



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Braquistócrona

Ana Luísa Sader Tagliolatto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

2015

517.4 Tagliolatto, Ana Luísa Sader
T128b Braquistócrona / Ana Luísa Sader Tagliolatto. - Rio Claro,
2015
54 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

1. Cálculo das variações. 2. Cicloide. 3. Proposta didática.
4. Cálculo variacional. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Ana Luísa Sader Tagliolatto

BRAQUISTÓCRONA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
Orientadora

Profa. Dra. Maria Aparecida Bená
DCM - FFCLRP/USP Ribeirão Preto/SP

Prof. Dr. Jair Silvério dos Santos
DCM - FFCLRP/USP Ribeirão Preto/SP

Rio Claro, 12 de agosto de 2015.

À minha família

Agradecimentos

Ao meu esposo que sempre apoiou, incentivou e acompanhou nos estudos.

À professora Suzinei Aparecida Siqueira Marconato pela competência e paciência durante a orientação deste trabalho.

A todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da UNESP de Rio Claro pela contribuição nesse processo de formação continuada de profissionais que atuam na educação básica.

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação da UNESP de Rio Claro e da biblioteca do IMECC/UNICAMP pela atenção e empenho em ajudar prontamente.

Ao colega André Luis Novaes pelo auxílio com o \LaTeX .

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) por implementar o PROFMAT no Brasil, ao Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro pela apoio acadêmico e à Capes pelo apoio financeiro.

Que aquele que consiga solucionar este problema conquiste o prêmio que prometemos.

Este prêmio não é ouro nem prata [...] as honras, os elogios e os aplausos; [...] exaltaremos, pública e privadamente, por palavra e por carta, a perspicácia do nosso grande Apollo.

Johann Bernoulli

Resumo

Neste trabalho são apresentados o famoso problema da braquistócrona e diferentes soluções através da teoria do cálculo variacional e através de conceitos da geometria e física, envolvendo situações com condições análogas às da braquistócrona. Uma proposta didática adequada a alunos do Ensino Médio que é adaptável a alunos do Ensino Fundamental foi também apresentada.

Palavras-chave: Braquistócrona, Cicloide, Proposta didática.

Abstract

In this work it was presented the famous brachistochrone problem and the different solutions through the theory of variational calculus and through the concepts of geometry and physics, involving situations with similar conditions to those of brachistochrone. Adequate didactic proposal to high school students which is also suitable for middle school students was presented.

Keywords: Brachistochrone, Cycloid, Didactic proposal.

Lista de Figuras

2.1	Curva isocrônica [1].	21
2.2	Área delimitada por um arco de cicloide [1].	21
2.3	Curva gerada por pêndulo com arcos de cicloide como batentes [1].	22
2.4	Parametrização da cicloide [2].	23
2.5	$t = \frac{2\pi}{3}$ [2].	24
2.6	$t = \pi$ [2].	24
2.7	$t = \frac{3\pi}{2}$ [2].	24
2.8	$t = 2\pi$ [2].	24
2.9	Desenvolvimento da cicloide [2].	24
3.1	Escolha do sistema de coordenadas para o problema da Braquistócrona.	25
3.2	Parâmetros no problema.	31
3.3	Feixe de cicloides [3].	31
3.4	Esquema para o fenômeno da refração de um raio de luz.	32
3.5	Meio óptico e a trajetória descrita por um raio de luz partindo de A e chegando em B [4].	34
3.6	Fotografia que mostra a reflexão e a refração de um feixe de luz incidente em uma superfície de água horizontal [5].	34
3.7	Uma representação de 3.6 [5].	34
3.8	Ângulo que o caminho descrito pelo raio de luz e a vertical [4].	35
3.9	Possíveis trajetórias de um salva-vidas para socorrer uma vítima.	37
4.1	Esboço de uma Pista Half Pipe [6].	40
4.2	As curvas nos intervalos $[0; 0, 8\pi]$ e $[0, 8\pi + 4; 1, 6\pi + 4]$ representam arcos de uma cicloide (semiarcos) [6].	41
4.3	Modelos de rampas de madeira [6].	42
4.4	Curvas estudadas.	43
4.5	Momento inicial da queda [7].	44
4.6	Momento intermediário da queda [7].	44
4.7	Outro momento intermediário da queda [7].	44
4.8	Final da queda através da braquistócrona [7].	44
4.9	Cicloide obtida no GeoGebra.	45

4.10	Cicloide obtida no GeoGebra através de suas equações paramétricas. . .	45
4.11	Simulação de experimento no GeoGebra através do comando <i>Animar</i> [8].	46
4.12	Modelo experimental [9].	47
A.1	Curva definida pela equação $y = f(x)$	53

Sumário

1	Introdução	17
2	O problema da braquistócrona	19
2.1	Um pouco da história	19
2.2	A parametrização da cicloide	22
3	Busca pela solução	25
3.1	A Braquistócrona e o cálculo variacional	25
3.2	A Braquistócrona e um problema de refração	31
3.3	A Braquistócrona e um problema de salvamento na praia	37
4	Proposta didática	39
4.1	Abordagem através de aplicação: rampa de skate	39
4.2	Abordagem através do uso de ferramenta tecnológica: software GeoGebra	42
4.3	Abordagem experimental: construção de rampas	46
5	Considerações finais	49
	Referências	51
A	O comprimento s de uma curva \mathcal{C}	53

1 Introdução

Se perguntarmos a alguém qual é o caminho mais rápido entre dois pontos desníveis, possivelmente responderá que é a reta ao imaginar que o caminho mais curto é sempre, também, o mais rápido. Observar que existe um caminho maior que, porém, torna o tempo de percurso menor pode causar estranheza.

Apesar de se tratar de um problema antigo, do final do século XVII, e bem conhecido no meio acadêmico, a constatação experimental ainda surpreende pessoas que a veem pela primeira vez.

O problema da Braquistócrona é uma questão mecânico-geométrica sobre a curva de descida mais rápida. A palavra braquistócrona deriva das palavras gregas *Brachistos*, que significa menor, e *Chronos*, que significa tempo. Consiste em determinar a curva que une dois pontos dados a diferentes distâncias na horizontal, e não na mesma linha vertical, pela qual uma partícula móvel, sob o seu próprio peso e começando o seu movimento no ponto superior, desce o mais rapidamente possível até ao ponto inferior.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 é apresentado o problema da braquistócrona, um pouco da história de sua proposição, curiosidades sobre a curva que é solução do problema e sua parametrização; o capítulo 3 inclui diferentes soluções, a saber, através da teoria do cálculo variacional e através de conceitos da geometria e física, envolvendo situações com condições análogas às da braquistócrona; por fim, o capítulo 4 traz uma proposta didática envolvendo este problema e é adequada a alunos do Ensino Médio.

2 O problema da braquistócrona

2.1 Um pouco da história

O desafio de encontrar a braquistócrona foi proposto em junho de 1696 por Johann Bernoulli (1667 – 1748) na revista *Acta Eruditorum* de Leipzig e apresenta-se traduzido do latim em [10]:

Dados dois pontos A e B em um plano vertical, fazer corresponder a uma partícula móvel M a trajetória AMB pela qual a partícula, descendo sobre o seu próprio peso, passa do ponto A para o ponto B no espaço de tempo mais curto. [10]

Convidou os matemáticos da época a resolverem e ainda afirmou que embora o segmento AB fosse, de fato, o caminho mais curto entre os pontos A e B, no entanto, não seria esse o caminho percorrido no menor tempo. Afirma ainda que tal curva é bem conhecida dos geômetras e desta forma expõe que já tinha encontrado a solução.

Posteriormente, em janeiro de 1697, Johann faz uma nova publicação (Groeningen) reescrevendo o problema da seguinte maneira:

Determinar a curva que junta dois pontos dados, a diferentes distâncias na horizontal e não na mesma linha vertical, pela qual uma partícula móvel, sob o seu próprio peso, e começando o seu movimento no ponto superior, desce mais rapidamente até ao ponto inferior. [10]

Além disso, prolonga o prazo para que as soluções fossem apresentadas, atendendo a um pedido de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), único a escrever-lhe afirmando ter resolvido o problema. Desta forma, a questão poderia ser tornada pública na França e Itália e, ainda, para aqueles que não tiveram acesso à *Acta*.

Com relação ao mérito em resolver tal questão, Johann afirma que:

Difícilmente há algo que mais grandiosamente estimule espíritos nobres e engenhosos para trabalhos que conduzam ao aumento do conhecimento

do que propor problemas simultaneamente difíceis e úteis, e que através da solução dos mesmos, e por nenhum outro modo, lhes permitam atingir a fama e construir para si próprios monumentos eternos para a posteridade; [...] oferecemos àquele homem de nobre sangue, um prêmio, composto por honras, elogios e aplausos; assim coroaremos, honraremos e exaltaremos, pública e privadamente, por carta e por palavra, a perspicácia do nosso grande Apollo. [10]

O texto da segunda publicação de Bernoulli curiosamente cita Blaise Pascal (1623 – 1662), que foi um grande estudioso da cicloide, e Pierre de Fermat (1601 – 1665), que dá nome ao princípio do tempo mínimo¹. Ainda deixa expresso que utiliza a hipótese de Galileu² em sua solução e que desconsidera a fricção, logo "velocidades adquiridas por um corpo pesado em queda são proporcionais à raiz quadrada da altura percorrida em queda"[10].

Em maio de 1697, a *Acta Eruditorum* publicou quatro soluções cujos autores eram Leibniz, o próprio Johann Bernoulli, seu irmão mais velho Jacob Bernoulli (1654 – 1705) e uma resolução anônima cuja autoria foi reconhecida como sendo de Isaac Newton (1643 – 1727). "O Leão se reconhece pelas marcas de suas garras!" é um comentário atribuído a Johann Bernoulli referindo-se a Newton, a propósito da solução anônima apresentada. Johann Bernoulli é considerado o primeiro a resolver a questão: mostrou que a solução é uma cicloide.

A cicloide havia sido amplamente estudada anteriormente, inclusive por Galileu Galilei (1564 – 1643) e Christiaan Huygens (1629 – 1695). Este último encontrou aplicação na construção de relógios utilizando o fato da curva ser isócrona (tautócrona), ou seja, fazer com que um corpo em condições ideais, sujeito apenas à ação da gravidade e restrito ao percurso da curva, atinja o ponto baixo após um intervalo de tempo que independa da altura da qual foi solto, conforme apresentado na figura 2.1.

¹O princípio de Fermat, ou princípio do tempo mínimo, enunciado em 1657, afirma que a luz, ao propagar-se de um ponto para outro, escolhe o caminho para o qual o tempo de percurso é mínimo mesmo que, para tal, se tenha de desviar relativamente ao caminho mais curto.

²Hipótese de Galileu assume que um corpo em queda acelera uniformemente.

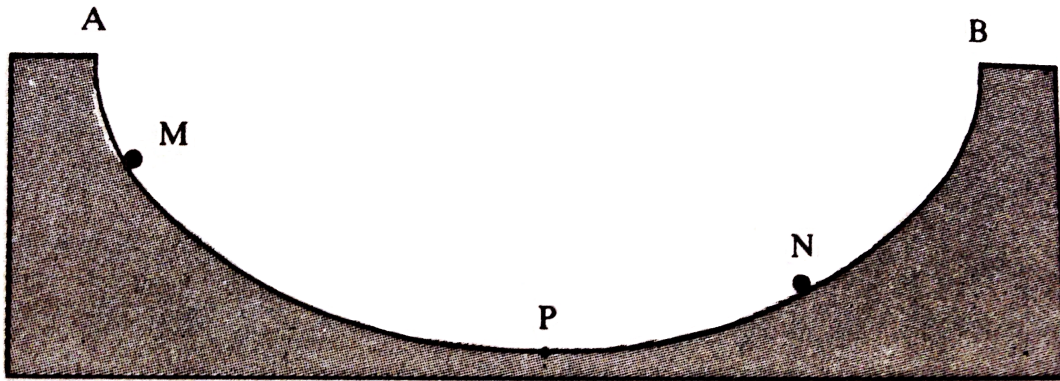


Figura 2.1: Curva isocrônica [1].

A curva que responde o problema colocado é rica em propriedades curiosas e por gerar tantas controvérsias foi chamada "a Helena da geometria" ou "o pomo da discórdia". Algumas dessas propriedades que são encontradas e demonstradas em [1], páginas 161 – 182, estão listadas a seguir:

- a área delimitada por um arco de cicloide e o eixo das abscissas é igual a três vezes a área do círculo que lhe dá origem (figura 2.2);

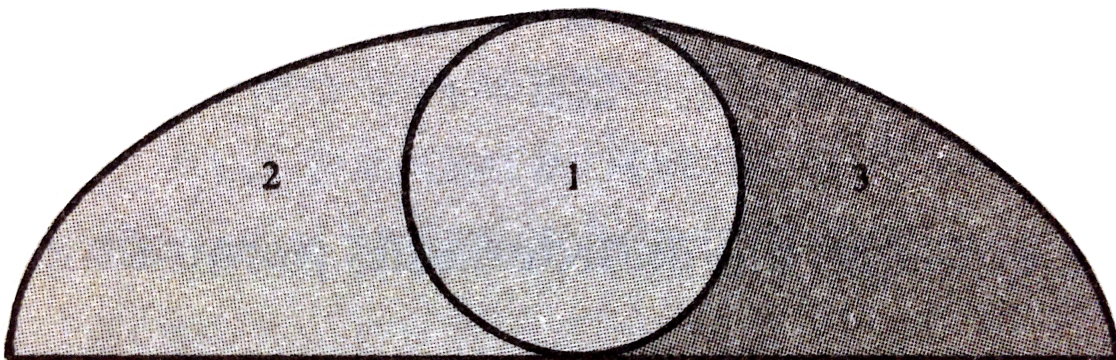


Figura 2.2: Área delimitada por um arco de cicloide [1].

- o comprimento de um arco de cicloide é quatro vezes o diâmetro do círculo rolante que a gerou;
- se pendurar um pêndulo e colocar dois arcos de uma cicloide como batentes, este descreverá uma cicloide igual à que gerou os arcos (figura 2.3);
- quando o peso de um pêndulo move-se ao longo de uma cicloide, ainda que a amplitude de oscilação aumente ou diminua, o período do pêndulo continua sendo o mesmo, pois é uma curva isocrônica (ou tautocrônica), ou seja, o tempo gasto por um objeto para deslizar sem fricção, em gravidade uniforme, até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida (figura 2.1);

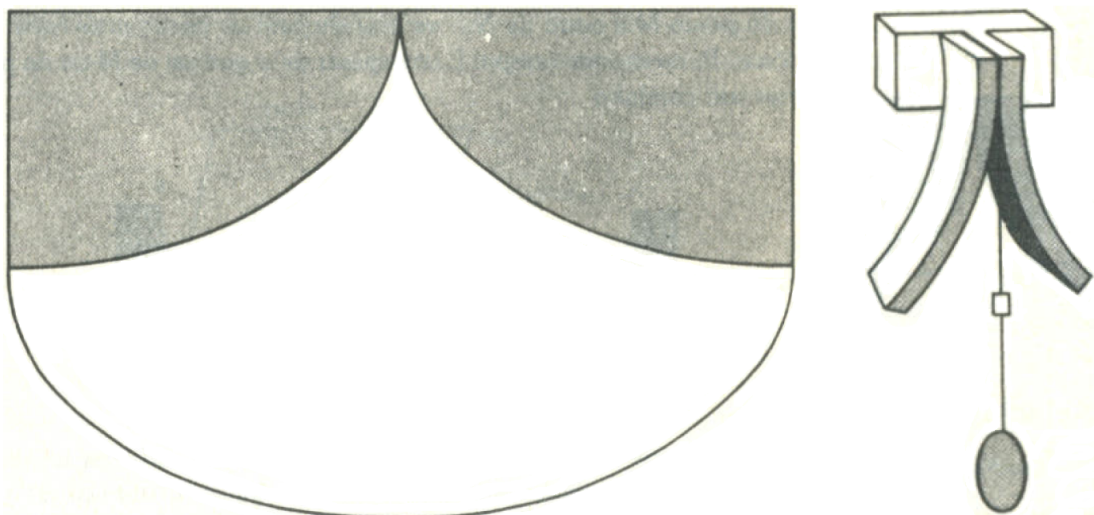


Figura 2.3: Curva gerada por pêndulo com arcos de cicloide como batentes [1].

2.2 A parametrização da cicloide

Conforme apresentado em [2], sejam \mathcal{C} um círculo de raio r , s uma reta e P um ponto de \mathcal{C} . Denominamos cicloide a curva descrita pelo ponto P quando \mathcal{C} rola sobre a reta s , sem deslizar.

Definição 2.1. *Denominamos cicloide a curva definida por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta. Uma cicloide iniciada na origem de um sistema de eixos, criada por uma circunferência de raio r , consiste nos pontos (x, y) tais que:*

$$\begin{cases} x = r(t - \text{sen}(t)) \\ y = r(1 - \text{cos}(t)) \end{cases}$$

em que t é um parâmetro real.

Vamos admitir que a reta s é o eixo OX , o círculo \mathcal{C} inicia o movimento estando seu centro no ponto $(0, r)$ e que o ponto P coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento.

Tracemos dois círculos: \mathcal{C}_1 , representando \mathcal{C} em sua posição inicial, e \mathcal{C}_2 , representando \mathcal{C} após ter rolado alguns instantes.

Sejam O_1 e O_2 os centros de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , respectivamente; $P = (x, y)$ o ponto da cicloide em \mathcal{C}_2 ; A o ponto em que \mathcal{C}_2 toca o eixo OX ; $Q = (x, 0)$ e $T = (0, y)$ as projeções ortogonais de P sobre OX e OY , respectivamente; M e N as projeções ortogonais de P sobre O_2O_1 e O_2A , respectivamente; t a medida do ângulo que O_2P faz com O_2A , no sentido positivo.

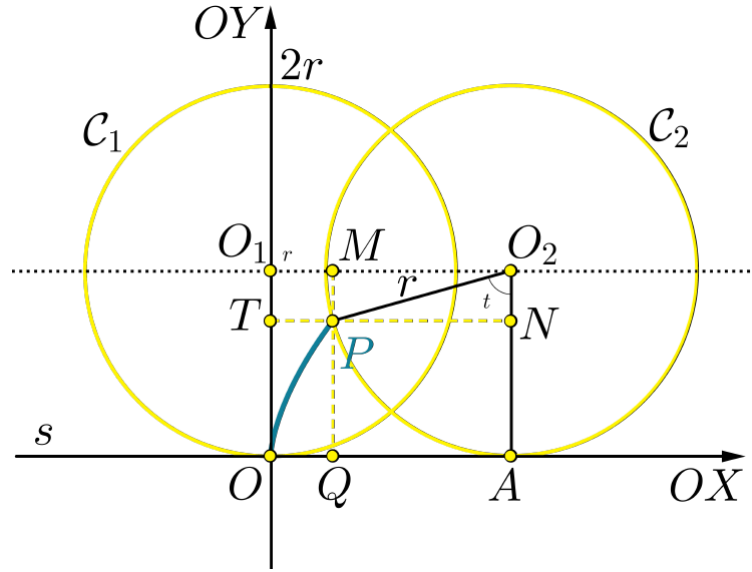


Figura 2.4: Parametrização da cicloide [2].

Note que o segmento OA tem o mesmo comprimento que o arco de A a P sobre o círculo \mathcal{C}_2 , que consiste dos pontos de \mathcal{C} que já fizeram contato com a reta s . Note ainda que

$$\text{sen}(t) = \frac{|O_2M|}{r}$$

e que

$$\text{cos}(t) = \frac{|O_2N|}{r}$$

relações facilmente observadas nos triângulos MPO_2 e PO_2N , respectivamente.

Como t é a medida de $\widehat{AO_2P}$, o comprimento do arco de \mathcal{C}_2 de A a P que já fez contato com s é rt . Logo, $|AO| = rt$.

Assim,

$$x = |OQ| = |OA| \pm |QA| = |OA| \pm |O_2M| = rt \pm r|\text{sen}(t)|$$

$$y = |OT| = |OO_1| \pm |TO_1| = r \pm |O_2N| = r \pm r|\text{cos}(t)|$$

onde o sinal depende da posição de Q na semirreta \overrightarrow{OA} e da posição de T na semirreta $\overrightarrow{OO_1}$, que, por sua vez, variam com a medida t do ângulo $\widehat{AO_2P}$.

Analisando o sinal de $\text{sen}(t)$ e $\text{cos}(t)$ nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, obtemos as seguintes equações paramétricas da cicloide:

$$\begin{cases} x = r(t - \text{sen}(t)) \\ y = r - r \text{cos}(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Veja como é feito o movimento na sequência de figuras 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 e 2.9.

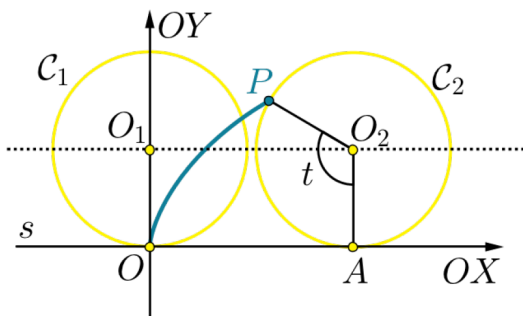


Figura 2.5: $t = \frac{2\pi}{3}$ [2].

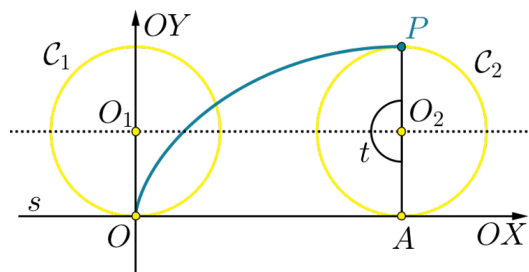


Figura 2.6: $t = \pi$ [2].

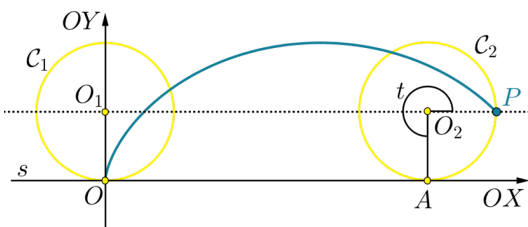


Figura 2.7: $t = \frac{3\pi}{2}$ [2].

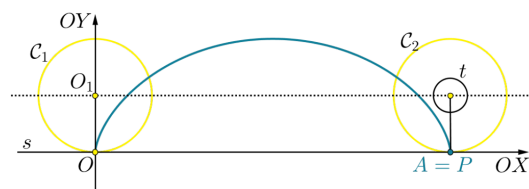


Figura 2.8: $t = 2\pi$ [2].

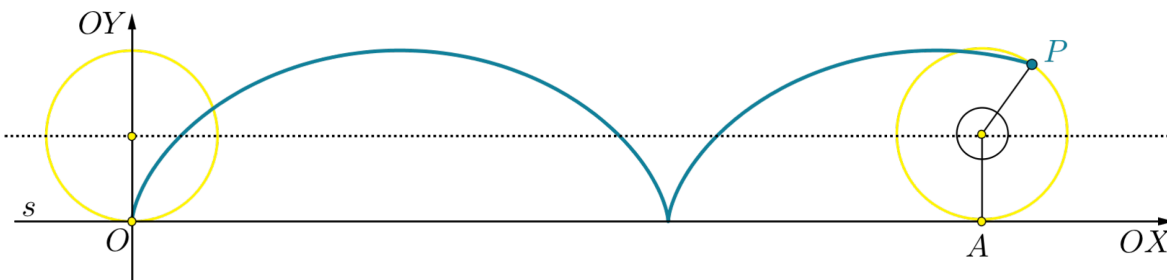


Figura 2.9: Desenvolvimento da cicloide [2].

3 Busca pela solução

3.1 A Braquistócrona e o cálculo variacional

No contexto disputado do problema da Braquistócrona foi produzido material significativo para explorar uma nova área na matemática: o cálculo variacional. Esta teoria é utilizada na resolução apresentada nesta seção.

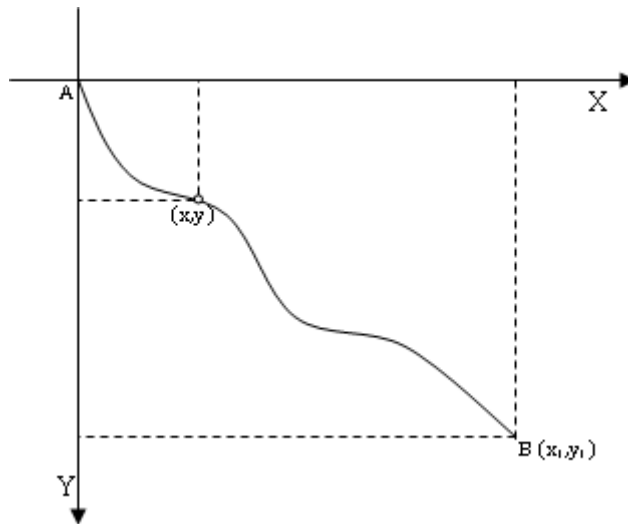


Figura 3.1: Escolha do sistema de coordenadas para o problema da Braquistócrona.

Segundo o princípio geral da conservação de energia, a energia total de um sistema isolado é sempre constante, ou seja, a energia mecânica E_{mec} de um sistema no qual agem somente forças conservativas não se altera com o passar do tempo. Temos então que a soma das energias cinética K e potencial U é constante para qualquer intervalo de tempo.

Sendo assim, dados quaisquer pontos A e B , $E_{mec} = K_A + U_A = K_B + U_B = constante$.

Consideremos, tal como apresentado em [11], que a partícula de massa m tem um

deslocamento vertical y e v é o módulo da velocidade em um determinado instante. Note que o eixo Y foi orientado no sentido oposto ao usual. Tal escolha é conveniente, pois, nesse caso, a força exercida pela gravidade fica orientada no sentido positivo. Além disso, o sistema de coordenadas foi escolhido de modo que o ponto inicial fique localizado na origem.

Temos que a energia potencial gravitacional associada a um sistema partícula-Terra depende apenas da altura (posição vertical) da partícula em relação à posição de referência, e não da posição horizontal. A variação da energia potencial não depende da escolha do ponto de referência, mas apenas da variação de altura. No ponto A , a esfera possui energia potencial dada por $U_{gravitacional} = mgy$ e energia cinética nula, pois parte do repouso. Já no ponto B , a energia potencial é nula e a energia cinética é dada por $\frac{mv^2}{2}$.

Dessa forma, podemos obter a velocidade de uma partícula em queda livre, a partir do repouso, a qualquer momento

$$mgy = \frac{mv^2}{2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

Por outro lado, da definição de velocidade,

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{v} \frac{ds}{dx}$$

Substituindo v por $\sqrt{2gy}$ e $\frac{ds}{dx}$ por $\sqrt{1+y'^2}$ teremos a seguinte expressão para a derivada do tempo com relação ao deslocamento horizontal

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \sqrt{1+y'^2}$$

O desenvolvimento da expressão para comprimento de uma curva é apresentado no apêndice.

Assim, integrando com relação a x pode-se determinar o tempo total para se deslocar de A para B

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx$$

Portanto o tempo total gasto para tal deslocamento é

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \quad (3.1)$$

Queremos encontrar $y = f(x)$ tal que t seja mínimo. Ainda temos $y(0) = 0$ e $y(x_1) = y_1$, como condições de fronteira.

A descrição matemática de sistemas relacionados a leis da física comumente envolve máximos e mínimos e existe um conjunto de ferramentas desenvolvidas com o objetivo de solucionar problemas desse tipo. O cálculo variacional é uma ferramenta utilizada para resolver problemas de otimização, em especial, o problema da Braquistócrona.

A diferença entre os cálculos variacional e diferencial é a natureza dos respectivos objetos a serem maximizados ou minimizados: enquanto o cálculo diferencial procura números que tenham a propriedade de otimizar, o cálculo variacional procura funções com tal propriedade.

O desenvolvimento da teoria do cálculo variacional utilizada a seguir encontra-se em [12], páginas 13-17, 21-22.

Do cálculo variacional, supondo que exista uma função escalar $y(x)$ de classe C^1 , satisfazendo as condições de fronteira $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, e que seja um extremo para o funcional $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$ onde F é uma função de classe C^2 , tem-se que tal função extremal deve satisfazer a equação diferencial de segunda ordem dada por

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (3.2)$$

denominada Equação de Euler.

Em particular, F depende somente de y e y' , logo é possível reduzir a equação de Euler à identidade $F - y'F_{y'} = C$ proposta por Eugenio Beltrami (1835 – 1900) em 1868 e que leva seu sobrenome.

De fato, para verificar a validade desta identidade, multiplicaremos a equação 3.2 por y'

$$y' \frac{\partial F}{\partial y} - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (3.3)$$

Por outro lado, a derivada total nos fornece a seguinte relação

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

ou ainda,

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y'} y''$$

Como F não depende da variável x , então $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Substituindo a expressão acima em 3.3

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (3.4)$$

Como, pela regra do produto, $\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$, então

$$y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - y'' \frac{\partial F}{\partial y'}$$

Substituindo na equação 3.4, teremos

$$\frac{dF}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

A expressão fornece

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

que, por integração, resulta na Identidade de Beltrami:

$$F - y' F_{y'} = C \quad (3.5)$$

Vamos utilizar esta identidade na resolução do problema da braquistócrona. Seja $F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$, então $F_{y'}$ será dada por

$$F_{y'}(y, y') = \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1+y'^2} \right)}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{d \left(\sqrt{1+y'^2} \right)}{dy'}$$

para encontrar o resultado desejado fazemos $u = 1 + y'^2$, logo $\frac{du}{dy'} = 2y'$. Assim,

$$F_{y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{d\sqrt{u}}{du} \frac{du}{dy'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{u}} 2y' = \frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$$

Segue que

$$\begin{aligned} F - y'F_{y'} &= \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - y' \cdot \left(\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \right) \\ &= \frac{\left(\sqrt{1+y'^2} \right)^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \\ &= \frac{1+y'^2 - y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} \end{aligned}$$

Ou seja, $F - y'F_{y'}$ é equivalente a $\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$, conseqüentemente temos pela identidade 3.5

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C$$

que pode ser reescrita, de forma mais simples, como

$$y(1+y'^2) = \frac{1}{C^2} = k, \quad \text{com } k > 0 \quad (3.6)$$

Assim, temos uma equação diferencial de primeira ordem não linear. Para resolvê-la, consideremos a substituição $y'(x(t)) = \cotg(t)$ tendo em vista a identidade $\csc^2(t) = 1 + \cotg^2(t)$. Temos

$$y = \frac{k}{1 + \cotg^2(t)} = \frac{k}{\csc^2(t)} = k \sen^2(t) \quad (3.7)$$

Derivando y com relação a t , utilizando a regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot 2 \operatorname{sen}(t) \cos(t)$$

Como $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, então $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)}$, assim

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cotg(t)} \cdot 2k \operatorname{sen}(t) \cos(t) = 2k \operatorname{sen}^2(t)$$

Integrando $\frac{dx}{dt} = 2k \operatorname{sen}^2(t)$ obteremos uma expressão para $x(t)$. Para tal integração utilizamos a identidade $\operatorname{sen}^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t)$ que pode ser facilmente verificada utilizando a relação de cosseno de arco duplo e a identidade trigonométrica fundamental

$$x(t) = \int 2k \operatorname{sen}^2(t) dt = 2k \int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) \right] dt = kt - \frac{k \operatorname{sen}(2t)}{2} + k_2$$

ou seja,

$$x(t) = \frac{k}{2} (2t - \operatorname{sen}(2t)) + k_2$$

Conseqüentemente, pela expressão 3.7,

$$y(t) = \frac{k}{2} (1 - \cos(2t))$$

Assim, fazendo $2t = \theta$ e sendo $k_2 = 0$, pois $x(0) = 0$, obtemos

$$x = \frac{k}{2} (\theta - \operatorname{sen}(\theta)) \tag{3.8}$$

e

$$y = \frac{k}{2} (1 - \cos(\theta)) \tag{3.9}$$

As equações 3.8 e 3.9 formam a solução de 3.6, na forma paramétrica, cujo gráfico é uma cicloide.

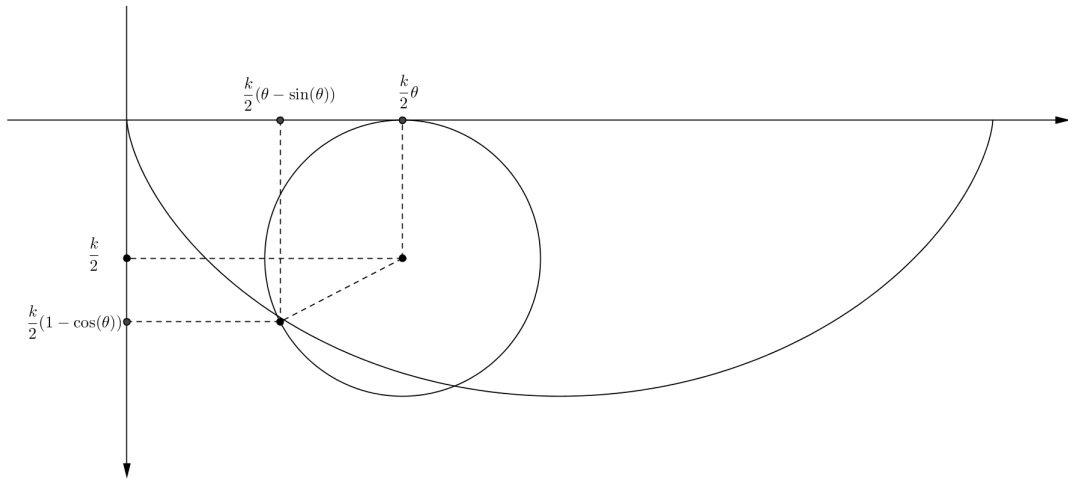


Figura 3.2: Parâmetros no problema.

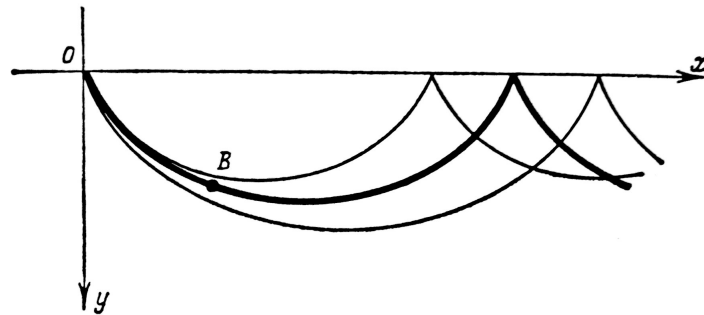


Figura 3.3: Feixe de cicloides [3].

O gráfico contém o ponto $A(0, 0)$, já que satisfaz o sistema. Podemos escolher a constante r de modo que a curva passe também pelo ponto B .

O problema proposto considera condições ideais, porém há a possibilidade de torná-lo mais próximo da situação real: considerar o atrito. Há abordagem da braquistócrona com atrito em [4].

3.2 A Braquistócrona e um problema de refração

A resolução do problema da Braquistócrona apresentado na seção anterior tem como base a teoria do cálculo variacional, porém na época em que o problema foi proposto este ramo de pesquisa na matemática não era desenvolvido e foram apresentadas outras soluções. Em especial, a solução apresentada por Johann Bernoulli envolve princípios da física (óptica) e da matemática (geometria) e será apresentada nesta seção: utilizando o princípio de Fermat para deduzir a lei de Snell que envolve condições análogas às da braquistócrona.

Pelo princípio do tempo mínimo de Fermat, sabemos que a trajetória real percorrida por um raio de luz de A para B é a que minimiza o tempo total de percurso.

Sabemos também, pelo fenômeno da refração¹, que se tivermos dois meios distintos a lei da refração de Snell nos fornece a relação

$$\frac{\text{sen } \mu_1}{\text{sen } \mu_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

onde o ângulo de incidência é μ_1 , o ângulo de refração é μ_2 , ambos medidos com relação à normal, e v_1 e v_2 são as velocidades da luz nos meios 1 e 2, respectivamente. A luz tem uma velocidade, em geral, diferente conforme o meio em que se propaga.

Considerando um raio de luz que vai de A a P com velocidade constante igual a v_1 e segue de P a B com velocidade constante v_2 temos na figura 3.4 um esquema para o fenômeno da refração de um raio de luz.

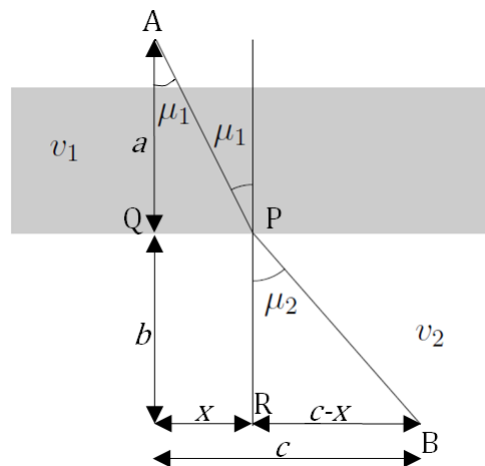


Figura 3.4: Esquema para o fenômeno da refração de um raio de luz.

Ainda temos que

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{n_1}}{\frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1} = cte = K$$

onde n_1 e n_2 são constantes adimensionais, denominadas índices de refração, que dependem do meio onde a luz está se propagando.

A lei de Snell foi descoberta empiricamente pelo físico holandês Willebrord van Roijen Snell (1591-1626), em 1621, teve sua primeira prova matemática fornecida por

¹Desvio da direção da luz ao atravessar a fronteira entre dois meios com diferentes velocidades

Fermat e tem como base o princípio do tempo mínimo.

De fato, considerando o Teorema de Pitágoras e que

$$\text{tempo gasto} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{velocidade}}$$

temos que o tempo gasto para o raio de luz ir de A até B é dado pela soma entre o tempo gasto de A a P e o tempo gasto de P a B.

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

Assim, nosso problema está reduzido a calcular x que minimize $T(x)$, logo tal ponto deve satisfazer $T'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= \frac{1}{v_2} \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Observe a partir dos triângulos QAP e RPB, respectivamente, que $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{sen}(\mu_1)$ e que $\frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \text{sen}(\mu_2)$. Substituindo estas expressões na equação 3.10 chegamos a

$$\frac{1}{v_1} \text{sen}(\mu_1) = \frac{1}{v_2} \text{sen}(\mu_2)$$

ou seja,

$$\frac{\text{sen}(\mu_1)}{\text{sen}(\mu_2)} = \frac{v_1}{v_2}$$

que é a relação procurada.

Imaginemos agora um meio óptico formado por lâminas l_1, l_2, \dots, l_n horizontais e finas tais que a velocidade da luz em cada lâmina é v_1, v_2, \dots, v_n conforme mostra a figura 3.5. Então, um raio de luz que parte de A e chega a B, seguirá uma trajetória de modo que

$$\frac{\text{sen}(\mu_j)}{v_j} = K$$

Esse caminho percorrido pelo raio de luz é o que fornece tempo mínimo para ir de A a B com as velocidades indicadas.

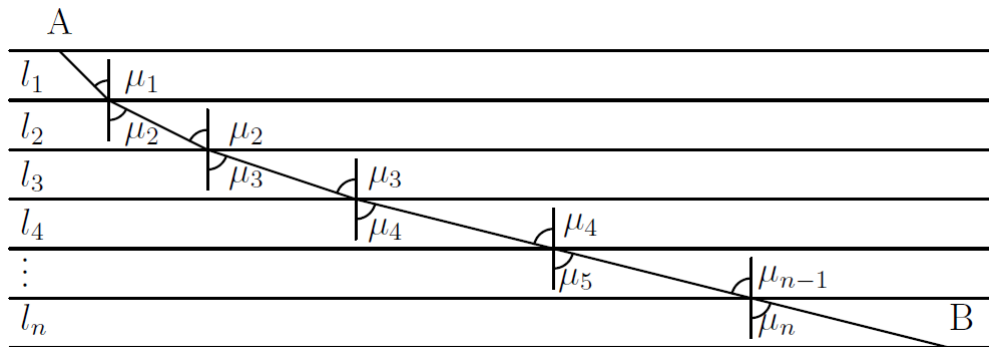


Figura 3.5: Meio óptico e a trajetória descrita por um raio de luz partindo de A e chegando em B [4].

Dizemos que um meio é menos refringente que outro quando seu índice de refração n é menor que o do outro, conseqüentemente a luz se propaga por ele com velocidade maior. No exemplo apresentado na figura 3.5, o raio passa por meios cada vez menos refringentes, ou seja, onde a velocidade é maior.

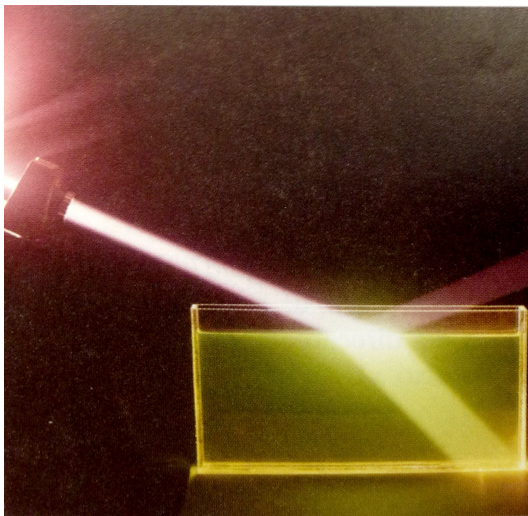


Figura 3.6: Fotografia que mostra a reflexão e a refração de um feixe de luz incidente em uma superfície de água horizontal [5].

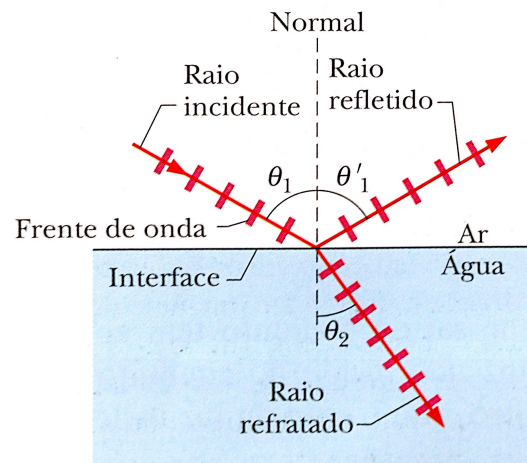


Figura 3.7: Uma representação de 3.6 [5].

Quando temos um meio l_{j+1} menos refringente que o meio l_j ($n_{j+1} < n_j$), o raio refratado se afastará da normal à superfície no ponto de incidência. Isso significa dizer que o ângulo de refração é maior do que o ângulo do raio incidente.

De fato, como consequência da lei de Snell, $n_{j+1} \cdot \text{sen}(\mu_j) = n_j \cdot \text{sen}(\mu_{j+1})$. Se $n_{j+1} < n_j$ temos que ter $\text{sen}(\mu_{j+1}) > \text{sen}(\mu_j)$ para que a multiplicação do primeiro membro da

lei de Snell seja igual à multiplicação do segundo membro. Sendo $\text{sen}(\mu_{j+1}) > \text{sen}(\mu_j)$, temos que $\mu_{(j+1)} > \mu_j$. Isso significa que o raio se afastará da normal.

O princípio do tempo mínimo e a lei de Snell vêm ao encontro do problema da braquistócrona, porém encontramos uma dificuldade maior: a velocidade com que a partícula se desloca sobre a curva varia de acordo com a posição em que ela se encontra, enquanto no caso da refração do raio de luz a velocidade é constante em cada meio. Para transpor esta dificuldade faremos uso da noção de limite.

Quando a partícula tiver descido uma altura h , sua velocidade será $\sqrt{2gh}$ (Lei da queda livre). Então o caminho que fornecerá o tempo mínimo será a trajetória seguida por um raio de luz num meio tal que a velocidade da luz varie continuamente com a descida h e seja precisamente $\sqrt{2gh}$. Teremos

$$\frac{\text{sen}(\mu_j)}{\sqrt{2gh}} = K \quad (3.11)$$

sendo μ o ângulo que tal caminho faz com a vertical, conforme figura 3.8.

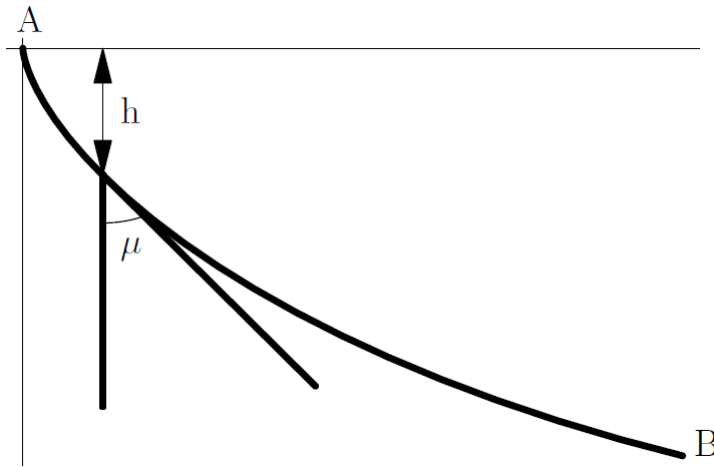


Figura 3.8: Ângulo que o caminho descrito pelo raio de luz e a vertical [4].

Vamos, agora, verificar que a cicloide satisfaz a condição 3.11. Conhecendo suas equações paramétricas obtemos

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos(\theta)) \\ \frac{dy}{d\theta} = r \text{sen}(\theta) \end{cases}$$

Podemos relacionar μ e θ da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(\mu) &= \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d\theta}{dy} = \frac{1 - \cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \\
&= \frac{1 - \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{1 - \left(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{tg}(\mu) = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

e, portanto,

$$\mu = \frac{\theta}{2}$$

Por outro lado, utilizando a expressão para cosseno de arco duplo e a identidade trigonométrica fundamental,

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gr(1 - \cos(\theta))} = 2\sqrt{gr} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Assim, de fato,

$$\frac{\operatorname{sen}(\mu)}{v} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{gr}} = \frac{1}{2\sqrt{gr}} = \text{cte} = K$$

onde K não depende de θ . Portanto, a cicloide tem a propriedade que procuramos e assim, ela é solução do problema da Braquistócrona, como já havíamos obtido na resolução variacional do problema.

3.3 A Braquistócrona e um problema de salvamento na praia

Os conteúdos da física e da matemática que foram utilizados como base na sessão anterior constam tradicionalmente no programa previsto para o segundo ano do Ensino Médio o que torna a resolução compreensível a alunos a partir deste nível de ensino.

O problema de salvamento na praia, exposto nesta seção, envolve condições análogas às do problema de refração e, conseqüentemente, às do problema da braquistócrona e pode auxiliar na compreensão da resposta ao problema que não é intuitiva a qualquer pessoa.

Se perguntarmos a alguém qual é o caminho mais rápido entre dois pontos desníveis, possivelmente responderá que é a reta ao imaginar que o caminho mais curto é sempre, também, o mais rápido.

Se os dois pontos estiverem sob um campo uniforme, então a trajetória de menor tempo será retilínea, porém no problema da braquistócrona a partícula está sob a ação da gravidade, logo a velocidade varia conforme a altura.

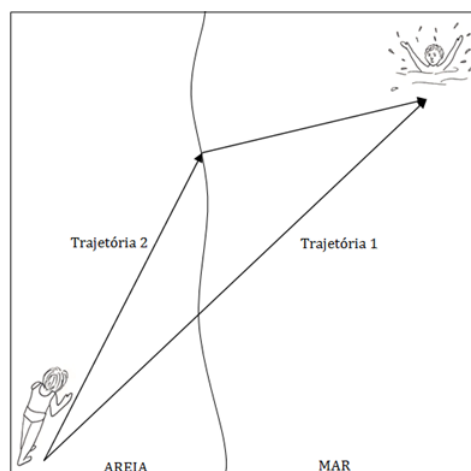


Figura 3.9: Possíveis trajetórias de um salva-vidas para socorrer uma vítima.

Observe a figura 3.9 e imagine que você é o salva-vidas da e precisa salvar a pessoa

que está no mar no menor tempo possível. Qual trajetória seria escolhida para chegar o mais rápido possível até a vítima?

Seguir a trajetória 1 até a vítima não é a melhor opção de caminho. Isso acontece porque na areia você tem uma velocidade maior do que na água. Assim, é melhor correr um pouco mais na areia, porque sua velocidade será maior e deixar para depois entrar na água, ou seja, é melhor seguir a trajetória 2.

Com a luz acontece a mesma coisa: a luz propaga-se com velocidades diferentes em meios diferentes, conforme exposto na seção anterior.

Ainda poderíamos imaginar que o salva-vidas está em um calçadão, onde sua velocidade seria ainda maior com relação à areia, portanto seria conveniente correr um pouco mais nele.

Voltando ao problema da braquistócrona, como a velocidade com que a partícula se desloca sobre a curva varia de acordo com a posição em que ela se encontra, enquanto no caso da refração do raio de luz a velocidade é constante em cada meio, também faremos uso da noção de limite para transpor esta dificuldade. Essa situação também está representada na figura 3.5.

A analogia entre o problema da braquistócrona e o problema de salvamento na praia diminui a estranheza com relação ao fato de existir um caminho maior que, porém, torna o tempo de percurso menor.

4 Proposta didática

Neste capítulo, é apresentada uma proposta didática relacionada ao problema da braquistócrona envolvendo diferentes abordagens: aplicação, uso de ferramenta tecnológica e experimentação.

O objetivo desta proposta é contribuir com a prática pedagógica do professor, apresentando o conteúdo de forma contextualizada e relacionando a matemática e a física.

O professor tem autonomia para optar pelas sugestões que julgar adequadas ao seu planejamento didático podendo também modificá-las ou ainda criar outras, sendo importante que as atividades estimulem a reflexão e a visão crítica dos alunos. O público alvo são alunos do segundo e terceiro anos do Ensino Médio.

4.1 Abordagem através de aplicação: rampa de skate

Conforme apresentado em [6], nas competições de vertical, os skatistas são avaliados segundo critérios de criatividade e grau de dificuldade das manobras, que devem ser executadas em um intervalo de tempo pré-estabelecido. Dessa forma, quanto menos tempo o skatista gastar percorrendo a extensão da rampa de um lado para o outro, mais tempo lhe sobrar para executar as manobras que contam pontos.

Sendo assim, é interessante encontrar uma curva, para que possa ser construída uma pista de skate, que possua o menor tempo de descida, fazendo com que o skatista tenha mais tempo para realizar mais manobras durante a competição.

Poderíamos nos perguntar se a circunferência que compõe a lateral da rampa da figura 4.1 é, de fato, a curva de tempo mínimo de descida.

Uma situação semelhante seria perguntar: qual deve ser a forma do escorregador de um parque infantil para que o tempo de descida seja o menor possível? Descobrir qual é a curva que possui o tempo de descida mais curto é o mesmo que resolver o

problema da braquistócrona.

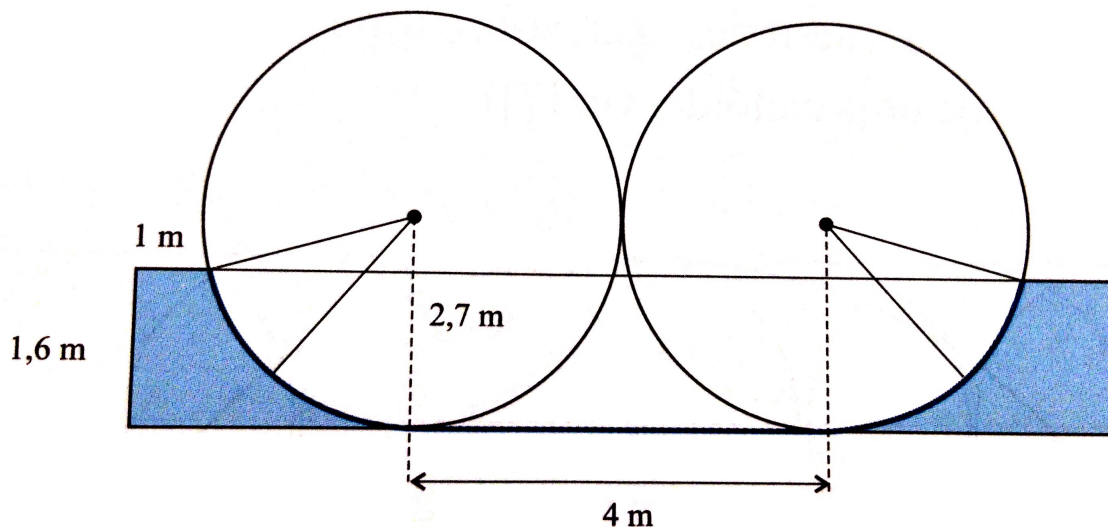


Figura 4.1: Esboço de uma Pista Half Pipe [6].

Nesse contexto, pode ser introduzido o problema e um pouco de sua história, presentes no capítulo 2.

Quanto à solução, apesar do estudo do cálculo variacional, da sessão 3.1, não ser acessível aos alunos desta faixa, o professor pode relatar que a matemática oferece com rigor a resposta ao problema, a partir das condições dadas e chega à solução que era desconhecida.

A relação entre a braquistócrona e um problema de salvamento, seção 3.3, pode auxiliar na compreensão do fato de o caminho mais rápido entre dois pontos desnivelados não ser a reta apesar de ser o caminho mais curto. Em associação ao estudo de óptica, presente na disciplina de física, a relação entre a braquistócrona e um problema de refração, sessão 3.2, levará os alunos a concluírem que a cicloide é a resposta procurada.

Voltando à rampa de skate da figura 4.1, substituindo os arcos de circunferência por arcos de cicloide, teremos uma rampa ligando um ponto de altura 1,6 metros e outro a zero metro, que melhora a eficiência para as competições de vertical.

Equacionando a nova planta de rampa em um sistema de coordenadas, com θ (em radianos) no eixo das abscissas, temos a curva apresentada na figura 4.2.

Partindo de uma cicloide, podemos obter a curva de figura 4.2 tendo em vista as seguintes transformações geométricas:

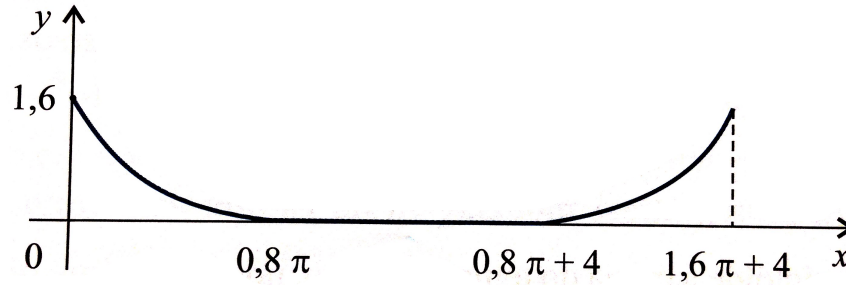


Figura 4.2: As curvas nos intervalos $[0; 0,8\pi]$ e $[0,8\pi + 4; 1,6\pi + 4]$ representam arcos de uma cicloide (semiarcos) [6].

- adotando $r = 0,8$, a equação paramétrica da cicloide será:

$$\begin{cases} x = 0,8(\theta - \text{sen}(\theta)) \\ y = 0,8(1 - \text{cos}(\theta)) \end{cases}$$

- fazendo uma reflexão dessa curva pelo eixo das abscissas, obtemos uma nova curva de equação:

$$\begin{cases} x = 0,8(\theta - \text{sen}(\theta)) \\ y = -0,8(1 - \text{cos}(\theta)) \end{cases}$$

- transladando a nova curva 1,6 unidades para cima, obtemos uma curva de equação:

$$\begin{cases} x = 0,8(\theta - \text{sen}(\theta)) \\ y = 1,6 - 0,8(1 - \text{cos}(\theta)) \end{cases}$$

- pelo eixo vertical de simetria da nova curva, translada-se apenas o semiarco do lado direito 4 unidades para a direita:

$$\begin{cases} x = 4 + 0,8(\theta - \text{sen}(\theta)) \\ y = 1,6 - 0,8(1 - \text{cos}(\theta)) \end{cases}$$

Em resumo, a rampa indicada na figura 4.2 é modelada da seguinte maneira:

$$\theta \in [0; 0,8\pi] \Rightarrow \begin{cases} x = 0,8(\theta - \text{sen}(\theta)) \\ y = 1,6 - 0,8(1 - \text{cos}(\theta)) \end{cases}$$

$$\theta \in [0,8\pi; 0,8\pi + 4] \Rightarrow y = 0$$

$$\theta \in [0,8\pi + 4; 1,6\pi + 4] \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 0,8(\theta - \text{sen}(\theta)) \\ y = 1,6 - 0,8(1 - \text{cos}(\theta)) \end{cases}$$

4.2 Abordagem através do uso de ferramenta tecnológica: software GeoGebra

Tendo modelado o problema da rampa de skate através de equações, pode ser utilizado um programa de computador para construir o gráfico da curva e, com isso, gerar uma planta para a construção de modelos experimentais.

Utilizando o GeoGebra, podem ser descritas curvas no formato de circunferência, reta, parábola e cicloide para a construção de rampas, em modelos de madeira (Figura 4.3), que permitam a investigação experimental da braquistócrona na cicloide.

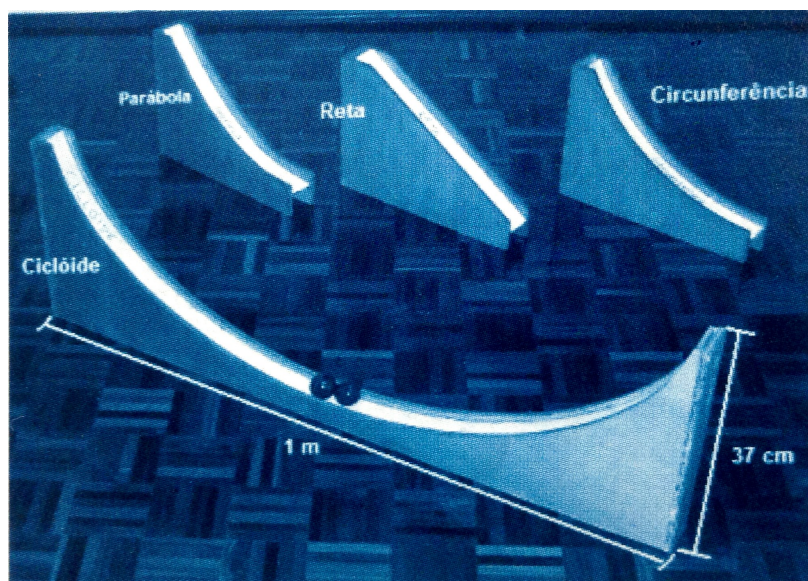


Figura 4.3: Modelos de rampas de madeira [6].

A proposta é modelar rampas de altura 2 unidades, com $0 \leq x \leq \pi$, em um sistema de coordenadas, com as seguintes características:

- Cicloide: gerada pela circunferência de raio 1, com máximo em $(0, 2)$ e mínimo em $(\pi, 0)$, logo

$$x = \theta - \text{sen}(\theta)$$

e

$$y = 2 - (1 - \text{cos}(\theta))$$

- Reta: passando pelos pontos $(0, 2)$ e $(\pi, 0)$, ou seja,

$$2x + \pi y - 2\pi = 0$$

- Parábola: com vértice em $(\pi, 0)$ e passando por $(0, 2)$, portanto

$$y = \frac{2}{\pi^2}x^2 - \frac{4}{\pi}x + 2$$

- Circunferência: com centro $C = (\pi, y_0)$ e passando pelos pontos $P = (\pi, 0)$ e $Q = (0, 2)$, assim

$$(x - \pi)^2 + \left[y - \left(\frac{\pi^2 + 4}{4} \right) \right]^2 = \left(\frac{\pi^2 + 4}{4} \right)^2$$

O gráfico das curvas apresentadas aumenta a curiosidade por uma verificação experimental de que a cicloide seja a curva do tempo mínimo, já que é a curva de maior comprimento entre as quatro comparadas, conforme figura 4.4.

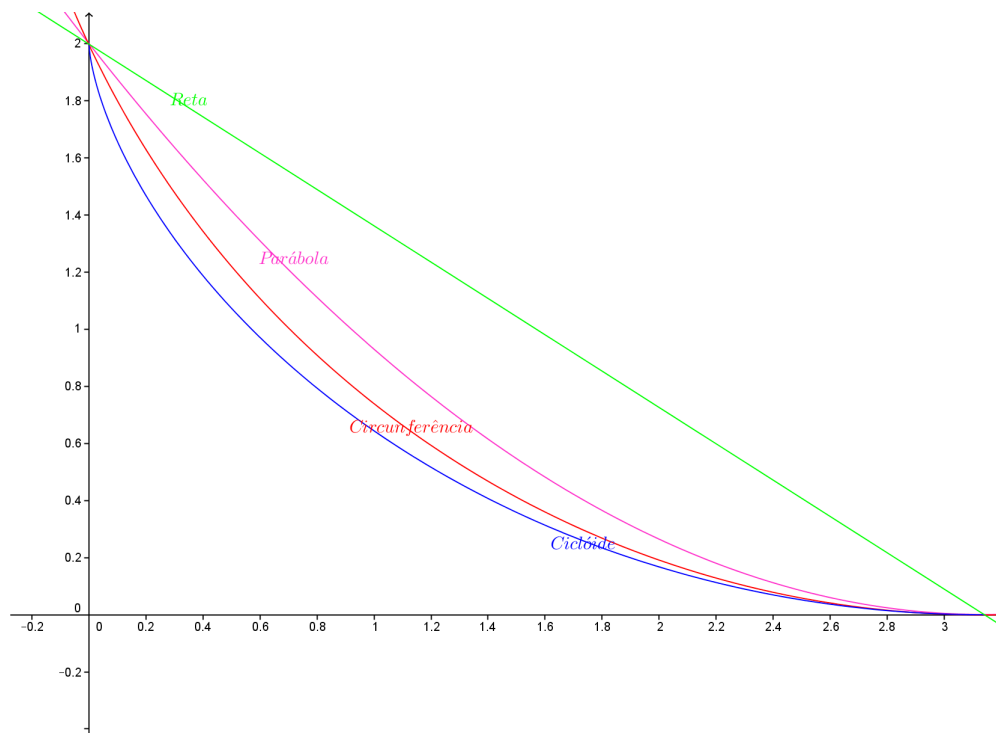


Figura 4.4: Curvas estudadas.

Nas figuras 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 é apresentada uma sequência que mostra a simulação da descida de uma bola. Nela podemos observar que a cicloide é uma curva que tem tempo mínimo de descida em relação às outras curvas dadas e é interessante destacar que a reta, apesar de ser a curva de menor comprimento, é a de maior tempo de descida.

Pode ser proposto aos alunos, tal como apresentado em [8], traçar a cicloide partindo do fato de ser obtida pelo movimento de um ponto P sobre uma circunferência de centro C e raio r quando esta gira sobre uma reta sem escorregar. Inicia-se o traçado com a criação de dois controles deslizantes: o primeiro será chamado de r , destinado à medida do raio da circunferência geradora variando no intervalo $[0, 4]$ e o segundo denominado a variando no intervalo $[0, 4\pi r]$ sendo que o valor $4\pi r$ corresponde a duas vezes o comprimento da circunferência geradora.

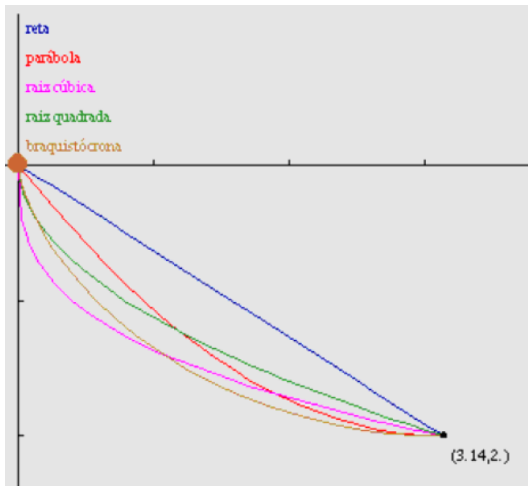


Figura 4.5: Momento inicial da queda [7].

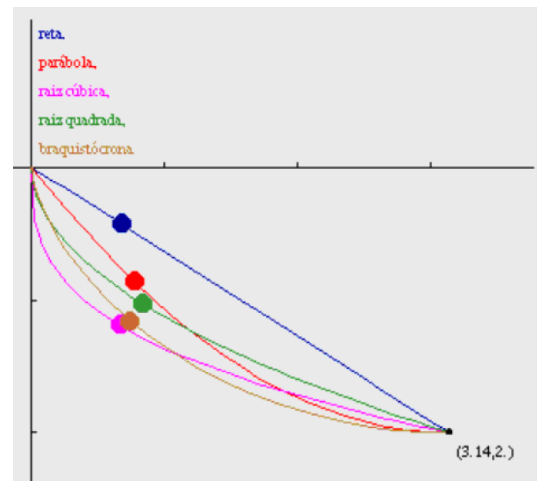


Figura 4.6: Momento intermediário da queda [7].

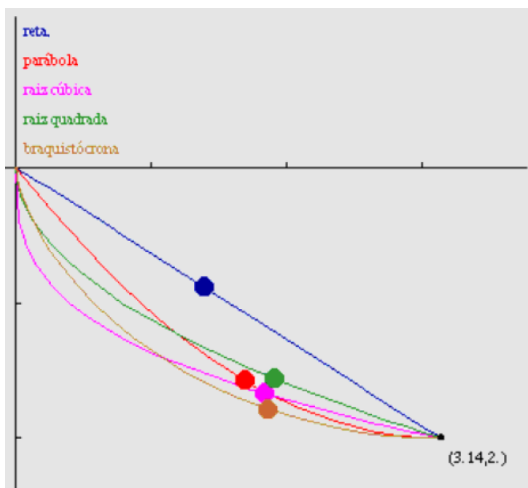


Figura 4.7: Outro momento intermediário da queda [7].

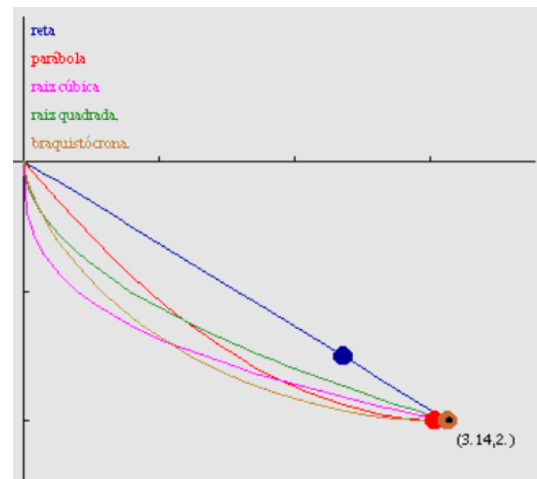


Figura 4.8: Final da queda através da braquistócrona [7].

A partir desses parâmetros criados, constrói-se uma circunferência de centro $C = (a, r)$ e raio r . Constrói-se também o ponto A de coordenadas $(a, 0)$.

Para obter a cicloide, devemos considerar que à medida que a circunferência gira sobre o eixo Ox , um ponto P sobre a circunferência descreve uma curva. Para visualizar tal situação, no GeoGebra utiliza-se o comando *Ângulo com Amplitude Fixa* (seleciona-se o ponto A , o ponto C como vértice, a amplitude dada por a/r e habilita-se a opção *sentido horário*). Assim é gerado o ponto P : bastará ativar a opção *habilitar rastro* e movimentar o seletor a para obter a cicloide conforme a figura 4.9.

Já para traçar a cicloide através de suas equações paramétricas, pode-se criar um controle deslizante denominado r para o raio da circunferência geradora. Inserindo-se

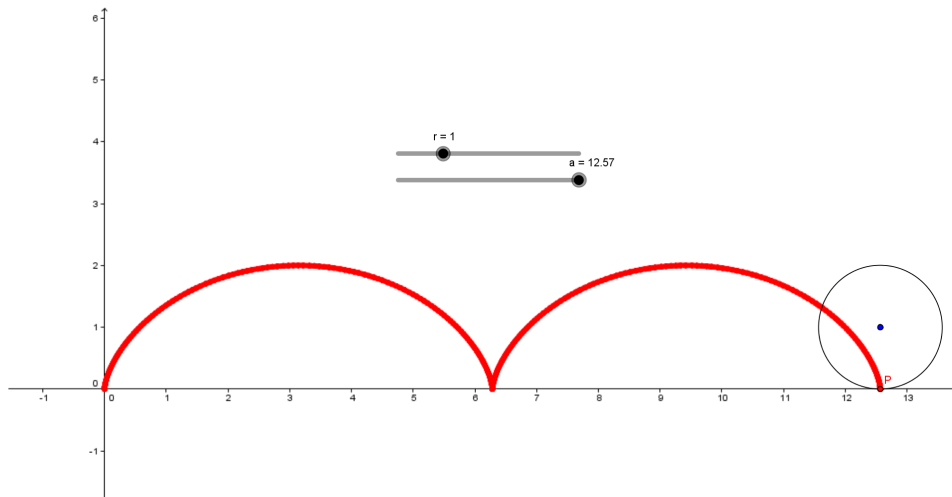


Figura 4.9: Cicloide obtida no GeoGebra.

no campo de entrada $p(t) = r(t - \text{sen}(t))$ e $q(t) = r(1 - \text{cos}(t))$ e utilizando-se o comando $Curva[p(t), q(t), t, 0, 4\pi]$ teremos a cicloide apresentada na figura 4.10.

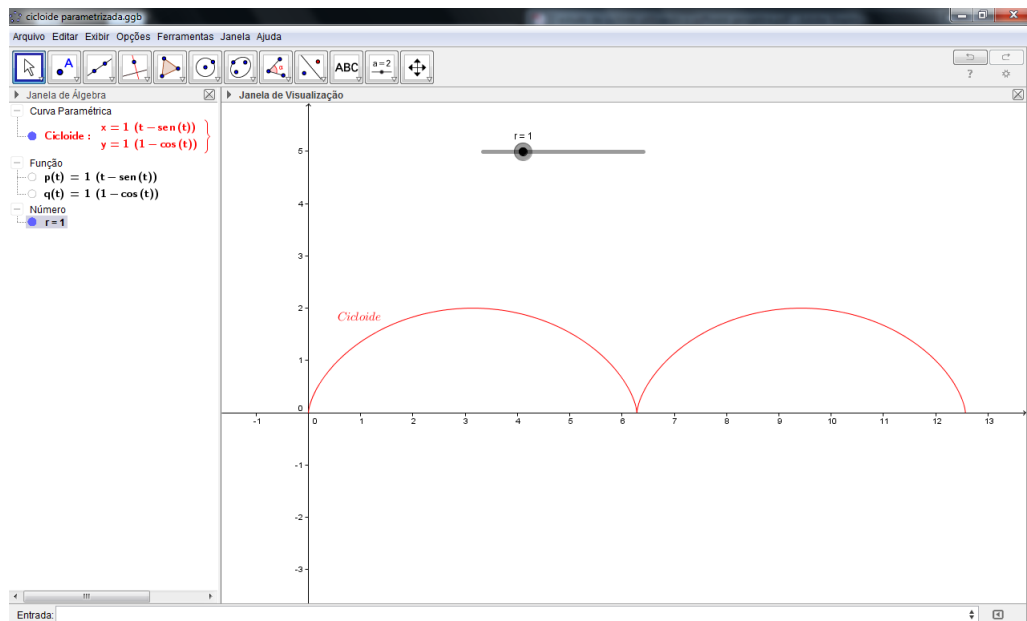


Figura 4.10: Cicloide obtida no GeoGebra através de suas equações paramétricas.

O GeoGebra ainda permite uma simulação da queda de uma esfera por diferentes curvas, ambas com mesmo desnível de altura e com mesmo ponto inicial e final, através do comando *Animar*.

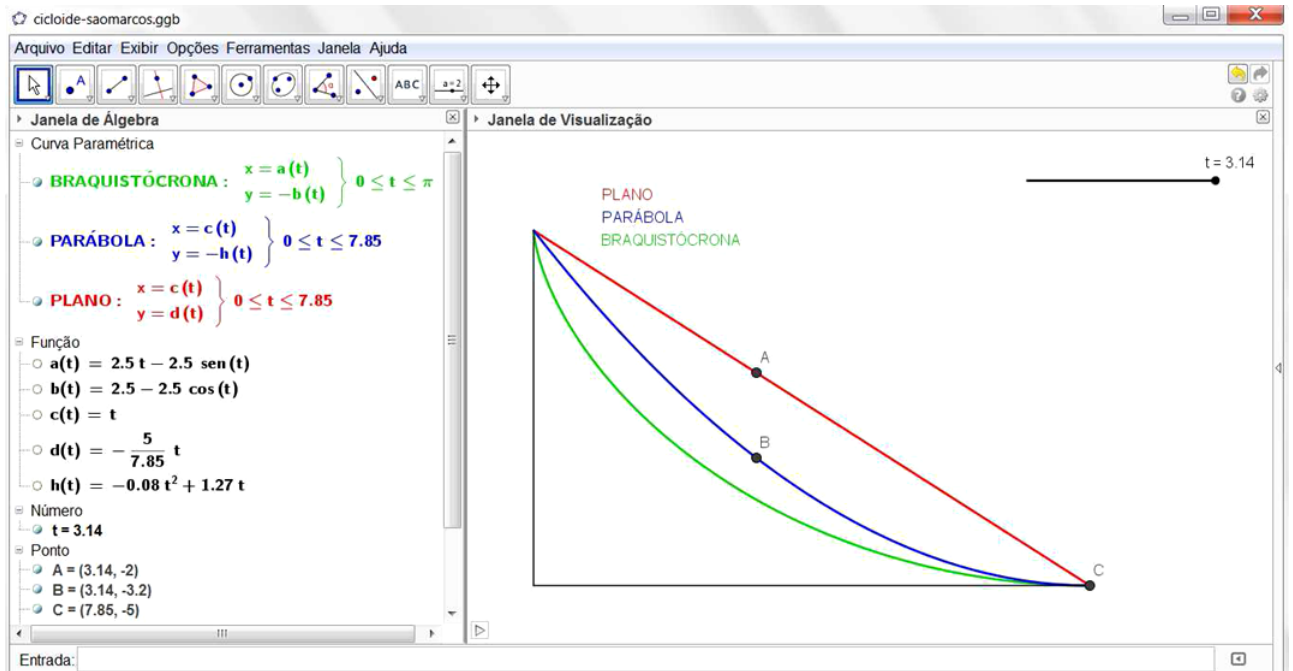


Figura 4.11: Simulação de experimento no GeoGebra através do comando *Animar* [8].

4.3 Abordagem experimental: construção de rampas

A construção de diferentes rampas pode ser proposta com a intenção de verificar experimentalmente o modelo teórico e as curvas modeladas na seção anterior podem ser plotadas para servir de base para tais construções.

Uma pista cuja primeira metade segue o formato de uma cicloide e a segunda metade em formato reto é apresentada em [9]. Foi construída a partir de duas chapas de madeira do tipo compensado de $50\text{cm} \times 20\text{cm} \times 10\text{mm}$ coladas de modo a aumentar a espessura, cortadas utilizando uma serra tico tico de bancada e fixadas em uma base. As curvas estão dispostas dessa forma para permitir a comparação entre os resultados de tempo nas duas partes da pista sem a necessidade de um cronômetro já que duas bolinhas podem ser soltas simultaneamente, de uma mesma altura, nas diferentes pistas (figura 4.12). Este experimento confirma que o tempo de descida através da cicloide é menor do que o tempo de descida pela reta.

O modelos experimentais podem ser construídos separadamente conforme figura 4.3.



Figura 4.12: Modelo experimental [9].

5 Considerações finais

A ciência, em geral, envolve um trabalho de exploração dos muitos enigmas que a natureza apresenta. Algumas vezes estes enigmas são bem concretos e próximos como no caso da curva de descida mais rápida.

Este trabalho apresentou o contexto histórico ligado à proposição do problema da braquistócrona bem como o desenvolvimento de soluções. A resolução de Jakob Bernoulli constituiu o princípio de um novo ramo da matemática, o cálculo variacional, e ratifica a ideia de que questões, em matemática, podem dar lugar a desenvolvimentos de dimensão imprevisível. Já a resolução de Johann Bernoulli, seu irmão, foi notável por estar fundamentada em conceitos da física (óptica).

Uma proposta didática, praticável no Ensino Médio, foi apresentada visando a um estudo interdisciplinar do problema e contempla diferentes abordagens.

A abordagem através de experimento, com a possibilidade de aplicação, foi exibida como atrativo para o estudo do objeto matemático, podendo também incluir o uso de um recurso computacional no ensino e aprendizagem da matemática.

O software GeoGebra além de estabelecer-se como um recurso computacional auxiliar no ensino e aprendizagem, permite exploração e interação de modo dinâmico, além de auxiliar na validação das hipóteses formuladas.

Referências

- [1] GUSMÁN, M. d. *Aventuras Matemáticas*. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1990.
- [2] PROFMAT - Notas de aula - Geometria analítica. 2012.
- [3] ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. 1. ed. Moscou: Mir, 1969.
- [4] LIMA, G. *Cálculo Variacional: Problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos*. Tese (Doutorado) — Unicamp, 2004.
- [5] HALLIDAY, D.; RESNIK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física - Ótica*. - volume 4. 8. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [6] MELLO, J. L. P. A rampa de skate de tempo mínimo. *Revista do professor de matemática (RPM)*, v. 59, p. 9–15, 2006.
- [7] MARQUES, D. A.; OLIVEIRA, R. H. A. de; JAFELICE, R. S. M. Modelagem matemática das pistas de skate. *FAMAT em revista*, v. 10, p. 253–270, 2008.
- [8] GRANDE, A. L. *O estudo da cicloide utilizando o software Geogebra. XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, 2015.
- [9] CAETANO, W. L. *Queda em curvas de menor tempo e tempo independente da altura - Braquistócrona e Tautócrona*. Unicamp, 2008.
- [10] SMITH, D. E. *A source book in mathematics*. - volume 2. 1. New York: Dover publications, Inc, 1959.
- [11] ZANI, S. L. *O problema da Braquistócrona*. ICMC - USP, 2000.
- [12] JÚNIOR, J. R. S. *O Cálculo Variacional e o Problema da Braquistócrona*. UNESP – Rio Claro. 2010.

A O comprimento s de uma curva \mathcal{C}

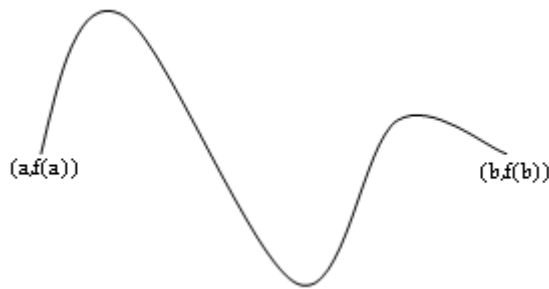


Figura A.1: Curva definida pela equação $y = f(x)$.

Consideremos a linha poligonal determinada pelos pontos P_i , $i = 0, \dots, n$ e uma partição do intervalo $[a, b]$:

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, b = x_n\}$$

Assim, o comprimento é dado por

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

onde $|P_{i-1}P_i| = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$.

Colocaremos $(x_i - x_{i-1})^2$ em evidência com a intenção de utilizar o teorema do valor médio. *Seja f derivável em (a, b) e contínua em $[a, b]$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$:*

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 (f'(\bar{x}_i))^2} \\ &= \Delta x_i \sqrt{(f'(\bar{x}_i))^2}. \end{aligned}$$

Desta maneira,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{(f'(\bar{x}_i))^2} = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2} dx.$$

$\sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{(f'(\bar{x}_i))^2}$ é a soma de Riemann para a função $g(x) = \sqrt{(f'(x))^2}$ relativa à partição P do intervalo $[a, b]$.

Consequentemente, $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$.