UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
(Mestrado)

Fernando Constantino

Sistemas Lineares: uma abordagem para o ensino médio.

Maringá-PR
2013

Fernando Constantino

Sistemas Lineares: uma abordagem para o ensino médio.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Dr. Cícero Lopes Frota

Maringá
2013

FERNANDO CONSTANTINO

SISTEMAS LINEARES: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Prof. Dr. Cícero Lopes Frota
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. André Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Cascavel - PR

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 14 de março de 2013.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

Constantino, Fernando
C758s Sistemas Lineares: uma abordagem para o ensino médio / Fernando Constantino. -- Maringá, 2013.
78 f. : il. color., figs., grafs.

Orientador : Prof. Dr. Cícero Lopes Frota.
Dissertação (mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional-PROFMAT, 2013.

1. Sistemas lineares. 2. Equações lineares. 3. Sistemas lineares - Método do escalonamento. 4. Sistemas lineares - Método de Gauss-Jordan. 5. Regra de Cramer - Aplicações. I. Frota, Cícero Lopes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional-PROFMAT. III. Título.

CDD 21.ed.512.5
ZSS-00891

Dedico este trabalho a minha família que sempre me apoiou ao longo destes anos e aos meus amigos que me apoiaram nesses dois anos.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pois, Ele me concedeu a graça de existir, aos meus colegas de classe, de maneira especial ao Silvio, com quem sempre pude contar durante esses dois anos.

À minha família por nunca me deixar desanimar.

Ao meu orientador Professor Cícero Lopes Frota por ter me orientado com dedicação e paciência.

A minha colega Adriana, que me ajudou muito com suas sugestões.

E ao meu amigo Tiago que sempre me ouviu e me apoiou.

À CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

"Há um tempo em que é preciso abandonar as roupas usadas, que já tem a forma do nosso corpo, e esquecer os nossos caminhos, que nos leva sempre aos mesmos lugares. É o tempo da travessia: e, se não ousarmos fazê-la, teremos ficado, para sempre, à margem de nós mesmos. "

Fernando Pessoa.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre sistemas lineares. Iniciamos com o estudo dos sistemas 2×2, sistemas 2×3 e sistemas 3×3, e usando argumentos geométricos provamos que para tais sistemas ocorre uma, e somente uma das alternativas: o sistema tem uma única solução, o sistema tem infinitas soluções ou o sistema não possui solução. Também apresentamos resultados algébricos que estabelecem condições sobre os coeficientes dos sistemas, para cada um dos casos citados. Na sequência apresentamos alguns métodos de resoluções e discutimos algumas aplicações.

Palavras chave: Sistemas lineares no ensino médio; Métodos de resoluções; Aplicações de sistemas lineares.

Abstract

In this work we present a study on linear systems. We begin with the study of systems 2x2, 2x3 system and 3x3 systems, and using geometric arguments we prove that for these systems there occurs a, and only one of the alternatives: the system has a single solution, the system has infinites solutions or the system does not have solution. We also present results that establish algebraic conditions on the coefficients of the systems for each one of instances cited. In the sequence we present some methods of resolution and discuss some applications.

key words: Linear systems in high schools; Methods of resolutions; Applications of linear systems.

Sumário

Introdução

Os sistemas lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes do ensino médio, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. A abordagem que utilizamos neste trabalho requer noções básicas de Geometria Analítica, Geometria Espacial, Matrizes e Determinantes, em nivel de [3], [4], [11] e [13]. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Este trabalho visa proporcionar aos professores que ensinam sistemas lineares, algumas alternativas para ilustrar suas aulas e ajudá-los a situar adequadamente a matéria dentro do contexto dos seus conhecimentos.

De acordo com as orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais o conteúdo sistemas lineares deve receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, estendendo os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro sengundo para a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas e sistemas 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento.

Como motivação, vejamos os seguintes exemplos:

Exemplo 1. *Em um certo posto de combustíveis, um carro flex foi abastecido com etanol e gasolina, totalizando* $52L$. *Nesse dia o preço do litro do etanol era de* $R\$1,90$ *e o litro da gasolina,* $R\$2,80$. *Sabendo que foram pagos* $R\$133,00$ *pelo abastecimento, determine a quantidade de etanol e gasolina com que o carro foi abastecido.*

Exemplo 2. *A queima do etanol* (C_2H_5OH)*, pelo oxigênio* (O_2)*, para formar o dióxido de carbono* (CO_2) *e a água* (H_2O) *é dada pela equação*

$$\underbrace{xC_2H_5OH + yO_2}_{reagentes} \rightarrow \underbrace{zCO_2 + wH_2O}_{produtos} \tag{1}$$

Determine os valores das incógnitas x, y, z *e* w *como sendo os menores naturais possíveis, para que a equação (1) esteja balanceada, ou seja, a quantidade de átomos nos reagentes seja igual a nos produtos.*

Exemplo 3. *Três grandes empresas de táxi resolveram renovar parte de suas frotas:*

- *a primeira comprou um carro modelo A, um modelo B e um modelo C, pagando* $R\$180.000,00$.
- *a segunda comprou um carro modelo A, dois modelo B e três modelo C, pagando* $R\$380.000,00$.
- *a terceira comprou dois carros modelo A, três modelo B e um modelo C, pagando* $R\$350.000,00$.

Qual é o valor de cada carro?

Para que possamos resolver esses três problemas, é necessário saber a teoria de sistemas lineares, conteúdo que trataremos de forma detalhada neste trabalho, sendo este composto de três capítulos.

No primeiro capítulo definiremos equações e sistemas lineares. A partir dessas definições trataremos três casos particulares de sistemas lineares: sistemas 2×2; sistemas 2×3 e sistemas 3×3. Para esses casos particulares iremos fazer uma interpretação geométrica e por meio desta interpretação constaremos que para um sistema linear ocorre uma e, somente uma das afirmações abaixo:

i) Existe uma única solução;

ii) Existem infinitas soluções;

iii) Não existe solução.

Também apresentaremos uma demonstração algébrica deste fato.

O segundo capítulo será sobre resolução de sistemas lineares para o caso geral, assim definiremos e provaremos sistemas equivalentes conteúdo necessário para discutirmos sobre sistemas escalonados. A partir deste capítulo, apresentaremos dois métodos de resolução: escalonamento (eliminação de Gauss) e Gauss-Jordan. Também neste capítulo aprestaremos o sistema linear na forma matricial e a partir desta forma, discutiremos o método de resolução de Crammer (conhecido como regra de Crammer). Para finalizar o segundo capítulo, analisaremos e discutiremos as três possibilidades de solução para um sistema linear utilizando sistemas na forma escalonada.

No terceiro capítulo, apresentaremos algumas aplicações relacionadas a situações cotidianas e interdisciplinar de sistemas lineares, também iremos retomar os três exemplos apresentados no início desta seção para resolvê-los.

Capítulo 1

Sistemas de Equações Lineares

Neste capítulo definimos equações e sistemas lineares. Estudamos alguns casos particulares: sistemas 2×2, sistemas 2×3 e sistemas 3×3. Realizando uma abordagem geométrica, teremos base para provar algebricamente, que para um sistema linear ocorre uma e somente uma das possibilidades: existe uma única solução, existem infinitas soluções ou não há solução alguma.

Dado $n \in \mathbb{N}$ uma equação linear de n incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta \tag{1.1}$$

onde α_i e β são números reais dados, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Uma solução da equação (1.1) é uma n-upla de números reais indicados por $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ tal que

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \ldots + \alpha_n b_n = \beta$$

Exemplo 4. *Cosidere a equação $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2$. Note que a terna $(1, 0, 0)$ é uma solução da equação, pois $2 \cdot (1) + 3 \cdot (0) - 6 \cdot (0) = 2$. Além disso veja que $(4, 0, 1)$ também é uma solução da equação. Note que podemos ainda encontrar uma infinidade de soluções escrevendo:*

$$x_1 = 1 - \frac{3}{2} x_2 + 3x_3 \tag{1.2}$$

com x_2 e x_3 livres, ou seja, para valores arbitrários escolhidos para x_2 e x_3 a expressão (4) determina x_1 de modo que (x_1, x_2, x_3) seja solução.

Definição 1.1. *Um sistema linear de m equações e n incógnitas (que chamaremos simplesmente um sistema $m \times n$) é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente, isto é, um sistema da forma:*

$$S : \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

onde $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$).

Uma solução do sistema S é uma n-upla $(b_1, \ldots, b_n)$ de números reais que é uma solução de cada uma das equações do sistema.

Exemplo 5. *Dado o sistema*

$$S_1 : \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Podemos facilmente verificar que as duas equações não podem ser satisfeitas simultaneamente. Neste caso o sistema não possui solução alguma.

Exemplo 6. *Considere o sistema*

$$S_2 : \begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

Nesse caso o sistema tem uma e a única solução dada pelo par $(-3, 2)$.

Exemplo 7. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} 3x - y = -3 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$$

Vemos que existem infinitas soluções, entre elas por exemplo $(-1, 0)$, $(1, 6)$ e $(5, 18)$.

Conforme ilustrado pelos exemplos 5, 6 e 7 acima, veremos com nosso estudo que, para um sistema linear qualquer, uma, e somente uma, destas 3 possibilidades ocorre:

i) O sistema linear S não admite solução alguma, como no exemplo 2, e neste caso, dizemos que S é impossível.

ii) O sistema linear S admite uma única solução, como no exemplo 3, e neste caso, dizemos que S é possível e determinado.

iii) O sistema linear S admite infinitas soluções, como no exemplo 4, e neste caso, dizemos que S é impossível e indeterminado.

1.1 Sistemas 2×2

Considere o sistema 2×2:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = \beta_2 \end{cases}$$

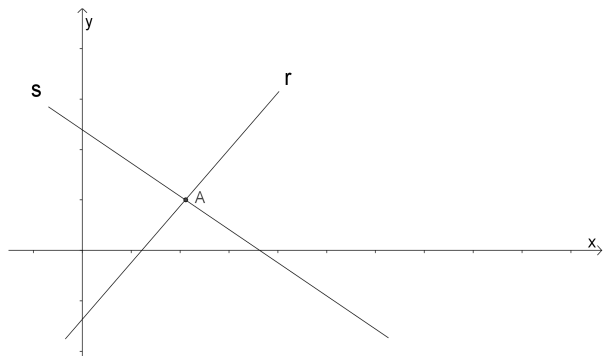
e vamos reescrevê-lo de uma forma conveniente para fazermos uma abordagem geométrica. Assim considere o sistema 2×2:

$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

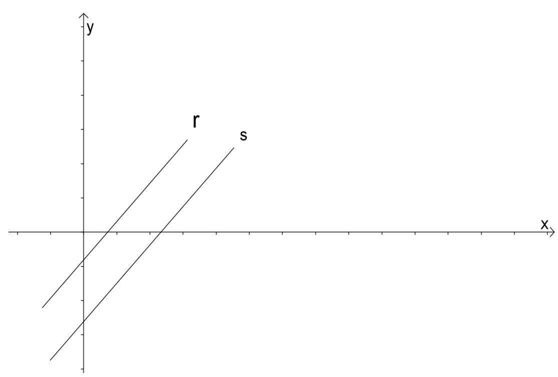
Veja que se $a_1 = b_1 = 0$ e $c_1 \neq 0$ o sistema é impossível. Além disso, se $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ o sistema se reduz a uma única equação que pode facilmente ser resolvida. Portanto no que segue estaremos considerando que a_1 e b_1 não são simultaneamente nulos, bem como, a_2 e b_2 também não. Logo supomos que $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ e $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Agora note que cada equação de S, isoladamente, representa uma reta no plano. Sejam $r : a_1x + b_1y = c_1$ e $s : a_2x + b_2y = c_2$ estas retas. Podemos ver que um par (x, y) é solução do sistema (S) se, e somente se, $(x, y) \in (r \cap s)$. Sabemos entretanto que as posições relativas de duas retas no plano são:

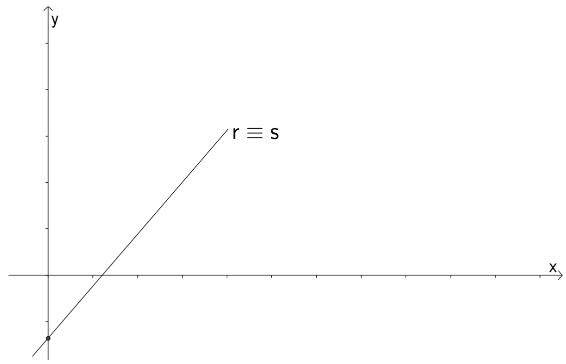
a) Concorrentes: Neste caso há somente um ponto de interseção, e consequentemente, o sistema (S) possui uma única solução.



b) Paralelas e distintas: Neste caso não há interseção e consequentemente o sistema (S) não possui solução.



c) Coincidentes: Neste caso existe uma infinidade de pontos na interseção das retas. Na verdade é a própria reta, isto é, $r \cap s = r$. Portanto quando isso ocorre o sistema (S) possui infinitas soluções.



Resumindo temos o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Para o sistema $S_{2\times 2}$ com os coeficientes satisfazendo $a_i^2+b_i^2 \neq 0$, com $i = 1, 2$, podemos verificar que ocorre uma, e somente uma, das alternativas abaixo:*

i) *(S) tem uma única solução.*

ii) *(S) não possui solução.*

iii) *(S) tem infinitas soluções.*

Neste momento uma pergunta natural é determinar condições algébricas sobre os coeficientes a_i, b_i e c_i com $i = 1, 2$, para que tenhamos cada uma das condições (i), (ii) e (iii) do teorema.

A resposta vem com o teorema abaixo, onde para facilitar a notação consideramos os determinantes: $D_{ab} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2,\ D_{ac} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2$ e $D_{bc} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - c_1b_2$.

Teorema 1.2. *Seja (S) um sistema 2×2 com os coeficientes $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, com $i = 1, 2$. Então*

i) *(S) possui uma única solução se, e somente se, $D_{ab} \neq 0$.*

ii) *(S) não tem solução se, e somente se,* $D_{ab} = 0$ *e pelo menos um dos determinantes* D_{ac} *e* D_{bc} *é não nulo.*

iii) *(S) possui infinitas soluções se, e somente se,* $D_{ab} = D_{ac} = D_{bc} = 0$.

Demonstração. Conforme denotamos anteriormente, consideramos as retas r e s:

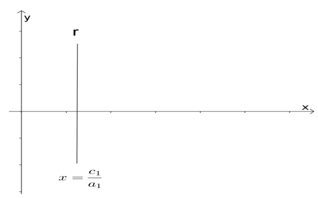
$$r : a_1x + b_1y - c_1 = 0 \quad \text{e} \quad s : a_2x + b_2y - c_2 = 0$$

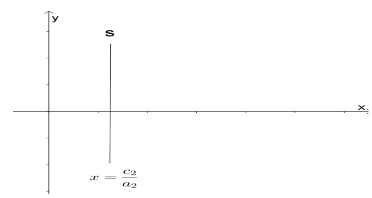
Desde que $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$, para $i = 1$ e 2, temos as seguintes possibilidades

1. $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 = 0$
2. $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$, $a_2 = 0$ e $b_2 \neq 0$
3. $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$
4. $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 = 0$
5. $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 = 0$ e $b_2 \neq 0$
6. $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$
7. $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 = 0$
8. $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 = 0$ e $b_2 \neq 0$
9. $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$

Vejamos o que ocorre em cada caso:

Caso 1: Neste caso $D_{ab} = D_{bc} = 0$ e r, s são retas perpendiculares ao eixo x.





Logo temos duas possibilidades: r e s paralelas distintas ou r e s coincidentes. Vemos também que nestes casos:

$$r \parallel s \quad \text{e} \quad r \neq s \Longleftrightarrow +\frac{c_1}{a_1} \neq +\frac{c_2}{a_2} \Longleftrightarrow a_1c_2 - c_1a_2 \neq 0 \Longleftrightarrow D_{ac} \neq 0$$

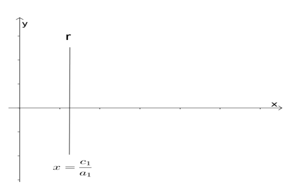
$$r \equiv s \Longleftrightarrow +\frac{c_1}{a_1} = +\frac{c_2}{a_2} \Longleftrightarrow D_{ac} = 0$$

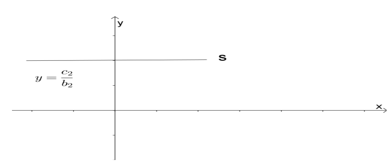
Portanto no caso 1, podemos ter:

i) (S) não tem solução e neste caso $D_{ab} = D_{bc} = 0$ e $D_{ac} \neq 0$.

ii) (S) tem infinitas soluções e neste caso $D_{ab} = D_{bc} = D_{ac} = 0$.

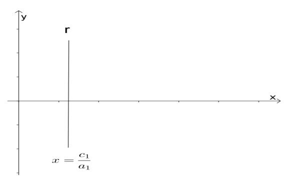
Caso 2: Neste caso $D_{ab} = a_1b_2 \neq 0$, r é uma reta perpendicular ao eixo x e s é uma reta perpendicular ao eixo y.

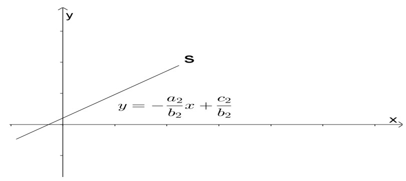




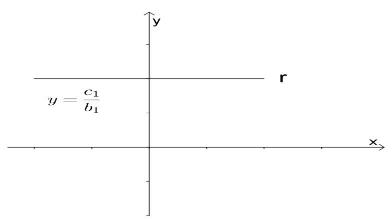
Então temos que (S) possui uma única solução e neste caso $D_{ab} \neq 0$.

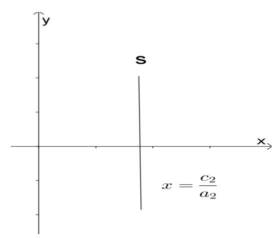
Caso 3: Neste caso $D_{ab} = a_1b_2 \neq 0$, r é uma reta perpendicular ao eixo x e s é a reta dada pela equação $y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}$, com $\frac{a_2}{b_2} \neq 0$. O sistema (S) tem uma única solução.



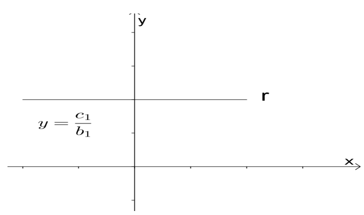


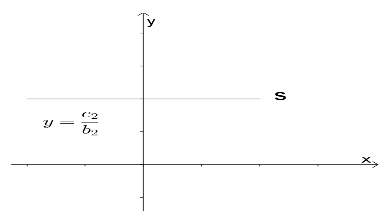
Caso 4: Neste caso $D_{ab} = -b_1 a_2 \neq 0$. O sistema (S) tem uma única solução.





Caso 5: Neste caso $D_{ab} = D_{ac} = 0$.

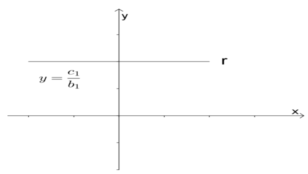


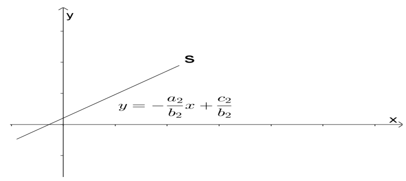


i) (S) não tem solução $\iff \frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2} \iff b_1c_2 - c_1b_2 \neq 0 \iff D_{bc} \neq 0$.

ii) (S) tem infinitas soluções $\iff \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \iff D_{bc} = 0$.

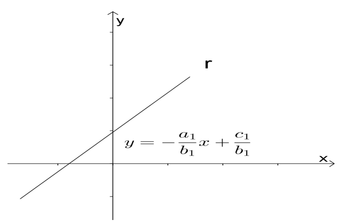
Caso 6:

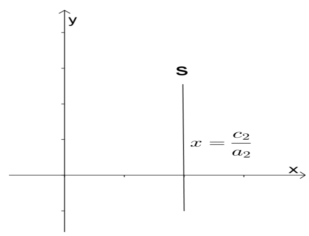




(S) tem uma única solução e, neste caso, $D_{ab} = -b_1 a_2 \neq 0$.

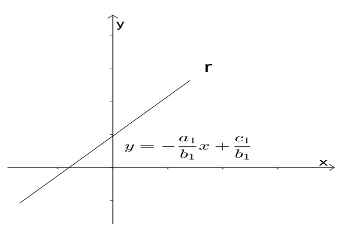
Caso 7:

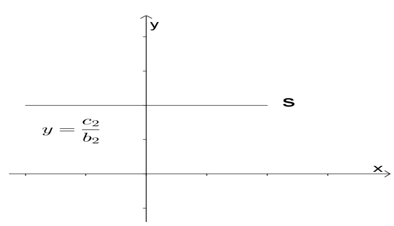




(S) tem uma única solução e, neste caso, $D_{ab} = -b_1 a_2 \neq 0$.

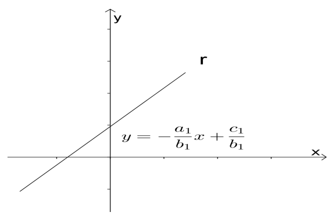
Caso 8:

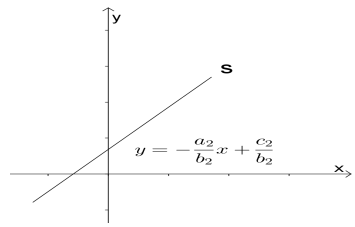




(S) tem uma única solução e, neste caso, $D_{ab} = a_1 b_2 \neq 0$.

Caso 9:





i) (S) não tem solução ($r \parallel s \quad \text{e} \quad r \neq s$) e, neste caso, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ e $\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2} \Longleftrightarrow a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ e $b_1c_2 - c_1b_2 \neq 0 \Longleftrightarrow D_{ab} = 0 \quad \text{e} \quad D_{bc} \neq 0.$

ii) (S) tem infinitas soluções ($r \equiv s$) e, neste caso, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{e} \quad \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} \Longleftrightarrow D_{ab} = D_{bc} = 0$. Note ainda que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, então $D_{ac} = 0$.

Com o estudo sobre todas as nove possibilidades podemos facilmente verificar (i), (ii) e (iii) do teorema.

■

Para que possamos resolver esses sistemas apresentados, precisamos conhecer alguns conceitos, que neste momento apresentaremos de maneira sucinta, pois trataremos esta questão de forma mais abrangente no próximo capítulo.

Dois sistemas são equivalentes quando admitem as mesmas soluções. Quando se substitui uma das equações do sistema pela soma desta equação, obtém-se um sistema equivalente. Em outras palavras, para todo $k \in \mathbb{R}$, os dois sistemas abaixo possuem a mesma solução:

$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$S' : \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (a_2 + a_1k)x + (b_2 + b_1k)y = c_1 + c_2k \end{cases}$$

Para resolver o sistema pelo método da eliminação, escolhe-se um número real k de modo que um dos coeficientes $a_2 + ka_1$ ou $b_2 + kb_1$ seja zero. Assim, teremos imediatamente o valor de uma das incógnitas, o qual é substituído na primeira equação para encontrar outro valor.

Assim vejamos alguns exemplos:

Exemplo 8. *O diretor de um fundo de investimento tem* $R\$100.000,00$ *para investir. As regras do fundo definem que tanto um certificado de depósito (CD) como um título de longo prazo devem ser utilizados. O objetivo do diretor é obter um rendimento de* $R\$7.800,00$ *sobre seus investimentos por ano. O CD oferece um retorno de* 5% *ao ano e o título* 9%. *Para que o diretor tenha um rendimento de* $R\$7.800,00$ *no ano, quanto ele deve investir em CD e em título?*

Solução: *Como o total investido é* $R\$100.000,00$, *considerando* x *o valor a ser investido em CD e* y, *o valor a ser investido em títulos, temos* $x+y=100.000$. *Uma vez que o retorno desejado é* $R\$7.800,00$, *obtemos o equação* $0,05x+0,09y=7.800$. *Assim temos o sistema linear*

$$\begin{cases} x+y=100.000 \\ 0,05x+0,09y=7.800 \end{cases} \tag{1.3}$$

Note que $D_{ab}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0,05 & 0,09 \end{vmatrix}=0,09-0,05=0,04\neq 0$. *Então pelo Teorema 1.2 o sistema possui uma única solução. Podemos facilmente encontrar esta solução.*

Para eliminar x, *adicionamos* $-0,05$ *vezes a primeira equação a segunda, obtendo*

$$\begin{cases} x+y=100.000 \\ \quad -0,04y=-2.800 \end{cases}$$

Obtendo o valor de y *da segunda equação* $y=70.000$ *e substituindo este valor na primeira equação em (1.3), obtemos* $x=30.000$. *Para nos certificarmos de que* $x=30.000$ *e* $y=70.000$ *é solução de (1.3), verificamos que estes valores de* x *e* y *satisfazem cada uma das equações lineares do sistema dado. Dessa maneira, o diretor de fundo deve investir* $R\$30.000,00$ *em CD e* $R\$70.000,00$ *em títulos de longo prazo.*

Exemplo 9. *Discuta o sistema linear*

$$\begin{cases} x-3y=-7 \\ 2x-6y=7 \end{cases} \tag{1.4}$$

Solução: *Vemos que* $D_{ab}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=-6+6=0$. *Então podemos ter infinitas soluções ou nenhuma solução. Calculando* $D_{ac}=\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=$

$7 + 14 = 21 \neq 0$. *Logo pelo Teorema 1.2 o sistema não possui solução.*

Exemplo 10. *Encontre o valor de m para que o sistema linear abaixo admita infinitas soluções.*

$$\begin{cases} mx + 4y = 10 \\ x + my = 5 \end{cases} \tag{1.5}$$

Solução: *Pelo Teorema 1.2, o sistema dado admita infinitas soluções se, e só se, $D_{ab} = D_{ac} = D_{bc} = 0$, logo*

$$D_{ab} = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow m^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow m = 2 \quad ou \quad m = -2$$

$$D_{ac} = \begin{vmatrix} m & 10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 5m - 10 = 0 \Longleftrightarrow m = 2$$

$$D_{bc} = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ m & 5 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 20 - 10m = 0 \Longleftrightarrow m = 2$$

Portanto o sistema linear (1.5) admite infinitas soluções se, e somente se, $m = 2$. Caso $m = -2$ o sistema linear não terá soluções.

1.2 Sistemas 2×3

Considere o sistema 2×3

$$S : \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2 \end{cases}$$

e vamos reescrevê-lo de uma forma conveniente para fazermos uma abordagem geométrica. Então considere o sistema

$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

Veja que se $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ e $d_1 \neq 0$ o sistema é impossível. Além disso se $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$ teremos apenas uma equação linear que pode ser facilmente resolvida, desde que a_2, b_2 e c_2 não sejam simultaneamente nulos. Logo estaremos considerando que a_1, b_1 e c_1 não são simultaneamente nulos, bem como a_2, b_2 e c_2 também não.

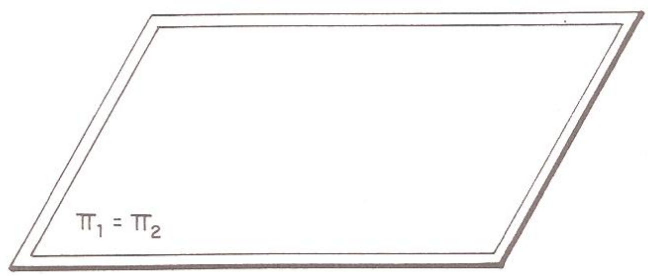
Agora note que cada uma das equações de S, isoladamente, representa um plano no espaço. Sejam π_1 e π_2 estes planos, ou seja,

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{e} \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \tag{1.7}$$

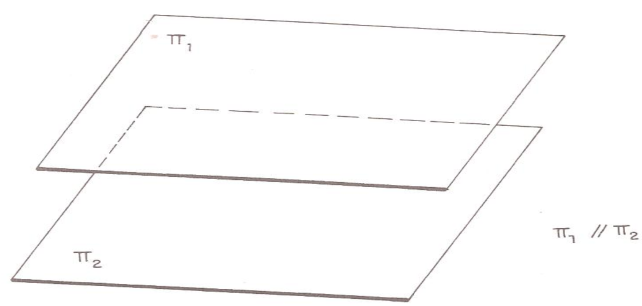
A terna (x, y, z) é solução do sistema se e somente se $(x, y, z) \in (\pi_1 \cap \pi_2)$.

Sabemos entretanto que as posições relativas de dois planos no espaço são:

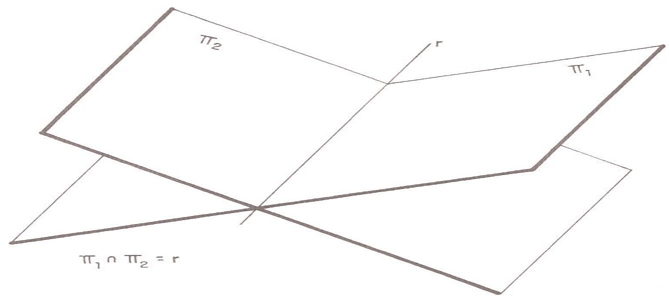
i) π_1 e π_2 são coincidentes ($\pi_1 \equiv \pi_2$): Neste caso, o sistema é indeterminado com infinitas soluções que dependem de dois parâmetros.



ii) π_1 e π_2 são paralelos ($\pi_1 \parallel \pi_2$): Neste caso temos que $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, e consequentemente, o sistema é impossível (não possui solução alguma).



iii) π_1 e π_2 se interceptam ao longo de uma reta r. Neste caso o sistema é indeterminado com infinitas soluções dependentes de um parâmetro.



Destas possibilidades geométricas vem o seguinte teorema:

Teorema 1.3. *Para o sistema $S_{2\times 3}$, dado por (1.6), com os coeficientes a_i, b_i e c_i não sendo simultaneamente nulos, para $i = 1, 2$, podemos verificar que ocorre uma e somente uma das alternativas:*

i) *(S) possui infinitas soluções que dependem de um ou dois parâmetros.*

ii) *(S) não possui solução.*

É possível descrever condições algébricas para que estas duas condições sejam satisfeitas, ou seja, podemos determinar quais são as condições sobre os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i, com $i = 1, 2$, para que tenhamos (i) ou (ii). Para tal temos o teorema.

Teorema 1.4. *Seja (S) um sistema 2×3 conforme (1.6) com os coeficientes $(a_i, b_i, c_i) \neq (0,0,0)$, para $i = 1, 2$. Denote $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$. Então temos:*

i) *(S) possui infinitas soluções que dependem de dois parâmetros, se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $d_2 = \lambda d_1$*

ii) *(S) possui infinitas soluções que dependem de um parâmetro, se, e somente se, $\vec{u}\times\vec{v} \neq \vec{0}$, ou seja $\vec{u}\times\vec{v} = (b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \neq (0,0,0)$.*

iii) *(S) não possui solução se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $d_2 \neq \lambda d_1$.*

Demonstração. Inicialmente provemos (i).

($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\pi_1 = \pi_2 = \pi$. Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto fixado em π. Então

$$d_1 = x_0 a_1 + y_0 b_1 + z_0 c_1 \quad \text{e} \quad d_2 = x_0 a_2 + y_0 b_2 + z_0 c_2.$$

Se $P = (x, y, z) \in \pi$, então temos que

$$\begin{array}{rcl} \langle \vec{u}, \vec{P_0P} \rangle & = & (a_1, b_1, c_1) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ & = & a_1 x - a_1 x_0 + b_1 y - b_1 y_0 + c_1 z - c_1 z_0 \\ & = & a_1 x + b_1 y + c_1 z - (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0) \\ & = & a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 \\ & = & 0 \end{array}$$

ou seja, $\vec{u} \perp \vec{P_0P}$, $\forall P \in \pi$. Logo $\vec{u} \perp \pi$.

Do mesmo modo

$$\begin{array}{rcl} \langle \vec{v}, \vec{P_0P} \rangle & = & (a_2, b_2, c_2) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ & = & a_2 x - a_2 x_0 + b_2 y - b_2 y_0 + c_2 z - c_2 z_0 \\ & = & a_2 x + b_2 y + c_2 z - (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0) \\ & = & a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 \\ & = & 0 \end{array}$$

ou seja, $\vec{v} \perp \vec{P_0P}$, $\forall P \in \pi$. Logo $\vec{v} \perp \pi$.

Portanto, desde que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais ao plano π então resulta que $\vec{u}$ é um múltiplo de $\vec{v}$, ou seja, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$. Além disso, como $(a_2, b_2, c_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1)$ então:

$$\lambda d_1 = a_1 \lambda x_0 + b_1 \lambda y_0 + c_1 \lambda z_0 = a_2 \lambda x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 = d_2,$$

.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que existe um $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ e $d_2 = \lambda d_1$. Vamos provar que nestas circunstâncias $\pi_1 \equiv \pi_2$, onde π_1 e π_2 são os planos definidos por (1.7). De fato, seja $P = (x, y, z) \in \pi_1$, então

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

multiplicando ambos os lados por λ resulta que

$$a_1\lambda x + b_1\lambda y + c_1\lambda z = \lambda d_1$$

Usando a hipótese $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ temos $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, isto é, $P \in \pi_2$. Logo, $\pi_1 \subset \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 = \pi_2$.
e isto conclui a demonstração de (i).

Agora vamos provar (iii):

($\Longrightarrow$) Suponha que π_1 intersecção com pi_2 seja vazio. Logo π_1 e π_2 são paralelos. Sabemos que $\vec{u} \perp \pi_1$ e $\vec{v} \perp \pi_2$. Portanto $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos, assim *existe um* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Além disso, $d_2 \neq \lambda d_1$, pois caso contrário pelo item anterior teríamos que π_1 e π_2 seriam coincidentes, o que não ocorre.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que existe um $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $d_2 \neq \lambda d_1$. Então um ponto $P = (x, y, z) \in \pi_1$ se, e só, se:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 &\Longleftrightarrow a_1\lambda x + b_1\lambda y + c_1\lambda z = \lambda d_1 \\ &\Longleftrightarrow a_2x + b_2y + c_2z = \lambda d_1 \end{aligned}$$

Como $d_2 \neq \lambda d_1$, temos que $P \notin \pi_2$. Logo $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, ou seja, π_1 e π_2 são paralelos.

Para completarmos a demonstração do Teorema, vamos provar (ii).
($\Longrightarrow$) Por absurdo, suponha que π_1 intersecção com π_2 seja uma reta e $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. Temos que dos itens anteriores os planos π_1 e π_2 são paralelos ou coincidentes, o que é um absurdo, pois π_1 intersecção com π_2 é uma reta. Logo $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$.

($\Longleftarrow$) Supondo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não colineares, implica que $\vec{u} \times \vec{v} \neq (0, 0, 0)$, isto é,

$$(b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \neq (0, 0, 0)$$

Sem perda de generalidade, supondo que a última coordenada $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Reescrevendo o sistema (1.6), temos

$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 - c_1z \\ a_2x + b_2y = d_2 - c_2z \end{cases}$$

O sistema S pode ser resolvido da seguinte forma:

$$x = \frac{1}{D}[(d_1 - c_1z)b_2 - (d_2 - c_2z)b_1] \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{D}[(d_2 - c_2z)a_1 - (d_1 - c_1z)a_2]$$

Portanto os planos π_1 e π_2 se interceptam ao longo da reta r, definida por:

$$r: \begin{cases} x = \frac{1}{D}(d_1b_2 - d_2b_1) + \frac{1}{D}(b_1c_2 - b_2c_1) \cdot t \\ y = \frac{1}{D}(d_2a_1 - d_1a_2) + \frac{1}{D}(a_2c_1 - a_1c_2) \cdot t, \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

que é paralela ao vetor $\vec{w} = \left(\frac{1}{D}(b_1c_2 - b_2c_1, \frac{1}{D}(a_2c_1 - a_1c_2), 1)\right)$, multiplicando o vetor $\vec{w}$ por D obtemos que r é uma reta paralela a $\vec{u} \times \vec{v}$, logo o sistema (S) possui infinitas soluções.

■

Exemplo 11. *Considere o sistema linear*

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

Solução: *Note que* $\vec{u} = (1, 2, -3)$ *e* $\vec{v} = (2, 1, -3)$*. Então* $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ *e de acordo com o teorema (1.4), o sistema (S) possui infinitas soluções que dependem de um parâmetro. Para exprimir todas essas soluções em função de um único parâmetro, resolvemos o sistema*

$$\begin{cases} 2y - 3z = 7 - x \\ y - 3z = 4 - 2x \end{cases}$$

no qual consideramos y *e* z *como incógnitas, obtendo* $y = 3+x$ *e* $z = -\frac{1}{3}+x$*. Assim as soluções do sistema proposto são todos os vetores da forma*

$$(x, 3 + x, -\frac{1}{3} + x), \quad \textit{com} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 12. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} 9x - 6y + 3z = 12 \\ 6x - 4y + 2z = 8 \end{cases}$$

Solução: *Temos que* $\vec{u} = (9, -6, 3)$*,* $\vec{v} = (6, -4, 2)$*,* $d_1 = 12$ *e* $d_2 = 8$*. Verifiquemos se* $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ *e* $d_2 = \lambda d_1$*. De fato*

$$(6, -4, 2) = \lambda(9, -6, 3) \Longleftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Portanto para $\lambda = 2/3$, temos $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $d_2 = \lambda d_1$. Logo, pelo teorema (1.4) o sistema tem infinitas soluções que dependem de dois parâmetros. As soluções do sistema são ternas $(x, y, -3x + 2y + 4)$, onde os dois parâmetros x e y assumem quaisquer valores reais.

Exemplo 13. *Para o sistema*

$$\begin{cases} x - 3y + 9z = 6 \\ 3x - 9y + 27z = 12 \end{cases}$$

Solução: *Vemos que $\vec{u} = (1, -3, 9)$, $\vec{v} = (3, -9, 27)$, $d_1 = 6$ e $d_2 = 12$. Verifiquemos se $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $d_2 = \lambda d_1$. Com efeito*

$$(3, -9, 27) = \lambda(1, -3, 9) \Longleftrightarrow \lambda = 3$$

Logo para $\lambda = 3$ temos $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $d_2 \neq \lambda d_1$, pois $12 \neq 3 \cdot 6$. Pelo teorema (1.4) o sistema dado é impossível, não possui solução.

1.3 Sistemas 3×3

Considere o sistema 3×3

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

e vamos reescrevê-lo de uma forma conveniente para fazermos uma abordagem geométrica. Então considere o sistema:

$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{1.8}$$

Estamos considerando $(a_i, b_i, c_i) \neq (0, 0, 0)$ para todo $i = 1, 2, 3$, pois caso $(a_i, b_i, c_i) = (0, 0, 0)$ para algum i teremos que o sistema é impossível (quando $d_i \neq 0$) ou o sistema será 2×3 ou uma única equação.

Agora note que cada uma das equações de S isoladamente representa um plano no espaço. Sejam π_1, π_2 e π_3 estes planos:

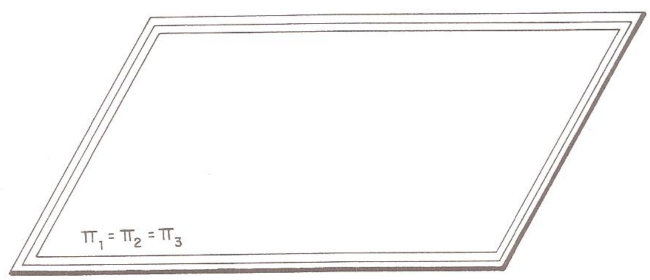
$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \tag{1.9}$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \tag{1.10}$$

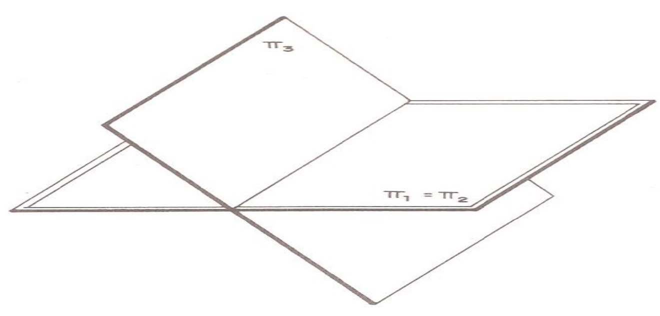
$$\pi_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \tag{1.11}$$

Uma terna (x, y, z) é solução do sistema (1.8) se, e somente se, $(x, y, z) \in \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$. No entanto as posições relativas de três planos no espaço são:

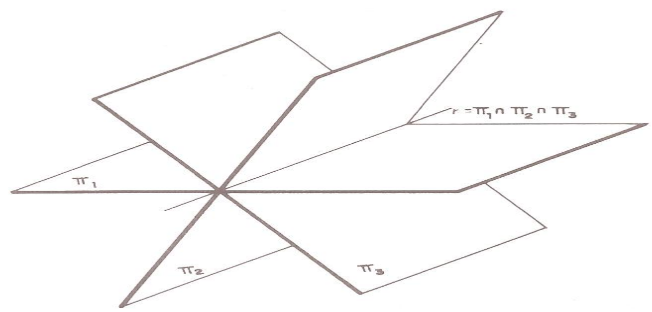
i) Os três planos são coincidentes, ou seja, $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3 = \pi$. Neste caso o sistema (S) admite infinitas soluções. Em outras palavras, (S) é possível e indeterminado.



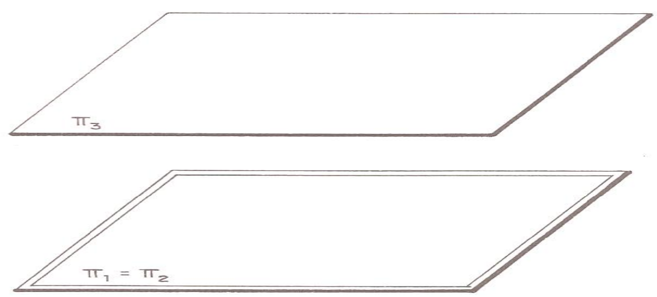
ii) Dois planos são coincidentes $\pi_1 \equiv \pi_2$ e o terceiro π_3 os intercepta segundo uma reta r. Neste caso o sistema (S) admite infinitas soluções que dependem de um parâmetro. Em outras palavras, (S) é possível e indeterminado e todas soluções dependem de um parâmetro livre.



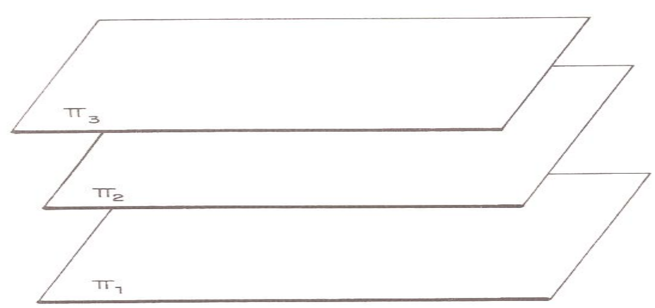
iii) Os planos π_1, π_2 e π_3 são distintos e tem uma reta r em comum. Assim o sistema (S) tem uma infinidade de solução que dependem de um parâmetro.



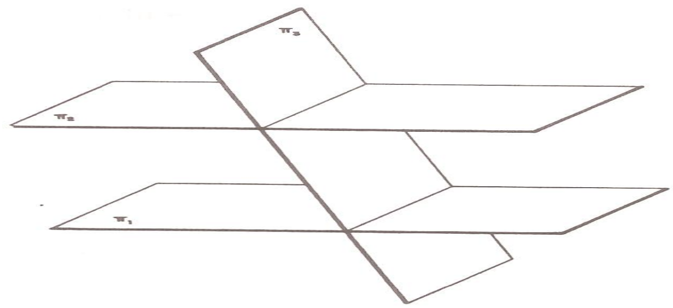
iv) Dois planos coincidem $\pi_1 \equiv \pi_2$ e o terceiro plano π_3 é paralelo a eles. Neste caso o sistema (S) é impossível, não possui solução alguma.



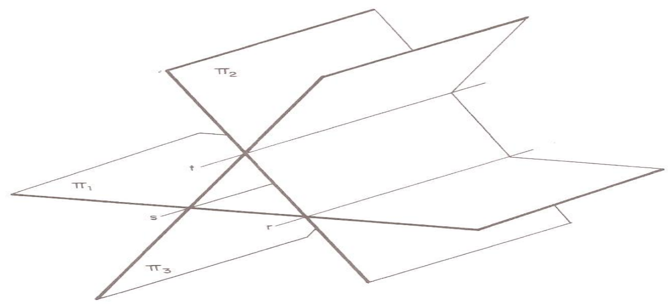
v) Os planos π_1, π_2 e π_3 são paralelos dois a dois. Nesta situação o sistema (S) é impossível.



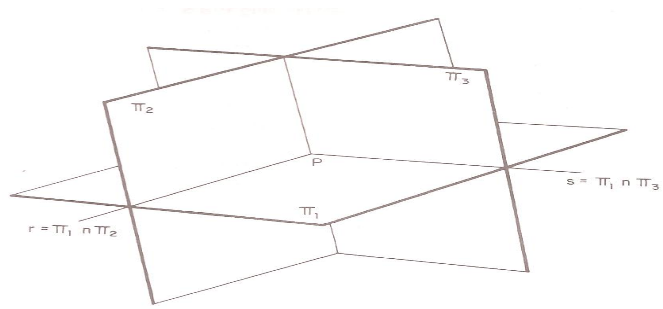
vi) Os planos π_1 e π_2 são paralelos e o terceiro plano π_3 os intercepta segundo as retas r e s. Neste caso o sistema (S) é impossível.



vii) Os três planos se interceptam dois a dois, segundo as retas $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $s = \pi_1 \cap \pi_3$ e $t = \pi_2 \cap \pi_3$ paralelas umas as outras. Neste caso, novamente, o sistema (S) é impossível.



viii) Os três planos tem um único ponto $P = (x, y, z)$ em comum. Neste caso o sistema será possível e determinado, ou seja, admite uma única solução.



Resumindo temos o seguinte teorema:

Teorema 1.5. *Para o sistema $S_{3\times 3}$, tal que $(a_i, b_i, c_i) \neq (0,0,0)$ para $i = 1,2,3$, ocorre uma e somente uma das alternativas abaixo:*

i) O sistema (S) possui infinitas soluções, ou seja, é possível e indeterminado.

ii) O sistema (S) não possui solução, ou seja, é impossível.

iii) O sistema (S) possui uma única solução, ou seja, é possível e determinado.

Como nos casos anteriores é ainda possível determinar sob que condições algébricas ocorre cada um dos casos (i), (ii) e (iii) do Teorema 1.5. Para isto temos o seguinte teorema:

Teorema 1.6. *Seja (S) o sistema 3×3 dado por (1.7) com os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i ($i = 1,2,3$) não simultaneamente nulos. Considere $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$. Então podemos afirmar que*

1º **caso**: *O sistema (S) será possível e indeterminado se e somente se:*

i) Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, $\vec{w} = \mu\vec{u}$, $d_2 = \lambda d_1$ e $d_3 = \mu d_1$.

ii) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $d_2 = \lambda d_1$, mas $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não são múltiplos.

iii) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são múltiplos um do outro, mas existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ e $d_3 = \lambda d_1 + \mu d_2$.

2º **caso**: *O sistema (S) será impossível, se e somente se:*

i) Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, $\vec{w} = \mu\vec{u}$ e $d_2 = \lambda d_1$, mas $d_3 \neq \mu d_1$.

ii) Existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, $\vec{w} = \mu\vec{u}$, mas $d_2 \neq \lambda d_1$, $d_3 \neq \mu d_1$ e $d_3 \neq \frac{\mu}{\lambda} d_2$.

iii) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, mas $d_2 \neq \lambda d_1$ e $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não são múltiplos.

iv) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são dois a dois não colineares, mas existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ e $d_3 \neq \lambda d_1 + \mu d_2$

3º **caso**: *O sistema (S) será possível e determinado, se e somente se,*

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstração. 1º **caso**

i) Começamos com a implicação contrária:

($\Longleftarrow$) Suponhamos um ponto $P = (x, y, z) \in \pi_1$ e que existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ tais que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $\vec{w} = \mu\vec{u}$, então

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

multiplicando ambos os membros da equação por λ

$$a_1\lambda x + b_1\lambda y + c_1\lambda z = \lambda d_1$$

usando a hipótese $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ temos que

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

isto é, $P \in \pi_2$, logo $\pi_1 \subset \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \equiv \pi_2$.

Por outro lado,

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

multiplicando ambos os membros da equação por μ

$$a_1\mu x + b_1\mu y + c_1\mu z = \mu d_1$$

usando a hipótese $\vec{w} = \mu\vec{u}$ temos que

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

isto é, $P \in \pi_3$. Logo $\pi_1 \subset \pi_3 \Longrightarrow \pi_1 \equiv \pi_3$. Como $\pi_1 \equiv \pi_2$ e $\pi_1 \equiv \pi_3 \Longrightarrow \pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3$.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\pi_1 = \pi_2 = \pi$. Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto fixado em π. Então

$$d_1 = a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 \ \text{ e } \ d_2 = a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0$$

Se $P = (x, y, z) \in \pi$, então temos que:

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}, \vec{P_0P} \rangle &= a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0)\\ &= a_1x + b_1y + c_1z - (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0)\\ &= a_1x + b_1y + c_1z - d_1\\ &= 0\end{aligned}$$

ou seja, $\vec{u} \perp \vec{P_0P}, \ \forall P \in \mathbb{R}$. Logo $\vec{u} \perp \pi$.

Do mesmo modo

$$\begin{aligned}\langle \vec{v}, \vec{P_0P} \rangle &= a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0)\\ &= a_2x + b_2y + c_2z - (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0)\\ &= a_2x + b_2y + c_2z - d_2\\ &= 0\end{aligned}$$

ou seja, $\vec{v} \perp \vec{P_0P}, \ \forall P \in \mathbb{R}$. Logo $\vec{v} \perp \pi$.

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais ao plano π então $\vec{u}$ é múltiplo de $\vec{v}$, ou seja, existe um $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Então como $(a_2, b_2, c_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1)$,

$$\lambda a_1x_0 + \lambda b_1y_0 + \lambda c_1z_0 = \lambda d_1$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = \lambda d_1 \Longrightarrow d_2 = \lambda d_1$$

De modo análogo, prova-se que $d_3 = \mu d_1$. Portanto o sistema (S) é possível e indeterminado.

ii) $(\Longrightarrow)$ Supondo que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, $d_2 = \lambda d_1$ (já provado no item anterior) e $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não são múltiplos, implica que $\vec{u} \times \vec{w} \neq (0, 0, 0)$, ou seja,

$$(b_1c_3 - b_3c_1, a_3c_1 - a_1c_3, a_1b_3 - a_3b_1) \neq 0$$

Sem perda de generalidade, supondo que a última coordenada $D = a_1b_3 - a_3b_1 \neq 0$, temos

$$S : \begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 - c_1z\\ a_3x + b_3y = d_3 - c_3z\end{cases}$$

O sistema S pode ser resolvido da seguinte forma

$$x = \frac{1}{D}[(d_1 - c_1 z)b_3 - (d_3 - c_3 z)b_1]$$

$$y = \frac{1}{D}[(d_3 - c_3 z)a_1 - (d_1 - c_1 z)a_3]$$

Logo os planos π_1 e π_3 se interceptam ao longo da reta r e como $\pi_1 = \pi_2$, então $\pi_2 \cap \pi_3 = r$.

$$r : \begin{cases} x = \frac{1}{D}(d_1 b_3 - d_3 b_1) + \frac{1}{D}(b_1 c_3 - b_3 c_1)t \\ y = \frac{1}{D}(d_3 a_1 - d_1 a_3) + \frac{1}{D}(a_3 c_1 - a_1 c_3)t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

que é paralela ao vetor $\vec{n} = (\frac{1}{D}(b_1 c_3 - b_3 c_1), \frac{1}{D}(a_3 c_1 - a_1 c_3), 1)$. Multiplicando o vetor $\vec{n}$ por D obtemos que r é uma reta paralela a $\vec{u} \times \vec{w}$. Assim $\pi_1 = \pi_2 \cap \pi_3 = r$.

Como $\pi_1 = \pi_2$ e $\pi_1 \cap \pi_3 = r \Longrightarrow \pi_2 \cap \pi_3 = r$.

($\Longleftarrow$) Para $\pi_1 = \pi_2 = \pi \Longrightarrow d_1 = \lambda d_2$ (já foi provado no item anterior). $\pi_1 \cap \pi_3$ é uma reta r e $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são múltiplos, então $\pi_1 \parallel \pi_3$ ou $\pi_1 = \pi_3$, absurdo! Logo $\pi_1 \cap \pi_3 = r$.

iii) ($\Longrightarrow$) Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são dois a dois não colineares, ou seja, nenhum deles é múltiplo do outro. A reta r, estando contida em cada um dos três planos, é perpendicular aos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, logo estes vetores são coplanares: existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ tais que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Isto nos dá

$$a_3 = \lambda a_1 + \mu a_2, \quad b_3 = \lambda b_1 + \mu a_3, \quad c_3 = \lambda c_1 + \mu c_2$$

Se tomarmos um ponto qualquer (x_0, y_0, z_0) na reta r teremos:

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 = d_1, \quad a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 = d_2 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0 \\ &= (\lambda a_1 + \mu a_2)x_0 + (\lambda b_1 + \mu b_2)y_0 + (\lambda c_1 + \mu c_2)z_0 \\ &= \lambda(a_1 x_0 + b_1 y_o + c_1 z_0) + \mu(a_2 x_0 + b_2 y_o + c_2 z_0) \\ &= \lambda d_1 + \mu d_2 \end{aligned}$$

Evidentemente, desta última igualdade temos que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

$(\Longleftarrow)$ Reciprocamente, tomemos um ponto (x_0, y_0, z_0) sobre a reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$. Então $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$ e $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$. Multiplicando a primeira destas por λ, a segunda por μ e somando-as, vem

$$(\lambda a_1 + \mu a_2)x_0 + (\lambda b_1 + \mu b_2)y_0 + (\lambda c_1 + \mu c_2)z_0 = \lambda d_1 + \mu d_2$$

$$a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3$$

Isto mostra que todo ponto da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2 \in \pi_3$, ou seja, $r \subset \pi_3$. Logo $r = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$. Portanto o sistema é possível e indeterminado.

2º **caso**:

i) Começamos com a implicação contrária:

$(\Longrightarrow)$ Suponhamos que $P = (x, y, z) \in \pi_1$ e existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ tais que $\vec{v} = \lambda\vec{u}, \vec{w} = \mu\vec{u}$ e $d_2 = \lambda d_1$, mas $d_3 \neq \mu d_1$. Então

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

multiplicando ambos os membros da equação por λ

$$a_1\lambda x + b_1\lambda y + c_1\lambda z = \lambda d_1$$

usando a hipótese $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ temos

$$a_2x + b_2y + c_2z = \lambda d_1$$

isto é, $P \in \pi_2$. Logo $\pi_1 \subset \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \equiv \pi_2$.

Por outro lado, $\vec{w} = \mu\vec{u}$ e $d_3 \neq \mu d_1$, então

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

multiplicando ambos os membros da equação por μ

$$a_1\mu x + b_1\mu y + c_1\mu z = \mu d_1$$

usando a hipótese $\vec{w} = \mu\vec{u}$ temos

$$a_3x + b_3y + c_3z = \mu d_1$$

Como $d_3 \neq \mu d_1$, temos que $P \notin \pi_3$. Logo $\pi_1 \cap \pi_3 = \emptyset$, ou seja, π_1 e π_3 são paralelos.

($\Longleftarrow$) Supondo que $\pi_1 = \pi_2 = \pi$. Seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto fixado em π. Então

$$d_1 = a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 \text{ e } d_2 = a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0$$

Se $P = (x, y, z) \in \pi$, então temos que

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u}, \vec{P_0P} \rangle &= a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) \\
&= a_1x + b_1y + c_1z - (a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) \\
&= a_1x + b_1y + c_1z - d_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ou seja, $\vec{u} \perp \vec{P_0P}, \ \forall P \in \mathbb{R}$. Logo $\vec{u} \perp \pi$.

Do mesmo modo

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}, \vec{P_0P} \rangle &= a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0) \\
&= a_2x + b_2y + c_2z - (a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0) \\
&= a_2x + b_2y + c_2z - d_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ou seja, $\vec{v} \perp \vec{P_0P}, \ \forall P \in \mathbb{R}$. Logo $\vec{v} \perp \pi$.

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais ao plano π, então $\vec{u}$ é múltiplo de $\vec{v}$, ou seja, existe um $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Assim $(a_2, b_2, c_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1)$. Logo

$$\lambda a_1x_0 + \lambda b_1y_0 + \lambda c_1z_0 = \lambda d_1$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = \lambda d_1$$

$$d_2 = \lambda d_1$$

Agora suponha que $\pi_1 \cap \pi_3 = \emptyset \Longrightarrow \pi_1 \parallel \pi_3$. Sabemos que $\vec{u} \perp \pi_1$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \pi_3$ e note que $d_3 = a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1$, assim

$$\begin{aligned}
\langle \vec{w}, \vec{P_1P} \rangle &= a_3(x - x_1) + b_3(y - y_1) + c_3(z - z_1) \\
&= a_3x + b_3y + c_3z - (a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1) \\
&= a_3x + b_3y + c_3z - d_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo $\vec{w} \perp \pi_3$, então $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são múltiplos, assim *existem* $\mu \in \mathbb{R}^*$ tal que $\vec{w} = \mu\vec{u}$. Além disso, $d_3 \neq \mu d_1$, pois caso contrário π_1 e π_3 seriam coincidentes, o que não ocorre. Assim, π_1 e π_2 são coincidentes e paralelos a π_3 e $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$, o sistema (S) é impossível.

ii) ($\Longrightarrow$) Suponhamos que existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ tais que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $\vec{w} = \mu\vec{u}$, mas $d_2 \neq \lambda d_1$, $d_3 \neq \mu d_1$ e $d_3 \neq \frac{\mu}{\lambda} d_2$. Então um ponto $P = (x, y, z) \in \pi_1$ se, e só, se:

$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z = d_1 &\iff a_1\lambda x + b_1\lambda y + c_1\lambda z = \lambda d_1 \\
&\iff a_2x + b_2y + c_2z = \lambda d_1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z = d_1 &\iff a_1\mu x + b_1\mu y + c_1\mu z = \mu d_1 \\
&\iff a_3x + b_3y + c_3z = \mu d_1
\end{aligned}$$

Como $d_2 \neq \lambda d_1$ e $d_3 \neq \mu d_1 \Longrightarrow d_2 \neq \frac{\mu}{\lambda} d_3$, assim $P \notin \pi_2$ e $P \notin \pi_3$. Logo π_1 é paralelo a π_2 e π_1 é paralelo a π_3, como $d_2 \neq \frac{\mu}{\lambda} d_3$, então π_2 é paralelo a π_3.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que π_1 é paralelo a π_2 e π_1 é paralelo a π_3. Sabemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos e que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são múltiplos. Assim $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $\vec{w} = \mu\vec{u}$, como π_1 e π_2 são paralelos e π_1 é paralelo a π_3, então $d_2 \neq \lambda d_1$ e $d_3 \neq \mu d_1$, isto implica que $d_3 \neq \frac{\mu}{\lambda} d_2$ e π_2 e π_3 são paralelos.

iii) ($\Longrightarrow$) Pelo item anterior, as hipóteses $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ e $d_2 \neq \lambda d_1$ garante que π_1 é paralelo a π_2. Por sua vez, a hipótese que $\vec{w}$ e $\vec{u}$ não são múltiplos, garante que o plano π_3 intercepta π_1 e (por consequência) π_2, segundo duas retas que são necessariamente paralelas.

($\Longleftarrow$) Por hipótese, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não são múltiplos, então a intersecção de π_1 com π_3 é uma reta r. Como π_1 é paralelo a π_2, implica que π_2 intersecção com π_3 é uma reta s. Como as retas r e s estão contidas em π_3 e estas não possuem ponto em comum, então r e s são paralelas, logo $\pi_1 \cap \pi_3 = r, \pi_2 \cap \pi_3 = s \Longrightarrow \pi_1$ *e* π_2 são paralelos. Logo $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Assim o sistema (S) é impossível.

iv) ($\Longrightarrow$) O fato de não haver paralelismo nem coincidência entre quaisquer dos planos π_1, π_2 e π_3, equivale a dizer que nenhum dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ é múltiplo um do outro.

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais à reta r, porque ela está contida em π_1 e em π_2. O vetor $\vec{w}$ é ortogonal à reta s, porque ela está contida em π_2. Como r e s são paralelas, vemos que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais a r, portanto $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, assim $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, mas como vimos no 1º caso, item (iii), não se pode ter $d_3 = \lambda d_1 + \mu d_2$, pois se isso acontecer as retas r, s e t coincidiriam.

($\Longleftarrow$) Com efeito, as duas primeiras condições dizem que $\vec{u} = \vec{OA_1}$, $\vec{v} = \vec{OA_2}$ e $\vec{w} = \vec{OA_3}$, os segmentos OA_1, OA_2 e OA_3 estão no mesmo plano π. A reta r, estando em π_1 e π_2, é ortogonal a OA_1 e OA_2, logo é perpendicular a π. Analogamente, s e t são também perpendicular a π. Assim, duas quaisquer das retas r, s e t são paralelas ou coincidentes. Como $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $s = \pi_1 \cap \pi_3$ e $t = \pi_2 \cap \pi_3$, se duas dessas retas coincidirem, as três retas serão iguais. Mas pelo 1º caso, item (iii), isto implicaria que *existem* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $d_3 = \lambda d_1 + \mu d_2$, o que seria absurdo, pois $d_3 \neq \lambda d_1 + \mu d_2$, segue-se que r, s e t são paralelas duas a duas e $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são dois a dois não colineares. Assim o sistema (S) é impossível, pois $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$.

3º **caso**: Procuramos para que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\}$, então $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ paralela ao vetor $\vec{u} \times \vec{v}$, visto na secção anterior (iii) e este vetor é não nulo. Além disto, se a reta r intercepta π_3 em um único ponto (isto é, r não é paralela, nem está contida em π_3). Portanto $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq 0$.

Reciprocamente, se $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq 0$, então $\vec{u} \times \vec{v} \neq 0$ e $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ a qual não é paralela a π_3. Assim a condição necessária e suficiente para que os planos

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{P\} \text{ é } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 14. *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 9 \end{cases}$$

Solução: *Temos $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (2, 4, -2)$ e $\vec{w} = (3, 6, -3)$. Note que $\vec{v} = 2\vec{u}$ e $\vec{w} = 3\vec{u}$. Como $d_2 = 2d_1$ e $d_3 = 3d_1$. Portanto pelo teorema (1.6), o sistema é possível e indeterminado, onde as soluções do sistema são todos os termos $(x, y, x + 2y - 3)$, com $x, y \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 15. *Classifique o sistema quanto a sua solução.*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 8 \end{cases}$$

Solução: *Temos $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (2, 4, -2)$ e $\vec{w} = (3, 6, -3)$. Note que $\vec{v} = 2\vec{u}$, $\vec{w} = 3\vec{u}$ e $d_2 = 2d_1$, mas $d_3 \neq 3d_1$, isto implica que $\pi_1 = \pi_2 \parallel \pi_3$, pelo teorema (1.6), o sistema é impossível.*

Exemplo 16. *Para o sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x - 4y - z = 4 \end{cases}$$

Solução: *Vemos que $\pi_1 \equiv \pi_2$, pois $\vec{v} = 2\vec{u}$ e $d_2 = 2d_1$, mas $\vec{w} = (4, 4, -1)$ não é múltiplo de $\vec{u} = (1, 1, -1)$. Assim $\pi_3 \cap \pi_1$ é a reta r, logo pelo teorema (1.6), o sistema é possível e indeterminado, ou seja possui infinitas soluções. Basta resolver qualquer dos sistemas abaixo, pois $\pi_1 \equiv \pi_2$:*

$$S_1 : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases}$$

ou

$$S_2 : \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - z = 4 \end{cases}$$

Resolvendo S_1 temos

$$\begin{cases} y - z = 1 - x \\ 4y - z = 4 - 4x \end{cases}$$

multiplicando a primeira equação por (-1) *e adicionando o resultado a segunda equação teremos*

$$\begin{cases} y - z = 1 - x \\ 3y = 3 - 3x \end{cases}$$

da segunda equação temos $y = 1 - x$*, substituindo o resultado na primeira equação temos que* $z = 0$*. Portanto as soluções do sistema dado são* $(x, 1 - x, 0)$*, para qualquer valor real de* x*.*

Exemplo 17. *Resolva o sistema dado.*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 4 \\ 4x + 4y - 4z = 10 \end{cases}$$

Solução: *Neste caso temos* $\vec{v} = 2\vec{u}$ *e* $\vec{w} = 4\vec{u}$*, porém* $d_2 \neq 2d_1$ *e* $d_3 \neq 4d_1$*, portanto pelo teorema (1.6) os planos são paralelos dois a dois o sistema é impossível.*

Exemplo 18. *Discuta o sistema.*

$$\begin{cases} 2x + 4y - 8z = 2 \\ -4x - 8y + 16z = -3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Solução: *Observe que* $\vec{v} = -2\vec{u}$*, mas* $d_2 \neq -2d_1$ *logo* $\pi_1 \parallel \pi_2$*, veja ainda que* $\vec{w}$ *não é múltiplo de* $\vec{u}$*, então* π_3 *é secante a* π_1 *e* π_2*, logo pelo teorema (1.6), o sistema é impossível.*

Exemplo 19. *Para o sistema dado, encontre sua solução.*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

Solução: *Note que* $\vec{u} = (1, 1, 1)$*,* $\vec{v} = (2, -1, 1)$ *e* $\vec{w} = (4, 1, 3)$ *nenhum deles é múltiplo do outro, mas podemos escrever* $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$*, pois* $\vec{w} = 2(1, 1, 1) + (2, -1, 1) \Longrightarrow \vec{w} = (2, 2, 2) + (2, -1, 1) = (4, 1, 3)$ *e mais ainda* $d_3 = 2d_1 + d_2$*. Portanto pelo teorema (1.6), temos que o sistema é possível e indeterminado.*

Podemos resolver os sistema, resolvendo S_1 e S_2 em função de x

$$S_1 : \begin{cases} y + z = 1 - x \\ -y + z = 5 - 2x \end{cases}$$

ou

$$S_2 : \begin{cases} -y + z = 5 - 2x \\ y + 3z = 7 - 4x \end{cases}$$

Resolvendo ambos os sistemas obtemos as soluções que são os pontos da forma $(x, \frac{-4+x}{2}, \frac{6-3x}{2})$, para qualquer valor de x.

Exemplo 20. *Discuta o sistema.*

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 5x + 2y + z = 2 \\ 9x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$$

Solução: *Note que $\vec{u} = (1, 1, -3)$, $\vec{v} = (5, 2, 1)$ e $\vec{w} = (9, 3, 5)$ não são múltiplos um do outro. Note também que $\vec{w} = 2\vec{v} + (-1)\vec{u}$, pois $\vec{w} = 2(5, 2, 1) + (-1)(1, 1, -3) \Longrightarrow \vec{w} = (10, 4, 2) + (-1, -1, 3) = (9, 3, 5)$, por outro lado $d_3 \neq 2d_2 + (-1)d_1$, pois $d_3 \neq 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 3$. Então pelo teorema (1.6), temos que o sistema é impossível.*

Exemplo 21. *Classifique o sistema, quanto a sua solução.*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

Solução: *É fácil verificar que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$. Como $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2 \neq 0$, logo pelo teorema (1.6) o sistema dado é possível e determinado.*

No próximo capítulo trataremos como encontrar a solução deste sistema.

Capítulo 2

Resolução de Sistemas Lineares

Neste capítulo apresentaremos a forma matricial de representação de um sistema linear, definiremos e provaremos sistemas equivalentes, com isso definiremos e provaremos os métodos de resoluções: escalonamento (eliminação de Gauss), Gauss-Jordan e Regra de Crammer. Por fim analisaremos as três possibilidades de soluções de um sistema linear, pelo método de escalonamento.

2.1 Sistemas Lineares: Caso Geral

No capítulo anterior consideramos o sistema (S) de m equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$S : \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad\; \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Sendo os coeficientes $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ e $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

Sabemos que uma solução de sistema S é uma n-upla $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de números reais que é solução de cada uma das equações do sistema.

Além desta representação do sistema com equações lineares que trabalhamos até o momento, ainda podemos utilizar a notação matricial para um sistema $m \times n$, como representado abaixo:

$$A \cdot X = B$$

onde $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$

Assim a matriz A é denominada matriz dos coeficientes, a matriz X é a matriz das incógnitas e a matriz B é a dos termos independentes.

Podemos ainda reescrever essa representação matricial da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right]$$

que chamamos matriz ampliada do sistema. Cada linha desta matriz é simplesmente uma representação abreviada da equação correspondente no sistema.

2.2 Regra de Cramer

A regra de Cramer é um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas lineares. Ela só se aplica, para sistemas $n \times n$, cujo o determinante é diferente de zero.

Suponhamos que desejássemos resolver o sistema linear de n-equações e n-incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A \cdot X = B$$

onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, matriz dos coeficientes, e $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é a matriz das incógnitas e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ é a matriz dos termos independentes. Para esta equação suponhamos que $\det A \neq 0$ e portanto, que A tenha inversa A^{-1}. Então:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$I_nX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Pela Proposição (Apêndice): Uma matriz quadrada A tal que $\det(A) \neq 0$ é inversível e sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(adjA)$$

Este último resultado nos permite calcular explicitamente $x_1, \dots, x_n$. Na forma matricial segue que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n A_{j1}b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{jn}b_j \end{bmatrix}$$

Onde A_{ji} é o co-fator e o termo $\sum_{j=1}^n A_{j1}b_j$ é o determinante da matriz

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

desenvolvido pela primeira coluna. De um modo geral o termo $\sum_{j=1}^n A_{jk}b_j$, $(k = 1, \dots, n)$, é o desenvolvimento, pela coluna k-ésima, do determinante da matriz

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obtida de A pela substituição de sua k-ésima coluna B. Temos então finalmente

$$x_k = \frac{\det(\Delta_k)}{\det(A)}, \quad com \quad k = 1, \dots, n$$

Exemplo 22. *Resolver o sistema linear.*

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 5 \\ 4x + y + 2z = 1 \\ 8x - y + z = 5 \end{cases}$$

pelo regra de Cramer.

Solução: *Temos que* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, *logo* $\det A = 18$, *portanto o sistema é possível e determinado.*

Além disso $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $\Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ *com* $\det(\Delta_1) = 18$, $\det(\Delta_2) = 18$ *e* $\det(\Delta_3) = -36$. *Logo*

$$x = \frac{\det(\Delta_1)}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1$$

$$y = \frac{\det(\Delta_2)}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1$$

$$z = \frac{\det(\Delta_3)}{\Delta} = \frac{-36}{18} = -2$$

Assim a solução do sistema é a terna $(1, 1, -2)$.

Exemplo 23. *Dado o sistema linear.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

resolva-o pela regra de Cramer.

Solução: *Temos que* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Pelo desenvolvimento de Laplace temos,

$\det(A) = a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} - a_{41}A_{41}$

$\det(A) = 1(-4) - 1(-4) + 1(4) - 1(-4)$

$\det(A) = -4 + 4 + 4 + 4 = 8$

Portanto, o sistema é possível e determinado.

Agora devemos calcular os determinantes dos coeficientes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ *e* Δ_4*, pelo desenvolvimento de Laplace:*

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\Delta_1) = a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} - a_{41}A_{41}$
$\det(\Delta_1) = 0A_{11} - 4(-4) + (-4)4 - 2(-4)$
$\det(\Delta_1) = 0 + 16 - 16 + 8 = 8$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\Delta_2) = -a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} - a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$
$\det(\Delta_2) = -0A_{12} + 40 - (-4)0 + 2(-4)$
$\det(\Delta_2) = -8$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\Delta_3) = a_{13}A_{13} - a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} - a_{43}A_{43}$
$\det(\Delta_3) = 0A_{13} - 40 + (-4)(-4) - 20$
$\det(\Delta_3) = 16$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(\Delta_4) = -a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} - a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}$
$\det(\Delta_4) = -0A_{14} + 4(-4) - (-4)0 + 20$
$\det(\Delta_4) = -16$

Portanto as soluções do sistema será

$$x = \frac{\det(\Delta_1)}{A} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y = \frac{\det(\Delta_2)}{A} = \frac{-8}{8} = -1$$

$$z = \frac{\det(\Delta_3)}{A} = \frac{16}{8} = 2$$

$$w = \frac{\det(\Delta_4)}{A} = \frac{-16}{8} = -2$$

Assim a solução do sistema é a quadra $(1, -1, 2, -2)$.

Assim podemos dizer que a regra de Cramer apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quociente de dois determinantes. Mas por outro lado possui alguns inconvenientes em comparação com outros métodos. O primeiro é que este método só se aplica a sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. O segundo é que ela só se aplica quando o determinante é diferente de zero, ou seja, para sistema possível e determinado. E por fim é o custo operacional.

Em razão destes fatores apresentaremos outros métodos de resoluções para sistemas $m \times n$.

2.3 Sistemas Equivalentes

São sistemas obtidos a partir do sistema (S), realizando as seguintes operações:

i) Permuta das i-ésima e j-ésima linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$) das equações de S, obtendo assim o sistema S_1, onde toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

ii) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Indicando por S_1 o sistema assim obtido, onde toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

Devido a (i) podemos supor que a equação multiplicada seja a primeira, pois as demais equações de S e S_1 coincidem basta verificar nossa afirmação quanto à primeira equação.

Suponhamos que $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ é uma solução de S, assim

$$\alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \ldots + \alpha_{1n}b_n = \beta_1 \tag{2.1}$$

multiplicando por λ esta igualdade teremos

$$(\lambda\alpha_{11})b_1 + (\lambda\alpha_{12})b_2 + \ldots + (\lambda\alpha_{1n})b_n = \lambda\beta_1 \tag{2.2}$$

o que mostra que $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ também é solução da primeira equação de S_1.

Por outro lado, se $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ é solução de S_1 então a igualdade (2.2) é verdadeira. Multiplicando (2.2) por $\frac{1}{\lambda}$ obtemos (2.1). Portanto $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ pertence ao conjunto solução de S.

iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha somada com j-ésima linha multiplicada por um $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_j$). Dado o sistema S_1, provaremos que ele admite as mesmas soluções de S ou não admite solução.

$$S_1 : \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\vdots \\ (\alpha_{i1} + \lambda\alpha_{j1})x_1 + \ldots + (\alpha_{in} + \lambda\alpha_{jn})x_n = \beta_i + \lambda\beta_j \\ \qquad\vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Com efeito, se $(b_1, \ldots, b_n)$ satisfaz o sistema S, então satisfaz as equações de S_1 exceto a linha $(L_i \leftrightarrow \lambda L_j)$. Multiplicando a j-ésima linha de (S) por λ

$$(\lambda\alpha_{j1})b_1 + \ldots + (\lambda\alpha_{jn})b_n = \lambda\beta_j$$

Esta linha continua sendo solução de S, ao somar ela com a i-ésima linha obtemos

$$(\alpha_{i1} + \lambda\alpha_{j1})b_1 + \ldots + (\alpha_{in} + \lambda\alpha_{jn})b_n = \beta_i + \lambda\beta_j$$

continua sendo solução de S, o que mostra que $(b_1, \ldots, b_n)$ também é solução de S_1.

Reciprocamente, se $(b_1, \ldots, b_n)$ for solução de S_1, então satisfaz todas as equações de S exceto a linha i-ésima. De modo análogo, multiplicando j-ésima linha de S_1 por λ e subtraindo está da linha $(L_i + \lambda L_j)$, obtemos a linha i-ésima, logo $(b_1, \ldots, b_n)$ também satisfaz S.

Analogamente, se não existir uma n-upla que satisfaz o sistema S, também não vai existir uma n-upla que satisfaz S_1.

■

Definição 2.1. *Dado um sistema linear S, uma qualquer das passagens explicadas acima (i), (ii) e (iii) que se faça com esse sistema recebe o nome de operação elementar com S. Assim um sistema linear S_1 que foi obtido de um sistema linear S através de um número finito de operações elementares, dizemos que S_1 é equivalente a S (notação: $S_1 \sim S$) e estes sistemas possuem a mesma solução.*

Valem as seguintes propriedades

i) $S \sim S$ (reflexiva)

ii) $S_1 \sim S \Longrightarrow S \sim S_1$ (simétrica)

iii) $S_1 \sim S$ e $S \sim S_2 \Longrightarrow S_1 \sim S_2$ (transitiva)

Consideremos o sistema do exemplo 21, Capítulo 1

$$S : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

Sabemos que este sistema é possível e determinado $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 2$. Procuramos encontrar um sistema equivalente a S e que seja mais simples, assim

$$S : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

$\overset{*}{\sim}$

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

(*) Multiplicamos a primeira equação por (-1) e somamos o resultado com a segunda e terceira equações, substituindo o resultado desta soma na segunda e terceira equação obtendo $S_1 \sim S$.

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

De S_1 temos que $y = 1$ e $z = 1$, substituindo esses resultados na primeira equação e obtemos que $x = -2$.

Portanto a solução do sistema S é $(-2, 1, 1)$. Este processo que acabamos de realizar denominamos de escalonamento.

2.4 Sistemas Escalonados

Consideremos um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspecto:

$$S : \begin{cases} \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\qquad \alpha_{2r_2}x_{r_2} + \ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{kr_k}x_{r_k} + \ldots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k \end{cases}$$

onde $\alpha_{1r_1} \neq 0, \alpha_{2r_2} \neq 0, \ldots, \alpha_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$.

Se tivermos $1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leq n$, dizemos que S é um sistema escalonado. Portanto um sistema escalonado é todo aquele em que o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior do que na anterior.

Proposição 2.1. *Todo sistema linear S é equivalente a sistema escalonado.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor:

$$S : \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_2 = \beta_2 \\ \qquad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Para cada $\alpha_{i1} \neq 0$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$ multiplicamos por $(-\alpha_{i1})$ a primeira equação e adicionamos o resultado a i-ésima linha. Com algumas permutações convenientes de equações (caso necessário) obteremos o sistema $S_1 \sim S$.

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + \ldots + \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad \gamma_{2r_1}x_{r_1} + \ldots + \gamma_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad \gamma_{mr_1}x_{r_1} + \ldots + \gamma_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

onde $\gamma_{2r_2} \neq 0$ e $r_1 \geq 2$.

Multiplicando s segunda equação de S_1 por $\frac{1}{\gamma_{2r_1}}$, obtemos o sistema S_2, ainda equivalente a S:

$$S_2 : \begin{cases} x_1 + \ldots + \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad x_{r_1} \quad + \ldots + \frac{\gamma_{2n}x_n}{\gamma_{2r_1}} = \frac{\beta_2'}{\gamma_{2r_1}} \\ \qquad \vdots \\ \qquad \gamma_{mr_1}x_{r_1} + \ldots + \gamma_{mn}x_n = \beta_m' \end{cases}$$

Agora basta repetir o raciocínio feito até aqui, porém a partir da segunda equação de S_2. Evidentemente, após aplicarmos um número finito de vezes esse raciocínio, chegaremos a um sistema escalonado equivalente a S. É óbvio que durante o processo de escalonamento surgir equações do tipo:

$$(0x_k + \ldots + 0x_m = 0, \quad com \quad 2 \leq k \leq m)$$

serão retiradas dos sistema.

■

Um sistema escalonado pode ser facilmente resolvido de baixo para cima, obtendo-se primeiro o valor na equação anterior e assim por diante. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 24. *Vamos escalonar e resolver o sistema*

$$S : \begin{cases} x + y + z = -3 \\ -x + y + 3z = 9 \\ 3x + y - 2z = -14 \end{cases}$$

Solução: *Inicialmente, anulamos o coeficiente da incógnita x da segunda equação. Para isso, substituímos a segunda equação pela soma dela com a primeira equação e substituímos a terceira linha pela soma dela com a primeira, multiplicada por* 3*, assim obtemos, $S_1 \sim S$*

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = -3 \\ 2y + 4z = 6 \\ -2y - 5z = -5 \end{cases}$$

Para terminar de escalonar o sistema, anulamos o coeficiente da incógnita y da terceira equação. Para isso, substituímos a terceira equação pela soma dela com a segunda. Obtemos $S_2 \sim S_1 \Longrightarrow S_1 \sim S \Longrightarrow S_2 \sim S$.

S_2 :

$$\begin{cases} x + y + z = -3 & (2.3) \\ \quad 2y + 4z = 6 & (2.4) \\ \qquad\quad -z = 1 & (2.5) \end{cases}$$

Podemos verificar que é possível e determinado. Desta forma basta determinar o valor de z, y e x. De (2.5), segue que $z = -1$. Substituindo $z = -1$ em (2.4), temos $y = 5$. Finalmente, substituindo os valores de y e z encontrados em (2.3), obtemos $x = 7$. Logo a solução do sistema é a terna $(7, 5, -1)$.

Exemplo 25. *Resolva o sistema por escalonamento*

$$S : \begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = -2 \\ 2x - 3y - 4z + 5t = 2 \\ -x + 2y + 4z - 4t = 0 \\ 2x + 2y + 2z - t = 1 \end{cases}$$

Solução: *Primeiramente, anulamos o coeficiente da incógnita x, nas segunda, terceira e quarta equações. Para isso, substituímos, respectivamente, a segunda equação pela soma da primeira multiplicada por (-2), a terceira equação pela soma da primeira e a quarta equação pela soma da primeira multiplicada por (-2). Assim obtemos $S_1 \sim S$.*

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = -2 \\ -7y + 2z + t = 6 \\ 4y + z - 2t = -2 \\ -2y + 8z - 5t = 5 \end{cases}$$

Por conveniência, podemos vamos multiplicar a terceira equação por $\frac{1}{4}$ e trocarmos a segunda e terceira equações, assim teremos $S_2 \sim S_1$.

$$S_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = -2 \\ y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}t = -\frac{1}{2} \\ -7y + 2z + t = 6 \\ -2y + 8z - 5t = 5 \end{cases}$$

Agora anularemos a incógnita y, para isso substituímos a terceira equação, pela soma da segunda multiplicada por (7) e a quarta equação pela soma da segunda multiplicada por (2) e termos $S_3 \sim S_2$.

$$S_3 : \begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = -2 \\ y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}t = -\frac{1}{2} \\ \frac{15}{4}z - \frac{5}{2}t = \frac{5}{2} \\ \frac{17}{2}z - 6t = 4 \end{cases}$$

Por fim, anularemos a incógnita z da quarta equação, para isso, vamos substituir a mesma pela soma da terceira equação multiplicada por $-\frac{34}{15}$ e obteremos $S_4 \sim S_3$.

S_4 :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = -2 & (2.6) \\ y + \dfrac{1}{4}z - \dfrac{1}{2}t = -\dfrac{1}{2} & (2.7) \\ \dfrac{15}{4}z - \dfrac{5}{2}t = \dfrac{5}{2} & (2.8) \\ -\dfrac{1}{3}t = -\dfrac{5}{3} & (2.9) \end{cases}$$

Pela proposição 2.1: S_4 *é equivalente a* S*, agora basta resolver as equações de baixo para cima, portanto:*

de (2.9) temos $-\frac{1}{3}t = -\frac{5}{3} \Longrightarrow t = 5$

de (2.8) segue $\frac{15}{4}z - \frac{5}{2}t = \frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{15}{4}z - \frac{5}{2}(5) = \frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{15}{4}z = 15 \Longrightarrow z = 4$

de (2.7) vem que $y + \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}t = -\frac{1}{2} \Longrightarrow y + \frac{4}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow y = 1$

de (2.6), $x + 2y - 3z + 2t = -2 \Longrightarrow x + 2 - 12 + 10 = -2 \Longrightarrow x = -2$

Logo a solução do sistema é a quadra $(-2, 1, 4, 5)$.

Nestes dois exemplos que acabamos de resolver poderíamos ter escalonado os sistemas utilizando a forma matricial ampliada, que o resultado seria o mesmo, já que as operações definidas para sistemas equivalentes também são válidas para matriz na forma ampliada, então temos o seguinte Teorema:

Teorema 2.1. *Sejam* $AX = B$ *e* $CX = D$ *dois sistemas lineares cada um com* m *equações e* n *incógnitas. Se as matrizes ampliadas* $[A : B]$ *e* $[C : D]$ *desses sistemas são equivalentes por linhas então ambos sistemas têm as mesmas soluções.*

Demonstração. Segue-se da definição de equivalência por linhas e do fato de que as três operações elementares nas linhas da matriz aumentada coincidem com as três manipulações nas equações de um sistema linear discutidas em sistemas equivalentes (permuta de linhas, multiplicação por escalar e substituição) que leva a um sistema linear com as mesmas soluções de um sistema dado. Observamos também se um dos sistemas não tem solução, o outro também não tem. ■

2.5 Método da Eliminação de Gauss

Este método consiste em transformar o sistema linear original num sistema equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, pois estes são de resolução imediata. Em outras palavras, a eliminação de Gauss é escalonarmos um sistema linear na forma matricial ampliada.

Exemplo 26. *Resolva o sistema linear*

$$S:\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=1\\ x_1+x_2+2x_3=2\\ 4x_1+3x_2-2x_3=3\end{cases}$$

Solução: *Reescrevendo o sistema na forma de matriz ampliada e para facilitar a notação usaremos L_i para indicar o vetor linha da linha i da matriz A, assim $L_1=(3,2,4,1)$.*

$$A=\left|\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right|\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}$$

Vamos eliminar x_1 das equações 2 e 3 , para isso realizamos as seguintes operações: $L_2 \leftrightarrow L_2-\frac{1}{3}L_1$ e $L_3 \leftrightarrow L_3-\frac{4}{3}L_1$ e obtemos $A_1 \sim A$.

$$A_1=\left|\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{22}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right|\begin{array}{c} L_1\\ L_2^{'}\\ L_3^{'}\end{array}$$

Para eliminar x_2 da terceira equação faremos a seguinte operação: $L_3^{''} \leftrightarrow L_3^{'}-L_2^{'}$ e teremos $A_2 \sim A_1$.

$$A_2=\left|\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right|\begin{array}{c} L_1\\ L_2^{'}\\ L_3^{''}\end{array}$$

Agora basta resolver o sistema

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+4x_3=1\\ \frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=\frac{5}{3}\\ -8x_3=0\end{cases}$$

Resolvendo esse sistema a solução será a terna $(-3,5,0)$.

2.6 Método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan é um método de escalonamento que consiste em operações elementares a matriz ampliada de um sistema, até que ele esteja na forma escalonada reduzida. A vantagem deste processo é que um sistema cuja matriz ampliada é uma matriz na forma escalonada reduzida tem solução imediata, enquanto que para resolver um sistema que está apenas na forma escalonada ainda é necessário fazer uma série de substituições para obter a solução final.

Definição 2.2. *Uma matriz $m \times n$ está na forma escalonada reduzida quando:*

i) O primeiro elemento não nulo de cada uma das linhas não nula é 1.

ii) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas linhas não nulas.

iv) Se as linhas 1, ..., r são linhas nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então, $k_1 < k_2 < ... < k_r$

Exemplo 27. $A_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ *e* $A_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

As matrizes A_1 e A_2 são matrizes escalonada na forma reduzida.

Teorema 2.2. *Toda matriz $A_{m\times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha na forma escalonada reduzida.*

Demonstração. 1ª **parte:** Seja A uma matriz $m \times n$ qualquer. Se todos os elementos da primeira linha de A são nulos, então essa linha já satisfaz a condição (i) da definição de matriz na forma escalonada reduzida, no que diz respeito a essa linha. Se a primeira linha tem algum elemento não nulo, seja k o menor inteiro j tal que $a_{ij} \neq 0$. Multiplicamos a primeira linha por $1/a_{ij}$ e a condição (i) será satisfeita. Agora, para cada $i \geq 2$ adicionamos $(-a_{ik})$ vezes a primeira linha à i-ésima linha. Como resultado, teremos uma matriz cujo primeiro elemento da primeira linha é 1 e ocorre na coluna k. Além disto, todos os outros elementos da coluna k são nulos.

Consideremos agora obtida acima. Se a segunda linha desta matriz for nula nada fazemos. Se houver elementos não nulos nesta linha, seja a coluna

k' a primeira a conter um destes. Multiplicamos a segunda linha por $1/b_{2k'}$ e a seguir, somando os múltiplos adequados desta nova segunda linha as demais linhas, obtemos uma matriz cujo o primeiro elemento não nulo da segunda linha é 1 e todos os outros elementos da coluna em que este elemento (1) se encontra são nulos.

Repetindo o procedimento acima em relação as demais linhas ($3^{\underline{a}}$, $4^{\underline{a}}$, ..., m-ésima) obteremos no final uma matriz M que é linha equivalente à inicial A, e que satisfaz as condições (i) e (ii) da definição, a condição (iii) é através de um número finito de permutações.

$2^{\underline{a}}$ **parte:** Para mostrarmos que só existe uma única matriz na forma escalonada reduzida equivalente a A observamos primeiramente que duas matrizes reduzidas na forma escalonada que são linhas equivalentes só podem ser iguais.

Agora, suponhamos que por operações com linhas, partimos de uma matriz M e podemos chegar a duas matrizes escalonada reduzida, N e P. Teremos então $M \sim N$ e $M \sim P$. Com as operações com linhas são reversíveis, isto significará que $N \sim P$ e portanto $N = P$. ■

Exemplo 28. *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Jordan.

Solução: *Primeiro devemos reescrever o sistema como matriz aumentada (ampliada).*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Agora transformamos a matriz aumentada, para a forma escalonada reduzida nas linha, como segue:

$$\left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \sim \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \leftrightarrow L_2' \\ L_3 - 3L_1 \leftrightarrow L_3' \end{array}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{rrrcr}1 & 2 & 3 & \shortmid & 9\\ 0 & -5 & -5 & \shortmid & -10\\ 0 & -6 & -10 & \shortmid & -24\end{array}\right| \begin{array}{l}L_1\\ L_2^{'}\\ L_3^{'}\end{array} \quad \sim \quad -\tfrac{1}{5}L_2^{'} \leftrightarrow L_2^{''}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{rrrcr}1 & 2 & 3 & \shortmid & 9\\ 0 & 1 & 1 & \shortmid & 2\\ 0 & -6 & -10 & \shortmid & -24\end{array}\right| \begin{array}{l}L_1\\ L_2^{''}\\ L_3^{'}\end{array} \quad \sim \quad L_3^{'} + 6L_2^{''} \leftrightarrow L_3^{''}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{rrrcr}1 & 2 & 3 & \shortmid & 9\\ 0 & 1 & 1 & \shortmid & 2\\ 0 & 0 & -4 & \shortmid & -12\end{array}\right| \begin{array}{l}L_1\\ L_2^{''}\\ L_3^{''}\end{array} \quad \sim \quad -\tfrac{1}{4}L_3^{''} \leftrightarrow L_3^{'''}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{rrrcr}1 & 2 & 3 & \shortmid & 9\\ 0 & 1 & 1 & \shortmid & 2\\ 0 & 0 & 1 & \shortmid & 3\end{array}\right| \begin{array}{l}L_1\\ L_2^{''}\\ L_3^{'''}\end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{r}L_1 - 3L_3^{'''} \leftrightarrow L_1^{'}\\ L_2^{''} - L_3^{'''} \leftrightarrow L_2^{'''}\end{array}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{rrrcr}1 & 2 & 0 & \shortmid & 0\\ 0 & 1 & 0 & \shortmid & -1\\ 0 & 0 & 1 & \shortmid & 3\end{array}\right| \begin{array}{l}L_1^{'}\\ L_2^{'''}\\ L_3^{'''}\end{array} \quad \sim \quad L_1 - 2L_2 \leftrightarrow L_1^{''}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{rrrcr}1 & 0 & 0 & \shortmid & 2\\ 0 & 1 & 0 & \shortmid & -1\\ 0 & 0 & 1 & \shortmid & 3\end{array}\right| \begin{array}{l}L_1^{''}\\ L_2^{'''}\\ L_3^{'''}\end{array}$$

Dessa forma, a matriz aumentada é equivalente a essa escalonada reduzida acima.

Voltando para forma de sistema, temos o sistema equivalente ao inicial.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

sendo esta a solução do sistema $(2, -1, 3)$.

Exemplo 29. *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + 5y - z - 9w = -3 \\ 2x + y - z + 3w = -11 \\ x - 3y + 2z + 7w = -5 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Jordan.

Solução: *Reescrevendo a matriz aumentada deste sistema*

$$\left|\begin{array}{rrrr:r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{r} \\ L_2 - 2L_1 \leftrightarrow L_2^{'} \\ L_3 - 2L_1 \leftrightarrow L_3^{'} \\ L_4 - L_1 \leftrightarrow L_4^{'} \end{array}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{rrrr:r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{'} \\ L_3^{'} \\ L_4^{'} \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{r} \\ -\frac{1}{4}L_4^{'} \leftrightarrow L_4^{''} \\ \\ \\ \end{array}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{rrrr:r} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{'} \\ L_3^{'} \\ L_4^{''} \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{r} \\ L_4^{''} \leftrightarrow L_2^{'} \\ \\ \\ \end{array}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_4^{''} \\ L_3^{'} \\ L_2^{'} \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{r} L_3^{'} + L_4^{''} \leftrightarrow L_3^{''} \\ L_2^{'} - 3L_4^{''} \leftrightarrow L_2^{''} \end{array}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -15 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_4^{''} \\ L_3^{''} \\ L_2^{''} \end{array} \quad \sim \quad -\tfrac{1}{5}L_3^{''} \leftrightarrow L_3^{'''}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -15 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_4^{''} \\ L_3^{'''} \\ L_2^{''} \end{array} \quad \sim \quad L_2^{''} + 5L_3^{'''} \leftrightarrow L_2^{'''}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_4^{''} \\ L_3^{'''} \\ L_2^{'''} \end{array} \quad \sim \quad L_1 - L_4^{''} \leftrightarrow L_1^{'}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1^{'} \\ L_4^{''} \\ L_3^{'''} \\ L_2^{'''} \end{array} \quad \sim \quad L_1^{'} - 2L_3^{'''} \leftrightarrow L_1^{''}$$

que é equivalente

$$\left|\begin{array}{cccc|c|l} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 & L_1'' \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & L_4'' \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & L_3''' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2''' \end{array}\right.$$

Sendo a matriz acima, escalonada na forma reduzida. Podemos reescrever assim o sistema:

$$\begin{cases} x + 2w = -5 \\ \quad y - 3w = 2 \\ \quad z - 2w = 3 \end{cases}$$

podemos omitir a quarta equação nula, assim uma das soluções do sistema é

$$x = -5 - 2w$$
$$y = 2 + 3w$$
$$z = 3 + 2w$$

com w *sendo a incógnita livre. Logo a solução é a quadra* $(-5 - 2w, 2 + 3w, 3 + 2w, w)$*, com* $w \in \mathbb{R}$*, sendo o sistema possível e indeterminado com infinitas soluções.*

2.7 Discussão de um Sistema Linear

Podemos verificar se um sistema, em que um ou mais coeficientes das incógnitas são parâmetros reais, é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível analisando esses parâmetros. Nesse caso significa dizer que estamos discutindo os sistema.

Podemos discutir um sistema utilizando o escalonamento. Seja S um sistema $m \times n$, fazendo o escalonamento chegaremos a uma das três situações:

i) No processo de escalonamento, numa certa etapa, obtém-se um sistema

$$S' : \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0x_1 + \dots + 0x_n = \beta_i \quad (\beta_i \neq 0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Como $S^{'}$ é impossível podemos dizer o mesmo de S.

ii) Após o escalonamento chega-se a um sistema $S^{'}$ do tipo

$$S^{'}: \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\quad x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + \ldots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = \beta_n \end{cases}$$

Neste caso, podemos obter o seguinte sistema por equivalência

$$S^{''}: \begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad = \gamma_1 \\ \quad x_2 \qquad\qquad = \gamma_2 \\ \qquad x_3 \qquad\quad = \gamma_3 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\quad x_n = \gamma_n \end{cases}$$

Logo S é possível e determinado e $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ é solução do sistema.

iii) Ao término do escalonamento, temos um sistema de tipo:

$$S^{'}: \begin{cases} x_1 + \ldots + \alpha_{1r_2}x_{r_2} + \ldots + \alpha_{1r_3}x_{r_3} + \ldots + \alpha_{1r_p}x_{r_p} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\qquad x_{r_2} + \ldots + \alpha_{2r_3}x_{r_3} + \ldots + \alpha_{1r_p}x_{r_p} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_{r_3} + \ldots + \alpha_{3r_p}x_{r_p} + \ldots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_{r_p} + \ldots + \alpha_{p_n}x_n = \beta_p \end{cases}$$

onde $p < n$.

Agora basta eliminar, por meio de operações elementares, o termo x_{r_2} na primeira equação, os termos x_{r_3} da primeira e segunda equações, e assim por diante até o termo x_{r_p} da primeira a $(p-1)$-ésima equação.

Após esse procedimento, passamos para o segundo membro de cada equação todas as parcelas, exceção feita à primeira. Assim teremos algo do tipo

$$\begin{cases} x_1 = f_1 \\ x_{r_2} = f_2 \\ \vdots \\ x_{r_p} = f_p \end{cases}$$

onde cada f_i é uma expressão linear nas variáveis x_j com $j \neq 1$, $j \neq r_2, \ldots, j \neq r_p$. A cada sequência de valores que atribuímos então a estas $(n-p)$ variáveis (livres) obteremos valores para $x_1, x_{r_2}, \ldots, x_{r_p}$ e consequentemente uma solução. Logo como $p < n$, teremos mais do que uma solução (infinitas) e o sistema será possível e indeterminado neste caso.

Capítulo 3

Aplicações

Sistemas lineares é um tópico da Matemática que tem ampla possibilidade de aplicações, apresentaremos problemas contextualizados que envolvem situações comerciais e balanceamento de reações químicas.

O funcionamento de um carro flex

Atualmente os carros bicombustíveis, isto é, aqueles que funcionam com gasolina, etanol (álcool) ou com a mistura dos dois, conhecido popularmente como flex, têm sido produzido pelos principais fabricantes de carros. O funcionamento dos bicombustíveis é semelhante ao dos que funcionam somente com gasolina ou etanol.

Tanque maior: Como o motor a etanol consome mais combustível por quilometro rodado do que o motor a gasolina, o tanque costuma ser de 10% a 20% maior do que um só de gasolina.

Reservatório de gasolina: A explosão gerada pelo contato do etanol frio com a faísca da vela não é suficiente para colocar o motor em movimento. Por isso é necessário um reservatório (1 litro) de gasolina que, na hora da partida, abastece o motor com esse combustível, cuja ignição é mais fácil.

Sensor inteligente: Há um sensor que analisa os gases emitidos pela queima do combustível. De acordo com a quantidade de etanol presente no combustível, é gerada uma voltagem diferente, percebida pelo sensor. A informação é encaminhada para um chip, a "inteligência" do carro bicombustível.

Motor: De acordo com a quantidade de etanol no tanque, um software faz os ajustes necessários, garantindo o máximo de potência para o motor: são alterados quantidade de ar e combustível que entra no cilindro e o ponto de ignição.

Vantagem: O carro bicombustível tem a vantagem da flexibilidade; o usuário pode escolher entre o etanol ou gasolina considerando, por exemplo, a variação de preço.

Desvantagem: Adaptado para funcionar tanto com etanol quanto com gasolina, o motor não alcança a potência de um motor movido exclusivamente por um ou por outro combustível.

Retomando o exemplo 1 da introdução:

Em um certo posto de combustíveis, um carro flex foi abastecido com etanol e gasolina, totalizando $52L$*. Nesse dia o preço do litro do etanol era de* $R\$1,90$ *e o litro da gasolina,* $R\$2,80$*. Sabendo que foram pagos* $R\$133,00$ *pelo abastecimento, determine a quantidade de etanol e gasolina com que o carro foi abastecido.*

Solução: *Adotando* x *e* y *com quantidade de litros de etanol e de gasolina, respectivamente, teremos as seguintes equações:*

- $x + y = 52$ quantidade total de combustível abastecido
- $1,9x + 2,8y = 133$ quantidade total de combustível abastecido

Logo teremos o sistema 2×2*:*

$$\begin{cases} x + y = 52 & (3.1) \\ 1,9x + 2,8y = 133 & (3.2) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima teremos a solução do problema, então aplicando o método de eliminação de Gauss, podemos eliminar a incógnita x *da equação (3.2) para isso substituímos a equação (3.2) pela soma da equação (3.1) multiplicada por* $(-1,9)$*, teremos* $S_1 \sim S$*.*

$$\begin{cases} x + y = 52 & (3.3) \\ 0,9y = 34,2 & (3.4) \end{cases}$$

Assim da equação (3.4) temos que $y = 38L$, Substituindo esse valor na equação (3.1), temos que $x = 14L$.

Logo a quantidade de etanol abastecida foi de $14L$ e a de gasolina $38L$.

Esse exemplo tipo de de relação comercial em que tivemos duas incógnitas (etanol e gasolina), variando em função de quantidade (litros) e preço, muito comum na situação cotidiana.

O exemplo 3 da introdução também trata da relação comercial como veremos a seguir:

Três grandes empresas de táxi resolveram renovar parte de suas frotas:

- *a primeira comprou um carro modelo A, um modelo B e um modelo C, pagando $R\$180.000,00$.*
- *a segunda comprou um carro modelo A, dois modelo B e três modelo C, pagando $R\$380.000,00$.*
- *a terceira comprou dois carros modelo A, três modelo B e um modelo C, pagando $R\$350.000,00$.*

Qual é o valor de cada carro?

Solução: *Chamando de x, y e z os carros modelos A, B e C, respectivamente, teremos o seguinte sistema*

$$S : \begin{cases} x + y + z = 180.000 \\ x + 2y + 3z = 380.000 \\ 2x + 3y + z = 350.000 \end{cases}$$

Obtemos assim um sistema 3×3, podemos resolvê-lo pelo método de Gauss-Jordan, assim reescrevendo o sistema S na forma matricial, teremos:

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \shortmid & 180.000 \\ 1 & 2 & 3 & \shortmid & 380.000 \\ 2 & 3 & 1 & \shortmid & 350.000 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \qquad \sim \qquad \begin{array}{r} \\ L_2^{'} = L_2 - L_1 \\ L_3^{'} = L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 180.000 \\ 0 & 1 & 2 & 200.000 \\ 0 & 1 & -1 & -10.000 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{'} \\ L_3^{'} \end{array} \quad \sim \quad L_3^{''} = L_3^{'} - L_2^{'}$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 180.000 \\ 0 & 1 & 2 & 200.000 \\ 0 & 0 & -3 & -210.000 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{'} \\ L_3^{''} \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{r} L_1^{'} = L_1 - L_2^{'} \\ L_3^{'''} = -\frac{1}{3}L_3^{''} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -20.000 \\ 0 & 1 & 2 & 200.000 \\ 0 & 0 & 1 & 70.000 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1^{'} \\ L_2^{'} \\ L_3^{''} \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{r} L_1^{''} = L_1^{'} + L_3^{'''} \\ L_2^{''} = L_2^{'} - 2L_3^{'''} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 50.000 \\ 0 & 1 & 0 & 60.000 \\ 0 & 0 & 1 & 70.000 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1^{''} \\ L_2^{''} \\ L_3^{'''} \end{array}$$

Sendo a matriz acima, escalonada na forma reduzida. Podemos reescrever o sistema $S^{'} \sim S$ *da seguinte forma*

$$S^{'} : \begin{cases} x = 50.000 \\ y = 60.000 \\ z = 70.000 \end{cases}$$

Portanto a solução do sistema será a terna $(50.000, 60.000, 70.000)$*, ou seja, o carro modelo A custa* $R\$50.000,00$*, o modelo B custa* $R\$60.000,00$ *e o modelo C custa* $R\$70.000,00$*.*

Balanceamento de equações químicas

Para realizarmos o balanceamento de um equação química, precisamos conhecer alguns conceitos:

Reações químicas: Se uma ou mais substâncias, presentes no estado inicial de um sistema, transformam-se em um ou mais substâncias diferentes, que estarão presentes no estado final, a transformação é uma reação química.

Em outras palavras, reação química é um processo em que novas substâncias são formados a partir de outras.

Existem muitos exemplos de reações químicas no cotidiano. Dentre eles estão a formação de ferrugem num pedaço de palha de aço, o apodrecimento dos alimentos, a produção de humus no solo, a queima de gás num fogão e de gasolina, etanol ou óleo diesel no motor de um veículo.

A ocorrência de uma reação química nem é sempre fácil de perceber. Algumas só podem ser percebidas em laboratório suficientemente equipados para separar componentes das misturas obtidas e determinar suas propriedades.

Reagentes e produtos: As substâncias inicialmente presentes num sistema e que se transforma em outras devido à ocorrência de uma reação química são denominadas reagentes. E as novas substâncias produzidas são chamadas produtos. Assim por exemplo:

Em equação: $\underbrace{CH_3CH_2OH + O_2}_{reagentes} \rightarrow \underbrace{CO_2 + H_2O}_{produtos}$

Em palavras: etanol (CH_3CH_2OH) e oxigênio (O_2) reagem para formar gás carbônico (CO_2) e água (H_2O).

Equação química: A maneira de representar um reação química é denominada equação química.

Por exemplo, a água é decomposta em hidrogênio e oxigênio na presença de corrente elétrica. A água o reagente é formada por moléculas de H_2O, o gás hidrogênio e o oxigênio os produtos, têm fórmulas H_2 e O_2, respectivamente. Assim poderíamos representar a reação usando as fórmulas do reagente e dos produtos.

$$H_2O \rightarrow H_2 + O_2$$

Nesta representação, falta, porém a proporção correta entre as quantidades de moléculas envolvidas, pois no reagente há dois átomos de hidrogênio e um de oxigênio, enquanto no produto há dois átomos de hidrogênio e dois de oxigênio. Uma representação correta seria:

$$H_2O + H_2O \rightarrow H_2 + H_2 + O_2$$

ou seja

$$2H_2O \rightarrow 2H_2 + O_2$$

Agora, sim, está expressa a verdadeira proporção entre as quantidades de moléculas que participam da reação.

Na equação acima, o coeficiente (em azul) da água é 2, o do hidrogênio (em azul ciano) é o 2 e do oxigênio é o 1 (que não precisa ser escrito), o número a direita do símbolo (em verde) é o subíndice que não pode ser alterado, pois estaríamos alterando a molécula.

Portanto para que um reação química esteja balanceada, o número de átomos de um elemento químico nos reagentes deve ser igual ao número de átomos desse mesmo elemento no produto.

Agora retomaremos o exemplo (2) da introdução: *A queima do etanol (C_2H_5OH), pelo oxigênio (O_2), para formar o dióxido de carbono (CO_2) e a água (H_2O) é dada pela equação*

$$xC_2H_5OH + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_2O \tag{1}$$

Determine os valores das incógnitas x, y, z e w como sendo os menores naturais possíveis, para que a equação (1) esteja balanceada, ou seja, a quantidade de átomos nos reagentes seja igual a nos produtos.

Solução: *Como a quantidade de átomos de cada elemento nos reagentes deve ser a mesma nos produtos, temos as seguintes igualdades:*

- $2x = z$ *(para o carbono)*
- $6x = 2w$ *(para o hidrogênio)*
- $x + 2y = 2z + w$ *(para o oxigênio)*

Com estas igualdades temos o seguinte sistema:

$$S : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ 6x - 2w = 0 \\ x + 2y - 2z - w = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo na forma matricial o sistema S e aplicando o escalonamento, temos:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -1 & 0 & \shortmid & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & \shortmid & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & \shortmid & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{l} \\ L_2^{'} = L_2 - 3L_1 \\ L_3^{'} = L_3 - \frac{1}{2}L_1 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -1 & 0 & \shortmid & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & \shortmid & 0 \\ 0 & 2 & -3/2 & -1 & \shortmid & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2^{'} \\ L_3^{'} \end{array} \quad \sim \quad L_2^{'} \leftrightarrow L_3^{'}$$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -1 & 0 & \shortmid & 0 \\ 0 & 2 & -3/2 & -1 & \shortmid & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & \shortmid & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} L_1 \\ L_3^{'} \\ L_2^{'} \end{array}$$

Sendo a matriz acima escalonada, podemos escrever o sistema abaixo que é equivalente a S.

$$\begin{cases} 2x - z = 0 & (3.5) \\ 2y - \dfrac{3}{2}z - w = 0 & (3.6) \\ 3z - 2w = 0 & (3.7) \end{cases}$$

Note que o sistema é possível e indeterminado, podemos resolvê-lo em função do parâmetro z, logo:

de (3.5) temos, $2x - z = 0 \Longrightarrow x = \frac{z}{2}$

de (3.7) temos, $3z - 2w = 0 \Longrightarrow w = \frac{3}{2}z$

de (3.6) temos, $2y - \frac{3}{2}z - w = 0 \Longrightarrow 2y = \frac{3}{2}z + w$ e de (3.7) $\Longrightarrow 2y = \frac{3}{2}z + 3z \Longrightarrow y = \frac{3z}{2}$

Assim a solução do sistema será a quadra $(\frac{z}{2}, \frac{3z}{2}, z, \frac{3z}{2})$, com $z \in \mathbb{N}^*$. Assim para que os coeficientes sejam os menores naturais possíveis z deve ser igual a 2 e teremos a solução $(1, 3, 2, 3)$. Substituindo o valor para cada um dos coeficientes teremos a equação balanceada:

$$C_2H_5OH + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O$$

Apêndice

Definição .1. *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. A matriz adjunta de $A_{n\times n}$, representada por $adjA$, é a matriz cujo i,j-ésimo elemento é o co-fator A_{ji} de a_{ji}. Assim*

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Observação: A matriz adjunta de A é formada tomando-se a transposta da matriz de co-fatores dos elementos de A.

Teorema .1. *Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $n \times n$, então*

$$A \cdot (adjA) = (adjA) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

Demonstração. Temos

$$A \cdot (adjA) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

O i,j-ésimo elemento na matriz produto $A \cdot (adjA)$ é dado por

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} &= \det(A), \quad \text{se} \quad i = j \\ &= 0, \quad \text{se} \quad i \neq j \end{aligned}$$

Isto significa que

$$A \cdot (adjA) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A) \cdot I_n$$

O i,j-ésimo elemento na matriz produto $(adjA) \cdot A$ é dado por

$$\begin{aligned} A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + \ldots + A_{ni}a_{nj} &= \det(A), \quad se \quad i = j \\ &= 0, \quad se \quad i \neq j \end{aligned}$$

Assim $(adjA) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

■

Proposição .1. *Uma matriz quadrada A, tal que* $\det(A) \neq 0$*, então*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(adjA) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{21}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det(A)} & \frac{A_{2n}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Pelo Teorema .1, $A \cdot (adjA) = \det(A) \cdot I_n$ de modo que, se $\det(A) \neq 0$, então

$$A\frac{1}{\det(A)}(adjA) = \frac{1}{\det(A)}[A \cdot (adjA)] = \frac{1}{\det(A)}(\det(A) \cdot I_n) = I_n$$

Portanto

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(adjA)$$

■

Bibliografia

[1] BRASIL *Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares*. Brasília: MEC/SEB, 2002, p. 122.

[2] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L., WETZLER, H.G. *Álgebra linear*. 3ª edição. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[3] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. Volumes 1, 2 e 3. São Paulo: Ática, 2010.

[4] DELGADO, J., FRENSEL, K., CRISSAFF, L. *PROFMAT: Material da disciplina MA23 (Geometria Analítica)*. 2º Semestre de 2012. Rio de Janeiro: SBM.

[5] DOMINGUES, H. H., CALLIOLI, C. A., COSTA, R. C. F. *Álgebra linear e aplicações*. 3ª edição. São Paulo: Atual, 1982.

[6] GERÔNIMO, J. R.,, FRANCO, V. S. *Geometria plana e espacial: um estudo axiomático*. 2ª edição. Maringá: Eduem, 2010.

[7] KOLMAN, B., HILL, D. R. *Introdução a álgebra linear com aplicações*. Tradução: Alessandra Bosquilha, Revisão técnica: Rafael T. I. Júnior. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[8] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, C. A. *A matemática do ensino médio*. Vol. 3. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1998.

[9] LIMA, E. L. *Coordenadas no espaço*. 3ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992.

[10] PERUZZO, F. M., CANTO, E. L. *Química na abordagem do cotidiano*. 4ª edição. São Paulo: Moderna, 2006.

[11] RIBEIRO, J. *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia: ensino médio*. Volumes 2 e 3. São Paulo: Scipione, 2010.

[12] SANTOS, N. M. *Vetores e matrizes*. Rio de Janeiro: IMPA, 1970.

[13] STEINBRUCH, A., WINTERLE,P. *Geometria Analítica*. São Paulo: MAKRON *Books* do Brasil Editora Ldta, 1987.