Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pro-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

A constante π

por

Messias Antônio da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT DM-UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

agosto/2015
Recife - PE

A constante π

por

Messias Antônio da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - DM - UFRPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE (Orientador)

Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima - UFAL

Prof. Dra. Anete Soares Cavalcanti - UFRPE

agosto/2015

Dedico a minha família, esposa, filhos, colegas professores e alunos.

Agradecimentos

A Deus, a minha família, esposa, filhos e amigos pelos incentivos, e pelo apoio. Aos meus alunos, uma vez que é por eles e para eles que devo buscar aperfeiçoamento constante. Aos Professores do Departamento de Matemática da UFRPE que ministraram aula para a turma do PROFMAT em particular ao meu orientador Prof. Dr. Jorge Hinojosa, aos colegas de turma do PROFMAT e SBM pela iniciativa.

Tente... Tente outa vez!
Raul Seixas

Resumo

A constante π será apresentada desde a sua origem, nos problemas de medidas de comprimento, área, em particular o problema da quadratura do círculo, até as pesquisas mais recentes sobre os algoritmos usados para o cálculo, de sua expansão decimal. Usando o método da exaustão calculamos o comprimento e a área de um círculo de raio r. Mostramos a irracionalidade de π. Apresentamos uma generalização de π para curvas fechadas, simples e convexas. Finalmente, sugerimos algumas atividades didáticas envolvendo os conceitos estudados.

Palavras-chaves: A constante π, método da exaustão, quadratura do círculo, irracionalidade de π, generalização de π.

Abstract

The constant π will be presented in this work since its origin, in length and area problems – particularly the problem of squaring a circle -, to the most recent researches on algorithms used for the calculus of its decimal expansion. Using the exhaustion method we calculate the length and area of a circle of radius r. We demonstrate the irrationality of π. We also generalize the constant π for convex, simple and closed curves. At last we suggest some educational activities related to the concepts in study.

Key words: The constant π , exhaustion method, squaring the circle, irrationality of π, generalization of π.

Sumário

Introdução

Neste trabalho apresentaremos a constante π. Certamente ela não é somente a mais antiga constante matemática, como também a mais pesquisada.

Inicialmente faremos uma abordagem histórica, sendo o problema da quadratura do círculo o mais importante problema de construção geométrica, responsável por muitos avanços da matemática, entre eles o método da exaustão e o teorema de Euclides. Finalizaremos essa parte inicial apresentando a constante π como um limite.

Prosseguimos nossa exposição sobre π, apresentando a demonstração das fórmulas para o cálculo da área e do perímetro de uma circunferência. Em seguida demonstraremos a irracionalidade de π e encerramos essa parte com a generalização de π. Para finalizarmos mostraremos algumas aplicaçõesde π no cálculo de áreas e comprimentos, bem como sugestões de atividades para sala de aula do cálculo de π, na verdade do cálculo das aproximações de π.

Capítulo 1

A constante π

Neste capítulo vamos falar um pouco da história desse número e conhecer os primeiros resultados obtidos para π, com destaque para o Método de Exaustão de Eudoxo e também para o Teorema de Euclides, ambos com origem no Problema da Quadratura do Círculo. Finalizamos com uma apresentação formal do número π e um breve texto sobre sua expansão decimal.

O número π é a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, sendo esta a mais antiga constante matemática que se conhece. Sua representação, pela letra grega π, deve-se a palavra perímetro (em grego: "$\pi\rho\varepsilon\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$"), e foi introduzida em 1706, provavelmente por William Jones, e popularizada por Leonar Euler alguns anos depois. São várias as aplicações matemáticas que dependem de π, entre elas destacamos o perímetro de uma circunferência, a área de um círculo e o volume de uma esfera, as quais são as mais elementares e, portanto, apresentadas aos estudantes, ainda na educação básica. No entanto, a constante π também está nas fórmulas gravitacionais e do eletromagnetismo da física.

O que faz de π um número tão especial é que além dos fatos citados acima, temos ainda aplicações na computação, onde através da construção de algoritmos buscam-se cada vez mais uma maior quantidade de algarismos de sua expansão decimal, os quais permitem que os computadores sejam testados e classificados. Há ainda questões em aberto, relacionadas a essa constante, por exemplo:

i. π é um número normal, isto é, qualquer sucessão de algarismos aparece na expansão decimal de π?

ii. Quais algarismos aparecem um número infinito de vezes na expansão decimal de π?

Por esta razão a constante π, apesar de sua antiguidade, é ainda fonte de pesquisas em diversas áreas. E mais, é uma das poucas pesquisas matemáticas que ao se descobrirem novos resultados, sua divulgação não se restringem apenas aos meios de comunicação científica e sim de massa.

Podemos ainda citar outros usos para essa constante, O rolar das ondas numa praia, o trajeto aparente diário das estrelas no céu terrestre, o espalhamento de uma colônia de cogumelos, o movimento das engrenagens e rolamentos, a propagação dos campos eletromagnéticos e um sem número de fenômenos e objetos, do mundo natural e da Matemática, estão associados às ideias de simetria circular e esférica. Ora, o estudo e uso de círculos e esferas, de um modo quase que inexorável, acaba produzindo o π, razão pela qual ele é uma das constantes universais da Matemática.

É importante chamarmos a atenção para o fato que também são frequentes as ocorrências do π em estudos onde aparentemente, principalmente para uma pessoa de pouca formação matemática, não estariam envolvidas simetrias circulares, como por exemplo na normalização da distribuição normal de probabilidades, na distribuição assintótica dos números primos, na construção de números primos próximos a inteiros dados (na chamada constante de Ramanujan), e muitas outras situações.

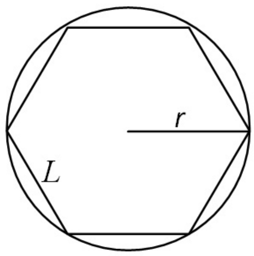
Os babilônios, dois mil anos antes de Cristo (a.C.), atribuíam a π o valor $3\frac{1}{8}$, isto é $3,124$, enquanto os egípcios admitiam $\pi = 4(\frac{8}{9})^2 = 3,16$. Por volta do ano 250a.C., Arquimedes estimou que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$, o que dá $\pi = 3,14$. Liu Hiu, na China, no ano 264 de nossa era, obteve $\pi = 3,14159$.

O Velho Testamento, que foi escrito cerca de 500 anos a.C., embora baseado em tradições judaicas bem mais antigas, contém um trecho segundo o qual $\pi = 3$.

> *"Fez mais o mar de fundição, de dez côvados de uma borda até à outra borda, perfeitamente redondo, e de cinco côvados de alto; e um cordão de trinta côvados o cingia em redor."*
>
> Velho Testamento - I Reis, VII:23

Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia sistematicamente desde antes da metade do século XIX e já desenterraram mais de meio milhão de tábulas de argila, das quais 400 foram identificadas como estritamente matemáticas. Os museus de Paris, Berlim e Londres e algumas Universidades, como Yale, Colúmbia e Pensilvânia têm excelentes coleções dessas tábulas, que são de tamanho variável e com espessura de aproximadamente uma polegada e meia. Frequentemente são de formatos arredondados, com escritas cuneiformes em apenas uma de suas faces, e as vezes em ambas. Devemos nosso conhecimento da matemática babilônica antiga[1] ao trabalho de decifrar e interpretar muitas dessas tábulas o que ocorre somente pouco antes de 1800, quando viajantes europeus notaram as inscrições encontradas num grande rochedo calcáreo perto da aldeia de Behistun, na região noroeste do atual Irã.

Foi em 1936 que se desenterrou em Susa, a cerca de 200 milhas da Babilônia, um grupo de tábulas, entre as quais, uma delas compara as áreas e os quadrados dos lados dos polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 7 lados. Nessa mesma tábula nos diz que a razão entre o perímetro de um hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito é $0; 57, 36$, o que nos leva a $3\frac{1}{8}$ como aproximação de π.



De fato, $0; 57, 36$ no sistema sexagesimal, corresponde a aproximadamente $0,96$ no sistema decimal, daí, seja p_6 o perímetro de um hexágono regular de lado L e C o comprimento de uma circunferência de raio r, teremos que $r = L$ e assim

$$p_6 = 6L$$

$$C = 2\pi L$$

e como a razão entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito é $0,96$, segue

$$\frac{6L}{2\pi L} = 0,96 \Rightarrow \frac{3}{\pi} = 0,96 \Rightarrow \pi = \frac{3}{0,96} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}.$$

[1]Deve-se entender babilônios antigos, por conveniência, pois muitos povos além destes, como os sumérios, os caldeus, os assírios e outros, habitaram a área, numa época ou outra, também se incluem na designação geral.

Curiosamente, em 1931 um americano de Cleveland, Ohio, publicou um livro segundo o qual $\pi = \frac{256}{81}$, ou seja $3,16$ e essa é uma aproximação de π obtida pelo escriba egípcio Ahmes, autor do papiro de Rhind, escrito dois mil anos antes de Cristo. Entre os 110 registros que se encontram neste papiro e no papiro de Moscou, 26 são geométricos. A maioria desses problemas provém de fórmulas de mensuração necessárias para calcular áreas de terras e volumes de celeiros. Um desses registro nos diz que *a área de um círculo é igual à de um quadrado cujo lado é $\frac{8}{9}$ do diâmetro.* Assim os egípcios admitiram que $\pi = 4(\frac{8}{9})^2$. De fato, se tomarmos um círculo de raio r, teremos $\pi \cdot r^2 = \left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2 \Rightarrow \pi \cdot r^2 = \left(\frac{16r}{9}\right)^2 \Rightarrow \pi = \frac{256}{81} = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Acredita-se que este resultado tenha sido obtido empiricamente.

Como de fato, a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, independe da circunferência, essa razão é, portanto constante.

Mesmo após quatro mil anos, a busca por novas aproximações para o valor de π com um número cada vez maior de algarismos decimais tem sobrevivido, e mais ainda, com o advento dos supercomputadores e a descoberta de algoritmos teóricos muito mais eficientes do que os métodos usados até então. Em 1989 foi publicado na revista "Science News" que David e Gregory Chudnovski, da Universidade de Columbia, nos Estados Unidos, calcularam um valor aproximado de π com 1 bilhão de algarismos decimais exatos.

1.1 Os três problemas clássicos de construção

Uma das linhas de desenvolvimento da Matemática é o da geometria superior, ou geometria de curvas outras que não a reta e a circunferência e superfícies outras que não o plano e a esfera. É curioso que essa geometria superior tenha se originado nas tentativas seguidas de resolver três problemas de construção, a saber:

- Duplicação do cubo

  A duplicação do cubo ou o *Problema de Delos* é um problema de construção geométrica que consiste em obter um método para dada, a aresta de um cubo, construir com régua e compasso, um cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo dado.

- Trissecção do ângulo

O problema da Trissecção do ângulo consiste em, dado um ângulo qualquer, construir um outro com o treço de amplitude.

- Quadratura do círculo

  A Quadratura do Círculo é também um problema de construção geométrica, com uso de régua e compasso, no qual deve-se construir um quadrado com área equivalente a de um círculo dado.

1.2 Quadratura do Polígono

É possível que a geometria tenha origem às bordas do Rio Nilo, pois segundo os escritos de Heródoto, em função das frequentes enchentes deste rio eram necessárias a realização de medidas de áreas para que as terras fossem redistribuídas entre os que haviam sofrido prejuízos com a cheias, como se pode ver em:

> *"[Quando das inundações do Nilo] o rei Sésostris enviava pessoas para inspecionar o terreno e a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução de impostos."*
>
> Heródoto, oeuvres complètes II 109, p.183

Os impostos eram calculados proporcionalmente a área dos lotes e ao volume de grãos produzidos, assim, de fato fazia-se necessária uma nova medição a cada enchente do Rio Nilo. Esse fato nos permite localizar na agrimensura prática do antigo Egito os primórdios da Geometria como ciência, e os problemas de quadrar um polígono surgem naturalmente, visto que o cálculo das áreas era realizado com base em um quadrado, usado como unidade.

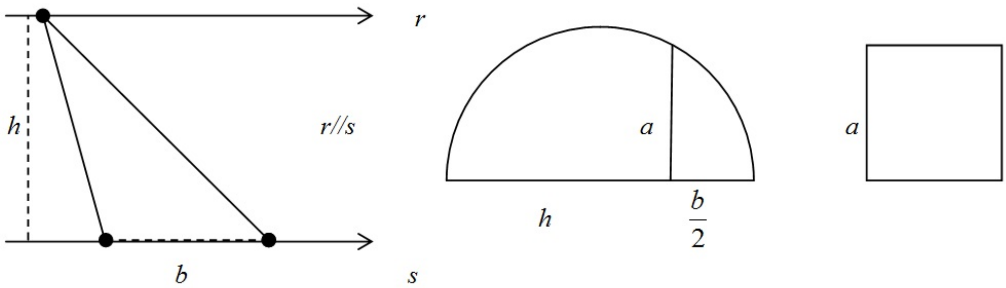
A notação que usaremos para a área de um polígono P é a^2, onde a é um segmento. Assim o polígono P é *equivalente*, isto é tem a mesma área de um quadrado de lado a.

Vamos descrever um método que permita transformar um polígono qualquer em um quadrado de mesma área, e para isso, iniciaremos com a quadratura de um triângulo.

Se um triângulo qualquer é dado, sejam b um lado qualquer e h a altura relativa a esse lado. Se este triângulo é equivalente a um quadrado de lado a, então teremos:

$$a^2 = \frac{b \times h}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{b \times h}{2}}$$

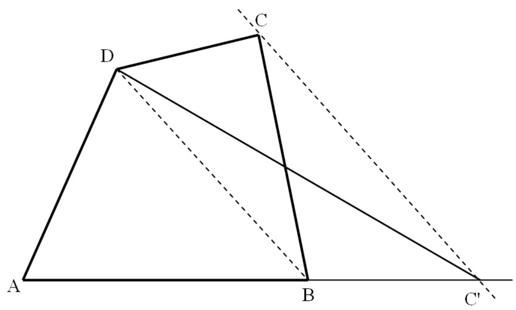
Mas, dessa forma podemos dizer que a é a média geométrica entre $\frac{b}{2}$ e h, cuja construção é



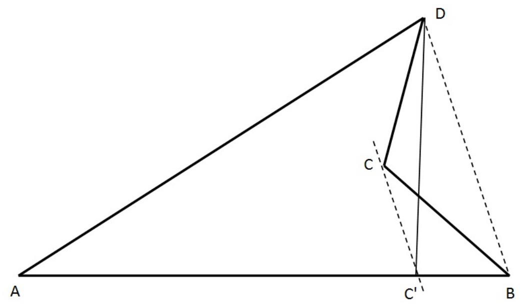
Assim o lado do quadrado de área igual a área de um triângulo dado, é numericamente, a média geométrica entre a metade da base e a altura relativa a essa base.

Para transformar um polígono qualquer em um quadrado equivalente, devemos primeiro transformar esse polígono em um triângulo equivalente, antes porém cabe lembrar que a área de um triângulo não muda quando mantemos sua base fixa e deslocamos o vértice oposto sobre uma paralela a essa base, visto que os triângulo assim construídos têm mesma base e mesma altura, que neste caso é a distâncias entes as paralelas.

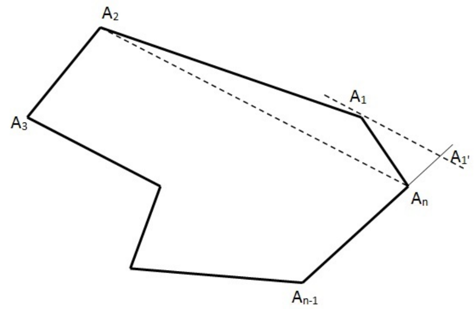
Considere então o problema de transformar um quadrilátero em um triângulo equivalente. A figura mostra um quadrilátero $ABCD$ qualquer. Traçamos então por C uma reta paralela à diagonal BD que encontra AB em C'. Dessa forma, os triângulos BDC e BDC' são equivalentes e, portanto o triângulo $AC'D$ é equivalente ao quadrilátero $ABCD$.



No caso de quadrilátero não convexo, a figura a seguir mostra que o problema tem solução simples, veja:



O quadrilátero ABCD é equivalente ao triângulo ADC', visto que os triângulos CC'B é equivalente ao triângulo CC'D. E para resolver o problema geral, isto é, o de transformar um polígono qualquer em um quadrado equivalente, basta mostrar que um polígono de n lados pode ser transformado em um polígono equivalente de $n-1$ lados. A figura abaixo mostra um polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$. Traçando por A_1 uma paralela a A_2A_n obtemos um ponto A_1' na reta $A_{n-1}A_n$ e é claro que o polígono $A_1'A_2A_3 \dots A_{n-1}$, de $n-1$ lados é equivalente ao polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ de n lados. Note que os triângulos $A_nA_2A_1$ e $A_nA_2A_1'$ são equivalentes.



Portanto sempre é possível construir um quadrado equivalente a um polígono qualquer.

1.3 A Quadratura do Círculo

A quadratura do círculo é um problema de construção geométrica muito antigo, onde se pede para construir um quadrado de área equivalente à de um círculo dado e sendo introduzida a restrição de que somente régua não graduada e compasso devem ser usados na construção, não haverá solução possível. Passaram-se mais de dois mil anos até que isto fosse provado.

Esse problema da quadratura do círculo encontra-se registrado no papiro de Rhind, o qual é datado como sendo do ano 1600 antes de Cristo, onde há vários problemas em que a área de um círculo é expressa como a área de um quadrado cujo lado é oito nonos do diâmetro do círculo, logo o problema aparece como sendo de área e não de construção, porém Aristófanes refere-se ao problema da quadratura como construção, em seu *Os Pássaros*, escrito por volta do ano 414 antes de Cristo.

Aristófanes faz com que Mêtron, um astrônomo, traga consigo uma régua e um compasso e faça certas construções "a fim de que seu círculo possa tornar-se um quadrado". Essa 'solução' é um simples jogo de palavras, pois Mêtron meramente inscreveu um quadrado num círculo.

O problema somente foi seriamente trabalhado por Anaxágoras, Hipócrates, Antífon, Hípias e Arquimesdes, entre os anos de 440 e 212 antes de Cristo. Em função deste trabalho Hipócrates conseguiu a quadratura de certas lunas e Antífon pensou que tivesse resolvido o problema inscrevendo polígonos regulares num círculo. Hípias desenvolveu a "quadratriz" para resolver o problema e Arquimedes usou a "espiral de Arquimedes" para a solução.

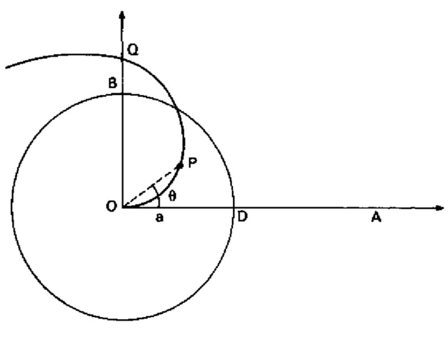


Figura 1.1: Espiral de Arquimedes

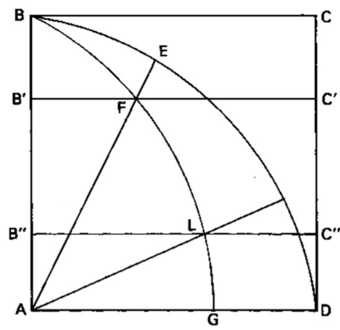


Figura 1.2: Quadratriz de Hípias

1.4 Método da Exaustão

Sobre o problema da quadratura do círculo, uma das importantes contribuições foi dada por Antífon, quando antecipou a ideia de inscrever um polígono em um círculo, e dobrar o número de lados sucessivamente de modo que a diferença entre este polígono e o círculo seja cada vez menor até a diferença exaurir. Assim, como já vimos que é possível construir um quadrado com área igual à de um polígono qualquer, seria então possível construir um quadrado de área igual à de um círculo. Essa abordagem tornou-se a base do Método da exaustão grego.

Pode-se também considerar que o método da exaustão foi uma resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão e é creditado a Eudoxo.

O método da exaustão admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e a base está na proposição: *Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor do que a sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor do que sua metade, e assim por diante se chegará por fim a uma grandeza menor do que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*

Arquimedes de Siracusa (287-212a.C.) é considerado um dos maiores matemáticos da antiguidade. Destacou-se entre os demais pela quantidade e dificuldade dos problemas que tratou, pela originalidade de seus métodos e pelo rigor de suas demonstrações, e entre esses métodos, o da exaustão.

> *"Em seu trabalho, desenvolveu também o método de exaustão, creditado a Eudoxo, pelo qual se aproxima a quantidade desejada pelas somas parciais de uma série ou pelos termos de uma seqüência. Obteve aproximações da área de um círculo comparando-a com as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos."*
>
> Boyer, 1995

Assim o método da exaustão, nome dado no século XVII por Gregório de S.Vicente, é também conhecido como Princípio de Eudoxo-Arquimedes.

O método de exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal, no entanto, no cálculo considera-se a soma de um número infinito de parcelas, enquanto Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos, visto que para poder definir uma soma de uma série infinita seria necessário desenvolver o conceito de número real que os gregos não possuíam.

Muitos falam do método de exaustão como um processo geométrico de passagem para ao limite, alguns concordam outros não. Os que não concordam argumentam que a noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluída da matemática grega, mesmo em Arquimedes. O trabalho dele foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior da ideias do limite e de infinito, que somente ocorreu no século XIX. De fato, os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria do século XVII que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Para compreendermos melhor o método de exaustão vamos apresentar a teoria das proporções formulada por Eudoxo e apresentada por Euclides no Livro V dos seus Elementos.

A teoria das proporções que é aplicável a grandezas mensuráveis e também a grandezas incomensuráveis, indo portanto de encontro a teoria aritmética dos pitagóricos. Euclides, com a definição 3 do Livro V, define razão dizendo que *uma razão é uma espécie de relação a respeito do tamanho entre duas grandezas do mesmo tipo.* Em seguida, apresenta a definição 4: *Diz-se que têm uma razão as grandezas que são capazes, quando multiplicadas, de se exceder uma à outra.* A primeira definição, a 3, na verdade nada define; no entanto, a segunda caracteriza duas grandezas de mesma espécie, isto é, do mesmo tipo (dois comprimentos, duas áreas ou dois volumes). Esta definição, na linguagem atual, considerando a existência de números reais como: dados dois números reais positivos a e b com $b \neq 0$, existe um número natural n tal que $nb \geq a$.

A definição 5, do Livro V, é a base da teoria das proporções: *Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, dados quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira e dados quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais ou ficam simultaneamente aquém dos últimos.* A definição 6, do mesmo livro diz: *Grandezas que têm a mesma razão dizem-se proporcionais*, esta definição robustece a anterior, de modo que usando a notação, empregada hoje as duas definições, por ser expressas da seguinte forma:

> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, dados os inteiros m e n sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$, ou se $ma = nb$, então $mc = nd$, ou ainda se $ma > nb$, então $mc > nd$.

Esta definição, nos leva ao que hoje denominamos Propriedade Fundamental das Proporções: *em toda proporção, o produto dos meios é igual ao* *produto dos extremos*, algebricamente temos:

$$\underbrace{a : \overbrace{b = c}^{\text{meios}} : d}_{\text{extremos}} \Leftrightarrow bc = ad.$$

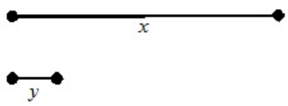
Consideremos, por fim, a definição 7, do Livro V: Quando, dos equimúltiplos, o múltiplo da primeira grandeza excede o múltiplo da segunda, mas o múltiplo da terceira não excede o múltiplo da quarta, diz-se que a primeira tem uma razão maior para segunda do que a terceira para a quarta. Esta definição significa que se para quaisquer dois números naturais m e n quando for verdadeira a desigualdade $ma > nb$ e for falsa a desigualdade $mc > nd$, então é certo que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Uma aplicação dessa teoria das proporções de Eudoxo, é a demonstração, do caso dos triângulos, da proposição 1 do Livro VI dos Elementos de Euclides: *Triângulos e paralelogramos sob a mesma altura estão entre si como as suas bases.* E também do Teorema de Tales (Elementos VI, 21).

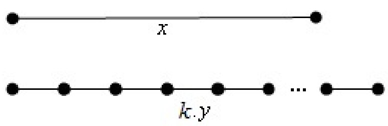
Vejamos então uma demonstração para o Método da Exaustão.

Proposição 1.4.1. Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor do que a sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor do que sua metade, e assim por diante se chegará por fim a uma grandeza menor do que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

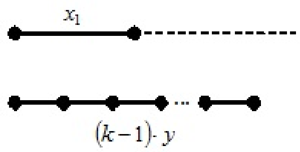
Demonstração. Considere x e y duas grandezas de mesma espécie. Suponha, sem perda de generalidade, que $x > y$.



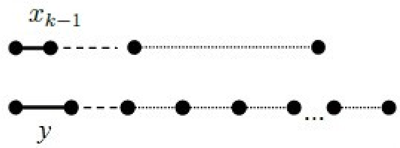
Como foi definido que dados dois números reais positivos a e b com $a > b$ existe um número natural n tal que $nb > a$, assim temos que existe k, tal que $ky > x$. Assim tomemos as grandezas a e ky.



Se de x retirarmos mais da metade e de ky retirarmos k, restarão duas grandezas, a saber $\frac{1}{2}x > x_1$ e $(k-1)y > x_1$.



Se de x_1 retirarmos mais da metade e de $(k-1)y$ retirarmos k, restarão outras duas grandezas, a saber $\frac{1}{2}x_1 > x_2$ e $(k-2)y > x_2$. E se assim procedermos, no $(k-2)$-*ésimo* passo, vamos obter a grandeza x_{k-2} tal que $2y > x_{k-2}$. Se de x_{k-2} retirarmos mais da metade e de $2y$ retirarmos y, restará a grandeza x_{k-1} tal que $y > x_{k-1}$.



Portanto ao final do $(k-1)$-*ésimo* passo, obtemos uma grandeza x_{k-1} menor do que y, o que prova o método da exaustão.

1.5 Teorema de Euclides

A proposição 2 do livro XII dos *Elementos de Euclides* nos diz que *Círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.* Em linguagem matemática atual esta proposição é expressa da seguinte forma: *a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados de seus diâmetros.* Isto é:

$$\frac{A}{a} = \frac{D^2}{d^2},$$

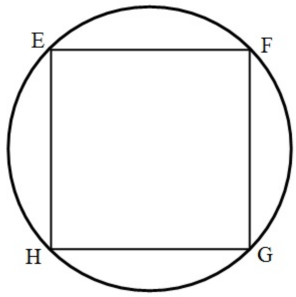
onde A é a área do círculo de diagonal D e a é a área do círculo de diagonal d.

Demonstração. Sejam dois círculos de áreas A e a e diâmetros D e d, respectivamente. Vamos admitir que a proposição é falsa, assim sendo o círculo de área A está para uma certa área A', com $A' \neq a$, assim como D^2 está para d^2, isto é $\frac{A}{A'} = \frac{D^2}{d^2}$. Como $A' \neq a$, temos dois casos a considerar:

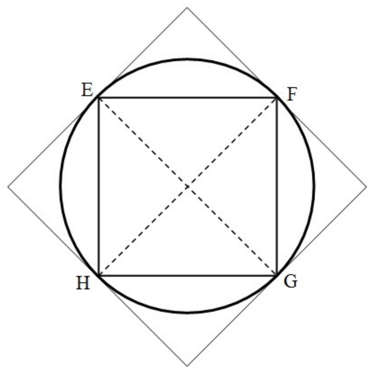
$$\begin{cases} A' < a & (i) \\ A' > a & (ii) \end{cases}$$

Caso (i): $A' < a$

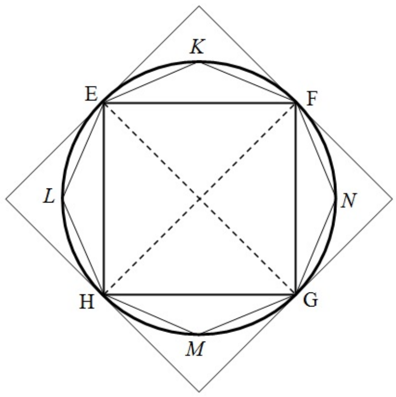
Vamos aplicar o método da exaustão às quantidades a e $a - A'$ e para isso vamos inscrever no círculo de área a um quadrado de vértices E, F, G e H.



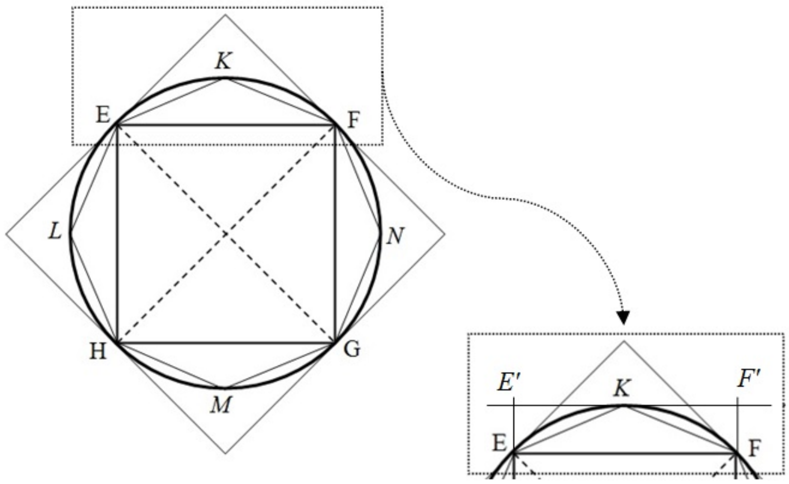
Se pelos pontos E, F, G e H, traçamos tangentes ao círculo obtemos um quadrado cuja área é o dobro da área do quadrado inicial, que por sua vez tem área maior do que a metade da área do círculo.



E sejam os pontos K, N, M e L, pontos médios de cada um dos arcos EF, FG, GH e HE, respectivamente, e tracemos os segmentos de reta que unem os pontos K, L, M e N com os extremos dos arcos de que eles são pontos médios.



Agora, traçando por K a tangente ao círculo que obtemos é possível obter o retângulo $EE'F'F$,



cuja área é o dobro da do triângulo EFK, que por sua vez é maior do que a metade da área do segmento de círculo EFK; este fato ocorre também com cada um dos triângulos FNG, GMH e HLE.

Dessa forma, repetindo por várias vezes este processo de inscrever polígonos no círculo, vamos obter, com base no método da exaustão, um polígono cuja área será designada por p. Assim, subtraindo de a, A', ou seja, fazendo $a - A'$, afirmamos que $a - p < a - A'$, o que implica $p > A'$.

Agora considere P a área de um polígono semelhante ao polígono de área p, e inscrito no círculo de diâmetro D. Como polígonos semelhantes inscritos em círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros, concluímos que $\frac{P}{p} = \frac{D^2}{d^2}$. Como supomos que $\frac{A}{A'} = \frac{D^2}{d^2}$ e que concluímos a pouco que $\frac{P}{p} = \frac{D^2}{d^2}$, por transitividade $\frac{P}{p} = \frac{A}{A'}$. E como $P < A$, visto que o polígono de área P está inscrito num círculo de área A, e isso implica que $p < A'$, o que é contraditório, logo a hipótese que $A' < a$ não se verifica.

Caso (ii): $A' > a$

Como $\frac{A}{A'} = \frac{D^2}{d^2}$ é equivalente a $\frac{A'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$, e assim analogamente ao caso anterior, podemos admitir que existirá uma área A'' tal que $\frac{A'}{A} = \frac{a}{A''}$ e como hipótese $A' > a$, concluiremos que $A'' < A$ e portanto não se verifica também que $A' > a$. Portanto isso mostra que A' somente pode ser igual a a, conforme queríamos.

1.6 O número π

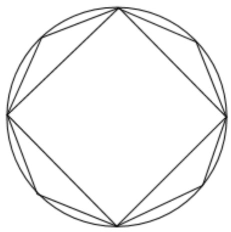
O número π é definido como a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro.

Definição 1.6.1. Sejam $n \geq 3$ um número natural e $A_1, A_2, ..., A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1, A_2, ..., A_n$ é um polígono convexo se, para $1 \leq i \leq n$ a reta $\overline{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina, devendo ainda $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1, A_{n+2} = A_2, ..., A_{n+i} = A_i$. Cada segmento $\overline{A_nA_{n+1}}$ denomina-se lado do polígono e cada ponto A_n denomina-se vértice.

Definição 1.6.2. O *perímetro* de um polígono é a soma dos comprimentos dos lados desse polígono.

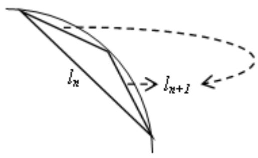
Definição 1.6.3. Um polígono é dito *regular* quando todos os seus lados são congruentes, isto é, têm a mesma medida.

Seja uma circunferência de raio R e sejam polígonos regulares inscritos com 2^n lados.



Inicialmente, calculemos o perímetro desses polígonos regulares inscritos e, para isso considere p_n , o polígono regular com 2^n lados, l_n o comprimento de cada um de seus lados e ainda c_n o perímetro desse polígono, assim $c_n = 2^n \times l_n$, para todo n inteiro maior do que ou igual a 2, isto é, $2 \leq n \in \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros.

Vejamos que, a partir do polígono p_n, para construirmos o polígono p_{n+1} basta tomar como novos vértices os pontos médios de cada arco de circunferência que une dois vértices consecutivos do polígono p_n, dessa forma obtemos o polígono p_{n+1} cujos lados são l_{n+1}, conforme a figura a seguir:



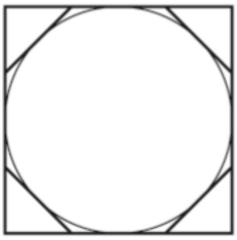
Assim podemos afirmar, com base na desigualdade triangular que, $l_n < l_{n+1} + l_{n+1} = 2l_{n+1}$, e como $c_n = 2^n \times l_n$, temos

$$c_n = 2^n l_n < 2^n 2l_{n+1} = 2^{n+1} l_{n+1} = c_{n+1}.$$

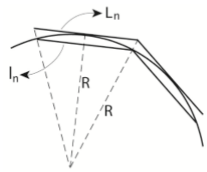
Temos ainda que, o perímetro do quadrado inscrito na circunferência de raio R é maior do que o diâmetro dessa circunferência, isto é $c_2 = 2^2 \times l_2 > 2l_2 > 2R$ e dessa forma teremos que $2R < c_2 < c_3 < \cdots < c_n < c_{n+1} < \cdots$ que é uma sequência $\{c_n\}$, positiva e estritamente crescente.

Ainda na mesma circunferência de raio R, tome polígonos regulares circunscritos P_n, com 2^n lados. Temos a seguir uma figura que ilustra os casos em que $n = 2$ e $n = 3$.

Note que, a partir do polígono P_n, para construirmos o polígono P_{n+1} basta tomar os segmentos que tangenciam os pontos médios de cada arco de círculo que une dois vértices de P_n dessa forma obtemos o polígono P_{n+1} cujos lados são L_{n+1}, sendo L_n o comprimento do lado do polígono P_n.

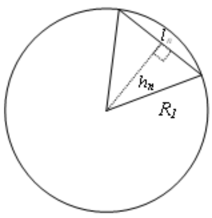


Seja C_n e o perímetro de P_n, temos $C_n = 2^n \times L_n$. Como por construção $L_n > l_n$, consequentemente $C_n > c_n$. Veja:



Temos ainda que $C_2 = 2^2 \times 2R = 8R$, pois $L_2 = 2R$, diâmetro da circunferência.

Com base na desigualdade triangular, é possível verificar que $C_{n+1} < C_n < \cdots < C_3 < C_2 = 8R$, mas, $c_n < C_n$, segue que $c_n < C_n \leq C_2 = 8R$ e assim $2R < c_2 < c_3 < \cdots < c_n < C_n \cdots < 8R$, e este fato garante que $\lim_{n\to+\infty} c_n$ existe. Definindo o perímetro por $l(C) = \lim_{n\to+\infty} c_n$, teremos, para um círculo C_1 de raio R_1 que



$$l_n = 2R_1 \operatorname{sen}\frac{180^{\circ}}{2^n} \quad \text{e} \quad c_n = 2^n \times 2R_1 \operatorname{sen}\frac{180^{\circ}}{2^n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} l(C_1) &= \lim_{n\to+\infty} c_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(2^n \times 2R_1 \operatorname{sen}\frac{180^{\circ}}{2^n}\right) \\ &= 2R_1 \lim_{n\to+\infty} \left(2^n \times \operatorname{sen}\frac{180^{\circ}}{2^n}\right). \end{aligned}$$

E para um círculo C_2 de raio R_2 teremos que

$$\begin{aligned} l(C_2) &= \lim_{n \to +\infty} c_n \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left(2^n \times 2R_2 \operatorname{sen} \frac{180^o}{2^n} \right) \\ &= 2R_2 \lim_{n \to +\infty} \left(2^n \times \operatorname{sen} \frac{180^o}{2^n} \right). \end{aligned}$$

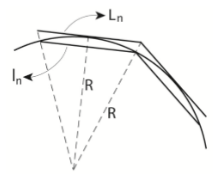
Segue que

$$\frac{l(C_1)}{2R_1} = \lim_{n \to +\infty} \left(2^n \times \operatorname{sen} \frac{180^o}{2^n} \right) = \frac{l(C_2)}{2R_2}.$$

isto mostra que a razão entre o perímetro da circunferência e seu diâmetro é constante e igual a $\lim_{n \to +\infty} \left(2^n \times \operatorname{sen} \frac{180^o}{2^n} \right)$, a essa constante atribuímos a letra grega π.

Cabe agora um questionamento: Caso consideremos os polígonos circunscritos, o que ocorrerá?

Vejamos, temos que $C_n = 2^n \times L_n$ e que $0 < C_{n+1} < C_n < \cdots < C_3 < C_2 = 8R$, uma vez que o perímetro do polígono circunscrito é sempre maior do que zero. Dessa forma podemos afirmar que a sequencia $\{C_n\}$ é decrescente e limitada, e portanto $\lim_{n \to +\infty} C_n$ existe e vamos definir o perímetro da circunferência por este limite e cuja notação será D. Portanto $D = l(C) = \lim_{n \to +\infty} C_n$.



Vimos que $l_n = 2R \operatorname{sen} \frac{180^o}{2^n}$ e vemos que $L_n = 2R \cos \frac{180^o}{2^n}$, e como

$$\frac{l_n}{L_n} = \frac{2R \operatorname{sen} \frac{180^o}{2^n}}{2R \cos \frac{180^o}{2^n}}$$

segue que $l_n = L_n \operatorname{tg} \frac{180^o}{2^n}$, consequentemente $c_n = C_n \cos \frac{180^o}{2^n}$.

Com isso podemos dizer que $C_n - c_n = C_n - C_n \cos \frac{180^o}{2^n} = C_n \left(1 - \cos \frac{180^o}{2^n}\right)$. E como $\lim_{n \to +\infty} C_n = D$ e $\lim_{n \to +\infty} \cos \frac{180^o}{2^n} = 1$, temos que $\lim_{n \to +\infty} (C_n - c_n) = 0$ e portanto $l(C) = D$.

Assim o perímetro de uma circunferência (comprimento de uma circunferência) pode ser definido como o limite do perímetro de polígonos regulares de 2^n lados, sejamos eles inscritos ou circunscristos.

Capítulo 2

O comprimento e a área da circunferência

Vamos nesse capítulo demonstrar a fórmula usada para calcular o comprimento (perímetro) de uma circunferência e em seguida faremos uma demonstração da fórmula usada para o cálculo da área de um círculo.

2.1 $C = 2\pi R$, uma demonstração

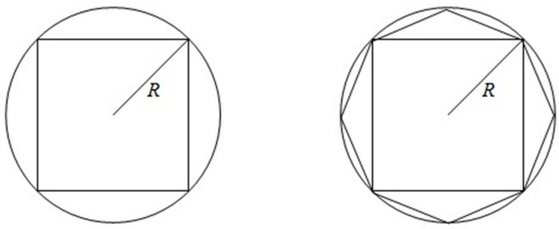
Hoje entendemos número real como resultado da comparação de uma grandeza com a unidade, que é também uma grandeza da mesma espécie, fixada como padrão. Essas grandezas podem ser discretas ou contínuas, se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se uma contagem e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma medição e o resultado é um número real. Dessa forma o comprimento é uma grandeza contínua. Vamos então demonstrar que o comprimento C de um círculo de raio R é $2\pi R$.

Vimos no item 1.6 do capítulo anterior que o perímetro $l(C)$ de uma circunferência é dado por $l(C) = 2R \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen}\dfrac{180^\circ}{2^n}$, e que $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen}\dfrac{180^\circ}{2^n} = \pi$, logo sendo C o perímetro de uma circunferência de raio R, temos que $l(C) = 2R \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen}\dfrac{180^\circ}{2^n} = C$, e portanto $C = 2\pi R$.

2.2 $A = \pi R^2$, uma demonstração

Vimos no capítulo anterior que *círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros, isto é, a razão entre as áreas de dois círculos é igual à* *razão entre os quadrados de seus diâmetros.* Ocorre que esta razão é constante, conhecida como a constante universal dos círculos que convencionamos chamar de π. Vamos demonstrar este fato, usando desta vez o conceito de **área**.

Dado um círculo C de raio R, construa um quadrado inscrito. Tomando o ponto médio de cada arco ligando dois vértices consecutivos do quadrado construímos um octógono inscrito.



Tomando ainda o ponto médio de cada arco ligando dois vértices consecutivos do octógono, construímos um polígono regular inscrito com 16 lados, continuando este processo construímos polígonos regulares inscritos com o dobro de lados do anterior, assim podemos afirmar que construímos polígonos regulares inscritos p_n com 2^n lados, $n \geq 2$. Dessa forma temos que p_2 é o quadrado inscrito, p_3 é o octógono, p_4 é o polígono regular com 16 lados, e assim sucessivamente.

Considerando que a área do polígono regular inscrito p_n é expressa por a_n , temos que $0 < a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n+1} < ...$, por construção.

Seja $a(C)$ a área do círculo. Vamos definir essa área como sendo

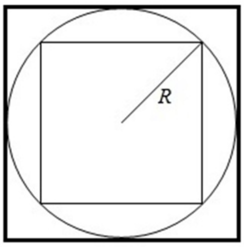
$$\lim_{n \to +\infty} a_n,$$

se este limite existir, isto é, se este processo infinito nos fornecer um número. Mas, a sequência $\{a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n+1} < ...\}$ é crescente, visto que $0 < a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n+1} < ...$ e portanto somente devemos ter duas opções, a saber:

i. ou é ilimitada.

ii. ou é limitada, isto é, ao aumentarmos n, chegamos cada vez mais próximo de um número.

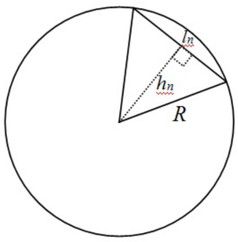
Seja P_2 o quadrado circunscrito ao círculo C.



Dessa forma a área A_2 do quadrado será maior do que a área de qualquer polígono inscrito na circunferência C e assim teremos $0 < a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n+1} < ... < 4R^2 = (2R)^2 = A_2$ e portanto a sequência $\{a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n+1} < ...\}$ não é ilimitada.

Vemos então que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ existe e a área do círculo $a(C)$ é um número bem definido, ao verificarmos que $a(C) \leq 4R^2$.

Como o polígono regular inscrito p_n tem 2^n lados, podemos considerá-lo como a união de 2^n triângulos isósceles congruentes de lado R. Chamemos de l_n a base desse triângulo e de h_n a altura relativa a essa base.



O ângulo do vértice oposto ao lado do polígono p_n tem por medida $\frac{360^o}{2^n}$. Então, seja α o ângulo de vértice no centro da circunferência e lados R e h_n. Assim $\alpha = \frac{180^o}{2^n}$, pois neste caso a altura relativa à base do triângulo isósceles coincide com a bissetriz do ângulo oposto a essa base. Daí,

$$\text{sen}\alpha = \frac{\frac{l_n}{2}}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{l_n}{2} = R \times \text{ sen}\left(\frac{180^o}{2^n}\right),$$

donde concluimos que $l_n = 2R\,\text{sen}\left(\frac{180^o}{2^n}\right)$, e

$$\cos\alpha = \frac{h_n}{R} \quad \Rightarrow \quad h_n = R\cos\left(\frac{180^o}{2^n}\right).$$

Dessa forma, como a área de um triângulo é a metade do produto entre sua base e altura relativa a essa base, temos:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2^n \times \frac{l_n \times h_n}{2} \\
&= 2^n \times \frac{2R \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right) \times R \cos\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right)}{2} \\
&= 2^n R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right) \cos\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right).
\end{aligned}
$$

Dessa forma, denotando por $a(C)$ a área do círculo C temos que:

$$
\begin{aligned}
a(C) &= \lim_{n \to +\infty} a_n \\
&= \lim_{n \to +\infty} 2^n R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right) \cos\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right) \\
&= \left[\lim_{n \to +\infty} 2^n R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right)\right] \times \lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right),
\end{aligned}
$$

por outro lado, como

$$
\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right) = \cos\left[\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right)\right] = 1,
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
a(C) &= \lim_{n \to +\infty} 2^n R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right) \\
&= R^2 \lim_{n \to +\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right).
\end{aligned}
$$

Vimos assim, que a área de um círculo $a(C)$ é dada por

$$
a(C) = R^2 \lim_{n \to +\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right).
$$

Dessa forma para concluir a demonstração de que *"círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros"*, isto é, *a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados de seus diâmetros*, devemos considerar dois círculos, sendo um deles C_1 de raio R_1 e o outro C_2 de raio R_2. Segue que suas áreas são respectivamente:

$$
a(C_1) = R_1^2 \lim_{n \to +\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right) \quad \text{e} \quad a(C_2) = R_2^2 \lim_{n \to +\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right).
$$

Donde concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{a(C_1)}{R_1^2} &= \frac{R_1^2 \lim_{n\to+\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right)}{R_1^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right) \\
&= \frac{R_2^2 \lim_{n\to+\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right)}{R_2^2} \\
&= \frac{a(C_2)}{R_2^2}.
\end{aligned}$$

Portanto *a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados de seus diâmetros*, isto é

$$\frac{a(C_1)}{R_1^2} = \frac{a(C_2)}{R_2^2}.$$

Afirmamos que a razão $\frac{a(C)}{R^2}$ é constante qualquer que seja o círculo e a essa constante foi denominada π, assim temos $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \operatorname{sen}\dfrac{180^\circ}{2^n}$.

Para demonstrar a fórmula da área de um círculo de raio R, vamos usar o fato de que *"círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros"*, isto é, a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados de seus diâmetros. Na demonstração deste fato, usamos o conceito de área e na oportunidade obtemos $a(C) = R^2 \lim\limits_{n\to+\infty}\left[2^n \operatorname{sen}\dfrac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right]$, isto é $\frac{a(C)}{R^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[2^n \operatorname{sen}\dfrac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right]$. Uma vez que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2^n \operatorname{sen}\dfrac{180^{\mathrm{o}}}{2^n}\right]$ é uma constante, conhecida como constante universal dos círculos, convencionaremos chamar de π essa constante. Dessa forma vimos que a área do círculo pode ser expressa em função do raio como $a(C) = \pi R^2$.

Capítulo 3

A irracionalidade de π

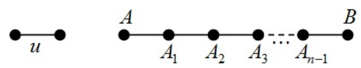
Neste capítulo apresentaremos inicialmente a ideia de números irracionais com base na incomesurabilidadde entre dois segmentos, em seguida apresentamos a expansão decimal de π. Seguimos então demonstrando que π é irracional e finalizamos com a generalização de π.

3.1 A Diagonal do Quadrado

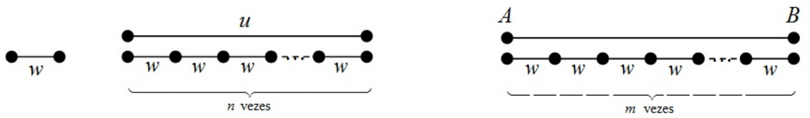
O que hoje denominamos fração, ou mesmo, número racional, surgiu com o significado de razão entre grandezas, em função da necessidade de medir comprimentos e para tal comecemos fixando um segmento de reta u, que chamaremos de *segmento unitário*, ou mesmo unidade de comprimento, daí por definição o comprimento de u será igual a 1. Devemos admitir que todos os segmentos de reta congruentes a u terão o comprimento 1, ainda por definição.

Tomando um segmento de reta AB, existindo um ponto C situado em AB e entre A e B, tal que os segmentos AC e CB sejam congruentes a u, então o comprimento de AB será 2, e escrevemos $\overline{AB} + \overline{CB} = 2$. E se tomarmos um número inteiro n, sendo possível obter $n-1$ pontos $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ entre AB e pertencentes ao segmento AB, tais que os n segmentos $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}B$ sejam todos congruentes ao segmento unitário u, então o comprimento de AB será n representado por $\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \cdot + \overline{A_{n-1}B} = n$.

Podemos ainda dizer que $\overline{AB} = n$ porque AB se decompõe em n segmentos de reta justapostos, todos de comprimento 1, e esses segmentos contém n vezes o segmento unitário u. Geometricamente temos:



No caso em que um segmento não contenha um número inteiro de vezes o segmento unitário u, a medida deste segmento não pode ser um número inteiro. Neste caso, suponhamos que exista um segmento menor w, tal que w esteja n vezes contido em u e m vezes contido em AB, n e m números inteiros, assim afirmamos que $\overline{AB} = \frac{m}{n}$, pois como w está n vezes contido em u, temos $w = \frac{1}{n}$ e como $\overline{AB} = m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{m}{n}$. Geometricamente temos:



Em casos assim, w chama-se um submúltiplo comum de AB e u, e estes dois segmentos se dizem **comensuráveis**.

Assim como os números inteiros $1, 2, 3, ...$ são abstrações que sugiram naturalmente na história da humanidade, em processos de contagem de coleções finitas de objetos, os números racionais também surgiram das necessidades diárias de medição de comprimento, peso e tempo, grandezas que em geral, aparecem em quantidades fracionárias em nosso cotidiano, portanto para satisfazer as nossas necessidades básicas, no que se refere a medições, necessitamos de frações.

Definimos números racionais como o quociente entre dois números inteiros p e q e que representaremos na forma $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$.

A representação geométrica dos números racionais que vimos anteriormente, é simples e acreditamos ser a mesma interpretada pelos pitagóricos, de modo que se considerarmos uma reta com origem no ponto O e associarmos a este ponto o número 0 (zero), e ainda, fixada uma unidade de comprimento u tal que, esta seja a medida do segmento OA, podemos associar ao ponto A, o número 1. Dessa forma podem ser representados por um conjunto de pontos da reta, os números inteiros, $1, 2, 3, ..$ e de maneira análoga tomando o seguimento w, de comprimento menor do que u, mas que esteja contido n vezes em u, podemos também representar por um conjunto de pontos da reta, os números racionais.

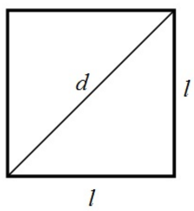
Entretanto, os pitagóricos descobriram que há outros pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional, e essa descoberta, certamente foi uma das grandes realizações da escola pitagórica.

Em particular, eles provaram que não há nenhum número racional ao qual corresponda ao ponto P da reta em que OP é a diagonal quadrado cujos lados medem uma unidade. A partir daí, foram então inventados novos números para serem associados a esses novos pontos, os quais não são racionais, esses números não racionais foram denominados irracionais.

Portanto os pitagóricos acreditavam que dois segmentos quaisquer são sempre comensuráveis, isto é, dados dois seguimentos AB e u, sempre haverá um seguimento w submúltiplo comum de AB e u, o que ocorreu porque na prática, como nossos olhos tem um limite de percepção, assim como os instrumentos de aferição de medidas também tem o seu limite de precisão, sendo incapazes de distinguir dois pontos que, embora distintos, achem-se situados a uma distância inferior a esse limite, tudo se passa como se, de fato, dois segmentos fossem sempre comensuráveis. Quando então perceberam que o lado de um quadrado unitário e sua diagonal são incomensuráveis, ou seja, esses segmentos não possuem um submúltiplo comum, o que causou enorme impacto no desenvolvimento da matemática grega.

Proposição 3.1.1. O lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

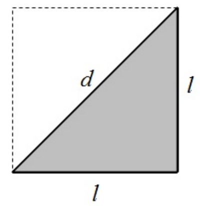
Demonstração. Seja d a medida da diagonal de um quadrado e l a medida do lado desse quadrado.



Se o lado e a diagonal fossem comensuráveis, tomando o lado como unidade, obteríamos para comprimento da diagonal um número racional $\frac{p}{q}$.

Considere um dos dois triângulos retângulos formados pela diagonal do quadrado, assim aplicando o Teorema de Pitágoras, e sem perda de generalidade tome $l = 1$, para isso basta considerar o comprimento do segmento l

como a unidade de medida de comprimento a ser usada para relacionar os seguimentos d e l, e assim teremos:



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2, \text{ com } p \text{ e } q \text{ inteiros.}$$

Segue então que $p^2 = 2q^2$. A igualdade $p^2 = 2q^2$ é um absurdo. De fato o inteiro p^2 contém cada um de seus fatores primos um número par de vezes, visto que estão elevados ao quadrado, o mesmo ocorre com q^2. Consequentemente $2q^2$ contém um número ímpar de fatores iguais a 2 e assim não pode ser igual a p^2.

Portanto o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis.

3.2 Os indivisíveis

A certeza de que dois segmentos são sempre comensuráveis que os pitagóricos tinham, foi questionada com o problema da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado.

Para os pitagóricos o espaço é número ou razão entre números, mas com problema da diagonal do quadrado, eles se viram diante de um comprimento, possível de se desenhar com régua e compasso, existente e que não estavam em proporção com as outras linhas da figura, no caso os lados do quadrado. Mesmo assim escola pitagórica sobreviveu por possuir a elástica adaptabilidade de todos os sistemas ideológicos verdadeiramente grandes. Somente por volta do ano 500 a.C. é que houve a dissolução da escola pitagórica.

Para eles, o número de pontos de um segmento de reta devia sempre ser inteiro, já que o ponto é indivisível. Certamente eles não pretendiam avaliar o número de pontos de um segmento, mas entre duas retas de comprimentos A e B, representando uma soma de pontos, logo necessariamente inteiros, sempre devia existir a relação $\frac{A}{B}$, o que significa que um segmento de reta não pode ser infinitamente divisível, ele somente pode ser dividido até se chegar a sua menor parte, o indivisível: o ponto.

Na tentativa de quadrar um círculo, Antifon pensou no que mais tarde seria o Método da Exaustão, isto é, toma-se um círculo e inscreve-se nele um quadrado, sobre cada lado do quadrado constrói-se um triângulo isósceles cujos vértices estão sobre o círculo, obtendo-se um octógono, em seguida, sobre cada lado do octógono constrói-se novos triângulos isósceles e cujos vértices também estão sobre o círculo, e assim sucessivamente, constem-se novos triângulos sobre os lados desse novo polígono. Com esse processo há que se considerar dois casos:

i. Se um segmento de reta tem um número finito de pontos, como se pensava à época, então um círculo terá um número finito de pontos, o qual será o número de lados do maior polígono possível de se inscrever em um círculo. E mais, assim sendo, como é possível quadrar qualquer polígono, será também possível quadra o círculo.

ii. Considerar que um arco de círculo coincide com um segmento de reta, caso contrário dever-se-ia assumir a infinita divisibilidade de um segmento de reta, de modo que, sempre será possível tomar o ponto médio do arco de círculo e traçar um polígono com um número maior de lados.

Com base neste problema, Zenão afirmava não existir movimento. Cria-se então o paradoxo de Zenão, com intuito de provar esta afirmação.

Paradoxo (Zenão)**.** Se existem infinitos pontos médios, então nunca chegaremos ao fim do segmento.

Ora para irmos de um ponto a outro, devemos antes passar pelo seu ponto médio, logo nunca chegaremos ao outro ponto se considerar a infinita divisibilidade da reta.

3.3 Expansão decimal do π

Representamos os números reais por uma sequência de algarismos (elementos do conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ separados por uma vírgula, dessa forma seja

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \ldots$$

algarismos, o número $a_n a_{n-1} \cdots a_0, a_{-1} a_{-2} a_{-3} \cdots$, onde $a_n > 0$ é a forma de um número real positivo. Note que, nessa forma temos à esquerda da vírgula um número finito de elementos e que costumamos denominar parte inteira do número real, e a direita da vírgula podemos ter uma infinidade de algarismos e que denominamos expansão decimal do número real. São exemplos de números reais os números:

$$34,5468;\ 0,2353535\ldots;\ 3,101001000100001\ldots$$

Os três exemplos são, um decimal exato, uma dízima periódica e uma dízima não-periódica, e para os dois primeiros casos há uma representação racional, a saber:

$$34,5468 = \frac{86367}{2500} \text{ e } 0,2353535\cdots = \frac{233}{990}.$$

Para o terceiro caso não há como representa-lo na forma racional pois não há repetição indefinidamente de um grupo de algarismo, isto é a expansão decimal não possui período e neste caso o número é irracional.

Alguns números irracionais, por exemplo $3,101001000100001\ldots$ não possui período, mas sua expansão decimal tem um padrão, neste caso é possível perceber que após a vírgula temos uma sequencias de algarismos 1 e 0, tal que entre dois algarismos 1, temos um zero, dois zeros, três zeros, quatro zeros e assim sucessivamente. Em outros números irracionais, esse padrão não existe, por exemplo $0,12343567912034\ldots$ e neste caso nunca conheceremos integralmente sua expansão decimal.

O número π também é também um exemplo de número irracional[1] cuja expansão decimal jamais será conhecida integralmente e isso despertou o interesse de muitos matemáticos desde a antiguidade até os dias atuais, uma vez que o seu uso responde a perguntas simples como a quantidade de material necessária para a confecção de uma forma circular, cilíndrica ou esférica, e outras não tão simples como as encontradas no estudo dos fenômenos: órbita dos satélites, movimento de engrenagens, crescimento de uma colônia de bactérias, que envolvem simetria circular ou esférica. Em busca de respostas para essas perguntas, fazem-se uso do π e, portanto, torna-se necessário conhecer um valor estimado para essa constante.

Neste capítulo, vimos que os antigos babilônicos atribuíam a π, o valor $3\frac{1}{8}$, isto é 3,125 , enquanto os egípcios admitiam $\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,16$. Arquimedes estimou que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$, o que dá $\pi = 3,14$, Liu Hiu, na China, no ano 264 de nossa era, obteve $\pi = 3,14159$. O Velho Testamento, que foi

[1]No capítulo 5 demonstraremos a irracionalidade de π.

escrito cerca de 500 anos a.C., embora baseado em tradições judaicas bem mais antigas, contém contém um trecho segundo o qual $\pi = 3$. No Papiro de Rhind, encontra-se uma fórmula que dá o valor de π como 3,1605.

Ao longo dos séculos foram desenvolvidas muitas técnicas e ideias para calcular mais e mais casas decimais de π, e embora na prática usam-se até 20 casas decimais após a vírgula, nas aplicações dessa constante, os pesquisadores continuam ampliando essa quantidade de casas decimais. Já em 2002 Kanada e seus colaboradores, calcularam 1.241.100.000.000 casas decimais do número π. A pergunta natural é: porque continuamos a calcular, cada vez mais quantidades de casas decimais do valor de π? E a resposta mais natural é: porque podemos, afinal com o uso de computadores isso sempre poderá ser feito e mais, essas descobertas trazem consigo possíveis novas descobertas, por exemplo, os algoritmos criados para esse fim são cada vez mais rápidos e eficientes, e isso tem permitido avanços para a computação, uma vez que tais algoritmos passam a ser usados para testar e comparar o desempenho de novos softwares e computadores.

3.4 π é irracional: Uma demonstração

A demonstração que faremos está fundamentada na feita por *I. Nirem*, publicada em um artigo no 53° *Boletim da Sociedade Americana de Matemática*, em 1947, p. 509.

Para demonstrar a irracionalidade de π , vamos analisar os seguintes fatos:

Fato 1

Sejam as funções $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ e

$$F(x) = f(x) - \frac{d^{(2)}f}{dx^2}(x) + \frac{d^{(4)}f}{dx^4}(x) + \frac{d^{(6)}f}{dx^6}(x) + \cdots + (-1)^n \frac{d^{(2n)}f}{dx^{2x}}(x),$$

é possível obter $\int_0^\pi f(x)\,\text{sen}x dx = F(0) + F(\pi)$. Ora, derivando duas vezes o polinômio $F(x)$, obtemos $f(x) = \frac{d^2F}{dx^2}$, pois o grau do polinômio $f(x)$ é $2n$, daí $\frac{d^{2n+2}f}{dx^{2n+2}}(x)$ é identicamente nulo. Segue então que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx}\operatorname{sen}x - F(x)\cos x\right) &= \frac{d^{(2)}F}{dx^2}\operatorname{sen}x + \frac{dF}{dx}\cos x \\
&\quad - \frac{dF}{dx}\cos x + F(x)\operatorname{sen}x \\
&= \left(\frac{d^{(2)}F}{dx^2} + F(x)\right)\operatorname{sen}x \\
&= f(x)\operatorname{sen}x.
\end{aligned}
$$

Mas, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x dx &= \left(\frac{dF}{dx}\operatorname{sen}x - F(x)\cos x\right)\Big|_0^\pi \\
&= \frac{dF}{dx}(\pi)\operatorname{sen}\pi - F(\pi)\cos\pi - \frac{dF}{dx}(0)\operatorname{sen}0 + F(0)\cos 0 \\
&= F(0) + F(\pi),
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x dx = F(0) + F(\pi).
$$

Fato 2 $F(0)+F(\pi)$ é um número inteiro. É verdade, pois fazendo a expansão do binômio $(a-bx)^n$, obtemos $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$, onde cada coeficiente c_k, $k = 1, 2, ..., n$, é um número inteiro, visto que a e b são números inteiros, daí

$$
f(x) = \frac{c_0}{n!}x^n + \frac{c_1}{n!}x^{n+1} + \cdots + \frac{c_n}{n!}x^{2n},
$$

temos assim que $\frac{d^{(k)}f}{dx^k}(0) = 0$, se $k < n$ e $\frac{d^{(k)}f}{dx^k}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$, se $n \leq k \leq 2n$, vemos assim que $\frac{d^{(k)}f}{dx^k}(0)$ é um número inteiro.

Por outro lado, temos

$$
f(\pi - x) = f(\frac{a}{b} - x) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left[a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right]^n}{n!} = f(x),
$$

derivando obtemos

$$
(-1)^k\frac{d^{(k)}f}{dx^k}(\pi - x) = \frac{d^{(k)}f}{dx^k}(x),
$$

assim $\frac{d^{(k)}f}{dx^k}(\pi) = \frac{d^{(k)}f}{dx^k}(0)$ é também um número inteiro. Sendo $F(0)$ e $F(\pi)$ inteiros, concluímos que $F(0) + F(\pi)$ é um número inteiro.

Fato 3 Se c é um número real positivo, então $\lim_{n\to+\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$. Dado o número $c > 0$, existe um número inteiro positivo n_0 tal que $c < n_0$, o que implica $\frac{c}{n_0} < 1$. Tome $n > n_0$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{c^n}{n!} &= \frac{\overbrace{c \times c \times \cdots \times c}^{nfatores}}{1 \times 2 \times \cdots (n_0 - 1) \times n_0 \times (n_0 + 1) \times \cdots \times n} \\ &= \frac{c}{1} \times \frac{c}{2} \times \cdots \times \frac{c}{n_0 - 1} \times \frac{c}{n_0} \times \frac{c}{n_0 + 1} \times \cdots \times \frac{c}{n}.\end{aligned}$$

Para $K = \frac{c}{1} \times \frac{c}{2} \times \cdots \times \frac{c}{n_0-1}$, teremos $\frac{c^n}{n!} = K \times \frac{c}{n_0} \times \frac{c}{n_0+1} \times \cdots \times \frac{c}{n}$, mas se $j > n_0$, $\frac{c}{n_0} > \frac{c}{j}$ daí

$$0 \leq \frac{c^n}{n!} = K \times \frac{c}{n_0} \times \frac{c}{n_0 + 1} \times \cdots \times \frac{c}{n} \leq K \times \frac{c}{n_0} \times \frac{c}{n_0} \times \cdots \times \frac{c}{n} = K \times \left(\frac{c}{n_0}\right)^{n-n_0}$$

e como $\frac{c}{n_0} < 1$ temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c^n}{n!} \leq \lim n \to +\infty \left[K\left(\frac{c}{n_0}\right)^{n-n_0}\right] = 0,$$

portanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$.

Fundamentado nestes quatro fatos, vamos mostrar que π é irracional.

Demonstração. Suponha que π é racional, ou seja, $\pi = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos, $b \neq 0$.

Para $0 \leq x \leq \pi = \frac{a}{b}$, temos que $0 \leq$ sen$x \leq 1$, e $0 < x(a - bx) \leq \pi a$, daí

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{sen}x dx < \pi \frac{(\pi a)^n}{n!}.$$

Mas como $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\pi a)^n}{n!} = 0$, tomando n suficientemente grande teremos que $\pi\frac{(\pi a)^n}{n!} < 1$, logo $0 < F(0) + F(\pi) < 1$, o que é absurdo, uma vez que $F(0) + F(\pi)$ é um número inteiro. Portanto π é irracional.

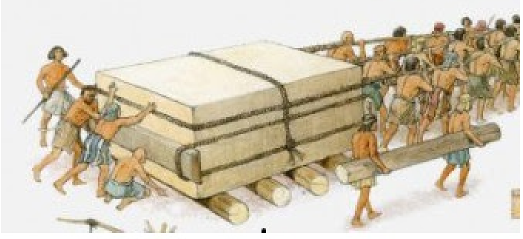
Capítulo 4

A generalização de π

Neste capítulo vamos ampliar o conceito da constante entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, o que nos leva a uma generalização de π.

4.1 Polígonos de Reuleaux

Desde os tempos antigos o transporte de pesados blocos de pedras é feito apoiando-se o bloco sobre troncos de árvores, cuja forma aproxima-se de um cilindro. Os egípcios, usaram esse mecanismo durante a construção das pirâmides, uma vez que o mecanismo em questão permite o deslocamento de monolitos de maneira relativamente estável, uma vez que o cilindro rola de maneira que o monolito arrastado fique sempre a mesma distância do chão, durante o transporte. A figura a seguir ilustra a situação acima descrita.



http://lacienciarecreativa.blogspot.com.br/2013/08/ruedas-no-circulares.html

A escolha do cilindro para o transporte de objetos com peso elevado se dá por ele ser uma forma circular, a qual possui a propriedade de manter constante a distância entre o solo e objeto transportado. Porém cabe aqui uma pergunta: Existe uma outra figura geométrica que tenha a propriedade do círculo ou do cilindro, ou seja, quando rola sobre uma reta, o bloco arrastado fique sempre à mesma distância do chão durante o transporte?

Antes de responder a essa pergunta vamos definir alguns conceitos

Definição 4.1.1. Chamaremos de curva (ou curva parametrizada) a uma aplicação contínua

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2, \qquad t \in I \rightsquigarrow \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

onde I é um intervalo da reta $\mathbb{R}$.

• A imagem de α, $\alpha(I) = \{\alpha(t) : t \in I\}$ é o traço da curva α.

A questão da continuidade de α é equivalente à continuidade das funções coordenadas de α, x e y. Isto é:

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2 \text{ é contínua } \Leftrightarrow x, y : I \to \mathbb{R} \text{ são contínuas.}$$

Definição 4.1.2. Uma curva plana fechada é uma curva parametrizada

$$\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \alpha(a) = \alpha(b).$$

Diz-se que α é uma curva simples se α não possui outras auto interseções; isto é,

$$t_1,\, t_2 \in [a, b)\,,\, t_1 \neq t_2 \;\Rightarrow\; \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$$

Por vezes, faremos menção a uma curva fechada simples C, e estaremos nos referindo ao traço da curva.

Admitiremos que uma curva simples fechada C no plano delimita uma região limitada deste plano que é chamada o interior de C.

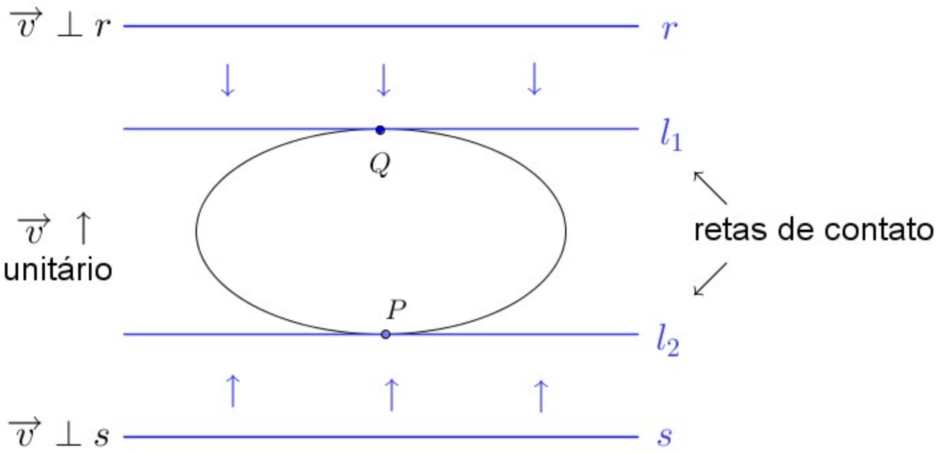
Definição 4.1.3. Um subconjunto do plano é convexo se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos está completamente contido nele.

Diremos que uma curva simples fechada é convexa quando a região limitada da curva é convexa.

A generalização de π, apresentada a seguir, é para curvas simples fechadas e convexas do plano, diferenciáveis (C^∞) por partes.

Iniciamos esta apresentação, definindo a largura de uma curva C, em relação a uma direção unitária $\vec{v}$. Em seguida, usamos esse conceito para definir o diâmetro de uma curva

Definição 4.1.4. Seja C uma curva simples fechada e convexa no plano. Dado um vetor unitário $\vec{v}$ do plano, considere duas retas r e s paralelas e perpendiculares ao vetor $\vec{v}$, de modo que a curva C esteja entre tais retas. Translade as retas na direção do vetor $\vec{v}$ e no sentido da curva C. Sejam l_1 e l_2 as translações das retas r e s respectivamente que tocam pela primeira vez a curva C, como indica a figura abaixo,



Definimos a largura da curva C, na direção do vetor $\vec{v}$, como

$$\ell_{\vec{v}}(C) = \sup\{d(P,Q) : P \in l_1,\, Q \in l_2\}$$

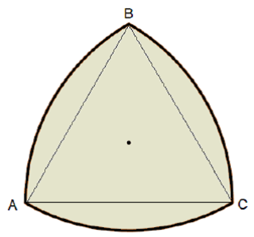
Dizemos que a curva C tem largura constante, quando $\ell_{\vec{c}}(C) = c$ para todo vetor unitário $\vec{v}$ do plano.

Finalmente, o diâmetro da curva C é, por definição,

$$diam(C) = \sup\{\ell_{\vec{v}}(C) : \|\vec{v}\| = 1\}$$

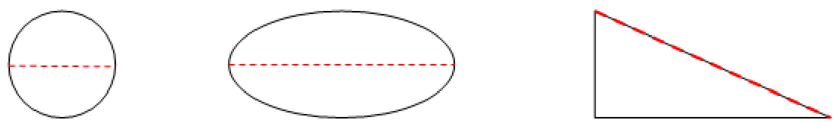
Agora estamos em condições de responder nosso questionamento dado no inicio desta seção. A resposta é sim! Existem outras figuras planas que tem a propriedade do círculo: As curvas de largura constante. Um exemplo simples é o triângulo de Reuleaux. O nome desse triângulo foi dado em homenagem

ao engenheiro alemão Franz Reuleaux que, no século 19, projetou mecanismos envolvendo essa forma geométrica
[1].



Embora não se trate de um triângulo, a figura recebe este nome por ter origem em um triângulo equilátero, por exemplo, o triângulo ABC da figura. A partir desse triângulo equilátero fazem-se três arcos de circunferência de raio $L = AB = BC = CA$, centrados em A, B e C.

A seguir apresentamos três curvas fechadas convexas, destacando o seu diâmetro.



Note que no caso da elipse o diâmetro é o seu eixo maior, enquanto no triângulo retângulo o diâmetro é a hipotenusa.

Embora existam infinitas curvas de largura constante, nos limitaremos a apresentar os polígonos de Reuleaux que são construídos a partir de polígonos regulares com uma quantidade impar de lados, formando arcos circulares, de mesmo raio, centrados nos vértice opostos aos lados do polígono, assim como foi feito no triângulo acima.

A titulo de ilustração, a figura a seguir tem largura constante, e foi obtida a partir de um triângulo retângulo e consequentemente não é um polígono de Reuleaux.

[1]Aos leitores interessados em uma definição precisa de curvas de largura (diâmetro) constante recomendamos o artigo VOLOCH, J. F. Curvas de largura constante. Matemática Universitária, no. 5, junho de 1987, IMPA, RJ. http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n05/n05_Artigo05.pdf

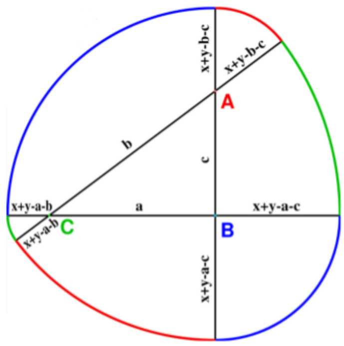


Figura 4.1: x = soma dos dois maiores lados do triângulo ABC. No caso acima, $x = a + b$.

Encontramos curvas de largura constante e, em particular, polígonos de Reuleaux em vários contextos, por exemplo, nas moedas britânicas de 20 e de 50 pence, que são aproximadamente heptágonos de Reuleaux. No caso dessas moedas, consegue-se uma estética diferente do padrão circular mantendo-se o diâmetro bem determinado, permitindo assim o seu uso em máquinas de refrigerantes ou de jogos.

A mais curiosa aplicação do triângulo de Reuleaux se deve ao engenheiro inglês Harry James Watt, que, em 1914, aproveitando as propriedades da curva, concebeu uma broca de furadeira com eixo flexível para fazer furos com a forma aproximada de um quadrado, algo certamente curioso ainda nos dias atuais, uma vez que não é comum ouvir um sim como resposta a pergunta: "É possível construir um furo com a forma aproximada de um quadrado?"

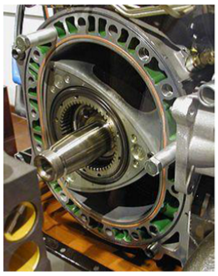
A forma aproximada do triângulo de Reuleaux também é usada na fabricação alguns tipos de lápis e lapiseiras, possivelmente por ser tratar de uma forma mais ergonômica para o manuseio.

No link `http://www.youtube.com/watch?v=Xq4fNhtKjus` o leitor pode constatar que é possível construir uma bicicleta cujas rodas tenham a forma de triângulos de Reuleaux, entretanto a principal dificuldade dessa construção é que, diferentemente de um círculo, o triângulo de Reuleaux não tem um centro fixo, considerando o solo plano.

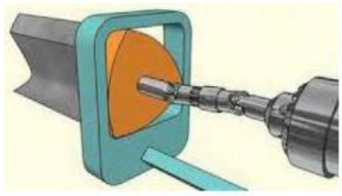
Alguns dos polígonos de Reuleaux encontrados em vários contextos, são:

Moeda inglesa de 50 pence
(heptátogo de Reuleaux)

Palheta em forma
aproximada de um
triângulo de Reuleaux



Motor Wankel que, até 2012, equipava os veículos da Mazda. É um motor de combustão interna que utiliza rotor com a forma de triângulo de Reuleaux no lugar dos tradicionais pistões do motor Diesel.



Broca com forma de triângulo de Reuleaux para fazer furos "quadrados" (o eixo é flexível devido ao fato de que não há um centro em posição fixa)

Sugerimos ainda o link `https://www.youtube.com/watch?v=fK_v-hyMrUo&list=PLByv3zmEDi4_Lea_OS5JR8q5h0n49k2QE` o qual traz um bom resumo do que apresentamos até aqui.

4.2 A Generalização de π

Vimos que $\pi = \frac{\text{perímetro da circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}}$ assim, com a ampliação dos conceitos de comprimento e diâmetro de curva, consequentemente vamos definir por *pi* de uma curva, a razão entre seu comprimento e seu diâmetro. Dessa forma, veremos que o valor de *pi* dependerá apenas da forma da curva e não do seu tamanho. Veja alguns exemplos:

Primeiramente, defina $pi(\text{curva}) = \dfrac{\text{perímetro da curva}}{\text{diâmetro da curva}}$, então:

a) $pi(\text{círculo}) = \frac{\text{perímetro da curva}}{\text{diâmetro da curva}} = \pi$, neste caso, não há o que demonstrar.

b) $pi(\text{triângulo equilátero}) = 3$, uma vez que dado um triângulo equilátero de lado com medida igual a l, teremos como perímetro $3l$ e como diâmetro l, dessa forma obtemos o valor de *pi* de um triângulo equilátero, $\frac{3l}{l} = 3$.

c) pi(triângulo retângulo isósceles) $= 1 + \sqrt{2}$, pois sendo o triângulo retângulo, o seu diâmetro d é o maior de seus lados, isto é a hipotenusa e seja l a medida de seus catetos, assim teremos:

$$pi(\text{triângulo retângulo isósceles}) = \frac{2l + d}{d},$$

mas aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$, ou seja,$d = l\sqrt{2}$, daí

$$\begin{aligned}\frac{2l + d}{d} &= \frac{2l + l\sqrt{2}}{l\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2l\sqrt{2} + 2l}{2l} = \frac{2l(\sqrt{2} + 1)}{2l} \\ &= \sqrt{2} + 1.\end{aligned}$$

d) pi(quadrado) $= 2\sqrt{2}$, pois temos que

$$\frac{4l}{l\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Muitos são os problemas sobre curvas de diâmetro constante, e da razão entre o perímetro e seu diâmetro. No capítulo 5, item 5.5, apresentaremos alguns desses problemas, que entendemos poderem ser aplicados em aulas para alunos do Ensino Médio.

Capítulo 5

Problemas de π

> "As aplicações são empregos das noções e teoria da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro. Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender."
>
> LIMA, Elon L. RPM nr 41, p.2

Uma das primeiras aplicações de π, está relacionada ao cálculo de áreas e volumes, além do perímetro. Hoje são muitas essas aplicações, entretanto vamos nos limitar as aplicações elementares e que possam despertar no aluno da escola básica, o interesse pelo seu estudo. Vamos então iniciar as aplicações com problemas sobre áreas, e em seguida faremos aplicações sobre comprimentos, e também problemas sobre áreas e perímetros.

5.1 Áreas

Problema 1 (Questão 27 de acesso ao PROFMAT 2011). Se espremermos um círculo de raio $10cm$ entre duas retas paralelas que distam entre si $10cm$, obteremos uma figura de área menor, mas de mesmo perímetro que o círculo original.

Se as partes curvas desta figura obtida são semicircunferências, a razão da área da figura espremida pela área do círculo inicial é:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{\pi}{4}$

Solução. Inicialmente calculemos o comprimento da circunferência de raio $10cm$, uma vez que esse comprimento coincide com o comprimento da figura de área menor, assim teremos:

$$C = 2\pi R = 2\pi \times 10 = 20\pi.$$

Como as paralelas distam entre si $10cm$ e as partes curvas são semicircunferência, afirmamos que o raio destas semicircunferências tem 5cm, e assim o comprimento C_1, apenas das partes curvas será:

$$C_1 = 2\pi R = 2\pi \times 5 = 10\pi.$$

Ora, desta forma o comprimento dos lados da figura contidos nas paralelas é portanto 10π, uma vez que a medidas desses lados é a diferença $20\pi - 10\pi$, conforme a figura a seguir:

Nessa figura temos, por construção, um retângulo de lados 5π e 10, e duas semicircunferências de raio 5, segue que a área dessa figura é

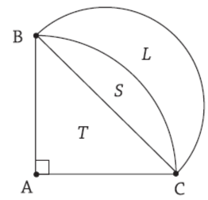
$$A = 5\pi \times 10 + \pi 5^2 = 75\pi.$$

E portanto a razão entre as áreas da área da figura espremida $A = 75\pi$ e do círculo $A(c) = \pi \times 10^2$ é

$$\frac{A}{A(c)} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4},$$

o que corresponde a alternativa a).

Problema 2 (Questão 3, discursiva do Exame de acesso ao PROFMAT 2011). Considere um triângulo retângulo isósceles ABC com hipotenusa BC. Tomando o ponto A como centro e AB como raio, consideramos o arco de circunferência delimitado pela corda BC. Consideremos ainda a semicircunferência de diâmetro BC, conforme a figura ao lado. Designamos por T a área da região triangular ABC e por S e L as áreas das outras duas regiões. Prove que $L = T$.



Solução. Tome $AB = AC = l$ assim a área T do triângulo será $T = \frac{l \times l}{2} = \frac{l^2}{2}$ e área S será

$$S = \frac{1}{4}(\pi \times l^2) - \frac{l^2}{2} = \frac{\pi l^2}{4} - \frac{l^2}{2} = \frac{\pi l^2 - 2l^2}{4}.$$

Como BC é hipotenusa do triângulo retângulo ABC teremos

$$(BC)^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow BC = l\sqrt{2}.$$

Com isso teremos por $r = \frac{l\sqrt{2}}{2}$ a medida o raio da semicircunferência de diâmetro BC e daí a área da região L é

$$L = \frac{\pi(\frac{l\sqrt{2}}{2})^2}{2} - S,$$

isto é,

$$\begin{aligned} L =& \frac{\pi(\frac{l\sqrt{2}}{2})^2}{2} - \frac{\pi l^2 - 2l^2}{4} = \frac{\frac{2\pi l^2}{4}}{2} - \frac{\pi l^2 - 2l^2}{4} \\ =& \frac{\pi l^2}{4} - \frac{\pi l^2 - 2l^2}{4} = \frac{2l^2}{4} \\ =& \frac{l^2}{2} = T, \end{aligned}$$

portanto está provado que $L = T$.

Problema 3 (Questão 8 do Exame de acesso 2012). Se a medida do diâmetro de um círculo aumenta em 100%, então a medida de sua área aumenta em:

a) 300%

b) 100%

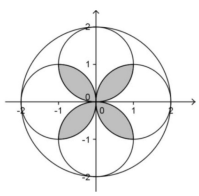
c) 200%

d) 400%

e) 314%

Solução. Seja D a medida do diâmetro do círculo, seu raio será $r = \frac{D}{2}$ e assim, a área desse círculo é $A = \pi\frac{D^2}{4} = \pi r^2$. Aumentando em 100% este diâmetro obtemos uma nova circunferência de diâmetro $2D$, logo de raio $R = D$, o qual terá área $a = \pi D^2 = \pi R^2$. Dessa forma a área aumentou em 300%, uma vez que a nova área é 4 vezes maior, pois a razão entre as áreas é $\frac{4}{1} = \frac{\pi D^2}{\pi\frac{D^2}{4}} = \frac{a}{A}$.

Problema 4 (Questão 27 do Exame de acesso ao PROFMAT 2012). Observe o desenho abaixo com as quatro circunferências de raio 1 dentro da circunferência de raio 2.



A área sombreada é igual a:

a) $2\pi - 2$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $2\pi - 4$

d) $\frac{\pi}{2}$

e) $\pi - \sqrt{\pi}$

Solução. Considere o quadrado de lado 1, de vértices $(0,0),\ (1,0),\ (1,1)$ e $(0,1)$. Temos nesse quadrado duas figuras equivalente, sendo cada uma delas um quarto da circunferência de raio 1. É possível verificar que a região sombreada da figura é composta por quatro figuras tais que, cada uma destas é obtida pela interseção dos dois quartos de circunferência citados. Veja:

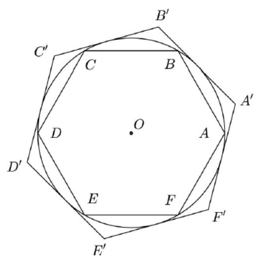
Assim a área a da figura formada pelos dois arcos de circunferência é dada por

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - a = 1 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} - 1,$$

e como temos 4 dessas figura, concluímos que a área sombreada é

$$4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2\pi - 4.$$

Problema 5 (Questão 29 do Exame de acesso ao PROFMAT 2012). Na figura ao abaixo, os hexágonos regulares $ABCDEF$ e $A'B'C'D'E'F'$ estão, respectivamente, inscrito e circunscrito à uma circunferência de centro O.



A razão $\frac{\text{área}(A'B'C'D'E'F')}{\text{área}(ABCDEF)}$ vale:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{3}$

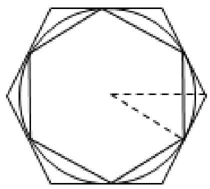
c) $2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) 2

Solução. Vimos na Proposição 2 do livro XII dos *Elementos de Euclides* que, *Círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.* Isso nos permite afirmar que a razão entre as áreas de dois hexágonos regulares será o quadrado da razão de semelhança, que neste caso é $\frac{OA'}{OA}$.

Note que OA' é o apótema do hexágono circunscrito, para isso basta girar o hexágono inscrito até que o vértice A coincida com o ponto médio de $A'F'$. Note ainda que, dessa forma obtemos o triângulo retângulo OAA' cuja hipotenusa será OA'.



Daí temos $AA' = \frac{1}{2}A'F' = \frac{1}{2}OA'$, aplicando o Teorema de Pitágoras obtemos $(OA')^2 = (OA)^2 + (AA')^2$, segue

$$(OA')^2 = (OA)^2+(AA')^2 \Rightarrow (OA)^2 = (OA')^2-\left(\frac{OA'}{2}\right)^2 = (OA')^2-\frac{1}{4}(OA')^2,$$

ou seja,

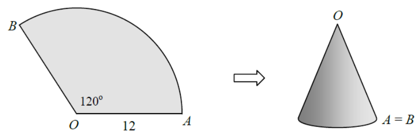
$$\Rightarrow (OA)^2 = \frac{3}{4}(OA')^2,$$

logo

$$4(OA)^2 = 3(OA')^2 \Rightarrow \frac{(OA')^2}{(OA)^2} = \frac{4}{3}.$$

Portanto a razão $\frac{\text{área}(A'B'C'D'E'F')}{\text{área}(ABCDEF)}$ vale $\frac{4}{3}$.

Problema 6 (Questão 32 do Exame de acesso ao PROFMAT 2012). Pedro recorta em uma folha de papel um setor circular OAB de raio $12cm$ e ângulo de $120°$. Juntando e colando os raios OA e OB ele faz um cone como mostra a figura abaixo.



A altura desse cone é aproximadamente:

a) $9,6cm$

b) $10,4cm$

c) $10,8cm$

d) $11,3cm$

e) $11,7cm$

Solução. A altura (H) do cone é ortogonal a sua base, portanto perpendicular ao diâmetro (D) dessa base, e ainda intersecta o diâmetro em seu ponto médio, isto é no centro da circunferência, que denominaremos O'. Dessa forma é possível verificar que os pontos AOO' são vértices de um triângulo retângulo, com $AO = 12$, $AO' = \frac{D}{2} = r$ e $OO' = H$.

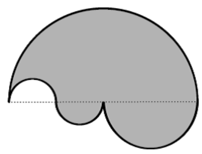
O comprimento do arco AB, um terço da circunferência de raio AO, uma vez que $120° = \frac{360°}{3}$, é igual ao comprimento da circunferência da base do cone, assim:

$$AB = \frac{1}{3} \times (2\pi \times 12) = 8\pi, \quad \text{daí} \;\; 2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4 = AO'.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(AO)^2 = (AO')^2 + (OO')^2 \Rightarrow H^2 = 12^2 - 4^2 = 144 - 16 = 128 \Rightarrow H \cong 11,3.$$

Problema 7 (Questão 12 do Exame de acesso ao PROFMAT 2013). A figura abaixo é composta por 4 semicircunferências. As duas menores possuem o mesmo raio, medindo $1,5cm$. A semicircunferência intermediária tem diâmetro igual ao raio da circunferência maior.



A área da região sombreada, em cm^2 é:

a) 18π

b) $22,5\pi$

c) $25,5\pi$

d) 36π

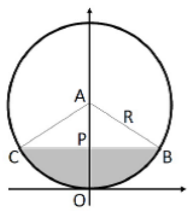
e) 45π

Solução. Como o raio das duas menores tem $1,5cm$ então vemos pela figura que o raio da maior tem $6cm$. Vemos ainda que a região da semicircunferência menor completa a semicircunferência maior e assim a área (A) da região sombreada equivale a somas das áreas das circunferências de raios $6cm$ e $3cm$, daí:

$$A = \pi 6^2 + \pi 3^2 = 36\pi + 9\pi = 45\pi,$$

portanto alternativa e).

Problema 8 (Questão 20 do Exame de acesso ao PROFMAT 2014 (adaptada)). Determine a área da região cinza, sabendo que a medida do segmento PO é igual a $1/4$ da medida do diâmetro.



Solução. Como a medida do segmento PO é igual a $1/4$ da medida (D) do diâmetro, temos que

$$PO = \frac{1}{4}D = \frac{1}{4}2R = \frac{R}{2}$$

e que

$$AP = R - PO = R - \frac{R}{2} \Rightarrow AP = \frac{R}{2}.$$

A área (A) da região cinza é a diferença entre a área do setor circular de ângulo central $B\widehat{A}C$ e a área do triângulo isósceles BAC, cuja altura é $h = AP$, assim:

$$\cos B\widehat{A}P = \frac{AP}{R} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow B\widehat{A}P = 60°,$$

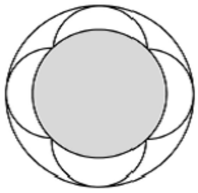
logo o ângulo $B\widehat{A}C = 120°$, segue que

$$\text{sen}60° = \frac{PB}{R} \Rightarrow PB = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

A área (A) será

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R\sqrt{3}\frac{R}{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4\pi R^2 - 3R^2\sqrt{3}}{12} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}. \end{aligned}$$

Problema 9 (Questão 25 do Exame de acesso ao PROFMAT 2014)*.* A figura mostra duas circunferências concêntricas e quatro arcos semicirculares, cujos extremos são os vértices de um quadrado inscrito na circunferência interna. A circunferência externa tangencia os arcos semicirculares. Se a área do círculo interno é 1, qual é a área do círculo externo?



a) 4

b) $\frac{5\pi}{2}$

c) 2

d) 2π

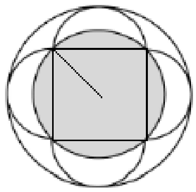
e) 3

Solução. Para determinarmos a área do círculo externo precisamos da medida do seu raio (R), que é igual ao lado do quadrado inscrito na circunferência interna, uma vez que as circunferências têm mesmo centro, que coincide com o centro do quadrado e o raio (r) dos arcos de circunferência é metade do lado desse quadrado.

Assim, seja (l) o lado do quadrado, temos:

$$2r = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \frac{2r}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow l = r\sqrt{2},$$

daí, $R = r\sqrt{2} = l$.



A área (A) do círculo maior será

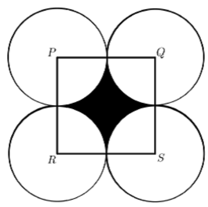
$$A = \pi R^2 = \pi(r\sqrt{2})^2 = 2\pi r^2,$$

mas $\pi r^2 = 1$, área do círculo interno e portanto a área do círculo externo é

$$A = 2\pi r^2 = 2.$$

O que nos chama a atenção é que a área do círculo maior é portanto o dobro da área do círculo interno, algo improvável de se prever ao analisarmos a figura.

Problema 10 (Questão 25 do Exame de acesso ao PROFMAT 2015). Os vértices do quadrado $PQRS$ são os centros de quatro circunferências de raio 2, cada uma tangente a outras duas conforme a figura abaixo. Qual é a área da região interna ao quadrado e externa às quatro circunferências?



a) $4 - \pi$

b) $4 - \frac{\pi}{4}$

c) $16 - \frac{\pi}{4}$

d) $16 - \pi$

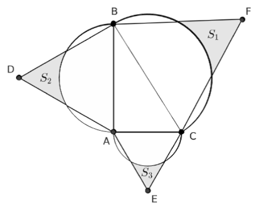
e) $16 - 4\pi$

Solução. Temos QS lado do quadrado, assim $QS = 4$, pois o raio da circunferência de centro Q é 2 e o mesmo ocorre com a circunferência de centro S, tangentes.

Vemos que a área (A) da região interna ao quadrado e externa às quatro circunferências é a diferença entre as áreas do quadrado e de uma das quatro circunferências, uma vez que as 4 regiões comuns entre as circunferências e o quadrado são congruentes a um quarto de uma delas. Assim:

$$A = 4^2 - 4\pi = 16 - 4\pi.$$

Problema 11 (Questão 37 do Exame de acesso ao PROFMAT 2015). Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, os triângulos ABD, ACE e BCF são equiláteros e os segmentos AB, AC e BC são os diâmetros dos arcos de circunferência.



Sendo S_1, S_2 e S_3 as áreas das regiões destacadas, a área S_1 é dada por

a) $S_2 + S_3$

b) $\sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$

c) $\sqrt{S_2^2 + S_3^2}$

d) $\sqrt{S_2^2 - S_3^2}$

e) $S_2 - S_3$

Solução. Temos que as áreas de S_1, S_2 e S_3, são semelhantes, uma vez que são limitadas por triângulos equiláteros de lados BC, AB e AC, e semicírculos cujos diâmetros são congruentes a esses lados, respectivamente. Assim essas áreas S_1, S_2 e S_3 são proporcionais aos quadrados dos lados BC, AB e AC, respectivamente, daí

$$\frac{S_1}{\overline{BC}^2} = \frac{S_2}{\overline{AB}^2} = \frac{S_3}{\overline{AC}^2} = k,$$

onde k é a constante de proporcionalidade, segue que

$$S_1 = k\overline{BC}^2,\ S_2 = k\overline{AB}^2 \ \text{ e } \ S_3 = k\overline{AC}^2.$$

Mas como o triângulo ABC é retângulo, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow k\overline{BC}^2 = k(\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2),$$

logo

$$k\overline{BC}^2 = k\overline{AC}^2 + k\overline{AB}^2$$

isto é, $S_1 = S_2 + S_3$, o que corresponde a alternativa a).

5.2 Comprimento

Problema 12. Suponha que é possível circundar a Terra com uma corda sobre a linha do equador. Ao fazer isso, retiramos a corda e a aumentamos seu comprimento em $1m$, apenas. Ao repor essa corda sobre a linha do equador, formando uma circunferência concêntrica com a linha do equador, prevemos a existência de um vão, diferença entre os raios das duas circunferências circuncêntricas em questão. Determine a medida desse vão.

Intuitivamente, somos levados a imaginar que esse vão é tão pequeno que devemos desprezá-lo, mas será isto, de fato, o que vai ocorrer? Ora somente saberemos efetuando os devidos cálculos, assim...

Seja C_1 o comprimento da linha do equador e r_1 o raio da Terra, dessa forma teremos $C_1 = 2\pi r_1$. Portanto $2\pi r_1$ é o comprimento da corda que circunda a Terra, ajustando-se perfeitamente sobre a linha do equador.

E seja C_2 o comprimento da corda aumentada em $1m$, segue que $C_2 = 2\pi r_1 + 1$. Se o raio dessa nova circunferência concêntrica com a circunferência da linha o equador é r_2, teremos $C_2 = 2\pi r_2$ e portanto vamos calcular a diferença $r_2 - r_1$, denominada vão.

Temos que $r_1 = \frac{C_1}{2\pi}$ e $r_2 = \frac{C_2}{2\pi}$, daí

$$r_2 - r_1 = \frac{C_2}{2\pi} - \frac{C_1}{2\pi} = \frac{C_2 - C_1}{2\pi},$$

mas como $C_1 = 2\pi r_1$ e $C_2 = 2\pi r_1 + 1$, podemos escrever

$$r_2 - r_1 = \frac{2\pi r_1 + 1 - 2\pi r_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi},$$

para $\pi \cong 3,14$, vamos obter

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{2 \times 3,14} = \frac{1}{6,28} \cong 0,16.$$

Vemos portanto que o vão tem aproximadamente $16cm$, o que não é tão desprezível, quanto se possa pensar.

Voltando aos cálculos acima, é possível verificar que o vão entre circunferências circuncêntricas de raios r_1 e r_2, independe desses raios. Logo, se aumentarmos o comprimento de uma circunferência em $1m$, ao construirmos estas circunferências de modo concêntricas, haveremos de obter um vão de $0,16m$.

Problema 13 (Questão 23 do Exame de acesso ao PROFMAT 2015). Seja l_n a medida do lado de um polígono regular de n lados, inscrito em um círculo de raio R. Qual das afirmações abaixo está correta para todo valor de n?

a) $\text{sen}90^\circ - \frac{180^\circ}{n} = \frac{l_n}{2R}$

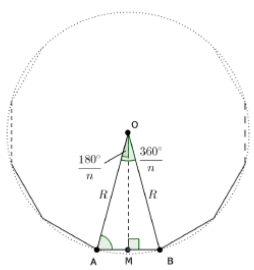
b) $\text{sen}\frac{180^\circ}{n} = \frac{l_n}{2R}$

c) $\text{sen}\frac{180^\circ}{n} = \frac{l_n}{R}$

d) $\cos 90^\circ - \frac{180^\circ}{n} = \frac{l_n}{R}$

e) $\text{sen}\frac{360^\circ}{n} = \frac{l_n}{R}$

Solução. A figura a seguir representa a situação, isto é, temos um polígono de n lados, inscrito em um círculo de raio R.



Daí vemos que o triângulo ABO é isósceles pois, O é o centro do círculo e assim sendo $AO = OB = R$ e o ângulo central $B\widehat{O}A$ tem por medida $\frac{360°}{n}$, uma vez que o polígono é regular de n lados, logo divide o círculo em n partes iguais.

Sendo o triângulo ABO isósceles temos que sua altura OM é também bissetriz, daí o ângulo

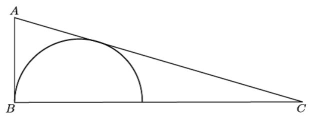
$$M\widehat{O}A = M\widehat{O}B = \frac{B\widehat{O}A}{2} = \frac{\frac{360°}{n}}{2} = \frac{180°}{n}.$$

Dessa forma os triângulos MBO e AMO são congruentes, pelo caso L.A.L (lado, ângulo, lado) o que nos permite afirmar que $MB = AM = \frac{l_n}{2}$. Isto posto, teremos

$$\text{sen}\frac{180°}{n} = \frac{MB}{R} = \frac{\frac{l_n}{2}}{R} = \frac{l_n}{2R},$$

o que corresponde a alternativa b).

Problema 14 (Questão 34 do Exame de acesso ao PROFMAT). O semicírculo da figura está inscrito no triângulo retângulo ABC de catetos $AB = 7$ e $BC = 24$.



O raio do semicírculo é igual a:

a) $2\sqrt{5}$

b) 5

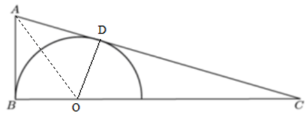
c) $3\sqrt{3}$

d) $\frac{21}{4}$

e) $\frac{16}{3}$

Solução. Seja O o centro da semicircunferência e D o ponto de tangência dessa semicircunferência com o lado AC do triângulo retângulo, e ainda R o raio da semicircunferência. Assim $OD = OB = R$.

Afirmamos que $AB = AD$, uma vez que, pelo caso de congruência de triângulos $L.L.A$ (Lado, lado e ângulo oposto), em relação aos triângulos



retângulos OBA e ODA, e com isso teremos $AC = 7 + DC$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 = 7^2 + 24^2 = 625,$$

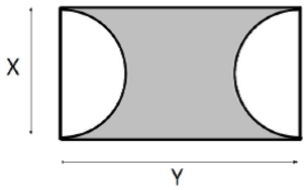
logo $AC = \sqrt{625} = 25$, segue de $AC = 7 + CD$ que $DC = 18$.

Como os triângulos retângulos CDO e CBA são semelhantes, uma vez que seus três ângulos são respectivamente congruentes, temos que

$$\frac{DO}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{R}{7} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} \Rightarrow R = \frac{21}{4},$$

portanto alternativa d).

Problema 15 (Questão 9 do Exame de acesso ao PROFMAT 2014). De um retângulo de lados medindo X e Y, $X \leq Y$, são retirados dois semicírculos de raio $X/2$ formando a figura ilustrada abaixo, em cinza.



Entre todas as figuras assim construídas, com perímetro medindo $10m$, determine aquela de área máxima e assinale, entre as alternativas abaixo, a que melhor se aproxima esta área máxima.

a) $12,5m^2$

b) $2,5m^2$

c) $6,8m^2$

d) $\frac{10}{3\pi}m^2$

e) $2,65\pi$

Solução. Se da área do retângulo subtrairmos a área das duas semicircunferências, então a área restante é a área da figura cinza. E como as duas semicircunferências são congruentes, uma vez que têm mesmo raio, a área (A) da figura cinza será:

$$A = xy - \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy - \frac{x^2\pi}{4}.$$

As figuras assim construídas tem perímetro (P) medindo $10m$, daí temos:

$$P = y + 2\pi\left(\frac{x}{2}\right) + y = x\pi + 2y,$$

assim

$$2y + x\pi = 10.$$

Dessa forma a área da figura cinza, em função de x é dada por

$$A(x) = xy - \frac{x^2\pi}{4} = \left(\frac{10 - x\pi}{2}\right)x - \frac{x^2\pi}{4},$$

isto é,

$$A(x) = \frac{10x - x^2\pi}{2} - \frac{x^2\pi}{4} = \frac{20x - 2x^2\pi - x^2\pi}{4} = 5x - \frac{3}{4}x^2\pi,$$

logo a área em função de x é expressa por uma função quadrática ou função polinomial do 2° grau, pois essa função é definida por um polinômio do 2° grau, assim temos:

$$A(x) = -\frac{3}{4}\pi x^2 + 5x.$$

Dessa forma a área máxima corresponde ordenada do vértice da parábola, gráfico dessa função e cuja concavidade é para baixo, porque $-\frac{3}{4} < 0$. Assim:

$$y = \frac{-\triangle}{4a} = \frac{-\left(5^2 - 4\left(-\frac{3}{4}\pi\right)0\right)}{4\left(-\frac{3}{4}\pi\right)} = \frac{-25}{-3\pi} = \frac{25}{3\pi},$$

o que corresponde a aproximadamente $2,65$. Portanto a área máxima é $2,65m^2$.

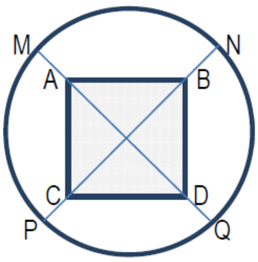
Problema 16. Um ciclista saiu para treinar levando consigo uma terceira roda de reposição. Durante o percurso de $60km$ foi alternando as rodas de maneira que cada uma rodasse uma distância igual à das outras. Quantos quilômetros rodou cada roda? E quantas voltas cada uma deu, se a bicicleta usada é uma com roda aro 26”?

Solução. Se o percurso é de $60km$ e se fossem usadas apenas as duas rodas, então cada uma rodaria $60km$, logo as duas juntas rodam $120km$ mas, como são 3 rodas a serem usadas, cada uma rodará $40km$, pois $\frac{120}{3} = 40$.

Como o pneu tem aro de 26", temos um diâmetro de $26 \times 2,54 = 66,04cm$, assim o raio tem $33,02cm$. Dessa forma cada volta percorre $2,07m$, pois $C = 2\pi r \cong 2 \times 3.14 \times 33,02 \cong 207,3656cm$. E como foram $40km$ teremos:

$$\frac{40000}{2,07} \cong 19324 \text{ voltas, aproximadamente.}$$

Problema 17 (Questão 50 do vestibular da Universidade Estadual da Saúde de Alagoas 2014). A figura desenhada sem escala, mostra uma piscina quadrada de lado igual a 20 metros, em torno da qual foi construída uma pista circular, com $MA = NB = PC = QD = 2$ metros. Adote $\pi = 3$, $\sqrt{2} = 1,41$ e não leve em conta a largura da pista.



Uma volta completa na pista equivale a um percurso aproximado de

a) 42 metros

b) 48 metros

c) 80 metros

d) 85 metros

e) 97 metros

Solução. Com base na figura, vemos que o raio (R) da circunferência corresponde à metade da medida do diâmetro (D) do quadrado acrescido de 2 metros, assim como $D = l\sqrt{2} = 20 \times 1,41 = 28,2$ metros, assim o raio tem $R = 14,1$ e portanto o comprimento (C) de um volta equivale um percurso de 85 metros, pois

$$C = 2\pi r = 2 \times 3 \times 14,1 \cong 85.$$

Capítulo 6

Sugestões de atividades para o cálculo de π

Os métodos usados para encontrar o valor de π tornaram-se cada vez mais rápidos e eficientes, uma vez que o mais rudimentar deles usa a própria definição de π isto é, como razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência. Com o avanço da ciência esses métodos foram aperfeiçoados geometricamente e em seguida algebricamente, e, hoje com o uso de ferramentas computacionais o trabalho tornou-se mais sofisticado.

Por exemplo o algoritmo usado no cálculo de 100265 casas decimais de π, fez uso de 105000 operações aritméticas, enquanto o algoritmo usado em 1984 pelos irmãos Borwein, obteve os mesmos 100265 algarismos com apenas 112 operações.

O desenvolvimento de novos e mais elaborados algoritmos contribui para o desenvolvimento da Matemática e Computação, entre as contribuições citamos a conjectura sobre a distribuição aleatória dos dígitos na expansão decimal de π, a qual diz que um dígito tem a mesma probabilidade de aparecer na expansão decimal do que qualquer outro.

Essa conjectura tomou mais força, quando em 1999, examinando 200 bilhões de casas decimais do π, Kanada e Takahashi obtiveram um número muito próximo de 20 milhões de ocorrências, para cada dígito de 0 a 9.

Acreditamos que os métodos criados para encontrar o valor de π serão cada vez mais aperfeiçoados, otimizados, estudados e até criados novos, com o passar dos anos. Segue, então alguns desses métodos:

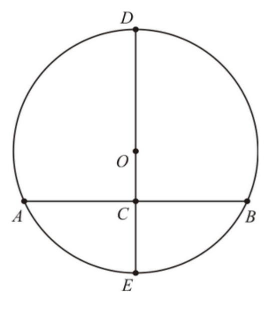
6.1 Usando a definição de π

Com base na própria definição de π, para calcularmos o seu valor, tome um círculo e meça o seu comprimento, o seu diâmetro e determine a razão entre essas medidas.

Para medir um círculo, por exemplo uma tampa de uma lata de leite, podemos usar uma fita métrica de costura, por ser flexível, enquanto para medir o diâmetro sugerimos o uso de uma régua ou mesmo um escalímetro.

Certamente, algumas dificuldades serão encontradas, nessa prática, entre elas como ter certeza se realmente medimos o diâmetro? O instrumento de medida sugerido não é preciso, de modo que quanto maior o número de medições feitas com cada vez mais cuidados e atenção, mais próximos chegaremos de um resultado preciso.

Outro fato importante é ter certeza de que a corda medida é de fato o diâmetro, para isso podemos desenhar o círculo em uma folha de papel (não pautada), traçar uma corda e em seguida sua mediatriz. Afirmamos que o ponto médio da mediatriz de extremidades na circunferência do círculo é o centro do círculo, isto é, tome uma circunferência λ, trace uma corda AB qualquer, trace a mediatriz da corda AB, marcando os pontos D e E (interseção da mediatriz com a circunferência λ) e o ponto C (interseção da mediatriz com a corda AB), e finalmente determine o ponto médio do segmento DE que será o centro O da circunferência λ.



Podemos ainda estimar o valor de π usando o conceito de área do círculo, por exemplo medindo a quantidade de tinta usada para pintá-los, ou ainda pesando círculos construídos com um mesmo material de densidade conhecida. Ainda assim os problemas continuarão sendo os mesmos, em relação a precisão.

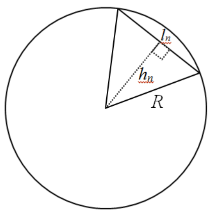
Vejamos a seguir uma maneira de estimar o valor de π, usando o método da exaustão.

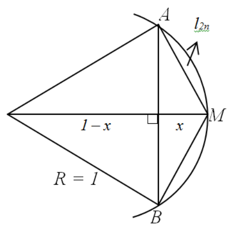
6.2 Método da exaustão aplicado a polígonos inscritos

Vimos que esse método foi usado por Arquimedes por volta do ano 250 a.C. e consiste em inscrever polígonos em um círculo, iniciando-se por exemplo com o quadrado, seguido de um octógono, e assim dobrando-se o número de lados, de modo a aproximar-se cada vez mais da circunferência.

Hoje, usando os conceitos da álgebra podemos expressar o perímetro de um polígono de n lados, inscrito em um círculo de raio r, em particular tome $r = 1$, veremos assim um modo de estimar o valor de π, a partir dessa generalização.

Seja M o ponto médio do arco AB, teremos l_{2n} o lado do polígono cuja quantidade de lados é o dobro do número de lados do polígono anterior, cujo lado é l_n.





Aplicando o Teorema de Pitágoras temos $l_{2n}^2 = x^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2$ e que $1 = (1-x)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2$, daí obtemos a igualdade:

$$l_{2n}^2 - x^2 = 1-(1-x)^2 \Rightarrow l_{2n}^2 = x^2+1-(1-2x+x^2) = x^2+1-1+2x-x^2 = 2x,$$

logo $l_{2n}^2 = 2x$, ou seja, $x = \frac{l_{2n}^2}{2}$. Mas, $l_{2n}^2 = x^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2$, daí $l_{2n}^2 = \left(\frac{l_{2n}^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{l_{2n}^4}{4} + \frac{l_n^2}{4} - l_{2n}^2 = 0$, multiplicando a última igualdade por 4, obtemos:

$$l_{2n}^4 + l_{2n}^2 - 4l_{2n}^2 = 0 \Rightarrow (l_{2n}^4 - 4l_{2n}^2) + l_n^2 = 0,$$

daí

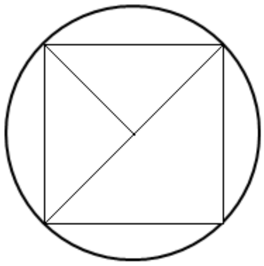
$$\Rightarrow (l_{2n}^4 - 4l_{2n}^2 + 4) - 4 + l_n^2 = 0 \Rightarrow (l_{2n}^2 - 2)^2 = 4 - l_n^2.$$

Afirmamos que $4 - l_n^2 > 0$, uma vez que $r = 1$, $l_n < 2$, para todo n, note que l_n (lado do polígono inscrito) é uma corda, e portanto deve ser sempre menor do que o diâmetro do círculo que circunscreve esse polígono.

Isto posto podemos concluir que

$$(l_{2n}^2 - 2)^2 = 4 - l_n^2 \Rightarrow l_{2n}^2 - 2 = \pm\sqrt{4 - l_n^2}.$$

Tomando o quadrado como o polígono inscrito na circunferência de raio $r = 1$, temos que $l_4 = \sqrt{2}$, pois $(l_4)^2 = 2$.



Ora, para $n \geq 4$, teremos $l_{2n} < l_6 = 1$ porque se o raio da circunferência é 1, então o lado do hexágono inscrito nessa circunferência também é 1 e o lado do octógono inscrito na mesma circunferência de raio 1, é menor do que o lado do hexágono. Desta forma afirmamos que $l_{2n}^2 - 2 < 0$, segue então que

$$l_{2n}^2 - 2 = -\sqrt{4 - l_n^2} \Rightarrow l_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - l_n^2},$$

daí

$$l_{2n} = \pm\sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

e como l_{2n} é a medida do comprimento do lado de um polígono temos que $l_{2n} > 2$ e portanto

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

e assim o perímetro p do polígono com $2n$ lados, inscrito numa circunferência de raio 1, concluímos que

$$p_{2n} = 2n\sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}.$$

Usando o método da exaustão, e a fórmula que acabamos de obter, poderemos então realizar a experiência de obter o valor de π, que neste caso é dado por $\frac{p_{2n}}{2}$, pois estamos com uma circunferência de raio 1, veja a tabela abaixo:

$2n$	l_{2n}	p_{2n}	Valor de π
6	1	6	3
12	0,51764	6,2116571	3,1058285
24	0,26105	6,2652572	3,1326286
48	0,13081	6,2787004	3,1393502
96	0,06544	6,2820639	3,141032
192	0,03272	6,2829049	3,1414525
384	0,01636	6,2831152	3,1415576
768	0,00818	6,2831678	3,1415839
1536	0,00409	6,2831809	3,1415905
3072	0,00205	6,2831842	3,1415921
6144	0,00102	6,283185	3,1415925
12288	0,00051	6,2831852	3,1415926
24576	0,00026	6,2831853	3,1415926
49152	0,00013	6,2831853	3,1415926

6.3 O Método da exaustão e a trigonometria

No capítulo 1, item 1.6, vimos que

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180^o}{2^n}\right).$$

Fazendo $x_{2^n} = 2^n \operatorname{sen}\left(\frac{180^o}{2^n}\right)$, vamos calcular x_{2^n}, quando n=1,2,3,4,5.

Caso $n = 1$: Temos que

$$x_2 = 2\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{2} = 2\operatorname{sen}90^\circ = 2.$$

Caso $n = 2$: Temos que

$$x_{2^2} = 2^2\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{2^2} = 4\operatorname{sen}45^\circ = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x_4 = 2\sqrt{2}.$$

Caso $n = 3$: Temos que

$$x_{2^3} = 2^3\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{2^3} = 8\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8},$$

mas de $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ e de $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ obtemos as expressões

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{4} = \operatorname{sen}2\frac{180^\circ}{8} = 2\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8}\cos\frac{180^\circ}{8}$$

e
$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{180^\circ}{4} = \cos 2\frac{180^\circ}{8} = \cos^2\frac{180^\circ}{8} - \operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8},$$
donde obtemos
$$\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$
uma vez que,
$$2\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8}\cos\frac{180^\circ}{8} = \cos^2\frac{180^\circ}{8} - \operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8},$$
usando a relação fundamental $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}2\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8}\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8}} &= 1 - \operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8} - \operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8}\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8}.\end{aligned}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, teremos

$$\begin{aligned}4\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8}\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8}\right) &= 1 - 4\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8} + 4\operatorname{sen}^4\frac{180^\circ}{8}\\ 4\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8} - 4\operatorname{sen}^4\frac{180^\circ}{8} &= 1 - 4\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8} + 4\operatorname{sen}^4\frac{180^\circ}{8}\\ 8\operatorname{sen}^4\frac{180^\circ}{8} - 8\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8} + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Fazendo $\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8} = x$, teremos que $8x^2 - 8x + 1 = 0$, daí

$$x = \frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-32}}{16} = \frac{8\pm\sqrt{32}}{16} = \frac{8\pm 4\sqrt{2}}{16},$$
isto é, $x = \frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$, e assim

$$x = \operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{8} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8} = \pm\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}{2}.$$

Como $\operatorname{sen}0^\circ < \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8} < 1$, segue que
$$\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8} = \frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}{2},$$

entretanto

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{180^\circ}{4},$$

logo

$$\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Com isso obtemos

$$x_{2^3} = 8\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8} = 8\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = 4\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

e portanto

$$x_8 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Caso $n = 4$: Temos que

$$x_{2^4} = 2^4\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{2^4} = 16\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{16},$$

mas vimos que

$$\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \operatorname{sen}2\frac{180^\circ}{16} = 2\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{16}\cos\frac{180^\circ}{16},$$

assim

$$2\operatorname{sen}\frac{180^\circ}{16}\cos\frac{180^\circ}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

que elevando ao quadrado obtém-se

$$4\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{16}\cos^2\frac{180^\circ}{16} = \frac{2-\sqrt{2}}{4},$$

ora

$$\cos^2\frac{180^\circ}{16} = 1 - \operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{16},$$

daí

$$4\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{16}\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{16}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow 4\operatorname{sen}^2\frac{180^\circ}{16} - 4\operatorname{sen}^4\frac{180^\circ}{16} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Tomando $\operatorname{sen}^2 \frac{180°}{16} = k$, obtemos a equação $-4k^2 + 4k - \frac{2-\sqrt{2}}{4} = 0$, donde

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^4 - 4(-4)\left(-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)}}{-8} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(2-\sqrt{2})}}{-8},$$

segue que

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{4(4-(2-\sqrt{2}))}}{-8} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{-8} = \frac{2 \mp \sqrt{2+\sqrt{2}}}{4},$$

com isso obtemos

$$\operatorname{sen}\frac{180°}{16} = \pm\sqrt{\frac{2 \mp \sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2 \mp \sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

e como $0 < \operatorname{sen}\frac{180°}{16} < 1$, temos que

$$\operatorname{sen}\frac{180°}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

Dessa forma, temos que

$$x_{16} = 2^4 \operatorname{sen}\frac{180°}{2^4} = 16 \operatorname{sen}\frac{180°}{16} = 16\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Caso $n = 5$: Temos que

$$x_{2^5} = 2^5 \operatorname{sen}\frac{180°}{2^5} = 32 \operatorname{sen}\frac{180°}{32}.$$

Vimos que

$$\operatorname{sen}\frac{180°}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

daí

$$\operatorname{sen}\frac{180°}{16} = \operatorname{sen}2\frac{180°}{32} = 2\operatorname{sen}\frac{180°}{32}\cos\frac{180°}{32} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$

elevando as duas últimas igualdades ao quadrado obtemos

$$4\operatorname{sen}^2\frac{180°}{32}\cos^2\frac{180°}{32} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4},$$

logo segue-se

$$
\begin{aligned}
4\operatorname{sen}^2\frac{180°}{32}\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{180°}{32}\right) &= \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\\
4\operatorname{sen}^2\frac{180°}{32}-4\operatorname{sen}^4\frac{180°}{32} &= \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}.
\end{aligned}
$$

Fazendo $w = \operatorname{sen}^2\frac{180°}{32}$, obtemos a equação $4w^2-4w+\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}=0$, donde obtemos

$$
\begin{aligned}
w =& \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-16\left(\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}\right)}}{8} = \frac{4\pm\sqrt{16-4\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}}{8}\\
=&\frac{4\pm\sqrt{4(4-(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}))}}{8} = \frac{4\pm 2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{8}\\
=&\frac{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4},
\end{aligned}
$$

como $w = \operatorname{sen}^2\frac{180°}{32}$, temos

$$
\operatorname{sen}\frac{180°}{32} = \pm\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{4}}.
$$

Porém como $0 < \operatorname{sen}\frac{180°}{32} < 1$ temos que

$$
\operatorname{sen}\frac{180°}{32} = \frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}.
$$

Entretanto, note que

$$
\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} > \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{180°}{4} > \operatorname{sen}\frac{180°}{32},
$$

logo

$$
\operatorname{sen}\frac{180°}{32} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}.
$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} x_{32} =& 2^5 \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{2^5} = 32 \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{32} \\ =& 32 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{2} = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \end{aligned}$$

Vemos então que

$$x_{2^n} = 2^n \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{2^n} = 2^{n-1}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2}}}}},$$

na qual temos $n - 1$ raízes quadradas.

6.4 Métodos computacionais

De certo que além dessas quatro maneiras de se obter o valor aproximado de π, há várias outras, por exemplo usando a série de Gregório

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

também conhecida como *série de Leibniz*, embora sua aplicação, nesse caso seja inadequada, devido à lentidão da sua convergência; outro exemplo é um método estatístico, bem prático, diria até lúdico, conhecido como a *Agulha de Buffon*; método da exaustão aplicado a polígonos inscrito (usando área); ainda usando área podemos obter

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{dx}.$$

O experimento aleatório da Agulha de Buffon, nome dado em homenagem ao conde de Buffon, consiste em lançar uma agulha num piso de assoalho e observar se a agulha cruza a fresta entre as tábuas. Estranhamente, a probabilidade deste evento conduz a uma estimativa do número π.

Sugerimos que a fórmula obtida no item 6.3 sejam aplicadas para se calcular o valor de π, usando o excel, como fizemos aliás no item 5.2.

Nos últimos anos, **com o uso de computadores**, surgido mais e mais algoritmos que calculam o valor de π, com um número cada vez maior de casas decimais, uma vez que esses novos algoritmos usam séries com convergência mais rápida, e métodos numéricos mais confiáveis, por exemplo em 2010 *F. Bellard*, usando a *série de Chudnovslky*

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n}^{\infty} = 0 \frac{(-1)^n (6n)! 13591409 + 545140134n}{(n!)^3 (3n)! (640320)^{3n+\frac{3}{2}}}$$

calculou mais de 2,6 trilhões decimais de π. E são casos como este que nos dão a certeza que esse fascínio por essa constante permanecerá por muitos e muitos anos.

6.5 Outras atividades

Sugerimos ainda as seguintes atividades:

1. Dado um retângulo de comprimento medindo o dobro da largura, calcule o *pi* desse retângulo.

2. Dado um retângulo em que a razão entre o comprimento e a largura é $\frac{3}{2}$, determine o valor de *pi* desse retângulo.

3. Ainda sobre retângulos verifique o que ocorre se a medida do comprimento ficar mais próximo da medida da largura.

4. Calcule a área de um triângulo de Reuleaux, formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1 e compare com a área de um círculo de diâmetro 1.

5. Calcule o perímetro de um triângulo de Reuleaux, formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1 e compare com o comprimento de um círculo de diâmetro 1.

6. Construa um círculo e um triângulo de Reuleaux com material concreto (papelão, madeira, etc.) e verifique que quando postos entre duas réguas, é possível descolar uma delas suavemente sobre as formas geométricas, e que este mesmo experimento, se construídos sólidos cilíndricos de bases na forma de um círculo e um triângulo de Reuleaux, tais sólidos podem ser usados para deslocar paralelepípedos.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J.L.,*Geometria Euclidiana Plana*, 1^a Edição, Editora SBM, 1985.

[2] CAMINHA, A.,*Geometria: Coleção PROFMAT*, 1^a Edição, Editora SBM, 2013.

[3] CARVALHO, S., *O Perímetro e a área de um círculo*, 2° Colóquio de Matemática da Região Nordeste, EDUFPI, SBM, 2012.

[4] COURANT, R.,*Cálculo Diferencial e Integral I*, 1^a Edição, 1^a Edição, 3^a reimpressão, Editora Globo, Traduzido por Alberto Nunes e Ruy Honório Bacelar, 2012.

[5] FIGUEIREDO, D.G.,*Teoria dos Números Transcendentes*, 3^a Edição, Editora SBM, 2011.

[6] HOWARD, E., *Introdução à História de Matemática*, 3^a Reimpressão, Editora UNICAMP, Traduzido por Hygino H Domingues, 2008.

[7] HOWARD, E, *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Geometria*, Editora Atual, Traduzido por Hygino H Domingues, 1997.

[8] LIMA, E.L., *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*, 4^a Edição, Editora SBM, 2009.

[9] LIMA, E.L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, 4^a Edição, Editora SBM, 2004.

[10] MARQUES, D.,*Teoria dos Números Transcendentes*, 1^a Edição, Editora SBM, 2013.

[11] NIVEN, I.,*Números: Racionais e Irracionais*, 1^a Edição, Editora SBM, Traduzido por Renate Watanabe, 2012.

[12] WAGNER, E.,*Construções Geometricas*, Editora SBM, 1993.