UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PRPGPq

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JORGEMBERG COSTA MARQUES

UMA ABORDAGEM SOBRE A TEORIA DA APROXIMAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS POR NÚMEROS RACIONAIS

FORTALEZA – CEARÁ
2015

JORGEMBERG COSTA MARQUES

UMA ABORDAGEM SOBRE A TEORIA DA APROXIMAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS POR NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

FORTALEZA – CEARÁ
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Marques, Jorgemberg Costa.
Uma abordagem sobre a teoria da aproximação de números reais por números racionais [recurso eletrônico] / Jorgemberg Costa Marques. – 2015.
1 CD-ROM: 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 64 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Frações contínuas. 2. Números irracionais. 3. Números racionais. 4. Teoria da aproximação. I. Título.

JORGEMBERG COSTA MARQUES

UMA ABORDAGEM SOBRE A TEORIA DA APROXIMAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS POR NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 07/08/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará – UFC

À minha avó Alda Gomes, aos meus pais Joaquim e Marli, à minha esposa Fabrícia e aos meus filhos Letícia e Levi.

Em memória de meus avós paternos Antônio Marques de Sousa e Anatália de Albuquerque Marques e de meu avô materno José Luciano Costa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por minha existência e pela existência de pessoas felizes ao meu redor. Agradeço aos meus pais que sempre estiveram presentes em minha vida participando ativamente da minha formação humana. À minha esposa que, junto a mim, enfrenta vigorosamente todos os obstáculos em prol dos nossos filhos por uma vida melhor e digna. Aos meus professores do ensino infantil, fundamental, médio, graduação e pós-graduação meus sinceros agradecimentos, vocês participaram de minha educação profissional e cidadã, e por vezes, foram exemplos inesquecíveis. Aos meus colegas da turma 2013 do curso PROFMAT/UECE que, juntos e corajosamente, superamos grandes desafios nesta jornada de 30 meses. Ao Coordenador Professor Dr. Guilherme Ellery que, de forma exemplar, motivou-nos a participar efetivamente do curso. Ao Professor Dr. José Othon Dantas Lopes pela orientação e motivação dada para execução deste trabalho. Aos demais professores que ministraram este curso os meus sinceros agradecimentos. Agradeço também a UECE pela estrutura física e recursos tecnológicos disponibilizados e a CAPES pelo auxílio financeiro necessário a realização deste curso.

"Apesar das semelhanças superficiais, entre o finito e o infinito existe um abismo."

(N.M.Beskin)

“Uma equação pra mim não tem nenhum significado, a menos que ela expresse um pensamento de Deus.”

(Srinivasa Ramanujan)

“O esforço chama sempre pelos melhores.”

(Sêneca)

RESUMO

A proposta desta dissertação é apresentar um estudo introdutório à teoria da aproximação de números reais por números racionais. Este trabalho investiga a precisão de aproximação de um número irracional por uma sequência infinita de números racionais e explora o papel das frações contínuas neste contexto. Inicialmente, apresenta-se o Enigma de Arquimedes e o número de Metz, os aspectos históricos de cada tema e a revelação dos números racionais encontrados como aproximações racionais ótimas do número π. O trabalho se desenvolve através do estudo feito sobre a precisão de aproximação de um número irracional por uma sequência infinita de números racionais sem o conhecimento prévio das frações contínuas para que posteriormente, de posse deste conhecimento, tal estudo seja retomado com detalhes, incluindo conceitos, propriedades e teoremas que versam sobre aproximações racionais ótimas, convergentes, erro reduzido e vantagem da aproximação. Por fim, este trabalho discute o Enigma de Arquimedes e o surgimento do número de Metz com base nos aspectos históricos e na matemática envolvida.

Palavras chave: Frações contínuas. Números irracionais. Números racionais. Teoria da aproximação.

ABSTRACT

The purpose of this dissertation is to present an introductory study to the theory of approximation of real numbers by rational numbers. This work investigates the precision of approximation of an irrational number by an infinite sequence of rational numbers and explores the role of continued fractions in this context. Initially, it presents the Enigma of Archimedes and the number of Metz, the historical aspects of each topic and the revelation of the rational numbers found as best rational approximations of the number π. The work is developed through the study on the precision of approximation of an irrational number by an infinite sequence of rational numbers without prior knowledge of continued fractions for later, in possession of this knowledge, the study is reassumed with details, including concepts, properties and theorems which focus on best rational approximations, convergence, reduced error and advantage of the approximation. Finally, this work discusses the Enigma of Archimedes and the appearance of the number of Metz based on historical aspects involved and the Mathematics involved.

Keywords: Approximation theory. Continued fractions. Irrational numbers. Rational numbers.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Relatos históricos confirmam o interesse dos matemáticos da antiguidade pelas aproximações. Segundo Boyer (2012), o papiro de Ahmes, cópia de um material que data de aproximadamente 1800 a.C., usa o número racional misto $3\,{}^{1}\!/_{6}$ como um valor aproximado para o número obtido pela razão do comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, atualmente conhecido pela letra grega π. O papiro de Kahun da época da décima segunda dinastia confirma que outros egípcios também usavam $3\,{}^{1}\!/_{6}$ em substituição ao número π. Naquela época, este resultado era bastante elogiável.

O grande matemático grego (quiçá o melhor de todos os tempos) Arquimedes de Siracusa, século II a.C., usava a fração ${}^{22}\!/_{7}$ para substituir, em diversos cálculos, o mesmo número π. Eis o que Arquimedes escreveu sobre o número π em sua obra *Medição do Círculo*: “O perímetro de qualquer círculo é igual ao triplo do seu diâmetro, acrescentado de uma parte menor que um sétimo, mas maior que dez setenta e um avos do diâmetro”.

Conforme Beskin (1987), o fato acima foi amplamente divulgado nas aulas de Geometria em todo o mundo, contudo, os estudantes se habituaram a este fato de tal modo que ninguém suspeita do segredo que ele encerra.

De acordo com Beskin (1987), boa parte dos estudantes da graduação desconhece o fato de que a fração ${}^{22}\!/_{7}$ é a melhor aproximação possível dentre todas as frações cujos denominadores estão compreendidos entre 1 e 56, incluindo estes dois números. Esta aproximação tem um erro absoluto menor que 0,0013 e se analisarmos, esta aproximação é melhor que ${}^{314}\!/_{100}$. Isto torna claro que ${}^{22}\!/_{7}$ é uma excelente escolha de aproximação do número π por frações simples. Consideramos fração simples frações com denominadores “pequenos”.

Conforme Lequain (1993), em meados do século XVI, o holandês Adrien Antoniszoon encontrou uma ótima aproximação para o número π por fração simples, ${}^{355}\!/_{113}$. Este número se aproxima de π com um erro absoluto menor que $2{,}7 * 10^{-7}$, considerando-se o valor pequeno do denominador 113 esta aproximação é de fato surpreendente! O número ${}^{355}\!/_{113}$ só foi divulgado depois de sua morte por seu filho Adriaen de Metz, por este motivo, foi chamado número de Metz. Entretanto, vestígios históricos indicam que tal número já havia sido descoberto pelos babilônios bem antes.

No caso de Arquimedes, suspeitamos que a escolha ${}^{22}\!/_{7}$ em substituição ao número π, não foi por acaso. Então, como foi possível Arquimedes descobrir a fração simples ${}^{22}\!/_{7}$ aponto de utilizá-la em seus cálculos sendo esta a melhor dentre todas as aproximações de π quando comparada às frações com denominadores menores que 57? O que podemos afirmar sobre a precisão de aproximação de números irracionais por uma sequência infinita de números racionais?

A primeira pergunta é conhecida como o Enigma de Arquimedes, a segunda é a motivação do nosso trabalho.

De acordo com Níven (1990, p.99), "Existem números racionais da forma ${}^{a}\!/_{b}$ que diferem de $\sqrt{2}$ por menos de 10^{-10} ou 10^{-20}, ou por menos de números tão pequenos quanto se deseje especificar.". Isto nos leva a pensar que o problema da aproximação está resolvido, mas não é bem assim, pois, conforme Níven (1990) para encontrarmos um número racional ${}^{a}\!/_{b}$ com aproximações bem menores que 10^{-20} de qualquer irracional, necessitamos encontrar uma fração com um denominador da ordem de 10^{20}, ou seja, um racional com denominador bem grande.

O fato é que estas frações se tornariam inviáveis em substituições a números irracionais e, segundo Beskin (1987), tais aproximações com denominadores grandes não seriam vantajosas.

O problema da aproximação se traduz em substituir um número irracional (ou real) por uma fração simples que melhor se aproxime daquele número. A preferência por denominadores pequenos torna possível futuras substituições de irracionais por racionais já que contribui para cálculos mais precisos e rápidos e, desta forma, colabora na solução de problemas em outras áreas do conhecimento tais como Economia, Contabilidade, Engenharia etc.

Desta forma, o amplo conhecimento sobre a teoria da aproximação, especialmente as frações contínuas, beneficia o trabalho de profissionais de diversas áreas que necessitem trabalhar com aproximação de números reais por racionais.

Esta dissertação faz uma abordagem sobre a teoria da aproximação explicitando o papel necessário das frações contínuas neste contexto, pois, de fato, a teoria das frações contínuas revolucionou a teoria da aproximação, conforme Beskin (1987), as frações contínuas são uma das criações mais perfeitas dos matemáticos dos séculos XVII-XVIII, a saber, Huygens, Euler, Lagrange e Legendre.

Este trabalho tem como público alvo professores de matemática da educação básica, alunos do ensino médio bem como profissionais que buscam ampliar seus conhecimentos em matemática.

O objetivo desta dissertação é servir como fonte de pesquisa bibliográfica para o público alvo.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos, a saber: Introdução; Aproximação de números irracionais por infinitos racionais; Frações contínuas; Discussão e Considerações finais.

O capítulo 2 trata de alguns teoremas elementares sobre a aproximação de um número irracional por infinitos racionais de forma lógica e construtiva sem o uso das frações contínuas. O capítulo 3 explicita a expansão de um número real em frações contínuas, as fórmulas de recorrência que expressam frações contínuas, os convergentes como aproximações racionais ótimas, a natureza dos números expressos em frações contínuas, a precisão de aproximação de um número real por seus convergentes, os convergentes como boas aproximações de números reais, e faz uma discussão do Enigma de Arquimedes e do número de Metz sob a ótica da teoria das frações contínuas. O capítulo 4 relata os resultados obtidos neste trabalho. E o capítulo 5 são as considerações finais.

2 APROXIMAÇÕES DE IRRACIONAIS POR INFINITOS RACIONAIS

Este capítulo faz uma análise das precisões obtidas pelos teoremas elementares que tratam das aproximações de números irracionais por números racionais.

Nas seções seguintes, utilizamos os números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ *e* π como exemplos de números irracionais a serem aproximados por números racionais $m/_n$. As ideias descritas servem para quaisquer números irracionais.

Cada seção contém ideias, construções e teoremas que resultam aproximações cada vez melhores de um número irracional por números racionais.

A primeira seção trata da ideia simples de aproximar um número irracional por números inteiros.

2.1 APROXIMAÇÕES POR NÚMEROS INTEIROS

Aproximar um número irracional α por um número inteiro requer encontrar o número inteiro mais próximo de α. Sabemos que α está compreendido entre dois inteiros consecutivos *m e m+1*, além disso, α não pode estar na metade do segmento de reta que une estes dois inteiros já que este ponto corresponde ao número racional $m + {}^1/_2$. Assim, α está mais próximo de um dos inteiros citados, *m ou m+1*.

Observe que $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ está mais próximo do número 1 do que do número 2. Observe também que o número $\sqrt{3} = 1{,}73205080\ldots.$ está mais próximo do número 2 do que do número 1. Interessante o fato de $\pi = 3{,}141592\ldots$ está mais próximo do número 3 do que do número 4.

Teorema 2.1.1 Para qualquer número irracional $\boldsymbol{\alpha}$, existe um único inteiro $\boldsymbol{m}$ tal que $|\boldsymbol{\alpha - m}| < {}^1/_2$.

Demonstração:

Seja α um número irracional e AB um segmento de reta tal que A corresponda ao número $\alpha - {}^1/_2$ e B corresponda ao número $\alpha + {}^1/_2$ na reta real. Por construção, AB é unitário e como α é irracional segue que $\alpha - {}^1/_2$ e $\alpha + {}^1/_2$ também são irracionais.

Desta forma, AB contém um número inteiro, digamos *m*. Assim, $\alpha - {}^1/_2 < m < \alpha + {}^1/_2$, subtraindo α na desigualdade temos $-{}^1/_2 < m - \alpha < {}^1/_2$, isto implica, $-{}^1/_2 < \alpha - m < {}^1/_2$, portanto $|\alpha - m| < {}^1/_2$, como queríamos demonstrar.

(Unicidade)

Suponha que exista outro inteiro n satisfazendo $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{n}| < \mathbf{1}/\mathbf{2}$ então $-1/2 < n - \alpha < 1/2$, logo $\alpha - 1/2 < n < \alpha + 1/2$, isto implica que n pertence a AB. Temos também $\alpha - 1/2 < m < \alpha + 1/2$ pois m também pertence a AB. Subtraindo as duas últimas desigualdades obtemos $0 < n - m < 0$, segue $n - m = 0$, ou seja, $n = m$, absurdo. Portanto, o segmento AB contém um único inteiro. ■

2.2 APROXIMAÇÕES POR NÚMEROS RACIONAIS

Considerando a aproximação de um irracional qualquer por racionais, podemos observar que se pudéssemos marcar todas as frações de denominador n, o número α estará sempre entre duas dessas frações:

$$\frac{m-1}{n} < \alpha < \frac{m}{n}$$

Como α é um número irracional, este intervalo é estrito e, além disso, α não pode ser o ponto médio deste intervalo, já que este ponto corresponde a um número racional. Dentre estas duas frações escolhe-se a que está mais próxima de α.

Denotamos *erro da aproximação* o valor $\Delta = \alpha - \frac{m}{n}$ e *erro absoluto da aproximação* o valor $|\Delta|$. Dizemos que a aproximação é por defeito se $\Delta > 0$ e a aproximação é por excesso, se $\Delta < 0$.

Como α não pode ser o ponto médio do intervalo $(\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n})$, o limite superior do erro absoluto é $\frac{1}{2n}$.

Dizemos que a aproximação de um irracional por um racional $\frac{m}{n}$ é vantajosa se, tendo um denominador pequeno, esse racional esteja bem próximo de α tal que o erro absoluto, em função do denominador n, seja substancialmente menor do que se poderia esperar. Mais adiante, apresentaremos uma definição mais precisa sobre vantagem de uma aproximação.

Prosseguindo com a busca por melhores precisões, temos a seguinte aproximação para o número $\sqrt{\mathbf{2}}$:

$5.\sqrt{2} = 7{,}071067\ldots$, daí pelo teorema 2.2.1, 7 é o único inteiro mais próximo deste número tal que $-1/2 < 5.\sqrt{2} - 7 < 1/2$. Segue $-1/10 < \sqrt{2} - 7/5 < 1/10$, desta forma, $\left|\sqrt{\mathbf{2}} - \mathbf{7}/\mathbf{5}\right| < \mathbf{1}/\mathbf{10}$.

Na construção acima, utilizamos o inteiro mais próximo de um múltiplo da raiz e o fator multiplicativo da raiz é o denominador da fração que fazemos aproximar do número irracional. Portanto, o número irracional pode ser aproximado por frações de qualquer denominador natural que desejarmos.

Podemos nos aproximar do número irracional por um erro absoluto menor que $1/_{2.n}$, sendo *n* o denominador da fração considerada pela construção acima. Utilizamos esta ideia para enunciarmos o próximo teorema.

Teorema 2.2.1 Seja $\boldsymbol{\alpha}$ um número irracional qualquer e $\boldsymbol{n}$ um número inteiro positivo qualquer. Então existe um número racional de denominador $\boldsymbol{n}$, digamos $\boldsymbol{m/n}$, tal que $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{m/n}| < \mathbf{1}/\boldsymbol{2n}$.

Demonstração:

Sendo α um número irracional e *n* um número inteiro positivo, temos que $\alpha.n$ é irracional. Pelo teorema 2.1.1, existe um único inteiro *m* tal que $-1/2 < \alpha.n - m < 1/2$, dividindo a desigualdade por *n* temos, $-\mathbf{1}/\boldsymbol{2n} < \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{m/n} < \mathbf{1}/\boldsymbol{2n}$. ■

Outra demonstração:

Considere um número irracional α e as frações de denominador *q* inteiro positivo, desta forma α está entre duas dessas frações consecutivas, isto é, $p/q < \alpha < (p+1)/q$.

Como α é irracional, α não é o ponto médio do intervalo $[p/q\,, (p+1)/q]$, assim, α está mais próximo de um dos extremos p/q *ou* $(p+1)/q$, daí, $|\alpha - p/q| < 1/_{2.q}$ *ou* $\left|\alpha - (p+1)/q\right| < 1/_{2.q}$. Tomemos nosso (racional) m/n como sendo a fração correspondente ao extremo do intervalo $[p/q\,, (p+1)/q]$ mais próximo de α. ■

Como *n* é qualquer inteiro positivo, este teorema prova a existência de infinitos racionais que se aproximam de um irracional qualquer com um erro absoluto menor que $1/2n$.

Observe que a precisão da aproximação passa a ser dada em função do denominador n da fração a qual usamos para aproximar.

Exemplos: Ache números racionais m/n que se aproximam de π tais que $|\pi - m/n| < 1/2n$, para os casos em que $n = 2, 3, 5, 7\ e\ 10$.

Para $n = 2$, temos: $2.\pi = 6{,}283185307179586\ldots$., daí, o número inteiro mais próximo é 6, utilizando o teorema 2, obtemos: $\left|\pi - 6/2\right| < 1/(2.2)$, isto é, $|\pi - 3| < 1/4$, o número encontrado é 3.

Para $n = 3$, temos: $3.\pi = 9{,}42477796076938\ldots$ daí, o número inteiro mais próximo é 9, utilizando o teorema 2, obtemos: $\left|\pi - 9/3\right| < 1/(2.3)$, isto é, $\left|\pi - 9/2\right| < 1/6$, o número encontrado é $9/2$.

Para $n = 5$, temos: $5.\pi = 15{,}707963267948966\ldots$ daí, o número inteiro mais próximo é 16, utilizando o teorema 2, obtemos: $\left|\pi - 16/5\right| < 1/(2.5)$, isto é, $\left|\pi - 16/5\right| < 1/10$, o número encontrado é $16/5$.

Para $n = 7$, temos: $7.\pi = 21{,}991148575128552\ldots$ daí, o número inteiro mais próximo é 22, utilizando o teorema 2, obtemos: $\left|\pi - 22/7\right| < 1/(2.7)$, isto é, $\left|\pi - 22/7\right| < 1/14$, o número encontrado é $22/7$.

Para $n = 10$, temos: $10.\pi = 31{,}41592653589793\ldots$ daí, o número inteiro mais próximo é 31, utilizando o teorema 2, obtemos: $\left|\pi - 31/10\right| < 1/(2.10)$, isto é, $\left|\pi - 31/10\right| < 1/20$, o número encontrado é $31/10$.

Percebemos que, com alguns cálculos simples feitos em calculadora básica, podemos constatar que a fração $22/7$ possui uma aproximação por excesso de π com um erro absoluto menor que 0,0013, entretanto, o teorema 2.2.1 afirma que $22/7$ se aproxima de π com um erro absoluto menor que $0{,}071428571428571 = 1/14$. Como $0{,}0013 < 1/14$, isto reflete “falta de precisão” do teorema 2.2.1. Tais observações motivaram os matemáticos a aprimorarem mais a teoria da aproximação.

É o que veremos nas próximas seções.

2.3 APROXIMAÇÕES MELHORES

A busca por precisões que garantam melhores aproximações trouxe bons resultados, contudo, o problema do denominador grande persistia. Não existiria vantagem se encontrássemos racionais muito próximos do irracional escolhido e que apresentasse um denominador muito grande. Tais racionais seriam “descartados”.

Neste contexto, os matemáticos relacionaram o erro absoluto $|\Delta| = |\alpha - {}^{m}/_{n}|$ a uma expressão dada em função do denominador da fração que se está usando para aproximar. Tal interesse retrata a ideia de vantagem da aproximação.

O próximo teorema prova que para qualquer irracional existe um racional que se aproxima daquele a menos de ${}^{1}/_{k.n}$, sendo k um inteiro positivo qualquer e $n \leq k$.

Agora, seguiremos com os demais teoremas e alguns exemplos.

Teorema 2.3.1 Quaisquer que sejam o número irracional α e o inteiro positivo k, existe um número racional ${}^{m}/_{n}$, cujo denominador não excede k, tal que $|\alpha - {}^{m}/_{n}| < {}^{1}/_{nk}$

Demonstração:

Dado um número irracional $\boldsymbol{\alpha}$ e um inteiro positivo k, escrevemos os k números $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{3}\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{4}\boldsymbol{\alpha}, \ldots, \boldsymbol{k\alpha}$ sob a forma $a_i + b_i$ com $i = 1,2, \ldots, k$, sendo a_i a parte inteira e b_i a parte fracionária. Daí temos:

- $\alpha = a_1 + b_1$
- $2\alpha = a_2 + b_2$
- $3\alpha = a_3 + b_3$

  ....

- $k\alpha = a_k + b_k$

Dividimos o intervalo $[0,1]$ em k partes $I_1, I_2, \ldots, I_K,$ cada um com comprimento ${}^{1}/_{k}$. Cada intervalo considerado é aberto nos extremos, assim, o primeiro intervalo é $I_1 = (0, {}^{1}/_{k})$, o segundo é $I_2 = ({}^{1}/_{k}, {}^{2}/_{k})$ e assim sucessivamente até $I_K = ({}^{(k-1)}/_{k}, 1)$.

Observe que cada b_i dado por $b_i = i\alpha - a_i$, $i = 1,2, \ldots, k$ é irracional pois é soma algébrica de um número racional com um número irracional, além disso $b_i \in (0,1)$ $para\ todo\ i = 1,2, \ldots, k$.

Temos k números para k intervalos, logo, temos dois casos a considerar:

1º caso: O intervalo $I_1 = (0, {}^{1}/_{k})$ contém algum b_i.

Consideremos tal elemento como $b_n, n \le k$. . Assim, $b_n = n\alpha - a_n \in I_1 = (0, {}^1/_k)$, logo, $0 < n\alpha - a_n < {}^1/_k$, segue $-{}^1/_k < n\alpha - a_n < {}^1/_k$, daí, $-{}^1/_{nk} < \alpha - {}^{a_n}/_n < {}^1/_{nk}$, isto é, $|\alpha - {}^m/_n| < {}^1/_{nk}$, sendo $m = a_n$ e $n \le k$.

2º caso: O intervalo $I_1 = (0, {}^1/_k)$ não contém nenhum b_i.

Neste caso, existem k-1 intervalos para k números e, pelo Princípio de Dirichlet, um dos intervalos restantes conterá pelo menos dois números, digamos $b_i e b_j$ com $i \neq j$. Como b_i e b_j são distintos e pertecem a um mesmo intervalo segue $|b_i - b_j| < {}^1/_k$. Suponha i>j daí, $|(i\alpha - a_i) - (j\alpha - a_j)| < {}^1/_k$, logo $|(i-j)\alpha - (a_j - a_i)| < {}^1/_k$. Tomemos $n = i - j \le k$. e m=$a_j - a_i$. Assim, $|n\alpha - m| < {}^1/_k$. Como n é inteiro positivo, dividindo a desigualdade por *n* obtemos $|\alpha - {}^m/_n| < {}^1/_{kn}$ com $n = (i-j) \le k$. ■

Exemplos: Aplique o método dado na demonstração do último teorema para o irracional e seu respectivo valor *k* obtendo uma fração ${}^m/_n$ que satisfaça as desigualdades do referido teorema para cada um dos itens abaixo.

(a) $\alpha = \sqrt{3}$ e $k = 4$.

Temos os múltiplos: $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$ e $4\sqrt{3}$. Os intervalos são: $I_1 = (0, {}^1/_4), I_2 = ({}^1/_4, {}^1/_2), I_3 = ({}^1/_2, {}^3/_4)$ e $I_1 = ({}^3/_4, 1)$. Calculando os b_i´s temos:

- $b_1 = \sqrt{3} - 1 = 0{,}732 \ldots \in I_3 = ({}^1/_2, {}^3/_4)$
- $b_2 = 2\sqrt{3} - 3 = 0{,}464 \ldots \in I_2 = ({}^1/_4, {}^1/_2)$
- $b_3 = 3\sqrt{3} - 5 = 0{,}196 \ldots \in I_1 = (0, {}^1/_4)$
- $b_4 = 4\sqrt{3} - 6 = 0{,}928 \ldots \in I_4 = ({}^3/_4, 1)$

Temos $b_3 \in I_1 = (0, {}^1/_4)$, logo $|3\sqrt{3} - 5| < {}^1/_4$, segue $|\sqrt{3} - {}^5/_3| < {}^1/_{12}$, deste modo a fração encontrada é ${}^5/_3$ e esta fração se aproxima de $\sqrt{3}$ por um erro menor que ${}^1/_{12}$.

(b) $\alpha = \sqrt{2}$ e $k = 6$.

Temos os múltiplos: $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 6\sqrt{2}$. Os intervalos são: $I_1 = (0, {}^1/_6), I_2 = ({}^1/_6, {}^1/_3), I_3 = ({}^1/_3, {}^1/_2), I_4 = ({}^1/_2, {}^2/_3), I_5 = ({}^2/_3, {}^5/_6), I_6 = ({}^5/_6, 1)$. Calculando os b_i´s temos:

- $b_1 = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414 \ldots \in I_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$
- $b_2 = 2\sqrt{2} - 2 = 0{,}828 \ldots \in I_5 = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right)$
- $b_3 = 3\sqrt{2} - 4 = 0{,}242 \ldots \in I_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$
- $b_4 = 4\sqrt{2} - 5 = 0{,}656 \ldots \in I_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$
- $b_5 = 5\sqrt{2} - 7 = 0{,}071 \ldots \in I_1 = \left(0, \frac{1}{6}\right)$
- $b_6 = 6\sqrt{2} - 8 = 0{,}485 \ldots \in I_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

Temos $b_5 \in I_1 = \left(0, \frac{1}{6}\right)$, logo $|5\sqrt{2} - 7| < \frac{1}{6}$, segue $\left|\sqrt{2} - \frac{7}{5}\right| < \frac{1}{30}$, deste modo, a fração encontrada é $\frac{7}{5}$ e esta fração se aproxima de $\sqrt{2}$ por um erro menor que $\frac{1}{30}$.

(c) $\alpha = \pi$ e $k = 8$.

Temos os múltiplos: $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi$ e 8π.. Os intervalos são: $I_1 = \left(0, \frac{1}{8}\right), I_2 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right), I_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right), I_4 = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right), I_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right), I_6 = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right), I_7 = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right), I_8 = \left(\frac{7}{8}, 1\right)$. Calculando os b_i´s temos:

- $b_1 = \pi - 3 = 0{,}141 \ldots \in I_2 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$
- $b_2 = 2\pi - 6 = 0{,}283 \ldots \in I_3 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$
- $b_3 = 3\pi - 9 = 0{,}424 \ldots \in I_4 = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$
- $b_4 = 4\pi - 12 = 0{,}566 \ldots \in I_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$
- $b_5 = 5\pi - 15 = 0{,}707 \ldots \in I_6 = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right)$
- $b_6 = 6\pi - 18 = 0{,}849 \ldots \in I_7 = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$
- $b_7 = 7\pi - 21 = 0{,}991 \ldots \in I_8 = \left(\frac{7}{8}, 1\right)$
- $b_8 = 8\pi - 25 = 0{,}132 \ldots \in I_2 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

Observe que não existe nenhum $b_i \in I_1 = \left(0, \frac{1}{8}\right)$ para $i = 1, 2, \ldots, 8$, entretanto, temos $b_1, b_8 \in I_2 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$, e pelo teorema 3, $|(8\pi - 25) - (\pi - 3)| < \frac{1}{8}$, deste modo $|7\pi - 22| < \frac{1}{8}$, o que implica $\left|\pi - \frac{22}{7}\right| < \frac{1}{56}$.

Portanto, a fração encontrada é $\frac{22}{7}$ e esta fração se aproxima de π com um erro absoluto menor que $\frac{1}{56}$. Observe que a precisão do teorema 2.3.1 melhorou consideravelmente em relação à precisão do teorema 2.2.1, pois, neste teorema, o erro da aproximação de π para a mesma fração $22/7$ foi menor que $1/14$.

No teorema seguinte, faremos a comparação do erro absoluto $|\Delta|$ com uma expressão que envolve somente a variável *n* (denominador) da fração que usamos para aproximar.

Teorema 2.3.2 Quaisquer que seja o número irracional α, existem infinitos racionais m/n, em forma irredutível, tais que $|\alpha - m/n| < 1/n^2$.

Demonstração:

Primeiramente, mostraremos que existe um racional m/n tal que $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{m}/\boldsymbol{n}| < \mathbf{1}/\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}$. Pelo teorema 2.3.1, quaisquer que sejam o número irracional α e o inteiro positivo *k*, existe um número racional m/n, cujo denominador não excede *k*, tal que $|\alpha - m/n| < 1/nk$. Como $|\alpha - m/n| < 1/nk$ $e\ n \leq k$, $temos$ $|\alpha - m/n| < 1/nk \leq 1/n^2$.

Mostraremos agora, que se m/n, com *m* e *n* não relativamente primos, satisfizer a desigualdade do teorema 2.3.2, sua forma irredutível m_1/n_1 também satisfará.

Seja m/n, uma fração, com *m* e *n* não relativamente primos, que satisfaz a desigualdade do teorema 4 e seja m_1/n_1 a sua forma irredutível. Daí, $m/n = m_1/n_1$ com $0 < n_1 < n$. Logo, $|\alpha - m_1/n_1| = |\alpha - m/n| < 1/n^2 < 1/{n_1}^2$.

Para finalizar, demonstraremos que existem infinitos racionais m/n, em forma irredutível, satisfazendo a desigualdade do teorema 2.3.2.

A prova é por contradição.

Suponha que exista apenas um número finito de racionais m/n, em forma irredutível, satisfazendo a desigualdade do teorema 2.3.2.

$$m_1/n_1, m_2/n_2, m_3/n_3, \dots, m_i/n_i$$

Consideremos os *i* números irracionais,

$$\alpha - m_1/n_1, \alpha - m_2/n_2, \alpha - m_3/n_3, \dots, \alpha - m_i/n_i$$

Obviamente, dentre os números supracitados existem positivos e negativos. Escolhamos um inteiro $k > 0$ tal que $1/k$ seja menor que todos os positivos e $-1/k$ seja maior que todos os negativos. Daí, são falsas as desigualdades $\left|\alpha - m_p/n_p\right| < 1/k$, $para\ todo\ p = 1,2, \dots, i$.

Aplicando o teorema 2.3.1 para este valor k, obtemos um racional p/q tal que $|\alpha - p/q| < 1/kn < 1/k$. Assim, como todas as desigualdades $\left|\alpha - m_p/n_p\right| < 1/k$, $para\ todo\ p = 1, 2, \dots, i$, são falsas, segue que p/q é diferente de todos os racionais m_p/n_p, $para\ todo\ p = 1, 2, \dots, i$.

Como p/q satisfaz $|\alpha - p/q| < 1/kn < 1/n^2$ e é diferente de todos os racionais m_p/n_p, $para\ todo\ p = 1, 2, \dots, i$, encontramos um novo racional, contrariando a hipótese inicial. ■

Exemplos: Encontre pelo menos duas aproximações racionais (na forma irredutível) para cada um dos números irracionais π, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ que satisfaz o teorema 2.3.2.

a. Aproximações do número $\sqrt{2}$

Aplicando as técnicas do teorema 2.2.1, obtemos:

$$|\sqrt{2} - 1| < 1/2$$

$$|2\sqrt{2} - 2| < 1/2 \rightarrow |\sqrt{2} - 1| > 1/4$$

$$|3\sqrt{2} - 4| < 1/2 \rightarrow |\sqrt{2} - 4/3| < 1/9 = 1/3^2$$

$$|4\sqrt{2} - 5| < 1/2 \rightarrow \left|\sqrt{2} - 5/4\right| > 1/16$$

$$|5\sqrt{2} - 7| < 1/2 \rightarrow \left|\sqrt{2} - 7/5\right| < 1/25 = 1/5^2$$

Assim, $4/3$ e $7/5$ são exemplos de frações procuradas.

b. Aproximações do número $\sqrt{3}$

Aplicando as técnicas do teorema 2.2.1, obtemos:

$$|\sqrt{3} - 2| < 1/2$$

$$|2\sqrt{3} - 3| < 1/2 \rightarrow |\sqrt{3} - 3/2| < 1/4 = 1/2^2$$

$$|3\sqrt{3} - 5| < 1/2 \rightarrow \left|\sqrt{3} - 5/3\right| < 1/9 = 1/3^2$$

$$|4\sqrt{3} - 7| < 1/2 \rightarrow |\sqrt{3} - 7/4| < 1/16 = 1/4^2$$

Assim, $3/2$, $5/3$ e $7/4$ são exemplos de frações procuradas.

c. Aproximações do número π.

Aplicando as técnicas do teorema 2.2.1, obtemos:

$$|\pi - 3| < 1/2$$

$$|2\pi - 6| < 1/2 \rightarrow |\pi - 3| < 1/4$$

$$|3\pi - 9| < 1/2 \rightarrow |\pi - 3| < 1/6$$

$$|4\pi - 13| < 1/2 \rightarrow |\pi - 13/4| > 1/16$$

$$|5\pi - 16| < 1/2 \rightarrow \left|\pi - 16/5\right| > 1/25$$

$$\boldsymbol{|6\pi - 19| < 1/2 \rightarrow |\pi - 19/6| < 1/36}$$

$$\boldsymbol{|7\pi - 22| < 1/2 \rightarrow |\pi - 22/7| < 1/49}$$

Assim, $19/6$ e $22/7$ são exemplos de frações procuradas.

2.4 APROXIMAÇÕES AINDA MELHORES

Nesta seção, apresentaremos as versões mais fortes dos dois últimos teoremas apresentados.

Teorema 2.4.1 Quaisquer que sejam o número irracional α e o inteiro positivo k, existe um número racional m/n, cujo denominador não excede k, tal que $|\alpha - m/n| < 1/n(k+1)$.

Demonstração:

Dado um número irracional $\boldsymbol{\alpha}$ e um inteiro positivo k, escrevemos os k números $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{2\alpha}, \boldsymbol{3\alpha}, \boldsymbol{4\alpha}, \dots, \boldsymbol{k\alpha}$ sob a forma $a_i + b_i$ com $i = 1,2,\dots,k$, sendo a_i a parte inteira e b_i a parte fracionária. Daí temos:

- $\alpha = a_1 + b_1$
- $2\alpha = a_2 + b_2$
- $3\alpha = a_3 + b_3$

  ....

- $k\alpha = a_k + b_k$

Dividimos o intervalo $[0,1]$ em *k+1* partes $I_1, I_2, \dots, I_{K+1}$, cada um com comprimento $1/k+1$. Cada intervalo considerado é aberto nos extremos, assim, o primeiro intervalo é $I_1 = (0, 1/k+1)$, o segundo é $I_2 = (1/k+1, 2/k+2)$ e assim sucessivamente até $I_{K+1} = (k/k+1, 1)$.

Observe que cada b_i dado por $b_i = i\alpha - a_i$, $i = 1,2,\dots,k$ é irracional pois é soma algébrica de um número racional com um número irracional, além disso $b_i \epsilon (0,1)$ $para\ todo\ i = 1,2,\dots,k$.

Temos k números para $k + 1$ intervalos, logo, temos três casos a considerar:

1º caso: O intervalo $I_1 = (0, {}^{1}/_{k+1})$ contém algum b_i.

Consideremos tal elemento como b_n, $n \leq k$. Assim, $b_n = n\alpha - a_n \epsilon I_1 = (0, {}^{1}/_{k+1})$, logo, $0 < n\alpha - a_n < {}^{1}/_{k+1}$, segue $-{}^{1}/_{k+1} < n\alpha - a_n < {}^{1}/_{k+1}$, daí, $-{}^{1}/_{n(k+1)} < \alpha - {}^{a_n}/_{n} < {}^{1}/_{n(k+1)}$, isto é, $|\alpha - {}^{m}/_{n}| < {}^{1}/_{n(k+1)}$, sendo $m = a_n\ e\ n \leq k$.

2º caso: O intervalo $I_{k+1} = ({}^{k}/_{k+1}, 1)$ contém algum b_i.

Consideremos tal elemento como b_n, $n \leq k$. . Assim, $b_n = n\alpha - a_n \epsilon I_1 = (0, {}^{1}/_{k+1})$, logo, $0 < n\alpha - a_n < {}^{1}/_{k+1}$, segue $-{}^{1}/_{k+1} < n\alpha - a_n < {}^{1}/_{k+1}$, daí, $-{}^{1}/_{n(k+1)} < \alpha - {}^{a_n}/_{n} < {}^{1}/_{n(k+1)}$, isto é, $|\alpha - {}^{m}/_{n}| < {}^{1}/_{n(k+1)}$, sendo $m = a_n\ e\ n \leq k$.

3º caso: Os intervalos $I_1 = \left(0, {}^{1}/_{k+1}\right) e\ I_{k+1} = ({}^{k}/_{k+1}, 1)$ não contém nenhum b_i.

Neste caso, existem k-1 intervalos para k números e, pelo Princípio de Dirichlet, um dos intervalos restantes conterá pelo menos dois números, digamos $b_i e b_j$ com $i \neq j$. Como $b_i\ e\ b_j$ são distintos e pertecem a um mesmo intervalo segue $|b_i - b_j| < {}^{1}/_{k+1}$. Suponha i>j daí, $|(i\alpha - a_i) - (j\alpha - a_j)| < {}^{1}/_{k+1}$, logo $|(i-j)\alpha - (a_j - a_i)| < {}^{1}/_{k+1}$. Tomemos $n = i - j \leq k$. e $m = a_j - a_i$. Assim, $|n\alpha - m| < {}^{1}/_{k+1}$. Como n é inteiro positivo, dividindo a desigualdade por n, obtemos $|\alpha - {}^{m}/_{n}| < {}^{1}/_{n(k+1)}$, com $n = (i - j) \leq k$. ■

Teorema 2.4.2 Quaisquer que seja o número irracional α, existem infinitos racionais ${}^{m}/_{n}$, em forma irredutível, tais que $|\alpha - {}^{m}/_{n}| < {}^{1}/_{n(n+1)}$.

Demonstração:

Primeiramente, mostraremos que existe racional m/n tal que $\boldsymbol{|\alpha - m/n| < 1/n(n+1)}$. Pelo teorema 2.4.1, quaisquer que sejam o número irracional α e o inteiro positivo *k*, existe um número racional m/n, cujo denominador não excede *k*, tal que

$\boldsymbol{|\alpha - m/n| < 1/n(k+1)}$. Como $|\alpha - m/n| < 1/n(k+1)$ $e\ n+1 \leq k+1$, $temos\ |\alpha - m/n| < 1/n(k+1) \leq 1/n(n+1)$.

Mostraremos agora, que se m/n, com *m* e *n* não relativamente primos, satisfizer a desigualdade do teorema 2.4.1, sua forma irredutível m_1/n_1 também satisfará.

Seja m/n, uma fração, com *m* e *n* não relativamente primos, que satisfaz a desigualdade do teorema 2.4.1 e seja m_1/n_1 a sua forma irredutível. Daí, $m/n = m_1/n_1$ com $0 < n_1 < n$. Logo, $|\alpha - m_1/n_1| = |\alpha - m/n| < 1/n(n+1) < 1/n_1(n_1+1)$.

Para finalizar, demonstraremos que existem infinitos racionais m/n, em forma irredutível, satisfazendo a desigualdade do teorema 2.4.2.

A prova é por contradição.

Suponha que exista apenas um número finito de racionais m/n em sua forma irredutível satisfazendo a desigualdade do teorema 2.4.2.

$$m_1/n_1, m_2/n_2, m_3/n_3, \dots, m_i/n_i$$

Consideremos os *i* números irracionais,

$$\alpha - m_1/n_1, \alpha - m_2/n_2, \alpha - m_3/n_3, \dots, \alpha - m_i/n_i$$

Obviamente, dentre os números supracitados existem positivos e negativos. Escolhamos um inteiro $k > 0$ tal que $1/k$ seja menor que todos os positivos e $-1/k$ seja maior que todos os negativos. Daí, são falsas as desigualdades $\left|\alpha - m_p/n_p\right| < 1/k,\ para\ todo\ p = 1,2,\dots,i.$

Aplicando o teorema 2.4.1 para este valor k, obtemos um racional p/q tal que $|\alpha - p/q| < 1/n(k+1) < 1/k$. Assim, como todas as desigualdades $\left|\alpha - m_p/n_p\right| < 1/k,\ para\ todo\ p = 1,2,\dots,i$, são falsas, segue que p/q é diferente de todos os racionais $m_p/n_p,\ para\ todo\ p = 1,2,\dots,i.$

Como $^p/_q$ satisfaz $|\alpha - {^p/_q}| < {^1/_{n(k+1)}} < {^1/_{n(n+1)}}$ e é diferente de todos os racionais $^{m_p}/_{n_p}$, $para\ todo\ p = 1, 2, \dots, i$, encontramos um novo racional, contrariando a hipótese inicial. ■

De acordo com o que investigamos até agora, qual será o limite da precisão de aproximação de um número irracional por uma sequência infinita de números racionais? Será que dado um número irracional qualquer $\boldsymbol{\alpha}$ e um inteiro qualquer $\boldsymbol{k} > 1$, existem infinitos racionais $\boldsymbol{^m/_n}$ tais que $\boldsymbol{|\alpha - {^m/_n}| < {^1/_{kn^2}}}$**?** Para $k = 2$, a resposta é sim. Para k inteiro, $k > 2$, a resposta é não. Se considerarmos k um número real o estudo se tornará mais complexo e bem mais interessante. Uma análise sobre a precisão da aproximação de um número real por números racionais exige o conhecimento prévio sobre frações contínuas. Mais adiante, de posse deste conhecimento, demonstraremos o caso $k = 2$ e apresentaremos alguns teoremas que tratam sobre o caso $k > 2$, sendo k um número real.

Observe que o método, até aqui utilizado, consiste em dividir o intervalo unitário $[p, p+1]$ que contém o número irracional α em k partes iguais e testar para cada fração cujo denominador natural é menor ou igual do que k, as que melhor se aproximam de α sob as condições dos teoremas apresentados. De um modo geral, esta ideia simples retrata a construção da sequencia de aproximações racionais de um número real qualquer α idealizada pelo matemático Huygens. O método de Huygens será apresentado no próximo capítulo.

O estudo das frações contínuas e suas aplicações proporcionaram um avanço significativo na teoria da aproximação. Conforme Yves Lequain (2000, p.5), “Com este estudo, o conceito ganhou muito em importância, pois ficou claro que ele poderia ser usado para resolver problemas novos, tanto na teoria dos números como na análise.”.

Na próxima seção, exploraremos as frações contínuas.

3 FRAÇÕES CONTÍNUAS

Para um melhor entendimento sobre a teoria da aproximação, faz-se necessária a compreensão de que, para qualquer aproximação feita, o interesse maior é pelo denominador *n* da fração $m/_n$ usada para aproximar e não pelo seu numerador.

> Sendo assim, o problema da aproximação de números reais pode ser formulado do seguinte modo: encontrar a expressão aproximada do número real α sob a forma de uma fração de denominador q significa determinar qual de todas as frações de denominador q está mais próxima de α. (BESKIN, 1987, p. 10).

Desta forma, dado um número irracional $\alpha>1$ e excluída a sua parte inteira, encontrar $m_1/_n$ que melhor se aproxime do novo irracional (digamos α_1) faz com que a busca pelo numerador da fração $m/_n$ que melhor se aproxime de α, seja apenas um detalhe.

> Não há razão para considerar o número $391/_4 = 97\,3/_4$ mais complicado que $3/_4$. Poderíamos limitar-nos a estudar as características dos números do segmento [0,1]: em cada segmento $[n, n+1]$ repete-se o mesmo quadro. Eis a razão porque, ao avaliarmos o grau de complexidade de uma fração, nos interessamos pelo seu denominador, e não pelo numerador (BESKIN, 1987, p. 10).

Para uma melhor compreensão da teoria da aproximação, definiremos o conceito de aproximação racional ótima de um número real α.

Aproximação racional ótima de um número real α.

Seja α um número real. Seja Ω um número racional e $c/_d$ sua forma irredutível. O número Ω é dito uma aproximação racional ótima de α se

$$\begin{cases} \left|\alpha - c/_d\right| < \left|\alpha - a/_b\right| \; para\ todo\ a/_b \in Q, 1 \le b < d \\ \left|\alpha - c/_d\right| \le \left|\alpha - a/_d\right| \; para\ todo\ a \in Z \end{cases}$$

A seguir, apresentamos o método do matemático Huygens (séc. XVII) que consiste em construir a sequencia das n primeiras aproximações racionais ótimas de um número real α.

<u>O método de Huygens</u>

Se α é da forma $\alpha = \frac{2k+1}{2}$ com k inteiro, então a sequencia é imediatamente construída: $k, k+1, \frac{2k+1}{2}$. Para um número α que não é do tipo $\frac{2k+1}{2}$, façamos a seguinte construção indutiva: Dos dois números $\lfloor\alpha\rfloor\ e\ \lfloor\alpha\rfloor + 1$, escolhemos aquele que for o mais próximo de α, este é a primeira aproximação racional ótima de α, chamamos θ_0 com denominador 1. Por indução, supomos ter encontrado $\theta_0, \dots, \theta_{r-1}$, e θ_{r-1} com denominador

d_{r-1}, na sua forma irredutível. Se $\alpha = \theta_{r-1}$ então já encontramos a sequencia. Caso contrário, dividimos o segmento $(\lfloor\alpha\rfloor, \lfloor\alpha\rfloor + 1)$ sucessivamente em $d_{r-1} + 1, d_{r-1} + 2, \ldots, até\ d_{r-1} + n$, quando nesta última divisão encontramos um ponto cuja distância deste a α é menor que a distância entre o ponto θ_{r-1} e α. Desta forma, por construção, este ponto é a aproximação racional ótima θ_r de α procurada e o denominador de sua forma irredutível é $d_r = d_{r-1} + n$.

Apesar do método de Huygens ser claro, este se apresenta operacionalmente ineficaz para o cálculo das aproximações racionais ótimas de um número real α. Basta observarmos as seis primeiras aproximações da sequencia infinita das aproximações racionais ótimas do número π: $\mathbf{3/1}, 13/4, 16/5, 19/6, \mathbf{22/7}, 179/57, 201/64, 223/71, 245/78, 267/85, 289/92, \ldots$. Após o denominador 7, teríamos que dividir o segmento (3,4) em 8 partes, depois em 9, 10, 11 e assim sucessivamente até 57, ocasião em que nesta divisão, encontraríamos o denominador 57 o qual forneceria a próxima aproximação racional ótima de π, $179/57$.

Conforme Yves Lequain (2000), este método trata-se de um algoritmo ingênuo.

Apesar do uso da calculadora científica, tal método é bastante trabalhoso, mesmo com o uso de computadores. De acordo com Yves Lequain (2000), a busca por métodos menos trabalhosos para aproximar um dado número real por números racionais levaram os matemáticos Huygens (num trabalho publicado depois de sua morte) e Wallis (1620-1686) a estabelecerem os primeiros fundamentos do conceito de expansão em frações contínuas de um número real α e, a partir de 1737, Euler (1707-1783) fez um estudo sistemático desse conceito.

Na próxima seção, trataremos de iniciar os fundamentos das frações contínuas, conceito matemático que conseguiu simplificar e impulsionar grandes avanços aos problemas apresentados pela teoria da aproximação.

3.1 EXPANSÃO DE UM NÚMERO REAL EM FRAÇÃO CONTÍNUA

Diferente das ideias anteriores sobre a teoria da aproximação, a ideia de desenvolvimento de um número real numa fração contínua consiste em aplicar o seguinte algoritmo:

1º Passo. Dado um número real qualquer, separamos a parte inteira da parte decimal, isto é, representamos este número sob a forma de uma soma com duas parcelas tais que a primeira parcela seja um número inteiro e a segunda um número inferior à unidade.

2º Passo. Representamos a segunda parcela sob a forma de uma fração de numerador 1 e denominador maior do que 1. A este denominador repetimos o processo, e assim sucessivamente.

Vejamos como desenvolver em fração contínua o número racional ${}^{53}/_{7}$.

$$\frac{53}{7} = 7 + \frac{4}{7} = 7 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = 7 + \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = 7 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}} = 7 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}.$$

Para efeito de simplificação, existem outras representações para as frações contínuas e, desta forma para o exemplo acima, adotamos também a representação $[7; 1,1,3]$. No caso do número $-{}^{53}/_{7}$, temos: $-\frac{53}{7} = -8 + \frac{3}{7} = -8 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = -8 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ e sua representação é $[-8; 2,3]$.

Chama-se fração contínua simples de um número real α a expressão dada por $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{i-1} + \cfrac{1}{\alpha_i}}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i + (\alpha_i - a_i)}}}}$ onde

a_i é $a\ parte\ inteira\ de\ \alpha_i e\ a_i \geq 1, pois\ \alpha_i = \frac{1}{\alpha_{i-1} - a_{i-1}} > 1$.

Os números $a_0, a_1, ...$, são inteiros tais que $a_i \geq 1$ para todo $i \geq 1$. A sequência é finita se $\alpha_j = a_j$ para algum $j \geq 0$ e, infinita se $\alpha_j \neq a_j$ para todo $j \geq 0$. Ela será denotada por $[a_0, a_1, a_2, ...]$ e $[a_0, a_1, a_2, ... a_j]$ caso seja finita. Nesta expansão, o inteiro a_i é chamado o i-ésimo quociente parcial de α, o número real α_i de i-ésimo quociente completo de α e o número racional $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{\ddots}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i}}}}$ de i-ésimo convergente de α.

Teorema 3.1.1 Seja α um número real. Então a expansão em fração contínua simples de α é finita se e somente se α é racional.

Demonstração:

Seja $\boldsymbol{\alpha}$ um número racional e suponha infinita sua expansão em frações contínuas $[a_0, a_1, a_2, ...]$. Assim, $\alpha_j \neq a_j$ para todo $j \geq 0$, escrevendo $\boldsymbol{\alpha}$ na forma $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ com a, b inteiros e $b > 0$, temos: ${}^{a}/_{b} = a_0 + b_0\ com\ 0 < b_0 < 1 \Rightarrow a = a_0 b + b_0 b\ com\ 0 < b_0 b < b\ e\ b_0 b\ inteiro$.

No próximo passo do desenvolvimento, temos: $1/_{b_0} = a_1 + b_1 \; com \; 0 < b_1 < 1 \Rightarrow b = a_1 b_0 b + b_1 b_0 b \; com \; 0 < b_1 b_0 b < b_0 b \; e \; b_1 b_0 b \; inteiro.$

No passo seguinte, temos: $1/_{b_1} = a_2 + b_2 \; com \; 0 < b_2 < 1 \Rightarrow b_0 b = a_2 b_1 b_0 b + b_2 b_1 b_0 b \; com \; 0 < b_2 b_1 b_0 b < b_1 b_0 b \; e \; b_2 b_1 b_0 b \; inteiro.$

Continuando o processo, obtemos uma sequência infinita estritamente decrescente de números inteiros positivos, $b > b_0 b > b_1 b_0 b > b_2 b_1 b_0 b > \cdots, o \; que$ é $absurdo.$

Reciprocamente, se a sequencia é finita, temos $\alpha_j = a_j$ para algum $j \geq 0$, logo, $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots \; a_{j-1} + \cfrac{1}{a_j}}}}$, portanto α é racional. ■

A construção, descrita na demonstração acima, mostra a estreita relação entre o algoritmo de Euclides e a expansão em frações contínuas de um número racional.

Vejamos esta relação.

Sejam p e q números naturais com q $\neq 0$. Utilizando o algoritmo de Euclides obtemos:

p = $a_0 q + r_1$, tal que $0 \leq r_1 < q$.
q = $a_1 r_1 + r_2$, tal que $0 \leq r_2 < r_1$,
$r_1 = a_2 r_2 + r_3$, tal que $0 \leq r_3 < r_2$,
$\vdots \; \vdots$
$r_{n-1} = a_n r_n$, tal que $r_{n+1} = 0$

Dividindo cada equação acima pelos seus respectivos quocientes obtemos:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q}$$
$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}$$
$$\frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2}$$
$$\vdots \; \vdots$$
$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n$$

Separando os inteiros obtidos em cada divisão obtemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Isto é, $\frac{p}{q} = \langle a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \rangle$.

O que acontece com a representação de um número irracional em fração contínua? Vejamos o desenvolvimento em frações contínuas dos números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ *e do número* $\boldsymbol{e}$.

- $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1}$ *com* $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_1}$, *por outro lado* $x_1 =$
  $2 + \frac{1}{x_2}$, *isto é* $x_1 = x_2$.

Inicia-se um quadro repetitivo, ou seja, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots$. *Portanto*, $[1; 2,2,2 \ldots]$ *é a expansão em frações contínuas de* $\sqrt{2}$

- $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1}$ *com* $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} =$
  $1 + \frac{1}{2.x_1}$, *por outro lado* $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$, *isto é* $x_2 =$
  $2.x_1$. *Continuando, teremos*: $\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2x_1}}}}}} \ddots$,
  isto é $[1; 1,2,1,2,1,2, \ldots.]$ é *a expansão em frações contínuas de* $\sqrt{3}$.
- $\pi = 3{,}1415926535 \ldots$. Analisando as casas decimais temos:
  $\pi = 3 + \frac{1}{\pi_1}$ *com* $0{,}1415926535 \le \frac{1}{\pi_1} \le 0{,}1415926536$
  $\pi_1 = 7 + \frac{1}{\pi_2}$ *com* $0{,}062513304 \le \frac{1}{\pi_2} \le 0{,}062513311$
  $\pi_2 = 15 + \frac{1}{\pi_3}$ *com* $0{,}99659309 \le \frac{1}{\pi_3} \le 0{,}99659491$
  $\pi_3 = 1 + \frac{1}{\pi_4}$ *com* $0{,}00341672 \le \frac{1}{\pi_4} \le 0{,}00341856$
  $\pi_4 = 292 + \frac{1}{\pi_5}$ *com* $0{,}52 < \frac{1}{\pi_5} < 0{,}68$

Eis o desenvolvimento de π em frações contínuas:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\pi_6} \ddots}}}}}$$

Desta forma, obtemos que a expansão em frações contínua simples de π é $[3,7,15,1,292,1,\ldots]$.

- $e = 2.7182818284$.... Analisando as casas decimais temos:

$e = 2 + \frac{1}{e_1} com\ 0{,}7182818284 \leq \frac{1}{e_1} \leq 0{,}7182818285$

$e_1 = 1 + \frac{1}{e_2} com\ 0{,}3922111911 \leq \frac{1}{e_2} \leq 3922111912$

$e_2 = 2 + \frac{1}{e_3} com\ 0{,}54964677 \leq \frac{1}{e_3} \leq 0{,}54964678$

$e_3 = 1 + \frac{1}{e_4} com\ 0{,}81935024 \leq \frac{1}{e_4} \leq 0{,}81935025$

$e_4 = 1 + \frac{1}{e_5} com\ 0{,}22047928 < \frac{1}{e_5} < 0{,}22047929$

$e_5 = 4 + \frac{1}{e_6} com\ 0{,}53557347 < \frac{1}{e_6} < 0{,}53557348$

$e_6 = 1 + \frac{1}{e_7} com\ 0{,}86715743 < \frac{1}{e_7} < 0{,}86715744$

$e_7 = 1 + \frac{1}{e_8} com\ 0{,}15319312 < \frac{1}{e_8} < 0{,}15319313$

$e_8 = 6 + \frac{1}{e_9} com\ 0{,}52770793 < \frac{1}{e_9} < 0{,}52770794$

$e_9 = 1 + \frac{1}{e_{10}} com\ 0{,}89498763 < \frac{1}{e_{10}} < 0{,}89498764$

$e_{10} = 1 + \frac{1}{e_{11}} com\ 0{,}1173338786 < \frac{1}{e_{11}} < 0{,}1173338787$

$e_{11} = 8 + \frac{1}{e_{12}} com\ 0{,}52268766 < \frac{1}{e_{12}} < 0{,}52268767$

$e_{12} = 1 + \frac{1}{e_{13}} com\ 0{,}91318843 < \frac{1}{e_{13}} < 0{,}91318844$

$$e_{13} = 1 + \frac{1}{e_{14}} com\ 0{,}09506423 < \frac{1}{e_{14}} < 0{,}09506424$$

Eis o desenvolvimento do número $\boldsymbol{e}$ em frações contínuas:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{e_{14}} \ddots}}}}}}}}}}}}}$$

Desta forma, obtemos que a expansão em frações contínua simples do número $\boldsymbol{e}$ é $[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,\ldots]$.

É óbvio que cada um dos quatro exemplos acima apresenta expansões infinitas, pois, pelo teorema 3.1.1, a expansão em fração contínua simples de um número real α é finita se e somente se α é racional.

Pensando de outra forma, podemos fazer uso do teorema 3.1.1 e das respectivas expansões infinitas dos números $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ *e do número* $\boldsymbol{e}$ para provar a irracionalidade dos mesmos.

Vejamos um exemplo geométrico interessante de desenvolvimento de uma grandeza em fração contínua sem seu valor numérico.

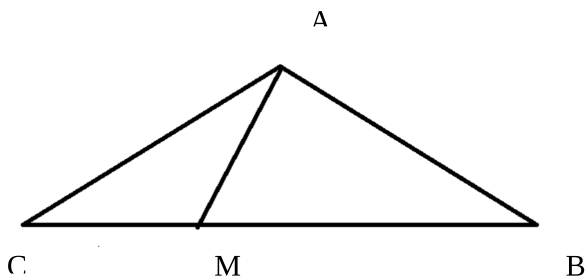
Seja ABC um triângulo isósceles tal que seu ângulo oposto à base mede 108º, determine a razão entre a medida da base e a medida de um de seus lados congruentes.

Solução: Seja ABC um triângulo isósceles tal que seu ângulo oposto à base BC mede 108º e seus lados congruentes sejam AB e AC, conforme a figura abaixo.

Temos que o ângulo A mede 108º e os demais B e C medem 36º. Marquemos M em BC tal que BM = AB e tomemos $AB = AC = x$.

É óbvio que os ângulos BAM e BMA são congruentes e medem 72º cada, isto implica que os ângulos MAC e MCA também são congruentes e medem 36º cada. Segue, pelo caso (A.A.), que os triângulos AMC e ABC são semelhantes.

Observe que, pela desigualdade triangular no triângulo ABC, temos $BM + MC < 2x, segue\ que\ MC < BM = x$, logo, $0 < \frac{MC}{BM} < 1$.



Assim, temos:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BC}{BM} = \frac{BM + MC}{BM} = 1 + \frac{MC}{BM} = 1 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{BM}{MC} = \frac{AC}{MC} = \frac{BC}{AB}$$

Ora, a situação se repete com x_1 e, à medida que construímos os demais triângulos, novas repetições surgirão, desta forma, nunca terminaremos a expansão. Concluímos que se trata de uma expansão infinita dada por $[1; 1,1,1...]$.

3.2 FÓRMULAS DE RECORRÊNCIAS QUE EXPRESSAM FRAÇÕES CONTÍNUAS.

Lembremos que se interrompermos a expansão de um número real α em fração contínua mantendo seus quocientes parciais $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ e eliminando os quocientes parciais posteriores $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$, o número que se obtém é um n-ésimo convergente de α.

Por definição temos que $[a_0, a_1, \dots]$ é a expansão em fração contínua de um número real α, deste modo, denotaremos $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$ como o n-ésimo convergente de α.

Observemos que a própria estrutura das frações contínuas, dada pelo algoritmo descrito inicialmente, permite-nos encontrar uma fórmula de recorrência para cada n-ésimo convergente de α.

Este algoritmo foi encontrado pelos matemáticos do século XVII. Desta forma, descrevemos abaixo tal descoberta a qual facilita posteriores demonstrações e simplifica cálculos de convergentes.

Definimos duas fórmulas de recorrência da seguinte maneira:

$\boldsymbol{p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}\ para\ n \geq 0}$ **(*)**

$\boldsymbol{q_{-2} = 1, q_{-1} = 0, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, para\ n \geq 0}$ **(**)**

Em particular, $p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1, q_0 = 1, q_1 = a_1$.

Proposição 3.2.1 Para todo n ≥ 1, temos $q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Demonstração:

Observe que, $q_0 = 1, q_1 = a_1 \geq 1$. De um modo geral, $a_n \geq 1$, para todo $n \geq 1$.

Portanto, temos $\boldsymbol{q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \geq q_n + 1 > q_n}$, para todo n ≥ 1, e desta forma $q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. ■

Proposição 3.2.2 a) Se $n \geq -1$, então $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$

b) Se $n \geq 0$, então $q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n$

Demonstração:

a) Se $\boldsymbol{n = -1}$, temos $\boldsymbol{q_{-1} p_{-2} - p_{-1} q_{-2} = (-1)^{-1}}$.

Se $n \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} &= (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-1} - (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1}, por\ (*) e\ (**) \\ &= -(q_{n-1} p_{n-2} - p_{n-1} q_{n-2}) \\ &= -(-1)^{n-1}, por\ hipótese\ de\ indução \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

b) Se $n \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2} &= (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) p_{n-2} - (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2}, por\ (*) e\ (**) \\ &= a_n (q_{n-1} p_{n-2} - p_{n-1} q_{n-2}) \\ &= (-1)^{n-1} a_n, por\ a). \end{aligned}$$ ■

A próxima proposição prova a igualdade entre a expansão do n-ésimo convergente de um número real α e a razão $\frac{p_n}{q_n}$.

Proposição 3.2.3 (Expressão das frações contínuas em função dos polinômios $p_n \ e \ q_n$).

Se $\boldsymbol{n \geq 0}$, então $\langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_n} \rangle = \frac{\boldsymbol{p_n}}{\boldsymbol{q_n}}$ $\boldsymbol{com\ mdc\{p_n, q_n\} = 1}$

Demonstração:

Se $n = 0$, temos $\langle a_0 \rangle = a_0 = p_0$.

Se $n = 1$, temos $\langle a_0, a_1 \rangle = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$.

Suponha que a proposição seja válida $para\ n - 1, com\ n > 0$. Se $n \geq 2$, temos:

$$\langle a_0, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle =$$

$$= \langle a_0, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \rangle$$

$$= \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\ , por\ hipótese\ de\ indução$$

$$= \frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + p_{n-3}}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + q_{n-3}}$$

$$= \frac{(a_n a_{n-1} + 1)p_{n-2} + a_n p_{n-3}}{(a_n a_{n-1} + 1)q_{n-2} + a_n q_{n-3}}$$

$$= \frac{[a_n(a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}]}{[a_n(a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}]}$$

$$= \frac{p_n}{q_n}$$, isto prova o resultado almejado.

Agora, se k inteiro divide $p_n \ e \ q_n$ então k divide $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$, isto é $k = -1 \ ou \ k = 1$, logo $mdc\{p_n, q_n\} = 1$. ■

A expansão inversa $\langle a_n, \dots, a_1 \rangle$ nos traz um resultado curioso, vejamos a proposição abaixo.

Proposição 3.2.4

Se $n \geq 1$, então $\langle a_n, \dots, a_1 \rangle = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

Demonstração:

Se $n = 1$, temos $\langle a_1 \rangle = a_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{q_1}{q_0}$.

Suponha que a proposição seja válida $para\ n - 1, com\ n \geq 2$.

Se $n \geq 2$, temos:

$$\langle a_n, \dots, a_1\rangle =$$
$$= a_n + \frac{1}{\langle a_{n-1}, \dots, a_1\rangle}$$
$= a_n + \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$, pela hipótese de indução
$$= \frac{(a_n q_{n-1} + q_{n-2})}{q_{n-1}}$$
$= \frac{q_n}{q_{n-1}}$. ■

Qual seria o resultado da diferença entre dois convergentes adjacentes de uma fração contínua, isto é, $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ com $n \geq 1$? E qual seria o resultado de $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ com $n \geq 2$?

Corolário 3.2.5 (Diferença entre frações contínuas)

a) Se $\boldsymbol{n \geq 1}$, então $\langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_{n-1}}\rangle - \langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_{n-1}}, \boldsymbol{a_n}\rangle = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$

b) Se $\boldsymbol{n \geq 2}$, então $\langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_{n-2}}\rangle - \langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_{n-2}}, \boldsymbol{a_{n-1}}, \boldsymbol{a_n}\rangle = \frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_{n-2}q_n}$

c) Se $\boldsymbol{n \geq 0}$, então $\langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_n}\rangle = \frac{(-1)^n}{q_n(yq_n + q_{n-1})}$

Demonstração:

a) Se $\boldsymbol{n \geq 1}$,
então $\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle - \langle a_0, \dots, a_{n-1}, a_n\rangle = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_{n-1}q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$.

b) Se $\boldsymbol{n \geq 2}$, então $\langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_{n-2}}\rangle - \langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_{n-2}}, \boldsymbol{a_{n-1}}, \boldsymbol{a_n}\rangle = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n p_{n-2} - p_n q_{n-2}}{q_{n-2}q_n} = \frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_{n-2}q_n}$.

c) Se $\boldsymbol{n \geq 0}$, então
$\langle a_0, \dots, a_n, y\rangle - \langle a_0, \dots, a_n\rangle = -[\langle a_0, \dots, a_n\rangle - \langle a_0, \dots, a_n, y\rangle] = -\frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n(yq_n + q_{n-1})}$. ■

3.3 CONVERGENTES COMO APROXIMAÇÕES RACIONAIS ÓTIMAS.

Nesta seção, o teorema 3.3.1 prova que os convergentes são aproximações racionais ótimas para um número real qualquer. Este teorema também nos traz informações curiosas sobre os convergentes e, através destas informações, conseguimos elencar cinco propriedades sobre os mesmos.

Apresentamos também uma técnica para encontrarmos os convergentes de um número real qualquer desde que sejam conhecidos os quocientes parciais de sua expansão em fração contínua.

Teorema 3.3.1 Seja α um número real e seja $[a_0, \dots, a_i, \dots]$ sua expansão em fração contínua simples. Seja $I = \{i \geq 0 \; tal \; que \; a_i$ é $definido\}$. Para todo $i \epsilon I, seja \; \frac{p_i}{q_i}$ a forma irredutível do i-ésimo convergente $\langle a_0, \dots, a_i \rangle$ de α, e seja α_i o i-ésimo quociente completo de α.

a) $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \alpha < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$

b) Seja $n \geq 1$ e suponha $\alpha \neq \frac{p_n}{q_n}$. Então

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n^2(\alpha_{n+1} + {}^{q_{n-1}}/_{q_n})} \text{ (*)}$$

Em particular, temos:

- $\frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ **(**)**
- $\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$ **(***)**

c) Se $n \geq 5$, então $q_n > ({}^3/_2)^n$.

d) (Lei de aproximação de Lagrange). (Lagrange 1770)

Seja $n \geq 1$. Então, para todo par (a, b) de inteiros, $1 \leq b \leq q_n, (a, b) \neq (p_n, q_n), (a, b) \neq (p_{n-1}, q_{n-1})$, vale o seguinte:

- **Se $\frac{p_n}{q_n} \neq \alpha$, então $q_n\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < q_{n-1}\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < b\left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$ (*)**
- **Se $\frac{p_n}{q_n} = \alpha$, então $0 = q_n\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < q_{n-1}\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \leq b\left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$ (**)**

Em todo caso, $\frac{p_n}{q_n}$ é uma aproximação racional ótima de α:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \; para \; todo \; \frac{a}{b} \epsilon Q, 1 \leq b \leq q_n, \frac{a}{b} \neq \frac{p_n}{q_n} \text{ (***)}$$

e) O convergente $\frac{p_0}{q_0}$ é uma aproximação ótima de α se e somente se $\boldsymbol{\alpha - [\alpha] \leq {}^{1}/_{2}}$.

Demonstração:

a) Seja $n \geq 2$. Assim, pelo corolário 3.5.(b), temos $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_{n-2}q_n}$. Se n é ímpar, obtemos $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} > 0\ logo\ \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} > \frac{p_n}{q_n}$. Se n é par, obtemos $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} - \frac{p_n}{q_n} < 0\ daí\ \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} < \frac{p_n}{q_n}$.

Agora, mostraremos que, se n é par e m é ímpar, então $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_m}{q_m}$.

Suponha $n < m$. Logo $n\ e\ m-1$ são pares e tais que $n \leq m-1, temos\ \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$. Portanto, basta mostrar que $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} < \frac{p_m}{q_m}$, mas isto é verdade, pois: $\frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(-1)^m}{q_{m-1}q_m} < 0\ já\ que\ m\ é\ ímpar$.

Suponha $m < n$. Logo $n-1\ e\ m$ são ímpares e tais que $m \leq n-1, temos\ \frac{p_m}{q_m} \geq \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Portanto, basta mostrar que $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} > \frac{p_n}{q_n}$, mas isto é verdade, pois: $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n} > 0\ já\ que\ n\ é\ par$.

b) Como $\alpha \neq \frac{p_n}{q_n}$, então o (n+1)-ésimo quociente completo α_{n+1} de α existe pela definição de frações contínuas, então temos $\alpha = \langle a_0, \dots, a_n, \alpha_{n+1} \rangle$. Portanto, pelo corolário 3.5. (c), temos $\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \langle a_0, \dots, a_n, \alpha_{n+1} \rangle - \langle a_0, \dots, a_n \rangle = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$.

Agora, vamos aos casos particulares:

Como $a_{n+1}\ é\ a\ parte\ inteira\ de\ \alpha_{n+1}, temos\ a_{n+1} \leq \alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1, logo\ a_{n+1}q_n + q_{n-1} \leq \alpha_{n+1}q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} + q_n$, isto é, pela fórmula de recorrência de q_n, temos $q_{n+1} \leq \alpha_{n+1}q_n + q_{n-1} < q_{n+1} + q_n$. Tomando os inversos, multiplicando por q_n, e usando o resultado do item (b (*)) deste teorema, obtemos:

$$\frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n)} < \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Portanto, (**) é satisfeita. Para obtermos (***) basta observar $q_n q_{n+1} = q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) > a_{n+1}{q_n}^2\ e\ q_n(q_{n+1} + q_n) = q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1} + q_n) \leq q_n(a_{n+1}q_n + q_n + q_n) = (a_{n+1} + 2){q_n}^2$.

c) Por definição, temos para qualquer inteiro $i \geq 0$, $a_i \geq 1$, , logo, pela fórmula de recorrência q_n, temos $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \geq q_{i-1} + q_{i-2}$. Como $q_0 = 1, q_1 = a_1 \geq 1$, temos $q_2 \geq 2, q_3 \geq 3, q_4 \geq 5, q_5 \geq 8 > (3/2)^5, q_6 \geq 13 > (3/2)^6$. Seja $n \geq 7$, e suponha por hipótese de indução que $q_{n-1} > (3/2)^{n-1}$ e $q_{n-2} > (3/2)^{n-2}$. Logo,

$$q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2} > \left(3/2\right)^{n-1} + \left(3/2\right)^{n-2} = \left(3/2\right)^{n-2}\left(3/2 + 1\right) = \left(3/2\right)^{n-2}\left(10/4\right)$$
$$> \left(3/2\right)^{n}.$$

d) Seja $n \geq 1$ e sejam a, b inteiros, $1 \leq b \leq q_n, (a, b) \neq (p_n, q_n), (a, b) \neq (p_{n-1}, q_{n-1})$. Suponhamos que $\alpha \neq \frac{p_n}{q_n}. Temos$:

$$q_n\left|\alpha - p_n/q_n\right| = 1/(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})\ por\ (b)\ deste\ mesmo\ teorema.$$
$$< 1/(q_n + q_{n-1}),\ pois\ \alpha_{n+1} > 1$$
$$= 1/[(a_n + 1)q_{n-1} + q_{n-2}]$$
$$< 1/(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}),\ pois\ a_n\ \text{é}\ a\ parte\ inteira\ de\ \alpha_n$$
$$= q_{n-1}\left|\alpha - p_{n-1}/q_{n-1}\right|\ por\ (b)\ deste\ mesmo\ teorema.$$

Assim, $q_n\left|\alpha - p_n/q_n\right| < q_{n-1}\left|\alpha - p_{n-1}/q_{n-1}\right|$.

Seja $A = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-11} \end{pmatrix}$. Pelo corolário 3.5 item (a), $det(A) = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$ é um elemento invertível de Z. Além do mais, as entradas de A são elementos de Z. Portanto, as entradas da matriz A^{-1} também são elementos de Z.

Seja (x, y) a solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} p_n X - q_{n-1} Y = a\ (3.6(*)) \\ q_n X - q_{n-1} Y = b\ (3.6(**)) \end{cases}$.

Os elementos x, y pertencem à Z pois $\binom{x}{y} = A^{-1}\binom{a}{b}$.

Se $y = 0$, então por (3.6(**)), $q_n x = b$, logo $x > 0$ (pois q_n e b são positivos), daí $x \geq 1$ $(pois\ x \in Z)$, assim $b = q_n x \geq q_n, daí\ x = 1\ pois\ b \leq q_n)$. Por (3.6($*$) e ($**$)), isto implica $(p_n, q_n) = (a, b)$e contradiz nossas hipóteses.

Se $x = 0$, então por $\left(3.6(*) e\ (**)\right)$, temos $y(p_{n-1}, q_{n-1}) = (a, b)$, logo $y > 0$ (pois q_{n-1} e b são positivos), logo $y \geq 1$(pois $y \in Z$). Se $y = 1$, obtemos $(p_{n-1}, q_{n-1}) =$

(a, b), o que contradiz nossas hipóteses. Se $y \geq 2$, temos $|b\alpha - a| = |yq_{n-1}\alpha - yp_{n-1}| = y|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \geq 2|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| > |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$.

Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então, como $q_n x + q_{n-1}y = b$, e $como$ $b \leq q_n$, os inteiros x e y devem ter sinais opostos. E mais, pelo item (a) do teorema, $\alpha - {}^{p_n}/_{q_n}$ e $\alpha - {}^{p_{n-1}}/_{q_{n-1}}$ tem sinais opostos, logo $q_n\alpha - p_n$ e $q_{n-1}\alpha - p_{n-1}$ tem também sinais opostos, pois são obtidos dos precedentes multiplicando por números positivos. Daí, $x(q_n\alpha - p_n)$ e $y(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})$ tem mesmo sinal. Temos então,

$$\begin{aligned}
|b\alpha - a| &= |(q_n x + q_{n-1}y)\alpha - (p_n x + p_{n-1}y)| \\
&= |x(q_n\alpha - p_n) + y(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \\
&= |x(q_n\alpha - p_n)| + |y(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \\
&= |x||q_n\alpha - p_n| + |y||q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \\
&> |y||q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \; pois \; x \neq 0 \; e \; |q_n\alpha - p_n| \neq 0 \text{ já que } \alpha \neq {}^{p_n}/_{q_n} \\
&\geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \; pois \; y \geq 1.
\end{aligned}$$

Isto prova que (d (*)) é satisfeita se $\alpha \neq {}^{p_n}/_{q_n}$.

Agora, suponhamos que $\alpha = {}^{p_n}/_{q_n}$. Temos

$$\begin{aligned}
|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| &= \left|q_{n-1}({}^{p_n}/_{q_n}) - p_{n-1}\right| \\
&= {}^{|q_{n-1}p_n - p_{n-1}q_n|}/_{q_n} \\
&= {}^{1}/_{q_n} \; por \; 3.2 \; (a) \\
&\leq {}^{|bp_n - aq_n|}/_{q_n} \; pois \; {}^{a}/_{b} \neq {}^{p_n}/_{q_n} \\
&= \left|b({}^{p_n}/_{q_n}) - a\right| = |b\alpha - a|
\end{aligned}$$

Isto prova que (d (**)) é satisfeita se $\alpha = {}^{p_n}/_{q_n}$.

É óbvio que (d(**)) (e portanto também (d(*))) implica a seguinte propriedade:

$|q_n\alpha - p_n| < |b\alpha - a|$ para todo par (a, b)de inteiros, $1 \leq b \leq p_n$, $(a, b) \neq (p_n, q_n)$.

Dividindo os termos da desigualdade por q_n, e usando o fato que $b \leq q_n$, obtemos $\left|\alpha - {}^{p_n}/_{q_n}\right| < ({}^{1}/_{q_n})|b\alpha - a| \leq \left({}^{1}/_{b}\right)|b\alpha - a| = \left|\alpha - {}^{a}/_{b}\right|$ para todo ${}^{a}/_{b} \in Q$, $1 \leq B \leq q_n$, ${}^{a}/_{b} \neq {}^{p_n}/_{q_n}$, desta forma ${}^{p_n}/_{q_n}$ satisfaz a propriedade (d(***)).

e) Se $\alpha - \lfloor\alpha\rfloor \leq 1/2$, temos que $p_0/q_0 = \lfloor\alpha\rfloor/1$ é uma aproximação racional ótima. Ao contrário, se $\alpha - \lfloor\alpha\rfloor > 1/2$, temos $\left|\alpha - \lfloor\alpha\rfloor/1\right| > 1/2 > \left|\alpha - 1/1\right|$, e assim, $p_0/q_0 = \lfloor\alpha\rfloor/1$ não é uma aproximação racional ótima. ■

<u>Técnica para o cálculo dos convergentes</u>

Apresentamos uma tabela para o cálculo dos convergentes de um número real α, a qual dispõem de forma prática os valores de a_i, p_i e q_i. O algoritmo é o mesmo das fórmulas de recorrência e não importa se α é racional ou irracional, basta-nos o conhecimento dos quocientes parciais $a_i's$ de sua expansão em frações contínuas.

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ q_0 & q_1 & q_2 & & q_{n-1} & q_n \end{bmatrix}$$

Iniciamos por preencher a primeira linha e as primeiras duas colunas. Daí, seguimos os passos:

1º Passo: Multiplicamos a coluna $\begin{vmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{vmatrix}$ por a_n.

2º Passo: À coluna obtida somamos a coluna anterior.

$$\begin{bmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ p_{n-2} & p_{n-1} & \\ q_{n-2} & q_{n-1} & \end{bmatrix}$$

Antes das fórmulas de recorrência tínhamos que calcular separadamente cada convergente pela expressão $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots \, a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i}}}}$. Com o surgimento das fórmulas de recorrência, utilizamos os resultados anteriores de cada convergente para o cálculo do n-ésimo convergente procurado já que, para $0 < i < n$, o i-ésimo convergente obtido pelas fórmulas de recorrência expressa seu respectivo p_i e q_i, já em sua forma reduzida. Com a tabela proposta acima, temos de imediato as respectivas frações correspondentes aos convergentes separadas pelas colunas, com numeradores na 2ª linha e denominadores na 3ª linha.

Exemplo 3.5.1 Calcule os cinco primeiros convergentes do número $\sqrt{2}\, com\ expansão\ em\ frações\ contínuas\ dada\ por\ [1;2,2,2\ldots]$. Utilize a tabela acima.

Lembremos as fórmulas de recorrência:

$\boldsymbol{p_{-2} = 0, p_{-1} = 1, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}\ para\ n \geq 0}$ **(*)**

$\boldsymbol{q_{-2} = 1, q_{-1} = 0, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, para\ n \geq 0}$ **(**)**

Em particular, $p_0 = a_0, p_1 = a_0a_1 + 1, q_0 = 1, q_1 = a_1$.

Após preenchermos as duas primeiras colunas, os próximos preenchimentos são bem simples de calcular pelo algoritmo apresentado, basta-nos uma calculadora básica.

Segue que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 17 & 41 & 99 \\ 1 & 2 & 5 & 12 & 29 & 70 \end{bmatrix}$$

Eis os cinco primeiros convergentes de $\sqrt{2}$:

$$1, {}^{3}/_{2}, {}^{7}/_{5}, {}^{17}/_{12}, {}^{41}/_{29}, {}^{99}/_{70}$$

Exemplo 3.5.2 Calcule os seis primeiros convergentes do número $\pi\ com\ expansão\ em\ frações\ contínuas\ dada\ por\ [3,7,15,1,292,1,\ldots]$. Utilize a tabela acima.

Daí, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 15 & 1 & 292 & 1 \\ 3 & 22 & 333 & 355 & 103993 & 104348 \\ 1 & 7 & 106 & 113 & 33102 & 33215 \end{bmatrix}$$

Eis os seis primeiros convergentes de π:

$${}^{3}/_{1}, {}^{22}/_{7}, {}^{333}/_{106}, {}^{355}/_{113}, {}^{103.993}/_{33.102}, {}^{104.348}/_{33.215}.$$

Curiosidade: As 15 primeiras aproximações racionais ótimas de π são: $\boldsymbol{{}^{3}/_{1}}, {}^{13}/_{4}, {}^{16}/_{5}, {}^{19}/_{6}, \boldsymbol{{}^{22}/_{7}}, {}^{179}/_{57}, {}^{201}/_{64}, {}^{223}/_{71}, {}^{245}/_{78}, {}^{267}/_{85}, {}^{289}/_{92}, {}^{311}/_{99},$

$$^{333}/_{106}, \; ^{355}/_{113}, \; ^{52.163}/_{16.604}.$$

Isso nos conduz a pensar que um número real α qualquer possui muito mais aproximações racionais ótimas do que convergentes. De fato, isto é verdade. Existem teoremas que comprovam isto e outros que sugerem métodos melhores que o algoritmo de Huygens para encontrar aproximações racionais ótimas de um número real, mas não trataremos desse assunto neste trabalho por fugir dos nossos objetivos.

Observe que o número de Ahmes aparece em 4º lugar nesta lista, seguido do número de Arquimedes, já o número de Metz aparece em 14º lugar.

Fato histórico curioso é que o número de Metz também foi usado pelos babilônicos em substituição ao número π, conforme Yves Lequain (2000, p. 36), "Aparentemente, os babilônios usavam o número $^{355}/_{113}$ como valor aproximado de π. Que eles usavam esta aproximação racional ótima é bastante surpreendente. Que eles não descobriram a próxima aproximação racional ótima de π não chega a surpreender.".

De fato, $^{52.163}/_{16.604}$ seria uma aproximação racional ótima de π bem mais complicada de se encontrar, levando-se em conta os poucos (ou inexistentes) recursos tecnológicos e o desenvolvimento matemático daquela época.

Propriedades dos Convergentes

De acordo com os teoremas e proposições vistos anteriormente, podemos elencar cinco propriedades dos convergentes. Vejamos cada uma delas:

1ª Propriedade. Cada convergente com número de ordem ímpar é maior que os convergentes adjacentes (o imediatamente anterior e o imediatamente posterior). Respectivamente cada convergente de ordem par é menor que os adjacentes.

Para compreendermos esta propriedade basta que nós observemos as desigualdades dos convergentes expressas no teorema 3.3.1 item (a):

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \alpha < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Tal propriedade é óbvia.

2ª Propriedade. A diferença entre dois convergentes adjacentes é decrescente em valor absoluto (em relação ao número de ordem).

Esta propriedade provém do corolário 3.2.5 (Diferença entre frações contínuas) item (a). Observe que se $\boldsymbol{n \geq 1}$, então $\langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_{n-1}} \rangle - \langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_{n-1}}, \boldsymbol{a_n} \rangle = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$ com $\boldsymbol{q_{n-1}} > 0$, para todo $n \geq 1$.

Pela proposição 3.2.1, para todo $n \geq 1$, temos $q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Desta forma, temos $q_{n-1}q_n \underset{(n-1)\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ para todo $n \geq 1$,isto implica, $1 \geq \frac{1}{q_1 q_0} > \frac{1}{q_2 q_1} > \cdots > \frac{1}{q_{n-1}q_{n-2}} > \frac{1}{q_{n-1}q_n}$, isto completa a explicação.

3ª Propriedade. O valor exato duma fração contínua finita situa-se entre os valores de quaisquer dois convergentes adjacentes. Todos os convergentes com número de ordem par encontram-se à esquerda de α, isto é, constituem aproximações por defeito. Todos os convergentes com números de ordem ímpar encontram-se à direita de α, isto é, constituem aproximações por excesso.

Assim como na 1ª propriedade, para compreendermos a 3ª propriedade basta que nós observemos as desigualdades dos convergentes expressas no teorema 3.3.1 item (a):

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \boldsymbol{\alpha} < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$

Assim, tal observação fica perfeitamente clara.

4ª Propriedade. O erro absoluto que se comete ao substituir o número α pelo convergente $\frac{p_n}{q_n}$ é menor que $\frac{1}{{q_n}^2}$.

Analisando o teorema 3.2.6, item (b), temos:

Seja $n \geq 1$ e $\alpha \neq \frac{p_n}{q_n}$. Então

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{{q_n}^2(\alpha_{n+1} + {}^{q_{n-1}}/_{q_n})} \ (*)$$

Em particular, temos:

- $\frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{{q_n}^2}$ (**), pois pela proposição 3.2.1, $q_{n+1} > q_n$ para todo $n \geq 1$.

Deste modo, esclarecemos a 4ª propriedade.

5ª Propriedade. Todos os convergentes são irredutíveis.

Pela proposição 3.2.3 (Expressão das frações contínuas em função dos polinômios p_n e q_n), temos que:

Se $\boldsymbol{n \geq 0}$, então $\langle \boldsymbol{a_0}, \dots, \boldsymbol{a_n} \rangle = \frac{p_n}{q_n}$ $\boldsymbol{com\ mdc\{p_n, q_n\} = 1}$

Isto deixa claro que todos os convergentes são irredutíveis.

3.4 NATUREZA DOS NÚMEROS EXPRESSOS POR FRAÇÕES CONTÍNUAS

Dado um número irracional α com expansão em fração contínua infinita dada por $[a_0, a_1, \dots]$, sabemos, pelo teorema 3.3.1 item (a), que α está compreendido entre quaisquer de seus convergentes adjacentes:

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \alpha < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

Logo, temos que α pertence a quaisquer segmentos cujas extremidades são seus respectivos convergentes adjacentes, isto é, $\alpha \in [\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}]$, com i inteiro, $i > 0$.

Utilizando o Princípio dos segmentos “encaixados” (ou axioma de Cantor), concluímos que α é o ponto comum dos segmentos encaixados $[\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}]$. Denotamos α como o valor da fração contínua infinita $[a_0, a_1, \dots]$.

Usando a ideia de limite, é possível provar que α é o limite da sequencia de convergentes $a_0, \langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_0, a_1, a_2 \rangle, \dots$. Para lembrarmos que α é o limite referido escreveremos $\alpha = \langle a_0, a_1, \dots \rangle$.

Já sabemos pelo teorema 3.1.1 que a expansão em fração contínua simples de um número real α é finita se e somente se α é racional, portanto, a expansão em fração contínua de um número irracional é infinita.

A equação $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ onde $a_0 \neq 0$, $a_i \in Z$, para todo i natural, denomina-se equação algébrica de grau n.

O número real α é um número algébrico de grau n se for raiz de uma equação algébrica de grau n e não for raiz de nenhuma equação algébrica de grau inferior.

Observação 1. Qualquer número racional p/q é um número algébrico do 1º grau, pois é raiz da equação $qx - p = 0$.

Observação 2. Seja p natural e não quadrado perfeito, desta forma, $\sqrt{p}$ é raiz da equação $x^2 - p = 0$. Além disso, $\sqrt{p}$ é irracional e a equação do 1º grau só admite raiz racional, logo $\sqrt{p}$ não pode ser raiz de nenhuma equação do 1º grau. Segue que $\sqrt{p}$ é um número algébrico do 2º grau.

Os números algébricos do 2º grau são denominados irracionalidades quadráticas.

Números transcendentes são números reais que não são raízes de nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros.

Definição: Uma fração contínua infinita diz-se periódica se existirem números inteiros $k \geq 0$ e $m \geq 1$, tais que $a_{n+m} = a_n$, para todo $n \geq k$. Desta forma, a expansão é do tipo $[a_0, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots, a_{k+m-1}, a_k, \dots, a_{k+m-1}, \dots]$ e a denotaremos por $[a_0, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, \dots, a_{k+m-1}}]$

Exemplos:

a) [0,2,2,2,2,...] periódica simples
b) [1,1,5,1,5,1,5,...] periódica simples
c) [0,1,2,5,3,5,3,...] periódica composta

Teorema 3.4.1 (Euler) O valor de qualquer fração contínua periódica é uma irracionalidade quadrática

Antes de provar este teorema vejamos alguns exemplos.

1º Exemplo. $\alpha = \langle 0,1,1,1,\dots \rangle$

$$\alpha = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$

Desdobrando, temos:

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{1 + \ddots}$$

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1}{1 + \ddots}$$

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \alpha$$

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

Segue que: $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, observe que a raiz negativa não pode ser igual a α.

2º Exemplo. $\alpha = \langle 0,1,2,1,2,\dots \rangle$

$$\alpha = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

Desdobrando, temos:

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-1}-2=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\ddots}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-1}-2=\alpha$$

$$\alpha^2+2\alpha-2=0$$

Como $\alpha > 0$, a raiz negativa é desprezada, segue que $\alpha = -1+\sqrt{3}$.

Observe que se a_0 não nulo, passamos a_0 para o 1º membro da equação e, logo em seguida, iniciamos o desdobramento.

Antes de demonstrar o teorema de Euler, deduziremos uma fórmula que relaciona os quocientes completos com os convergentes.

Pelas fórmulas de recorrência, temos:

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_{n-2}a_{n-1}+p_{n-3}}{q_{n-2}a_{n-1}+q_{n-3}}$$

Se nesta fórmula substituirmos $a_{n-1}\ por\ a_{n-1}+\frac{1}{\alpha_n}$, teremos a seguinte transformação:

$$\alpha=\frac{p_{n-2}(a_{n-1}+\frac{1}{\alpha_n})+p_{n-3}}{q_{n-2}(a_{n-1}+\frac{1}{\alpha_n})+q_{n-3}}=\frac{(p_{n-2}a_{n-1}+p_{n-3})\alpha_n+p_{n-2}}{(q_{n-2}a_{n-1}+q_{n-3})\alpha_n+q_{n-2}}$$

Portanto,

$$\alpha=\frac{p_{n-1}\alpha_n+p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n+q_{n-2}}\quad fórmula\ (3.4.(*))$$

Demonstração do teorema 3.4.1 (Euler)

Seja $\alpha = \langle 0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots \rangle$ uma fração contínua periódica cujo período tem comprimento k. Portanto $\alpha = \alpha_{k+1}$. De acordo com a fórmula (3.4(*)), temos:

$$\alpha=\frac{p_k\alpha_{k+1}+p_{k-1}}{q_k\alpha_{k+1}+q_{k-1}}=\frac{p_k\alpha+p_{k-1}}{q_k\alpha+q_{k-1}}$$

Logo, α satisfaz a seguinte equação quadrática:

$$q_kx^2+(q_{k-1}-p_k)x-p_{k-1}=0$$

Sendo α a raiz positiva.

Observe também que se a fração for periódica mista, necessitaremos desdobrá-la até o último quociente parcial não pertencente ao período, incluindo este, e logo após, utilizar a mesma demonstração acima. ■

A recíproca do teorema anterior "*Qualquer irracionalidade quadrática se exprime através de uma fração contínua periódica.*" foi provado por Lagrange em 1770. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro do 19º Colóquio Brasileiro de Matemática com o título "Aproximação de um número real por números racionais", páginas 58 a 62, cujo autor é Yves Lequain.

3.5 PRECISÃO DE APROXIMAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR SEUS CONVERGENTES

Nesta seção, retomamos a investigação sobre a precisão da aproximação de um número real por uma sequência infinita de números racionais, desta vez, utilizando o conhecimento sobre as frações contínuas.

A melhor precisão que já obtemos no que se refere à aproximação de números reais por infinitos racionais foi apresentada pelo teorema 2.4.2, a saber: Quaisquer que seja o número irracional α, existem infinitos racionais m/n, em forma irredutível, tais que $|\alpha - m/n| < 1/n(n+1)$.

Como os convergentes são números racionais e um número irracional possui infinitos convergentes então é do nosso interesse estudarmos as aproximações de um número irracional por seus convergentes à procura de melhores precisões.

Com o conhecimento sobre frações contínuas apresentaremos novos teoremas que tratarão da precisão da aproximação de um número real por seus convergentes.

O teorema a seguir já foi provado sem o conhecimento de frações contínuas e sob o ponto de vista da aproximação de um número irracional por infinitos racionais, trata-se do teorema 2.3.2: "Quaisquer que seja o número irracional α, existem infinitos racionais m/n, em forma irredutível, tais que $|\alpha - m/n| < 1/n^2$". Vejamos a prova deste teorema sob a ótica dos convergentes de um número real α qualquer.

Teorema 3.5.1 Seja α um número real. Seja $n \geq 0$ um inteiro tal que p_n/q_n existe. Então:

$$\left|\alpha - p_n/q_n\right| < 1/{q_n}^2$$

Demonstração:

Se $n = 0$, o resultado é óbvio, pois p_0/q_0 é a parte inteira de α e $q_n = 1$. Se $n \geq 1$ e $\alpha = p_n/q_n$, o resultado é claro pois

$\left|\alpha - {p_n}/{q_n}\right| = 0 < {1}/{q_n^2}$. Se $n \geq 1$ e $\alpha \neq {p_n}/{q_n}$, pelo teorema 3.3.1 item ((b)***), $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \leq {1}/{q_n^2}$ ■

Observe que se o número real for irracional, teremos infinitos racionais ${p_n}/{q_n}$ que se aproximam de α com um erro de aproximação $\Delta = \left|\alpha - {p_n}/{q_n}\right|$ menor que ${1}/{q_n^2}$.

O teorema seguinte melhora a precisão da aproximação. Vejamos:

Teorema 3.5.2 (K. Vahlen, 1895) Seja α um número real. Seja $n \geq 1$ um inteiro tal que ${p_n}/{q_n}$ existe. Então, pelo menos uma das duas desigualdades seguintes é verdadeira:

$$\left|\alpha - {p_n}/{q_n}\right| < {1}/{2q_n^2} \ ou \left|\alpha - {p_{n-1}}/{q_{n-1}}\right| < {1}/{2q_{n-1}^2}.$$

Demonstração:

Se $n \geq 2$ ou se $n = 1$ e $a_1 \geq 2$, temos $q_n \neq q_{n-1}$, logo $0 < \left({1}/{q_n} - {1}/{q_{n-1}}\right)^2 =$

$= {1}/{q_n^2} + {1}/{q_{n-1}^2} - {2}/{q_n q_{n-1}}$, logo ${1}/{q_n q_{n-1}} < {1}/{2q_n^2} + {1}/{2q_{n-1}^2}$.

Como $\alpha \in [{p_n}/{q_n}, {p_{n-1}}/{q_{n-1}}]$, então temos:

$$\left|\alpha - {p_n}/{q_n}\right| + \left|\alpha - {p_{n-1}}/{q_{n-1}}\right| = \left|{p_n}/{q_n} - {p_{n-1}}/{q_{n-1}}\right| =$$

$= {1}/{q_n q_{n-1}}$ pelo corolário 3.2.5 item (a)

$< {1}/{2q_n^2} + {1}/{2q_{n-1}^2}$, e desta forma,

$\left|\alpha - {p_n}/{q_n}\right| < {1}/{2q_n^2}$ ou $\left|\alpha - {p_{n-1}}/{q_{n-1}}\right| < {1}/{2q_{n-1}^2}$.

Se $n = 1$ *e* $a_1 = 1$, *temos* $q_0 = 1 = q_1$ *e* ${p_0}/{q_0} = a_0$, ${p_1}/{q_1} = a_0 + 1$. Como $a_1 = 1$, *então* $\alpha \neq {(a_0 + 1)}/{2}$, e portanto temos $\left|\alpha - {p_0}/{q_0}\right| = |\alpha - a_0| < {1}/{2} = {1}/{2q_0^2}$ *ou* $\left|\alpha - {p_1}/{q_1}\right| = |\alpha - (a_0 + 1)| < {1}/{2} = {1}/{2q_1^2}$. ■

Este teorema responde parcialmente a nossa dúvida no final do capítulo 2: Será que dado um número irracional qualquer $\boldsymbol{\alpha}$ e um inteiro qualquer $\boldsymbol{k} > 1$, existem infinitos racionais ${\boldsymbol{m}}/{\boldsymbol{n}}$ tais que $\left|\boldsymbol{\alpha} - {\boldsymbol{m}}/{\boldsymbol{n}}\right| < {1}/{\boldsymbol{k}\boldsymbol{n}^2}$**?**

Pelo teorema 3.5.2, fica provado que se α é irracional temos uma subsequência infinita de convergentes $\boldsymbol{p_n}/\boldsymbol{q_n}$ cujo erro de aproximação é menor que $1/_{2q_n{}^2}$, e isto responde a pergunta acima para o caso $k = 2$.

Vejamos um teorema ainda mais interessante e que responde completamente às dúvidas iniciais.

Teorema 3.5.3 (Hurwitz, Marcov)

Para todo α irracional e todo inteiro $n \geq 1$, temos:

$\left|\alpha - {}^{p}/_{q}\right| < {}^{1}/_{\sqrt{5}q^2}$, para pelo menos um racional

,

$$\frac{p}{q} \in \left\{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_{n-1}}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right\}$$

Em particular, a desigualdade acima tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$.

Demonstração:

A prova é por contradição.

Suponha que o teorema seja falso.

Pelo teorema 3.3.1 item (b) e pelo resultado $\frac{q_{n-1}}{q_n} = \langle 0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1\rangle$, podemos afirmar que existe α irracional tal que

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n{}^2} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n{}^2} < \frac{1}{a_{n+1}q_n{}^2} \text{ sendo } \beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

Desta forma, para $n \geq 1$, temos

$$\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}, \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5}, \alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \leq \sqrt{5}$$

Devemos ter $a_{n+1}, a_{n+2} = 1$, pois $a_k \leq 2$ para $k = n, n+1, n+2$ e se $a_k = 2$ para $k = n, n+1, n+2$ teríamos $\alpha_k + \beta_k \geq 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5}$, absurdo.

Sejam $x = {}^{1}/_{\alpha_{n-2}}$ e $y = \beta_{n+1}$. Desta forma, as desigualdades acima se traduzem em:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} \leq \sqrt{5}, \qquad 1 + x + y \leq \sqrt{5}, \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \leq \sqrt{5}.$$

Temos,

$$1 + x + y \leq \sqrt{5} \Rightarrow 1 + x \leq \sqrt{5} - y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\sqrt{5}-y} + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{5}}{y\left(\sqrt{5}-y\right)}.$$

Logo, $y(\sqrt{5}-y) \geq 1 \Rightarrow y \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Por outro lado, temos:

$$x \leq \sqrt{5} - y - 1 \Longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{1}{\sqrt{5}-y-1} + \frac{1}{1+y}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5}-y-1)}$$

Assim, $(1+y)\left(\sqrt{5}-y-1\right) \geq 1 \Longrightarrow y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ logo

$y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, o que é absurdo pois y = $\beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \in Q$. ■

Este teorema prova a existência de infinitos racionais $\frac{p}{q}$ que se aproximam de um irracional α com um erro de aproximação $\Delta = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < {}^{1}\!/_{\sqrt{5}q^2}$.

Com este teorema, obtemos uma melhora considerável sobre a precisão da aproximação com $k \in R$, e além do mais, esta precisão não pode ser melhorada, isto é, $k = \sqrt{5}$ é o maior com essa propriedade. Vejamos.

De fato, se $\epsilon > 0$, $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e $\left|\alpha - {}^{p}\!/_{q}\right| < {}^{1}\!/_{(\sqrt{5}+\epsilon)q^2}$,

então

$$\left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - p\right| < {}^{1}\!/_{\left(\sqrt{5}+\epsilon\right)}$$

$$\Rightarrow \left|q\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - p\right|\left|q\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - p\right| < \frac{\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}\right|}{\sqrt{5}+\epsilon},$$

logo,

$$|p^2 - pq - q^2| < {\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5}\right|}\Big/{\left(\sqrt{5}+\epsilon\right)}.$$

Se q é grande, $1/_{q^2}$ é pequeno, e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}$ é muito próximo de 0, segue que o lado direito da desigualdade é muito próximo de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\epsilon} < 1$, absurdo, pois $|p^2 - pq - q^2| \geq 1$, de fato se $p^2 - pq - q^2 = 0$ teríamos, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$, o que é absurdo, pois $\frac{p}{q} \in Q$. ■

Por este último teorema, respondemos a dúvida no final do capítulo 2, a saber: Será que dado um número irracional qualquer $\boldsymbol{\alpha}$ e um número real $\boldsymbol{k} > 1$, existem infinitos racionais $\boldsymbol{m}/_{\boldsymbol{n}}$ tais que $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{m}/_{\boldsymbol{n}}| < \boldsymbol{1}/_{\boldsymbol{kn^2}}$**?**

A resposta é sim, para $0 < k \leq \sqrt{5}$, e a resposta é não, para $k > \sqrt{5}$. Ou seja $\sqrt{5}$ é o maior número real com essa propriedade, portanto, $1/_{\sqrt{5}q^2}$ é a melhor precisão possível.

Conforme visto pelo teorema 2.4.2, para qualquer irracional α existem infinitos racionais $m/_n$, em forma irredutível, tais que $|\alpha - m/_n| < 1/_{n(n\,+\,1)}$, isto nos informa uma precisão de $1/_{n(n\,+\,1)}$ que não é melhor do que a informada pelo teorema 3.5.3 (Hurwitz, Marcov) de $1/_{\sqrt{5}n^2}$. Se não, vejamos:

Suponha, por absurdo, que $1/_{n(n\,+\,1)} \leq 1/_{\sqrt{5}n^2}$. Logo,

$(1 - \sqrt{5})n^2 + n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq n \leq 1/_{\sqrt{5}\,-\,1} < 1$, absurdo, pois n é natural. ■

Para que possamos obter precisões melhores do que $1/_{\sqrt{5}n^2}$, nós teremos que restringir o conjunto dos números irracionais, ou seja, trabalhar com irracionais que apresentam determinadas características. Existem teoremas que garantem tais precisões para certos irracionais, entretanto, tais estudos fogem ao objetivo deste trabalho.

Na próxima seção, exploraremos o conceito de vantagem de uma aproximação e os respectivos teoremas que validam os convergentes como boas aproximações ou aproximações vantajosas.

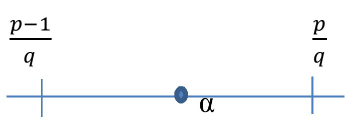
3.6 BOAS APROXIMAÇÕES SÃO CONVERGENTES

Para avaliarmos a vantagem de uma aproximação comparamos duas grandezas: o erro absoluto $|\Delta|$e o limite superior do erro absoluto considerando o critério da aproximação por defeito. Desta forma, designamos o erro reduzido h como sendo a razão dessas duas grandezas, logo, $h = \frac{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|}{\frac{1}{q}} = |q\alpha - p|$.

Para mensurarmos a vantagem da aproximação de um número irracional α por um racional $\frac{p}{q}$, denominamos o coeficiente de vantagem λ como sendo o inverso do erro reduzido h, isto é, $\lambda = \frac{1}{h}$. Portanto, quanto menor for h, maior o coeficiente de vantagem λ, isto é, mais vantajosa será a aproximação.

Veja as figuras abaixo:

(figura 1)



(figura 2)

A figura (1) apresenta uma aproximação *mais vantajosa* em relação à aproximação apresentada na figura (2).

Sabemos que os convergentes são aproximações racionais ótimas de um número real α, verificaremos se eles são aproximações vantajosas. O próximo teorema e os demais corolários trazem ótimos resultados sobre os convergentes.

Teorema 3.6.1. Para todo p, q ϵ Z, com $0 < q < q_{n+1}$ temos
$|q_n\alpha - p_n| \leq |q\alpha - p|$.
Além disso, se $0 < q < q_n$ a desigualdade acima é estrita.

Demonstração:

Como $mdc\ (p_n, q_n) = 1$, temos que se $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ então $p = k.p_n\ e\ q =\ k.q_n$ para algum inteiro $k \neq 0$ e, assim, o resultado é óbvio. Desta forma, podemos supor que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ de modo que $\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ pois $q < q_{n+1}$. Assim, $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo $\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right]$ e, portanto, $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$ o que implica,

$$|q\alpha - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n\alpha - p_n|.$$

Além disso, a igualdade só pode ocorrer se $x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2\ e\ q_{n+1} > 2q_n$, pois numa fração contínua finita, como no algoritmo de Euclides, o último coeficiente a_né sempre maior que 1. Nesse caso, se $q < q_n$, teremos

$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}}$, o que implica $|q\alpha - p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n\alpha - p_n|$. ■

Por este teorema, podemos observar que os convergentes possuem um erro reduzido menor do que qualquer fração com denominador menor ou igual, isto inclui as aproximações racionais ótimas com denominadores menores.

Desta forma, os convergentes são mais vantajosos do que as outras frações com denominadores menores ou iguais, ou seja, os convergentes são mais vantajosos que as aproximações racionais ótimas com denominadores menores. E mais, uma vantagem maior para a aproximação só será obtida com o próximo convergente.

Corolário 3.6.2 Para todo $q < q_n$,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

Corolário 3.6.3

Se $|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|, para\ todo\ p'\ e\ q' \leq q\ tais\ que\ \frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$ então $\frac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua de α.

Demonstração:

Tome n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Pelo teorema, $|q_n\alpha - p_n| \leq |q\alpha - p|$, portanto, $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$. ■

O próximo teorema fornece uma condição suficiente para que o racional $\frac{p}{q}$ seja um convergente.

Teorema 3.6.4 Se $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ então $\frac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua de α.

Demonstração:

Seja n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Suponha que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$. Como na demonstração do teorema anterior, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_n}$ e assim $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo $\left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right]$. Temos duas possibilidades:

a) Se $\mathbf{q} \geq \frac{q_{n+1}}{2}$ então $\left|\boldsymbol{\alpha} - \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\right| \geq \frac{1}{\mathbf{q}\mathbf{q}_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$, absurdo.

b) Se $\mathbf{q} < \frac{q_{n+1}}{2}$ então

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

$$\geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}}$$

$> \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2}$, o que também é absurdo. ■

Na próxima seção, discutiremos o Enigma de Arquimedes e o número de Metz.

3.7 O ENIGMA DE ARQUIMEDES E O NÚMERO DE METZ

Para efeito comparativo, expressamos em uma tabela as melhores aproximações de π com denominadores de 1 a 10, e seus respectivos valores de limite superior do erro absoluto, erro absoluto $|\Delta|$, erro reduzido h e coeficiente de vantagem λ.

Denominador q	Valor aproximado de π	Limite superior do erro absoluto	Erro absoluto $\|\Delta\|$	Erro reduzido h	Coeficiente de vantagem λ
1	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5000$	0,1416	0,1416	3,5
2	$\frac{6}{2}$	$\frac{1}{4} = 0{,}2500$	0,1416	0,2832	1,8
3	$\frac{9}{3}$	$\frac{1}{6} = 0{,}1667$	0,1416	0,4248	1,2
4	$\frac{13}{4}$	$\frac{1}{8} = 0{,}1250$	0,1084	0,4336	1,2
5	$\frac{16}{5}$	$\frac{1}{10} = 0{,}1000$	0,0584	0,2920	1,7
6	$\frac{19}{6}$	$\frac{1}{12} = 0{,}0833$	0,0251	0,1504	3,3
7	$\frac{22}{7}$	$\frac{1}{14} = 0{,}0714$	0,0013	0,0089	**56,5 (!)**
8	$\frac{25}{8}$	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$	0,0166	0,1327	3,8
9	$\frac{28}{9}$	$\frac{1}{18} = 0{,}0556$	0,0305	0,2743	1,8
10	$\frac{31}{10}$	$\frac{1}{20} = 0{,}0500$	0,0416	0,4159	1,2

Conforme já sabemos, $\frac{22}{7}$ é um dos convergentes de π, e desta forma temos um erro absoluto menor $|\Delta| \cong 0{,}0013$, logo, podemos esperar o melhor para a vantagem da aproximação o que de fato é verdade, $\lambda \cong 56{,}5$ é uma vantagem surpreendente! Observe que este coeficiente apresenta um valor 56 vezes maior do que se pode julgar pelo senso comum.

Como visto na seção anterior, ao aproximarmos π pelo convergente $\frac{22}{7}$ não obtemos um coeficiente de vantagem maior até que tenhamos encontrado o próximo convergente, no caso $^{333}/_{106}$.

Conforme seção 3.3, a fração $\frac{22}{7}$, o número de Metz $^{355}/_{113}$ e todos os outros convergentes de π podem ser obtidos utilizando a teoria das frações contínuas, basta escrevermos sua expansão em frações contínuas através do algoritmo de Euclides, e assim, determiná-los através da tabela de cálculo dos convergentes. Veja exemplo 3.5.2.

Eis a tabela obtida no cálculo dos seis primeiros convergentes de π.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 15 & 1 & 292 & 1 \\ 3 & 22 & 333 & 355 & 103993 & 104348 \\ 1 & 7 & 106 & 113 & 33102 & 33215 \end{bmatrix}$$

Assim, os seis primeiros convergentes do número π *com expansão em frações contínuas dada por* $[3,7,15,1,292,1,\ldots]$ são: $^{3}/_{1}, {}^{22}/_{7}, {}^{333}/_{106}, {}^{355}/_{113}, {}^{103.993}/_{33.102}, {}^{104.348}/_{33.215}$.

Observe que o número de Metz $^{355}/_{113}$ aparece em 4º lugar e por se tratar de um denominador maior do que os anteriores, os matemáticos estão convencidos de que, no caso de Metz, tal descoberta foi feita utilizando-se a teoria das frações contínuas. Metz escolheu $^{355}/_{113}$ ao invés de $^{103.993}/_{33.102}$ já que este último convergente se torna inconveniente para substituições em cálculos.

Contudo, sobre o convergente $\frac{22}{7}$ algumas dúvidas permanecem: Que método Arquimedes utilizou para a escolha de $\frac{22}{7}$ como substituição ao número π? Teria este sábio matemático o conhecimento sobre a teoria das frações contínuas já naquela época?

Já sabemos como encontrar estes convergentes, contudo, ainda não conseguimos responder a tal questão histórica, pois conforme Beskin (1987, p. 98), “É necessário compreender que resolvemos o problema matemático, mas não o problema histórico.”.

Segundo Beskin (1987), duas hipóteses são bastante prováveis: a primeira é que Arquimedes realmente utilizou o algoritmo das frações contínuas, a segunda é que na Antiguidade era dada preferência às frações de numerador 1 e as demais frações foram introduzidas lentamente até que foi observada a vantagem das frações de denominador sete comparando-as com outras frações de denominador não muito grande.

Desta forma, não temos uma resposta consistente para este fato histórico, e assim, o Enigma de Arquimedes permanece.

4 DISCUSSÃO

A nossa dúvida inicial era se existia um limite para a precisão de aproximação de um número irracional por uma sequência infinita de números racionais. Em nossos estudos, chegamos a seguinte indagação: será que dado um número irracional qualquer $\boldsymbol{\alpha}$ e um inteiro qualquer $\boldsymbol{k} > 1$, existem infinitos racionais $\boldsymbol{m/n}$ tais que $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{m/n}| < \boldsymbol{1/kn^2}$**?**

Pelo teorema 3.5.2, observamos que para $k = 2$, a resposta é sim. Pelo teorema 3.5.3 (Hurwitz, Marcov), notamos que para k inteiro, $k > 2$, não existem infinitos racionais $\boldsymbol{m/n}$ tais que $|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{m/n}| < \boldsymbol{1/kn^2}$. E mais, considerando k um número real, $0 < k \leq \sqrt{5}$ a resposta é sim, e para $k > \sqrt{5}$, a resposta é não. Desta forma, o problema inicial está solucionado.

Concluímos que $\sqrt{5}$ é o maior número real com essa propriedade, isto é, $1/\sqrt{5}q^2$ é a melhor precisão possível para as aproximações de números reais por infinitos racionais, ou seja, $1/\sqrt{5}q^2$ é o limite de precisão da aproximação de um número irracional por uma sequência infinita de números racionais.

Considerando a teoria da aproximação sem o conhecimento das frações contínuas, nós percebemos pelo teorema 2.4.2 que, para qualquer irracional α existem infinitos racionais m/n, em forma irredutível, tais que $|\alpha - m/n| < 1/n(n+1)$, isto nos informa uma precisão de $1/n(n+1)$, quando a comparamos com a precisão informada pelo teorema 3.5.3 (Hurwitz, Marcov), concluímos, após uma análise da desigualdade $1/n(n+1) \leq 1/\sqrt{5}n^2$, que $1/n(n+1)$ não é uma precisão melhor do que $1/\sqrt{5}n^2$.

Informamos também que para obtermos precisões melhores do que $1/\sqrt{5}n^2$, nós somos obrigados a restringir o conjunto dos números irracionais, ou seja, trabalhar com irracionais que apresentam determinadas características em suas expansões em frações contínuas.

No estudo sobre as frações contínuas, percebemos que um número real α qualquer possui muito mais aproximações racionais ótimas do que convergentes.

Pelo teorema 3.6.1, observamos que os convergentes possuem um erro reduzido menor do que qualquer fração com denominador menor ou igual, isto inclui as aproximações racionais ótimas com denominadores menores, portanto, os convergentes são mais vantajosos do que as aproximações racionais ótimas com denominadores menores. E mais, não obtemos vantagem maior para a aproximação até que tenhamos atingido o próximo convergente.

Esta descoberta sobre os convergentes coloca a teoria das frações contínuas em lugar de destaque dentre as teorias elaboradas pelos grandes matemáticos.

Sobre o Enigma de Arquimedes e o número de Metz, descobrimos que os respectivos racionais $^{22}/_{7}$ *e* $^{355}/_{113}$ são convergentes do número π e assim, justifica-se matematicamente a vantagem da aproximação. Quanto aos fatos históricos, os matemáticos estão convencidos de que a descoberta de Metz foi obtida através da teoria das frações contínuas, já no caso de Arquimedes, o enigma permanece sem solução, pois não encontraram respostas convincentes que justificassem a ótima escolha deste brilhante matemático.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O assunto frações contínuas foi sugerido pelo professor Dr. José Othon Dantas Lopes, ocasião pela qual o mesmo indicou o livro “Frações contínuas” do autor N.M. Beskin. Este livro é excelente, didático e recomendado para iniciantes.

Após a leitura do livro “Números: Racionais e Irracionais” do autor Níven, tivemos a certeza do tema a ser trabalhado: “Uma abordagem sobre a teoria da aproximação dos números reais por números racionais”.

No referido livro, Níven afirma que existem limitações das aproximações, o autor expõe teoremas, exemplos e um contraexemplo, mas não demonstra o teorema principal. Assim, Níven deixa a cargo do leitor o problema do limite para a precisão de aproximação de um número real por uma sequência infinita de números racionais, e desta forma, sentimo-nos motivados a realização deste trabalho.

Nosso objetivo era investigar a melhor precisão possível da aproximação de um número irracional qualquer por uma sequência infinita de números racionais. Após estudos preliminares sobre a teoria das frações contínuas constatamos que $1/\sqrt{5}n^2$ é a precisão que procurávamos. Assim, o objetivo foi comprovadamente atingido.

Entretanto, durante pesquisas realizadas no livro “Aproximação de um número real por números racionais” de autoria de Yves Lequain, verificamos que existem irracionais tais que a aproximação destes por infinitos racionais tem precisão menor do que $1/\sqrt{5}n^2$, estes irracionais apresentam certas características em sua expansão em frações contínuas.

Desta forma, o problema da precisão de aproximação de um número irracional por uma sequência infinita de números racionais ainda permite ser explorado e, desta forma, continua a ser motivação para os próximos trabalhos.

Na busca pelo limite da precisão de aproximação de um número irracional por uma sequência infinita de números racionais, exploramos as frações contínuas e aprendemos o suficiente para compreendermos e analisarmos matematicamente o Enigma de Arquimedes e o surgimento do número de Metz.

Percebemos os convergentes como a maior descoberta proveniente da teoria das frações contínuas. O conhecimento dos convergentes e suas propriedades possibilitaram o surgimento de diversos teoremas, inclusive os que versam sobre o limite das precisões de aproximações.

Tais descobertas mereceram o respeito da comunidade científica e, assim, a teoria da aproximação recebeu “status” entre os conteúdos estudados na pós-graduação.

REFERÊNCIAS

BESKIN, N.M. **Frações contínuas-Iniciação à Matemática**. Editora Mir Moscovo, 1987. Tradução de Pedro Lima.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012 .

ELON, Lagis Lima; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2000.

LEQUAIN,Yves. **Aproximação de um número real por números racionais**. 19º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

MOREIRA, C.G. **Frações contínuas, Representação de Números e Aproximações Diofantinas**. 1º Colóquio da Região Sudeste, Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

NÍVEN, Ivan. **Números: Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2000 .