



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO LUCAS SANTOS OLIVEIRA

HISTÓRICO, CÁLCULO E IRRACIONALIDADE DE PI-GREGO

JUAZEIRO DO NORTE  
2015

FRANCISCO LUCAS SANTOS OLIVEIRA

HISTÓRICO, CÁLCULO E IRRACIONALIDADE DE PI-GREGO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Mário de Assis Oliveira

JUAZEIRO DO NORTE  
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

O47h Oliveira, Francisco Lucas Santos  
Histórico, cálculo e irracionalidade de pi-grego / Francisco Lucas Santos Oliveira. – 2015.  
46 f. : il. ; enc. ; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2015.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Mário de Assis Oliveira.

1. Números irracionais. 2. Cálculo diferencial. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Título.

---

CDD 512.7

HISTÓRICO, CÁLCULO E IRRACIONALIDADE DE PI-GREGO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 03 / 07 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

*Mario de Assis Oliveira*

---

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira (Orientador)

Univ. Regional do Cariri (URCA) e

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

*Junio Moreira de Alencar*

---

Prof. Ms. Junio Moreira de Alencar

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

*Leandro Barbosa Paz*

---

Prof. Ms. Leandro Barbosa Paz

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho a Cristo e sua Santa  
Igreja

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Nosso Senhor Jesus Cristo e a sua Igreja, pois os mesmos foram os principais responsáveis pela minha educação moral e ética perante principalmente a sociedade.

Aos meus pais e de maneira muito especial à minha mãe, pelo amor e pelo apoio a minha educação desde a minha infância e pelo apoio dado a minha carreira nos momentos mais difíceis.

A minha namorada por escutar minhas dificuldades e suportar todas os meus momentos de raiva e decepção que surgiram durante a edição desse trabalho e por sempre me apoiar em tudo que faço, principalmente no relativo ao meu estudo e ao meu trabalho.

Ao meu orientador Mário de Assis, pois o mesmo sempre me auxiliou em tudo, desde a graduação, sendo também o meu orientador na mesma, apoiando todo trabalho que eu sugeria fazer, me fornecendo todo o necessário para que eu o fizesse bem.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) por possibilitar a minha participação numa pós-graduação stricto-sensu, estando em pleno exercício em sala de aula.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará que me auxiliaram nesta difícil luta que é um mestrado.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano que me ajudou concentrando em apenas três dias da semana a minha carga horária em sala de aula.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) que me concedeu uma bolsa de estudo.

Por fim, agradeço a todos os amigos e colegas de turma com quem tive o prazer de lutar lado a lado.

Não vos aflijais, nem digais: Que comemos? Que beberemos? Com que nos vestiremos? São os pagãos que se preocupam com tudo isso. Ora, vosso Pai celeste sabe que necessitais de tudo isso. Buscai em primeiro lugar o Reino de Deus e a sua justiça e todas estas coisas vos serão dadas em acréscimo.  
Mateus VI, XXXI - XXXIII

## RESUMO

O  $\pi$  é um número de natureza singular, pois muitos homens em diversos momentos históricos se detiveram a calculá-lo e estudá-lo. Círculos podem ser vistos em quase todos os lugares, e como consequência, o  $\pi$  também. Por estar tão presente na realidade, muitos foram os matemáticos que se dedicaram ao estudo desse número e de seu valor numérico. Este trabalho, fruto de muita pesquisa, mostrará muitos dos diversos caminhos que os matemáticos fizeram para encontrarem uma aproximação para  $\pi$ . Trataremos também neste trabalho as curiosas descobertas envolvendo este número, os famosos problemas em torno dele, assim como também os diversos métodos que foram usados para calculá-lo. A busca pelo valor numérico de  $\pi$  levou os matemáticos a suporem sua irracionalidade, que posteriormente fora provada e também será feita aqui. Finalizaremos tratando de como podemos calcular  $\pi$  de uma maneira diferenciada na sala de aula.

**Palavras-chave:**  $\pi$ . Cálculo. Irracionalidade.



## ABSTRACT

$\pi$  is a number of singular nature because several men in different historical moments lingered themselves to calculate and study it. Circles can be seen in almost all places, and as a consequence, so can  $\pi$ . Due to being so present in the reality, a huge number of mathematicians devoted themselves to the study of this number and its numerical value. This work, result of much research, will show many of the different ways that the mathematicians took to find an approximation for  $\pi$ . We will also approach in this work the curious founds involving this number, the famous problems around it as well as the diverse methods which were used to calculate it. The search for the numerical value took the mathematicians to assume its irrationality which was proved afterwards and will be done here. We will finish approaching how we can calculate  $\pi$  in the classroom in a different way.

**Keywords:** Number  $\pi$ . Calculation. Irrationality.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gráfico da Curva $f$ e da Reta AB . . . . .	25
Figura 2 – Construção do polígono inscrito . . . . .	31
Figura 3 – Construção do polígono circunscrito . . . . .	34

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores do Perímetro $P_n$ - Polígonos Inscritos . . . . .	33
Tabela 2 – Valores do Perímetro $P_n$ - Polígonos Circunscritos . . . . .	35
Tabela 3 – Aproximação de $\pi$ pela série de Gregory-Leibnitz . . . . .	38

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2	OBJETIVOS . . . . .	14
3	METODOLOGIA . . . . .	15
4	HISTÓRICO DE $\pi$ . . . . .	16
5	ALGUNS CONCEITOS ESSENCIAIS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL . . . . .	20
5.1	Derivadas e algumas aplicações . . . . .	20
5.1.1	<i>Definições e propriedades das derivadas</i> . . . . .	20
5.1.2	<i>Aplicações das derivadas</i> . . . . .	23
5.2	Integração . . . . .	26
5.3	Sequências e séries . . . . .	28
6	MÉTODOS CLÁSSICOS DO CÁLCULO DE $\pi$ . . . . .	31
6.1	O método de Arquimedes . . . . .	31
6.1.1	<i>Polígonos Inscritos</i> . . . . .	31
6.1.2	<i>Polígonos Circunscritos</i> . . . . .	33
6.2	O método de Gregory-Leibniz . . . . .	35
7	A IRRACIONALIDADE DE $\pi$ . . . . .	39
8	A APLICABILIDADE DO $\pi$ EM SALA DE AULA . . . . .	43
8.1	Aula sobre o número $\pi$ . . . . .	43
9	CONCLUSÕES . . . . .	46
	REFERÊNCIAS . . . . .	47

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento é algo natural ao homem. A partir desse contexto, os números se tornaram uma necessidade. Trabalhar com medidas de comprimento, área e volume, por exemplo, tornaram-se essenciais para o desenvolvimento social e humano. Dentre essas diversas situações, podemos encontrar circunferências. Objetos circulares fazem parte da vida humana, e por consequência, o número  $\pi$  acaba fazendo-se presente também. Iremos ver que a busca pelo valor numérico de  $\pi$  percorreu a história da humanidade durante séculos. Muitos cálculos foram desenvolvidos e diversas aproximações foram encontradas por matemáticos historicamente conhecidos. Arquimedes, Leibnitz e outros tiveram papel fundamental nesse processo.

Os povos antigos encontraram algumas aproximações para  $\pi$ , porém o primeiro a encontrar uma aproximação usando um método demonstrativo foi Arquimedes. Este relaciona a medida de um polígono regular de  $n$  lados (BARBOSA), com outro de  $2n$  lados (GUZZO). Com o avanço matemático e o surgimento de uma metodologia mais rigorosa, surgiram meios capazes de obter aproximações numéricas para o número  $\pi$  com maior precisão nas casas decimais, como por exemplo a série alternada de Gregory-Leibnitz (STEWART). Com o passar do tempo, foi possível verificar que a medida com que se conseguia calcular com mais precisão casas decimais do número  $\pi$ , não se chegava a uma periodicidade, chegando a se supor que o número  $\pi$  fosse irracional (FIGUEIREDO). Foi então que em 1761 J. H. Lambert conseguiu provar pela primeira vez na história que o número  $\pi$  é irracional.

Pouco se conhece sobre o número  $\pi$ . Muitos dos nossos alunos aplicam o seu valor numérico em sala de aula na resolução de exercícios, sem questionar como se chegou a tal resultado e quais os métodos que foram usados para descobri-lo. Isso não acontece apenas com nossos alunos, mas também com muitos professores que em boa parte dos casos, devido ao excesso de trabalho em sala de aula, se distanciam do meio acadêmico, impossibilitando a pesquisa e a formação continuada.

Foi partindo desses problemas que surgiu a necessidade de se fazer este trabalho sobre o número  $\pi$ , para mostrar a toda classe matemática, docente e discente, que este número não é uma mera constante a ser aplicada em algumas situações-problema, mas coberta de significado e história.

## 2 OBJETIVOS

Tendo em vista tudo que será abordado neste trabalho, teremos como objetivos:

### 1. Objetivo principal

Fazer uma construção histórica do valor numérico de  $\pi$ , mostrar sua irracionalidade e exibir uma sugestão de como esses conteúdos podem ser aplicados em sala de aula.

### 2. Objetivos Específicos

- a) Mostrar como o número  $\pi$  foi sendo calculado durante a história;
- b) Exibir as principais formas de se calcular o valor numérico de  $\pi$  durante a história;
- c) Exibir uma das provas existentes da irracionalidade do número  $\pi$ ;
- d) Mostrar algumas aplicações que podem ser feitas em sala de aula com o número  $\pi$ .

### 3 METODOLOGIA

Este trabalho surgiu de pesquisas em livros e artigos sobre  $\pi$ , alguns voltados para o Cálculo Diferencial e Integral, de História da Matemática e outros voltados para alunos de ensino médio. Durante a análise de cada material, buscamos o maior número de informações e sua relevância para o assunto deste trabalho. A obtenção dessas fontes se deu de várias formas: materiais em bibliotecas e de posse pessoal, obtidos com professores e em formato digital na internet. Durante a escolha, algumas informações eram repetidas ou pouco relevantes para o objetivo do trabalho, o que nos fez descartar alguns materiais.

Ao analisarmos os materiais, notamos que muitas das informações encontradas, seriam de grande enriquecimento se usadas em sala de aula. Os métodos para encontrar o valor numérico de  $\pi$  usados por grandes pensadores no decorrer da história, respondem a muitos questionamentos dos alunos e professores, como falamos anteriormente. Portanto, iremos mostrar como o professor pode usar esses métodos na sala de aula, com algumas adaptações, para que use uma linguagem e elementos matemáticos compreensíveis ao aluno.

No capítulo 4, faremos uma construção histórica do valor numérico de  $\pi$ . Mencionaremos os matemáticos e as civilizações que buscaram estudar e calcular esse número. No capítulo 5 traremos alguns conceitos primordiais para a compreensão dos capítulos posteriores. No capítulo 6, abordaremos os principais métodos históricos para o cálculo do número  $\pi$ , que foram o método de Arquimedes e o da série alternada de Gregory-Leibnitz. No capítulo 7, faremos a prova feita por I. Niven da irracionalidade de  $\pi$ . Finalmente, no capítulo 8 exibiremos uma proposta didática de como o professor pode calcular o valor numérico de  $\pi$  em sala de aula e como se poderia justificar sua irracionalidade.

## 4 HISTÓRICO DE $\pi$

O homem é caracterizado por sua constante busca pela evolução. E uma das consequências dessa evolução foi o desenvolvimento matemático. A matemática pode ser notada em vários lugares na natureza. Uma das formas nas quais ela se manifesta é na relação entre grandezas diferentes como por exemplo, o caso de objetos maiores serem mais pesados. Foi dessa maneira que surgiu na história da humanidade o conceito de proporcionalidade. (MARQUES)

Não é diferente com os círculos, que também podem ser notados em diversos lugares na natureza. Os círculos maiores tem um diâmetro maior, assim como os menores tem uma área menor. Ao longo do tempo, alguns indivíduos tiveram a capacidade de perceber que em algumas dessas grandezas, não importava o quanto as duas quantidades variavam, a razão entre elas permanecia constante, da mesma forma com os círculos:

Esta razão constante, não foi obtida por divisão numérica (e certamente não através da utilização de algarismos decimais), mais provavelmente, a relação foi expressa geometricamente. Para a geometria foi o primeiro progresso substancial. A partir daqui, deu-se início a busca pelo quociente da razão do comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, gerando o número  $\pi$  (MARQUES 2013, p. 18)

Esta citação de MARQUES nos convence que a humanidade desde seus primórdios percebeu a existência de uma relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, entre a sua área e o seu raio. De acordo LIMA (1991, p. 202): "...O  $\pi$  é a área de um círculo de raio 1". Dessa maneira, podemos notar que existe uma relação direta entre a área do círculo e  $\pi$ . Uma outra forma de se definir  $\pi$  é estabelecendo uma relação direta entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro como nos fala LIMA (1991, p. 202): "Podemos também dizer que o  $\pi$  é o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 1"

Usando esses princípios, começou a busca das civilizações pelo valor aproximado de  $\pi$ . Os primeiros que calcularam essa aproximação foram os babilônicos, concluindo que  $\pi$  ficava entre  $\frac{25}{8}$  e  $\frac{22}{7}$ , ou o equivalente em números decimais  $3,125 < \pi < 3,142$ . Outra fonte histórica que menciona também  $\pi$  é no velho testamento da bíblia sagrada, na qual retrata a história do povo judeu:

"Fez também, de metal fundido, um depósito de água chamado 'o Mar'. Era redondo e tinha cinco metros de diâmetro por dois e meio de altura e quinze de circunferência"(JERUSALEM, 2012, p. 479)(4)

Esse trecho propõe um valor para  $\pi$  igual a 3, mas existem muitos debates sobre este versículo. Alguns historiadores relacionam cada palavra do hebraico antigo a um número. Dessa maneira, o número  $\pi$  ganha um novo valor numérico, inclusive muito mais preciso do que 3, como nos mostra MARQUES:



Pos séculos acontecem debates sobre esse versículo. Segundo Tsaban, a maioria dos matemáticos e cientistas negligenciaram uma aproximação muito mais precisa para  $\pi$  que se encontra no fundo da interpretação matemática da língua hebraica. Em hebraico, cada letra corresponde a um determinado número, e o valor numérico associado a uma palavra é igual a soma de suas letras. ... Considerando essa tradução, obtemos a fração  $\frac{111}{106}$ , ou seja,  $\frac{\pi}{3} = \frac{111}{106}$ , o que implica em  $\pi = 3,14150943 \dots$ . Este número é muito mais preciso do que qualquer outro valor que havia sido calculado até esse ponto, e que detém o recorde para o maior número de dígitos corretos por várias centenas de anos. (MARQUES 2013, p. 18-19)

Durante o Egito antigo, temos o conhecido papiro de Rhind, por ter sido encontrado por Alexander Henry Rhind. Nele temos 85 problemas matemáticos, entre eles temos o cálculo do número  $\pi$  como sendo a quarta potência de três quartos, ou seja:  $\pi = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 3,1604$ .

Cronologicamente, o próximo a desenvolver um método aproximado para o valor do número  $\pi$  foi Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.). O trabalho do citado matemático e físico é considerado o primeiro cálculo notável dotado de uma metodologia demonstrativa para a estimativa do número  $\pi$ . Arquimedes desenvolveu este processo usando o princípio da exaustão de Eudoxo, este que está descrito no livro X de *Os Elementos* de Euclides:

”Dadas duas grandezas distintas, se da maior subtrairmos uma grandeza, maior do que sua metade e do que restar, uma grandeza maior do que sua metade, e se este processo for repetido continuamente, restará alguma grandeza menor do que a menor das duas grandezas iniciais”(BONGIOVANNI *apud* MARQUES. 2013)

Baseado neste princípio, Arquimedes tomou a ideia de que o perímetro do círculo é maior que o perímetro de um polígono regular de  $n$  lados inscrito num círculo. Através de um processo aproximativo tornando  $n$  suficientemente grande, os dois valores vão se aproximando da circunferência. Partindo de  $n = 6$ , Arquimedes foi dobrando o valor de  $n$ , chegando até um polígono de 96 lados, encontrando que  $3,14084 < \pi < 3,142858$ .

Posterior a Arquimedes, tivemos Ptolomeu(87-165 d.C.). Este calculou entre 0 e 180 graus, a cada meio grau, todas as cordas de todos os ângulos. Isto o fez encontrar uma aproximação para  $\pi$  como sendo 3,14166, sendo esta inigualável por muito tempo.

Na Índia tivemos três cálculos para  $\pi$ , Aryabhata (500 d.C.) encontrou  $\pi = \frac{62832}{20000} = 3,1416$ . Bramagupta chega a mencionar dois valores para  $\pi$ , o valor prático como sendo 3, e o valor bom como sendo  $\sqrt{10}$ , mas o indiano Madhava foi o indiano que obteve o melhor resultado, como sendo  $\pi = 3,14159265359$ , com uma aproximação de 11 dígitos.

A procura do valor preciso de  $\pi$  também ocorreu no oriente. Por volta do século V, o matemático chinês Tsu Ch'ung-chih calculou o valor do  $\pi$  com uma aproximação de 6 casas decimais através de frações, de tal forma que essas aproximações racionais foram denominadas pelo próprio como uma aproximação por excesso e por falta, sendo estas  $\frac{22}{7}$  e  $\frac{355}{113}$ , respectivamente. Os babilônicos já tinha usado a primeira fração, o acréscimo da segunda foi o que

surgiu de novo nesse processo. Bhaskara (1140 d.C.) usando a fórmula  $a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$ , conseguiu encontrar  $\pi$  igual a 3,1416.

O matemático francês François Viète (1540-1603), utilizando um método similar ao grego, conseguiu chegar a uma aproximação do valor de  $\pi$  com uma precisão de nove casas decimais. Nessa situação passou-se a utilizar a notação de produto infinito pela primeira vez.

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Com o advento do Cálculo Diferencial e Integral desenvolvido por Newton (1642-1727) e Leibnitz (1646-1716), as formas de cálculo do  $\pi$  saíram do campo geométrico e passaram para o campo analítico. O primeiro resultado dessa natureza foi de John Wallis (1616-1703). Partindo da geometria de coordenadas de Descartes, ele procurava a área de um quarto de uma circunferência de raio 1. Após um processo envolvendo várias interpolações, ele conseguiu chegar na seguinte fórmula que leva seu nome, presente no livro *Arithmetica infinitorum* (1655):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots$$

Neste período, apoiado nas bases do Cálculo Diferencial e Integral, o matemático James Gregory publicou a série mais usada no processo do cálculo de  $\pi$ , que demonstraremos mais a frente, a chamada série de Gregory-Leibnitz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

O matemático Leonhard Euler (1707-1783) desenvolveu diversos métodos para o cálculo de  $\pi$ , como por exemplo a série abaixo que é formada pelos quadrados dos termos da série harmônica, na qual é possível calcular  $\pi$  com 126 casas decimais:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \cdots$$

Paralelamente tivemos o matemático Jonh Machin, que usando a série de Gregory-Leibnitz conseguiu chegar na seguinte relação:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Com este resultado de Jonh Machin, Willian Shanks (1812 - 1882) conseguiu calcular  $\pi$  com 707 casas decimais em 1873. Anos depois com o advento dos computadores, em 1947, descobriu-se que Shanks havia errado no 527º algarismo, e portanto, nos seguintes. Muitos foram outros matemáticos que se dedicaram nesta pesquisa, como por exemplo Zacharias Dahse (1824 - 1861), que desenvolveu outra relação derivada da de Machin  $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$ .

A procura do valor de  $\pi$  se perpetuou durante a história pois existia uma esperança de que se gerasse uma repetição, dessa maneira, teríamos um número racional. Em 1794 o Matemático francês Adrien Marie Legendre (1752 - 1833 ) conseguiu provar que  $\pi^2$  é irracional e tempos depois que  $\pi$  também o era.

O inglês D. F. Ferguson foi o responsável por descobrir o erro de Shanks na 528<sup>o</sup> casa, fornecendo um valor correto com 710 casas decimais. O americano J. W. Wrench Jr. calculou  $\pi$  com 808 casas decimais, mas novamente Ferguson conseguiu encontrar erros nos cálculos de Wrench na 723<sup>o</sup> casa. Dois anos depois, ambos fizeram os cálculos juntos com o valor correto de 808 casas decimais, Wrench usou a fórmula de Machin e Ferguson usou:

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{1}{20} + \arctan \frac{1}{1985}$$

Depois de todos esses, surgiram os computadores que aproximaram  $\pi$  com maior precisão. O primeiro deles foi o ENIAC, computador eletrônico do Army Ballistic Research Laboratories de Aberdeen, Maryland, que calculou  $\pi$  com 2037 casas decimais. Anos depois surgiu o IBM704, que chegou, em dois momentos diferentes, calcular  $\pi$  com 2037 casas e com 16167 casas.

Em 1966, um grupo da Comissão da Energia Atômica de Paris, usando um computador STRETCH, calculou  $\pi$  com 250 mil casas decimais. Dois japoneses, Kazuro Miyoshi e Kazuhiko Nakayama, calcularam  $\pi$  com mais de dois milhões de casas decimais em um computador FACOM-M200.

Porém, estes cálculos tinham apenas a finalidade de encontrar os valores das casas decimais de  $\pi$ , apenas a título de informação e de recorde. Mas anteriormente, buscava-se calcular  $\pi$  para verificar se em algum momento iria surgir uma sequência periódica, sendo assim um número racional. Porém, como isso não acontecia, começou a se cogitar a hipótese de  $\pi$  ser irracional.

A irracionalidade de  $\pi$  foi provada em 1761 pelo francês J. H. Lambert, usando um método envolvendo frações contínuas. Posteriormente, em 1947, I. Niven, publicou um artigo no Bulletin of the American Mathematical Society, na edição de número 53, uma prova mais simples da irracionalidade de  $\pi$ .

## 5 ALGUNS CONCEITOS ESSENCIAIS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Neste capítulo iremos abordar alguns conceitos essenciais de Cálculo Diferencial e Integral que serão usados durante o trabalho. No método de Leibnitz, por ser de natureza analítica, assim como a prova da irracionalidade de  $\pi$ , serão usadas propriedades, teoremas e conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Estes elementos que serão definidos e demonstrados são de grande importância para a estrutura textual e para a melhor compreensão do trabalho.

### 5.1 Derivadas e algumas aplicações

Esta seção será reservada a exibição da definição de derivada, algumas de suas propriedades e aplicações, como o Teorema de Rolle, o Teorema do Valor Médio (TVM) e o Teorema Fundamental do Cálculo. A demonstração da regra do produto de duas funções para uma derivada de ordem  $k$  também será usado posteriormente para a prova da irracionalidade de  $\pi$ .

#### 5.1.1 Definições e propriedades das derivadas

**Definição 5.1.** A derivada de uma função real  $f$  é a função  $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $A \subset \mathbb{R}$  cujo valor em  $x$  é:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (5.1)$$

desde que o limite exista. Também podemos definir a derivada de uma função real  $f$  como sendo a função  $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $A \subset \mathbb{R}$  cujo valor em  $x$  é:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad (5.2)$$

desde que o limite exista.

**Definição 5.2.** Uma função é dita derivável em  $x_0$  se a derivada de  $f$  existir em  $x_0$

Estas definições nos permitirão exibir uma função que nos fornecerá a inclinação das retas tangentes ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$ .

**Definição 5.3.** Diz-se que  $F$  é uma primitiva de  $f$  se  $F' = f$ .

Uma função pode ser derivada mais de uma vez, trataremos disso na próxima definição, sobre derivadas de ordem superior.

**Definição 5.4.** Seja  $f$  uma função derivável. Diz-se que se  $f'$  é derivável, então sua derivada é dita derivada segunda de  $f$ , denotada por  $(f')' = f'' = f^{(2)}$ .

Diz-se que se  $f''$  é derivável, então sua derivada é dita derivada terceira de  $f$ , denotada por  $(f'')' = f''' = f^{(3)}$ .

Em geral, se a derivada de ordem  $(n - 1)$  de  $f$  é uma função derivável, sua derivada é dita derivada  $n$ -ésima de  $f$  e é denotada por  $(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$ .

Podemos então dizer também que se  $f^{(n)}$  existe, então  $f$  é diferenciável  $n$  vezes.

Dentre as várias propriedades que existem envolvendo as derivadas, iremos provar a derivada do produto de duas funções, pois esta servirá como base para a demonstração desta mesma propriedade em sua versão mais genérica, a derivada de ordem  $k$  do produto de duas funções.

**Proposição 5.1.** *Se  $f$  e  $g$  são deriváveis em  $x$ , então o produto  $fg$  também é derivável, sendo:*

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x). \quad (5.3)$$

*Demonstração.* Aplicando a definição de limite para a função produto  $f(x)g(x)$ , temos:

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Se adicionarmos e subtrairmos  $f(x+h)g(x)$  no numerador desta fração do segundo membro, obtemos:

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h},$$

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right];$$

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Aplicando o limite em  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$ , teremos que  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$  pois  $f$  é contínua. Então:

$$[f(x)g(x)]' = f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Perceba que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) \text{ e que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

concluindo portanto o teorema:

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

□

A proposição acima determina a primeira derivada do produto de duas funções. Na sentença abaixo, iremos generalizar a proposição anterior, exibindo a derivada de ordem  $k$  do produto de duas funções reais.

**Proposição 5.2.** Se  $g$  e  $h$  são duas funções diferenciáveis  $n$  vezes, temos que

$$(gh)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} g^{(j)} h^{(k-j)}. \quad (5.4)$$

Onde  $g^{(0)} = g$  e  $h^{(0)} = h$

*Demonstração.* Para provar tal sentença usaremos indução sobre  $k$ . Para  $k = 1$  foi exibido na proposição acima e é:

$$(gh)' = g'h + gh' = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} g^{(1-k)} h^{(k)}.$$

Supondo que a sentença é verdadeira para  $k = n$  e provaremos para  $k = n + 1$

$$(gh)^{(n+1)} = [(gh)^{(n)}]' = \left[ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g^{(j)} h^{(n-j)} \right]';$$

$$(gh)^{(n+1)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [g^{(j)} h^{(n-j)}]'$$

$$(gh)^{(n+1)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} [g^{(j-1)} h^{(n-j)} + g^{(j)} h^{(n-j-1)}];$$

$$(gh)^{(n+1)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g^{(j+1)} h^{(n-j)} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g^{(j)} h^{(n-j+1)};$$

$$(gh)^{(n+1)} = \binom{n}{n} g^{(n+1)} h^{(0)} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} g^{(j+1)} h^{(n-j)} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} g^{(j)} h^{(n-j+1)} + \binom{n}{0} g^{(0)} h^{(n+1)};$$

$$(gh)^{(n+1)} = g^{(n+1)} h + gh^{(n+1)} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} g^{(j)} h^{(n-j+1)} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} g^{(j+1)} h^{(n-j)};$$

$$(gh)^{(n+1)} = g^{(n+1)} h + gh^{(n+1)} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} g^{(j)} h^{(n-j+1)} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} g^{(j+1)} h^{(n-j)};$$

$$(gh)^{(n+1)} = g^{(n+1)} h + gh^{(n+1)} + \sum_{j=1}^n \left[ \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right] g^{(j+1)} h^{(n-j)}.$$

Temos da Relação de Stiffel que:

$$\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}. \quad (5.5)$$

Portanto, podemos concluir que:

$$(gh)^{(n+1)} = g^{(n+1)}h + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} g^{(j+1)}h^{(n-j)} + gh^{(n+1)};$$

$$(gh)^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} g^{(n+1-j)}h^{(j)}.$$

□

### 5.1.2 Aplicações das derivadas

Nesta seção, abordaremos algumas aplicações das derivadas inerentes ao Cálculo Diferencial, nas quais cada uma das aplicações aqui exibidas serão usadas posteriormente no método de Leibnitz e na demonstração da irracionalidade de  $\pi$ .

**Definição 5.5.** *Máximos e mínimos locais*

1. Uma função tem um máximo local em um ponto interior  $c$  de seu domínio se

$$f(x) \leq f(c) \tag{5.6}$$

para qualquer  $x$  em um intervalo aberto que contenha  $c$ ;

2. Uma função tem um mínimo local em um ponto interior  $c$  de seu domínio se

$$f(x) \geq f(c) \tag{5.7}$$

para qualquer  $x$  em um intervalo aberto que contenha  $c$ ;

Isto significa que existe um intervalo aberto em torno do ponto  $c$ , no qual o valor da função em  $c$ , ou seja  $f(c)$ , no caso de ser máximo local, atinge o maior valor da função  $f(x)$  naquele intervalo aberto, e para o caso de ser mínimo local, atinge o menor valor da função  $f(x)$  naquela intervalo aberto.

Partindo da ideia de máximo e mínimo local, iremos exibir que se  $f$  possui um mínimo local em  $c$ , então a inclinação da reta tangente em  $c$  é igual a zero, ou seja,  $f'(c) = 0$ , como está denotado logo em seguida.

**Teorema 5.1.** *Se  $f$  possui um valor de máximo ou mínimo local em um ponto  $c$  interior de seu domínio e se  $f'$  é definida em  $c$ , então  $f'(c) = 0$*

*Demonstração.* Para provar a afirmação acima, iremos exibir que  $f'(c)$  não pode ser nem negativa nem positiva, portanto será zero.

Inicialmente iremos supor que existe um mínimo local em  $c$ . Se supormos que existe um máximo local em  $c$ , iremos concluir o mesmo resultado. Conforme definimos mínimo local mais acima, temos que  $f(x) \leq f(c)$ , portanto  $f(x) - f(c) \leq 0$ .

Como  $f'(c)$  é a derivada de  $f$  aplicada em  $c$ , temos, pela definição de derivada dada mais acima que:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad (5.8)$$

Para que o limite acima exista, os limites bilaterais devem existir e ambos serem iguais. Analisando os dois separadamente temos que:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

pois  $(x - c) > 0$  pelo fato de que  $x \rightarrow c^+$ . Como  $(x - c) > 0$  e  $f(x) - f(c) \leq 0$ , temos que que  $f'(c) \leq 0$ .

De maneira análoga, temos que:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

pois  $(x - c) < 0$  pelo fato de que  $x \rightarrow c^-$ . Como  $(x - c) < 0$  e  $f(x) - f(c) \leq 0$ , temos que que  $f'(c) \leq 0$

Podemos concluir de  $f'(c) \leq 0$  e de  $f'(c) \geq 0$  que  $f'(c) = 0$ .

Para o caso de  $c$  ser um máximo local, a demonstração é análoga ao caso anterior.  $\square$

Este teorema nos exhibe, conforme já fora falado anteriormente, que a inclinação da reta tangente a um ponto que seja mínimo ou máximo local é igual a zero, sendo dessa forma a reta paralela ao eixo horizontal.

Este resultado será de suma importância para a demonstração do Teorema de Rolle e consequentemente o teorema do valor médio.

**Teorema 5.2. Teorema de Rolle.** *Suponha que  $y = f(x)$  contínua em todos os pontos do intervalo  $[a, b]$  e derivável em todos os pontos de  $(a, b)$ . Se  $f(a) = f(b)$ , então há pelo menos um número  $c$  em  $(a, b)$  no qual  $f'(c) = 0$*

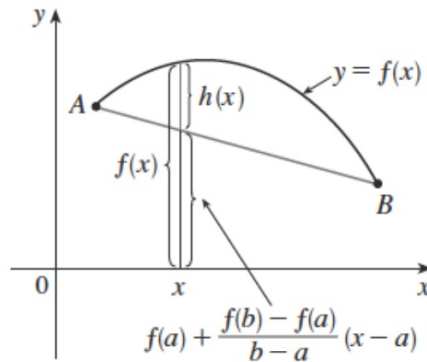
*Demonstração.* Como  $f$  é contínua, seu máximo e mínimo absoluto estão em  $[a, b]$ . Analisemos cada um dos seguintes casos:

1. nos pontos interiores onde  $f'(x) = 0$ ;
2. nos pontos interiores onde  $f'$  não existe;
3. e nas extremidades de  $[a, b]$ .

Analisando cada um dos itens podemos verificar que:

1. se o máximo ou o mínimo absoluto ocorrem num ponto  $c \in (a, b)$ , então  $f'(c) = 0$  pelo teorema 5.1;



Figura 1 – Gráfico da Curva  $f$  e da Reta AB

Fonte: STEWART (2013. p. 264)

2. pela hipótese, como  $f$  é derivável em todo  $(a, b)$ , não teremos nenhum ponto em que  $f'$  não existe;
3. se o máximo e o mínimo ocorrem nas extremidades do intervalo  $[a, b]$  e por hipótese  $f(a) = f(b)$ , então  $f$  é constante para qualquer  $x \in [a, b]$ .

Portanto podemos tomar qualquer ponto interior  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ . □

O teorema de Rolle é essencial para que se possa provar o Teorema do Valor Médio que, como já fora falado, será usado para a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema 5.3. Teorema do Valor Médio (TVM)** *Suponha que  $f$  seja contínua em um intervalo  $[a, b]$  e derivável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Então existe pelo menos um ponto  $c$  em  $(a, b)$  tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (5.9)$$

*Demonstração.* Trace o gráfico de  $f$  como uma curva em  $\mathbb{R}^2$  e uma reta passando pelos pontos  $A(a, f(a))$  e  $B(b, f(b))$ , conforme a Figura 1.

Considere a função cujo gráfico é uma reta que contém o segmento  $AB$

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Tomemos a função  $h(x)$  tal que:

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Como  $h$  satisfaz o Teorema de Rolle, pois é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Também  $h(a) = h(b) = 0$ . Portanto existe  $c \in (a, b)$  tal que  $h'(c) = 0$ . Observe que:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como  $h'(c) = 0$ ,

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Podemos concluir que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (5.10)$$

□

## 5.2 Integração

Se particionarmos um intervalo  $[a, b]$ , com  $a \neq b$  em uma partição  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de tal forma que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , essa partição divide  $[a, b]$  em  $n$  intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  com  $i = 1, 2, \dots, n$ . A amplitude de cada intervalo é indicada por  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  e uma partição  $P$  de  $[a, b]$ . Tomando para cada índice  $i \in 1, 2, \dots, n$  um  $c_i$  escolhido de maneira arbitrária em  $[x_{i-1}, x_i]$ , a soma:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n, \quad (5.11)$$

chama-se de um somatório de Riemann da função  $f$ .

Estes conceitos de partição e de soma de Riemann são essenciais para que se possa definir a integral de Riemann.

**Definição 5.6.** *Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  e um número real  $L$ . Dizemos que*

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L \quad (5.12)$$

se para todo  $\epsilon > 0$  existir um  $\delta > 0$  que só dependa de  $\epsilon$  mas não da escolha dos  $c_i$ , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L \right| < \epsilon,$$

para qualquer escolha de  $c_i$ , tal número  $L$ , caso exista, é único e denomina-se integral de Riemann de  $f$  em  $[a, b]$  e indica-se por  $\int_a^b f(x) dx$ . Logo:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i. \quad (5.13)$$

Partindo da definição de integral e do Teorema do Valor Médio, é possível agora provarmos o Teorema Fundamental do Cálculo, que será essencial para exibirmos o método de Leibnitz para o cálculo de  $\pi$  e também para mostrarmos que  $\pi$  é irracional.

**Teorema 5.4. Teorema Fundamental de Cálculo** Se  $f$  for integrável em  $[a, b]$  e  $F$  for uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (5.14)$$

*Demonstração.* De acordo com a definição de integral, se  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , o valor do limite:

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i,$$

será sempre o mesmo, independentemente da escolha dos  $c_i$ , e igual a  $\int_a^b f(x)dx$ . Assim, se para um caso particular de  $c_i$ , tivermos:

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = L,$$

então teremos  $\int_a^b f(x)dx = L$ .

Supondo que  $f$  seja integrável em  $[a, b]$  e que admita uma primitiva  $F(x)$  em  $[a, b]$ , isto é,  $F'(x) = f(x)$  em  $[a, b]$ . Seja  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . Perceba que:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Segue então do TVM que, para uma conveniente escolha de  $\bar{c}_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , teremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\bar{c}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i)\Delta x_i.$$

Se para cada partição  $P$  de  $[a, b]$ , os  $\bar{c}_i$  forem escolhidos como a equação anterior, teremos:

$$\lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i)\Delta x_i = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \rightarrow 0} F(b) - F(a) = F(b) - F(a),$$

logo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

### 5.3 Sequências e séries

Nesta seção iremos definir as séries geométrica e alternada, que serão usadas durante a exibição do método de Gregory-Leibnitz. Mostraremos também nesta seção o teste da razão, que será usado para exibir que a série exponencial sobre o fatorial convergem para zero, resultado este que será usado na demonstração da irracionalidade de  $\pi$ .

**Definição 5.7.** *Uma sequência geométrica infinita é uma sequência do tipo  $(a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots)$  na qual cada termo, a partir do segundo é igual ao produto do termo anterior por uma constante  $r$ , chamada razão da sequência geométrica.*

*Se tomarmos a soma dos termos dessa sequência, geramos a série geométrica, que é da forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots \quad (5.15)$$

Iremos mostrar que a série geométrica diverge para  $r = 1$  e para  $|r| > 1$ , porém converge para  $|r| < 1$ .

Se tomarmos uma série geométrica  $\sum ar^n$ , poderemos verificar que a razão  $r$  pode ser  $r = 1, r > 1$  ou  $r < 1$ .

Se  $r = 1$ , então  $S_n = a + a + a + \dots + a = na \rightarrow \pm\infty$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \rightarrow \infty$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  não existe. Portanto, neste caso, a série geométrica diverge.

Se  $r \neq 1$ , temos:

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} \iff rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Subtraindo  $S_n - rS_n$ , obtemos:

$$S_n - rS_n = a - ar^n \iff S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Se  $-1 < r < 1$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , podemos afirmar que  $r^n \rightarrow 0$ . Logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Então, quando  $|r| < 1$  a série geométrica é convergente, e sua soma é  $\frac{a}{1 - r}$ .

Se  $r \leq -1$  ou  $r > 1$ , a sequência  $\{r^n\}$  é divergente, pois como  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ , ocorre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  não vai existir.

A série seguinte a ser definida é a série alternada:

**Definição 5.8.** Admita  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  sendo uma sequência infinita tal que  $b_n > 0$ , então a série alternada é a soma dos termos dessa sequência da forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - \dots + (-1)^n b_n + \dots \quad (5.16)$$

Provaremos que a série alternada é convergente se  $b_{n+1} \leq b_n$  e se  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , para todo  $n$ .

Iniciaremos tomando as somas parciais pares da série, de tal maneira que  $S_2 = b_1 - b_2$ ,  $S_4 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4$  e assim sucessivamente. Logo:

$$S_2 = b_1 - b_2 \geq 0 \quad \text{pois} \quad b_2 \leq b_1,$$

$$S_4 = S_2 + (b_3 - b_4) \geq S_2 \quad \text{pois} \quad b_4 \leq b_3.$$

Em geral:

$$S_{2n} = S_{2n-2} + b_{2n-1} - b_{2n} \geq S_{2n-2} \quad \text{pois} \quad b_{2n} \leq b_{2n-1}.$$

Portanto:

$$0 \leq S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \dots \leq S_{2n} \leq \dots$$

$S_{2n}$  também pode ser escrito sob a forma de somas parciais pares, isto é:

$$S_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots - (b_{2n-2} + b_{2n-1}) - b_{2n}.$$

Tomando também as somas parciais ímpares da série, temos que:

$$S_{2n-1} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - (b_{2n} - b_{2n+1}).$$

Cada termo entre os parênteses da sequência  $S_{2n}$  é positivo, pois  $b_{2n} \leq b_{2n-1}$ , portanto  $S_{2n} < b_1$  para todo  $n$ . Como a sequência  $S_{2n}$  é limitada superiormente, é convergente. Chamaremos esse limite de  $s$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = s$ .

Iremos verificar se ela também irá convergir no caso das somas parciais serem ímpares. Se calcularmos o limite de  $S_{2n+1}$ , vamos ter que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + b_{2n+1}) = s + 0 = s.$$

Como ambas as somas parciais, pares e ímpares convergem para  $s$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$ , e assim, a série é convergente.

Note que a convergência só se deu por que os termos  $b_n$  formam uma sequência positiva, decrescente e tendendo a zero. Caso isso não ocorresse, não teríamos convergência. Portanto a condição essencial para que a série alternada seja convergente é que os termos  $b_n$  formem uma

sequência positiva, decrescente e tendendo a zero.

Para estas séries, pôde-se verificar a convergência usando um método particular. Porém para séries em geral, existem outros métodos que nos permitem calcular a convergências como por exemplo, o teste da razão.

**Teorema 5.5. Teste da Razão** *Seja a série  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , com  $a_k > 0$  para todo  $k \geq q$ , onde  $q$  é um natural fixo. Se  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$  existir, teremos que:*

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad (5.17)$$

1. se  $L < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  é convergente;
2. se  $L > 1$  ou  $L = \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  é divergente;
3. se  $L = 1$ , o critério nada revela.

Com o teste da razão, é possível verificar se  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$  é convergente. Se tomarmos  $a_k = \frac{p^k}{k!}$ , temos que:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{p^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{p}{k+1}. \quad (5.18)$$

Logo temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p}{k+1} = 0. \quad (5.19)$$

Portanto, pelo critério da razão, a série é convergente.

## 6 MÉTODOS CLÁSSICOS DO CÁLCULO DE $\pi$

Como vimos nos capítulos anteriores, muitos homens desenvolveram diversos métodos para calcular  $\pi$  no decorrer da história. Neste capítulo, iremos exibir alguns desses métodos, principalmente aqueles considerados mais importantes. Dentre esses trataremos do cálculo de  $\pi$  desenvolvido por Arquimedes e por Gregory-Leibniz.

### 6.1 O método de Arquimedes

O  $\pi$  é a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Baseado nesta definição, Arquimedes construiu polígonos inscritos e circunscritos a um círculo de tal forma que estes polígonos fossem dobrando o seu número de lados, ao ponto de que eles se aproximassem o máximo possível da circunferência, tornando o perímetro desses polígonos cada vez mais próximo do contorno da circunferência. Portanto, basta calcular o quociente entre este comprimento e o diâmetro, gerando uma aproximação de  $\pi$ . A medida que o número de lados aumenta, a precisão nos valores das casas decimais do  $\pi$  também aumenta.

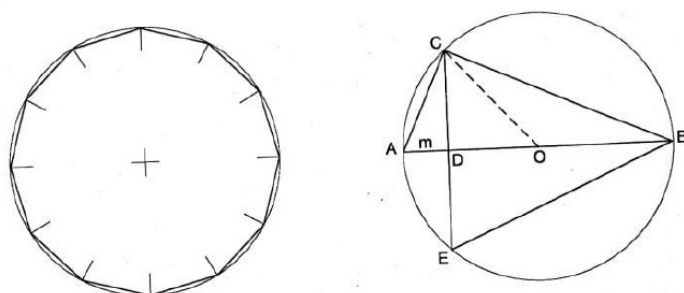
#### 6.1.1 Polígonos Inscritos

Tomemos então um polígono regular inscrito num círculo, com  $n$  lados, cada um deles medindo  $S_n$ . Iremos tornar o número  $n$  suficientemente grande de tal maneira que os lados do polígono se aproximem cada vez mais da circunferência, tornando o perímetro  $P_n$  do polígono regular muito próximo do perímetro do círculo. Observe então a figura 2:

Iremos determinar  $S_{2n}$  em função de  $S_n$  e do raio  $R$  do círculo. Na figura ??, temos um círculo de raio  $R$  e centro  $O$ , e neste, uma corda  $CE$ , perpendicular ao diâmetro  $AB$ . O triângulo  $\triangle ABC$  é retângulo e  $CD$  é a altura do vértice  $A$ . Logo  $AC^2 = AB \cdot AD$ . Também o triângulo  $\triangle ODC$  é retângulo, dessa forma  $DO^2 = OC^2 - CD^2$ .

Se  $CE = S_n$ , então  $AC = S_{2n}$ . Como também  $AB = 2R$ ,  $AD = m$  então podemos concluir que:

Figura 2 – Construção do polígono inscrito



Fonte: BARBOSA (2012. p. 177)

1.  $(S_{2n})^2 = 2.R.m;$
2.  $(R - m)^2 = R^2 - \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 .$

Eliminando  $m$  dessas equações, temos que:

$$\left(R - \frac{S_{2n}^2}{2R}\right)^2 = R^2 - \frac{S_n^2}{4}$$

$$R - \frac{S_{2n}^2}{2R} = \pm \frac{\sqrt{4R^2 - S_n^2}}{2}$$

$$2R^2 - S_{2n}^2 = \pm R\sqrt{4R^2 - S_n^2}$$

Note que  $2R^2 - S_{2n}^2 > 0$ , pois

$$(\sqrt{2}R - S_{2n})(\sqrt{2}R + S_{2n}) > 0$$

Perceba que como  $\sqrt{2}R + S_{2n} > 0$ , nos resta verificar que  $\sqrt{2}R - S_{2n} > 0$ , e de fato o é, pois:

$$S_{2n} < \sqrt{2}R = S_4$$

Logo:

$$S_{2n} < S_4$$

e isso é verdade pois  $n > 2$ .

Portanto:

$$2R^2 - S_{2n}^2 = R\sqrt{4R^2 - S_n^2}$$

Podemos então concluir que:

$$S_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - S_n^2}} \quad (6.1)$$

Como temos que um quadrado inscrito numa circunferência de raio  $R$  tem lado medindo  $R\sqrt{2}$  então,  $S_4 = R\sqrt{2}$ . Substituindo essa sentença na equação acima, obtemos:

$$S_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Substituindo esse resultado na equação anterior, obtemos a medida do lado do polígono inscrito de 16 lados:



$$S_{16} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2} - \sqrt{2})^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{2R^2 + R^2\sqrt{2}}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

Ao fazermos esse processo, estaremos dobrando o número de lados do polígono inscrito e obtendo o valor da medida de cada um de seus lados.

Como  $S_n$  representa o valor da medida do lado de cada polígono regular de  $n$  lados, podemos encontrar o perímetro desses polígonos regulares multiplicando  $S_n$  por  $n$ . Calculando o valor de cada uma das expressões acima, podemos gerar a tabela 1:

Tabela 1 – Valores do Perímetro  $P_n$  - Polígonos Inscritos

<b>Tabela</b>		
$n$	$S_n$	$P_n$
4	$1,41421 \cdot R$	$5,6568 \cdot R$
8	$0,76537 \cdot R$	$6,1229 \cdot R$
16	$0,39018 \cdot R$	$6,2428 \cdot R$
32	$0,19603 \cdot R$	$6,2730 \cdot R$
64	$0,09814 \cdot R$	$6,2806 \cdot R$
128	$0,04908 \cdot R$	$6,2825 \cdot R$
256	$0,02454 \cdot R$	$6,2830 \cdot R$
512	$0,01227 \cdot R$	$6,2831 \cdot R$

Fonte: BARBOSA (2012. p. 177)

Tomando  $R = 1$ , temos então que:

$$\pi \cong \frac{6,2831 \cdot R}{2R} \iff \pi \cong 3,1415. \quad (6.2)$$

### 6.1.2 Polígonos Circunscritos

De maneira similar aos polígonos inscritos, iremos tomar um polígono regular circunscrito num círculo, com  $n$  lados, cada um deles medindo  $S_n$ . Iremos tornar o número  $n$  suficientemente grande de tal maneira que os lados do polígono se aproximem cada vez mais da circunferência, tornando o perímetro  $P_n$  do polígono regular muito próximo do perímetro do círculo.

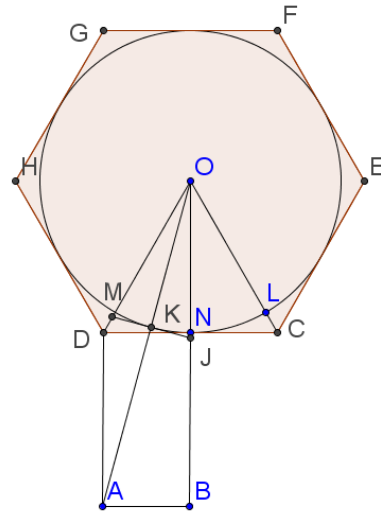
Dado o polígono regular circunscrito, traçamos uma reta  $AD$ , perpendicular a reta  $DC$ , de maneira que  $OD = AD = x$ . Consequentemente, forma-se o triângulo isósceles  $OAD$ . Posteriormente, usando  $DN$  e  $AD$ , formamos um retângulo cujos lados medem  $S_n/2$  e  $x$ , conforme nos mostra a figura 3.

Temos que:

$$OD = AD = x; \quad DJ = AB = \frac{S_n}{2}; \quad MK = JK = \frac{S_{2n}}{2}; \quad OBA = OKJ = OKM = 90^\circ.$$

Observe que o triângulo  $\triangle ODN$  é retângulo, portanto vale o teorema de Pitágoras:

Figura 3 – Construção do polígono circunscrito



Fonte: Construída pelo autor

$$x^2 = \left(\frac{S_n}{2}\right)^2 + R^2 \implies x = \sqrt{\frac{(S_n)^2 + 4R^2}{4}} = \frac{\sqrt{(S_n)^2 + 4R^2}}{2}.$$

Note que os triângulos  $\triangle OAB$  e  $\triangle OJK$  são semelhantes, pelo caso AAA, portanto, temos a seguinte relação:

$$\frac{\frac{S_{2n}}{2}}{\frac{S_n}{2}} = \frac{ON}{ON + BN}$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{R}{R + x}.$$

Substituindo o  $x$  encontrado na equação anterior, obtemos:

$$S_{2n} = \frac{RS_n}{R + x} = \frac{RS_n}{R + \frac{\sqrt{(S_n)^2 + 4R^2}}{2}} = \frac{2RS_n}{2R + \sqrt{(S_n)^2 + 4R^2}}.$$

Temos que um quadrado circunscrito numa circunferência tem lado medindo  $2R$  então,  $S_4 = 2R$ . Substituindo essa sentença na equação acima, obtemos:

$$S_8 = \frac{4R^2}{2R + \sqrt{4R^2 + 4R^2}} = \frac{4R^2}{2R + 2R\sqrt{2}} = \frac{2R}{1 + \sqrt{2}} = 2R(\sqrt{2} - 1).$$

Substituindo este resultado na mesma sentença encontrada vamos obter que:

$$S_{16} = \frac{4R^2(\sqrt{2} - 1)}{2R + \sqrt{(2R(\sqrt{2} - 1))^2 + 4R^2}}$$

$$S_{16} = \frac{2R(\sqrt{2} - 1)}{1 + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1}}.$$

Assim como fizemos para o caso dos polígonos inscritos, também podemos construir uma tabela de tal maneira que ela possa nos dar a medida dos lados  $S_n$  dos polígonos circunscritos e também as medidas dos perímetros  $P_n$  destes mesmos polígonos, conforme está retratado na tabela 2.

Tabela 2 – Valores do Perímetro  $P_n$  - Polígonos Circunscritos

<b>Tabela</b>		
$n$	$S_n$	$P_n$
4	$2 \cdot R$	$8 \cdot R$
8	$0,82842 \cdot R$	$6,62741 \cdot R$
16	$0,39782 \cdot R$	$6,36519 \cdot R$
32	$0,19698 \cdot R$	$6,30344 \cdot R$
64	$0,09825 \cdot R$	$6,2882 \cdot R$
128	$0,04909 \cdot R$	$6,2844 \cdot R$
256	$0,02454 \cdot R$	$6,2835 \cdot R$
512	$0,01227 \cdot R$	$6,2832 \cdot R$

Fonte: Construída pelo autor

Assim como fizemos antes, tomando  $R = 1$ , temos que:

$$\pi \cong \frac{6,2832 \cdot R}{2R} \iff \pi \cong 3,1416. \quad (6.3)$$

$$\pi \cong 3,1416.$$

## 6.2 O método de Gregory-Leibniz

Trataremos nesta seção de um dos primeiros métodos analíticos do cálculo de  $\pi$  na história. Este método desenvolvido por Leibnitz cria uma relação capaz de aproximar o valor de  $\pi$  com quantas casas decimais se desejar. Para chegar ao resultado encontrado por ele, iremos recorrer aos recursos que abordamos e demonstramos no Capítulo 5.

Recorde que se  $f(x) = \tan x$ , teremos que  $f'(x) = \sec^2 x$ . Tomemos neste momento a função  $y = \arctan t$ .

Note também que:

$$\tan y = \tan(\arctan t) \iff \tan y = t.$$

Portanto, para calcular a derivada de  $y = \arctan t$ , tomaremos  $t = \tan y$  e aplicaremos derivação implícita em ambos os membros. Portanto:

$$(t)' = (\tan y)' \iff 1 = (\sec^2 y) \cdot y' \iff y' = \frac{1}{\sec^2 y}.$$

Recorde que  $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ . Logo:

$$y' = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

Como  $t = \tan y$ , temos que:

$$y' = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Como concluímos que

$$(\arctan t)' = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Se aplicarmos o Teorema Fundamental do Cálculo, teremos que:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt.$$

Com esses resultados, podemos construir uma série que seja capaz de se aproximar de  $\pi$ . Se tomarmos uma série geométrica definida na seção 5.3 de primeiro termo igual a 1 e razão  $-t^2$ , tal que:

$$|r| = |-t^2| = |(-t)^2| = |t^2| = |t|^2 = t^2 < 1;$$

Esta série é convergente com

$$S = \frac{1}{1 - r} = \frac{1}{1 + t^2}. \quad (6.4)$$

Portanto:

$$\frac{1}{1 - r} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots \quad (6.5)$$

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t^2)^n$ , podemos escrever:

$$\frac{1}{1 + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t^2)^n = 1 - t^2 + t^4 + \dots + (-1)^n (t^2)^n + \dots \quad (6.6)$$

Integrando ambos os membros desta última igualdade, usaremos o que verificamos mais acima, que  $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt$ . Portanto, teremos:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

Até agora, não foi verificado se é possível realizarmos integração sobre uma série de potências, porém o teorema abaixo permite tal circunstância.

**Teorema 6.1.** *Se uma função  $f(t)$  possui uma representação em série de potência de  $t$ , isto é,  $f(t) = \sum a_n t^n$ , e esta série for convergente para  $t \in (-c, c) \subset \mathbb{R}$ , então:*

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^x a_n t^n dt \right)$$

para todo  $t \in (-c, c)$ , a convergência da nova série obtida pela integração dos termos pode ser alterada para  $t = \pm c$

Este teorema não será demonstrado por fugir ao propósito do trabalho. Integrando a série, teremos:

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x ((-1)^n t^{2n} dt) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

Podemos concluir que:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (6.7)$$

Pelo fato de esta série ser geométrica, ela converge se  $|-t^2| < 1 \iff |t| < 1$ . Portanto, o intervalo de convergência é  $(-1, 1)$ , porém este último teorema citado permite que ela seja convergente no intervalo fechado  $[-1, 1]$ . Para  $x = 1$  temos:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Ambas as séries atendem as condições da série alternada, pois os termos formam uma sequência positiva, decrescente e tendendo a zero. Dessa forma, o intervalo de convergência agora passa a ser de  $x \in [-1, 1]$ . Como  $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$  podemos fazer:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ \pi &= 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) \\ \pi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{2n+1} \quad (6.8) \end{aligned}$$

Com essa relação, tornando o valor de  $n$  cada vez maior, mais preciso será o valor de  $\pi$ , como podemos ver na tabela 3 a seguir:

Com este algoritmo, podemos aproximar  $\pi$  com quantas casas decimais desejarmos.

Tabela 3 – Aproximação de  $\pi$  pela série de Gregory-Leibnitz

<b>Tabela</b>		
$n$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{2n+1}$	$\approx \pi$
0	4,0000000	4,0000000
1	-1,3333333	2,6666667
2	0,8000000	3,4666667
3	-0,5714286	2,8952381
4	0,4444444	3,3396825
5	-0,3636364	2,9760461
6	0,3076923	3,2837384
7	-0,2666667	3,0170717
8	0,2352941	3,2523658
9	-0,2105263	3,0418395
10	0,1904762	3,2323157
11	-0,1739130	3,0584027
12	0,1600000	3,2184027
13	-0,1481481	3,0702546
14	0,1379310	3,2081856
15	-0,1290323	3,0791533
16	0,1212121	3,2003654
17	-0,1142857	3,0860797
18	0,1081081	3,1941878
19	-0,1025641	3,0916237
20	0,0975610	3,1891847
21	-0,0930233	3,0961614
22	0,0888889	3,1850503
23	-0,0851064	3,0999439
24	0,0816327	3,1815766
25	-0,0784314	3,1031452
26	0,0754717	3,1786169
27	-0,0727273	3,1058896
28	0,0701754	3,1760650
29	-0,0677966	3,1082684

Fonte: GUZZO 2010

## 7 A IRRACIONALIDADE DE $\pi$

Como já foi tratado no capítulo 4, a busca pelo valor de  $\pi$  ocorreu historicamente por diversos fatores, mas um dos mais importantes era verificar se em alguma casa decimal, passaria a surgir uma repetição, tornando-o assim um número racional. Porém a cada método novo que surgia, se descobriam novas casas decimais e a repetição que tanto se buscava não era encontrada. Surgia então a hipótese de que  $\pi$  fosse irracional.

Então em 1761 o matemático J. H. Lambert conseguiu provar que este fato usando frações contínuas. Porém, a prova que usaremos aqui foi feita por I. Niven, que surgiu posteriormente e que é mais simples que a prova de Lambert.

Nossa função de partida será:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \quad (7.1)$$

onde  $n$  é um número inteiro positivo.

Iremos mostrar que  $f^{(k)}(0)$  e  $f^{(k)}(1)$  são números inteiros para qualquer  $k = 0, 1, 2, \dots$ , onde  $f^{(k)}$  representa a  $k$ -ésima derivada de  $f$  e  $f^{(0)} = f$ .

Aplicando a proposição 5.2 na função acima, tal que  $g(x) = \frac{x^n}{n!}$  e  $h(x) = (1-x)^n$ , obtemos

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (x^n)^{(j)} \cdot ((1-x)^n)^{(k-j)}.$$

Se analisarmos o número de vezes que derivaremos  $x^n$  teremos que:

$$(x^n)^{(j)}|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{se } j < n, \\ n!, & \text{se } j = n, \\ 0, & \text{se } j > n, \end{cases}$$

onde a barra no ponto  $x = 0$  significa que a derivada é calculada no ponto  $x = 0$ . Como em todos os casos  $(x^n)^{(j)}|_{x=0} = 0$  se  $j \neq n$ , iremos analisar apenas o caso em que  $j = n$ , que é a equação  $(f^{(k)}(0)) = \binom{k}{j} ((1-x)^n)^{(k-n)}$ , na qual verificaremos as circunstâncias nas quais podemos extrair um número inteiro. Note que:

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{se } k < n,$$

$$f^{(k)}(0) = \binom{n}{n} [(1-x)^n]^{(n-n)}|_{x=0} = [(1-x)^n]^{(0)}|_{x=0} = (1-x)^n|_{x=0} = 1 \quad \text{se } k = n,$$

$$f^{(k)}(0) = \binom{k}{n} [(1-x)^n]^{(k-n)}|_{x=0} = \binom{k}{n} (-1)^{k-n} (1-x)^{2n-k}|_{x=0} = (-1)^{k-n} \binom{k}{n} (1-0)^{2n-k} \quad \text{se } k > n,$$

$$f^{(k)}(0) = \binom{k}{n} [(1-x)^n]^{(k-n)} = (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \quad \text{se } k > n.$$

Portanto, para cada um dos casos, teremos que  $f^{(k)}(0)$  é um número inteiro. Vejamos agora para quando  $f^{(k)}(1)$ .

Perceba que para a função  $f(x)$ , teremos que  $f(x) = f(1-x)$ .

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^n (1 - (1-x)^n)}{n!} = \frac{(1-x)^n x^n}{n!} = f(x)$$

Portanto, se  $f(x) = f(1-x)$ , teremos que  $f^{(k)}(x) = f^{(k)}(1-x)$ . Logo se  $x = 0$ ,  $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1-0) \iff f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1)$ .

Portanto,  $f^{(k)}(0)$  e  $f^{(k)}(1)$  são números inteiros. Este fato será essencial para o que virá em seguida.

Suponha que  $\pi^2 = \frac{p}{q}$  tal que  $\frac{p}{q}$  seja uma fração irredutível. Tomemos a função  $F(x)$  tal que:

$$F(x) = \sum_{k=0}^n q^n \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(x) \cdot (-1)^k \quad (7.2)$$

Note que cada um dos fatores  $q^n \pi^{2n-2k}$  podem ser escritos da seguinte forma:

$$q^n \pi^{2n-2k} = q^n (\pi^2)^{n-k} = q^n \left(\frac{p}{q}\right)^{n-k} = p^{n-k} q^k.$$

Como  $p$  e  $q$  são inteiros,  $p^{n-k} q^k$  também o é. Dessa forma, observe que:

$$F(0) = q^n \sum_{k=0}^n \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(0) \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^n p^{n-k} q^k f^{(2k)}(0) \cdot (-1)^k.$$

Como mostramos anteriormente que  $f^{(k)}(0)$  é um número inteiro para qualquer  $k$  inteiro, então:

$$F(0) = \sum_{k=0}^n p^{n-k} q^k f^{(2k)}(0) \cdot (-1)^k$$

é um número inteiro.

De maneira similar, temos que:

$$F(1) = q^n \sum_{k=0}^n \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(1) \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^n p^{n-k} q^k f^{(2k)}(1) \cdot (-1)^k.$$

Também foi mostrado que  $f^{(k)}(1)$  é um número inteiro para qualquer  $k$  inteiro, logo:

$$F(1) = \sum_{k=0}^n p^{n-k} q^k f^{(2k)}(1) \cdot (-1)^k$$



é um número inteiro. Portanto,  $F(1)$  e  $F(0)$  são números inteiros. Tomando a expressão  $F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x$ , aplicadas em  $x = 1$  e  $x = 0$  e subtrairmos ambas, teremos

$$\pi(F'(1) \sin \pi - \pi F(1) \cos \pi - F'(0) \sin 0 + \pi F(0) \cos 0) = \pi(F(1) + F(0)) \quad (7.3)$$

Porém, esta igualdade pode ser representada como sendo:

$$\int_0^1 (F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x)' dx = F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x \Big|_0^1 = \pi(F(1) + F(0)),$$

$$\int_0^1 (F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x)' dx = \pi(F(1) + F(0)).$$

Perceba também que  $(F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x)'$  pode ser escrito como sendo:

$$(F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x)' = F''(x) \sin \pi x + \pi F'(x) \cos \pi x - \pi F'(x) \cos \pi x + \pi^2 F(x) \sin \pi x,$$

$$(F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x)' = F''(x) \sin \pi x + \pi^2 F(x) \sin \pi x. \quad (7.4)$$

Como temos que:

$$F^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^n q^n \pi^{2n-2k} f^{(2k+2)}(x) \cdot (-1)^k, \quad (7.5)$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned} F^{(2)}(x) \sin \pi x + \pi^2 F(x) \sin \pi x &= \sin \pi x (F^{(2)}(x) + \pi^2 F(x)) = \\ &= q^n \sin \pi x (\pi^{2n} f^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x) + \pi^{2n+2} f(x) - \pi^{2n} f^{(2)}(x) + \dots + (-1)^n \pi^2 f^{(2n)}(x)) \\ &= q^n \sin \pi x ((-1)^n f^{(2n+2)}(x) + \pi^{2n+2} f(x)), \end{aligned}$$

$$F''(x) \sin \pi x + \pi^2 F(x) \sin \pi x = q^n \sin \pi x ((-1)^n f^{(2n+2)}(x) + \pi^{2n+2} f(x))$$

Como  $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$  temos que seu grau é  $2n$ . Consequentemente  $f^{(2n+2)}(x) = 0$ .

Logo:

$$F^{(2)}(x) \sin \pi x + \pi^2 F(x) \sin \pi x = q^n \pi^{2n+2} f(x) \sin \pi x = q^n \left(\frac{p}{q}\right)^n \pi^2 f(x) \sin \pi x = p^n \pi^2 f(x) \sin \pi x$$

Logo, aquela integral que citamos mais acima pode ser calculada por

$$\int_0^1 (F'(x) \sin \pi x - \pi F(x) \cos \pi x)' dx = \int_0^1 p^n \pi^2 f(x) \sin \pi x dx = \pi(F(1) + F(0)). \quad (7.6)$$

Portanto teremos a seguinte igualdade,

$$p^n \pi \int_0^1 f(x) \sin \pi x dx = F(1) + F(0) \quad (7.7)$$

Como provamos que  $F(0) + F(1)$  é inteiro, iremos mostrar que  $p^n \pi \int_0^1 f(x) \sin \pi x dx$  é um número entre zero e um, gerando assim um absurdo.

Como havíamos definido:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Para  $0 < x < 1$  temos que  $f(x) > 0$  e que

$$\frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}.$$

Portanto  $f$  é uma função que está entre  $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ .

Multiplicando os membros desta última desigualdade por  $\pi p^n \sin \pi x$ :

$$0 < \pi p^n \sin \pi x f(x) < \frac{\pi p^n \sin \pi x}{n!}$$

Integrando os três membros de 0 a 1, teremos:

$$0 < \pi p^n \int_0^1 \sin \pi x f(x) dx < \frac{p^n}{n!} \int_0^1 \pi \sin \pi x dx.$$

Calculando a integral  $\int_0^1 \pi \sin \pi x dx$ :

$$\int_0^1 \pi \sin \pi x dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

Logo:

$$0 < \pi p^n \int_0^1 \sin \pi x f(x) dx < \frac{2p^n}{n!}.$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n!} = 0$ , conforme foi exibido no capítulo 5.3, é natural que também  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2p^n}{n!} =$

0. Podemos então tomar um  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande de maneira que  $\frac{2p^n}{n!} < 1$ . Portanto:

$$0 < \pi p^n \int_0^1 \sin \pi x f(x) dx < 1, \quad (7.8)$$

gerando um absurdo. Portanto  $\pi$  é irracional.

## 8 A APLICABILIDADE DO $\pi$ EM SALA DE AULA

Nos capítulos anteriores, tratamos da construção histórica do número  $\pi$ , das diversas formas que grandes pensadores se utilizaram para encontrar uma aproximação numérica para o seu valor, e por fim, abordamos a demonstração da irracionalidade de  $\pi$ , prova esta feita por I. Niven em 1947. Neste capítulo traremos uma sugestão pedagógica para que o professor possa tratar desses temas em sala de aula com os seus alunos.

### 8.1 Aula sobre o número $\pi$

1. Tema O número  $\pi$ .
2. Objetivos
  - a) Compreender como surgiu o número  $\pi$ ;
  - b) Calcular por meio de diversos métodos uma aproximação para  $\pi$ ;
  - c) Verificar por meio de exercícios que o número  $\pi$  é irracional.
3. Conteúdo
  - a) A história do número  $\pi$ ;
  - b) Os diversos métodos que permitem uma aproximação para o número  $\pi$ ;
  - c) A irracionalidade de  $\pi$ .
4. Desenvolvimento do tema.
  - a) Iniciar a aula mostrando a fórmula que permite calcular a área de um círculo e comprimento de uma circunferência;
  - b) Mencionar o valor numérico da constante  $\pi$  que está presente em ambas as fórmulas;
  - c) Questionar os alunos acerca de como se descobriu o valor numérico da constante  $\pi$  e pedir sugestões;
  - d) Fazer uma breve cronologia do número  $\pi$  em seus diversos contextos históricos
  - e) Aplicar o exercício, que segue abaixo, cujas questões são formadas por métodos que nos permitem encontrar uma aproximação para  $\pi$ ;
  - f) Fazer os alunos notarem que as diversas aproximações encontradas não coincidem e que elas não geram uma periodicidade;
  - g) Exibir a ideia de irracionalidade e mostrar que o  $\pi$  é irracional por meio da última questão;

- h) Finalizar a aula contando a história de Arquimedes, e o método usado pelo mesmo para encontrar uma aproximação para o número  $\pi$ , findando com a apresentação da construção deste método feita no Geogebra e que se encontra no GeogebraTube.

#### 5. Recursos didáticos

- a) Quadro;
- b) Apagador;
- c) Pincel;
- d) Computador;
- e) Datashow;
- f) Internet;
- g) Atividade impressa.

#### 6. Avaliação

- a) Processual e contínua;
- b) Atividade em sala.

#### 7. Exercício para aplicar em sala

1- No Egito antigo, alguns matemáticos queriam encontrar qual seria o valor da área de uma circunferência de raio 1. Para isso, eles puderam verificar que a área de um círculo qualquer é igual a de um quadrado cujo lado é o diâmetro de círculo diminuído de sua nona parte. Sabendo que o círculo tem raio 1, determine a área deste círculo.

OBS: Note que como  $A = \pi r^2$ , se  $r = 1$ , teremos que  $A = \pi$ . Ou seja, se encontrarmos a área desse círculo unitário, estaremos encontrado também uma aproximação para  $\pi$ .

2- Na antiga Babilônia, alguns homens conseguiram encontrar uma aproximação para  $\pi$ , que ficava entre as frações  $\frac{25}{8}$  e  $\frac{22}{7}$ . Verifique entre que valores o número  $\pi$  se encontrava na visão dos babilônicos.

3- No Renascimento, o matemático Leibnitz conseguiu encontrar uma aproximação para o número  $\pi$  por meio da série abaixo:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

Quanto maior for o valor de  $n$ , maior pe a aproximação de  $\pi$ . Calcule o valor de  $\pi$  quando  $n$  for:

a)  $n = 3$

b)  $n = 4$

c)  $n = 8$

4 - Um número que apresenta casas decimais e que nestas casas não existe um período, a este número chamamos irracional. Observe as questões anteriores e responda:

a) Em alguma das aproximações encontradas, existe alguma periodicidade?

b) O que este resultado significa?

c) Você classificaria o  $\pi$  como um número racional ou irracional?

OBS: link da construção no GeogebraTube:  $\langle \text{http://www.geogebra.org/student/m747785} \rangle$

## 9 CONCLUSÕES

Como levantado inicialmente, os alunos e também os professores pouco conhecem sobre o número  $\pi$ . Esta constante é usada no ensino básico de forma muito técnica, apenas usando em aplicações pontuais, como por exemplo para encontrar a área de um círculo e o comprimento de uma circunferência.

Com o intuito de fugir desta mera repetição técnica, fizemos um levantamento histórico de como esse número foi sendo calculado e quais foram os principais métodos usados para este fim. Por fim, e como principal objetivo, sugerimos uma proposta pedagógica de como pode-se abordar sobre o número  $\pi$  em sala de aula de uma maneira diferente.

Um dos desafios mais intrigantes para os professores de matemática é estimular o aluno a estudar esta disciplina. Durante a pesquisa, notamos que a história da matemática pode funcionar como um dos possíveis instrumentos pedagógicos, de maneira que o seu uso pode tornar as aulas de matemática mais interessantes e pode despertar o interesse do aluno pelo tema abordado.

De maneira particular, pudemos comprovar que usar os conhecimentos históricos que se tem sobre o  $\pi$ , pode levar o aluno a refletir que matemática vai muito além de mera aplicação técnica de fórmulas previamente formadas. Com o uso da história do  $\pi$ , pudemos mostrar que ele é um número repleto de significado, e usando desta história que o circunda, é possível estimular o aluno a estudar matemática cada vez mais.

## REFERÊNCIAS

- 1 LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*, Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- 2 MARQUES, Túlio Guimarães. *Numericamente Igual a  $\pi$* , Goiânia, 2013.
- 3 EVES, Howard. *Introdução a História da Matemática*, 5 Ed. Rio de Janeiro: Editora da UNICAMP, 2011.
- 4 JERUSALÉM *Bíblia de Jerusalém*. São Paulo: Paulus, 2002.
- 5 BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*, 11ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- 6 FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- 7 STEWART, James. *Cálculo*. Vol. I e II [tradução EZ2 Translate]. – São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- 8 BOYER, Carl Benjamim. *História da Matemática*. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo. Editora da Universidade de São Paulo. 1974.
- 9 GARCIA, Vera Clotilde. *Números Reais uma introdução*. Disponível em <<http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/numerosreais/Pi/arquimedes.htm>>.
- 10 GUZZO, Sandro Marcos. O Número "Pi". *Revista Eletrônica de Matemática*. nº 2. 2010. Disponível em <<http://matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/pi.pdf>>.
- 11 SANTOS, Gilvaneide Lucena dos. *Número  $\pi$ : Histórico, sua irracionalidade e transcendência*. Universidade Católica de Brasília. Disponível em <<http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/GilvaneideLucenadosSantos.pdf>>.