UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Conjuntos Numéricos

CARLOS EDUARDO DE LIMA DUARTE

Natal
2013

CARLOS EDUARDO DE LIMA DUARTE

Conjuntos Numéricos

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte, sob a orientação da Prof^a^ Dr^a^ Viviane Simioli Medeiros Campos.

Natal

2013

Resumo

Neste trabalho, elaboramos um texto sobre os Conjuntos Numéricos, utilizando as necessidades sociais humanas como ferramenta para construção de novos números. O presente material visa apresentar um texto que concilie o ensino correto da matemática e a clareza necessária para um bom aprendizado.
Palavras-chave: Conjuntos Numéricos, Equivalência, Cortes de Dedekind, Números reais.

Abstract

In this work, we present a text on the Sets Numerical using the human social needs as a tool for construction new numbers. This material is intended to present a text that reconciles the correct teaching of mathmatics and clarity needed for a good learning.
Keywords: Numerical Sets, Equivalence, Dedekind cuts, real numbers.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, o autor da vida, que me amou incondicionalmente e me deu saúde, força e coragem para a realização deste trabalho. A Ele seja a glória eternamente!

À minha esposa, fiel e eterna companheira, por sempre estar ao meu lado em todos os momentos importantes da minha vida. A pessoa que Deus colocou no mundo pra me fazer feliz. Te amo muito!

Aos meus pais, por me ensinarem no dia-a-dia, através de suas vidas, que educação se faz com o exemplo. Pelo esforço imensurável para me dar uma educação de qualidade e me possibilitar ter chegado até aqui.

Aos meus irmãos, Júnior e Raphael, pelos importantes momentos em família que me fez ser a pessoa que sou hoje.

À minha orientadora, Professora Viviane Simioli Medeiros Campos, pelas valiosas contribuições a esse trabalho, bem como pela sua incansável dedicação a esse mestrado.

A todos os docentes do PROFMAT pela dedicação e pela luta para a melhoria do ensino básico neste país.

Aos colegas e amigos de PROFMAT, que muito me ajudaram ao longo desses dois anos de curso e, em especial, ao nosso colega Joel pelas orações antes das provas.

À Capes, pelo apoio financeiro.

E a todos os que contribuíram de alguma maneira para eu chegar até aqui. Muito obrigado e que Deus os abençoe!

Sumário

Introdução

Apesar de nos últimos anos ter havido uma melhoria no cenário educacional brasileiro, os livros didáticos de matemática não tem apresentado uma melhora significativa a ponto de se ter livros textos satisfatórios para o ensino básico de matemática.

É comum vermos livros de matemática do ensino médio com erros conceituais. E isso é grave, pois devido às faculdades de matemática não se importarem muito com a formação do professor no que diz respeito aos conteúdos do ensino básico, os professores acabam "aprendendo" matemática pelos livros didáticos.

O conteúdo "Conjuntos Numéricos" normalmente é apresentado de maneira fragmentada e sem justificativas. Praticamente todos os livros utilizados nas escolas brasileiras, ao tratar dos números, fazem simplesmente classificá-los em um determinado tipo: se o número tem tal característica chamamos de natural, se tem outra característica é racional e assim por diante.

Para ilustrar essa afirmação, vejamos o seguinte exemplo: Paiva [12] diz: "Classificamos como naturais os números que representam quantidades de elementos de conjuntos finitos, inclusive o vazio" (p. 23). E em seguida: "Uma parte dos números negativos é formada pelos números $-1, -2, -3, -4, \ldots$, que são chamados de números inteiros negativos" (p. 23). Apresenta os números racionais definindo como "todo aquele que pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo" sem fazer qualquer contextualização com medidas. Seguindo nessa mesma linha, define número irracional como "todo número que, em sua forma decimal, é uma dízima não periódica". E apresenta os números reais como "qualquer número racional ou irracional".

Já Iezzi *et al* [9] começa o assunto dizendo: "Denominamos conjuntos numéricos os conjuntos cujos elementos são números que apresentam algumas características comuns entre si" (p. 29). E em seguida começa a falar sobre números naturais assim: "O conjunto $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$, em que n representa o elemento genérico do conjunto". Apresenta o conjunto $\mathbb{Q}$ como uma ampliação de $\mathbb{Z}$ devido à inexistência de algumas divisões entre números inteiros. Define número irracional como "números decimais não exatos, que possuem representação infinita não periódica". Já o conjunto dos números reais é definido como "o conjunto formado pela reunião do conjunto dos números racionais e pela reunião do conjunto dos números irracionais".

Parece que os números são entidades que estão por aí e temos que classificá-los com algum nome. Na verdade, há uma construção lógica e histórica desses números. Os números não existem por si só. Eles existem para suprir algumas necessidades humanas. E é isso que queremos mostrar com esse trabalho.

É comum vermos em sites de matemática na internet ou até em livros didáticos diagramas como este (Figura 1) para representar os conjuntos numéricos:

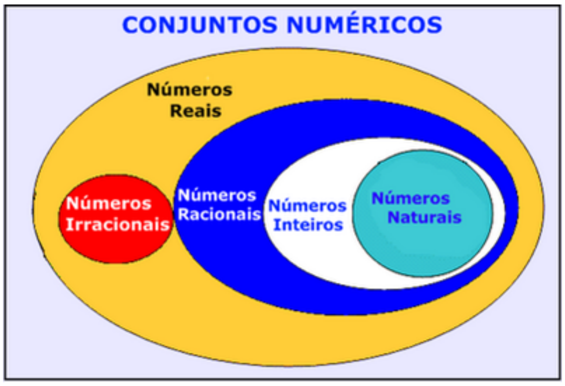

Figura 1: Conjuntos Numéricos – Fonte: http://www.alunosonline.com.br

Diagramas desse tipo só induzem o aluno a pensar que os números racionais são a maioria dentre os números reais. Outra conclusão precipitada que o aluno pode tirar é achar que existem números reais que não são racionais nem irracionais.

Além disso, muitas questões importantes não são discutidas nem sequer mencionadas nos livros didáticos, como por exemplo:

- Se os números racionais servem para fazer qualquer medição concreta, por que ampliarmos o conjunto dos números racionais?;
- Existem diferentes tipos de infinitos?;
- Qual conjunto tem "mais elementos": o dos números racionais ou o dos números irracionais?

Devido a essa ausência de explicações nos livros didáticos de ensino médio e aos constantes erros presentes nos mesmos, nos propomos a elaborar um material sobre *Conjuntos Numéricos* que seja acessível a esse público e que dê respostas consistentes aos questionamentos levantados. Um material que seja capaz de conciliar o ensino correto do conteúdo com a clareza necessária.

Porém, ao nos depararmos com o livro de Bento de Jesus Caraça [3], livro que contempla todos esses questionamentos e que constrói os conjuntos numéricos a partir das necessidades sociais, decidimos reescrever os capítulos deste livro que tratam sobre os conjuntos numéricos de modo a alertar ao professor de matemática sobre a importância de discutir determinados temas que são inerentes ao assunto que estamos tratando.

Nesse sentido, este texto não é um material de estudo para um aluno de ensino médio, mas um suporte para o profesor de matemática decidir como ele irá abordar o conteúdo nesse nível de ensino.

Ao longo deste trabalho, admitiremos que os alunos já têm familiaridade com as operações elementares: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, visto que, ao longo do ensino fundamental, já trabalharam com tais operações.

Com relação a sequência adotada para elaboração desse material procedemos da seguinte maneira: números naturais, inteiros, racionais e reais, devido à conhecida inclusão entre os conjuntos numéricos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Números Naturais

1.1 A Contagem e os Números Naturais

A todo momento, precisamos fazer contagens: o trabalhador, para verificar se o salário recebido está correto; o pastor de ovelhas, para saber se perdeu alguma delas ao levá-las para pastar; o cientista, para saber se tem a quantidade certa das substâncias para a realização de um experimento.

Seria impossível imaginar uma transação comercial sem que um saiba contar os itens que compra e o outro o dinheiro que recebe. Ou ainda, um mercado sem que ninguém soubesse contar. Enfim, a todas as pessoas, em maior ou menor grau, se impõe a necessidade de se fazer contagens.

A contagem é, portanto, um problema cotidiano na vida do homem desde muitos anos atrás, o qual foi resolvido por meio da criação dos números naturais:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Não sabemos por quanto tempo se arrastou a criação desses números. O que podemos dizer com certeza é que o homem de muitos anos atrás não tinha o mesmo conhecimento que temos hoje desses números. De acordo com Caraça [3], estudos realizados com povos antigos existentes na África e na Austrália permitem-nos ter uma ideia da maneira como os povos de milhares de anos atrás se achavam em relação a essa questão. Os resultados desses estudos nos permitem tirar algumas conclusões: a ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência, isto é, os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem. Pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. Não podemos conceber a ideia do homem criando os números naturais para só depois aplicar à prática de fazer contagens.

É, portanto, importante destacar que, historicamente, a contagem antecede os números, ou seja, é possível realizarmos uma determinada contagem de objetos sem usarmos números para isso. Segundo Giraldo *et al* [7], "no sentido matemático, para *contar* basta estabelecer uma correspondência um a um entre os elementos de dois conjuntos".

1.2 A Ideia de Correspondência

Mas em posse dos números naturais, como uma pessoa deve proceder para fazer uma determinada contagem? A cada um dos objetos ela faz corresponder um número da sucessão dos números naturais: ao primeiro elemento ela associa o número um, ao segundo, o número dois e assim por diante. Se ao último elemento é associado o número cinco, por exemplo, dizemos que tem cinco elementos.

A correspondência de dois entes (no exemplo acima, objetos e números) exige que haja um *antecedente* e um *consequente*. A maneira pela qual o pensar no antecedente desperta o pensar no consequente chama-se *lei da correspondência* – no nosso caso, o antecedente são os objetos e o consequente, os números.

1.3 Tipos de Correspondência

De acordo com Caraça [3], podemos entender os tipos de correspondências com a seguinte ilustração:

Imaginemos a situação a seguir: Numa sala há três pessoas – duas delas chamadas "Maria" e uma chamada "João". Se pensarmos em uma dessas pessoas, naturalmente associamos a ela o seu nome. Temos, portanto, uma correspondência: Pessoa (antecedente) $\rightarrow$ Nome (consequente).

Analogamente, se pensarmos num nome, nos remete a pensar na pessoa (ou pessoas) com esse nome, e consequentemente temos outra correspondência: Nome (antecedente) $\rightarrow$ Pessoa (consequente).

A diferença entre essas duas correspondências está no fato do antecedente e do consequente estarem na ordem inversa um do outro. Quando duas correspondências estão nessas condições, dizemos que elas são *recíprocas* uma da outra.

Consideremos a correspondência Pessoa $\rightarrow$ Nome dada acima. Veja que todo antecedente tem consequente, isto é, todas as pessoas que estão na sala têm um nome. Quando temos uma correspondência com essa característica dizemos que ela é *completa*.

Ainda sobre essa correspondência, podemos observar que cada antecedente (pessoa) tem um único consequente (nome). Quando uma correspondência completa tem essa característica dizemos que ela é *unívoca*.

Agora observe a correspondência recíproca: Nome $\rightarrow$ pessoa. Essa correspondência é obviamente completa, isto é, a cada nome dado, existe uma pessoa com esse nome. Porém, ela não é unívoca, pois o nome "Maria" está associado a duas pessoas, ou seja, um antecedente tem mais de um consequente.

Se, porém, tivermos uma correspondência unívoca cuja recíproca também seja unívoca, dizemos que tal correspondência é *biunívoca*. No nosso exemplo, para a correspondência Pessoa $\rightarrow$ Nome ser biunívoca, bastaria que as pessoas que estivessem na sala tivessem nomes distintos.

Observe que dizer que uma correspondência é *completa e unívoca* é o mesmo que dizer que se trata de uma *função*, e dizer que uma correspondência é *biunívoca* é o mesmo que dizer que temos uma *função bijetora*. Porém, esses termos não foram usados pelo fato do conteúdo *conjuntos numéricos* anteceder o conteúdo *funções* no ensino médio.

1.4 Equivalência e Prevalência

Dadas duas coleções de objetos, se pudermos pô-las em correspondência biunívoca dizemos que elas são *equivalentes*. Veja o exemplo a seguir (Figura 1.1):

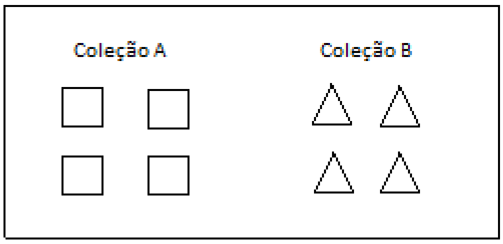

Figura 1.1: Coleções de Objetos

Podemos corresponder biunivocamente os objetos das coleções A e B (veja Figura 1.2 abaixo).

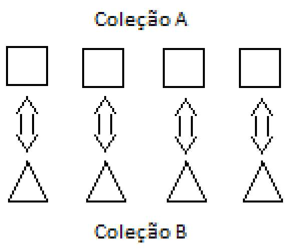

Figura 1.2: Coleções Equivalentes

A importância da equivalência está no fato de que se quisermos fazer a contagem dos objetos da coleção A podemos fazê-la através dos objetos da coleção B e vice-versa, isto é, a equivalência de duas coleções de objetos significa igualdade de número de objetos. Vejamos, agora, um outro exemplo (Figura 1.3):

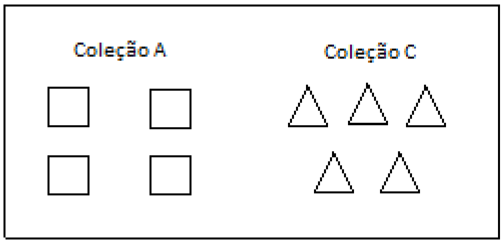

Figura 1.3: Coleções com número de objetos distintos

Obviamente, não há equivalência entre os objetos das coleções A e C, isto é, o número de objetos de A e C são distintos (Figura 1.4).

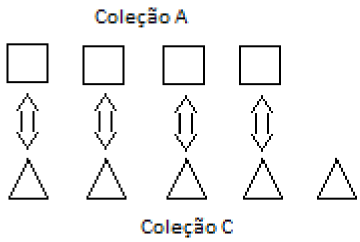

Figura 1.4: Coleções não equivalentes

Mas podemos ter uma equivalência entre os objetos de A e uma parte de C. Nesse caso, dizemos que C é *prevalente* a A. Portanto, equivalência significa igualdade e prevalência, desigualdade.

1.5 Número: Um Conceito Abstrato

Conforme Giraldo *et al* [7], "um número (natural) é uma propriedade em comum a todos os conjuntos com a mesma quantidade de elementos, isto é, um 'rótulo' que se dá a uma dada classe de conjuntos com quantidades equivalentes de elementos". Assim, podemos dizer que o número 3 é uma propriedade abstrata que três lápis, três borrachas, três bolas, etc. têm em comum. Observe que o 3 não é nem os três lápis, nem as três borrachas, nem as três bolas, mas uma abstração da ideia concreta da contagem.

1.6 O Infinito

Consideremos a sequência dos números naturais:

$$1, 2, 3, 4, 5, ...$$

A reticência colocada após a última vírgula significa que não estão escritos todos os números naturais. Faltam números. Mas quantos? Existe o maior número natural?

Podemos responder a essa pergunta pensando da seguinte maneira: na sequência dos números naturais, passamos de um número para o seguinte acrescentando-lhe uma unidade. Por meio dessa operação elementar passamos do 1 para o 2, do 2 para o 3 e assim por diante. Ou seja, para todo número natural n dado, podemos encontrar – usando a mesma operação elementar – o próximo número natural da sequência, o $n+1$. Logo, não existe número natural maior que todos os outros. Dizemos, então, que a sequência dos números naturais é *ilimitada superiormente* – isto é, por maior que seja o número natural n que tomemos sempre poderemos encontrar um maior que ele $(n+1)$ – e *infinita*, ou seja, esse processo de encontrar o próximo número pode ser repetido indefinidamente, o que quer dizer que não existe uma quantidade finita de números naturais.

1.7 O Conjunto dos Números Naturais

Dizemos que temos um *conjunto* formado por certos elementos quando: (i) tais elementos têm uma característica em comum e (ii) dado um elemento qualquer, podemos verificar se ele pertence ou não ao conjunto.

Será, então, que podemos nos referir ao *conjunto dos números naturais*? Qual a característica que todos eles têm em comum? A de que, com exceção do 1 (que é o primeiro elemento), todos os outros são obtidos pela operação elementar de encontrar o próximo elemento – é o que chamamos de *sucessor*. Por exemplo, dizemos que 2 é o sucessor de 1, 3 é o sucessor de 2, etc., ou seja, todos os elementos são sucessores de um único número natural (a partir do 1). Além disso, dado um elemento qualquer, é fácil verificar se ele está nesse conjunto, bastando para isso verificar se ele é o sucessor de alguém que já está nesse conjunto.

Assim, podemos, de fato, nos referir ao conjunto dos números naturais, o qual fica caracterizado da seguinte maneira: (a) o 1 pertence a esse conjunto e (b) cada um dos elementos seguintes é determinado pela operação elementar de adicionar uma unidade.

Observe que a maneira que caracterizamos o conjunto dos números naturais coincide com os *Axiomas de Peano*, sendo, porém, apresentado com menos formalidade.

Daqui por diante, o conjunto dos números naturais será denotado por $\mathbb{N}$.

1.8 O Zero

É muito comum, em livros didáticos do ensino médio, a sucessão dos números naturais começar pelo zero e não pelo um. Assim, os números naturais seriam:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Neste trabalho, não utilizaremos o zero como um número natural. Não entraremos no mérito da questão, pois foge à nossa proposta. Mas entendemos que não há equívoco algum considerar o zero como número natural ou o contrário. É apenas uma questão de escolha e comodidade.

1.9 O Conjunto dos Pontos da Reta

Será que, além do conjunto dos números naturais, existem outros conjuntos infinitos?

Vamos pensar no conjunto de pontos de uma reta. Primeiramente, temos que verificar se o conjunto (reta de um plano) está bem determinado. Sabemos da geometria que dois pontos distintos A e B determinam uma única reta, isto é, qualquer ponto da reta que contém A e B está alinhado com esses dois pontos. Pois bem, então dado um ponto qualquer do plano (sobre o qual essa reta está), podemos sempre verificar se ele está ou não alinhado com A e B. Em caso afirmativo, o ponto pertence à reta (ao conjunto); caso contrário, não pertence.

Portanto, podemos falar do conjunto de pontos de uma reta do plano. A nossa dúvida agora é: esse conjunto é infinito? Para responder à essa pergunta, consideremos o segmento AB, isto é, apenas a parte da reta que vai de A até B (Figura 1.5).

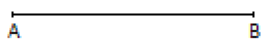

Figura 1.5: Segmento AB

Se dividirmos esse segmento ao meio, obtemos o ponto A_1; se dividirmos agora o segmento A_1B ao meio, obtemos o ponto A_2; dividindo A_2B ao meio, obtemos A_3 e assim por diante. Se usarmos o fato de que o ponto não tem dimensão, podemos realizar essa operação indefinidamente (Figura 1.6). E, em consequência disso, teremos uma infinidade de pontos $A_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ que pertencem ao segmento AB (e portanto pertencem à reta que contém A e B). Logo, podemos dizer que o conjunto de pontos de uma reta, assim como o conjunto dos números naturais, é um conjunto infinito[1].

[1] O conceito de infinito que estamos usando nesse texto está baseado na injeção de $\mathbb{N}$ no conjunto, isto é, estamos verificando que um conjunto é infinito a partir da infinidade de $\mathbb{N}$.

Figura 1.6: Sequência de pontos A_n

Observe que, além da infinidade de pontos $A_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ que consideramos, há ainda uma infinidade de pontos nos segmentos AA_1, A_1A_2, A_2A_3, etc. (que não foram contados aqui), pois podemos aplicar o mesmo raciocínio anterior.

Estamos, assim, diante de infinitos com carcterísticas diferentes: no conjunto dos números naturais, dados dois elementos distintos temos uma quantidade finita de números entre eles; já no conjunto dos pontos de uma reta, dados dois pontos, existem infinitos pontos entre eles. Será, então, que podemos comparar esses diferentes tipos de infinitos? Veremos mais adiante.

1.10 Correspondências no Infinito

A operação da contagem vai nos fornecer o modelo de como vamos proceder para comparar os diferentes tipos de infinitos. Vimos que, para realizar uma contagem, fazemos uma correspondência biunívoca entre objetos e números. O que vamos fazer é usar essa mesma ideia (de fazer corresponder) indefinidamente, isto é, vamos verificar se podemos estabelecer uma equivalência entre dois conjuntos infinitos.

Vimos (seção 1.5) que, quando se trata de conjuntos finitos, uma parte de um conjunto jamais pode-se por em correspondência biunívoca com o todo. Já no infinito, vamos ver através de dois exemplos que nossa intuição falha.

EXEMPLO 1. Consideremos o seguinte exemplo: Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbf{P}$ o conjunto dos números pares (positivos).

Intuitivamente, o conjunto dos números pares têm bem menos elementos que o dos números naturais (já que este tem além daqueles, os números ímpares). Porém, se correspondermos o 1 ao primeiro número par (o número 2), o número 2 ao segundo (4), o 3 ao terceiro (6) e assim por diante, teremos uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbf{P}$: $1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 4, 3 \leftrightarrow 6, \ldots$. Isto nos leva a concluir que, em se tratando de conjuntos infinitos, o todo e a parte podem ser equivalentes, o que não fazia sentido no finito[2].

[2]Em sua obra *Diálogos de Duas Novas Ciências*, escrita dois séculos e meio antes de Cantor, Galileu chamou a atenção para a correspondência, de um para um, entre o conjunto dos números naturais e os seus quadrados, embora intuitivamente parecesse haver muito menos quadrados do que números naturais. A contradição que Galileu se deparou resolve-se com facilidade, observando que "igual", pode ser empregado com dois significados diferentes. Um deles, com origem em Aristóteles, baseia-se no fato de a parte não poder ser *igual* ao todo, na medida em que no todo existe pelo menos um elemento que não está na

EXEMPLO 2. Sejam ABC um triângulo, M o ponto médio de AB e N o ponto médio de BC (Figura 1.7). Sabemos que o segmento MN tem comprimento igual a metade do comprimento do segmento AC. Porém, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos de MN e os pontos de AC.

Para isso, basta correspondermos os pontos da seguinte maneira: dado um ponto P qualquer em MN, traçamos o segmento que passa por B e pelo ponto dado até tocar o segmento AC em P'; este é o ponto que correspondemos ao ponto P dado. Essa correspondência é logicamente biunívoca e temos, assim, uma equivalência entre segmentos de tamanhos diferentes.

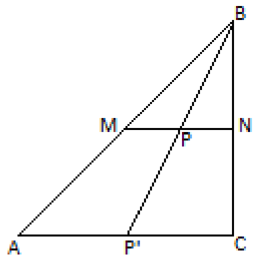

Figura 1.7: Correspondência entre segmentos

Como vimos, temos duas caracterizações do infinito: uma por enumerabilidade (dos números naturais), e outra por densidade (dos pontos de uma reta). A questão que se coloca é: será que essas duas classes do infinito são distintas do ponto de vista da equivalência? Isto é, existe ou não uma correspondência biunívoca entre os elementos desses dois conjuntos infinitos? Discutiremos esse assunto na seção 4.4.

parte. O outro, cantoriano, considera que a parte pode ser *igual* em número ao todo. Assim, Cantor não só afirmou que a correspondência, de um para um, entre o conjunto dos números naturais e os seus quadrados deveria ser literalmente aceito, como também provou que o conjunto dos números pares, dos ímpares, dos números triangulares, . . . , podem estar em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, ou seja, têm todos o mesmo número cardinal, isto é, são equivalentes.

Capítulo 2

Números Inteiros

2.1 Grandezas Tomadas em Sentidos Diferentes e o Conjunto dos Números Inteiros

Existem grandezas que podem ser tomadas em sentidos opostos. Ao construir uma escala de tempo, por exemplo, tomamos como origem um fato histórico marcante (o nascimento de Cristo) e todas as demais datas são contadas antes e após esse acontecimento. Assim, um certo ano é determinado pela distância entre ele e a origem e por estar antes ou após a origem. Por exemplo, dizer que alguém morreu em 350 a.C. significa que ele morreu 350 anos antes do nascimento de Cristo e dizer que alguém nasceu em 1550 d.C. significa que ele nasceu 1550 anos depois do nascimento de Cristo. Observe que entre os dois acontecimentos passou-se um período de 1900 anos $(1550 + 350)$.

Analogamente, suponhamos que um corpo se desloque ao longo de uma reta a partir de um ponto O (o qual chamaremos de *origem*). Se esse corpo percorre uma unidade de espaço por segundo, podemos dizer que ele percorrerá 3 unidades de espaço após 3 segundos. Porém, essa informação, por si só, não nos diz qual a posição exata do corpo, pois não sabemos em qual sentido foi o seu deslocamento. Portanto, convencionaremos chamar o deslocamento do corpo para a direita de sentido *positivo* e o esquerdo de *negativo*.

Assim, se um corpo se desloca 8 unidades no sentido positivo e 5 unidades no sentido negativo, temos que o mesmo se encontra na posição correspondente a 3 unidades no sentido positivo. Se, porém, o corpo se desloca 8 unidades no sentido positivo e 10 unidades no sentido negativo, ele se encontrará na posição correspondente a 2 unidades no sentido negativo. Aritmeticamente, podemos escrever as duas situações acima da seguinte maneira: $8 - 5 = 3$ e $8 - 10 = -2$.

Observe que usamos o símbolo -2 para representar 2 unidades à esquerda da origem. Assim, sempre que quisermos representar algum número à esquerda da origem (o zero), o precederemos pelo sinal de "–".

Portanto, segundo Caraça [3], é possível estender o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais para criar *o conjunto dos números inteiros*, o qual será representado pela letra $\mathbb{Z}$. O zero também será um elemento (a origem) desse conjunto. Assim, os números inteiros são:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

No capítulo anterior, vimos que o conjunto $\mathbb{N}$ foi caracterizado pela existência do sucessor, isto é, todos os números do conjunto, com exceção do número 1, eram sucessor de alguém. No conjunto $\mathbb{Z}$, podemos dizer que todo elemento tem sucessor e *antecessor*, isto é, dado um número inteiro n, sempre existem seu sucessor $n+1$ e seu antecessor $n-1$.

Observe que o conjunto $\mathbb{Z}$ é o conjunto formado por todos os números naturais (que daqui por diante também serão chamados de *inteiros positivos*), o zero e os números naturais acrescidos do sinal negativo (os quais chamaremos de *inteiros negativos*).

2.2 A Correspondência $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z}$

Ao observarmos os elementos dos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, podemos inferir, intuitivamente, que o conjunto $\mathbb{Z}$ tem mais elementos que o conjunto $\mathbb{N}$, visto que além dos números positivos ele ainda contém os números negativos e o zero. Porém, ao contrário do que a nossa intuição nos diz, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos desses dois conjuntos infinitos.

Para isso, basta correspondermos os números pares aos números inteiros positivos (e o zero) e os números ímpares aos números inteiros negativos: $1 \leftrightarrow -1$, $2 \leftrightarrow 0$, $3 \leftrightarrow -2$, $4 \leftrightarrow 1$, $5 \leftrightarrow -3$, $6 \leftrightarrow 2$, $7 \leftrightarrow -4$, $8 \leftrightarrow 3$, $\ldots$.

Essa correspondência é claramente biunívoca e, portanto, os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são equivalentes.

Capítulo 3

Números Racionais

3.1 Medição de Segmentos

Assim como contar, *medir* é uma operação que utilizamos bastante no nosso dia-a-dia. Em muitas situações, há a necessidade de se fazer medidas: o comerciante, quando precisa saber a quantidade certa de um produto que está vendendo; o agricultor, ao calcular a quantidade de sementes necessárias para lançar à terra de que dispõe; o operário, para saber se está executando corretamente um determinado serviço; a dona-de-casa, para saber a dosagem de remédio que o médico passou para seu filho. Enfim, em muitas situações diárias, precisamos realizar uma medição. Mas o que é medir? Medir significa comparar grandezas de mesma espécie. Não se trata de uma simples comparação para ver quem é maior. Mas de ver quantas vezes um "cabe" no outro.

Se queremos comparar, por exemplo, os comprimentos dos segmentos AB e CD abaixo, verificamos quantas vezes CD cabe em AB. Assim, se dissermos que o comprimento de CD (o qual denotaremos por $\overline{CD}$) é de 1 unidade ($1u$), o segmento AB tem comprimento igual a $3u$ (Figura 3.1).

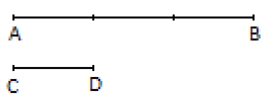

Figura 3.1: Medida de um segmento

Portanto, é necessário estabelecermos uma unidade padrão de medida para todas as grandezas de mesma espécie (como o centímetro, metro, litro, etc.) e, depois, verificar quantas vezes a unidade cabe no objeto a ser medido. Este número (quantidade de vezes que a unidade cabe no objeto) chama-se *medida* da grandeza em relação a essa unidade. Note que, apesar do comprimento de um segmento ser constante, sua medida depende da unidade adotada. No exemplo da figura acima, se a unidade de medida adotada, ao invés de ser o segmento CD, fosse um segmento cujo comprimento é a metade de CD, a medida de AB seria $6u$ e não $3u$.

Em resumo, para realizarmos uma medida, fazemos em três etapas: escolha da unidade; comparação do objeto com a unidade; expressão do resultado dessa comparação por meio de um número.

É importante observarmos que, apesar da escolha da unidade ser feita da maneira que quisermos, é interessante que ela seja feita visando simplificar o resultado. Por exemplo, seria extremamente incômodo calcular a medida da distância entre duas cidades usando o milímetro como unidade.

3.2 Subdivisão da Unidade

Às vezes, é necessário subdividir a unidade de medida num certo número de partes iguais. Vejamos um exemplo (Figura 3.2):

EXEMPLO 1. Suponhamos que um segmento AB medido com a unidade $\overline{CD} = u$, mede 3. Se dividirmos a unidade CD em 4 partes iguais e tomarmos para a nova unidade o segmento CE, de medida u', teremos que a medida de AB será igual a 12. Além disso, o resultado da medição com a unidade u tanto pode ser expresso pelo número 3 como pela razão dos dois números 12 e 4, isto é, pelo quociente $12 : 4$ ou $\dfrac{12}{4}$.

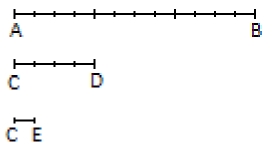

Figura 3.2: Medida do segmento AB

De maneira geral, se uma grandeza, medida com a unidade u, mede m, e subdividirmos u em n partes iguais, a medida da mesma grandeza, com a mesma unidade u, exprime-se pela razão dos dois números $M = m.n$ e n. Aritmeticamente, temos $m = \dfrac{M}{n}$.

O caso que analisamos, porém, é um caso *muito raro* de acontecer: o fato da unidade caber um número inteiro de vezes na grandeza a se medir. O caso mais comum é o do exemplo a seguir, onde a unidade não cabe um número inteiro de vezes em AB.

EXEMPLO 2. Suponhamos os segmentos AF e CD conforme Figura 3.3.

Como procedemos, então, para exprimir numericamente a medição de AF usando como unidade de medida o segmento CD?

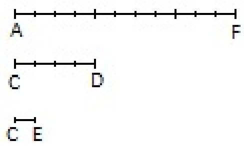

Figura 3.3: Medida do segmento AF

Se dividirmos o segmento CD (a unidade) em 4 partes iguais a nova unidade caberá 11 vezes em AF. Nesse caso, a medida de AF em relação à nova unidade é 11. Mas em relação à antiga unidade CD, como podemos exprimir a medida de AF? Seria a razão entre os números 11 e 4, mas em $\mathbb{N}$ essa razão não existe.

A resposta a essa pergunta, de acordo com Caraça [3], nos leva à criação de um novo tipo de número. Essa construção deve ser feita de modo que com os novos números, sejam abrangidas todas as hipóteses de medição, sejam elas do primeiro exemplo ou do segundo exemplo; além disso, os novos números se reduzem aos números inteiros quando a medição se der de modo análogo ao nosso primeiro exemplo.

3.3 O Conjunto dos Números Racionais

Sejam os dois segmentos de reta AB e CD, onde em cada um deles cabe um número inteiro de vezes o segmento de medida u – AB contém m vezes e CD contém n vezes. Dizemos que a medida do segmento AB, tomando CD como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escrevemos

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD},$$

quaisquer que sejam os números inteiros m e n (desde que n não seja nulo). Note que se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se m não for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ é dito *fracionário*. Em qualquer um dos casos, o número $\frac{m}{n}$ é dito racional (ao número m chamamos *numerador* e ao n, *denominador*).

Estamos, agora, diante de um novo conjunto numérico – o *conjunto dos números racionais* – que compreende o conjunto dos números inteiros e mais o conjunto formado pelos números fracionários[1]. Com a criação desses números, nos parece que é sempre possível exprimir a medida de um segmento tomando outro como unidade. Além disso, a divisão de números inteiros m e n pode agora sempre exprimir-se simbolicamente pelo

[1]Apesar do conjunto dos números racionais compreender todos esses números – positivos e negativos –, a menos que seja mencionado o contrário, sempre estaremos nos referindo aos racionais positivos, visto estamos expressando medidas de dimensões.

número racional $\frac{m}{n}$. Assim, o conjunto dos números racionais constitui uma generalização do conjunto dos números inteiros (Note que obtemos os números inteiros dos racionais fazendo $n = 1$).

3.4 O Problema da Medida

Na seção anterior, fizemos a construção do conjunto dos números racionais com base na igualdade

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD},$$

a qual exprime que a medida do segmento AB, tomando como unidade o segmento CD, é o número racional $\frac{m}{n}$. Essa construção se baseia no seguinte procedimento: divide-se a unidade CD em tantas partes iguais quantas as necessárias para que cada uma delas caiba um número inteiro de vezes em AB e, assim, o nosso problema de medida restringe-se, em última análise, a um problema de contagem. Mas será que sempre poderemos proceder dessa mesma maneira, isto é, podemos sempre dividir a nossa unidade de medida em um número de partes iguais de modo que consigamos medir o segmento AB?

Do ponto de vista prático, a resposta a essa pergunta é *sim*. Pois quanto mais se aumenta o número de partes que dividimos a unidade, menor será o comprimento de cada uma delas e chega num momento em que a precisão limitada dos instrumentos de divisão e de medida não nos permite ir além de um certo comprimento mínimo. Com esse comprimento mínimo (uma subdivisão de CD), conseguimos realizar a medição de AB.

Do ponto de vista teórico, porém, a questão não é tão simples. Consideremos o seguinte caso de medição de segmentos:

EXEMPLO 3. Seja $ABCD$ um quadrado e AC uma diagonal desse quadrado, conforme figura 3.4 abaixo.

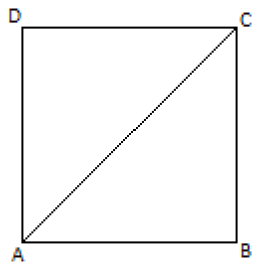

Figura 3.4: Quadrado $ABCD$ com diagonal AC

Queremos achar a medida dessa diagonal usando o lado do quadrado como unidade de medida.

Se essa medida existir, então existe um número racional $r = \frac{m}{n}$ tal que $\overline{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overline{AB}$. Mas essa igualdade é incompatível com o teorema de Pitágoras, que, nesse caso, diz que

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2.$$

Vejamos: como, por hipótese, temos $\overline{AB} = \overline{BC}$, então

$$(\overline{AC})^2 = 2(\overline{AB})^2.$$

Por outro lado, temos por hipótese que $\overline{AC} = \frac{m}{n} \cdot \overline{AB}$, que é equivalente a

$$(\overline{AC})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot (\overline{AB})^2.$$

Comparando esta igualdade com a anterior, temos que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Vamos verificar que esta última igualdade nos conduz a um absurdo aritmético. Mas, antes, vamos ver o que diz o *Teorema Fundamental da Aritmética*:

Teorema 3.4.1 (Teorema Fundamental da Arimética)**.** *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Assim, de $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, temos que $m^2 = 2n^2$. Isto é,

$$(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k)^2 = 2 \cdot (q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_r)^2,$$

que é equivalente a

$$p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_k^2 = 2 \cdot q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot \ldots \cdot q_r^2,$$

onde $p_i, 1 \leq i \leq k$ são números primos que aparecem na decomposição de m e $q_j, 1 \leq j \leq r$, são números primos que aparecem na decomposição de n. Mas pelo teorema fundamental da aritmética, isso é um absurdo, pois no primeiro membro temos uma quantidade par de fatores e no 2º membro temos uma quantidade ímpar, visto que além de todos os q_i estarem elevados a 2 (e, portanto, ter uma quantidade par de fatores), temos o número 2 multiplicando. Portanto, não existe número racional cujo quadrado seja igual a 2.

No exemplo 4 será apresentada uma interpretação geométrica do problema da medida do lado e da diagonal de um quadrado.

EXEMPLO 4. Seja $ABCD$ um quadrado de lado de medida a e diagonal d. Queremos verificar se podemos, com a mesma unidade de medida, expressar o lado e a diagonal de um quadrado[2].

Para isso, suponhamos, por absurdo, que existam um segmento u e p, q naturais tais que $a = p \cdot u$ e $d = q \cdot u$. Consideremos um ponto B_1 em AC tal que $\overline{B_1C} = \overline{BC} = a$ e um ponto C_1 em AB tal que $B_1C_1 \perp AC$. Construímos desta forma um quadrado $AB_1C_1D_1$ de lado a_1 e diagonal d_1 (conforme figura 3.5).

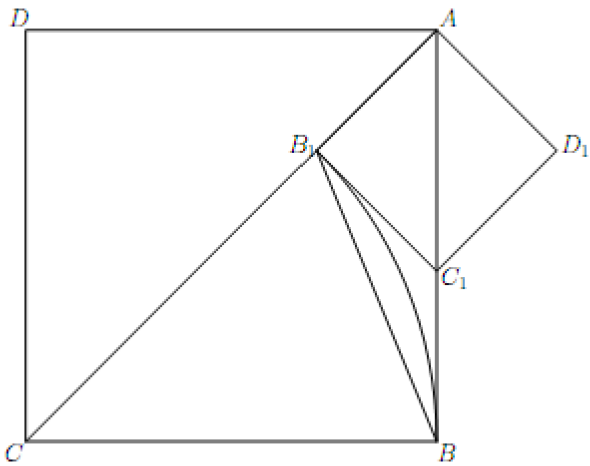

Figura 3.5: O Problema da Medida

Como $\overline{BC} = \overline{B_1C}$, o triângulo BB_1C é isósceles de base BB_1, o que implica que $C\widehat{B}B_1 = C\widehat{B_1}B$. Mas esta última igualdade implica em $C_1\widehat{B}B_1 = C_1\widehat{B_1}B$. E, portanto, o triângulo BC_1B_1 é isósceles de base BB_1. E, assim, temos: $\overline{BC_1} = \overline{B_1C_1} = a_1$.

Logo:

$$a_1 = AB_1 = AC - B_1C = AC - BC = d - a = (q - p)u.$$

Usando a igualdade $\overline{BC_1} = \overline{B_1C_1}$ e a expressaõ anterior, obtemos:

$$d_1 = \overline{AC_1} = \overline{AB} - \overline{BC_1} = a - a_1 = (2p - q)u.$$

Portanto, a_1 e d_1 também são múltiplos inteiros de u.

Além disso, como $a = a_1 + d_1$ e $a_1 < d_1$ (pois a_1 e d_1 são, respectivamente, o lado e a diagonal de um mesmo quadrado), temos que $2a_1 < a$.

Aplicando a mesma construção ao quadrado $AB_1C_1D_1$, obtemos um novo quadrado $AB_2C_2D_2$, com lado a_2 e diagonal d_2 também múltiplos inteiros de u e tal que $2a_2 < a_1$. Portanto, $4a_2 < 2a_1 < a$.

Continuando esse processo indefinidamente, obtemos uma sequência de quadrados $(AB_nC_nD_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com lados a_n e diagonais d_n, todos múltiplos inteiros de u, tais que o lado de cada quadrado é menor que a metade do lado do quadrado anterior, isto é,

[2]Essa demonstração foi retirada de [7].

$2a_n < a_{n-1}$. Assim, $2^n a_n < a = p \cdot u$ e, para n suficientemente grande, a_n seria menor que u, contradizendo o fato de ser seu múltiplo inteiro.

Portanto, não podem existir uma unidade comum u e p, q naturais tais que $a = p \cdot u$ e $d = q \cdot u$.

Assim, existem medidas que não podem ser escritas por meio de números racionais e, portanto, estamos diante de um problema que tem que ser resolvido. Segundo Caraça [3] temos que criar um outro tipo de número que seja capaz de expressar a medida de um segmento qualquer.

Estamos diante de uma situação análoga àquela em que nos encontrávamos quando não conseguíamos expressar uma determinada medida através dos números naturais e precisávamos ampliar esse conjunto. Aqui, porém, nos encontramos em uma situação um pouco peculiar, pois antes o nosso problema se restringia ao problema *prático* da medida enquanto que agora é a exigência da *compatibilidade lógica* entre o teorema de Pitágoras e a existência de um número que expressa uma determinada medida[3].

3.5 Incomensurabilidade

Quando dois segmentos de reta são tais que não conseguimos, com uma unidade de medida comum, expressarmos com múltiplos inteiros a medida dos dois segmentos, dizemos que eles são *incomensuráveis*. Na seção anterior, verificamos que a diagonal e o lado de um quadrado são incomensuráveis. O que vamos constatar mais a frente é que o caso mais comum na medida é o da incomensurabilidade.

Como vimos através do exemplo 3, o conjunto dos números racionais é insuficiente para traduzir as relações geométricas. Com o objetivo de resolver o problema da insuficiência dos números racionais, vamos estudar cuidadosamente as propriedades dos números racionais e as propriedades da reta para que possamos compará-las.

3.6 O Conjunto dos Números Racionais e os Pontos da Reta

Daqui por diante, quando nos referirmos ao conjunto dos números racionais, usaremos a letra $\mathbb{Q}$ e ao conjunto dos pontos de uma reta, a letra $\mathbb{P}$. Vale ressaltar que, a menos que seja dito o contrário, daqui para frente trabalharemos com os racionais positivos.

[3]Vale ressaltar que não estamos diante de um problema (teórico) de medida isolado, ou seja, existe uma infinidade de exemplos análogos que nos levam a criação de um outro tipo de número.

Vamos ver se podemos estabelecer uma correspondência entre essses dois conjuntos (**entre $\mathbb{Q}$ e a reta**) e, em caso afirmativo, verificar qual a natureza dessa correspondência.

Sejam t uma reta, O um ponto qualquer dela (o qual chamaremos de *origem*) e A um ponto tal que OA é a unidade de medida (ver figura 3.6). Seja r o número racional tal que $r = \frac{m}{n}$, onde OA foi dividido em n partes iguais e, a partir de O, para a direita, marcamos m dessas n partes, obtendo, assim, um ponto B. O número r é a medida do segmento OB tomando OA como unidade de medida. Para qualquer que seja $r = \frac{m}{n}$, essa operação pode ser efetuada e, além disso, o ponto B é único. Temos, portanto, que a correspondência $\mathbb{Q} \to \mathbb{P}$ **é *completa* e *unívoca***.

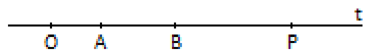

Figura 3.6: Correspondência $\mathbb{Q} \to \mathbb{P}$

Contudo, sua recíproca $\mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ *não é completa.* Senão, vejamos: seja P um ponto qualquer da reta. Queremos encontrar a medida de OP usando a unidade OA. Mas se OP e OA forem incomensuráveis, não vai existir um número racional como estamos procurando. Portanto, a correspondência entre os números racionais e os pontos da reta não é uma correspondência biunívoca.

O que temos que fazer agora, de acordo com Caraça [3] é determinar o que causou a falta de biunivocidade para que possamos criar um novo conjunto numérico. Para isso, vamos estudar as propriedades da reta (*infinidade, ordenação, densidade e continuidade*) e verificar se o conjunto $\mathbb{Q}$ goza de tais propriedades.

3.6.1 Infinidade

Tanto o conjunto $\mathbb{P}$ dos pontos da reta como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais são infinitos. A infinidade de $\mathbb{Q}$ é facilmente verificada a partir da infinidade de $\mathbb{N}$, que está contido em $\mathbb{Q}$ e a infinidade dos pontos da reta já discutimos na seção 1.8.

3.6.2 Ordenação

Dizemos que um conjunto é *ordenado* quando dados dois elementos desse conjunto podemos estabelecer qual elemento precede o outro. No caso dos conjuntos numéricos, podemos estabelecer a relação de ordem *menor que*. E, nesse sentido, o conjunto $\mathbb{Q}$ é um conjunto ordenado, pois dados dois elementos quaisquer podemos, de fato, compará-los e decidir qual é *menor que* o outro.

Quanto aos pontos da reta, podemos estabelecer a relação de ordem da seguinte maneira: dados dois pontos A e B, dizemos que A *precede* B se A estiver à esquerda de B. Assim, o conjunto $\mathbb{P}$ também é ordenado, pois dados dois pontos da reta quaisquer podemos decidir qual elemento precede o outro bastando para isso ver qual está a esquerda do outro. O conjunto $\mathbb{P}$ é, portanto, ordenado[4].

3.6.3 Densidade

Vamos dizer que um conjunto é *denso* quando dados dois elementos quaisquer desse conjunto podemos encontrar infinitos elementos do conjunto entre eles. O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, obviamente não é denso. Já o conjunto dos pontos de uma reta é denso, visto que, como ponto não possui dimensão, sempre podemos encontrar infinitos pontos entre dois pontos dados.

Mas o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso? Vejamos: dados dois números racionais r e s, podemos encontrar um outro racional entre eles: $\frac{r+s}{2}$. Procedendo da mesma maneira podemos encontrar um outro número racional agora entre r e $\frac{r+s}{2}$ (que obviamente estará entre r e s). Se continuarmos esse processo indefinidamente, encontraremos infinitos racionais entre r e s. Portanto, $\mathbb{Q}$ é um conjunto denso.

3.6.4 Completude

Intuitivamente, a completude está relacionada com a ideia de ausência de saltos, de buracos. Uma excelente representação da completude é a reta. Portanto, se quisermos verificar se um conjunto é *completo* temos que verificar se ele tem a mesma estrutura da reta. Em caso afirmativo, esse conjunto goza da propriedade da completude.

O que nos falta agora é estabelecer um critério que possa determinar se a estrutura de um conjunto é ou não a mesma da reta. É isso que vamos fazer a seguir.

Cortes de Dedekind

Seja uma reta e um ponto P sobre ela. É fácil verificar que, em relação a P, todos os pontos da reta se dividem em duas classes: a classe (E) dos pontos que estão à esquerda de P e a classe (D) dos que estão à direita de P. O ponto P que divide as duas classes pode ser colocado em qualquer uma delas. A esse ponto damos o nome de *elemento de separação*.

Assim, sempre que podemos dividir os pontos da reta em duas classes de modo que: (i) todos os pontos da reta estão em uma das duas classes (isto é, não há exceção) e (ii)

[4] A rigor, teríamos que mostrar que a injeção de $\mathbb{Q}$ na reta preserva a relação de ordem, mas omitiremos essa verificação para simplificar o problema.

todo ponto de (E) está à esquerda de todo ponto de (D), temos um *corte*, que é denotado por (E, D).

Portanto, todo ponto da reta produz nela um corte. A questão é: a afirmação recíproca é verdadeira, isto é, quando tivermos um corte na reta, haverá sempre um ponto P da reta que produza o corte? De acordo com o *Postulado de Dedekind-Cantor*, a resposta é *sim*. Esse postulado caracteriza a reta por meio dessa propriedade, em outras palavras, *todo corte da reta tem um elemento de separação.*

Logo, se quisermos saber se um conjunto goza ou não da completude temos que estabelecer nele o conceito de corte e verificar se existe ou não elemento de separação que pertença ao conjunto. Isto fará com que ele tenha a mesma estrutura da reta.

Agora voltemos a nossa questão inicial: O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais tem essa propriedade? Isto é, podemos estabelecer em $\mathbb{Q}$ o conceito de corte de modo que todo corte tenha um elemento de separação (assim como temos na reta)? Primeiro, vamos fixar o seguinte: quando na reta dizemos "...está à esquerda de ..." em números quer dizer "... é menor que ...". Assim, temos um corte em $\mathbb{Q}$ quando dividirmos esse conjunto em duas classes (E) e (D) tais que todo número racional está classificado em (E) ou (D) e todo número de (E) é menor que todo número de (D).

EXEMPLO 5. Um exemplo de corte em $\mathbb{Q}$ seria colocar em (E) todos os números racionais menores ou iguais a 10 e em (D) todos os números racionais maiores que 10. Obviamente, 10 é o elemento de separação desse conjunto.

Mas será que qualquer corte de $\mathbb{Q}$ tem elemento de separação?

EXEMPLO 6. Vejamos um segundo exemplo: seja (E) a classe onde estão todos os números racionais positivos cujo quadrado é menor que ou igual a 2 e (D) a classe onde estão todos os números racionais positivos cujo quadrado é maior que 2. Primeiramente, temos um corte em $\mathbb{Q}$ (lembre-se que estamos trabalhando com os racionais positivos) nesse caso? Veja que todo número racional está em (E) ou (D) – basta que dado um número racional qualquer verifiquemos se o quadrado de tal número é maior ou menor que 2. Além disso, como $r^2 < 2 < s^2$ nos garante $r < s$ então temos, de fato, um corte em $\mathbb{Q}$. Contudo, não existe um elemento de separação que pertence a $\mathbb{Q}$. Tal elemento que separa as duas classes seria o número cujo quadrado é 2[5], mas já vimos que esse número não é racional.

Portanto, o conjunto $\mathbb{Q}$ não é completo e assim, descobrimos a razão de não existir uma biunivocidade entre os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{P}$.

[5] Verifique que isso é verdade.

Devemos, então, conforme Caraça [3], ampliar o conjunto dos números racionais, criando um novo conjunto no qual exista sempre o elemento de separação de qualquer corte em $\mathbb{Q}$.

Capítulo 4

Números Reais

4.1 Definição e Relação entre os Conjuntos

Vimos que a reta é um conjunto completo e que não podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre ela e $\mathbb{Q}$. Porém, temos uma correspondência unívoca e completa de $\mathbb{Q}$ na reta, ou seja, é como se na reta existissem mais elementos do que no conjunto $\mathbb{Q}$. O que vamos fazer agora é definir um tipo de número que *complete* os números racionais de modo a termos uma correspondência biunívoca com os pontos da reta.

Assim, chamaremos *número real* ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais. Se existir um número racional que separe as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existir tal número, o número real dir-se-á *irracional*.

Teremos, dessa maneira, uma biunivocidade entre os números reais e os pontos da reta.

Ao conjunto dos números reias denotaremos por $\mathbb{R}$. Assim, podemos estabelecer a seguinte relação entre os conjuntos numéricos até aqui estudados: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

4.2 Alguns Números Irracionais

No conjunto dos números racionais, a operação da radiciação é, muitas vezes, impossível de ser efetuada – na verdade, existem muitos mais casos onde é impossível do que onde é possível. Já no conjunto dos números reais (positivos), essa operação é sempre possível. Senão, vejamos.

Para encontrar a raiz n-ésima de um número racional (positivo) a temos que encontrar um racional b tal que $b^n = a$. E, muitas vezes, tal b não existe. Já no conjunto $\mathbb{R}$, atacamos o problema de outra maneira: façamos em $\mathbb{Q}$ um corte de modo que na classe

(E) se encontram todos os racionais r tais que $r^n < a$ e na classe (D), todos os racionais s tais que $s^n > a$. Esse corte em $\mathbb{Q}$ define um número real t que divide as duas classes. Esse t pode ser racional ou irracional. Se ele for racional, deve ser tal que $t^n = a$; se for irracional, esse número é da forma $\sqrt[n]{a}$. Em ambos os casos, a raiz existe e a pergunta que se coloca, então, é: Será que os números irracionais são todos da forma $\sqrt[n]{a}$?

A resposta é *não* (um pouco adiante, mostraremos como gerar uma infinidade de números irracionais diferentes desses). Existem alguns números irracionais famosos muito usados na matemática: o π (razão entre o perímetro da circunferência e seu diâmetro) e o e, por exemplo[1].

4.3 Correspondência $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{P}$

No capítulo anterior, comparamos o conjunto dos números racionais com o conjunto dos pontos da reta, tentando verificar se esses conjuntos são equivalentes. O que constatamos é que eles não são (devido ao fato do conjunto $\mathbb{Q}$ não ser completo) e construímos um novo número (o número real) de modo a superar essa não biunivocidade.

Assim, baseado na nossa construção dos números reais, podemos dizer que a correspondência entre os números reais e os pontos da reta é biunívoca, isto é, existe uma equivalência entre os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}$ ($\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{P}$).

Observe que estamos falando da equivalência entre conjuntos de naturezas diferentes: um é um conjunto numérico, o outro, um conjunto geométrico. Podemos, portanto, a cada número real associar um ponto da reta e vice-versa. Daí a riqueza dos números reais.

4.4 Os Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ e os Tipos de Infinito

Consideremos os cinco conjuntos até aqui estudados:

- O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais;
- O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros;
- O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais;
- O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais;
- O conjunto $\mathbb{P}$ dos pontos de uma reta.

[1] Para saber mais informações sobre os números π e e, consulte [4].

No capítulo 1, vimos que o infinito do conjunto dos números naturais foi caracterizado de uma maneira diferente do infinito do conjunto dos pontos de uma reta. Faltou-nos, porém, verificar se esses conjuntos são distintos do ponto de vista da equivalência, isto é, existe ou não uma correspondência biunívoca entre os números naturais e os pontos de uma reta?

Primeiramente, analisemos a correspondência $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Será que o infinito desses dois conjuntos são de classes distintas? Vimos que podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}$. Porém, vimos também que não foi impossível corresponder biunivocamente os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{P}$. Portanto, podemos concluir que não é possível obtermos uma equivalência entre os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Esses conjuntos são, portanto, de classes distintas de infinitos.

Mas o infinito do conjunto $\mathbb{Q}$, pode ser caracterizado pela enumerabilidade (assim como os números naturais) ou existe ainda uma outra caracterização diferente das que vimos até aqui? Pode nos parecer óbvio que o conjunto $\mathbb{Q}$ não possa ser caracterizado pela enumerabilidade, visto que ele é denso (entre dois números racionais quaisquer existe uma infinidade de racionais) e $\mathbb{N}$ não é. Mas, para nossa surpresa, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$!

Veja como isso é possível[2]: reunimos as frações em grupos, cada grupo contém as frações cuja soma do numerador com o denominador seja constante e de modo que não apareça o mesmo número em grupos diferentes (frações equivalentes). Por exemplo,

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}$$

é o grupo das frações cuja soma do numerador e denominador é 7 e

$$\frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{7}{1}$$

é o grupo que corresponde à soma 8. Observe que cada grupo desses, contém um número finito de elementos (por maior que seja a soma). Basta, então, escrever todos os grupos, um após o outro, na ordem crescente das somas correspondentes e *enumerar* as frações na ordem em que aparecem. Assim, todos os racionais (positivos) aparecerão na lista:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$$

Logo, o conjunto $\mathbb{Q}$ é equivalente ao conjunto $\mathbb{N}$ e, portanto, podemos dizer que são do tipo *enumerável*. Em resumo, temos que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são do tipo enumerável e os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}$ não são. Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}$ são caracterizados pela completude e, portanto, diremos que o infinito desses conjuntos é da classe *completa*.

[2]Faremos a demonstração apenas para os racionais positivos. Para todos os racionais, a demonstração é análoga.

Podemos, portanto, estabelecer a seguinte relação entre os conjuntos até aqui estudados: $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{P}$. Assim, respondendo à pergunta do início da seção, os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{P}$ são, de fato, distintos no que diz respeito à equivalência e, portanto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ pertencem a infinitos de classes distintas (Já que os $\mathbb{R}$ e $\mathbb{P}$ são equivalentes). Temos, assim, que $\mathbb{R}$ é prevalente a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

4.5 Exemplos que ilustram a prevalência de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Q}$

Como vimos no início do capítulo, o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais e com o conjunto dos números irracionais. Além disso, vimos que o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável. Portanto, o conjunto dos números irracionais não pode ser enumerável, pois segundo Lima [10], "a união de conjuntos enumeráveis é enumerável". E assim, teríamos que ter o conjunto $\mathbb{R}$ enumerável. E como ainda segundo Lima [10], "o [conjunto] enumerável é o 'menor' dos [conjuntos] infinitos" (p.8), podemos dizer que o conjunto dos números irracionais é um conjunto prevalente ao dos números racionais.

Para ilustrar essa afirmação, vamos mostrar algumas listas infinitas de números irracionais[3]:

A sequência $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{p}, \ldots$, para p primo, é formada apenas por números irracionais

Para verificar que é verdade, vamos supor, por absurdo, que exista um p primo tal que $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, com m e n naturais. Então, $n^2 \cdot p = m^2$. Como p é primo, então p é fator primo a m e n. No 1º membro, o expoente de p é ímpar, já no 2º membro, o expoente de p é par. Mas isso contraria o teorema fundamental da aritmética. Concluindo a demonstração.

A sequência $\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \sqrt{k_3}, \ldots, \sqrt{k_n}, \ldots$, onde todos os k_i, $i \geq 1$ não são quadrados perfeitos, só tem números irracionais

Analogamente à demonstração anterior, vamos supor que exista i tal que $\sqrt{k_i} = \frac{m}{n}$. Nesse caso, temos $n^2 \cdot k_i = m^2$. Pelo teorema fundamental da aritmética, todo fator

[3] Os números irracionais podem ser de dois tipos: *algébricos* ou *transcendentes*. Números algébricos são aqueles que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros. Já os transcendentes são os que não são algébricos, ou, dito de outra maneira, são os irracionais que não são obtidos por operações elementares – adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação – entre racionais. É possível provar que os trancendentes não são enumeráveis e os algébricos são, isto é, os transcendentes são a maioria dos números reais. Para maiores informações, consulte [4].

primo de k_i deve ter expoente par, fazendo com que k_i seja um quadrado perfeito, o que contraria a hipótese.

$\sqrt[n]{p_1}, \sqrt[n]{p_2}, \ldots, \sqrt[n]{p_k}, \ldots$ são irracionais se cada p_i, $i \geq 1$, não é uma potência de n de nenhum número inteiro

Observemos que x é uma potência n de um número inteiro q, isto é, $x = q^n$ se, e somente se, cada bloco primo de x é do tipo, $q_i^{nr_i}$, onde q_i é um fator primo de q.

Desse modo, se fosse $\sqrt[n]{x} = \frac{r}{s}$, então $s^n x = r^n$. Logo, todo fator primo de x tem potência n. Isso diz que x é igual a um inteiro com potência n. Segue-se que x não pode ser racional.

Se p ou q não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ é irracional

Se $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ fosse racional teríamos, $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow \sqrt{pq} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{r^2}{s^2} - p - q) \Rightarrow \sqrt{pq}$ é racional. Mas isso contraria o segundo item demonstrado há pouco.

Considerações Finais

No decorrer desse trabalho, elaboramos uma proposta de material didático que poderá ser usado pelo professor como texto base para uma turma de 1º ano de ensino médio ao ensinar conjuntos numéricos.

A elaboração desse material tornou-se necessária devido aos livros didáticos (e os professores) negligenciarem esse conteúdo a ponto de apresentarem-no em algumas poucas páginas. Porém, como vimos, esse conteúdo é de grande importância na compreensão de como a matemática é construída ao longo dos anos. Diferentemente da maneira que é apresentada nos livros, fazendo com que a matemática pareça algo estático.

Assim, questionamentos sobre os diferentes "tipos de infinitos" não eram sequer mencionados nos livros, apesar de ser uma excelente oportunidade para introduzir a discussão sobre o infinito, assunto de grande importância, sobretudo, na matemática do ensino superior.

Com a proposta apresentada nesse trabalho, entendemos que é necessário e possível ensinar conjuntos numéricos sem, simplesmente, classificar os números em diferentes tipos, mas mostrando como a necessidade impõe a criação dos vários conjuntos numéricos. É possível, ainda, discutir com os alunos a existência de diferentes tipos de infinito e o que isso implica, por exemplo, no estudo das funções.

Portanto, cabe a nós, professores de matemática do ensino médio, mudarmos nossa postura no que diz respeito ao ensino da matemática. Não podemos mais repetir o que os livros didáticos nos "ensinam". Temos que aprender a ser leitores críticos desses livros que estão por aí para que possamos melhorar, de fato, o ensino de matemática nas escolas brasileiras.

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, Geraldo. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 2001.

[2] Barbosa, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. 10.ed. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2006.

[3] Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

[4] Figueiredo, Djairo. *Números Irracionais e Transcendentes*. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

[5] Giraldo, Victor. *O Desenvolvimento do Conceito de Número na Escola Básica*. 24ª Semana de Matemática da UFRN, Natal, 2012.

[6] Giraldo, V.; Caetano. P. & Mattos, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Material de estudo do PROFMAT da disciplina MA36. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] Giraldo, V.; Ripoll, C.; Rangel, L. & Roque, T. *Livro Companheiro do Professor de Matemática* - Volume I: Números. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (no prelo).

[8] Hefez, Abramo. *Elementos de Aritmética*. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2011.

[9] Iezzi, Gelson et al. *Matemática: Ciência e Aplicações*. 6.ed. v.1. São Paulo: Saraiva, 2010.

[10] Lima, Elon Lages. *Análise Real*: Funções de Uma Variável. v.1. 10.ed. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2009.

[11] Lima, Elon Lages *et al. A Matemática do Ensino Médio*. v.1. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2004.

[12] Paiva, Manoel. *Matemática - Paiva*. v.1. São paulo: Moderna, 2009.

[13] Ripoll, Cydara C. *A construção dos números reais nos ensinos fundamental e médio*. II Bienal da SBM, Salvador, 2004. Disponível em http://www.bienasbm.ufba.br/M54.pdf.