

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
(Mestrado)

SILVIO TOME DA SILVA

CÔNICAS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA E ALGÉBRICA

Maringá-PR

2013

SILVIO TOME DA SILVA

CÔNICAS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA E ALGÉBRICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cícero Lopes Frota

Maringá

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

S586c Silva, Silvio Tomé da
Cônicas: uma abordagem geométrica e algébrica /
Silvio Tomé da Silva. -- Maringá, 2013.
91 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Cícero Lopes Frota.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática, Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2013.

1. Cônicas. 2. Definição geométrica das cônicas.
3. Classificação das cônicas. 4. Aplicação das
cônicas. I. Frota, Cícero Lopes, orient. II.
Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências
Exatas. Departamento de Matemática. Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
- PROFMAT. III. Título.

CDD 21.ed. 512.5

AHS-001522

SILVIO TOMÉ DA SILVA

CÔNICAS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA E ALGÉBRICA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Cicero Lopes Frota
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dr. Andre Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Cascavel - PR



Prof. Dr. Gleb Gemanovitch Doronin
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 14 de março de 2013.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a todos que acreditaram e me apoiaram ao longo desses dois anos de estudos, em especial a minha esposa Janaina, pelo companherismo, apoio e compreensão, aos meus filhos Heitor e Clara por entenderem a necessidade dos momentos de ausência e estudos e minha mãe Rosa que sempre me incentivou a concluir esta etapa.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

A Deus, por me conceder a vida e proporcionar força e coragem durante esta caminhada;

À minha família que sempre me apoiou nos momentos de dificuldade;

Ao Prof. Cícero, pela dedicação e apoio na realização deste trabalho;

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

Sempre me pareceu estranho que todos aqueles
que estudam seriamente esta ciência
acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma.

Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer
não é o conhecimento e sim a aprendizagem,
não é a posse, mas a aquisição,
não é a presença, mas o ato de atingir a meta.

(Gauss - Carl Friedrich).

Resumo

Neste trabalho estudamos as cônicas. Inicialmente introduzimos o conceito de cada uma das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) por meio de argumentos geométricos, ou seja, como sendo o conjunto de pontos de um plano que satisfazem à uma determinada propriedade. Verificamos que, segundo um sistema cartesiano fixado, é possível representá-las por meio de uma equação algébrica do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Reciprocamente mostramos que toda equação do tipo acima pode ser reduzida por meio de mudança de coordenadas (rotação e translação) em uma das formas canônicas. Também comentamos sobre a aplicação das cônicas em diversos ramos da ciência.

Palavras chave: Cônicas; Definição Geométrica das Cônicas; Classificação das Cônicas; Aplicação das Cônicas.

Abstract

In this paper we study the conic. Initially we introduce the concept of each conic (ellipse, hyperbola, and parabola) by means of geometrical arguments, in other words, they are treated as a set of points of a plan which satisfies an established property. We note that according to a fixed Cartesian system, it is possible to represent them by means of an algebraic equation like $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. We reciprocally show which every equation of the type above can be reduced by changing the coordinates (rotation and translation) into one of the canonical forms. It is also commented on the application of conic in various fields of science.

key words: Conics, Geometric Definition of Conics; Classification of Conics; Application of Conics.

SUMÁRIO

Introdução	11
1 Cônicas - Uma abordagem geométrica	13
1.1 Introdução	13
1.2 Elipse	13
1.2.1 A Equação da Elipse	19
1.2.2 Translação de Eixos Coordenados	21
1.2.3 Rotação de Eixos Coordenados	23
1.2.4 Translação e Rotação de Eixos Coordenados	25
1.3 Hipérbole	27
1.3.1 A Equação da Hipérbole	29
1.3.2 Translação de Eixos Coordenados	31
1.3.3 Rotação de Eixos Coordenados	33
1.3.4 Translação e Rotação de Eixos Coordenados	34
1.4 Parábola	35
1.4.1 A Equação da Parábola	37
1.4.2 Translação de Eixos Coordenados	38
1.4.3 Rotação de Eixos Coordenados	39
1.4.4 Translação e Rotação de Eixos Coordenados	41
1.5 Seções Cônicas	42

2	Cônicas - Uma abordagem algébrica	47
2.1	Introdução	47
2.2	Redução à forma canônica	49
2.3	Classificação das cônicas	69
3	Aplicações das Cônicas	78
3.1	Aplicações das parábolas	78
3.2	Aplicações das elipses	82
3.3	Aplicações das hipérboles	85
	Bibliografia	89
A	Teorema Espectral	90

INTRODUÇÃO

Há muitos séculos as cônicas despertam o interesse de estudiosos. A princípio, Menaecmus no século IV a.C. motivado pelo interesse em solucionar o problema de duplicação do cubo descobriu que havia uma família de curvas que apresentavam propriedades que possibilitavam encontrar esta solução. Surgiam, então, as curvas que mais tarde foram chamadas elipse, hipérbole e parábola. Estas curvas podiam ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone.

As seções cônicas já eram conhecidas há cerca de um século e meio quando Apolônio (262 - 190a.C.), matemático grego, escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. Apolônio foi o matemático que mais contribuiu para o desenvolvimento dos conceitos das seções cônicas na antiguidade. Ele mostrou pela primeira vez que as cônicas podiam ser geradas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção e ainda, introduziu os nomes elipse, hipérbole e parábola. Naquela época, não se conhecia um método analítico para descrever estas curvas. Coube a Pierre de Fermat (1601-1665) a descoberta das equações cartesianas mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole.

Na atualidade, esses estudos proporcionam a aplicação das cônicas em vários setores, como na física, astronomia, economia, engenharia, medicina, entre outros. Dentre essas aplicações podemos citar a utilização das propriedades da parábola na comunicação, com uma antena parabólica os sinais emitidos de um satélite podem ser captados e a transmissão realizada. Diante disto, torna-se pertinente os estudos apresentados neste trabalho, que tem como objetivo a compreensão da definição das cônicas sob uma perspectiva geométrica e algébrica.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1, apresentamos uma abordagem geométrica para as cônicas. A partir das propriedades que definem cada uma das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) seus elementos foram identificados e as equações reduzidas obtidas. A partir daí, por meio de translações e rotações verificamos que as cônicas, em geral, são escritas na forma de uma equação do segundo grau em duas variáveis do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

No capítulo 2, a abordagem das cônicas foi algébrica. Dada uma equação do segundo grau em duas variáveis do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ uma mudança de coordenadas possibilita a classificação da cônica. Apresentamos dois métodos, no primeiro, mais detalhado, é possível além de classificar a cônica, identificar os elementos que a compõem. No segundo método, mais direto, é possível apenas a classificação em elipse, hipérbole ou parábola.

Por fim, no capítulo 3, apresentamos algumas aplicações das cônicas evidenciando que essas curvas surgem naturalmente em uma ampla variedade de aplicações como em projeto de telescópios e antenas, no posicionamento geodésico e na medicina.

Na atual organização curricular, o estudo das cônicas é iniciado no ensino médio. Com o intuito de colaborar no processo de ensino e aprendizagem, este trabalho destina-se a professores e alunos deste nível de ensino, buscando auxiliá-los na compreensão e identificação das propriedades das cônicas, proporcionando condições aos estudantes para que possam explorar estas curvas em seus aspectos geométricos e algébricos.

Cônicas - Uma abordagem geométrica

1.1 Introdução

Para a maioria das pessoas as palavras elipse, hipérbole e parábola são familiares por associarem estas curvas a diversas aplicações no cotidiano. No entanto, geralmente as propriedades que definem estas curvas chamadas cônicas e as tornam aplicáveis não são conhecidas. Diante de tal fato, é importante caracterizar as cônicas como sendo o lugar geométrico, ou seja, o conjunto de pontos de um plano, que verificam uma certa propriedade.

Neste capítulo, tratamos cada uma das cônicas separadamente, partimos da definição geométrica de cada cônica, identificamos suas propriedades e seus elementos e por fim obtemos a equação algébrica que representa cada uma destas curvas.

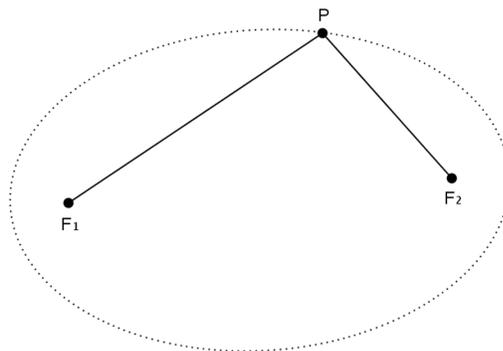
1.2 Elipse

Para iniciar o estudo sobre a elipse recordamos que na geometria analítica dado um plano π e $P, Q \in \pi$, a distância de P a Q é denotada por $d(P, Q)$.

A elipse pode ser matematicamente caracterizada da seguinte forma:

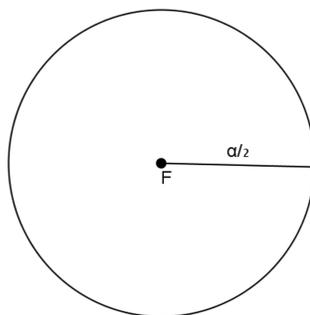
Definição 1.1. Sejam π um plano, $F_1, F_2 \in \pi$ dois pontos fixados e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > d(F_1, F_2)$. A elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ é o conjunto de pontos do plano π dado por

$$\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha) = \{P \in \pi; d(P, F_1) + d(P, F_2) = \alpha\}.$$

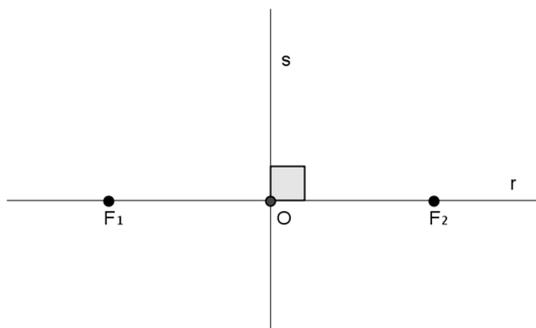


Os pontos F_1 e F_2 são denominados focos da elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ e $d(F_1, F_2)$ é chamada distância focal.

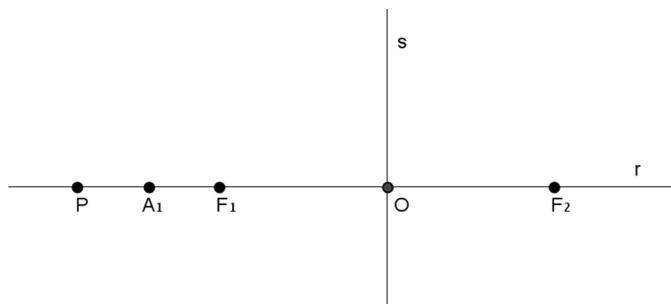
Observação 1.2. Note que se $F_1 = F_2 = F$, então a distância focal $d(F_1, F_2) = 0$ e a elipse pode ser escrita como $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha) = \{P \in \pi; d(P, F_1) + d(P, F_2) = \frac{\alpha}{2}\}$, ou seja, é o conjunto dos pontos do plano π equidistantes de F que chamamos de circunferência de centro F e raio $\frac{\alpha}{2}$.



Neste momento focaremos nosso estudo no caso em que $F_1 \neq F_2$. Então, considere r a reta passando pelos pontos distintos F_1 e F_2 e $O \in r$ o ponto médio de F_1 e F_2 . A reta r é chamada de eixo principal da elipse e O é denominado centro da elipse. Considere ainda s a reta perpendicular a r passando pelo ponto O .



Podemos verificar que existe um único ponto A_1 na reta r , à esquerda de F_1 , que pertence a elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$. De fato, como $d(F_1, F_2) < \alpha$, $\exists! P \in r$ à esquerda de F_1 tal que $d(P, F_2) = \alpha$. Seja A_1 ponto médio entre P e F_1 .



Note que,

$$\begin{aligned}
 d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) &= d(A_1, F_1) + d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) \\
 &= d(P, F_1) + d(F_1, F_2) \\
 &= d(P, F_2) \\
 &= \alpha
 \end{aligned}$$

assim $A_1 \in \mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$, o que prova nossa afirmação.

Analogamente, podemos ver que existe um único A_2 , na reta r , à direita de F_2 , que pertence a elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$. Os pontos A_1 e A_2 , pontos de intersecção da elipse com

seu eixo principal, são chamados vértices da elipse.

Desde que $A_1, A_2 \in \mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ é fácil ver que

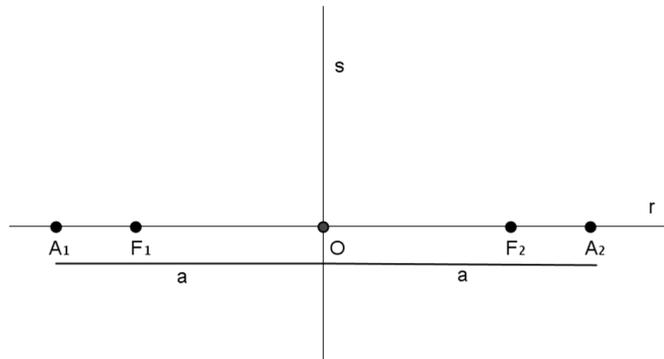
$$d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2)$$

de onde resulta que

$$d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2).$$

Denotamos a distância de A_1 a O por a . Assim

$$d(A_1, O) = d(A_2, O) = a$$



Veja que

$$\begin{aligned} d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) &= d(A_1, F_1) + d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) \\ &= d(A_1, F_1) + d(A_2, F_2) + d(F_1, F_2) \\ &= 2a \end{aligned}$$

mas como $A_1 \in \mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ temos que $d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = \alpha$. Então

$$\alpha = 2a \Rightarrow a = \frac{\alpha}{2}$$

Podemos assim re-escrever

$$\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha) = \{P \in \pi; d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

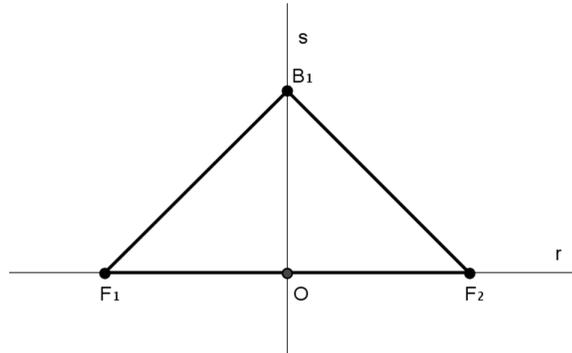
Também existem dois pontos sobre a reta s que estão na elipse. Inicialmente veja que

$$\alpha^2 > d(F_1, F_2)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - d(F_1, F_2)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 - d(F_1, F_2)^2}{4} > 0.$$

Logo $\exists! B_1 \in s$, acima de O , tal que

$$\begin{aligned} d(B_1, O)^2 &= \frac{\alpha^2 - d(F_1, F_2)^2}{4} \Leftrightarrow \\ d(B_1, O)^2 &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{d(F_1, F_2)}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ d(B_1, O)^2 + \left(\frac{d(F_1, F_2)}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (*)$$

Observando a figura



e usando o teorema de Pitágoras vemos que

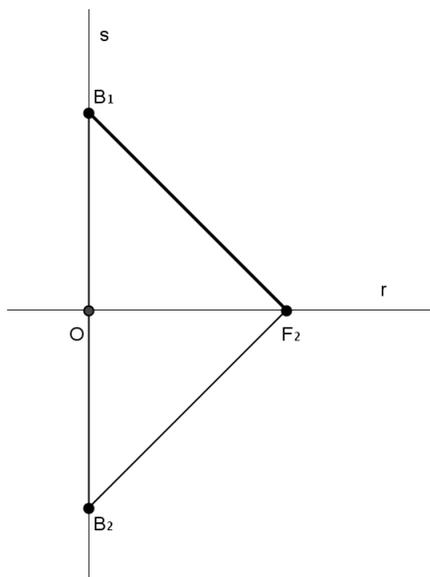
$$d(B_1, F_2)^2 = d(B_1, O)^2 + \left(\frac{d(F_1, F_2)}{2}\right)^2.$$

Desta relação e (*) concluímos que $d(B_1, F_2) = \frac{\alpha}{2}$. Portanto

$$d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = \alpha$$

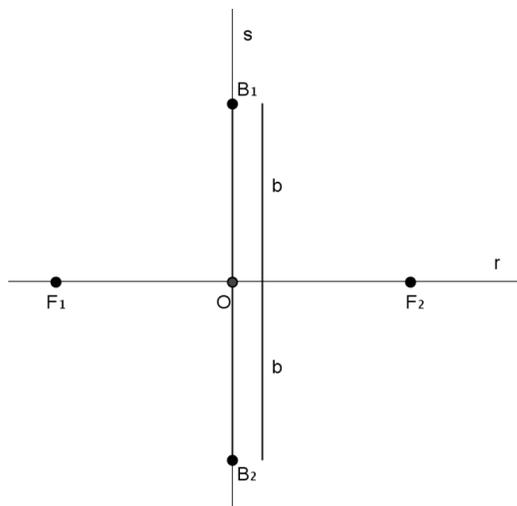
e, assim, $B_1 \in \mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$. Do mesmo modo $\exists! B_2 \in s$ abaixo de O que pertence a elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ e $d(B_2, F_2) = \frac{\alpha}{2}$

Ainda, considere o triângulo abaixo:



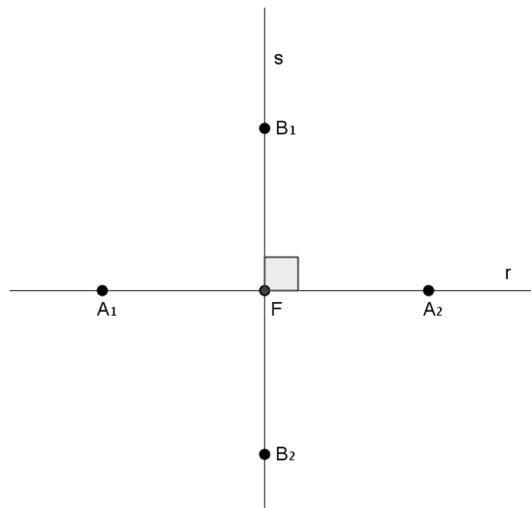
Note que o triângulo na figura é equilátero o que demonstra que O é ponto médio do segmento $\overline{B_1B_2}$. Denotamos por b a distância de B_1 a O , isto é

$$d(B_1, O) = d(B_2, O) = b.$$



Observação 1.3. Se $F_1 = F_2 = F$ então r é uma reta qualquer passando por F e s a reta perpendicular a r passando por F . Então, $\exists! A_1 \in r$ à esquerda de F tal que $d(A_1, F) = \frac{\alpha}{2}$,

ou seja, $\exists! A_1$ à esquerda de F que pertence a elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$, isto é a circunferência de centro em F e raio $\frac{\alpha}{2}$. Analogamente, $\exists! A_2$ em r à direita de F que pertence à elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$. Também, $\exists! B_1$ em s acima de F , tal que $d(B_1, F) = \frac{\alpha}{2}$, que pertence à elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$. Assim como, $\exists! B_2$ em s abaixo de F pertencente a $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$. Neste caso, $a = b = \frac{\alpha}{2}$.



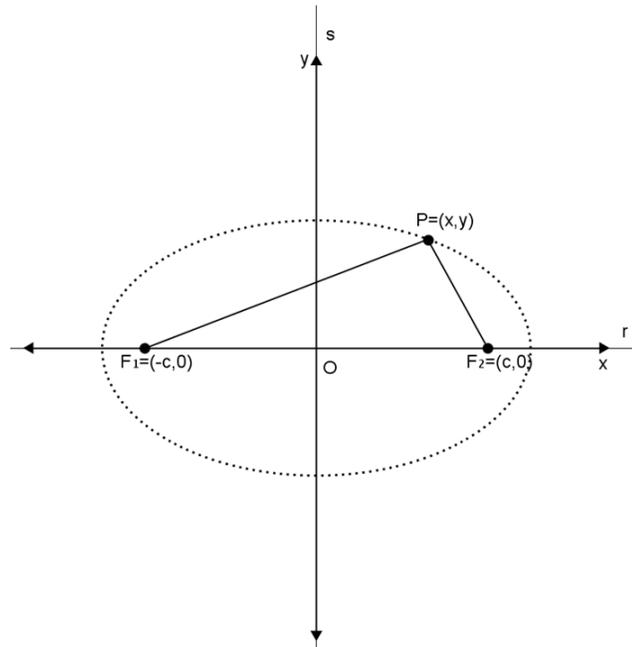
1.2.1 A Equação da Elipse

A partir das propriedades geométricas da elipse é possível encontrar uma equação que representa esta curva em um plano cartesiano. Vale lembrar que a forma mais geral de uma equação do segundo grau em duas variáveis é

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde A, B, C, D, E e F são números reais denominados coeficientes da equação.

Inicialmente, considere π um plano e $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ uma elipse no plano π . Tomamos um sistema de coordenadas cartesianas tal que r é o eixo das abscissas, s é o eixo das ordenadas e O a origem. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.



Por definição, tem-se que:

$$d(P, F_1) + D(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(a^2 - cx)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2) + a^2y^2$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) = x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2$$

Como $a^2 - c^2 = b^2$

$$\begin{aligned} a^2b^2 &= b^2x^2 + a^2y^2 \\ \frac{a^2b^2}{a^2b^2} &= \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas (x, y) de qualquer ponto P sobre a elipse deve satisfazer a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.1)$$

a qual pode ser vista como a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ com $A = \frac{1}{a^2}$, $C = \frac{1}{b^2}$, $B = D = E = 0$ e $F = -1$.

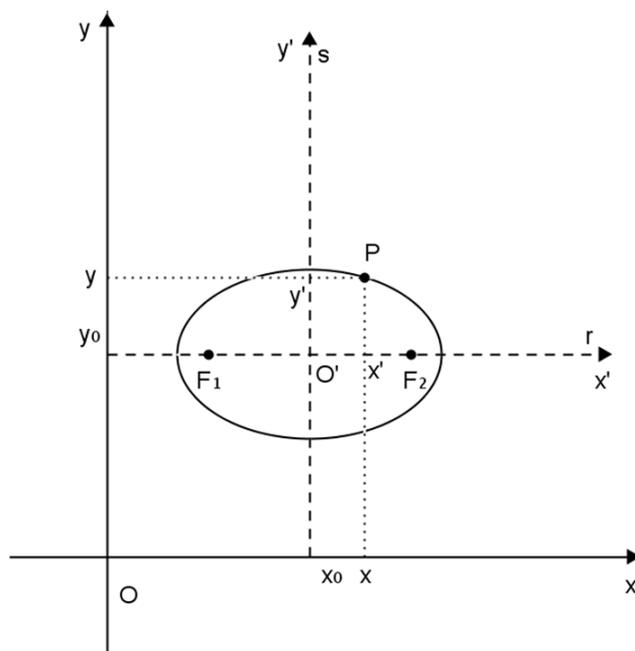
A equação 1.1 é chamada equação reduzida da elipse.

1.2.2 Translação de Eixos Coordenados

Se o centro de uma elipse estiver no ponto (x_o, y_o) em vez de estar na origem, e se o eixo principal for paralelo a um dos eixos coordenados, pode-se determinar a equação da elipse considerando uma translação de eixos.

Consideremos em um sistema de coordenadas cartesianas xOy um ponto $O' = (x_o, y_o)$, arbitrário. Vamos introduzir um novo sistema $x'O'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy . Nestas condições, um sistema pode ser obtido do outro, através de uma translação de eixos.

Seja $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ uma elipse, r a reta paralela ao eixo x e s a reta paralela ao eixo y , sendo x_o e y_o as coordenadas do centro da elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ em relação ao sistema xOy no ponto O . Consideremos o novo sistema $x'O'y'$ com a origem O' em O .



Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer desta elipse. Sabemos que a equação da elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ em relação ao sistema $x'O'y'$ é

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Podemos obter também a equação da elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ no sistema xOy , pois

$$(x, y) = (x', y') + (x_o, y_o)$$

ou ainda

$$\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases}$$

Daí, a equação da elipse no sistema xOy é dada por

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

que desenvolvendo os quadrados temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x_o x}{a^2} + \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2y_o y}{b^2} + \frac{y_o^2}{b^2} = 1$$

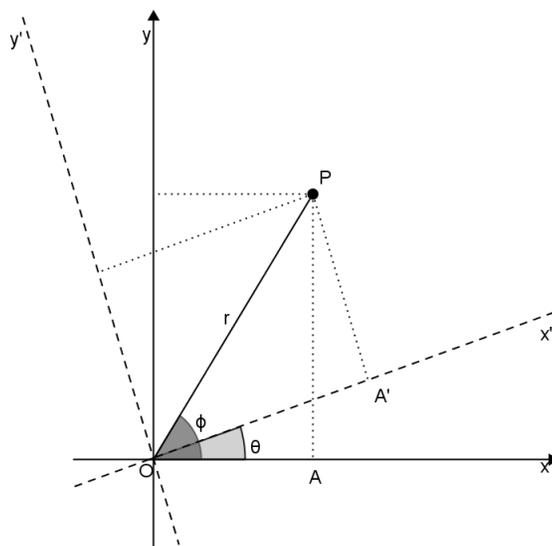
$$\left(\frac{1}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{b^2}\right)y^2 + \left(-\frac{2x_o}{a^2}\right)x + \left(-\frac{2y_o}{b^2}\right)y + \left(\frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2}\right) = 1$$

Nesta nova equação, que representa a elipse após a translação, os coeficientes da equação do segundo grau em duas variáveis são $A = \frac{1}{a^2}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{b^2}$, $D = -\frac{2x_o}{a^2}$, $E = -\frac{2y_o}{b^2}$ e $F = \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} - 1$. Observe que os coeficientes A , B e C da equação da elipse não foram alterados com a translação de eixos.

1.2.3 Rotação de Eixos Coordenados

A operação de mover os eixos no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos e os antigos possuam a mesma origem, é denominada rotação de eixos coordenados.

Seja xOy um sistema de coordenadas cartesianas. Dado $\theta \in [0, 2\pi)$, seja $x'O'y'$ o sistema obtido girando os eixos Ox e Oy de um ângulo θ no sentido anti-horário. Seja P um ponto qualquer do plano tal que suas coordenadas em relação ao sistema xOy são (x, y) e, em relação ao sistema $x'O'y'$ são (x', y') .



Desta forma e de acordo com a figura, temos:

$$\begin{cases} x = \overline{OA} = r \cos\phi \\ y = \overline{AP} = r \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x' = \overline{OA'} = r \cos(\phi - \theta) = r \cos\phi \cos\theta + r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ y' = \overline{A'P} = r \operatorname{sen}(\phi - \theta) = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta - r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \end{cases}$$

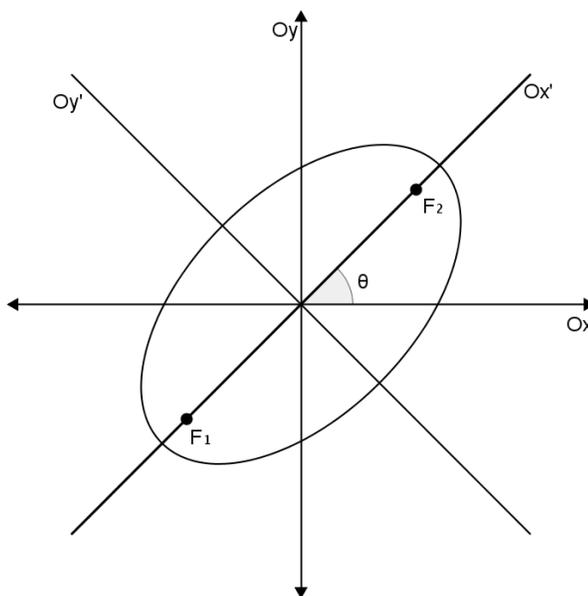
Assim, por substituição temos

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \\ y' = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta \end{cases}$$

que na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Consideremos uma elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$, contida em um sistema obtido girando os eixos Ox e Oy do ângulo θ no sentido anti-horário e O a origem. A reta r é paralela ao eixo Ox' e a reta s é paralela ao eixo Oy' .



A equação da elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, \alpha)$ no sistema de coordenadas $x'O'y'$ é

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Logo, no sistema xOy teremos

$$\frac{(x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta)^2}{a^2} + \frac{(-x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)^2}{b^2} = 1$$

que desenvolvendo os quadrados obtemos

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{b^2}\right)x^2 + \left[2\left(\frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{a^2} - \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{b^2}\right)\right]xy + \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y^2 = 1$$

Observe que após a rotação os coeficientes da equação da cônica rotacionada comparados com a equação do segundo grau em duas variáveis são $A = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{b^2}$, $B = 2\left(\frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{a^2} - \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{b^2}\right)$, $C = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}$, $D = E = 0$ e $F = -1$

1.2.4 Translação e Rotação de Eixos Coordenados

A equação da elipse inserida em um eixo coordenado pode ser submetida tanto a uma translação como a uma rotação, tomados em qualquer ordem. Após uma translação da elipse em eixos coordenados a uma nova origem $O' = (x_o, y_o)$ seguida por uma rotação dos eixos transladados em torno de O' de um ângulo θ , as coordenadas de qualquer ponto P do plano referido aos conjuntos de eixos original e final são (x, y) e (x'', y'') , respectivamente, e podem ser escritas como

$$\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x'' = x' \cos\theta + y' \operatorname{sen}\theta \\ y'' = -x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

assim, por substituição obtemos

$$\begin{cases} x'' = (x - x_o) \cos\theta + (y - y_o) \sen\theta \Rightarrow x'' = x \cos\theta + y \sen\theta - (x_o \cos\theta + y_o \sen\theta) \\ y'' = -(x - x_o) \sen\theta + (y - y_o) \cos\theta \Rightarrow y'' = -x \sen\theta + y \cos\theta + (x_o \sen\theta - y_o \cos\theta) \end{cases}$$

Então a equação da elipse após a translação e rotação de eixos coordenados é

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

Logo, no sistema xOy teremos

$$\frac{[x \cos\theta + y \sen\theta - (x_o \cos\theta + y_o \sen\theta)]^2}{a^2} + \frac{[-x \sen\theta + y \cos\theta + (x_o \sen\theta - y_o \cos\theta)]^2}{b^2} = 1$$

que desenvolvendo os quadrados temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sen^2\theta}{b^2} \right) x^2 + \left[2 \left(\frac{\cos\theta \sen\theta}{a^2} - \frac{\cos\theta \sen\theta}{b^2} \right) \right] xy + \left(\frac{\sen^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2} \right) y^2 \\ & + \left[-2 \left(\frac{\cos^2\theta x_o + \cos\theta \sen\theta y_o}{a^2} + \frac{\sen^2\theta x_o - \cos\theta \sen\theta y_o}{b^2} \right) \right] x \\ & + \left[-2 \left(\frac{\sen^2\theta y_o + \cos\theta \sen\theta x_o}{a^2} + \frac{\cos^2\theta y_o - \cos\theta \sen\theta x_o}{b^2} \right) \right] y \\ & + \frac{(\cos\theta x_o + \sen\theta y_o)^2}{a^2} + \frac{(\sen\theta x_o - \cos\theta y_o)^2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

Após a translação e rotação da elipse no sistema de eixos coordenados a equação do segundo grau em duas variáveis possui coeficientes $A = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sen^2\theta}{b^2}$,

$$\begin{aligned} B &= 2 \left(\frac{\cos\theta \sen\theta}{a^2} - \frac{\cos\theta \sen\theta}{b^2} \right), \quad C = \frac{\sen^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}, \\ D &= -2 \left(\frac{\cos^2\theta x_o + \cos\theta \sen\theta y_o}{a^2} + \frac{\sen^2\theta x_o - \cos\theta \sen\theta y_o}{b^2} \right), \\ E &= -2 \left(\frac{\sen^2\theta y_o + \cos\theta \sen\theta x_o}{a^2} + \frac{\cos^2\theta y_o - \cos\theta \sen\theta x_o}{b^2} \right) \text{ e} \\ F &= \frac{(\cos\theta x_o + \sen\theta y_o)^2}{a^2} + \frac{(\sen\theta x_o - \cos\theta y_o)^2}{b^2} - 1. \end{aligned}$$

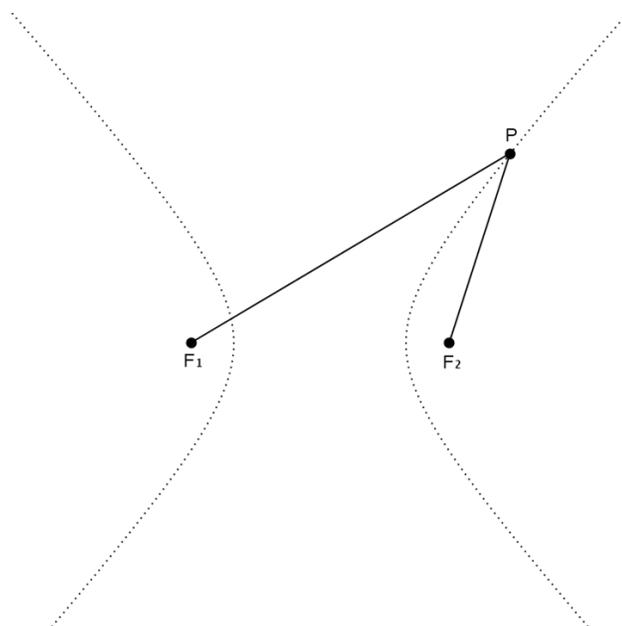
1.3 Hipérbole

Assim como na elipse, estudamos a hipérbole por meio de suas características geométricas e elementos que a compõem. Como consequência deste estudo obtemos as equações reduzida, transladada e rotacionada deste tipo de curva.

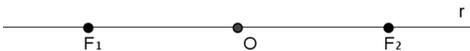
Definição 1.4. Sejam π um plano, $F_1, F_2 \in \pi$ dois pontos fixados e $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \beta < d(F_1, F_2)$. A hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ é o conjunto de pontos do plano π dado por

$$\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta) = \{P \in \pi \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = \beta\} \Rightarrow$$

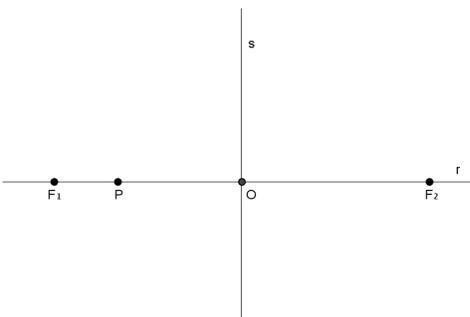
$$\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta) = \{P \in \pi \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) = \beta \text{ ou } d(P, F_2) - d(P, F_1) = \beta\}.$$



Os pontos fixos F_1 e F_2 são denominados focos da hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ e $d(F_1, F_2)$ é chamada distância focal. Ainda, considere a reta r que passa pelos pontos F_1 e F_2 e O , o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$. Chamaremos o ponto O de centro da hipérbole.



Podemos verificar que existe um único ponto A_1 na reta r , à direita de F_1 , que pertence a hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$. De fato, considerando um ponto P , sendo $P \in r$, entre os pontos F_1 e O .



Note que $d(F_1, F_2) = d(F_1, P) + d(P, F_2)$. Chamando de $Q(P)$ o valor de $|d(P, F_1) - d(P, F_2)|$, quando P variar de F_1 a O temos $Q(P)$ variando de 0 a $d(F_1, F_2)$. Como $d(F_1, F_2) > \beta$, logo existe um único $A_1 \in r$ entre F_1 e O que pertence a hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$. Analogamente, podemos ver que existe um único $A_2 \in r$ entre F_2 e O que pertence a hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$. Os pontos A_1 e A_2 são chamados vértices da hipérbole e o segmento de reta $\overline{A_1 A_2}$ é denominado eixo real.

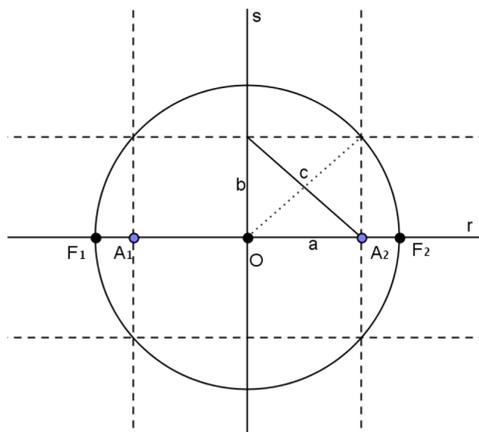
Assim, como $A_1, A_2 \in \mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$, temos

$$d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) = d(A_2, F_1) - d(A_2, F_2)$$

logo

$$d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$$

Com o objetivo de identificar alguns elementos importantes da hipérbole, traçamos uma circunferência de centro em O e raio igual ao segmento $\overline{OF_2}$. Ainda, seja s a reta perpendicular a r que passa por O . Denotamos a $d(O, A_2)$ por a e $d(O, F_2)$ por c .



Pela definição

$$d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) = \beta$$

$$d(A_1, A_2) + d(A_2, F_2) - d(A_1, F_1) = \beta$$

$$d(A_1, A_2) = \beta$$

$$2a = \beta$$

Podemos assim re-escrever $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta) = \{P \in \pi; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$.

1.3.1 A Equação da Hipérbole

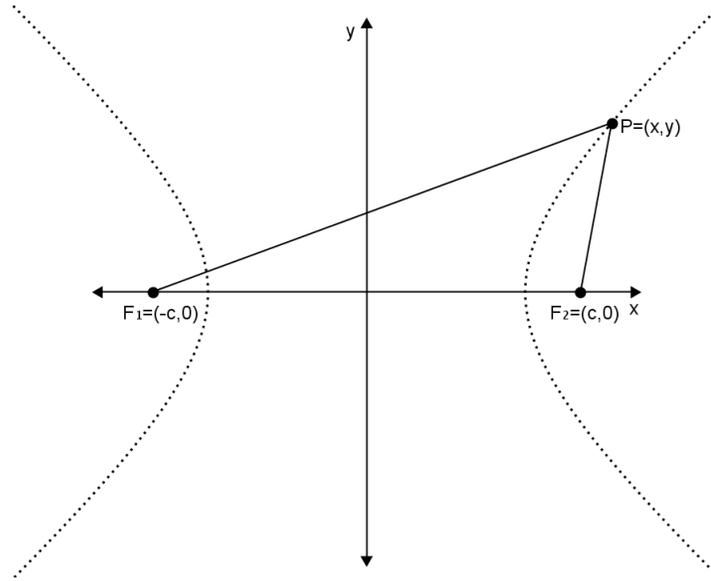
Por meio das propriedades geométricas da hipérbole é possível encontrar a equação do segundo grau em duas variáveis do tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que representa o lugar geométrico definido pela hipérbole no plano cartesiano.

Para isto, considere π um plano e $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ uma hipérbole no plano π e um

sistema de coordenadas cartesianas tal que r é o eixo das abscissas, s é o eixo das ordenadas e O a origem. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ pertencente a um plano π de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$.



Pela definição, temos

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = \pm 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4a^2 - 4cx = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(a^2 - cx) = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Note que na hipérbole $c^2 - a^2 = b^2$, então

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Deste modo, as coordenadas (x, y) de qualquer ponto P sobre a hipérbole deve satisfazer a equação

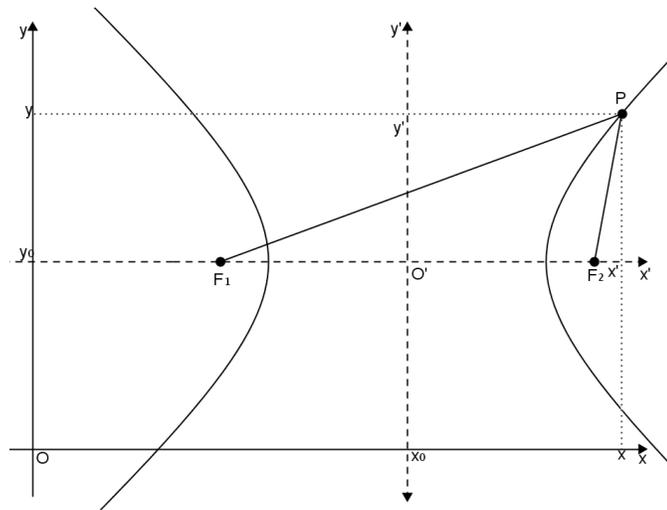
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.2)$$

que pode ser vista como a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ com os coeficientes $A = \frac{1}{a^2}$, $C = -\frac{1}{b^2}$, $B = D = E = 0$ e $F = -1$.

A equação 1.2 é denominada equação reduzida da hipérbole.

1.3.2 Translação de Eixos Coordenados

A equação da hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ pode ser determinada após uma translação de eixos. Para isto, considere π um plano, um sistema de coordenadas cartesianas xOy , um ponto $O' = (x_o, y_o)$, arbitrário. Seja $x'O'y'$ um novo sistema de coordenadas cartesianas com a origem O' em O e uma hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ sendo r a reta paralela ao eixo y , x_o e y_o as coordenadas do centro da hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ em relação ao sistema xOy no ponto O .



Seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário desta hipérbole. Então, temos no sistema de coordenadas $x'O'y'$ a equação da hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Note que

$$\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases}$$

Então,

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

que desenvolvendo os quadrados temos

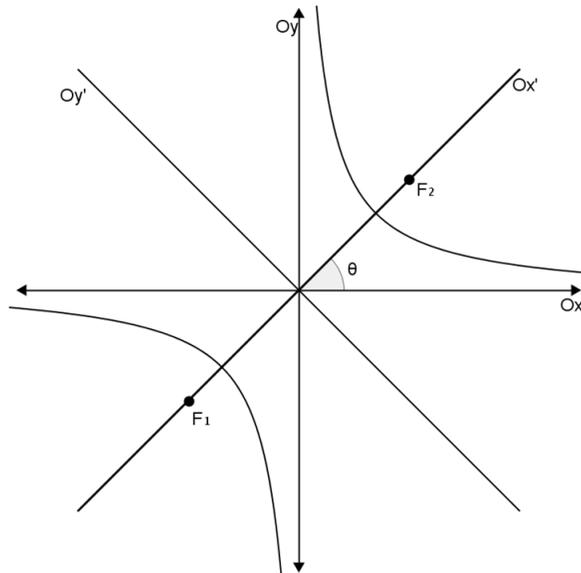
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x_o x}{a^2} + \frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2y_o y}{b^2} - \frac{y_o^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{b^2}\right)y^2 + \left(-\frac{2x_o}{a^2}\right)x + \left(\frac{2y_o}{b^2}\right)y + \left(\frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2}\right) = 1$$

A equação do segundo grau que representa a hipérbole após a translação apresenta os coeficientes $A = \frac{1}{a^2}$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{b^2}$, $D = -\frac{2x_o}{a^2}$, $E = \frac{2y_o}{b^2}$ e $F = \frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} - 1$. Assim como verificamos na elipse, os coeficientes A , B e C da equação da hipérbole não foram alterados com o processo de translação de eixos coordenados.

1.3.3 Rotação de Eixos Coordenados

Consideremos uma hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$, contida em um sistema obtido girando os eixos Ox e Oy de um ângulo θ no sentido anti-horário e O a origem. A reta r é paralela ao eixo Ox' e a reta s é paralela ao eixo Oy' .



A equação da hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ no sistema de coordenadas $x'O'y'$ é

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

De maneira análoga a elipse

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \\ y' = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta \end{cases}$$

Logo, no sistema xOy teremos

$$\frac{(x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta)^2}{a^2} - \frac{(-x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)^2}{b^2} = 1$$

que desenvolvendo os quadrados obtemos

$$\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{b^2}\right)x^2 + \left[2\left(\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{a^2} + \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{b^2}\right)\right]xy + \left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a^2} - \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y^2 = 1$$

Desta maneira, os coeficientes da equação da cônica rotacionada comparados com a equação do segundo grau em duas variáveis são $A = \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}$, $B = 2 \left(\frac{\cos\theta\sin\theta}{a^2} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{b^2} \right)$, $C = \frac{\sin^2\theta}{a^2} - \frac{\cos^2\theta}{b^2}$, $D = E = 0$ e $F = -1$

1.3.4 Translação e Rotação de Eixos Coordenados

Após uma translação de eixos coordenados a uma nova origem $O' = (x_o, y_o)$ seguida por uma rotação dos eixos transladados em torno de O' de um ângulo θ , as coordenadas de qualquer ponto P pertencente a hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ do plano referido aos conjuntos de eixos original e final são (x, y) e (x'', y'') , respectivamente, e podem ser escritas, de maneira análoga a elipse, como

$$\begin{cases} x'' = (x - x_o) \cos\theta + (y - y_o) \sin\theta \Rightarrow x'' = x \cos\theta + y \sin\theta - (x_o \cos\theta + y_o \sin\theta) \\ y'' = -(x - x_o) \sin\theta + (y - y_o) \cos\theta \Rightarrow y'' = -x \sin\theta + y \cos\theta + (x_o \sin\theta - y_o \cos\theta) \end{cases}$$

Assim a equação da hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, \beta)$ após a translação e rotação no sistema de coordenadas cartesianas $x''O'y''$ é dada por

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

logo, no sistema de coordenadas xOy temos

$$\frac{[x\cos\theta + y\sin\theta - (x_o\cos\theta + y_o\sin\theta)]^2}{a^2} - \frac{[-x\sin\theta + y\cos\theta + (x_o\sin\theta - y_o\cos\theta)]^2}{b^2} = 1$$

que desenvolvendo os quadrados obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2} \right) x^2 + \left[2 \left(\frac{\cos\theta \sin\theta}{a^2} + \frac{\cos\theta \sin\theta}{b^2} \right) \right] xy + \left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} - \frac{\cos^2\theta}{b^2} \right) y^2 \\ & + \left[-2 \left(\frac{\cos^2\theta x_o + \cos\theta \sin\theta y_o}{a^2} - \frac{\sin^2\theta x_o + \cos\theta \sin\theta y_o}{b^2} \right) \right] x \\ & + \left[-2 \left(\frac{\sin^2\theta y_o + \cos\theta \sin\theta x_o}{a^2} - \frac{\cos^2\theta y_o + \cos\theta \sin\theta x_o}{b^2} \right) \right] y \\ & + \frac{(\cos\theta x_o + \sin\theta y_o)^2}{a^2} - \frac{(\sin\theta x_o - \cos\theta y_o)^2}{b^2} = 1 \end{aligned}$$

Podemos identificar os coeficientes da equação do segundo grau em duas variáveis como

$$A = \frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}, B = 2 \left(\frac{\cos\theta \sin\theta}{a^2} + \frac{\cos\theta \sin\theta}{b^2} \right), C = \frac{\sin^2\theta}{a^2} - \frac{\cos^2\theta}{b^2},$$

$$D = -2 \left(\frac{\cos^2\theta x_o + \cos\theta \sin\theta y_o}{a^2} - \frac{\sin^2\theta x_o + \cos\theta \sin\theta y_o}{b^2} \right),$$

$$E = -2 \left(\frac{\sin^2\theta y_o + \cos\theta \sin\theta x_o}{a^2} - \frac{\cos^2\theta y_o + \cos\theta \sin\theta x_o}{b^2} \right) \text{ e}$$

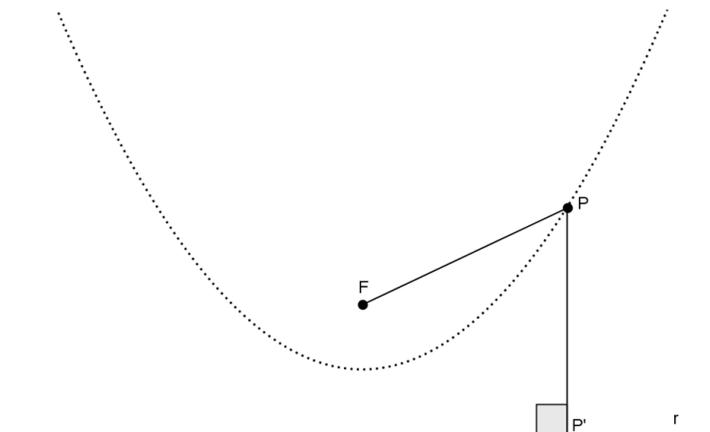
$$F = \frac{(\cos\theta x_o + \sin\theta y_o)^2}{a^2} - \frac{(\sin\theta x_o - \cos\theta y_o)^2}{b^2} - 1.$$

1.4 Parábola

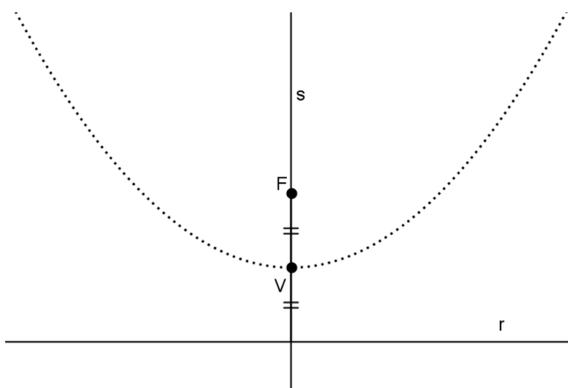
A parábola é sem dúvida a cônica mais popular, pois está associada ao gráfico de uma função quadrática. Podemos reconhecer geometricamente os elementos e as propriedades da parábola e, a partir daí, obter sua equação.

Definição 1.5. Sejam π um plano, r uma reta $F \in \pi$ um ponto não pertencente a r . Dado $P \in \pi$, considere P' o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta r . A parábola $\mathcal{P}(r, F)$ é o conjunto de pontos do plano π dado por

$$\mathcal{P}(r, F) = \{P \in \pi; d(P, F) = d(P, P')\}$$



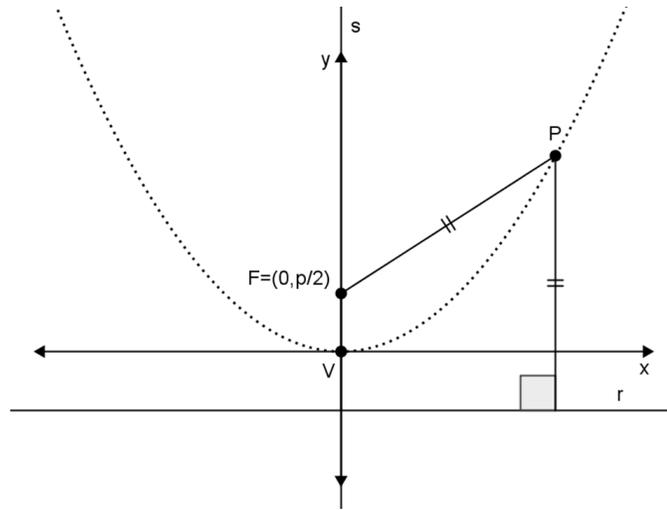
A reta r é chamada diretriz da parábola e o ponto F é o foco da parábola. Agora, considere a reta s perpendicular a reta r passando por F .



Observe que existe um único ponto $V \in s$ entre o ponto F e a reta r tal que $d(F, V) = d(V, r)$, pela definição $V \in \mathcal{P}$. O ponto V denomina-se vértice da parábola, a reta s é chamada eixo da parábola e $d(F, r) = p$ é o parâmetro da parábola. Logo, $d(F, V) = d(V, r) = \frac{p}{2}$.

1.4.1 A Equação da Parábola

Seja π um plano e $\mathcal{P}(r, F)$ uma parábola no plano π . Tomamos um sistema de coordenadas cartesianas tal que r é paralela ao eixo das abscissas, s coincide com o eixo das ordenadas e V a origem. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola $\mathcal{P}(r, F)$ de foco $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$.



Da definição de parábola, tem-se:

$$d(P, F) = d(P, P').$$

O ponto $P' \in r$ tem coordenadas $\left(x, -\frac{p}{2}\right)$. Então,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \\ x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \\ x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} &= y^2 + py + \frac{p^2}{4} \\ x^2 + (-2p)y &= 0\end{aligned}$$

Assim, as coordenadas (x, y) de qualquer ponto P sobre a parábola deve satisfazer a equação

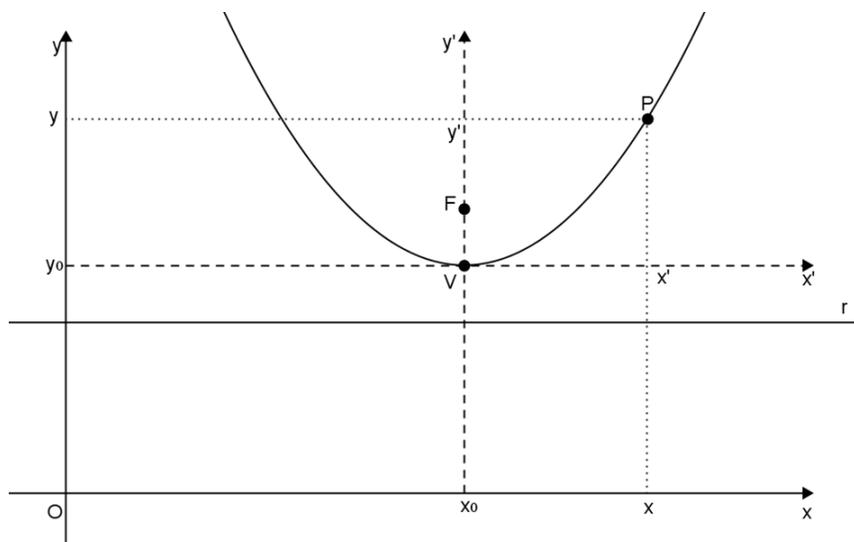
$$x^2 + (-2p)y = 0 \tag{1.3}$$

A equação 1.3 é conhecida como equação reduzida da parábola e os coeficientes desta equação vistos como uma equação do segundo grau em duas variáveis do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ são $A = 1$, $D = -2p$ e $B = C = E = F = 0$.

1.4.2 Translação de Eixos Coordenados

Seja uma parábola $\mathcal{P}(r, F)$ a reta r paralela ao eixo x e a reta s paralela ao eixo y , sendo x_0 e y_0 coordenadas da parábola $\mathcal{P}(r, F)$ em relação ao sistema xOy no ponto V . Consideremos o novo sistema $x'O'y'$ com a origem O' em V e a reta s pertencente ao eixo $O'y'$.

Considere $P = (x, y)$ um ponto qualquer desta parábola.



Sabe-se que a equação da parábola $\mathcal{P}(r, F)$ no sistema de coordenadas $x'O'y'$ é

$$x'^2 = 2py'.$$

Como

$$\begin{cases} x' = x - x_o \\ y' = y - y_o \end{cases}$$

Então,

$$(x - x_o)^2 = 2p(y - y_o)$$

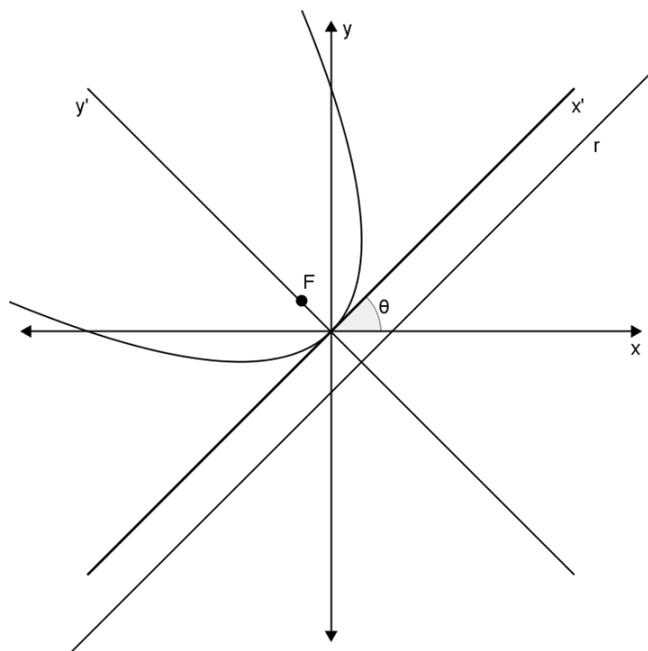
$$x^2 - 2x_o x + x_o^2 = 2py - 2py_o$$

$$x^2 + (-2x_o)x + (-2p)y + (x_o^2 + 2py_o) = 0$$

Veja que a equação da parábola após a translação de eixos coordenados vista como uma equação do segundo grau em duas variáveis apresenta os coeficientes $A = 1$, $B = C = 0$, $D = -2x_o$, $E = -2p$ e $F = x_o^2 + 2py_o$.

1.4.3 Rotação de Eixos Coordenados

Consideremos uma parábola $\mathcal{P}(r, F)$, contida em um sistema obtido girando os eixos Ox e Oy do ângulo θ no sentido anti-horário e V a origem. A reta r é paralela ao eixo Ox' e a reta s é pertencente ao eixo Oy' .



A equação da parábola $\mathcal{P}(r, F)$ no sistema de coordenadas $x'O'y'$ é

$$x'^2 = 2py'.$$

De maneira análoga a elipse e a hipérbole

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta \\ y' = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta \end{cases}$$

Logo, no sistema xOy a equação da parábola será

$$(x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta)^2 = 2p(-x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$$

$$(\cos^2\theta) x^2 + (2\cos\theta \operatorname{sen}\theta) xy + (\operatorname{sen}^2\theta) y^2 + (2p \operatorname{sen}\theta) x + (-2p \cos\theta) y = 0$$

Assim, os coeficientes da equação da cônica rotacionada comparados com a equação do segundo grau em duas variáveis são $A = \cos^2\theta$, $B = 2\cos\theta \operatorname{sen}\theta$, $C = \operatorname{sen}^2\theta$, $D = 2p \operatorname{sen}\theta$, $E = -2p \cos\theta$ e $F = 0$.

1.4.4 Translação e Rotação de Eixos Coordenados

Após uma translação de eixos coordenados a uma nova origem $O' = (x_o, y_o)$ seguida por uma rotação dos eixos transladados em torno de O' de um ângulo θ , as coordenadas de qualquer ponto P do plano referido aos conjuntos de eixos original e final são (x, y) e (x'', y'') , respectivamente, podem ser escritas de maneira análoga a elipse e a hipérbole, como

$$\begin{cases} x'' = (x - x_o) \cos\theta + (y - y_o) \sen\theta \Rightarrow x'' = x \cos\theta + y \sen\theta - (x_o \cos\theta + y_o \sen\theta) \\ y'' = -(x - x_o) \sen\theta + (y - y_o) \cos\theta \Rightarrow y'' = -x \sen\theta + y \cos\theta + (x_o \sen\theta - y_o \cos\theta) \end{cases}$$

Então a equação de transformação das antigas para as novas coordenadas é dada por

$$x''^2 = 2py''$$

$$[x \cos\theta + y \sen\theta - (x_o \cos\theta + y_o \sen\theta)]^2 = 2p[-x \sen\theta + y \cos\theta + (x_o \sen\theta - y_o \cos\theta)]$$

Desenvolvendo esta equação obtemos

$$\begin{aligned} & (\cos^2\theta) x^2 + (2\cos\theta \sen\theta) xy + (\sen^2\theta) y^2 + [-2(\cos^2\theta + \cos\theta \sen\theta y_o - p \sen\theta)] x \\ & + [-2(\sen^2\theta y_o + \cos\theta \sen\theta x_o + p \cos\theta)] y + (\cos\theta x_o + \sen\theta y_o)^2 - 2p(\sen\theta x_o - \cos\theta y_o)^2 = 0 \end{aligned}$$

Deste modo, a equação da parábola após a translação e a rotação comparada com a equação

do tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ apresenta os coeficientes $A = \cos^2\theta$,

$B = 2\cos\theta \sen\theta$, $C = \sen^2\theta$, $D = -2(\cos^2\theta + \cos\theta \sen\theta y_o - p \sen\theta)$,

$E = -2(\sen^2\theta y_o + \cos\theta \sen\theta x_o + p \cos\theta)$, $F = (\cos\theta x_o + \sen\theta y_o)^2 - 2p(\sen\theta x_o - \cos\theta y_o)^2$.

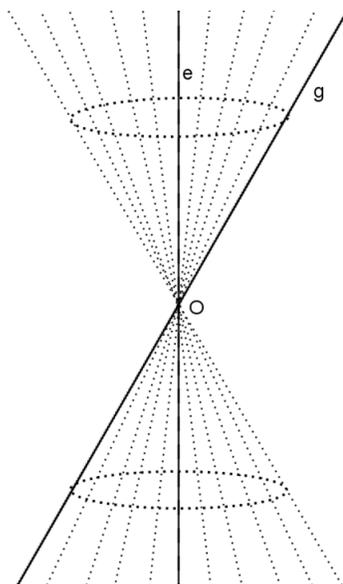
1.5 Seções Cônicas

Na antiguidade, elipse, hipérbole e parábola eram definidas apenas como interseções de superfícies cônicas com planos. Associado à história dessas curvas temos Menaechmo, que em torno de 350 a.C. considerou pela primeira vez as seções cônicas, quando tentava resolver o problema da duplicação do cubo. Nessa época as cônicas eram obtidas por meio de seções de três tipos diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso.

Após Menaechus percebe-se muitos avanços no estudo das cônicas, com destaque para um grande tratado teórico, "Secções Cônicas", escrito por Apolônio, que nasceu na cidade de Perga, região da Ásia Menor, por volta de 262 a.C. Suas contribuições mais importantes foram ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção e ter introduzido os nomes elipse, hipérbole e parábola a essas curvas.

Assim, naquela época não se conhecia o método algébrico de estudo das cônicas, a elipse, a hipérbole e a parábola eram vistas apenas como interseções de uma superfície cônica com um plano. Por este motivo estas três curvas são conhecidas como seções cônicas.

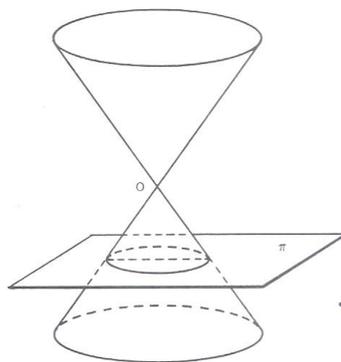
Para verificar como estas curvas são obtidas através da interseção de um cone e um plano, considere duas retas e e g concorrentes em O e não perpendiculares. Conserve fixa a reta e e faça g girar 360° em torno de e mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta g gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O .



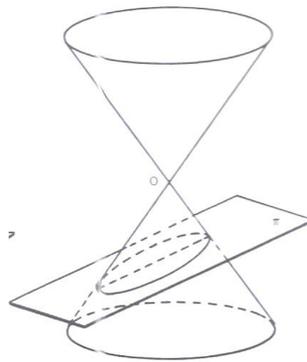
A reta g é chamada geratriz da superfície cônica e a reta e , eixo da superfície. O conjunto de pontos obtidos pela interseção de um plano π com a superfície cônica é chamada seção cônica.

Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O obtém-se uma cônica dita não degenerada e à medida que varia-se a posição do plano de corte a seção será:

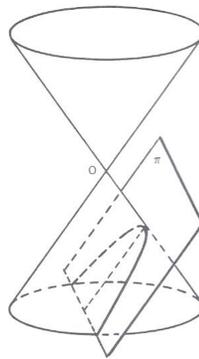
- uma circunferência se π for perpendicular ao eixo e da superfície;



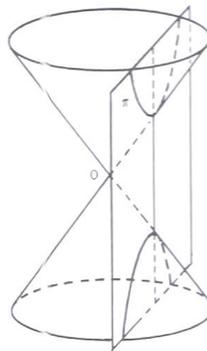
- uma elipse se π for oblíquo ao eixo e , cortando apenas uma das folhas da superfície;



- uma parábola se π for paralelo a uma geratriz da superfície;

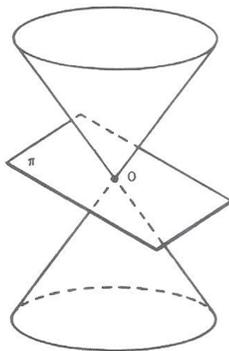


- uma hipérbole se π for paralelo ao eixo e ;

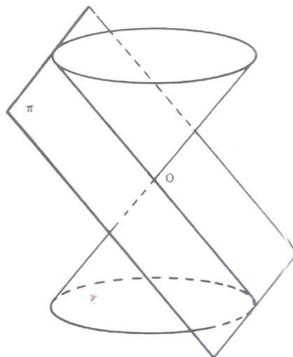


No caso do plano π passar pelo vértice O , obtemos as cônicas degeneradas:

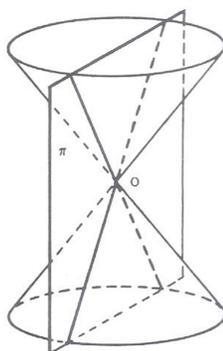
- um ponto se π só tem o ponto O em comum com a superfície;



- uma reta se π tangencia a superfície cônica;



- duas retas se π forma com o eixo e um ângulo menor do que este faz com a geratriz.



Atualmente, sabe-se que essa abordagem é equivalente à que adotamos. Uma demonstração para as seções cônicas pode ser baseada no trabalho do matemático belga G. P. Dandelin (1794-1847).

Cônicas - Uma abordagem algébrica

2.1 Introdução

Como vimos anteriormente, elipses, hipérbolas, parábolas, retas e pontos são cônicas as quais ficam caracterizadas por suas propriedades geométricas. Por meio destas propriedades vimos também que fixado um sistema de coordenadas cartesianas estas cônicas são representadas por equações de segundo grau, em duas variáveis, da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Motivados por este fato, somos levados a introduzir uma definição algébrica para as cônicas no plano, que nos permite desenvolver um estudo unificado.

Definição 2.1. Uma cônica em \mathbb{R}^2 é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2.1}$$

onde A ou B ou $C \neq 0$.

Observação 2.2. A equação da cônica envolve uma forma quadrática $Ax^2 + Bxy + Cy^2$, uma forma linear $Dx + Ey$ e um termo independente F .

Por meio da equação 2.1 e uma escolha conveniente dos coeficientes A, B, C, D, E e F podemos obter a equação na forma canônica da elipse, da hipérbole ou da parábola e de suas respectivas degenerações. Veja os exemplos:

Exemplo 2.3. Elipse na forma canônica

Escolhendo $A = \frac{1}{a^2}$, $C = \frac{1}{b^2}$, com $a > 0$, $b > 0$; $B = D = E = 0$ e $F = -1$ podemos escrever 2.1 como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Exemplo 2.4. Hipérbole na forma canônica

Escolhendo $A = \frac{1}{a^2}$, $C = -\frac{1}{b^2}$, com $a > 0$, $b > 0$; $B = D = E = 0$ e $F = -1$ podemos escrever 2.1 como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Exemplo 2.5. Parábola na forma canônica

Escolhendo $C = 1$, $D = d$, com $d < 0$; $A = B = E = F = 0$ podemos escrever 2.1 como

$$y^2 - dx = 0$$

Exemplo 2.6. Par de retas concorrentes (hipérbole degenerada)

Escolhendo $A = \frac{1}{a^2}$, $C = -\frac{1}{b^2}$, com $a > 0$, $b > 0$; $B = D = E = F = 0$ podemos escrever 2.1 como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$$

Exemplo 2.7. Par de retas paralelas (parábola degenerada)

Escolhendo $A = a$, $F = -b$, com $a > 0$, $b > 0$; $B = C = D = E = 0$ podemos escrever 2.1 como

$$ax^2 - b = 0$$

Exemplo 2.8. Uma reta (parábola degenerada)

Escolhendo $A = a$, com $a \in \mathbb{R}$; $B = C = D = E = F = 0$ podemos escrever 2.1 como

$$ax^2 = 0$$

Exemplo 2.9. Um ponto (elipse degenerada)

Escolhendo $A = a$, $B = b$, com $a > 0$, $b > 0$; $C = D = E = F = 0$ podemos escrever 2.1 como

$$ax^2 - by^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Exemplo 2.10. Vazio (elipse ou parábola degenerada)

Escolhendo $A = a$, $C = b$, com $a > 0$, $b > 0$; $B = D = E = 0$ e $F = r^2$, com $r \neq 0$ podemos escrever 2.1 como

$$ax^2 + by^2 + r^2 = 0$$

Neste capítulo temos dois objetivos. Primeiro vamos verificar que para cada cônica em \mathbb{R}^2 é possível encontrar um sistema de coordenadas segundo o qual sua equação está em uma das oito formas canônicas exemplificadas. Em outras palavras, veremos que a equação 2.1 por meio de mudança de variável conveniente reduz-se a uma das formas canônicas. Uma vez obtida a equação na forma reduzida o método permite classificar a cônica (isto é, se é uma elipse, hipérbole, parábola, retas ou ponto), encontrar sua posição e suas dimensões.

Por outro lado, muitas vezes nos interessa somente classificar a cônica, ou seja, dada a equação 2.1 dizer se ela representa uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, retas ou um ponto. Neste caso é possível descrever um método mais simplificado o qual é o segundo objetivo do capítulo.

2.2 Redução à forma canônica

Diante da equação geral de uma cônica, equação 2.1, buscamos fazer mudanças de variáveis que reduza a equação à forma canônica que não apresenta o termo quadrático xy , nem os termos lineares em x e y .

Com este intuito, inicialmente, precisamos eliminar os termos quadráticos do tipo xy , geometricamente, isto significa que um novo eixo coordenado é paralelo ao eixo de simetria da cônica.

Para isto, introduzimos os seguintes teoremas:

Teorema 2.11. *Toda equação do segundo grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com*

A ou B ou $C \neq 0$, pode ser transformada, por meio de uma mudança ortonormal de bases, em $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$. Onde λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.$$

Demonstração: Note que a equação do segundo grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= Ax^2 + \frac{B}{2}xy + \frac{B}{2}xy + Cy^2 + Dx + Ey + F \\ &= x \left(Ax + \frac{B}{2}y \right) + y \left(Cy + \frac{B}{2}x \right) + Dx + Ey + F \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax + \frac{B}{2}y \\ Cy + \frac{B}{2}x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F. \end{aligned}$$

Assim, a equação 2.1 fica representada na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0.$$

Denotando

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

escrevemos a equação sob a forma

$$X^t M X + N X + F = 0.$$

Como a matriz M é simétrica, sabemos que todos os seus autovalores são reais e essa matriz é sempre diagonalizável. Uma matriz quadrada A é diagonalizável se existir uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal, dizemos, então, que a matriz P diagonaliza A . Pelo Teorema Espectral (Apêndice A) para transformações auto-adjuntas existe uma base $\beta' = \{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 , ortonormal, tal que

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = PMP^{-1}$$

onde P é formada por um conjunto ortonormal de autovetores de M , desta forma esta matriz é ortogonal. Ainda, P é a matriz de passagem para a base β' , ou seja, dada uma matriz $\beta = \{u_1, u_2\}$ e $\beta' = \{v_1, v_2\}$ existe uma única matriz $P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ que satisfaz

$$\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases}$$

Se $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ são coordenadas na base β' , sabemos que:

$$X_1 = PX$$

logo

$$X = P^{-1}X_1$$

Como a matriz P é ortogonal, então $P^{-1} = P^t$, e

$$X^tMX + NX + F = X_1^tPMP^{-1}X_1 + NP^{-1}X_1 + F = X_1^tDX_1 + NP^{-1}X_1 + F = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} X_1^tDX_1 + NP^{-1}X_1 + F &= 0 \\ \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F &= 0 \\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F &= 0, \end{aligned}$$

onde $a = a_{11}D + a_{12}E$ e $b = a_{21}D + a_{22}E$ sabendo que $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ são os escalares da matriz P . \square

Em um segundo momento, para eliminar os termos lineares, possível somente quando $\lambda_i \neq 0$, para $i = 1$ ou $i = 2$, agrupamos os termos $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1$ convenientemente.

Teorema 2.12. *Dada a equação*

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$$

podemos, por meio de uma translação, eliminar os termos lineares correspondentes aos termos quadráticos com $\lambda_i \neq 0$, com $i = 1, 2$.

Demonstração: Suponha, por exemplo, que $\lambda_1 \neq 0$. Façamos então a substituição conveniente

$$x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$$

e

$$y_2 = y_1$$

vemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F &= \lambda_1 \left(x_2 - \frac{a}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 y_2^2 + a \left(x_2 - \frac{a}{2\lambda_1} \right) + by_2 + F \\ &= \lambda_1 x_2^2 - ax_2 + \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 y_2^2 + ax_2 - \frac{a^2}{2\lambda_1} + by_2 + F \\ &= \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + by_2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + F = 0 \\ &= \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + by_2 + f = 0 \end{aligned}$$

onde $f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}$.

O caso em que $\lambda_2 \neq 0$ é tratado de modo semelhante. Assim fazemos a substituição

$$y_2 = y_1 + \frac{b}{2\lambda_2}$$

e

$$x_2 = x_1$$

vemos que

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F &= \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + ax_2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0 \\ &= \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + ax_2 + g = 0\end{aligned}$$

onde $g = F - \frac{b^2}{4\lambda_2}$.

Agora, suponha que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Então façamos a substituição

$$x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$$

e

$$y_2 = y_1 + \frac{b}{2\lambda_2}$$

vemos que

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F &= \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0 \\ &= \lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + h = 0\end{aligned}$$

onde $h = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}$.

□

Enfim, a partir da equação 2.1, é possível realizar uma rotação e uma translação de eixos coordenados, e assim, obter a equação da cônica em uma das formas canônicas já conhecidas.

Teorema 2.13. *A equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com A ou B ou $C \neq 0$, pode ser transformada, por meio de uma mudança ortonormal de eixos e uma translação, em uma das formas abaixo:*

$$1. \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + h = 0$$

$$2. \lambda_1 x_2^2 + by_2 + f = 0$$

$$3. \lambda_1 x_2^2 + f = 0$$

$$4. \lambda_2 y_2^2 + ax_2 + g = 0$$

$$5. \lambda_2 y_2^2 + g = 0$$

$$6. ax_1 + by_1 + F = 0$$

$$7. ax_1 + F = 0$$

$$8. by_1 + F = 0$$

Demonstração: Usando o Teorema 2.11 e o Teorema 2.12, podemos transformar a equação 2.1 nos seguintes casos:

- $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + h = 0$,
se $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$;
- $\lambda_1 x_1^2 + by_1 + f = 0$,
se $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$;
- $\lambda_1 x_1^2 + f = 0$,
quando $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$;
- $\lambda_2 y_1^2 + ax_1 + g = 0$,
para $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$;
- $\lambda_2 y_1^2 + g = 0$,
quando $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$;
- $ax_1 + by_1 + F = 0$,
para $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$;

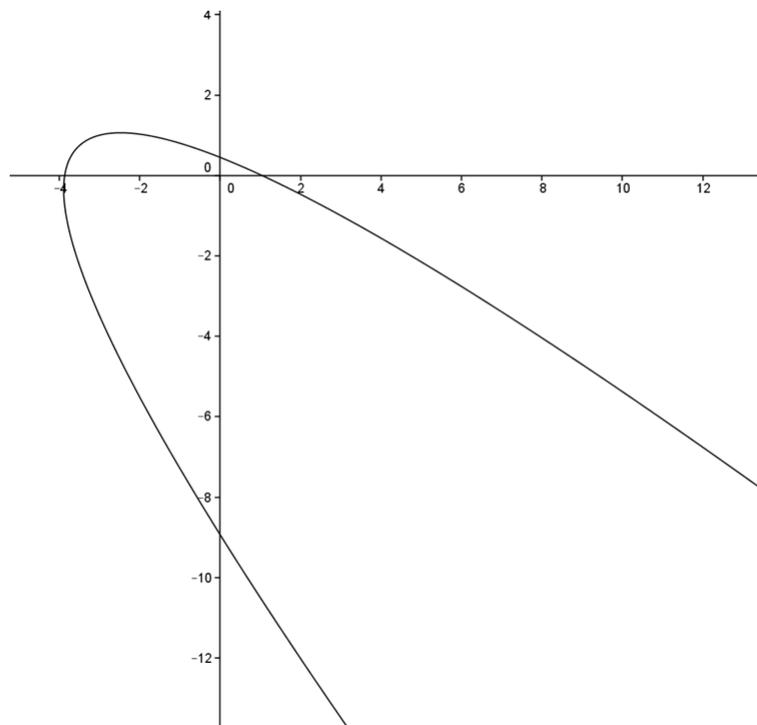
- $ax_1 + F = 0$,
para $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $a \neq 0$ e $b = 0$;
- $by_1 + F = 0$,
quando $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $a = 0$ e $b \neq 0$;

□

A partir destes teoremas podemos efetuar as transformações nas equações do tipo 2.1, isto é, realizar a rotação e a translação necessárias para obter a equação da cônica na forma canônica conhecida e, então podermos classificá-la como elipse, hipérbole, parábola ou uma de suas degenerações.

A seguir veremos alguns exemplos destas transformações em equações escritas na forma 2.1. Utilizaremos o Geogebra, software gratuito de matemática, que reúne recursos de geometria e álgebra para apresentar as representações geométricas da cônica e observar as transformações após cada passo.

Exemplo 2.14. Seja a equação $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0$. A representação geométrica desta cônica será



Pelo método descrito acima podemos reescrever a equação por meio de mudanças de coordenadas em uma equação na forma canônica. Para isso, conforme no Teorema 2.11, escrevemos a equação dada na forma matricial. Assim,

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (-8) = 0.$$

Sabemos por este mesmo teorema que ao fazer uma mudança ortonormal de bases o termo quadrático do tipo xy é eliminado. Para isso, é necessário diagonalizar a forma quadrática

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

encontrando os autovalores λ_1 e λ_2 e autovetores ortonormais da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Com este objetivo, escrevemos o polinômio característico desta matriz

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = 0,$$

os autovalores são as raízes deste polinômio, portanto $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$.

Os autovalores ortonormais associados a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ são serão os vetores não-nulos x em que $Mx = \lambda x$. Então:

- para $\lambda_1 = 0$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y$, então um autovetor normalizado é $v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
- para $\lambda_2 = 4$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$, assim o segundo autovetor normalizado é $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Vimos pelo Teorema Espectral que podemos encontrar uma base ortonormal, $\beta' = \{v_1, v_2\}$,

em que a matriz de passagem para esta nova base é $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ainda, $P^{-1}MP$ é

diagonal. Os elementos da diagonal principal desta matriz serão os autovalores λ_1 e λ_2 , assim $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Pelo Teorema 2.11 podemos diretamente ver que

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 12\sqrt{2} = -4 + 12 = 8$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 12\sqrt{2} = 4 + 12 = 16,$$

e, pelo mesmo teorema podemos reescrever a equação na forma matricial nesta nova base realizando uma mudança de coordenadas, então teremos $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$, ou seja, $4y_1^2 + 8x_1 + 16y_1 - 8 = 0$. Observe:

$$X_1^t D X_1 + N P^{-1} X_1 + F = 0$$

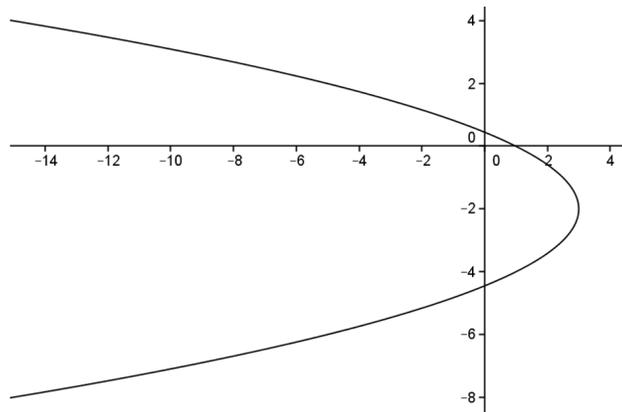
$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + (-8) = 0$$

$$\begin{aligned}
4y_1^2 + 4\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \right) + 12\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 \right) - 8 &= 0 \\
4y_1^2 - 4x_1 + 4y_1 + 12x_1 + 12y_1 - 8 &= 0 \\
4y_1^2 + 8x_1 + 16y_1 - 8 &= 0
\end{aligned}$$

podemos reduzir esta equação para

$$y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0$$

Após a rotação da equação dada podemos visualizar o processo geométricamente por meio do software Geogebra. O gráfico que representa a equação $y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0$ é



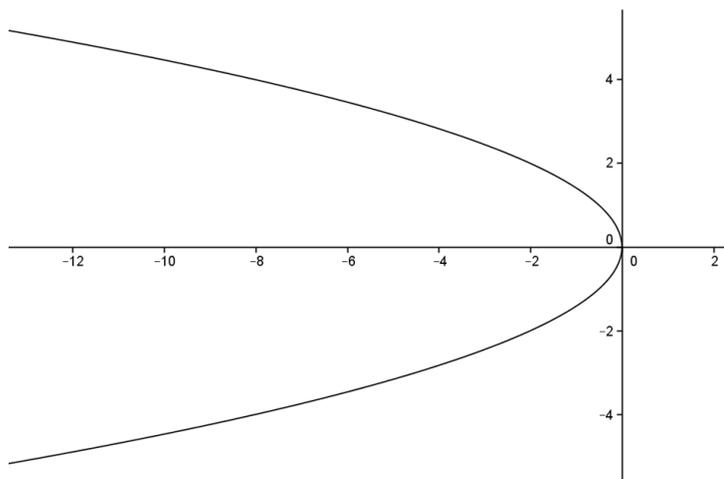
Ainda, pelo Teorema 2.12, para eliminar os termos lineares onde isto é possível ($\lambda_i \neq 0$), fazamos um agrupamento dos termos de $y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0$ convenientemente,

$$\begin{aligned}
(y_1^2 + 4y_1 + 4) - 4 + 2x_1 - 2 &= 0 \\
(y_1 + 2)^2 + 2(x_1 - 3) &= 0
\end{aligned}$$

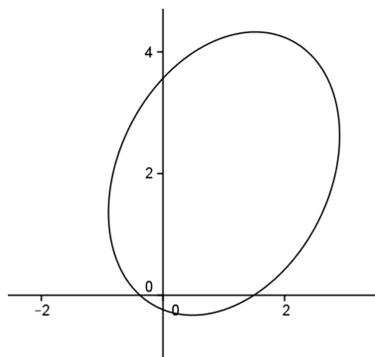
E, finalmente, como vimos no Teorema 2.13, se tomarmos $x_2 = x_1 - 3$ e $y_2 = y_1 + 2$, obtemos $y_2^2 + 2x_2 = 0$ ou

$$y_2^2 = -2x_2$$

Assim, a equação acima representa a cônica em relação a um novo referencial, obtido por rotação e translação. Podemos enfim identificá-la, por sua equação na forma canônica, conforme exemplo 2.5, como sendo uma parábola. A representação geométrica desta nova equação é



Exemplo 2.15. Dada a equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$ podemos, por meio do software Geogebra, verificar que a sua representação geométrica é



A equação dada pode ser escrita na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + (-5) = 0$$

Pelo Teorema 2.11 é possível eliminar o termo quadrático do tipo xy realizando uma mudança ortonormal de bases. Então, é necessário diagonalizar a forma quadrática

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Os autovalores λ_1 e λ_2 e autovetores ortonormais são determinados a partir do polinômio característico da matriz $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$, assim sendo

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 9 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{bmatrix} = (9 - \lambda) \cdot (6 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0,$$

logo, os autovalores são as raízes deste polinômio, portanto $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 10$.

Os autovalores ortonormais associados a matriz $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ são:

- para $\lambda_1 = 5$, $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = y$, então um autovetor normalizado é $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

- para $\lambda_2 = 10$, $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$, assim o segundo autovetor normalizado é $v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal, $\beta' = \{v_1, v_2\}$, em que a matriz de passagem para esta nova base é $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ e ainda, $P^{-1}MP$ é diagonal. Os elementos

da diagonal principal desta matriz serão os autovalores λ_1 e λ_2 , assim $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$. Usando o Teorema 2.11 podemos diretamente ver que

$$a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-10) + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot (-20) = -\frac{10}{\sqrt{5}} + \frac{40}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}}$$

e

$$b = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (-10) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-20) = -\frac{20}{\sqrt{5}} - \frac{20}{\sqrt{5}} = -\frac{40}{\sqrt{5}}.$$

Assim a equação pode ser reescrita na forma matricial nesta nova base realizando uma mudança de coordenadas. Desta forma teremos, ainda pelo Teorema 2.11

$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$, ou seja, $5x_1^2 + 10y_1^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{40}{\sqrt{5}}y_1 - 5 = 0$. Veja:

$$X_1^t DX_1 + NP^{-1}X_1 + F = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + (-5) = 0$$

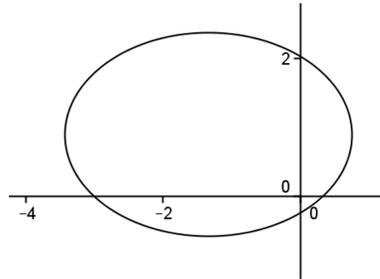
$$5x_1^2 + 10y_1^2 - 10 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \right) - 20 \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \right) - 5 = 0$$

$$5x_1^2 + 10y_1^2 + \frac{30}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{40}{\sqrt{5}}y_1 - 5 = 0$$

Esta equação pode ser reduzida para

$$x_1^2 + 2y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - 1 = 0$$

A representação geométrica desta cônica após a rotação será Para eliminar os termos lineares



façamos um agrupamento dos termos de $x_1^2 + 2y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - 1 = 0$ convenientemente, conforme o Teorema 2.12. Então,

$$\left(x_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{9}{5} \right) - \frac{9}{5} + 2 \left(y_1^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{4}{5} \right) - \frac{8}{5} - 1 = 0$$

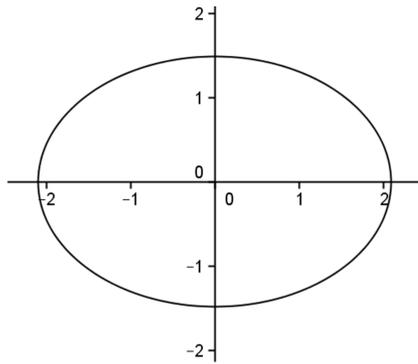
$$\left(x_1 + \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 + 2 \left(y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{22}{5} = 0$$

E pelo Teorema 2.13, se tomarmos $x_2 = x_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$ e $y_2 = y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$, obtemos $x_2^2 + 2y_2^2 - \frac{22}{5} = 0$ ou

$$x_2^2 + 2y_2^2 = \frac{22}{5}$$

$$\frac{x_2^2}{\frac{22}{5}} + \frac{y_2^2}{\frac{11}{5}} = 1$$

Portanto, após a rotação e a translação a equação $\frac{x_2^2}{22} + \frac{y_2^2}{22} = 1$ acima representa a cônica $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$ em relação a um novo referencial. Podemos finalmente identificá-la, por sua equação na forma canônica, conforme exemplo 2.3, como sendo uma elipse. Após o processo de rotação e translação podemos representar geometricamente a cônica $\frac{x_2^2}{22} + \frac{y_2^2}{22} = 1$ por



Exemplo 2.16. Seja a equação $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$. Podemos representar geometricamente a equação por

Na forma matricial a equação dada será escrita como,

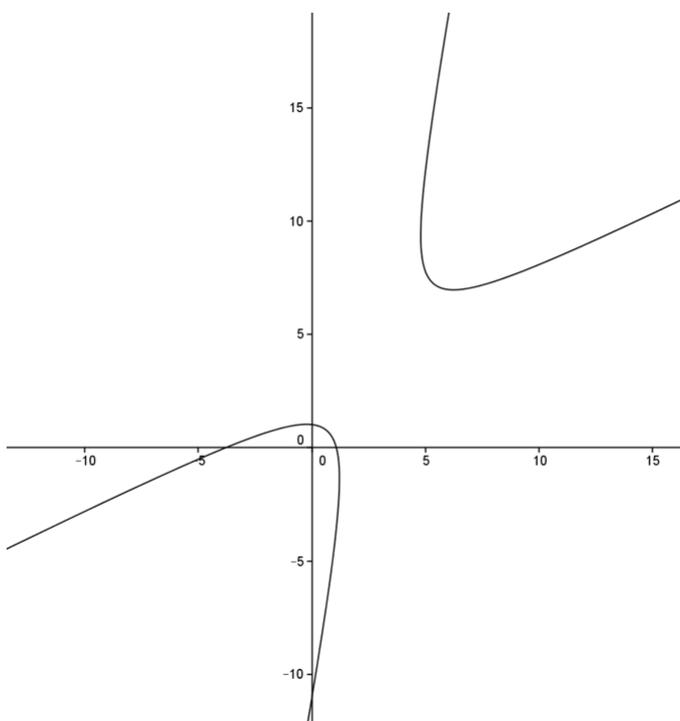
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 45 = 0$$

Com o objetivo de eliminar o termo quadrático do tipo xy realizamos uma mudança ortonormal de bases, conforme Teorema 2.11. Assim, é necessário diagonalizar a forma quadrática

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Os autovalores λ_1 e λ_2 e autovetores ortonormais são determinados a partir do polinômio característico da matriz $\begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$, assim sendo

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 11 - \lambda & -12 \\ -12 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (11 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) - 144 = \lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0,$$



logo os autovalores são as raízes deste polinômio, portanto $\lambda_1 = 20$ e $\lambda_2 = -5$.

Os autovalores ortonormais associados a matriz $\begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$ são:

- para $\lambda_1 = 20$, $\begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 20 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -9x - 12y = 0 \\ -12x - 16y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}y$,
então um autovetor normalizado é $v_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

- para $\lambda_2 = -5$, $\begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-5) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 16x - 12y = 0 \\ -12x + 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$,
assim o segundo autovetor normalizado é $v_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Então, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal, $\beta' = \{v_1, v_2\}$, e a matriz de

passagem para esta nova base é $P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ e ainda, $P^{-1}MP$ é diagonal. Os elementos

da diagonal principal desta matriz serão os autovalores λ_1 e λ_2 , assim $D = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Podemos diretamente ver que pelo Teorema 2.11 que

$$a = -\frac{4}{5} \cdot 30 + \frac{3}{5} \cdot 40 = -\frac{120}{5} + \frac{120}{5} = 0$$

e

$$b = \frac{3}{5} \cdot 30 + \frac{4}{5} \cdot 40 = \frac{90}{5} + \frac{160}{5} = 50.$$

Assim a equação pode ser reescrita na forma matricial nesta nova base ao realizar uma mudança de coordenadas. Ainda pelo Teorema 2.11 vimos que $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$, ou seja, $20x_1^2 - 5y_1^2 + 50y_1 - 45 = 0$. Observe:

$$X_1^t D X_1 + N P^{-1} X_1 + F = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 45 = 0$$

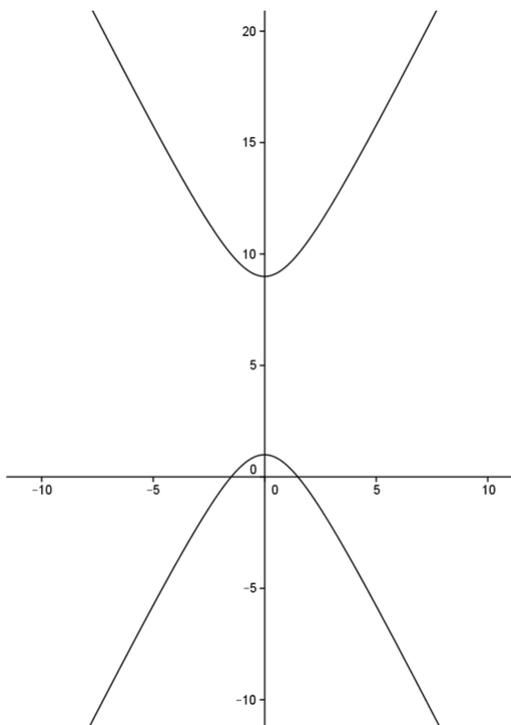
$$20x_1^2 - 5y_1^2 + 30 \left(-\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}y_1 \right) + 40 \left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1 \right) - 45 = 0$$

$$20x_1^2 - 5y_1^2 + 50y_1 - 45 = 0.$$

Esta equação pode ser simplificada para

$$4x_1^2 - y_1^2 + 10y_1 - 9 = 0.$$

Podemos visualizar por meio do software Geogebra a rotação realizada pela mudança de coordenadas:



Neste caso, para eliminar os termos lineares fazemos um agrupamento dos termos de $4x_1^2 - y_1^2 + 10y_1 - 9 = 0$ convenientemente, conforme o Teorema 2.12. Assim,

$$4x_1^2 - (y_1^2 - 10y_1 + 25) - 9 + 25 = 0$$

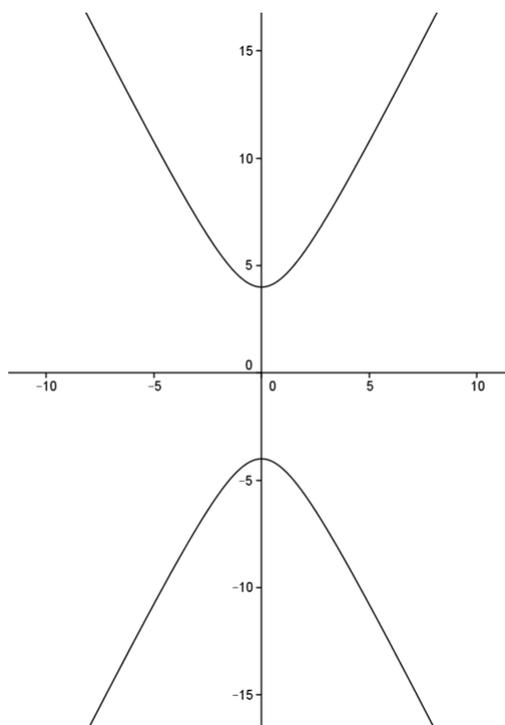
$$4x_1^2 - (y_1 - 5)^2 + 16 = 0$$

E pelo Teorema 2.13, se tomarmos $x_2 = x_1$ e $y_2 = y_1 - 5$, obtemos $4x_2^2 - y_2^2 + 16 = 0$ ou

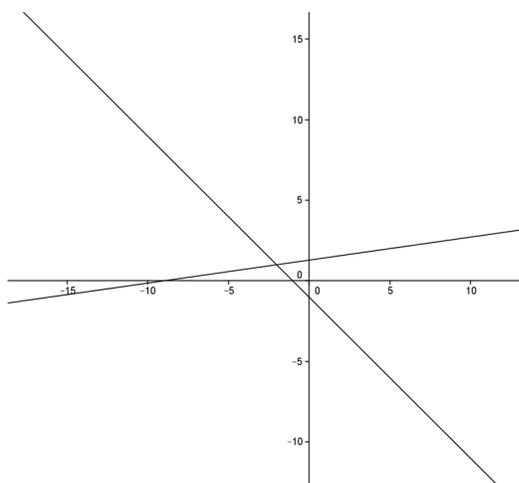
$$-4x_2^2 + y_2^2 = 16$$

$$-\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{16} = 1$$

Assim, após a rotação e a translação a equação acima representa a cônica em relação a um novo referencial. Enfim, é possível identificá-la, por sua equação na forma canônica, conforme exemplo 2.4, como sendo uma hipérbole. A representação geométrica desta equação nas novas coordenadas, após a rotação e a translação é



Exemplo 2.17. Dada a equação $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$ podemos representá-la geometricamente, por meio do software Geogebra, como



A equação dada pode ser escrita na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 9 = 0$$

Pelo Teorema 2.11 podemos eliminar o termo quadrático do tipo xy realizando uma mudança ortonormal de bases. Então, é necessário diagonalizar a forma quadrática

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Os autovalores λ_1 e λ_2 e autovetores ortonormais são determinados a partir do polinômio característico da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$, assim sendo

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ -3 & -7 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda) \cdot (-7 - \lambda) - 9 = \lambda^2 + 6\lambda - 16 = 0,$$

logo, os autovalores são as raízes deste polinômio, portanto $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -8$.

Os autovalores ortonormais associados a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ são:

- para $\lambda_1 = 2$, $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - 3y = 0 \\ -3x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3y$, então um autovetor normalizado é $v_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.
- para $\lambda_2 = -8$, $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-8) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x = y$, assim o segundo autovetor normalizado é $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal, $\beta' = \{v_1, v_2\}$, em que a matriz de passagem para esta nova base é $P = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$ e ainda, $P^{-1}MP$ é diagonal. Os elementos

da diagonal principal desta matriz serão os autovalores λ_1 e λ_2 , assim $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$. Usando

o Teorema 2.11 podemos diretamente ver que

$$a = -\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot 10 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \cdot 2 = -\frac{30}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}} = -\frac{28}{\sqrt{10}}$$

e

$$b = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 10 + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot 2 = \frac{10}{\sqrt{10}} + \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{16}{\sqrt{10}}.$$

Assim a equação pode ser reescrita a equação na forma matricial nesta nova base realizando uma mudança de coordenadas. Desta forma teremos, ainda pelo Teorema 2.11,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0, \text{ ou seja, } 2x_1^2 - 8y_1^2 - \frac{28}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{16}{\sqrt{10}}y_1 + 9 = 0. \text{ Veja:}$$

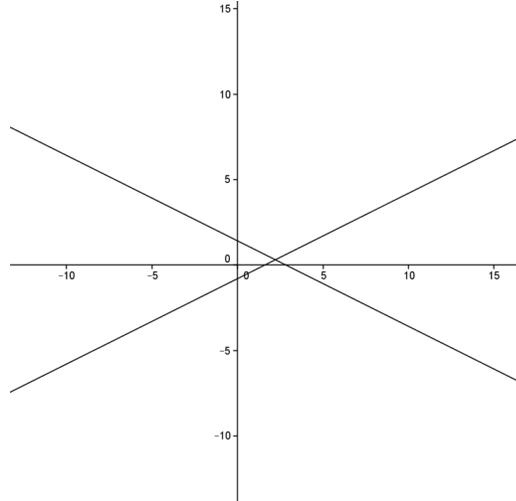
$$X_1^t D X_1 + N P^{-1} X_1 + F = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 9 = 0$$

$$2x_1^2 - 8y_1^2 + 10 \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_1 \right) + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_1 \right) + 9 = 0$$

$$2x_1^2 - 8y_1^2 - \frac{28}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{16}{\sqrt{10}}y_1 + 9 = 0$$

A representação geométrica desta cônica após a rotação será



Para eliminar os termos lineares fazemos um agrupamento dos termos de

$$2x_1^2 - 8y_1^2 - \frac{28}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{16}{\sqrt{10}}y_1 + 9 = 0 \text{ convenientemente, conforme o Teorema 2.12. Então,}$$

$$2 \left(x_1^2 - \frac{14}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{49}{10} \right) - \frac{98}{10} - 8 \left(y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{1}{10} \right) + \frac{8}{10} + 9 = 0$$

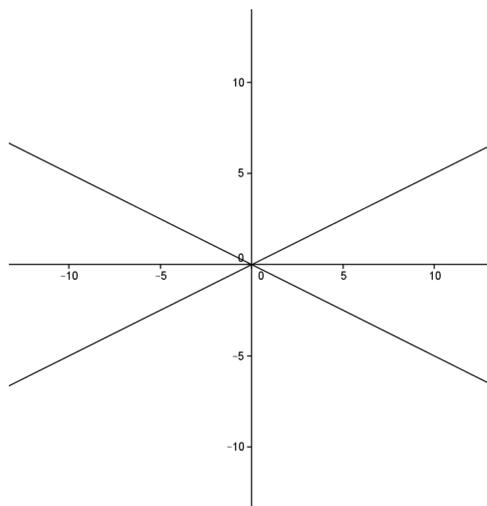
$$2 \left(x_1 - \frac{7}{\sqrt{10}} \right)^2 - 8 \left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2 = 0$$

E pelo Teorema 2.13, se tomarmos $x_2 = x_1 - \frac{7}{\sqrt{10}}$ e $y_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{10}}$, obtemos $2x_2^2 - 8y_2^2 = 0$ ou

$$2x_2^2 = 8y_2^2$$

$$x_2 = \pm 2y_2$$

Portanto, após a rotação e a translação a equação $x_2 = \pm 2y_2$ acima representa a cônica $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$ em relação a um novo referencial. Podemos finalmente identificá-la, por sua equação na forma canônica, conforme exemplo 2.6, como sendo uma hipérbole degenerada, ou seja, um par de retas concorrentes. Após o processo de rotação e translação podemos representar geometricamente a cônica $x_2 = \pm 2y_2$.



2.3 Classificação das cônicas

Dada uma equação na forma 2.1, e tendo como finalidade apenas classificar a cônica, podemos apresentar um método rápido que permite alcançar este objetivo.

Neste momento, devemos considerar que o desenvolvimento deste método nos conduz a observação de dois aspectos. O primeiro é puramente técnico, envolve apenas cálculos e desenvolve um algoritmo que permite a classificação da cônica em questão. Já o

segundo, que envolve a classificação e a demonstração dos fatos, exige conceitos básicos de álgebra linear acessíveis na maioria dos cursos de licenciatura em matemática. Como este trabalho se destina a professores e estudantes do ensino médio, em sua aplicação neste nível de ensino a demonstração deve ser omitida e apenas o algoritmo deve ser desenvolvido.

Para iniciar este processo devemos analisar as possibilidades que temos em função dos sinais dos autovalores associados à forma quadrática.

Teorema 2.18. *Dada uma cônica definida pela equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com A ou B ou $C \neq 0$. Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores associados à sua forma quadrática, então:*

- i) se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações (um ponto ou o vazio);*
- ii) se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ esta equação representa uma hipérbole, ou sua degeneração (par de retas concorrentes);*
- iii) se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ esta equação representa uma parábola ou suas degenerações (par de retas paralelas, uma reta ou vazio).*

Demonstração: Como vimos, no Teorema 2.11, por meio de uma mudança ortonormal de bases, podemos eliminar o termo quadrático em xy e obter a equação $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$. A partir disto, podemos discutir as possibilidades que temos em função dos sinais dos autovalores associados à forma quadrática. Então,

- se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, como visto no Teorema 2.12, por meio de uma translação podemos eliminar os termos lineares e assim obter a equação $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + h = 0$. Deste modo, há três possibilidades a discutir:

- 1) se λ_1 e λ_2 forem positivos teremos uma elipse ou suas degenerações, pois se $h < 0$ teremos $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = -h$, uma elipse; se $h = 0$ teremos $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = 0$, um ponto; se $h > 0$ teremos $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = -h$, o conjunto vazio.

- 2) se λ_1 e λ_2 forem negativos teremos também uma elipse ou suas degenerações, pois se $h < 0$ teremos $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = -h$, o conjunto vazio; se $h = 0$ teremos $-\lambda_1 x_2^2 + -\lambda_2 y_2^2 = 0$, um ponto; se $h > 0$ teremos $\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = h$, uma elipse.
- 3) se λ_1 e λ_2 tiverem sinais opostos teremos uma hipérbole ou suas degenerações, pois se $h \neq 0$ teremos $\lambda_1 x_2^2 - \lambda_2 y_2^2 \pm h = 0 \Rightarrow \lambda_1 x_2^2 - \lambda_2 y_2^2 = h$ ou $-\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = h$, portanto uma hipérbole; se $h = 0$ teremos $\lambda_1 x_2^2 = \lambda_2 y_2^2$, um par de retas concorrentes.
- se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, como visto no Teorema 2.12, por meio de uma translação podemos eliminar o termo linear e assim obter a equação $\lambda_2 y_2^2 + ax_2 + g = 0$. Deste modo, há duas possibilidades a discutir:
 - 1) se $a \neq 0$ teremos uma parábola pois $\lambda_2 y_2^2 \pm ax_2 \pm g = 0 \Rightarrow \lambda_2 y_2^2 = \mp ax_2 \mp g$.
 - 2) se $a = 0$ teremos, se $g < 0$, então $\lambda_2 y_2^2 = g$ e obtemos um par de retas paralelas; se $g = 0$ teremos $\lambda_2 y_2^2 = 0$, um ponto; ou se $g > 0$ a equação será $\lambda_2 y_2^2 = -g$, então teremos o conjunto vazio.
 - se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ o caso é discutido de maneira análoga ao que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$.

□

No entanto, quando estamos diante de uma equação do segundo grau em duas variáveis não temos a princípio os seus autovalores λ_1 e λ_2 . Para que o processo de classificação da cônica seja de forma direta a partir desta equação observe o seguinte teorema.

Teorema 2.19. *Seja dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com A ou B ou $C \neq 0$, consideremos:*

- i) Se $B^2 - 4AC < 0$ então 2.1 representa uma elipse ou suas degenerações;*
- ii) Se $B^2 - 4AC = 0$ então 2.1 representa uma parábola ou suas degenerações;*
- iii) Se $B^2 - 4AC > 0$ então 2.1 representa uma hipérbole ou suas degenerações;*

Demonstração: Inicialmente, observe que o determinante associado à forma quadrática

$$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \text{ é}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{vmatrix} &= AC - \frac{B^2}{4} \\ &= -(B^2 - 4AC) (*) \end{aligned}$$

Agora, note que os autovalores associados à forma quadrática $\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ são

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{vmatrix} = (A - \lambda) \cdot (C - \lambda) - \frac{B^2}{4} \\ &= AC - A\lambda - C\lambda + \lambda^2 - \frac{B^2}{4} \\ &= \lambda^2 - (A + C)\lambda + \left(AC - \frac{B^2}{4}\right) = 0, \end{aligned}$$

assim

$$\lambda_1 = \frac{A + C - \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2AC}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{A + C + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2AC}}{2}$$

Perceba que o produto dos autovalores λ_1 e λ_2 é

$$\begin{aligned} &\left(\frac{A + C - \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2AC}}{2}\right) \cdot \left(\frac{A + C + \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2AC}}{2}\right) \\ &= -\frac{B^2}{4} + AC \\ &= -(B^2 - 4AC) (**) \end{aligned}$$

Então, a partir (*) e (**) podemos concluir que o determinante e o produto dos autovalores

associados à forma quadrática $\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ são iguais e, ainda, o sinal de $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ é o mesmo de $-(B^2 - 4AC)$. Assim, por meio dos resultados obtidos no Teorema 2.18 podemos classificar

a cônica dada pela comparação do valor de $(B^2 - 4AC)$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. \square

Além disso, podemos realizar uma classificação mais precisa por meio do teorema:

Teorema 2.20. *Seja a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com A ou B ou $C \neq 0$ e $\Delta = 4ACF - B^2F - AE^2 - CD^2 + BDE$, devemos considerar que:*

$$1) \text{ Se } B^2 - 4AC < 0 \text{ e } \begin{cases} \Delta \neq 0 \text{ e } \begin{cases} A \cdot \Delta < 0 \text{ elipse} \\ A \cdot \Delta > 0 \text{ nenhum lugar} \end{cases} \\ \Delta = 0 \text{ um ponto} \end{cases}$$

$$2) \text{ Se } B^2 - 4AC = 0 \text{ e } \begin{cases} \Delta \neq 0 \text{ parábola} \\ \Delta = 0 \text{ duas retas paralelas, uma reta ou nenhum lugar} \end{cases}$$

$$3) \text{ Se } B^2 - 4AC > 0 \text{ e } \begin{cases} \Delta \neq 0 \text{ hipérbole} \\ \Delta = 0 \text{ duas retas concorrentes.} \end{cases}$$

Demonstração: Observe que se a equação geral de uma cônica decompõem-se no produto de dois fatores lineares, então a equação representa uma cônica degenerada, ou seja, um ponto ou uma reta ou ainda um par de retas concorrentes. Da igualdade

$$4A(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F) = 0$$

podemos escrever

$$(2Ax + By + D)^2 = (B^2 - 4AC)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF$$

Assim, a cônica será degenerada se

$$(B^2 - 4AC)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF$$

possui raízes reais duplas. Para isso, considerando a equação do tipo $ax^2 + bx + c$ devemos ter $b^2 - 4ac$ nulo, assim

$$b^2 - 4ac = [2(BD - 2AE)]^2 - 4(B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF)$$

$$-16A(4ACF - B^2F - AE^2 - CD^2 + BDE) = 0$$

Daí, se

$$4ACF - B^2F - AE^2 - CD^2 + BDE = 0$$

podemos dizer que a equação representa uma cônica degenerada. Agora, se $4ACF - B^2F - AE^2 - CD^2 + BDE \neq 0$ a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma cônica não degenerada. Analisamos as transformações que ocorrem com os coeficientes da equação geral após a mudança de coordenadas. Como vimos na rotação de eixos, podemos estabelecer a equivalência

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta \\ y = x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta \end{cases}$$

Então por substituição

$$A_1 = A\cos^2\theta + B\cos\theta\operatorname{sen}\theta + C\operatorname{sen}^2\theta$$

$$B_1 = B\cos(2\theta) - (A - C)\operatorname{sen}2\theta$$

$$C_1 = A\operatorname{sen}^2\theta - B\cos\theta\operatorname{sen}\theta + C\cos^2\theta$$

$$D_1 = D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta$$

$$E_1 = -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta$$

$$F_1 = F$$

Assim,

$$A_1 + C_1 = A + C$$

$$A_1 - C_1 = B\operatorname{sen}2\theta + (A - C)\cos2\theta$$

$$B_1^2 + (A_1 - C_1)^2 = B^2 + (A - C)^2$$

$$B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC$$

Isso mostra que as expressões $A_1 + C_1 = A + C$ e $B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC$ e o termo independente $F_1 = F$ são invariantes por rotação de eixos. Para eliminar o termo em xy devemos ter $B_1 = 0$, assim

$$B_1 = B\cos(2\theta) - (A - C)\operatorname{sen}2\theta = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}$$

Usando a igualdade

$$\frac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta} = tg(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \gamma$$

e $tg(2\theta) = \frac{B}{A - C}$ possui duas soluções distintas, raízes da equação

$$\gamma tg^2\theta + 2tg\theta - \gamma = 0.$$

Por meio de uma translação de eixos coordenados pode-se eliminar os termos lineares e reduzir a equação $A_1x^2 + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F = 0$ em $A_2x^2 + C_2y^2 + F_2 = 0$.

Como $B_1 = 0$, então $B^2 - 4AC = -4AC$ e assim,

- i) se $B^2 - 4AC < 0$ temos que A e C possuem sinais iguais, e trata-se de uma elipse se $A \cdot \Delta < 0$ ou nenhum lugar se $A \cdot \Delta > 0$;
- ii) se $B^2 - 4AC > 0$ temos que A e C possuem sinais contrários, e trata-se de uma hipérbole;
- iii) se $B^2 - 4AC > 0$ temos que $A = 0$ ou $C = 0$ e trata-se de uma parábola.

□

Podemos facilmente classificar as cônicas por meio do Teorema 2.20. Veja os exemplos:

Exemplo 2.21. A equação $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0$, possui coeficientes $A = 2$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 4\sqrt{2}$, $E = 12\sqrt{2}$ e $F = -8$, conforme a equação (1). Então pelo Teorema 2.20,

$$B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$$

e

$$\begin{aligned} \Delta &= 4ACF - B^2F - AE^2 - CD^2 + BDE = \\ &= 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-8) - 4^2 \cdot (-8) - 2 \cdot (12\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (4\sqrt{2})^2 + 4 \cdot (4\sqrt{2}) \cdot (12\sqrt{2}) \\ &= -128 + 128 - 576 - 64 + 384 = -256 \neq 0 \end{aligned}$$

e a equação dada representa uma parábola.

Exemplo 2.22. Considere a equação $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 4\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y + 4 = 0$ escrita na forma de equação (1). Então temos os coeficientes $A = 5$, $B = -4$, $C = 8$, $D = -4\sqrt{5}$, $E = -16\sqrt{5}$ e $F = 4$. Assim,

$$B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = 16 - 80 = -64 < 0$$

e

$$\begin{aligned} \Delta &= 4ACF - B^2F - AE^2 - CD^2 + BDE = \\ &= 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4 - (-4)^2 \cdot 4 - 5 \cdot (-16\sqrt{5})^2 - 8 \cdot (-4\sqrt{5})^2 + (-4) \cdot (-4\sqrt{5}) \cdot (-16\sqrt{5}) \\ &= 640 - 64 - 6400 - 640 - 1280 = -7744 \neq 0 \end{aligned}$$

e

$$A \cdot \Delta = 5 \cdot (-7744) = -38720 < 0.$$

Logo, pelo Teorema 2.20, a equação representa uma elipse.

Exemplo 2.23. Seja a equação $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$. De acordo com a equação (1) os coeficientes são $A = 11$, $B = -24$, $C = 4$, $D = 30$, $E = 40$ e $F = -45$. Como

$$B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4 \cdot 11 \cdot 4 = 576 - 176 = 400 > 0,$$

e

$$\begin{aligned} \Delta &= 4ACF - B^2F - AE^2 - CD^2 + BDE = \\ &= 4 \cdot 11 \cdot 4 \cdot (-4) - (-24)^2 \cdot (-45) - 11 \cdot (40)^2 - 4 \cdot (30)^2 + (-24) \cdot 20 \cdot 40 \\ &= -704 + 25920 - 17600 - 3600 - 19200 = -15184 \neq 0 \end{aligned}$$

a equação representa, conforme o Teorema 2.19, representa uma hipérbole.

Exemplo 2.24. Dada a equação $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$, escrita na forma (1), obtemos os coeficientes $A = 1$, $B = -6$, $C = -7$, $D = 10$, $E = 2$ e $F = 9$. Então,

$$B^2 - 4AC = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 > 0$$

e

$$\Delta = 4ACF - B^2F - AE^2 - CD^2 + BDE =$$

$$\begin{aligned} &= 4 \cdot 1 \cdot (-7) \cdot 9 - (-6)^2 \cdot 9 - 1 \cdot 2^2 - (-7) \cdot 10^2 + (-6) \cdot 10 \cdot 2 \\ &= -252 - 324 - 4 + 700 - 120 = 0 \end{aligned}$$

e, pelo Teorema 2.20, a equação dada representa duas retas concorrentes.

Aplicações das Cônicas

Desde a antiguidade, as cônicas atraem atenção de estudiosos que utilizam suas propriedades para explicar diversas situações do cotidiano. Sendo assim, áreas do conhecimento como física, engenharia, astronomia, entre outras, utilizam estes estudos para obter avanços tecnológicos em suas áreas.

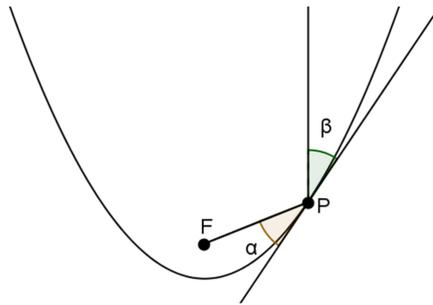
Neste momento, apresentamos algumas aplicações das cônicas que são utilizadas frequentemente.

É importante saber que as parábolas, elipses e hipérbolas têm certas propriedades de reflexão que as fazem extremamente importantes em várias aplicações. Em física, o fenômeno de reflexão de ondas consiste na mudança de direção de propagação de energia, ou seja, as ondas sempre refletem quando encontram algum obstáculo.

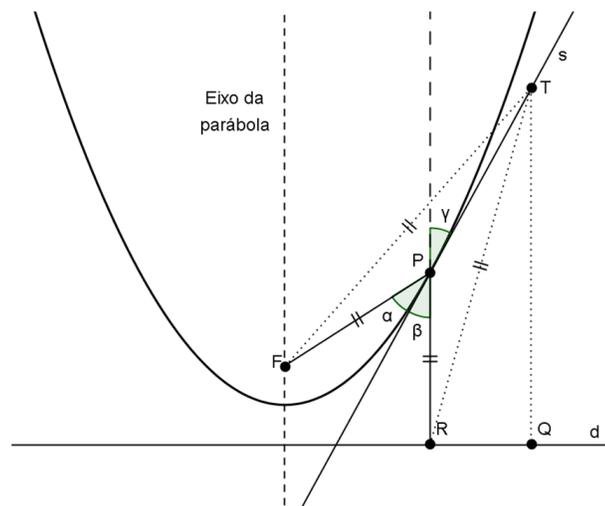
3.1 Aplicações das parábolas

Para apresentar esta propriedade em uma parábola, observe que:

Teorema 3.1 (Propriedade de Reflexão da Parábola). *A reta tangente a um ponto P da parábola faz ângulos iguais com a reta que passa por P paralela ao eixo da parábola e com a reta que passa por P e o foco.*



Demonstração: Seja P um ponto da parábola, o ponto F é o foco da parábola e R o pé da perpendicular a diretriz da parábola passando por P , s a reta bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$.



Considere ainda α como a medida do ângulo entre o segmento de reta FP e a reta s . A reta PR é paralela ao eixo da parábola e β é a medida do ângulo entre PR e s . Pela definição de parábola $\overline{PF} = \overline{PR}$ então, o triângulo FPR é isósceles. Assim, a reta s é também a mediana do segmento \overline{FR} . Considere agora T como um ponto qualquer da reta s , distinto de P . Se Q é a projeção de T sobre d , temos:

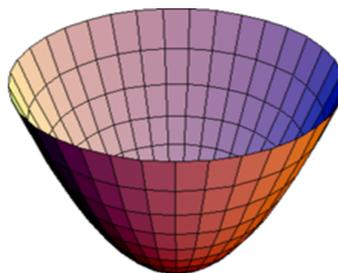
$$TF = TR > TQ$$

Portanto T não pertence à parábola e todos os outros pontos de s não pertencem a ela. Logo, s é tangente à parábola em P . Como a tangente à parábola em P é bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$

temos que α e β são iguais e ainda, β e γ são opostos pelo vértice e logo, são iguais. \square

Assim, todo raio que incidir na parábola que seja paralelo ao eixo da parábola toma a direção do foco após a reflexão.

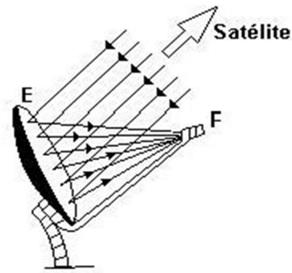
Observe também que ao rotacionar a parábola em torno de seu eixo obtém uma superfície chamada parabolóide elíptico.



Deste modo, pela rotação da parábola e a propriedade da reflexão, agora sobre a superfície do parabolóide elíptico, podemos encontrar várias aplicações práticas. Uma delas é a antena parabólica.

Os satélites em órbita enviam sinais (ondas de rádio ou televisão) que chegam muito fracos à superfície terrestre devido a grande distância da qual são emitidos. Estes sinais chegam praticamente paralelos entre si, por isso é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam amplificados.

Desta forma, pela propriedade da reflexão e as características geométricas da parábola a superfície que atende esta necessidade é o parabolóide.



No foco da parábola é posicionado um receptor que, após o processo de reflexão dos sinais que chegam do satélite, receberá uma intensidade alta de sinais suficientes para que o processo de transmissão ocorra.

Agora, suponha que raios sejam emitidos a partir do foco em direção à superfície do paraboloide elíptico. Como vimos, pela propriedade da reflexão, estes raios incidentes na superfície do paraboloide serão refletidos paralelamente ao eixo principal da parábola que gera o paraboloide. O processo é o mesmo descrito na antena parabólica apenas o sentido dos raios é contrário. Esta aplicação é vista nos faróis dos carros.

Os refletores parabólicos de faróis e lanternas permitem que a luz da lâmpada se propague em raios formando o que é chamado de fecho de luz.



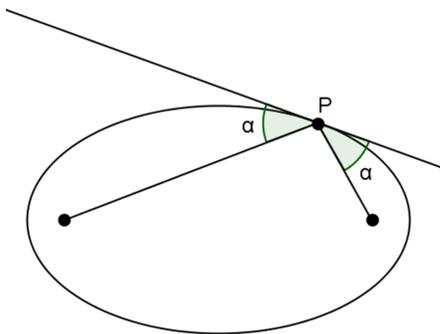
Neste caso, a lâmpada é colocada no foco da parábola de modo que a iluminação gerada esteja voltada para a superfície do paraboloide. A propriedade da reflexão garante que os raios luminosos emitidos pela lâmpada sejam refletidos paralelamente ao eixo principal da parábola formando o fecho de luz.

3.2 Aplicações das elipses

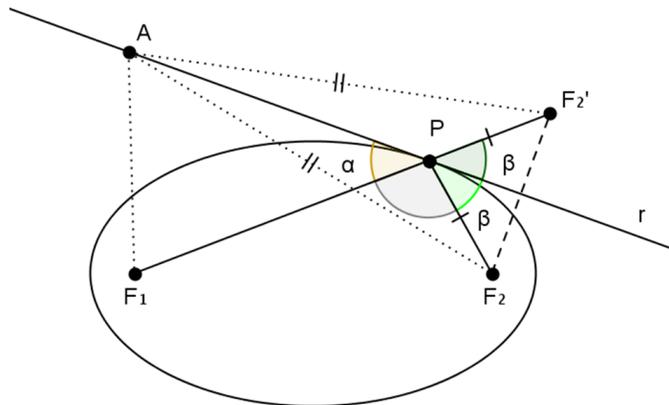
Esta mesma propriedade de reflexão que utilizamos nas aplicações da parábola, também pode ser aplicada em outras situações que veremos a partir deste momento, envolvendo a elipse.

Quando os raios incidem em uma elipse podemos afirmar que:

Teorema 3.2 (Propriedade de Reflexão da Elipse). *Uma reta tangente a uma elipse em um ponto P faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos.*



Demonstração: Seja P um ponto pertencente a elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, 2a)$, F_2' um ponto da reta PF_1 com $\overline{F_2P} = \overline{PF_2'}$, r a reta bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}F_2'$ e um ponto A , tal que $A \in r$.



Como $P \in \mathcal{E}(F_1, F_2, 2a)$,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2') = 2a.$$

Se considerarmos qualquer ponto pertencente a reta r diferente de P , por exemplo o ponto A , teremos

$$d(A, F_1) + d(A, F_2') > 2a,$$

portanto não pertencente a elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, 2a)$. Como A é um ponto qualquer, existe um único ponto em r pertencente a elipse, ou seja r é a reta tangente, e ainda qualquer ponto pertencente a reta r tem a mesma distância dos pontos F_2 e F_2' . Deste modo, a reta r é a mediatriz do segmento $\overline{F_2F_2'}$. Como os ângulos α e β são opostos pelo vértice, são iguais. \square

De tal modo, no caso da elipse, quando um raio emitido de um de seus focos chega à curva da elipse é refletido em direção ao outro foco. Mais ainda, pela definição de elipse $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = k$, onde k é uma constante, todos os raios emitidos de um dos focos, não importa em que direção sigam, chegarão ao mesmo tempo no outro foco porque eles percorrem distâncias iguais.

Assim como nas parábolas, a rotação de uma elipse em torno de seu eixo principal gera uma superfície. No caso da elipse, a superfície gerada é um elipsoide.

A utilização destas características da elipse permite diversas aplicações, uma destas aplicações encontra-se em equipamentos odontológicos.



As luminárias utilizadas pela maioria dos dentistas, em seus consultórios, são equipadas com um espelho elíptico que ao receber os raios luminosos concentra-os em um único ponto, que é ajustado pelo dentista para iluminar exatamente o local a ser tratado. Desta forma, é possível além de amplificar a luminosidade, evitar que os raios luminosos incomodem a visão do paciente.

Esta mesma propriedade da elipse é usada na medicina em aparelhos que emitem certos tipos de raios nos tratamentos médicos, por exemplo, radioterapia e litotripsia.

A radioterapia é uma modalidade de tratamento do câncer que utiliza radiações de alta energia para combater células malignas, é usada para tratamento de tumores localizados, uma vez que só funciona na área que está recebendo a radiação. Na radioterapia, os raios devem destruir os tecidos doentes, sem afetar os tecidos saudáveis que se encontram ao redor.

A litotripsia, processo utilizado por médicos para o tratamento de quadros de litíase (pedra nos rins, cálculo renal, cálculo urinário), evita a cirurgia para remoção de cálculos renais. Neste procedimento, o paciente é colocado em um aparelho no formato de elipsoide de tal forma que o cálculo renal esteja posicionado em um de seus focos. Uma fonte de ondas sonoras de alta frequência (ultrassom) é colocada no outro foco. Todas as ondas sonoras emitidas pela fonte convergem para o cálculo provocando vibrações que acabam por quebrá-lo em pedaços minúsculos que possam ser expelidos naturalmente e de modo indolor na urina do paciente.

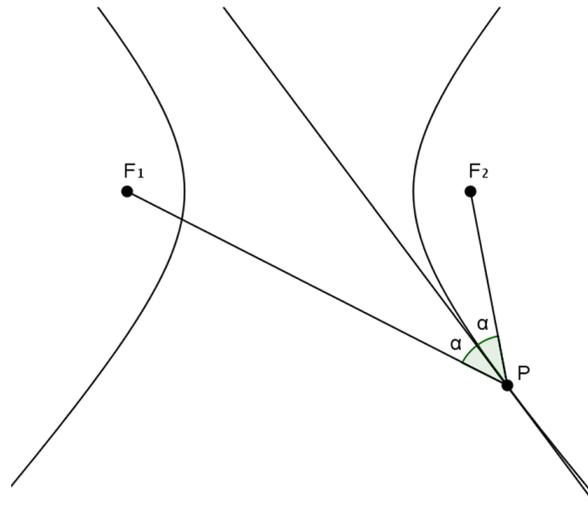
Nestas três aplicações, percebe-se a necessidade de uma superfície que receba os raios emitidos pela fonte e direcione-os a um único foco. Como sabemos em consequência do Teorema 3.2 a superfície que satisfaz esta propriedade é o elipsoide.

Outra interessante aplicação da propriedade de reflexão da elipse encontra-se em algumas construções existentes em museus e exposições, chamadas salas de sussurro. Nestas salas, em forma de elipsoide, uma pessoa colocada em um dos focos pode se comunicar em voz sussurrada com outra pessoa que está exatamente no outro foco, no entanto, tal comunicação será inaudível no restante da sala. A forma da sala é de fundamental importância. Ao projetá-la, fixam-se dois pontos, os focos, que ficam na altura da cabeça das pessoas que vão se comunicar. A seguir, admite-se uma elipse com estes focos e a sala é construída de tal maneira que qualquer plano que passe por esses pontos intercepte a sala segundo uma elipse congruente com a escolhida. Assim, pelas propriedades da elipse, todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos chegarão ao mesmo tempo no outro foco, o que proporciona uma amplificação natural do som.

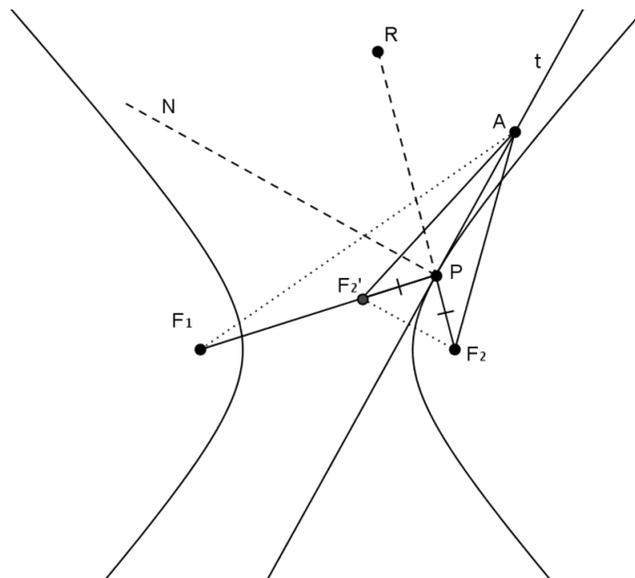
3.3 Aplicações das hipérbolas

Assim como na parábola e elipse, a propriedade de reflexão é verificada também em hipérbolas.

Teorema 3.3 (Propriedade de Reflexão da Hipérbole). *Uma reta tangente à hipérbole em um ponto P faz ângulos iguais com as retas que unem P aos focos.*



Demonstração: Seja P um ponto pertencente a hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, 2a)$, F'_2 um ponto da reta PF_1 com $\overline{F_2P} = \overline{PF'_2}$, t a reta bissetriz ao ângulo $F_2\hat{P}F'_2$ e um ponto A , tal que $A \in t$.



Observe que $AF_1 < AF'_2 + F_1F'_2$ (desigualdade triangular), então

$$AF_1 - AF_2 < AF'_2 + F_1F'_2 - AF_2,$$

mas $AF'_2 = AF_2$, portanto

$$AF_1 - AF_2 < F_1F'_2 = PF_1 - PF'_2 = PF_1 - PF_2 = 2a.$$

Isto é, se considerarmos qualquer ponto da reta r diferente de P , por exemplo o ponto A , teremos $d(A, F_1) - d(A, F_2') < 2a$, portanto não pertencente a hipérbole $\mathcal{H}(F_1, F_2, 2a)$. Como A é um ponto qualquer, existe um único ponto em t pertencente a hipérbole, ou seja t é a reta tangente, e ainda, como t é a bissetriz do ângulo $F_2\widehat{P}F_2'$, qualquer ponto pertencente a reta t tem a mesma distância dos pontos F_2 e F_2' . Deste modo, a reta t é a mediatriz do segmento $\overline{F_2'F_2}$.

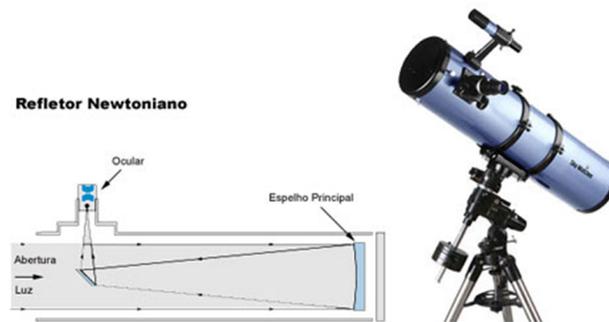
Seja A um ponto qualquer da reta tangente, $F_2F_2' \perp AP \perp NP$ (N é a reta normal), NP e F_2F_2' são retas paralelas e o triângulo PF_2F_2' é isósceles. Como consequência os ângulos em F_2 e F_2' são iguais. Mas o ângulo em F_2 é igual ao ângulo em RPN , pois são correspondentes, e o ângulo em F_2' é igual ao ângulo NPF_1 , alternos internos. Logo $RPN = NPF_1$ que correspondem aos ângulos de reflexão da hipérbole. \square

Desta forma, em uma hipérbole todo raio que partir de um dos focos ao encontrar a curva da hipérbole será refletido em direção ao outro foco. Veremos a seguir que esta propriedade da hipérbole é importante na construção de telescópios refletores.

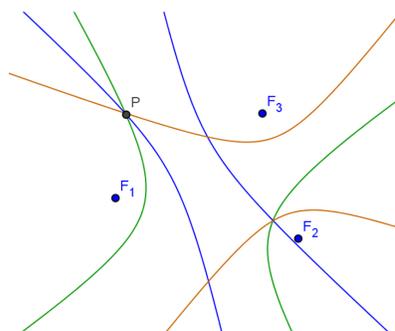
Os primeiros telescópios eram refratores e tinham muitos inconvenientes. As lentes refratárias deformam as imagens que elas reproduzem e ainda, decompõem a luz branca em várias cores produzindo um efeito cromático indesejado.

Posteriormente, apareceram os telescópios refletores, que possibilitam observações mais precisas. Ao contrário do modelo refrator, este tipo de telescópio usa um espelho ao invés de lente como elemento principal. O modelo mais comum é popularmente conhecido como "Newtoniano". Os telescópios refletores são constituídos de um espelho primário parabólico no fundo de um tubo. Nele os raios provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.) formam um feixe praticamente paralelo, que se reflete no espelho parabólico e vai formar a imagem do objeto no foco da parábola.

Neste momento usa-se um espelho secundário hiperbólico, os raios que iriam formar a imagem no foco da parábola são refletidos pelo espelho hiperbólico no qual um dos focos da hipérbole coincide com o foco da parábola. Então, os raios que iriam formar a imagem no foco da parábola são refletidos pelo espelho hiperbólico e então essa imagem será formada no outro foco da hipérbole.



Outra aplicação das propriedades da hipérbole está no sistema de localização denominado *LORAN* (Long Range Navigation), utilizado em navegações de barcos e aviões. Seu princípio básico de funcionamento é considerado simples. Estações de rádios situadas simultaneamente em posições F_1 e F_2 emitem sinais que são recebidos pelo navegante situado numa posição P . O navegante mede a diferença de tempo entre o recebimento dos dois sinais. Isto é o bastante para determinar que a localização em que está pertence a algum ponto P de uma hipérbole. Assim, o navegante pode localizar sua posição se ele receber sinais de três estações de rádios situadas em F_1 , F_2 e F_3 . Cada par de estações informam dois focos que geram uma hipérbole que contém a posição do navegante. Assim, sua posição exata é o ponto onde as três hipérbolas intersectam. Ela pode ser determinada através da plotagem das três hipérbolas em uma mapa obtendo a interseção.



BIBLIOGRAFIA

- [1] ANTON, H., *Cálculo, um novo horizonte, 6ª ed*, Bookman, Porto Alegre (2000).
- [2] BOLDRINI, J.L., COSTA, S.I.R., FIGUEIREDO, V.L., WETZLER, H.G., *Álgebra Linear, 3ª ed*, Harper & Row do Brasil, São Paulo (1980).
- [3] BOULOS, P., CAMARGO, I., *Geometria Analítica. Um Tratamento Vetorial, 3ª ed*, Prentice Hall, São Paulo (2005).
- [4] BOYER, C. B., *História da Matemática*, Edgard Blucher, São Paulo (1974).
- [5] SANTOS, A. R., *Construções Concretas e Geometria Dinâmica: Abordagens interligadas para o Estudo de Cônicas*, SBMAC, São Carlos,SP (2012).
- [6] SANTOS, P. R., BONFIM, L.R.P., *Estudo sobre as Propriedades Geométricas das Cônicas e suas Aplicações*.
- [7] STEINBRUCH, A., WINTERLE, P., *Geometria Analítica, 2ª ed*, Pearson Makron Books, São Paulo (1987).

Teorema Espectral

O Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos é um dos resultados mais relevantes da Álgebra Linear por garantir a existência de uma base ortonormal de autovetores para alguns tipos de operadores. Isto implica que o operador seja diagonalizável, o que facilita bastante em algumas situações, como veremos na mudança de coordenadas de uma equação do segundo grau em duas variáveis.

Um operador linear $T : V \rightarrow V$, num espaço vetorial munido de produto interno, chama-se auto-adjunto quando $T = T^*$, ou seja, quando $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$ para quaisquer $u, v \in V$.

Uma matriz quadrada $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ diz-se simétrica quando é igual à sua transposta \mathbf{a}^T , isto é, quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e todo j . No teorema abaixo é dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, num espaço vetorial de dimensão finita, dotado de produto interno.

Teorema A.1. *$T : V \rightarrow V$ é auto-adjunto se, e somente se, sua matriz $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ relativamente a uma (e portanto a qualquer) base ortonormal $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é uma matriz simétrica.*

Demonstração: $\langle u_i, Tu_j \rangle = [i\text{-ésima coordenada do vetor } Tu_j \text{ na base } \mathcal{U}] = [i\text{-ésimo elemento da } j\text{-ésima coluna de } \mathbf{a}] = a_{ij}$. Portanto a matriz \mathbf{a} é simétrica se, e somente se, $\langle u_i, Au_j \rangle = \langle Au_i, u_j \rangle$ para quaisquer $i, j = 1, \dots, n$. Devido à linearidade de T e à bilinearidade do produto interno, isto equivale a dizer que $\langle u, Tv \rangle = \langle Tu, v \rangle$ para quaisquer $u, v \in V$, ou seja T é auto-adjunto. \square

Como o objetivo deste trabalho é diagonalizar matrizes do tipo 2×2 nos interessa o Teorema Espectral num espaço vetorial de dimensão 2. Assim o teorema espectral pode ser escrito como:

Teorema A.2. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador auto-adjunto num espaço vetorial de dimensão 2, munido de produto interno. Existe uma base ortonormal $\{u_1, u_2\} \subset E$ formada por autovetores de T*

Demonstração: Seja $\{v, w\} \subset V$ uma base ortonormal arbitrária. Em virtude do Teorema A.1, temos $Av = av + bw$, $Aw = bv + cw$. Sabemos que os autovalores de T são as raízes reais do polinômio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$. O discriminante deste trinômio é $\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$. Se $\Delta = 0$ então $b = 0$, $a = c$ e $T = aI$, logo todo vetor não-nulo em V é um autovetor. Se $\Delta > 0$ então o trinômio $P(\lambda)$ possui duas raízes reais distintas λ_1, λ_2 . Isto, como sabemos, quer dizer que os operadores $T - \lambda_1 I$ e $T - \lambda_2 I$ são ambos não invertíveis, logo existem vetores não-nulos (que podemos supor unitários) $u_1, u_2 \in V$ tais que $(T - \lambda_1 I)u_1 = 0$ e $(T - \lambda_2 I)u_2 = 0$, ou seja, $Tu_1 = \lambda_1 u_1$ e $Tu_2 = \lambda_2 u_2$. Assim $\{u_1, u_2\} \subset V$ é uma base ortonormal de autovalores de T . \square