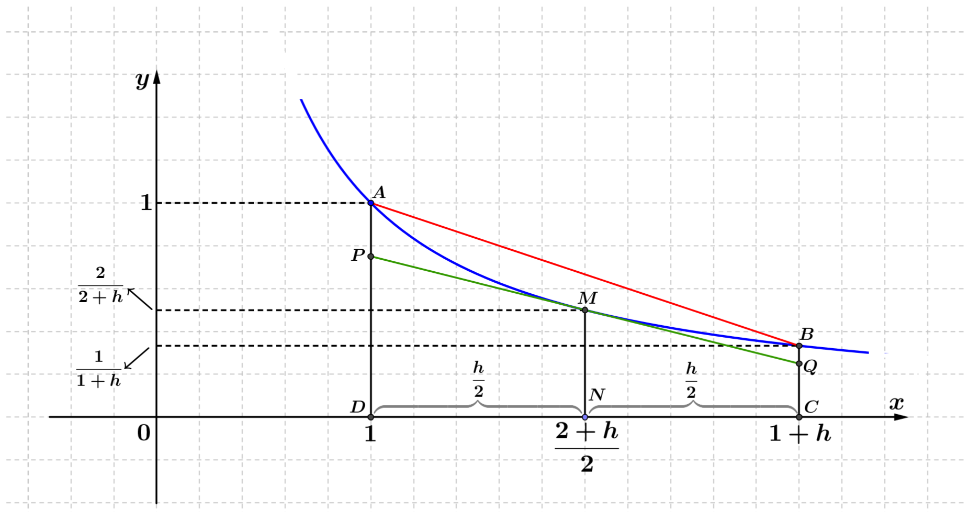

Figura 5.10: Diferenciabilidade de $\ln(x) = f(x)$.

Mas, $A(\mathbb{H}_1^{1+h}) = \ln(1+h)$, então, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
h \cdot \frac{2}{2+h} &< \ln(1+h) < \frac{h}{2} \cdot \frac{2+h}{1+h}, \quad \text{dividindo por } h \text{ fica} \\
\frac{2}{2+h} &< \frac{\ln(1+h)}{h} < \frac{2+h}{2(1+h)}, \quad \text{tomando o limite quando } h \text{ tende a } 0^+, \text{ tem-se} \\
\lim_{h\to 0^+} \frac{2}{2+h} &\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{2+h}{2(1+h)} \\
1 &\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} \leq 1
\end{aligned}$$

que pelo Teorema 2.9 nos dá

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1. \tag{5.20}$$

Como

$$\lim_{h\to 0^-} \ln(1+h) = \lim_{h\to 0^+} \ln(1+h) = 1,$$

segue que $\ln(x)$ é derivável em $x = 1$.

3º caso. Suponhamos x real no qual a função $f(x) = \ln(x)$ está definida. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}\right]
\end{aligned}$$

mas, $\lim_{h\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}} = 1$. Então,

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}\right] = \frac{1}{x}. \tag{5.21}$$

Portanto, a função $f(x) = \ln(x)$ é derivável em qualquer ponto do seu domínio e sua derivada é dada por:

$$f'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}. \tag{5.22}$$

5.4 Gráfico da função $\ln(x) = f(x)$.

O *gráfico* de uma função real de variável real f é o subconjunto do plano formado pelos pontos cuja coordenadas cartesianas são $(x, f(x))$, onde x varia no domínio de f.

Assim, o gráfico da função logaritmo natural, Figura 5.11, é o conjunto

$$G = \{(x, \ln(x));\ x > 0\}.$$

O conhecimento do gráfico da função logaritmo natural permitirá que se tenha uma ideia global sobre o comportamento desta função.

Pela definição de logaritmo e continuidade das áreas, podemos ver que a função ln é crescente e assume todos os valores reais entre $(-\infty, \infty)$. Basta observarmos que a área da faixa da hipérbole $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aumenta à medida que x cresce e a fórmula $\ln(2^n) = n \cdot \ln(2)$ permite concluir que existem logaritmos arbitrariamente grandes. Além do que, como

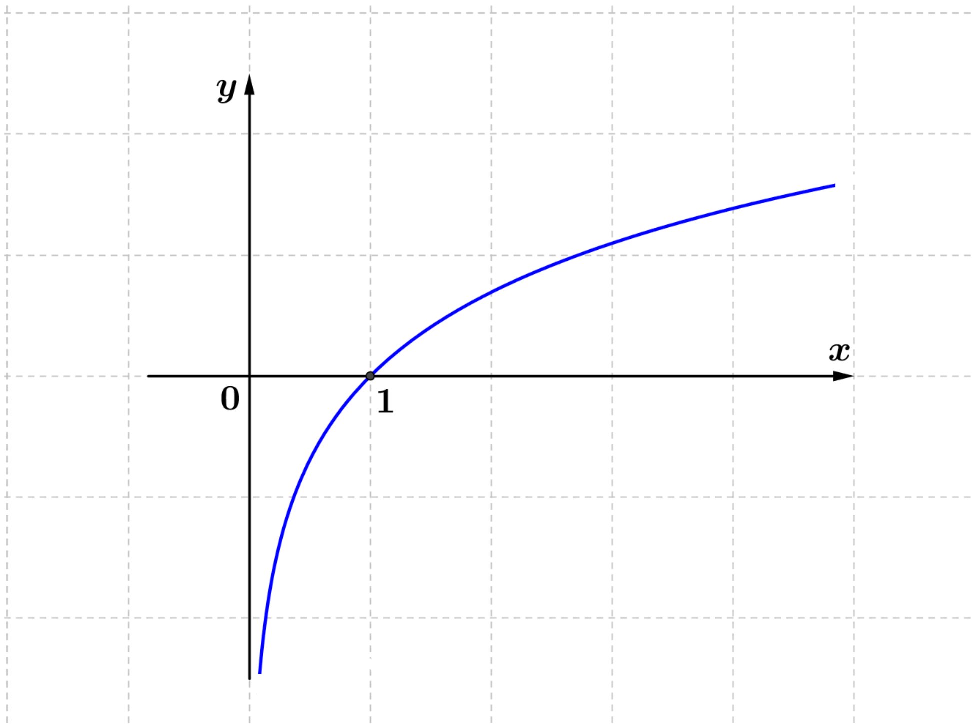

Figura 5.11: Gráfico da função $\ln(x)$.

$\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, à medida que x se aproxima de zero, os valores de $\ln(x)$ se tornam arbitrariamente grandes e negativos. Uma consequência importante dessas afirmações é que qualquer número real é o logaritmo natural de um único número real positivo.

Para traçarmos o gráfico de $f(x) = \ln(x)$, lembremos que ln é crescente ilimitada nos dois sentidos e sobrejetiva. Então, o gráfico de $f(x) = \ln(x)$ é uma curva contida no primeiro e quarto quadrantes, a qual intersecta o eixo das abscissas no ponto $x = 1$ e que, quando x varia entre 0 e $+\infty$, a ordenada do ponto $(x, \ln(x))$ assume valores positivos para $x > 1$ e valores negativos para $x < 1$.

Podemos observar na Figura 5.12, que embora crescente, o gráfico de $f(x) = \ln(x)$ está sempre abaixo do gráfico da reta dada por $y = x$. Isto quer dizer que para qualquer x real temos sempre $\ln(x) < x$. Portanto o gráfico de ln tem a forma da Figura 5.11.

5.5 O número e.

Existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1. Tal número é representado pela letra e. Ele é a *base* do logaritmo natural. Portanto, a afirmações "$\ln(x) = 1$" e "$x = e$" são equivalentes. Em símbolo, temos:

$$\ln(x) = 1 \iff x = e.$$

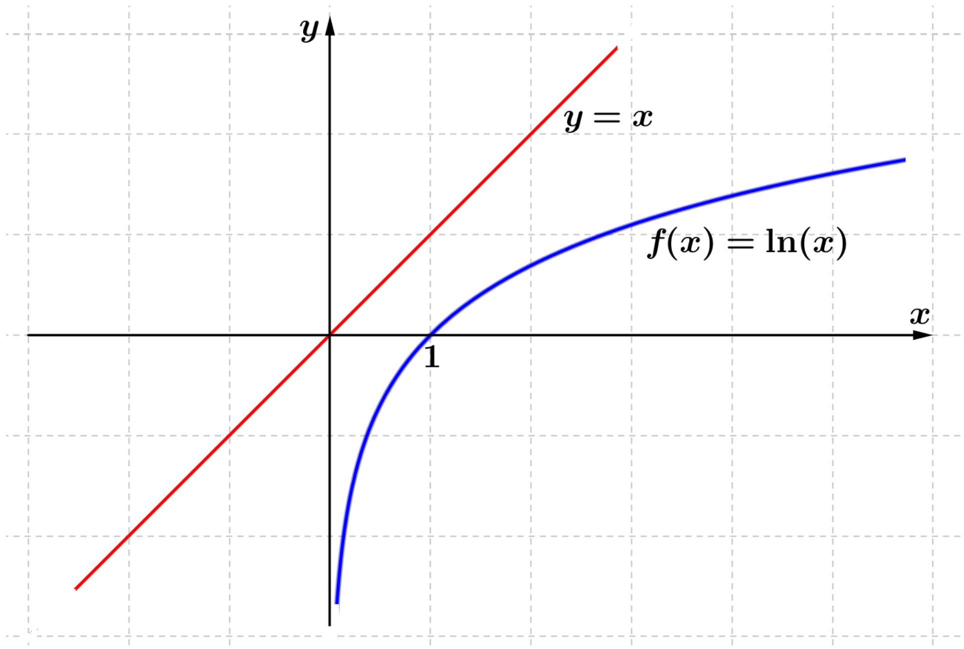

Figura 5.12: Gráficos de $\ln(x)$ e $y = x$.

Já vimos que a função $\ln(x)$ é contínua e crescente em todo seu domínio, em particular no intervalo $[2, 3]$. Mostraremos que $\ln(x)$ assume o valor 1 em algum ponto no intervalo $(2, 3)$, ou seja, que existe um número e tal que $\ln(e) = 1$. Vejamos.

Como a função $\ln(x)$ é crescente $\ln(2) < \ln(3)$ e, Observando a Figura 5.14, podemos ver que a área $A(\mathbb{H}_1^2) = \ln(2)$ é menor do que a área do trapézio $APQD$, que indicaremos por $A(APQD)$, isto é,

$$A(\mathbb{H}_1^2) = \ln(2) < A(APQD) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} < 1. \tag{5.23}$$

Por outro lado, a área $A(\mathbb{H}_1^3)$ é maior do que a área do trapézio $MNCD$, que indicaremos por $A(MNCD)$, isto é,

$$A(\mathbb{H}_1^3) = \ln(3) > A(MNCD) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1. \tag{5.24}$$

De (5.23) e (5.24), tem-se

$$ln(2) < 1 < \ln(3).$$

Então pelo Teorema do Valor Intermediário, Teorema 2.13, existe $e \in (2, 3)$ tal que

$$\ln(e) = 1.$$

Concluímos, ainda, que $2 < e < 3$. Um valor aproximado de e, com 12 algarismos decimais

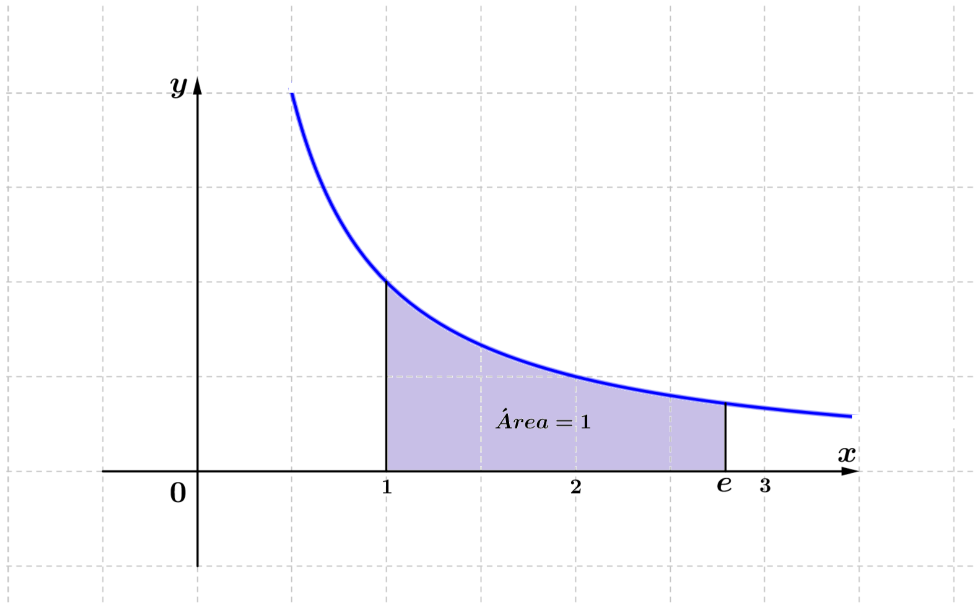

Figura 5.13: Definição do número e.

exatos, é:

$$e \approx 2,718281828459\ldots$$

Teorema 5.1. *Seja* $r = \dfrac{p}{q}$ *um número racional. Tem-se que* $y = e^r$ *se, e somente se,* $\ln(y) = r$.

Demonstração. Se $y = e^r$, então $\ln(y) = r \cdot \ln(e) = r$, pois $\ln(e) = 1$. Reciprocamente, seja $y > 0$ um número real tal que $\ln(y) = r$. Como $\ln(e^r) = r$ e ln é uma função bijetiva, concluímos que $y = e^r$. ∎

Assim, para potência de expoente racional de e, o logaritmo natural de um número é o expoente ao qual se deve elevar a base e a fim de obter esse número.

5.6 A função exponencial

A partir da definição do número e, das propriedades já demonstradas da função $f(x) = \ln(x)$ e motivados pelo Teorema 5.1 definiremos agora a potência e^x (lê-se: "*e elevado a x*"), onde x é um número real qualquer.

Definição 5.3. *Dado o número real* x, e^x *é o número positivo cujo logaritmo natural é* x.

Isto é,

$$y = e^x \iff x = \ln(y)$$

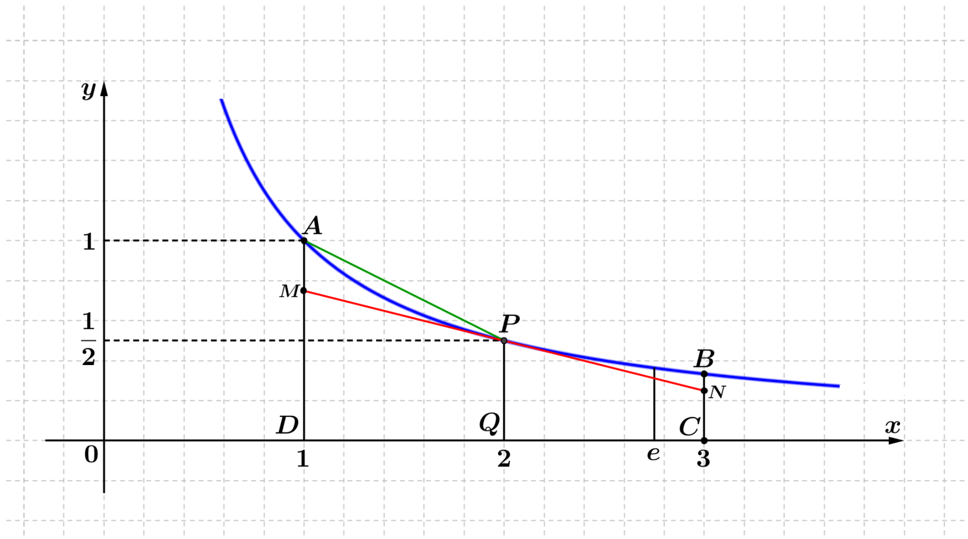

Figura 5.14: Definição do número e.

Geometricamente, $y = e^x$ é a abscissa que devemos tomar para que a faixa de hipérbole $\mathbb{H}_1^y$ tenha área x. Ou seja,

$$A(\mathbb{H}_1^y) = x.$$

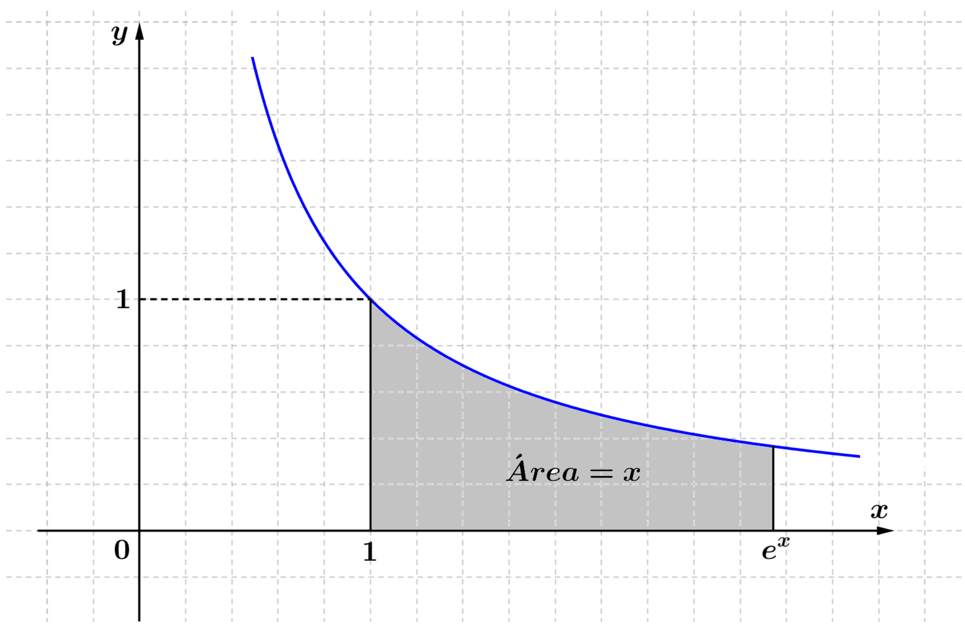

Figura 5.15: Definição de e^x.

Vê-se que $e^x > 0$ para todo x, que $e^x > 1$ quando $x > 0$ e que $e^x < 1$ quando $x < 0$.

Enquanto $\ln(x)$ está definido apenas para $x > 0$, e^x é definido para todo valor real. A correspondência $x \longmapsto e^x$ define uma função cujo domínio contém todos os números reais. Esta é a *função exponencial*.

A função exponencial $g(x) = e^x$ é a função *inversa* da função logaritmo natural $f(x) = \ln(x)$.

Assim, se a função exponencial transforma o número real x no número real positivo e^x, a função logaritmo natural transforma e^x de volta em x. Reciprocamente, a função exponencial leva $\ln(y)$ em y.

Definida a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $g(x) = e^x$ como a inversa da função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \ln(x)$, podemos dizer que as igualdades a seguir são válidas para todo x real e todo $y > 0$:

- $\ln(e^x) = x, \quad$ ou seja, $\quad f(g(x)) = x;$
- $e^{\ln(y)} = y, \quad$ ou seja, $\quad g(f(y)) = y;$
- Em particular, como $\ln(e) = 1 \Rightarrow g(\ln(e)) = g(1) \Rightarrow e = g(1).$

A propriedade fundamental da função exponencial é dada por:

- Para todos os números reais $x,\ y$, tem-se

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

Sejam $u,\ v \in \mathbb{R}$. Existe $x \in \mathbb{R}_+$ tal que $\ln(x) = u$, então

$$g(\ln(x)) = g(u) \Rightarrow x = g(u).$$

Existe $y \in \mathbb{R}_+$ tal que $\ln(y) = v$, então

$$g(\ln(y)) = g(v) \Rightarrow y = g(v).$$

Mas,

$$u + v = \ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y).$$

Portanto,

$$e^{u+v} = g(u+v) = g(\ln(x \cdot y)) = x \cdot y = g(u) \cdot g(v) = e^u \cdot e^v$$

e, está provado a propriedade.

Esta propriedade pode ser estendida para mais de 2 valores, ou seja, dados $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_k$ números reais, então

$$e^{u_1+u_2+\cdots+u_k} = g(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = g(u_1) \cdot g(u_2) \cdot \ldots \cdot g(u_k) = e^{u_1} \cdot e^{u_2} \cdot \ldots \cdot e^{u_k}.$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, verifica-se que $g(n) = e^n$. Vejamos:

- Para $n > 0$, tem-se

$$g(n) = g(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{g(1) \cdot g(1) \cdot \ldots \cdot g(1)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{e \cdot e \cdot \ldots \cdot e}_{n \text{ vezes}} = e^n.$$

- Para $n = 0$, considerando que $\ln(1) = 0$ e tomando a função g em ambos os lados, temos

$$g(\ln(1)) = g(0) \Longrightarrow 1 = g(0) \Longrightarrow e^0 = 1.$$

- Para $n < 0$, fazendo $n = -k$, com k inteiro e positivo, podemos escrever,

$$\begin{aligned} 1 = g(0) &= g(-k + k) = g(-k) \cdot g(k) \\ &\Downarrow \\ g(-k) \cdot e^k &= 1 \\ &\Downarrow \\ g(-k) &= \frac{1}{e^k} \\ &\Downarrow \\ e^{-k} &= \frac{1}{e^k}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$g(x) = e^x, \ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Quando $x = \dfrac{p}{q}$ é um número racional, verifica-se que

$$g(p/q) = e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}.$$

Com efeito, sabemos que $e = g(1)$, logo

$$e = g(1) = g\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = \left[g\left(\frac{1}{q}\right)\right]^q \Longrightarrow g\left(\frac{1}{q}\right) = \sqrt[q]{e} \Longrightarrow e^{1/q} = \sqrt[q]{e}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) &= g\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{p \text{ vezes}}\right) \\ &= g\left(\frac{1}{q}\right) \cdot g\left(\frac{1}{q}\right) \cdot \ldots \cdot g\left(\frac{1}{q}\right) \\ &= \underbrace{e^{\frac{1}{q}} \cdot e^{\frac{1}{q}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{1}{q}}}_{p \text{ vezes}} \quad \text{pela propriedade fundamental, temos} \\ &= e^{\frac{1}{q} + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}} = e^{p \cdot \frac{1}{q}} \\ &= (e^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{e^p}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Portanto, para $x = \dfrac{p}{q}$, a nova definição de e^x coincide com a usual

$$e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}.$$

Definição 5.4. *Para $x > 0$, definimos*

$$x^y \doteq e^{y \cdot \ln(x)} = g(y \cdot f(x)).$$

Se r é um número racional, temos:

$$x^r \doteq e^{r \cdot \ln(x)} = e^{\ln(x^r)} = x^r.$$

Exemplo 25. *Para se obter $2^{\sqrt{2}}$, basta usarmos a definição 5.4, assim*

$$2^{\sqrt{2}} = g(\sqrt{2} \cdot f(2)) = e^{\sqrt{2} \cdot \ln(2)}$$

e como sabemos obter $\sqrt{2}$ e $\ln(2)$ segue o resultado.

As propriedades usais da potenciação também se aplicam para as potências definidas em 5.4, pois

- $x^{y+z} = e^{(y+z) \cdot \ln(x)} = e^{y \cdot \ln(x) + z \cdot \ln(x)} = e^{y \cdot \ln(x)} \cdot e^{z \cdot \ln(x)} = x^y \cdot x^z.$
- $(x^y)^z = e^{z \cdot \ln(x^y)} = e^{(z \cdot y) \cdot \ln(x)} = e^{\ln(x^{y \cdot z})} = x^{(y \cdot z)}.$

Teorema 5.2. *A função $g(x) = e^x$ é crescente e assume todos os valores reais positivos quando x varia entre $-\infty$ e $+\infty$.*

Demonstração. Sejam x e y números reais, com $x < y$. Como $x = \ln(e^x)$ e $y = \ln(e^y)$, não podemos ter $e^x = e^y$, pois isso acarretaria $x = y$. Nem podemos ter $e^y < e^x$ porque então seria $\ln(e^y) < \ln(e^x)$, ou seja, $y < x$. Portanto, quando $x < y$ deve-se ter $e^x < e^y$. Para provar que e^x inclui todos os valores reais positivos, consideremos um número real qualquer $a > 0$. Tem-se $e^{\ln(a)} = a$, logo a é o valor que a função exponencial e^x assume quando $x = \ln(a)$. ■

Proposição 5.1. *Tem-se* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

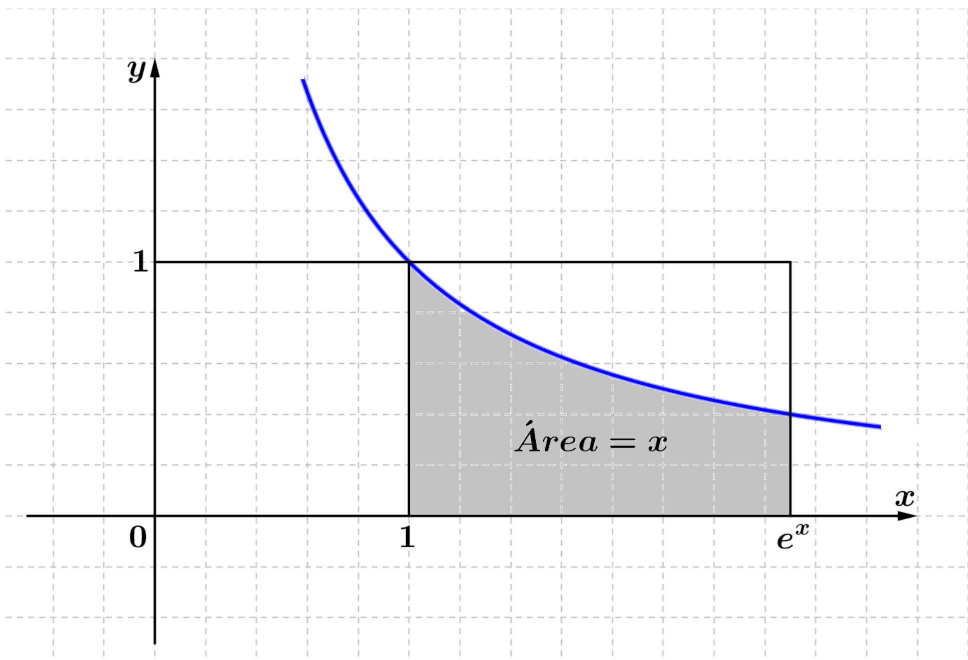

Figura 5.16:

Vejamos o primeiro limite. Quando $x > 0$, a faixa da hipérbole $\mathbb{H}_1^{e^x}$, cuja área vale x, está contida no retângulo de altura 1, com base no segmento $[1, e^x]$, Figura 5.16. A área deste retângulo vale $e^x - 1$, logo $x < e^x - 1$, ou seja,

$$e^x > 1 + x, \quad \text{para todo} \quad x > 0,$$

tomando o limite quando $x \to +\infty$, temos

$$\lim_{x\to+\infty} e^x > \lim_{x\to+\infty} (1 + x),$$

então,

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Quanto ao segundo limite, fazemos $y = -x$ e quando $x \to -\infty$, $y \to +\infty$. Então:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^y} = 0,$$

pois quando e^y cresce infinitamente, seu inverso $\dfrac{1}{e^y}$ deve tender para zero.

Proposição 5.2. *A função $g(x) = e^x$ é derivável e sua derivada é $g'(x) = e^x$.*

Devemos mostrar que existe e é finito

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h}.$$

Inicialmente vamos mostrar que se tem

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Para ver isto, lembramos que a faixa de hipérbole $\mathbb{H}_1^{e^h}$ tem área igual a h, Figura 5.17.

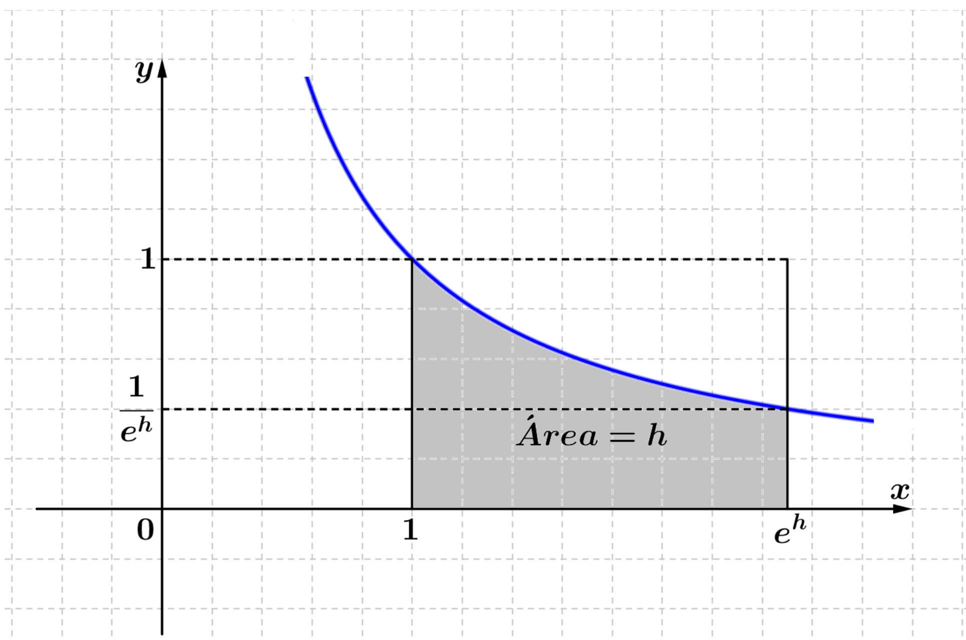

Figura 5.17:

Esta área está compreendida entre o retângulo de área $\dfrac{e^h - 1}{e^h}$ e o outro de área $e^h - 1$, supondo $h > 0$, isto é,

$$\frac{e^h - 1}{e^h} < h < e^h - 1.$$

Dividindo as duas desigualdades por $e^h - 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{e^h} &< \frac{h}{e^h-1} < 1, \text{ para todo } h > 0 \\
1 &< \frac{e^h-1}{h} < e^h \\
\lim_{h\to 0} 1 &< \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} < \lim_{h\to 0} e^h.
\end{aligned}
$$

Segue-se das desigualdades acima e do Teorema 2.9 que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1,$$

pois quando $h \to 0$, e^h tende a 1.

No caso em que $h \to 0$ por valores negativos, escrevemos $t = -h$, então

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{e^h-1}{h} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-t}-1}{-t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{e^t} \cdot \frac{e^t-1}{t} = 1,
\end{aligned}
$$

pois quando $t \to 0$, e^t tende a 1, então

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$$

E, é imediato que

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot (e^h-1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x.$$

Logo, a função $g(x) = e^x$ é derivável em qualquer ponto do seu domínio e sua derivada é dada por:

$$g'(x) = (e^x)' = e^x. \tag{5.26}$$

No caso mais geral,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha(x+h)}-e^{\alpha x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha x} \cdot e^{\alpha h}-e^{\alpha x}}{h} = \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h}.$$

Fazendo $k = \alpha h$, quando $h \to 0 \Longrightarrow k \to 0$. Portanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha(x+h)}-e^{\alpha x}}{h} = \alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{e^k-1}{k} = \alpha \cdot e^{\alpha x}. \tag{5.27}$$

Isto inclui a demonstração de que a derivada da função $g(x) = e^{\alpha x}$ é

$$g'(x) = (e^{\alpha x})' = \alpha \cdot e^{\alpha x}.$$

5.6.1 Gráfico de $g(x) = e^x$.

O gráfico da função exponencial e^x é o subconjunto E do plano, formado pelos pontos cujas coordenadas cartesianas são (x, e^x). Ou seja,

$$E = \{(x, y); y = e^x\}.$$

Comparando com o gráfico G da função logaritmo natural, onde

$$G = \{(u, v); u > 0,\ v = \ln(u)\}.$$

Podemos então afirmar:

$$\begin{gathered} (x, y) \in E \\ \Updownarrow \\ y = e^x \\ \Updownarrow \\ x = \ln(y) \\ \Updownarrow \\ (y, x) \in G. \end{gathered}$$

Significa então que o ponto (x, y) está no gráfico de e^x se, e somente se, o ponto (y, x) pertence ao gráfico da função logaritmo natural, ou ainda, o ponto (x,y) de E é a reflexão do ponto (y, x) de G em relação à reta $y = x$. Na Figura 5.18 temos a representação geométrica das funções $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^x$.

5.7 Logaritmo em outras bases

Diante das definições das funções exponencial e logaritmo natural e, que

$$a^y = e^{y \cdot \ln(a)}$$

tomando $0 < a \neq 1$ vamos determinar y em $a^y = x$, com $x > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} a^y &= x \\ a^y &= e^{\ln(x)} \\ e^{y \cdot \ln(a)} &= e^{\ln(x)} \end{aligned}$$

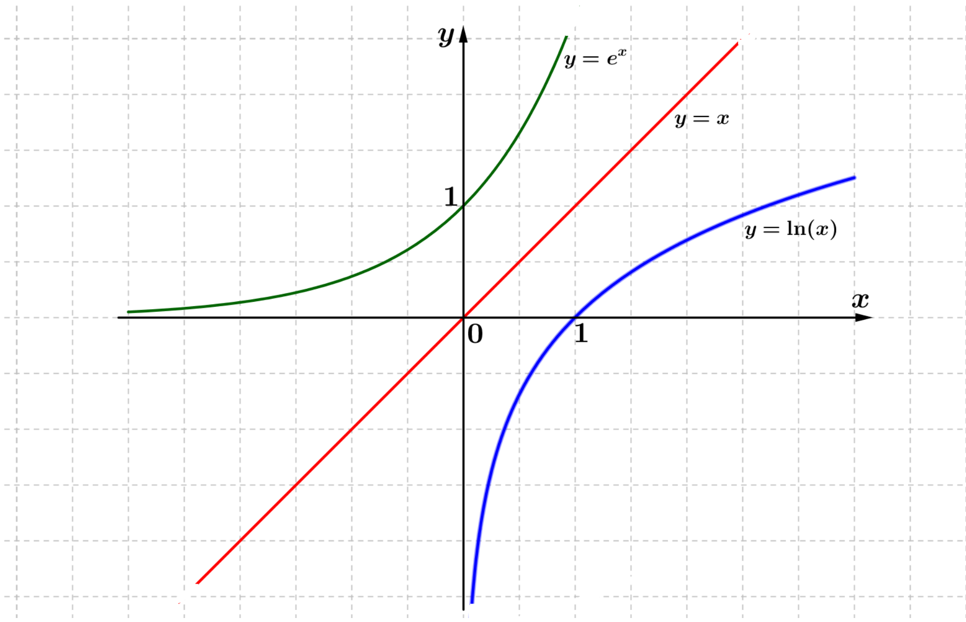

Figura 5.18: Gráfico das funções exponencial e logaritmo natural.

como $g(x)$ é injetiva temos que

$$
\begin{aligned}
y \cdot \ln(a) &= \ln(x) \\
y &= \frac{\ln(x)}{\ln(a)},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$a^y = x \Longrightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Dessa maneira, definimos o logaritmo de x na base $0 < a \neq 1$.

Então,

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

sendo a base a caracterizado pelo fato:

$$\log_a(a) = 1.$$

Para cada $a > 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida para todo $x > 0$, é uma função logarítmica e vale as propriedades operacionais. Assim, P.1) O logaritmo de um produto:

$$
\begin{aligned}
\log_a(x\cdot y) &= \frac{\ln(x\cdot y)}{\ln(a)} \\
&= \frac{\ln(x)+\ln(y)}{\ln(a)} \\
&= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \\
\log_a(x\cdot y) &= \log_a(x)+\log_a(y). \qquad (5.28)
\end{aligned}
$$

P.2) O logaritmo de um quociente:

$$
\begin{aligned}
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{\ln(a)} \\
&= \frac{\ln(x)-\ln(y)}{\ln(a)} \\
&= \frac{\ln(x)}{\ln(a)} - \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x)-\log_a(y). \qquad (5.29)
\end{aligned}
$$

P.3) O logaritmo de uma potência:

$$
\begin{aligned}
\log_a(x^m) &= \frac{\ln(x^m)}{\ln(a)} \\
&= \frac{m\cdot\ln(x)}{\ln(a)} \\
&= m\cdot\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \\
\log_a(x^m) &= m\cdot\log_a(x). \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

P.4) Mudança de base:

$$
\begin{aligned}
\log_b(x) &= \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \\
&= \frac{\ln(a)}{\ln(b)}\cdot\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \\
\log_b(x) &= \log_b(a)\cdot\log_a(x) \quad \text{ou} \qquad (5.31) \\
\log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}. \qquad (5.32)
\end{aligned}
$$

Embora definido os logaritmos cuja base a é maior do que 1, a relação

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

serve para definir $\log_a(x)$ mesmo quando $0 < a < 1$. Neste caso, como $ln(a) < 0$, os números entre 0 e 1 terão logaritmos positivos, enquanto os números maiores do que 1 terão logaritmos negativos. Quando $0 < a < 1$, podemos por $b = 1/a$, então $b > 1$ e $\log_a(x) = -\log_b(x)$.

Considerações finais.

Os recursos que a Geometria nos oferece têm papel preponderante no ensino e no entendimento da Álgebra, assim como a Álgebra contribui sobremaneira para o ensino e o entendimento da Geometria, e os conceitos sugeridos e estudados neste trabalho mostram essa afinidade. Assim sendo, possibilitamos novas formas de se abordar o ensino das *funções logaritmo natural e exponencial* proporcionando uma estreita relação entre esses dois ramos da Matemática, quais sejam: Álgebra e Geometria, pois mostramos que a partir da área de uma faixa da hipérbole $xy - 1 = 0$ a definição do logaritmo natural e da função exponencial, demonstrar suas propriedades operacionais, obter suas derivadas e estender a logaritmos de outras bases.

Apresentamos alguns temas que geralmente não são abordados no Ensino Médio, mas que são essenciais para estudo do comportamento variacional das funções reais, uma vez que as funções é um dos elos de ligação entre diferentes assuntos dentro da própria Matemática e as dificuldades de entendimento são recorrentes no Ensino Médio e Superior.

Acreditamos, portanto, termos alcançado nossos objetivos e que o enfoque dado na realização desse trabalho venha contribuir para a melhoria do ensino, entendimento e aprendizagem dos logaritmos e os demais temas abordados e que possa servir como instrumento motivador para alunos e professores aprimorarem seus conhecimentos.

Referências Bibliográficas

[1] CAMARGO, Ivan de. Geometria Analítica: um tratamento vetorial / Ivan de Carmo, Paulo Boulos. 3ª ed. rev. - e ampl. - São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[2] DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de Matemática Elementar*, 2: Logaritmo. 9ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

[3] LIMA, Elon Lages. A matemática no ensino médio - volume 1/Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado. 9 ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

[4] LIMA, E.L. Meu professor de matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 1991.

[5] LIMA, Elon Lages. Análise real volume 1. Funções de uma variável/Elon Lages Lima. 10.ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2009.

[6] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações / Luiz Roberto Dante. vol. 3 - 2. ed - São Paulo: Ática, 2013.

[7] PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática 3 / Manoel Rodrigues Paiva. 1ª ed - São Paulo: Moderna, 1995.

[8] BOULOS, Paulo; ABUD,Zara Issa. Cálculo Diferencial e Integral - Volume 2. São Paulo, Pearson Education do Brasil, 2002.

[9] THOMAS, George B... [et al]. Cálculo, volume I. tradução Kleber Pedrosa e Regina Simille de Macedo. 12 ed. São Paulo. Pearson Education do Brasil, 2012.