José Carlos Dittgen Miritz

Matemática e Música

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Agosto, 2015

José Carlos Dittgen Miritz

Matemática e Música

Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido por José Carlos Dittgen Miritz junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Coorientador: Dra. Cristiana Andrade Poffal

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Agosto, 2015

Colaboradores

Universidade Federal do Rio Grande

http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física

http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática

http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

http://www.capes.gov.br

M675m Miritz, José Carlos Dittgen.
Matemática e música / José Carlos Dittgen Miritz. – 2015.
94 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Rio Grande/RS, 2015.
Orientadora: Drª. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez.
Coorientadora. Drª. Cristiana Andrade Poffal

1. Matemática 2. Música 3. Ensino médio I. Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral II. Poffal, Cristiana Andrade III. Título.

CDU 51:78

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

Universidade Federal do Rio Grande - FURG
Instituto de Matemática Estatística e Física - IMEF
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Ata de Defesa de Dissertação de Mestrado

No décimo quarto dia do mês de agosto do ano de 2015, às 14:00 h na sala 3101 do prédio 3 do Campus Carreiros da FURG, realizou-se a Defesa de Trabalho de Conclusão intitulado Matemática e Música, de autoria do candidato **José Carlos Dittgen Miritz**, aluno do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da FURG. A Comissão Examinadora esteve constituída pelos professores: **Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez** (Presidente), *Cristiana Andrade Poffal*, *Cinthya Meneghetti* e *Camila da Costa*. Concluídos os trabalhos de apresentação e arguição, o candidato foi **aprovado** pela Comissão Examinadora. Foi concedido um prazo de 15 dias para o candidato efetuar as correções sugeridas pela Comissão Examinadora e apresentar o trabalho em sua redação definitiva, sob pena de não expedição do Diploma. E, para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão.

BDenicol Rodriguez

Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez
(Orientadora-Presidente) (FURG)

Cristiana A. Poffal

Cristiana Andrade Poffal
(Coorientadora) (FURG)

Cinthya M. S. Meneghetti

Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(FURG)

Camila Costa

Camila da Costa
(UFPel)

Este trabalho é dedicado aos meus pais Ruy Carlos Miritz (in memoriam) e Irene Dittgen, aos meus filhos Henry e Stéphanie e aos meus irmãos Luiz, Cristiane e Luciane, por terem me proporcionado condições de enfrentar este desafio e concluí-lo.

Agradecimentos

Agradeço pela grande ajuda das professoras orientadoras Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez e Dra. Cristiana Andrade Poffal, aos meus queridos alunos do segundo ano do ensino médio do Colégio Sinodal Alfredo Simon, ao professor Lino Soares pela ajuda na procura por bibliografia e, principalmente a Deus por ter dado a mim a oportunidade de concluir este trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

"Se alguém deseja conhecer se o reino é bem governado, se sua moral é boa ou ruim, a qualidade de sua música irá fornecer a resposta."

(Confúcio)

Resumo

Esta dissertação propõe atividades a fim de estabelecer uma aproximação entre a matemática e a música, aproveitando a estreita relação existente entre esses dois assuntos. Aplica-se a história da matemática como ferramenta para o entendimento de conceitos matemáticos e musicais, bem como a evolução da música. Além disso, utiliza-se a resolução de problemas para estabelecer a relação entre a matemática e a música através das funções exponencial e logarítmica e a sequência numérica chamada progressão geométrica (P.G.) Ações efetivas, como questionários relativos ao assunto a ser estudado, debates com o intuito de perceber o nível de conhecimento dos alunos sobre a música e uma atividade prática, a construção de um xilofone de garrafas, envolvendo os conhecimentos adquiridos, auxiliaram para a obtenção do resultado final deste trabalho. Apresenta-se também a análise das atividades que embasaram a proposta desse trabalho quando aplicadas em uma turma de segundo ano do Colégio Sinodal Alfredo Simon, localizada na cidade de Pelotas no estado do Rio Grande do Sul.

Palavras-chaves: Matemática, música, Ensino Médio, xilofone de garrafas.

Abstract

This dissertation proposes activities to establish a connection between Mathematics and Music, taking advantage of the close relationship between these two issues. The history of Mathematics is applied as a tool for the understanding of mathematical and musical concepts as well as the evolution of music. In addition, problem solving is used to establish the relationship between mathematics and music through the exponential and logarithmic functions and the numerical sequence called geometric progression. Effective actions such as questionnaires concerning the subject to be studied, discussions in order to understand students' level of knowledge about music, a practical activity and building a water bottle xylophone involving the knowledge acquired, helped to obtain the result of this work. It also presents the analysis of the activities which supported the proposal of this work when applied to a group of second year of high school at Alfredo Simon School, located in the city of Pelotas, in Rio Grande do Sul.

Key-words: Mathematics, music, High School, water bottle xylophone.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

A matemática e a música são estudadas desde a Antiguidade. Para muitos, são áreas totalmente distantes, mas, na verdade, as sensações de prazer que sentimos ao ouvir música escondem cálculos subliminares. Entre a matemática e a música existem inúmeras relações, algumas delas serão discutidas ao longo deste trabalho.

As melodias que nos emocionam, são, na verdade, construídas a partir de relações matemáticas muito precisas. Tais relações sempre mantiveram a matemática e a música muito próximas uma da outra (BIBBY, 2003). A matemática está presente no desenvolvimento das escalas musicais e na teoria musical, envolve conhecimentos que não são simples e nem óbvios e extremamente necessários para sua compreensão. As relações matemáticas presentes na música, junto com as características intrínsecas das vibrações sonoras, são a base para a harmonia na superposição dos sons musicais. O engenheiro eletrônico Miguel Ratton em entrevista para o sítio Globo Educação (A. . . , 2012), afirma que a música pode ser usada para ilustrar alguns conceitos matemáticos. Segundo ele, as figuras de tempo (duração) das notas, por exemplo, são frações de compasso do tipo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc; a altura (afinação) das notas é estabelecida por uma função exponencial de base 2, precisamente $2^{\frac{x}{12}}$, onde x é a distância de uma nota a outra. Ele cita ainda que a nossa percepção de intensidade dos sons se dá de forma exponencial e por isto medimos sua intensidade usando uma escala logarítmica (decibel).

Historicamente também percebe-se a relação entre a matemática e a música: seja com os experimentos de Pitágoras e o monocórdio (instrumento composto por uma só corda) ou na construção dos instrumentos de cordas. Outros matemáticos contribuíram significativamente para estreitar essa relação, entre eles podemos citar o matemático, filósofo e teórico musical Marin Mersenne (1588 - 1648)(ABDOUNUR, 2002). Mersenne considerava o monocórdio como suporte fundamental à compreensão de toda ciência musical (CAMPOS, 2009). Ele estabeleceu várias correspondências, através de cartas, com outros pensadores importantes da época como Galileu, Descartes e Fermat e acreditava que a música era passível de análise e explicação racional (PERES, 2006).

A partir da transferência desses conhecimentos para a atualidade, podemos associar os assuntos propostos e entender melhor a história dos acontecimentos que marcaram a trajetória comum da matemática e da música. A relação estabelecida pelos pensadores que viveram entre os séculos XVI e XVII, que associava a música com a matemática, quando remetida a realidade de hoje, torna possível e interessante o uso, em sala de aula, dos dois assuntos como motivadores para o entendimento de conceitos matemáticos. A partir da música é possível ilustrar a matemática e tornar seu aprendizado mais divertido e prazeroso.

Atualmente em sala de aula, uma das grandes dificuldades enfrentadas pelo educador é a construção de uma aprendizagem significativa. Segundo o professor Cavalcanti (CAVALCANTI; LINS, 2010) uma aprendizagem torna-se de fato significativa quando é voltada para a realidade do aluno e estabelece relações entre a teoria ensinada e a prática, tais relações são citadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 2000) como fundamentais para o processo de ensino e aprendizagem. Ainda relacionado aos PCNs (BRASIL, 1998), quanto mais próxima do cotidiano e da prática, a abordagem de alguns assuntos da matemática, mais fácil será o entendimento dos conteúdos pelos alunos. Segundo D'Ambrosio (D'AMBROSIO, 1986), o valor da teoria se revela no momento em que ela é transformada em prática. Para o autor, no caso da educação, as teorias se justificam na medida em que seu efeito é sentido na condução do dia-a-dia na sala de aula; de outra maneira, a teoria não passará de tal, pois não poderá ser legitimada na prática educativa. Além disso, o conhecimento prévio dos alunos é extremamente importante para o aprendizado matemático. Cada aluno ingressa na escola trazendo consigo conceitos e modelos próprios para explicar sua realidade e até mesmo fatos científicos.

A fim de auxiliar a aproximação entre os alunos e a matemática, a música pode ser utilizada como um recurso muito interessante, pois trata-se de uma atividade educacional enriquecedora. Segundo Cavalcanti (CAVALCANTI; LINS, 2010), a música quando bem trabalhada desenvolve o raciocínio, a criatividade e outros dons e aptidões imprescindíveis à aprendizagem de conceitos matemáticos. Observa-se, também, que há uma grande afetividade nas situações didático-pedagógicas envolvendo atividades musicais.

Além disso, o ensino musical passou a ser obrigatório a partir do ano de 2011, conforme prevê a Lei número 11.769, sancionada no dia 18 de agosto de 2008 pelo então presidente Luis Inácio Lula da Silva. A lei acrescenta mais um parágrafo ao artigo 26 da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), determinando que a música deverá ser conteúdo obrigatório do componente curricular e que os sistemas de ensino básico teriam três anos para se adaptar à implantação do ensino musical, a partir da sanção da lei. A aprovação da lei é, na verdade, uma vitória do Núcleo Independente de Músicos (NIM) composto por Francis Hime, Ivan Lins, Fernanda Abreu, Alexandre Negreiros, Cristina Saraiva, Felipe Radicetti e Dalmo Motta, que começou a se reunir em 2005 para colocar o ensino musical na ordem do dia do governo, conferindo a ele o lugar que merece. O movimento do NIM cresceu e hoje se chama Grupo de Articulação Parlamentar Pró-Música (GAP) (ENSINO. . . , 2012).

Tendo em vista a obrigatoriedade do ensino de música e suas possibilidades interdisciplinares, pesquisas começam a focar no uso da música como ferramenta para o ensino de matemática. Acreditamos que isso é apenas o início de uma época na qual teremos o ensino da música concomitante com o ensino de outras disciplinas na escola. Até o presente momento, na Biblioteca Digital do PROFMAT podem ser encontrados quatro trabalhos tendo matemática e música como foco principal. Pereira (PEREIRA, 2013) apresenta uma síntese da trajetória da música ocidental desde a Grécia Antiga até os dias de hoje e uma atividade, composta de dez problemas, que utiliza as histórias da música e da matemática para introduzir os conteúdos de progressões geométricas e de funções periódicas. Fonseca (FONSECA, 2013), em seu trabalho, discute as relações entre a matemática e a música desde níveis básicos, como a relação entre o comprimento de uma corda, as médias e as relações entre exponenciais e logaritmos. O autor apresenta atividades envolvendo média aritmética e média harmônica, a construção das escalas Pitagórica e Temperada e a resolução de equações exponenciais e logarítmicas. Cruz (CRUZ, 2013) em seu TCC propõe uma ação multidisciplinar, entre as áreas de matemática, educação musical e a informática, onde são apontadas alternativas para o professor de matemática aliar o ensino de frações à teoria musical utilizando a calculadora. O trabalho de Prado (PRADO, 2013) apresenta a construção de gráficos de composições de funções trigonométricas, $y = \text{sen}(x)$ e $z = \cos(x)$ e a função afim $f(x) = ax + b$ utilizando o *software* Geogebra e mostra a aplicação dessas funções no estudo de ondas sonoras.

A partir desta análise e de artigos científicos, percebemos que ainda não existem muitos trabalhos abordando as inter-relações entre a matemática e a música, bem como propostas de atividades práticas para o ensino destes assuntos. Neste contexto, a minha formação como professor de matemática e a minha trajetória como músico amador foram fatores decisivos que me auxiliaram a perceber a íntima ligação existente entre essas duas áreas. Além disso, existe um grande potencial didático e pedagógico, ainda pouco explorado, no estudo da matemática e da música. Sendo assim, este trabalho propõe uma aproximação entre matemática e música através de atividades que serão aplicadas com o objetivo de, a partir das experiências concretas da vida cotidiana dos estudantes, construir conceitos matemáticos e da teoria musical. Tais experiências auxiliarão na obtenção das respostas às questões propostas e colaborarão para o melhor entendimento de conceitos da matemática usando a música e vice versa, tornando assim as aulas mais atraentes e interessantes. Um dos aspectos mais importantes deste trabalho é evidenciar a estreita relação entre a matemática e a música como uma tentativa de romper com alguns paradigmas, como destaca a doutora em educação matemática Beatriz D'Ambrosio (D'AMBROSIO, 1989), "a típica aula de matemática ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante". As atividades propostas são aplicadas em uma turma de alunos do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Sinodal Alfredo Simon, localizada na cidade de Pelotas no estado do Rio Grande do Sul. A sequência didática está estruturada em três etapas: aplicação de questionários pelo professor, apresentação dos trabalhos dos alunos e construção de um xilofone de garrafas pelos estudantes.

Cabe ressaltar que neste trabalho não se pretende fazer com que a música explique completamente os conteúdos matemáticos envolvidos, mas sim, estudar as possíveis aplicações da música na construção de conceitos e teorias na disciplina de matemática nas escolas. Pretende-se propor ações para que o ensino e a aprendizagem tanto da música quanto da matemática aproximem-se e que uma área fundamente-se na outra, desenvolvendo competências cognitivas múltiplas nos estudantes. Com estas ações, contribuir para o entendimento de conceitos matemáticos, físicos, biológicos e da teoria musical.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo são apresentados os objetivos. No segundo, é descrita a relação histórica entre a matemática e a música, desde seu primórdio, através das contribuições de brilhantes matemáticos e músicos famosos que, por sua grandiosidade, conseguiram postar-se para a eternidade. No terceiro capítulo são apresentadas as relações entre a matemática e a música, um estudo sobre as escalas musicais e uma breve descrição sobre a anatomia do ouvido humano. No capítulo seguinte, são abordados os conteúdos matemáticos que permeiam os assuntos deste trabalho: as funções exponencial e logarítmica e a sequência numérica progressão geométrica. A caracterização do trabalho, com a descrição do público alvo, dos pré-requisitos e dos materiais utilizados, e os passos para a construção do xilofone de garrafas são apresentados no capítulo cinco. Em seguida, nos capítulos seis e sete, um relato sobre a aplicação da atividade e uma análise dos resultados são feitos. No capítulo oito, são descritas sugestões de atividades. Por fim, no capítulo nove, são apresentadas as conclusões finais pertinentes a este trabalho. Nos anexos é disponibilizado um glossário com termos da teoria musical.

1 Objetivos

Este trabalho tem o objetivo de propor estratégias didático-pedagógicas para o ensino da matemática através da música por meio de um viés histórico-matemático-musical, estabelecendo e analisando as relações existentes entre as duas áreas do saber e a forma como isto pode contribuir para a aprendizagem dos alunos.

Inspirando-se em um estudo realizado na Universidade de Aveiro em Portugal que afirma que quanto maior o tempo de aprendizagem musical melhor é o desempenho matemático, este trabalho é uma iniciativa de utilizar a música no ensino da matemática. De acordo com o artigo escrito por Luiz (LUIZ, 2014), na revista Ciência Hoje, de Portugal, crianças que estudam música apresentam melhores desempenhos em matemática comparativamente às que não têm lições musicais. Luiz (LUIZ, 2014) destaca o fato da associação entre a aprendizagem musical e o desempenho em avaliações de matemática permanecer evidente mesmo após a remoção das diferenças entre os alunos, quanto aos níveis da inteligência e socioeconômico. O autor ressalta ainda a possibilidade de prever o desempenho matemático a partir do raciocínio espacial, raciocínio especialmente desenvolvido pelos estudantes de música, e ainda acrescenta que as capacidades espaciais melhoradas têm uma contribuição importante no desempenho melhor dos estudantes na matemática, assim como em áreas da ciência, tecnologia e engenharia.

1.1 Objetivos Gerais

Os objetivos gerais deste trabalho são:

1) Propor uma reflexão sobre a ligação entre matemática e música, a partir de um estudo histórico;

2) Desenvolver uma atividade didática inter-relacionando a música e a matemática.

1.2 Objetivos Específicos

O desenvolvimento do conhecimento matemático e musical tem como objetivo facultar ao estudante a possibilidade de:

- estabelecer a relação existente entre a matemática e a música, visto que elas estão intimamente ligados;

- pesquisar a contribuição de Mersenne na construção da escala temperada considerando os logaritmos em sua formação;
- associar a importância das funções exponencial e logarítmica na formação da escala musical temperada;
- perceber a presença de uma sequência numérica chamada de progressão geométrica na formação da escala temperada.

Os objetivos aqui apresentados levam em consideração o fato de que o aprendizado musical pode servir como um estímulo no período de escolarização, auxiliando na concentração, na aproximação aluno-professor e no aprendizado da matemática. Além disso, a inserção da música no contexto escolar pode ser utilizada como uma importante ferramenta de ensino em diversas áreas do conhecimento, como física e biologia, além, é claro, da matemática. De acordo com os objetivos acima citados, Corrêa (CORRÊA, 1989) elege a música como sendo imprescindível na educação. Segundo a autora, pedagogicamente ela é um recurso que enriquece o processo educacional e possui um grande valor artístico, estético, cognitivo e emocional. A linguagem musical oferece várias possibilidades interdisciplinares.

No próximo capítulo descreve-se a relação histórica entre a matemática e a música.

2 Fundamentos da Teoria Musical e Conceitos sobre a Audição

Uma vez estabelecidas algumas relações entre a matemática e a música, este capítulo tem como objetivo apresentar conceitos básicos relacionados à teoria musical. Além disso, devido a importância da audição na definição da música, são descritos conceitos acerca da anatomia do ouvido humano.

2.1 Escalas Musicais

Segundo o professor Med (MED, 1996), música é a arte de combinar sons, simultânea e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo.

De acordo com Martineau (MARTINEAU, 2014), quando a música se une à linguagem, o que é falado torna-se canção, elevando as intenções e pedindo que escutemos mais profundamente, tornando sagrado o que é profano. A música conforta a alma.

As principais partes que constituem a música são:

1) Melodia - conjunto de sons dispostos em ordem sucessiva (concepção horizontal da música);

2) Harmonia - conjunto de sons dispostos em ordem simultânea (concepção vertical da música);

3) Contraponto - conjunto de melodias dispostas em ordem simultânea (concepção ao mesmo tempo horizontal e vertical da música);

4) Ritmo - ordem e proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e a harmonia.

Som é a sensação produzida no ouvido pelas vibrações de corpos elásticos. Uma vibração põe em movimento o ar na forma de ondas sonoras que se propagam em todas as direções simultaneamente. As características principais do som são:

1) Altura - determinada pela frequência das vibrações, isto é, da sua velocidade. Quanto maior for a velocidade da vibração, mais agudo será o som;

2) Duração - extensão de um som, é determinada pelo tempo de emissão das vibrações;

3) Intensidade - amplitude das vibrações, é determinada pela força ou pelo volume do agente que as produz. É o grau de volume sonoro;

4) Timbre - combinação de vibrações determinadas pela espécie do agente que as produz. O timbre é a "cor" do som de cada instrumento ou voz, derivado da intensidade dos sons harmônicos que acompanham os sons principais.

Todo e qualquer som tem, simultaneamente, as quatro características.

De acordo com Med (**??**)MED), a música, escrita pelo compositor, para ser percebida pelo ouvinte, necessita de um intermediário, ou melhor, um intérprete. A música não é apenas uma arte, mas também uma ciência. Por isso, os músicos (compositores ou intérpretes) precisam, além de talento, de uma técnica específica, bem apurada; e esta se aprende durante longos anos de estudo. Para alcançar nível profissional competitivo, o músico precisa ter talento, força de vontade e perseverança.

Para escrever uma música é usado um pentagrama ou pauta, que é um conjunto de cinco linhas paralelas com quatro espaços de mesma distância entre as linhas.

Uma escala musical é uma sucessão ascendente ou descendente de notas musicais diferentes consecutivas. A palavra escala tem sua origem no latim *scala*, que significa gama ou escada.

A importância do estudo das escalas reside no fato de que elas constituem a base musical, daí a correlação entre matemática e música fica mais clara.

A seguir as definições das escalas chamadas Natural e Cromática:

- Escala Diatônica ou Natural: é aquela em que numa oitava temos as notas Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si e Dó, completando assim um ciclo de oito notas chamada de oitava, onde a última possui o dobro da frequência da primeira;

- Escala Temperada ou Cromática: é aquela que é composta por meio tom entre cada nota, ou seja, Dó, Dó #, Ré, Ré #, Mi, Fá, Fá #, Sol, Sol #, Lá, Lá #, Si e Dó como uma oitava ascendente ou Dó, Si, Si ♭, Lá, Lá ♭, Sol, Sol ♭, Fá, Mi, Mi ♭, Ré e Ré ♭, Dó como uma oitava descendente (MED, 1996).

O semi tom ou meio tom é o menor intervalo adotado entre duas notas na música no sistema temperado. O sustenido (#), significa meio tom acima e o bemol (♭), meio tom abaixo. O menor intervalo entre dois sons é, na verdade, a diferença de uma vibração. O sistema ocidental utiliza somente uma seleção semitonal dos sons existentes. Algumas culturas orientais (japonesa, chinesa, árabe, hebraica, indiana, entre outras) utilizam em seu sistema musical frações menores que um semi tom (um quarto de tom, um oitavo de tom, etc.).

2.1.1 Escala Temperada

A escala temperada consiste na divisão da oitava em doze semi tons iguais. Pensando em uma oitava, a qual possui 12 intervalos, a relação $x^{12} = 2$, onde x representa uma constante empregada nos cálculos das notas, seria verdadeira. Uma vez que após 12 intervalos a frequência da nota dobra. Desta forma é possível determinar qual será o intervalo x que nos fornece a escala proposta por Mersenne em 1635, da seguinte maneira: se $x^{12} = 2$, então $x = 2^{1/12}$, logo $x = 1{,}0594631$, aproximadamente, e este valor é a razão de uma progressão geométrica que possui o Lá com 440 Hz como um dos termos e a escala temperada é assim formada.

A divisão da escala temperada torna-se teoricamente inconcebível sem a invenção dos logaritmos por John Napier (1550 - 1617), pouco depois de 1600, o que corrobora a existência de conjecturas anteriores de mesma natureza do temperamento igual, sob uma ótica de seu significado. Assim sendo, o temperamento igual culminaria num momento da música próximo à invenção dos logaritmos por Napier.

Tal processo induz à necessidade de pensar a música navegando sobre um sistema em que não mais os comprimentos ou frequências associadas às notas relacionem-se como grandezas comensuráveis ou números racionais.

A Tabela 1 apresenta as relações entre as notas musicais, suas frequências e letras correspondentes (as letras são mais usadas nas cifras, para leitura nos instrumentos de cordas como violão, guitarra, cavaquinho e outros). Tomando uma nota Lá como base, também denominada pela letra A, tem-se:

Tabela 1 – Relação entre a nota e sua frequência tomando como base a nota Lá

Nota	Frequência (Hz)	Letra
Lá	220	A
Lá #	$220{,}00 \times 1{,}0594631 = 233{,}08$	A #
Si	$233{,}08 \times 1{,}0594631 = 246{,}94$	B
Dó	$246{,}94 \times 1{,}0594631 = 261{,}62$	C
Dó #	$261{,}62 \times 1{,}0594631 = 277{,}18$	C #
Ré	$277{,}18 \times 1{,}0594631 = 293{,}66$	D
Ré #	$293{,}66 \times 1{,}0594631 = 311{,}12$	D #
Mi	$311{,}12 \times 1{,}0594631 = 329{,}62$	E
Fá	$329{,}62 \times 1{,}0594631 = 349{,}22$	F
Fá #	$349{,}22 \times 1{,}0594631 = 369{,}99$	F #
Sol	$369{,}99 \times 1{,}0594631 = 391{,}99$	G
Sol #	$391{,}99 \times 1{,}0594631 = 415{,}3$	G #
Lá	$415{,}30 \times 1{,}0594631 = 440$	A

2.2 Anatomia do Ouvido Humano e a Audição

Segundo o médico otorrinolaringologista Dr. Décio Gomes de Souza (SOUZA, 2007), em relação ao nosso ouvido, a audição é a capacidade de ouvir os sons ambientes. O som é ao mesmo tempo um fenômeno físico e sensorial. Origina-se da vibração de um objeto e se transmite pela vibração das partículas do meio ambiente.

O ouvido (anatomicamente chamado de orelha) é um órgão sensorial estruturado para captar as ondas de vibração do meio e transformá-las em impulsos nervosos que são transmitidos para o sistema nervoso central produzindo a "sensação auditiva".

Orelha é o nome dado às estruturas que compõem os sistemas auditivo e vestibular periféricos. Localiza-se na região temporal do crânio, estando a maioria de suas porções incrustadas no osso temporal. Divide-se em orelha externa, média e interna (ou labirinto).

Na orelha externa temos:

a) pavilhão auricular,

b) meato acústico externo.

A orelha média é uma cavidade aerada no osso temporal também chamada de caixa do tímpano ou cavidade timpânica situada entre a orelha externa e a interna e revestida por uma mucosa. A membrana timpânica limita a orelha externa da média. Possui 3 ossículos (martelo, bigorna e estribo) suspensos na caixa por ligamentos e 2 músculos (estapediano e tensor do tímpano). Por ela atravessa o nervo corda do tímpano, ramo do nervo facial. Comunica-se com o antro da mastóide pelo ádito do antro, com a rinofaringe pela tuba auditiva e com a orelha interna pelas janelas oval e redonda.

Na orelha interna (labirinto), temos:

a) labirinto ósseo – cápsula ótica, perilinfa, aqueduto coclear, aqueduto vestibular ósseo,

b) labirinto membranoso – endolinfa, aqueduto vestibular membranoso, saco endolinfático.

É considerado como som audível as ondas que sensibilizam o ouvido humano, com frequências variando em torno de 20 a 20.000 Hz, em média. Abaixo da frequência mínima, ele é chamado de infra-som e acima da frequência máxima, denomina-se ultra-som. Ambos os sons, ultra-som e infra-som, são inaudíveis para o ouvido humano.

O som é uma onda mecânica produzida pela compressão e descompressão do ar, é captado por nosso ouvido - o qual é formado pelo ouvido externo, ouvido médio e o ouvido interno – decodificado e interpretado por uma região denominada córtex auditivo.

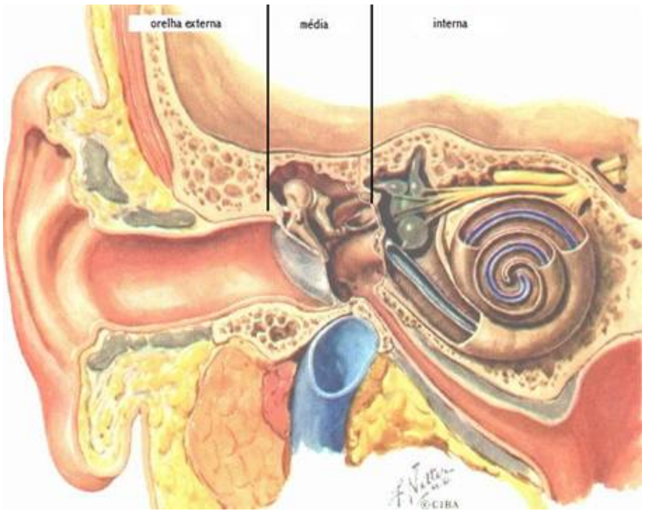

Figura 1 – Ouvido Humano

Fonte:www.dgsotorrinolaringologia.med.br

As ondas sonoras, após atingir a orelha, são encaminhadas para o interior do canal auditivo, local onde está localizada uma fina membrana que é chamada de tímpano. O tímpano é muito delicado e sensível, de modo que pequenas variações de pressão são capazes de colocá-lo em estado de vibração. Essas vibrações são transmitidas a um conjunto de três pequenos ossos denominados de martelo, bigorna e estribo. As vibrações passam primeiro pelo martelo, que ao entrar em vibração aciona a bigorna e este finalmente faz o estribo vibrar. Durante esse processo as vibrações são ampliadas de forma que o ouvido passa a ter capacidade de perceber sons de intensidades muito baixas.

Após serem ampliadas, as vibrações alcançam o ouvido interno, o qual possui forma de um caracol. Dentro dessa pequena estrutura existem pequenos pêlos e um líquido que facilita a propagação do som. Após passar por essa estrutura, as ondas sonoras estimulam células nervosas que enviam, através de um nervo auditivo, os sinais ao cérebro humano. Já no cérebro esses sinais sofrem inúmeras modificações, que no final faz com que o ser humano tenha a percepção do som.

No próximo capítulo, a história alicerça o trabalho, com matemáticos e músicos famosos.

3 Um Pouco de História

Cada vez mais pesquisas na área de Educação Matemática apontam alternativas de ensino para esta disciplina (NUNES; SILVA, 2006). Tais alternativas buscam inovar e adequar a prática docente à realidade atual da sala de aula. As diferentes abordagens de ensino são identificadas como tendências da Educação Matemática. Entre elas destaca-se a história da matemática.

A história é um valioso instrumento para o ensino e aprendizagem da matemática. Segundo Luiz (LUIZ; COL, 2013), a tendência da história da matemática é uma alternativa metodológica importante para entendermos a construção de conceitos e teorias. Ela permite estabelecer conexões com a história, a filosofia, a geografia e várias outras manifestações da cultura. Para os autores, a história da matemática pode ser um elemento orientador no planejamento de atividades, na elaboração das situações-problema e em uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos. Dessa forma, possibilita ao aluno analisar e discutir determinados fatos, raciocínios e procedimentos (LUIZ; COL, 2013).

De acordo com Vianna (VIANNA, 2000), o uso da história da matemática na sala de aula é uma realidade atualmente, pois a partir dela é possível uma associação com as demais tendências. Por exemplo, a história da matemática pode ser uma fonte relevante de situações a serem trabalhadas na resolução de problemas; o estudo da solução dada aos problemas reais que foram enfrentados em épocas diversas pode fornecer contribuições relevantes para o desenvolvimento de técnicas de modelagem e para o aprimoramento de modelos já elaborados; o conhecimento da história da matemática dos diversos povos entrelaça-se inevitavelmente com os trabalhos de etnomatemática.

Seguindo esta ideia, neste trabalho propõe-se uma aproximação entre a matemática e a música através de um viés histórico-cultural.

3.1 Matemática e Música

Segundo Abdounur (ABDOUNUR, 2002), a matemática e a música possuem laços profundos estudados desde a Antiguidade. Os primeiros indícios de algum tipo de relação entre essas duas áreas, aparentemente tão distintas, perderam-se com o passar do tempo, visto que, para quase todos os povos antigos, os registros sobre estes dois assuntos encontram-se em documentos separados.

Há vários milênios, as relações entre a matemática e a música já podiam ser claramente identificadas: como no som produzido pela corda de um arco e flecha, na relação entre a frequência (mais ou menos grave) e as características da corda (tamanho, tensão e espessura), ou ainda, ao assoprar em um osso, como se fosse uma espécie de flauta, as diferenças entre os sons produzidos, dependendo do tamanho e do posicionamento dos buracos no osso.

Segundo Boyer (BOYER, 1996), o primeiro registro, de fato, associando matemática e música, ocorre por volta do século VI a.C. na Grécia Antiga, na Escola Pitagórica. Através de um instrumento de uma corda, os pitagóricos relacionaram intervalos musicais e o conceito de frações. Este instrumento foi denominado de monocórdio e era composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa, possuindo um cavalete móvel colocado sob a corda para dividí-la em duas seções (ABDOUNUR, 2002).

Somando-se dois mil anos ao tempo de Pitágoras, surgem grandes matemáticos e músicos. Entre eles, Marin Mersenne que sugere a criação da escala temperada. Cientistas como Mersenne, Descartes, Fermat e Napier contribuíram significativamente para o entendimento da percepção musical. Nesta época, as relações entre altura e frequência eram estabelecidas em cordas, tubos e sinos, com uma cuidadosa documentação de outros fatores envolvidos, como o material, a espessura e a tensão, no caso de cordas. Foram estudados ainda os fenômenos do batimento e a série harmônica, bem como afinação e temperamento, consonância e dissonância (COHEN, 1984).

Segundo Oliveira (OLIVEIRA; SABBA, 2013), nos dias atuais, qualquer pessoa que estudar a teoria musical, pode notar, de modo simples, a forte relação que existe entre a música e a matemática, pois é necessário ter o conhecimento de frações até mesmo para solfejar (cantar um trecho de música, pronunciando somente as notas). Considerando que matemáticos ilustres contribuíram de modo significativo para o desenvolvimento da teoria musical e a fim de organizar os momentos importantes que revelam as relações entre as duas ciências, na próxima seção são apresentados alguns grandes matemáticos e suas contribuições. Na seção seguinte, músicos brilhantes e suas realizações.

3.2 Grandes Matemáticos e suas Contribuições

3.2.1 Pitágoras de Samos

Pitágoras (570 - 496 a.C.) foi o primeiro a relacionar razões de cordas vibrantes a intervalos musicais. Segundo Campos (CAMPOS, 2009) foi ele, Pitágoras, o “descobridor” do que viria a ser o quarto ramo da matemática, através de suas experiências com o monocórdio (ABDOUNUR, 2002). O monocórdio (Figura 2) é um instrumento de uma só corda colocada sobre dois cavaletes fixos, presos em uma prancha de madeira, e um cavalete móvel que gerava notas de frequências diferentes de acordo com sua posição.

Pitágoras (Figura 3) foi profeta e místico, nascido em Samos, uma das ilhas do

Figura 2 – Monocórdio

Fonte: http://www.ghtc.usp.br/

Dodecaneso, na Grécia. Durante suas peregrinações, ele não só obteve informações sobre matemática e astronomia como também muitas ideias religiosas. Pitágoras foi praticante contemporâneo de Buda (563 a.C. - 483 a.C.), Confúcio (551 a.C. - 479 a.C.) e Lao-Tse (604 a.C. - 510 a.C.), de modo que esse século foi crítico no desenvolvimento da religião bem como da matemática. Quando retornou ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Cretona na costa sudeste, onde hoje é a Itália, então chamada de Magna Grécia. Lá ele fundou uma sociedade secreta que se assemelhava a um culto órfico (órfico são dogmas, mistérios e princípios filosóficos atribuídos a Orfeu), exceto por suas bases matemáticas e filosóficas. Esta sociedade de pensamento foi chamada em sua homenagem de Escola Pitagórica.

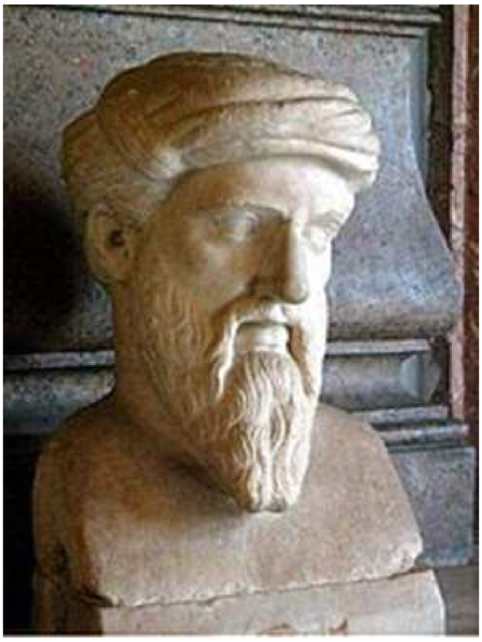

Figura 3 – Pitágoras de Samos

Fonte: http://www.ghtc.usp.br/

Os membros da Escola Pitagórica recebiam uma educação formal, onde constavam quatro disciplinas: Geometria, Aritmética, Astronomia e Música e constituíam as artes liberais cujo conteúdo tornou-se conhecido na Idade Média como o *Quadrivium*, que era considerado a bagagem cultural necessária de uma pessoa bem educada. A palavra matemática (*Mathematike*, em grego) surgiu com Pitágoras, que foi o primeiro a concebê-la como um sistema de pensamento, fulcrado em provas dedutivas. Os pitagóricos elevaram a matemática à categoria das ciências liberais, isto é, tornaram-na independente das necessidades práticas e a transformaram em uma atividade puramente intelectual. Na filosofia pitagórica afirmava-se que "Tudo é número", ou seja, na concepção cosmogônica dos primeiros pitagóricos, a extensão era descontínua, constituída de unidades indivisíveis separadas por um intervalo. No estudo de sons musicais em cordas esticadas (com a mesma tensão relativa), descobriram as regras que relacionavam a altura da nota emitida com o comprimento da corda, concluindo que as relações que produziam sons harmoniosos seguiam a proporção dos números inteiros simples do tipo $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etc. Estas relações podem ser visualizadas na guitarra proposta por Pitágoras na Figura 4. Assim, Pitágoras concluiu que havia uma música que representava as relações numéricas da natureza e que constituía sua harmonia interior.

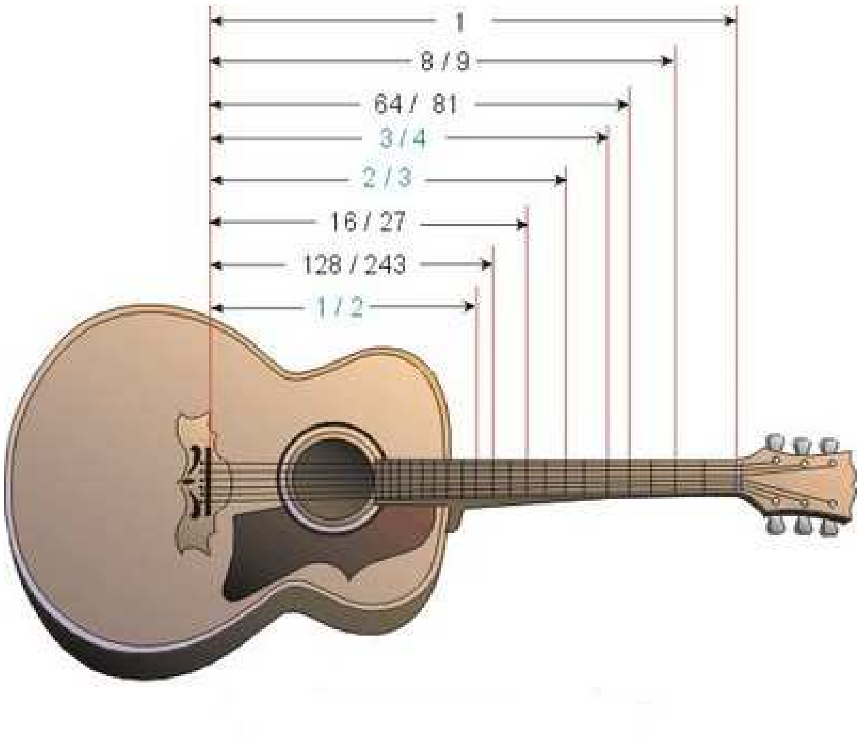

Figura 4 – Representação da Guitarra proposta por Pitágoras.

Fonte: http://www.upscale.utoronto.ca

A Escola Pitagórica era politicamente conservadora e tinha um código de conduta rígido. O vegetarianismo era imposto a seus membros, aparentemente porque o pitagorismo aceitava a doutrina da metempsicose, ou transmigração das almas, com a preocupação consequente de que se podia matar um animal que fosse moradia da alma de um amigo morto. Entre outros tabus da Escola Pitagórica havia o de comer feijões (ou melhor, lentilhas). Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As próprias palavras "filosofia" (ou "amor à sabedoria") e matemática (ou "o que é aprendido") supõe-se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais. Para os pitagóricos a matemática se relacionava mais com o amor à sabedoria do que com as exigências da vida prática; e essa foi sua tendência a partir daí. É difícil separar história e lenda no que se refere ao homem (Pitágoras), pois ele representava tantas coisas ao povo, filósofo, astrônomo, matemático, abominador de feijões, santo, profeta, milagreiro, mágico, charlatão. Que foi uma das figuras mais influentes da história é difícil negar, pois seus seguidores, sejam iludidos, sejam inspirados, espalharam suas crenças por quase todo o mundo grego. Se é impossível atribuir certas descobertas específicas ao próprio Pitágoras, ou mesmo coletivamente aos pitagóricos, é importante entender o tipo de atividade com que, segundo a tradição, a escola estava associada (BOYER, 1996).

3.2.2 Marin Mersenne

Para Abdounur (ABDOUNUR, 2002), já no século XVII, o matemático, filósofo e músico teórico, Marin Mersenne (1588 - 1648) apresenta-se como um dos principais pensadores franceses cuja obra – a maior parte dedicada à ciência, teoria e prática de música – assume papel central nos movimentos científicos e acadêmicos da época. Monge franciscano de um mosteiro em Paris perto da Place Royale, Mersenne desviou seus interesses da Teologia para a Filosofia durante sua maturidade, influenciando fortemente esta última, na primeira metade do século XVII.

Mersenne considerava o monocórdio como suporte fundamental à compreensão de toda ciência musical (CAMPOS, 2009). Sob a ótica do pensador francês, alcançar-se-ia tal ciência explicando todas as maneiras de divisão do monocórdio, o que o levou à constatação de que diferentes frações poderiam corresponder a uma mesma consonância ou dissonância. Ele estabeleceu correspondência significativa com outros pensadores importantes da época como Galileu, Descartes e Fermat e acreditava que a música era passível de análise e explicação racional (PERES, 2006).

Embora o matemático francês não fosse compositor, intérprete ou artista, ele estabeleceu uma teoria baseada na prática, por exemplo, ao defender e fundamentar um temperamento igual na construção de instrumentos e ao explicar racionalmente as afinações. Mersenne revela sua preocupação com o temperamento quando divide a oitava em 12 semitons iguais, obtendo assim o monocórdio harmônico.

A partir de 1630, seus escritos adquirem novas formas e interesses, culminando com

Figura 5 – Marin Mersenne

Fonte: www.scielo.br

a elaboração da *Harmonie Universelle* em 1636, cuja abordagem teórico-prática abarca relatos de distintos experimentos engenhosos, estudos sobre o som e reflexões concernentes à relação matemática/música que o faz muitas vezes ser considerado o pai da acústica. Por exemplo, Mersenne apresenta nessa obra considerações gerais acerca das leis de vibração da corda esticada, determinando a maneira com que a frequência diminui em relação aos parâmetros físicos da corda. Ao tanger cordas de linho e de arame de mais de 30 m esticadas entre dois postes por meio de pesos, Mersenne determinou a frequência de vibração de uma corda a partir de seu comprimento, densidade linear e tensão submetida.

3.2.3 John Napier

Segundo Pfaffenseller (PFAFFENSELLER, 2008), professora de matemática licenciada pela Universidade de Santa Cruz do Sul (UNISC), John Napier (1550 – 1617) foi um matemático, astrólogo e teólogo escocês. Ele é mais conhecido como o decodificador do logaritmo natural (ou neperiano) e por ter popularizado o ponto decimal. Originário de uma família rica, dito o barão de Merchiston, era um defensor da reforma protestante, tendo mesmo prevenido o rei James VI da Escócia contra os interesses do rei católico Felipe II de Espanha. No início do século XVII, inventou um dispositivo chamado Ossos de Napier que são tabelas de multiplicação gravadas em bastão, permitindo multiplicar e dividir de forma automática, o que evitava a memorização da tabuada, e que trouxe grande auxílio ao uso de logaritmos, em execução de operações aritméticas como multiplicações e divisões longas. Idealizou também uma espécie de calculadora com cartões que permitia a realização de multiplicações, que recebeu o nome de Estruturas de Napier.

Figura 6 – John Napier

Fonte: http://learn-math.info/history/photos/Napier3.jpeg

As ideias sobre logaritmos mais próximas do que se tem hoje, foram frutos dos trabalhos de dois grandes matemáticos do período Renascentista, John Napier e Jobst Burgi (1552 – 1632), os quais desenvolveram seus estudos separadamente (DANTE, 2008).

Sem a invenção dos logaritmos, atribuída a John Napier, toda a produção musical do nosso tempo teria sido impossível, pois ela teve sua origem na escala temperada do compositor Johann Sebastian Bach, cuja criação foi baseada no conceito do logaritmo. A escala ocidental, por exemplo, divide o espectro sonoro em sete partes e de maneira logarítmica (JULIANI, 2003). Napier contribuiu para o desenvolvimento de outras áreas. Entre elas a Astronomia, a Navegação e o Comércio. O conceito de logaritmo também permitiu o desenvolvimento da escala logarítmica denominada Richter, que possui pontuação de 0 a 9 graus com o intuito de medir a magnitude de um terremoto provocado pelo movimento das placas tectônicas.

3.2.4 René Descartes

Segundo Strecker (STRECKER, 2014), René Descartes (1596 - 1650), por vezes chamado de o fundador da filosofia moderna e o pai da matemática moderna, é considerado um dos pensadores mais influentes da história humana. Nasceu em La Haye, a cerca de 300 quilômetros de Paris. Seu pai, Joachim Descartes, advogado e juiz, possuía terras e o título de escudeiro, além de ser conselheiro no Parlamento de Rennes, na Bretanha.

Em 1618, Descartes foi para a Holanda e se alistou no exército de Maurício de Nassau. A escola militar era, para ele, uma complementação da sua educação. Nessa época fez amizade com o duque filósofo, doutor e físico Isaac Beeckman, e a ele dedicou o "*Compendium Musicae*", um pequeno tratado sobre música. Descartes manteve correspondência

Figura 7 – René Descartes

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/brdescartes/

com Beeckman para discutir alguns dos pontos do *Compendium*, pedindo-lhe que mantivesse a obra em segredo. Entretanto, uma cópia acabou sendo divulgada, tornando-se conhecida por distintos matemáticos e cientistas, entre os quais Marin Mersenne. Segundo Abdounur (ABDOUNUR, 2002), o legado musical de Descartes não se mostra apenas responsável por grande parte do material exposto por Mersenne em *Questions Harmoniques* (1634), *De la Nature des Sons* (1635), e na *Harmonie Universelle* (1636), mas representa a pedra angular (termo usado para designar o fundamento sobre algo) para distintos trabalhos posteriores.

Em 1637, publicou anonimamente "Discurso sobre o Método para Bem Conduzir a Razão a Buscar a Verdade Através da Ciência". Os três apêndices desta obra foram "A Dióptrica" (um trabalho sobre ótica), "Os Meteoros" (sobre meteorologia), e "A Geometria" (onde introduziu o sistema de coordenadas que ficaria conhecido como "Cartesianas", em sua homenagem). Seu nome e suas teorias se tornaram conhecidos nos círculos ilustrados e sua afirmação "Penso, logo existo" (*Cogito, ergo sum*) tornou-se popular.

Em 1641, surgiu sua obra mais conhecida as "Meditações Sobre a Filosofia Primeira", com os primeiros seis conjuntos de "Objeções e Respostas". Os autores das objeções foram Johan de Kater; Mersene; Thomas Hobbes; Arnauld e Gassendi. A segunda edição das Meditações incluía uma sétima objeção, feita pelo jesuíta Pierre Bourdin.

Em 1643, a filosofia Cartesiana foi condenada pela Universidade de Utrecht (Holanda) e, acusado de ateísmo, Descartes obteve a proteção do Príncipe de Orange. No ano seguinte, lançou "Princípios de Filosofia", um livro em grande parte dedicado à física, o qual ofereceu à princesa Elizabete da Boêmia, com quem mantinha correspondência.

Uma cópia manuscrita do “Tratado das Paixões” foi enviada para a rainha Cristina da Suécia, através do embaixador francês. Frente a insistentes convites, Descartes foi para Estocolmo em 1649, com o objetivo de instruir a rainha de 23 anos em matemática e filosofia. O horário da aula era às cinco horas da manhã. No clima rigoroso, sua saúde deteriorou. Em fevereiro de 1650, ele contraiu pneumonia e, dez dias depois, morreu. Em 1667, depois de sua morte, a Igreja Católica Romana colocou suas obras no Índice de Livros Proibidos.

Segundo Gomes (GOMES, 2009), no que tange a ideia de Série Harmônica, Descartes defendia que nenhuma frequência poderia ser ouvida sem que sua oitava superior, de alguma maneira, também o fosse. Tal resultado corroborou a importância do intervalo de oitava, ainda valorizado por ser produzido pela divisão da corda por 2 (primeira seção possível). Afirmando que a oitava apresentava-se como único intervalo simples produzido por um comprimento divisor da corda inteira. Descartes explicou que nenhuma frequência consonante com uma nota daquele intervalo poderia ser dissonante com outra.

Segundo Abdounur (ABDOUNUR, 2002), a obra de Descartes é uma tentativa de explicar a base da harmonia e da dissonância musicais em termos matemáticos. Nela Descartes apresenta um grande número de diagramas e tabelas matemáticas que ilustram as relações proporcionais envolvidas em vários intervalos musicais.

De acordo com o autor Abdounur (ABDOUNUR, 2002), René Descartes desejava sistematizar todo o conhecimento segundo estruturas análogas àquelas subjacentes ao modelo axiomático da geometria euclidiana com o intuito de conquistar a certeza.

Segundo Boyer (BOYER, 1996), Descartes, Fermat e Mersenne mantinham uma relação de amizade e era Mersenne que, através de correspondências, era o centro de distribuição de informação matemática. Desta forma fica clara a evidência de influências recíprocas inseridas nos estudos desses matemáticos brilhantes.

3.2.5 Pierre de Fermat

Segundo Singh (SINGH, 2014), Pierre de Fermat (1601 - 1665) nasceu na cidade de Beaumont-de-Lomagne, perto de Montauban, no sudoeste da França. O seu pai, Dominique de Fermat, era um rico mercador de peles que lhe proporcionou uma educação privilegiada, inicialmente no mosteiro franciscano de Grandselve e depois na Universidade de Toulouse. Entrou para o serviço público onde foi, em 1631, nomeado conselheiro na Câmara de Requerimentos. Em 1652 foi promovido a Juiz Supremo, na Corte Criminal Soberana do Parlamento de Toulouse. Neste mesmo ano Fermat adoeceu e chegou a afirmar-se que tinha morrido.

O interesse de Fermat pela matemática deu-se, possivelmente, com a leitura de uma tradução latina, por Claude Gaspar Bachet de Méziriac, de Aritmética de Diofanto de Alexandria, um texto sobrevivente da famosa Biblioteca de Alexandria, queimada por cristãos no ano 646 d.C., e que compilava cerca de dois mil anos de conhecimentos matemáticos. Segundo Mazza (MAZZA, 2014), Fermat teve sua influência na matemática limitada pela falta de interesse na publicação das suas descobertas, conhecidas principalmente pelas cartas a amigos e anotações na sua cópia do texto de Diofanto. As suas cartas sugerem um homem envergonhado e reservado, cortês e afável, mas um pouco distante. Estas cartas passaram a ser publicadas a partir de 1636, por intermédio de Mersenne, em Paris, que procurou Fermat após ouvir falar dele. Nas suas cartas, Fermat descrevia as suas ideias e descobertas, que eram transmitidas por Mersenne a outros matemáticos da Europa. Mersenne parece ter sido o seu principal contato regular com os matemáticos da época.

De acordo com Bruno (BRUNO, 2014), Fermat gostava de trocar e resolver desafios. Por exemplo, Mersenne uma vez escreveu-lhe perguntando se o número 100.895.598.169 era primo ou não. Tais questões geralmente levavam anos a serem resolvidas, mas Fermat replicou sem hesitação que o número era produto dos números 112.303 e 898.423, e que cada um desses fatores era primo. O infeliz Descartes travou argumentos, com ele, diversas vezes. Para Mazza (MAZZA, 2014), como um estrangeiro, Fermat não conhecia o monumental egoísmo e a disposição melindrosa de Descartes, e com calma e cortesia o demoliu em todas as ocasiões.

Figura 8 – Pierre de Fermat

Fonte: http://www.dec.ufcg.edu.br

Fermat deu início ao desenvolvimento da Geometria Analítica no ano de 1629 e descreveu as suas ideias em um trabalho não publicado intitulado “Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos", que circulou apenas na forma de um manuscrito. Neste trabalho, Fermat introduziu a ideia de eixos perpendiculares e descobriu as equações gerais da reta, circunferência e equações mais simples para parábolas, elipses e hipérboles. Demonstrou que toda equação polinomial de 1° e 2° graus podem ser reduzidas a um desses tipos. Nada disto está no ensaio "Geometria" de 1637 de Descartes, apesar deste ter tido acesso ao trabalho de Fermat vários meses antes de publicar a sua obra (MAZZA, 2014).

Considerado o "Príncipe dos Amadores", Pierre de Fermat nunca teve formalmente a matemática como a principal atividade de sua vida. Jurista e magistrado por profissão, dedicava à Matemática apenas as suas horas de lazer e, mesmo assim, foi considerado por Blaise Pascal o maior matemático de seu tempo.

Contudo, o seu grande gênio matemático perpassou várias gerações, fazendo com que várias mentes se debruçassem com respeito sob o seu legado, composto por contribuições nas mais diversas áreas das matemáticas, sendo as principais: o Cálculo Geométrico e Infinitesimal, a Teoria dos Números e a Teoria da Probabilidade (MAZZA, 2014).

A relação de Fermat com a música não é descrita de uma forma explícita, entretanto sua contribuição com a Teoria dos Números, mais especificamente com o estudo sobre números primos, serviram de base para o desenvolvimento de algumas ideias do matemático Leonard Euler (1707 - 1783) que aplicou inúmeros conceitos e teorias matemáticas na música.

3.2.6 Leonard Euler

Leonard Euler (1707 - 1783), nasceu em Basiléia, na Suíça. Seu pai era um ministro religioso que esperava que seu filho seguisse o mesmo caminho. Segundo Boyer (BOYER, 1996), o jovem Euler recebeu instrução ampla, pois ao estudo da matemática somou teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais.

Euler (Figura 9) cedo conquistou reputação internacional; já antes de sair de Basiléia tinha recebido menção honrosa da Academia de Paris por um ensaio sobre mastros de navios. Mais tarde ele apresentou ensaios em concursos organizados pela Academia e doze vezes ele ganhou o cobiçado prêmio bienal.

De 1727 a 1783, Euler esteve ocupado aumentando seu conhecimento em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, dos mais elementares aos mais avançados. Além disso, em quase tudo, Euler escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum outro indivíduo foi tão grandemente responsável pela forma da matemática de nível universitário de hoje quanto Euler, o construtor de notação mais bem sucedido em todos os tempos.

Devido a Euler, a letra e, sugerida talvez por ser a primeira letra da palavra exponencial, tornou-se padrão. O símbolo i para $\sqrt{-1}$ é outra notação usada primeiro

Figura 9 – Leonard Euler

Fonte: www-history.mcs.st-and.ac.uk

por Euler.

No tocante a teoria musical Euler procurava inventar acordes musicais que satisfaziam o cálculo. Para Euler, acústica era um de seus assuntos preferidos. Suas notas mostram que já, com 19 anos, ele planejava escrever um tratado sobre todos os aspectos da música, incluindo forma e composição, assim como acústica e harmonia.

De acordo com Abdounur (ABDOUNUR, 2002), diante da emergência da tonalidade e da necessidade de um sistema numérico subjacente à música sustentado por números irracionais, Euler afirma que nós devemos distinguir cuidadosamente as razões que nossos ouvidos realmente percebem daquelas referentes aos sons expressos como números.

O matemático suíço elucidou tal assertiva quando afirmou que no temperamento igual, a escala não possuía consonâncias exatamente puras, uma vez que embora o ouvido escutasse o intervalo de quinta como razão de 3 para 2, seu valor matemático real igualmente temperado soava no ar como $2^{\frac{7}{12}}$. Segundo Euler, o ouvido tendia a simplificar a razão percebida, especialmente quando tons dissonantes seguiam-se após uma progressão harmônica. Por exemplo, a sequência 36-45-54-64 era indistinguível de 36-45-54-63 ou mesmo de 4-5-6-7.

Assim sendo, é inegável a contribuição de Euler na relação da matemática com a música e sua importância está atribuída aos estudos feitos por este grande matemático.

3.2.7 Jean Baptiste Joseph Fourier

Segundo Eves (EVES, 2008), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), nasceu em Auxerre, França, cidade localizada às margens do rio Yonne. Aos oito anos, já órfão do pai que era alfaiate, foi recomendado pelo bispo da cidade para ser admitido na escola militar, que era dirigida pelos beneditinos. Aos doze anos começou a mostrar talento literário e com isso seus mestres o incentivaram a redigir sermões para sacerdotes de várias cidades, chegando alguns desses sermões a se destacar em Paris.

Figura 10 – Jean Baptiste Joseph Fourier

Fonte: images.eldiario.es

Em 1789 aderiu com entusiasmo à causa da Revolução Francesa, renunciando os seus votos no mosteiro beneditino de Saint-Benoit-Sur-Loire. Teve como professores Lagrange e Laplace e em 1795 tornou-se professor na recém-criada Écòle Normale. Com a fundação da Écòle Polytechnique foi convidado por Gaspard Monge para lecionar na cadeira de fortificações em 1796 e, depois, na de análise matemática. Chegou a ser conferencista da Écòle e mais tarde desenvolveu trabalhos matemáticos como sua teoria para calcular raízes irracionais das equações algébricas, o qual havia sido iniciado por Newton.

Em 1822, Fourier (Figura 10) lança sua obra mais notável, *"Théorie Analytique de la Chaleur"* (Teoria Analítica do Calor) cujas investigações começaram em 1807, onde demonstrou que a condução do calor em corpos sólidos poderia ser expressa por séries matemáticas infinitas. Além desta obra ele escreve inúmeras memórias científicas que foram publicadas em atas da Académie des Sciences e em revistas especializadas. Neste livro, ele dedica toda uma seção à solução do "desenvolvimento de uma função qualquer, em série de senos e co-senos de arcos múltiplos". Generaliza o procedimento, partindo de um caso específico para empregá-lo em qualquer caso. Nesta época, Fourier passa a utilizar indiferentemente os símbolos de integração e de somatório infinito, o que conduz às chamadas séries de Fourier. Estas séries são oriundas dos diversos problemas de valor de contorno com expansões em termos de funções trigonométricas e aplicam-se a grande número de problemas físicos e matemáticos. A análise de Fourier é muito importante na matemática moderna, e suas ideias são a base para descrever funções de ondas em sistemas complexos. É uma matéria importantíssima para comunicação de dados e telecomunicações, inclusive servindo de base para operações em mecânica quântica.

Foi de Fourier o mérito de ter criado esse novo instrumento matemático, de extraordinária engenhosidade, com o qual as funções periódicas descontínuas pudessem ser representadas por meio de funções contínuas. Porém este assunto já havia sido estudado antes por Euler, D'Alembert, Daniel Bernoulli e Lagrange.

Segundo Abdounur (ABDOUNUR, 2002), além da aplicação à solução de equações diferenciais, utiliza-se a expansão por tais séries em distintas situações, podendo-se enunciar este princípio num âmbito mais amplo da seguinte maneira: Qualquer forma periódica de vibração pode sempre ser obtida pela soma de vibrações simples com frequências multiplicadas por 1(fundamental), 2, 3, 4, ... vezes a frequência do movimento dado.

De acordo com Abdounur (ABDOUNUR, 2002), do ponto de vista acústico musical, o princípio acima pode ser reenunciado como: Qualquer movimento vibratório de ar na entrada do ouvido correspondente a um tom musical pode ser sempre, e de maneira única, exibido como uma soma de um número infinito de movimentos vibratórios simples, correspondendo aos sons parciais desse tom musical.

Segundo Abdounur (ABDOUNUR, 2002),para explicar de maneira mais satisfatória diversas dúvidas acústico musicais trabalhadas e interpretadas outrora à luz de fundamentações teóricas mais fracas, o Princípio de Fourier reuniu distintos conceitos matemático musicais, organizando uma estrutura capaz de enxergar diferentes fenômenos com lentes mais fortes. Dentre os fenômenos e dúvidas referidos, encontram-se os harmônicos de um som, o porquê da relação entre razão de pequenos números inteiros e consonâncias, etc. Sob essa nova ótica, as primeiras componentes, as mais audíveis, na série harmônica correspondem às frequências associadas aos primeiros termos da Série de Fourier que determinam portanto razões de pequenos números inteiros relacionados às consonâncias pitagóricas, respondendo ao problema lançado por aquela escola há 2500 anos.

Nesse contexto, ainda de acordo com Abdounur (ABDOUNUR, 2002), tanto uma corda como colunas de ar em instrumentos de sopro possuem a característica de vibrar não apenas como um todo, mas ainda simultaneamente como duas metades, três terços, quatro quartos, etc. Do ponto de vista matemático, observa-se que a força de cada harmônico contribuirá para a construção da forma da vibração periódica que, por sua vez, relaciona-se com o timbre do som. Portanto, a distribuição de amplitude dos harmônicos vai caracterizar a fonte sonora (instrumentos, vozes, etc). Por exemplo, explica-se agora o brilho da sonoridade do oboé e do violino pela riqueza em harmônicos superiores do som destes instrumentos, coeficientes significativos nos termos elevados das Séries de Fourier das funções representativas destes sons. Já o timbre da flauta doce caracteriza-se pela predominância do som fundamental possuindo uma forma de onda quase senoidal.

Nos instrumentos musicais, exploram-se e utilizam-se os harmônicos de diversas maneiras. Por exemplo, os instrumentos de sopro obtêm harmônicos de um determinado som soprando-o com maior intensidade, enquanto que os executantes de instrumentos de corda podem fazer uma única corda vibrar em seções correspondentes a determinados harmônicos, tocando levemente em pontos de máximo que inibem harmônicos inferiores.

Segundo Abdounur (ABDOUNUR, 2002), o fenômeno da decomposição de uma nota em série de Fourier mostra-se responsável ainda pelo desvendar de vários mistérios da harmonia musical observados, estabelecidos e sistematizados e muitos casos, a partir da prática, como regras desprovidas de justificativas convincentes. Por exemplo, com base nas regras de Harmonia Tradicional para polifonia a quatro vozes, aconselham-se distâncias menores que a oitava entre quaisquer duas vozes consecutivas, a menos do tenor e baixo, que podem diferir por intervalos superiores. À luz do Teorema de Fourier, tal imposição mostra-se facilmente defensável pelo simples fato de que, harmonizando-se vozes desta forma, faz-se uma repetição aproximada das distâncias entre as componentes da decomposição de uma nota em senóides, onde se verifica que os harmônicos tornam-se mais próximos à medida que percorremos os termos da série.

3.3 Músicos Famosos

Para uma melhor compreensão da influência da matemática na música, faz-se necessário, neste ponto do trabalho, um estudo sobre alguns músicos famosos e suas relações com a matemática. Portanto, a seguir, são apresentadas informações relevantes sobre quatro músicos famosos: Wolfgang Amadeus Mozart, Johann Sebastian Bach, Johann Baptist Strauss e Ludwig Van Beethoven.

3.3.1 Wolfgang Amadeus Mozart

Segundo Gay (GAY, 1999), Wolfgang Amadeus Mozart (1756 - 1791) nasceu na cidade austríaca de Salzburgo. Desde criança apresentou grande talento musical. Seu pai, Leopold Mozart, era compositor e estimulou os dons musicais do filho. Com este apoio paterno, começou a escrever duetos e pequenas composições para piano, ainda na infância.

Aos cinco anos, Mozart (Figura 11) compôs a sua primeira peça musical, fazendo uso do conceito matemático de simetria, representado na forma da repetição. Com o avançar da idade, Mozart foi usando estes artifícios de forma cada vez mais elaborada, evidenciando a estreita relação entre as suas composições e as regras matemáticas (RIBEIRO, 2008). Segundo Souza (SOUZA, 2012b), Mozart é um dos compositores do século XVIII que estabeleceram uma mudança na relação entre a matemática e a música, ao utilizar conceitos matemáticos intencionalmente e não mais como fundamento teórico musical.

Figura 11 – Wolfgang Amadeus Mozart

Fonte: www.culturaclassica.com.br

Segundo Carlota Simões, professora de matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra (RIBEIRO, 2008), ao passo que em um vitral é fácil, quando se olha para ele, identificar as simetrias, em uma música isso não é tão simples, pois trata-se de uma simetria no tempo. Para identificar a simetria na música devemos ter a memória do que ouvimos, ou seja, reconhecer que a mesma melodia é tocada do fim para o princípio, ou de baixo para cima. Entretanto, nas pautas musicais (conjunto de cinco linhas paralelas e quatro espaços que usa-se para escrever as notas musicais) essas simetrias são mais fáceis de serem identificadas (Figura 12).

Segundo Ribeiro (RIBEIRO, 2008), além da simetria, é possível identificar a interligação entre a obra do compositor e os números. Na ópera de Mozart "A Flauta Mágica" (1791), Figura 13, é possível identificar a presença dos números chamados de números queridos à Maçonaria. Conhecido maçom, Mozart fez uso dos números para dar vida à sua composição. O número 3, por exemplo, considerado o número da perfeição, sinônimo de masculino e representando também os três lados do triângulo maçônico, é

Figura 12 – Pauta musical com notas simétricas

Fonte: http://www.academiamusical.com.pt/curso-teoria-musical/a-pauta-e-as-notas-musicais/

usado através dos três bemóis na clave inicial e final (Mi b Maior). Também o número 12, que se identifica com o meio-dia, a altura em que o sol ilumina a Terra e produz menos sombras, é também usado na pauta musical quando se reproduzem as 12 badaladas no último adeus entre Pamina e Tamino (personagens centrais da ópera Flauta Mágica).

Figura 13 – Partitura da ópera Flauta Mágica

Fonte: http://teophilo.info/analises/mozart.htm#axzz3bX3onkgr/

Segundo Carlota Simões (RIBEIRO, 2008), a "Flauta Mágica", por ser uma ópera maçônica, tem muitos números simbólicos e eles aparecem discretamente. Ela afirma ainda que: "Há feitos que só se conseguem ver na pauta se estivermos a olhar com muita atenção. E, portanto, a Flauta Mágica tem esses pequenos pormenores que têm a ver com o fato de ser uma ópera cheia de símbolos".

Na Figura 14 a representação de uma das partituras de Mozart.

Segundo Souza (SOUZA; ABDOUNUR, 2011), as obras musicais de Mozart são consideradas de um brilho incomum pela maioria das pessoas. Sua música tem sido reverenciada por várias gerações. Ao total, Mozart compôs 19 sonatas, a primeira delas aos 18 anos e a maioria das outras nos quatro anos seguintes. A estrutura de composição de uma sonata do período clássico constava de, geralmente, três movimentos, a maioria das vezes o primeiro rápido, o segundo lento e o terceiro novamente rápido. Cada movimento

Figura 14 – Partitura-Mozart

Fonte: http://www.forademim.com.br/site/2012/mozart-e-a-matematica-por-reynaldo-bosquet//

consistia de três seções principais:

- Exposição, na qual o tema principal é apresentado,
- Desenvolvimento, no qual o tema é desenvolvido,
- Recapitulação, onde o tema principal é reapresentado e reafirmado.

Estas três seções eram incorporadas em duas partes: 1^a Parte - Exposição e 2^a Parte - Desenvolvimento e Recapitulação.

Segundo Souza (SOUZA; ABDOUNUR, 2011), a razão áurea, vinda da equação

$$\frac{x}{l} = \frac{l-x}{x},$$

para x é a medida de um segmento e l é uma parte de x pode ser reescrita como,

$$x^2 + lx - l^2 = 0,$$

e resolvida em relação a variável x, tem como resultado

$$x = \frac{l(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Desconsiderando-se o valor negativo,

$$\frac{x}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0,618,$$

parece ter sido usado nas composições de Mozart, mas não é possível afirmar com certeza se houve, de fato, intenção de usá-la. Mas independente disso, a poesia da música pode ser sentida nas prazerosas proporções que este brilhante compositor utilizou para compô-las (SOUZA; ABDOUNUR, 2011).

Durante a sua vida, Mozart escreveu cerca de 600 obras musicais.

3.3.2 Johann Sebastian Bach

Segundo Rodrigues (RODRIGUES, 2014), Johann Sebastian Bach (1685 - 1750) nasceu em Eisenach, uma pequena cidade da Turíngia, no centro da Alemanha. Seu pai, Johann Ambrósius Bach, era um músico da cidade e ensinou Bach (Figura 15) a tocar violino e viola e a escrever as notas musicais, além de criá-lo na fé protestante.

Figura 15 – Johann Sebastian Bach

Fonte: http://www.komponisten.at/

Segundo a professora Embacher(JOHANN. . . , 2012), Johann Sebastian Bach é um dos maiores nomes da música de todos os tempos. “Bach (riacho, em alemão) deveria se chamar *Ozean* (oceano) e não Bach!”. A frase é de ninguém menos que Ludwig Van Beethoven e, se um músico da grandeza de Beethoven assim se pronuncia sobre ele, bem se pode imaginar a dimensão que se pode atribuir ao compositor barroco Johann Sebastian Bach.

Bach foi organista e era um notável compositor alemão do período barroco. Mestre na arte da fuga, do contraponto e do coral, ele é um dos mais prolíficos compositores da história da música ocidental. Bach é tido como o maior compositor do Barroco e, por muitos, o maior compositor da história da música, ainda que pouco reconhecido na época em que viveu. Muitas de suas obras refletem grande profundidade intelectual, uma expressão emocional profunda e, sobretudo, um domínio técnico. Na época de Bach muitos músicos já experimentavam novos acordes, mas ele foi o primeiro a sistematizar, aplicar a estes acordes belíssimas composições, seja no piano, no orgão ou no cravo (JOHANN. . . , 2015).

Bach usou muitas vezes a fuga (Figura 16), em suas composições musicais. Na teoria musical, uma fuga é um estilo de composição contrapontista, polifônica e imitativa, de um tema principal, com sua origem na música barroca. Na composição musical o tema é repetido por outras vozes que entram sucessivamente e continuam de maneira entrelaçada. Começa com um tema, declarado por uma das vozes isoladamente. Uma segunda voz entra, então, cantando o mesmo tema mas noutra tonalidade, enquanto a primeira voz continua desenvolvendo com um acompanhamento contrapontista. As vozes restantes entram, uma a uma, cada uma iniciando com o mesmo tema. O restante da fuga desenvolve o material posterior utilizando todas as vozes e, usualmente, múltiplas declarações do tema.

É possivel escutar as músicas de Bach (ou outras) em sítios da internet. Dentre eles, www.kboing.com.br, som13.com.br e www.vagalume.com.br.

Figura 16 – Fuga de Bach

Fonte: http://baroquenoise.tumblr.com/

Bach, bem como Mozart, utilizou a matemática, particularmente a numerologia, em suas composições musicais. A necessidade do temperamento da música trilhou uma trajetória relativamente extensa, emergindo na época de Bach que escreve seu Cravo bem temperado, contendo 24 prelúdios e fugas executáveis nas 24 tonalidades existentes. Bach percebeu, assim como Pitágoras, que separar as notas musicas de determinadas formas promovem sons mais ou menos agradáveis.

3.3.3 Johann Baptist Strauss

Segundo o sítio da sociedade britânica, *The Johann Strauss Society of Great Britain* (BRITAIN, 2015), Johan Strauss dito I (nascido Johann Baptist Strauss) (1804 - 1849) nasceu em Viena, na Áustria e foi considerado um compositor romântico. Neto de um judeu convertido ao catolicismo, a sua mãe morreu de febre quando ele tinha sete anos e, quando tinha doze anos, morreu-lhe o pai, afogado no rio Danúbio. Strauss ficou aos cuidados de sua madrasta que o colocou para ser aprendiz de encadernador.

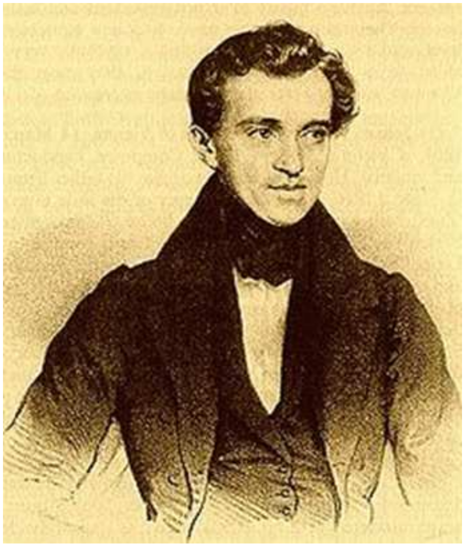

Figura 17 – Johann Baptist Strauss

Fonte: www.celebritynetworth.com

Strauss morreu em Viena em 1849 de escarlatina que contraiu de um de seus filhos ilegítimos. Foi enterrado no cemitério ao lado do seu amigo Döblinger Josef Lanner. Em 1904, os seus restos mortais foram transferidos para o túmulo no Cemitério Central de Viena. Strauss foi denominado o Pai da Valsa.

A relação de Strauss com a matemática não é estabelecida neste trabalho, mas sua importância no âmbito musical é inegável e suas grandes valsas como o Danúbio Azul fazem parte do patrimônio da humanidade. Daí sua escolha para compôr este capítulo e também pela escolha de uma de suas músicas para a construção do xilofone de garrafas, atividade proposta neste trabalho.

3.3.4 Ludwig Van Beethoven

Segundo Santos (SANTOS, 2007), Ludwig Van Beethoven (1770 - 1827) nasceu na cidade alemã de Bonn. Filho de um músico inculto, melhorou sua posição social e formação musical quando mudou-se para Viena, em 1792. Ele não era superdotado. Sua evolução foi gradativa. Ali na capital da Áustria, ele obteve grandes sucessos como pianista e compositor, generosamente apoiado por membros da aristocracia austríaca, que em 1809 deram-lhe pensão vitalícia.

Figura 18 – Ludwig Van Beethoven

Fonte: http://musicaclassica.folha.com.br/

De acordo com Santos (SANTOS, 2007), aos 28 anos, já consagrado compositor e intérprete, começou a sentir problemas de audição, diagnosticados mais tarde como uma doença degenerativa. Nesse período, pensou em cometer suicídio. Passada essa fase depressiva, afirmou: “Foi a música quem me salvou”. A surdez não o impediu de produzir suas obras. Sensível, nunca perdeu o seu amor e entusiasmo pela vida e pela música. Ele impressionou seus contemporâneos por dominar a arte da música e pelas manifestações duras de independência pessoal.

Segundo Santos (SANTOS, 2007), uma das grandes decepções de Beethoven foi o fato de Napoleão Bonaparte ter se auto coroado imperador, tomando-a das mãos do Papa Pio VII em Notre Dame. Como era um entusiasta dos ideais da Revolução Francesa, dedicou sua Sinfonia n°3 a Napoleão, de quem era grande admirador. Diante deste fato, sentindo-se traído e decepcionado, riscou a dedicatória da partitura. Disse ainda: “Se soubesse tanto de estratégia como de música, causaria sérios dissabores a Napoleão”.

De acordo com Santos (SANTOS, 2007), a primeira fase de sua produção artística traduz certo frescor juvenil, estilo galante, interrompidas, às vezes, por alguns acessos de melancolia. A segunda fase é classificada como “maturidade” e a terceira como “Últimas obras”. Essas são de grande profundidade artística.

Na Sinfonia n°6, Beethoven retrata a vida campestre, fazendo com que a orquestra reproduza os sons de pássaros, relâmpago, chuva e trovões. Esses recursos seriam adotados, mais tarde, pelos precursores do Romantismo, no século XIX, como uma forma de exaltar o amor à pátria (LUDWIG..., 2015).

Na Sinfonia n°9 (Coral), tema do filme "Laranja Mecânica", do cineastra Stanley Kubrick, composta quando já estava totalmente surdo, Beethoven musicou o poema "Ode à Alegria", do poeta alemão Johann Schiller, que impressiona por ser um verdadeiro hino de otimismo à vida.

Conforme Santos (SANTOS, 2007), Beethoven compôs cerca de 200 obras, que se caracterizam por serem românticas, subjetivas, abrindo espaço para os extremos: a tragicidade patética e o júbilo triunfal; o idílio e o humorismo burlesco; o idealismo eloquente e a mística profunda, elaboradas cuidadosamente e muito disciplinadas aos moldes do classicismo vienense.

Em 26 de março de 1827, falece mais um dos grandes gênios da música universal. Viena, diferentemente do que fizera a Mozart, reconhece a honra a Beethoven. Seu cortejo contou com mais de 200 mil pessoas que foram lhe prestar as últimas e devidas homenagens (LUDWIG..., 2015).

Mas como Beethoven, um dos maiores gênios da humanidade, pôde compor as músicas mais belas de todos os tempos sendo surdo? A resposta está na matemática! Beethoven uma vez disse: "Eu sempre tenho uma imagem na mente quando componho, e sigo suas linhas". A terrível privação para um músico de não ouvir mais os sons da vida e do mundo que o rodeava não o impediu de traduzir em imagens melódicas e figuras musicais tanto as delicadas sensações como as poderosas interpretações encontradas em sua obra. E sua concentração era muito mais facial do que em uma pessoa ouvinte normal.

Segundo o professor Bento (BENTO, 2009), titular da disciplina de Otorrinolaringologia da faculdade de Medicina da USP, podemos deduzir de modo paradoxal a inata genialidade de Beethoven para a música pode ter sido exacerbada pela surdez favorecendo uma purificação da melodia encontrada em suas sinfonias e não ter sido condicionada pela moda da época e pelo rígido sistema e maneirismo de seu tempo. Somente a Sinfonia n°1 é anterior a 1796, que foi a época de evolução de sua surdez, portanto quase toda sua produção musical foi concebida durante seu período de surdez importante. Sua perda auditiva fez com que ele abandonasse sua carreira de concertista e diretor musical, mas não influiu em sua obra sendo inclusive sua maior criação, a sinfonia n°9 criada entre 1822 e 1824, já na sua fase completamente surda.

Em conclusão, tudo leva a crer que graças a esta inevitável solidão, Beethoven alcançou gradualmente uma linguagem musical cheia de emoções, abstraída de seu isolamento que provavelmente nunca teria conseguido em condições físicas normais. Sua surdez acabou sendo uma das principais colaboradoras de sua genial obra (BENTO, 2009). Sem ela teria sido Beethoven o grande compositor de todas as épocas?

Finalmente, a relação da matemática com a música aparecem nas sinfonias n°5 e n°9 de Beethoven, envolvendo a razão áurea. Nelas o clímax é encontrado a aproximadamente 61,8 % de sua execução.

No próximo capítulo abordam-se conceitos matemáticos importantes, as funções exponencial e logarítmica e a progressão geométrica, a fim de estabelecer uma relação com a teoria musical.

4 Conteúdos Matemáticos Abordados

O entendimento e a percepção de algumas noções e certas proposições matemáticas podem ser reformuladas ou interpretadas de diferentes formas ou em diferentes termos. Como exemplo, o caso em que uma progressão geométrica é definida como uma função do tipo exponencial $f(x) = a \cdot b^x$, cujo domínio é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Existem muitos conteúdos que possuem conexões entre si, porém são tratados de forma isolada. É interessante o professor estabelecer estas relações, fazendo com que o aluno compreenda com mais clareza alguns conceitos e perceba a harmonia que existe dentro da própria Matemática.

Na tentativa de relacionar a Matemática e a Música, neste capítulo são revisados conceitos matemáticos acerca dos conteúdos de funções exponencial e logarítmica, e da sequência numérica chamada Progressão Geométrica (P.G.). Tais conceitos são fundamentais para a realização das atividades propostas neste trabalho.

Antes de abordar as funções acima citadas, é relevante estabelecer o conceito de função. De acordo Lima (LIMA et al., 2006), dados dois conjuntos X, Y, uma "função" $f : X \to Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y contra-domínio da função. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$.

4.1 Função Exponencial

Segundo Xavier (XAVIER; BARRETO, 2009), as funções exponenciais, ditas transcendentais, descrevem situações do nosso cotidiano como, por exemplo, o crescimento populacional, os rendimentos obtidos em uma aplicação a juros compostos e a formação de uma escala musical.

Para um bom entendimento do conceito de função exponencial, faz-se necessário rever algumas definições e propriedades referentes a operação de potenciação.

Definição 4.1.1. Potência com expoente natural. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, com $m \geqslant 2$, denomina-se potência de base a e expoente m o número a^m, que corresponde ao produto de m fatores iguais a a.

$$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \quad (\text{com } m \text{ fatores } a).$$

Caso particular: $a^0 = 1$, com $a \neq 0$.

Definição 4.1.2. Potência com expoente inteiro. Sejam $a \in \mathbb{R}^*$ e $m \in \mathbb{N}$. Tem-se,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

ou seja, a potência a^{-m}, com $a \neq 0$, é o inverso de a^m.

Definição 4.1.3. Potência de expoente racional. Pode-se escrever potências de base positiva e expoente fracionário por meio de radicais, e vice versa. De uma maneira geral, sejam $a \in \mathbb{R}^*$ e o número racional $\dfrac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$, tem-se

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

4.1.1 Propriedades da Potenciação

Para $a \in \mathbb{R}$, m e $n \in \mathbb{Z}$, tem-se as propriedades:

1) Produto de potências de mesma base:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Na multiplicação de duas potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes.

2) Quociente de potências de mesma base:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Na divisão de duas potências de mesma base, conserva-se a base e subtraem-se os expoentes.

3) Produto de dois ou mais fatores elevados a um mesmo expoente:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m.$$

4) Quociente elevada a um mesmo expoente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

5) Potência elevada a um expoente:

$$(a^n)^m = a^{(n \cdot m)}.$$

Definição 4.1.4. Função Exponencial

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = b \cdot a^x$ ou $y = b \cdot a^x$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$, é denominada função exponencial. O domínio e a imagem de uma função exponencial são $D = \mathbb{R}$ e $Im = \mathbb{R}_+^*$ se $b > 0$ ou $Im = \mathbb{R}_-^*$ se $b < 0$. O caso particular onde $b = 1$ é estabelecido, simplifica o estudo da função exponencial.

Uma função é crescente se, ao aumentarmos a variável independente x, o valor da variável dependente y também aumenta, ou seja, se $x_2 > x_1$ então $f(x_2) > f(x_1)$; ou se, ao diminuirmos a variável independente x, o valor da variável dependente y também diminui, ou seja, se $x_2 < x_1$ então $f(x_2) < f(x_1)$.

Uma função é decrescente se, ao aumentarmos a variável independente x, o valor da variável dependente y diminui, ou seja, se $x_2 > x_1$ então $f(x_2) < f(x_1)$; ou se, ao diminuirmos a variável independente x, o valor da variável dependente y aumenta, ou seja, se $x_2 < x_1$ então $f(x_2) > f(x_1)$.

A função $f(x) = 2^{\frac{x}{12}}$ é um exemplo de uma função exponencial crescente que aparece na teoria musical e é usada para formação da escala temperada.

O gráfico de uma função exponencial crescente está representado na Figura 19.

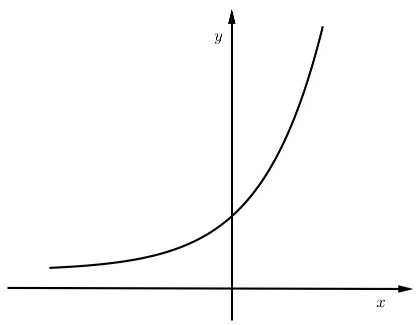

Figura 19 – Função exponencial crescente

O gráfico de uma função exponencial decrescente está representado na Figura 20.

4.1.2 Caracterização da Função Exponencial

Segundo Lima (LIMA et al., 2006), a caracterização da função exponencial é descrita do seguinte modo:

Teorema 4.1.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). Para caracterizar a função exponencial, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

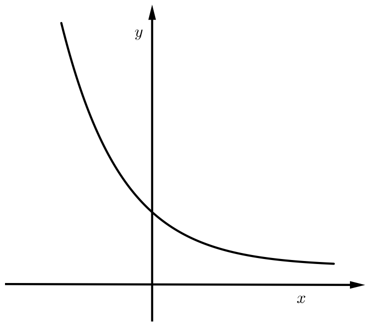

Figura 20 – Função exponencial decrescente

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

(4) $f(x) = b \cdot a^x$, com $b > 0$.

Teorema 4.1.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{[g(x+h) - g(x)]}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = \dfrac{g(1)}{g(0)}$, tem-se $g(x) = b \cdot a^x$, com $b > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para Dante (DANTE, 2008), a função exponencial e a progressão geométrica estão muito próximas uma da outra e podem fazer parte da resolução de um mesmo problema. Seja na matemática financeira, no cálculo de juros compostos, ou na formação da escala musical temperada.

A fórmula utilizada para o cálculo de juros compostos, por exemplo,

$$M(n) = C \cdot (1 + r)^n,$$

com $M(n)$ o montante, C o capital inicial aplicado, r a taxa e n o tempo de aplicação, envolve uma função exponencial e a sequência formada pelos montantes $M(1), M(2), M(3), \ldots$ é uma progressão geométrica de razão $(1 + r)$.

Outro exemplo está na formação da escala temperada, onde a partir de uma frequência inicial que gera uma nota musical, pode se obter as demais através de cálculos que utilizam a fórmula do termo geral da progressão geométrica, definida na seção 4.3.

4.2 Função Logarítmica

Segundo Xavier (XAVIER; BARRETO, 2009), a ciência, nas suas várias ramificações, foi beneficiada pelo advento do logaritmo. Ao estudarmos ondas sonoras, percebemos que o som apresenta características como a altura, a intensidade e o timbre. No caso da intensidade (I), que representa a potência de uma onda sonora por unidade de área $\left(\frac{W}{m^2}\right)$, encontramos detalhes interessantes como é o caso da limitação auditiva. Para perceber a onda sonora, o tímpano humano necessita que ela tenha, no mínimo, uma intensidade $I_0 = 10^{-12}\left(\frac{W}{m^2}\right)$, chamado de limiar de audibilidade e, no máximo, de $I = 1\left(\frac{W}{m^2}\right)$, chamado de limiar da dor. O nível sonoro (N) representa a comparação entre a intensidade sonora (I) e o limiar da audibilidade (I_0). A sua unidade mais prática é o decibel (dB).

A grandeza nível sonoro (N) obedece a uma escala logarítmica, sendo definida por:

$$N = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Podemos relacionar esses conceitos com algumas situações do cotidiano, como as lesões causadas por sons com intensidade acimo do ideal. O ouvido humano apresenta lesões irrecuperáveis sempre que é exposto, por um determinado tempo, a níveis sonoros (N) superiores a 80 dB, produzidos por uma furadeira pneumática em funcionamento, por exemplo.

Outros exemplos de aplicações dos logaritmos estão nos materiais radioativos que emitem partículas e desintegram-se naturalmente no decorrer do tempo (sua massa vai se reduzindo), no cálculo do pH (potencial de hidrogênio), no cálculo da intensidade de um terremoto (escala Richter), na acústica e na formação da escala musical temperada.

A função logarítmica baseia-se nas seguintes igualdades, se $\log_b a = x$ então $b^x = a$. Nesse caso a e b devem ser positivos e, além disso, b deve ser diferente de 1, pois do contrário, a função logarítmica não existirá.

4.2.1 Propriedades Operatórias

Para $b > 0$ e $b \neq 1$, $a, c \in \mathbb{N}$, valem as seguintes propriedades operatórias:

1) Logaritmo de um produto:

$$\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c.$$

2) Logaritmo de um quociente:

$$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c.$$

3) Logaritmo de uma potência:

$$\log_b a^c = c \cdot \log_b a.$$

Definição 4.2.1. Função Logarítmica.

Uma função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_b x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, é chamada de função logarítmica. Quando $b > 1$, a função logarítmica será dita crescente e quando $0 < b < 1$, a função será dita decrescente. Tais situações podem ser observadas, respectivamente, nas Figuras 21 e 22.

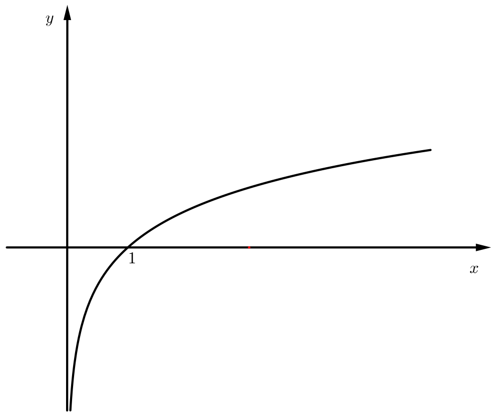

Figura 21 – Função logarítmica crescente

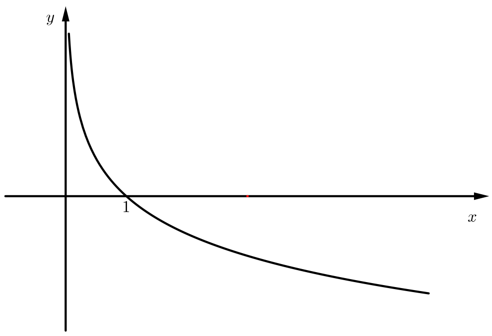

Figura 22 – Função logarítmica decrescente

4.2.2 Caracterização da Função Logarítmica

O que caracteriza uma função logarítmica é o fato de transformar produtos em somas, que é o contrário do que faz a função exponencial. Isto nos é garantido pelo teorema de caracterização da função logarítmica. Segundo o professor Lima (LIMA et al., 2006), a caracterização da função logarítmica é descrita do seguinte modo:

Teorema 4.2.1. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $b > 0$ tal que $f(x) = \log_b x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

As primeiras tábuas de logaritmos foram publicadas por Napier e Briggs em 1614 e 1620, respectivamente. Uma tábua de logaritmos consiste essencialmente em duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda corresponde um número à sua direita, chamado o seu logaritmo.

De acordo com Bonjorno (BONJORNO; GIOVANNI; JÚNIOR, 2011), posteriormente a Napier, Henry Briggs também estudou os logaritmos e sugeriu que a base dez fosse usada, nascendo assim os chamados logaritmos decimais. A utilização dos logaritmos decimais tornou a tábua de logaritmos ainda mais prática, já que o sistema de numeração utilizado no mundo desde aquela época era o decimal.

Segundo Carvalho (CARVALHO et al., 1998), a importância da função logarítmica é permanente e jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial, está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado.

4.3 Progressão Geométrica

De acordo com Eves (EVES, 2008), os hindus, na Antiguidade, já somavam progressões aritméticas e geométricas e resolviam problemas comerciais envolvendo juros simples e compostos, descontos e regras de sociedade. Resolviam também problemas de misturas e de cisternas.

A sequência numérica Progressão Geométrica (P.G.) também é aplicada na formação da escala temperada na música, onde as frequências das notas musicais são os termos de uma P.G..

Segundo Xavier (XAVIER; BARRETO, 2009), uma Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir de segundo, pode ser calculado multiplicando-se ao anterior uma constante chamada de razão. A razão da P.G. é representada pela letra q.

Uma progressão geométrica será classificada como:

- Crescente, quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.
- Decrescente, quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.
- Constante, quando $q = 1$.

- Alternante, quando $q < 0$.

A fórmula do termo geral a_n de uma P.G. é definida por,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

onde a_n é o n-ésimo termo ou termo na posição n, a_1 é o primeiro termo, q é a razão e n é o número de termos considerados.

A fórmula para calcular a soma S_n dos n primeiros termos de uma P.G., $q \neq 1$, é

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1},$$

.

A fórmula para calcular a soma S dos infinitos termos de uma P.G., com $-1 < q < 1$, é

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Uma aplicação de P.G. na música está na formação da escala temperada onde podemos calcular as frequências das notas anteriores ou posteriores à nota Lá (440 Hz) através do uso da fórmula do termo geral. Ou ainda, sabendo as frequências de duas notas não consecutivas, inserir notas entre elas.

No próximo capítulo caracteriza-se a atividade proposta segundo seus pré-requisitos, público alvo, materiais usados para confeccionar o xilofone de garrafas bem como as instruções para sua montagem.

5 Caracterização do Trabalho

Neste trabalho, pretende-se, a partir de uma abordagem histórica, mostrar aos estudantes uma aplicação das funções exponenciais e logarítmicas e da progressão geométrica na teoria musical. Para atingir tal objetivo, a seguir descrevem-se o público alvo, os pré-requisitos e os materiais necessários para a realização da atividade. Além disso, são apresentados os principais passos da construção do xilofone de garrafas.

5.1 Público alvo

Este trabalho é direcionado a alunos do Ensino Médio, mais precisamente alunos do primeiro e do segundo ano. Os conteúdos pré-requisitos para a realização das atividades, como as operações de potenciação, bem como suas propriedades, as funções exponencial e logarítmica e a sequência numérica chamada progressão geométrica. Estes conteúdos são abordados durante o primeiro ano, por este motivo as atividades foram focadas para alunos das séries escolares supracitadas.

5.2 Pré-requisitos

Para aplicar nossa proposta são necessários conhecimentos matemáticos prévios acerca dos assuntos abordados no Capítulo 4. Segundo (CORRÊA, 1989), as aulas que antecedem, por exemplo, o estudo de logaritmos e exponenciais, como potenciação, têm o objetivo de preparar o terreno para esse estudo, isto é, constituem pré-requisitos importantes para a construção gradativa destes conceitos. Caso o professor acredite que os alunos não se recordem desses assuntos, sugerimos compor nas turmas, antes da aplicação da atividade, um glossário ou resumos acerca dos conteúdos necessários como pré-requisitos.

Além disso, é interessante que o professor, responsável pela aplicação da atividade, tenha algum conhecimento sobre música, facilitando a execução do trabalho.

5.3 Materiais

Os materiais utilizados nas atividades propostas foram quadro branco e caneta, questionários (disponíveis nos anexos), calculadora, garrafas de vidro (16), hastes de metal, água, balde, seringa, medidores de mililitros (para medir a quantidade de água em cada garrafa), barbantes, braçadeiras de plástico, dois cavaletes e ripas de madeira (cerca de 8 m) para pendurar as garrafas. Os cavaletes e a ripa de madeira foram fornecidos pela escola e os outros materiais foram providenciados pelo professor.

Na Figura 23 estão alguns dos materiais necessários como o cordão, o medidor de mililitros, a seringa, a braçadeira de plástico, a haste de metal e o funil.

Figura 23 – Materiais utilizados na confecção do xilofone

5.4 Instruções para Montagem do Xilofone de Garrafas

Para a construção do xilofone de garrafas será necessário:

- envolver o gargalo da garrafa com a braçadeira de plástico, sem apertar, afim de passar o barbante por dois pontos extremos do diâmetro, para amarrá-la, e depois apertar a braçadeira (ver Figuras 5.4 e 5.4);

- colocar 300 ml de água na primeira garrafa e nas posteriores multiplicar por 1,0594631 (seção 2.1.1) a quantidade de água da garrafa anterior para determinar a quantidade de água a ser colocada na próxima garrafa;

- posicionar os cavaletes aproximadamente à 4 metros de distância um do outro;

- colocar a ripa de madeira com cerca de 8 metros de comprimento sobre os cavaletes, com pregos fixados em torno de meio metro de espaçamento, para pendurar as garrafas;

- pendurar as garrafas e alertar os alunos para não bater com muita força com as hastes nas garrafas para não quebrá-las.

  A construção do xilofone de garrafas pode ser feita em sala de aula. Se a ripa de madeira possuir mais de 8 metros de comprimento, sugere-se que a atividade seja realizada no pátio, observando as condições climáticas; ou no ginásio de esportes, onde a acústica torna o trabalho ainda mais interessante.

Figura 24 – Envolvendo o gargalo da garrafa com a braçadeira de plástico

Figura 25 – Garrafa pronta para ser pendurada na ripa de madeira

6 Relato da Aplicação da Atividade

Na busca de integrar os assuntos matemática e música, foram realizados três encontros, com duração de uma hora cada, com alunos do segundo ano do Ensino Médio do Colégio Sinodal Alfredo Simon, no turno inverso do horário das aulas da turma.

O Colégio Sinodal Alfredo Simon, situado na rua Alfredo Simon, no bairro Três Vendas em Pelotas no Rio Grande do Sul, está ligado à Rede Sinodal e, portanto, à Igreja Luterana do Brasil sendo similar ao particular, mas com caráter filantrópico. A instituição possui aproximadamente quatrocentos alunos, distribuídos desde as Séries Iniciais até o Ensino Médio. O ano letivo do Ensino Médio é dividido em três trimestres. Para o primeiro e o segundo ano são ministrados quatro períodos de matemática por semana, enquanto que para o terceiro ano a carga horária é cinco. Os pesos de cada trimestre são trinta, trinta e quarenta pontos. O aluno que somar sessenta pontos ou mais está aprovado e será promovido à serie posterior.

Participaram da atividade proposta nesta trabalho, voluntariamente, 16 alunos do segundo ano do Ensino Médio, com idades entre 14 e 17 anos.

Os encontros foram realizados durante o mês de abril e seguiram o seguinte cronograma de execução:

1° encontro - Data 16/04/2015.

2° encontro - Data 23/04/2015.

3° encontro - Data 28/04/2015.

Nestes encontros foram propostos assuntos e atividades relacionando matemática e música, com o objetivo de promover uma investigação e reflexões acerca destes dois assuntos e suas inter-relações. As atividades aqui propostas são uma tentativa de fugir dos meios tradicionais de ensino, buscando propiciar aos alunos uma construção do conhecimento reflexivo e de uma aula de matemática atrativa e prazerosa. Os alunos não receberam nota adicional por participarem do trabalho. A seguir o relato dos encontros.

6.1 Primeiro Encontro

No primeiro encontro foi feita uma breve introdução sobre os assuntos matemática e música, promovendo uma discussão sobre esses dois temas, observando o conhecimento prévio de cada aluno, e em que grau esse conhecimento ocorre. Esta discussão teve como ponto de partida as respostas dos alunos para as perguntas do Questionário 1 (disponibilizado no quadro), apresentado no Anexo A. Ao final desta primeira tarefa, ainda neste encontro, a turma foi organizada em grupos de quatro integrantes.

A segunda atividade proposta solicitou que cada grupo realizasse, posteriormente, em um horário diferente do escolar e dos encontros, uma pesquisa, de caráter livre, onde os alunos poderiam consultar a internet, livros ou outros materiais que julgassem interessantes, para responderem às perguntas do Questionário 2 (impresso e distribuído aos grupos), apresentado no Anexo B, sendo sua entrega de forma individual.

Optou-se por uma atividade envolvendo pesquisa, baseando-se na curiosidade que o tema desperta nos alunos. Ao se envolver na pesquisa os alunos têm a oportunidade de estabelecer relações entre a Música, a História e os conceitos físicos e matemáticos.

Os resultados deste primeiro encontro serão analisados no Capítulo 7.

6.2 Segundo Encontro

No segundo encontro cada aluno entregou o questionário respondido à mão e de forma individual. Em seguida, em uma ordem sorteada, os grupos apresentaram o resultado da pesquisa a toda a turma. A apresentação continha exemplos práticos e reais, onde a relação matemática e música foi destacada. O áudio desta apresentação foi gravado pelo professor. Nesse momento, o estudo teve seu foco direcionado para o início da relação entre matemática e música: com Pitágoras e suas conjecturas e a construção do monocórdio, observando as divisões da corda e a nota obtida em cada parte e, posteriormente, a formação da escala temperada, com o uso dos logaritmos e o estudo de Mersenne.

É interessante observar que a solução completa da questão 21 não foi apresentada pelos grupos. Nesta questão os conhecimentos sobre logaritmos deveriam ser empregados na obtenção da solução. Nesse momento ficou claro que a função logarítmica e suas propriedades operatórias não faziam parte do conhecimento prévio dos alunos. O professor considerou importante a intervenção e ajudou na resolução da questão. Para as demais questões, os participantes não apresentaram dificuldades.

Optou-se por promover uma discussão na turma, tendo o professor como mediador, em relação aos assuntos abordados, a fim de compartilhar os saberes prévios e construir novos. É importante ressaltar que a forma oral com que as respostas às questões propostas foram dadas objetivam proporcionar uma maior desenvoltura na oratória dos participantes. Segundo Haydt (HAYDT, 1995), na relação professor-aluno, o diálogo é fundamental. A autora afirma ainda que a atitude dialógica no processo ensino-aprendizagem é aquela que parte de uma questão problematizada, para desencadear o diálogo, no qual o professor relata o que sabe, aproveitando os conhecimentos prévios e as experiências anteriores do aluno.

6.3 Terceiro Encontro

No último encontro, utilizando 16 garrafas de vidro e água, os alunos construíram um xilofone de garrafas. Para o sucesso da atividade é importante que cada garrafa contenha a quantidade certa de água para produzir a frequência correta de cada nota musical. Cada aluno foi responsável por uma nota musical e sua execução no momento adequado. Uma vez construído o xilofone de garrafas, os alunos tentaram reproduzir a Valsa Danúbio Azul, em Dó Maior (as três primeiras partes), de Johan Strauss.

Foi solicitado aos alunos que escutassem a música antes do dia da atividade. Este exercício anterior possibilita aos participantes, que no momento exato da atividade, tenham em sua memória a música a ser executada. Ao reconhecer a música, seu ritmo e sua melodia torna-se mais fácil o reconhecimento e a execução das notas musicais.

Nesse encontro, foram utilizados, além das garrafas de vidro e água, hastes de metal para a construção do xilofone. Uma das dificuldades encontradas foi a amarração com um barbante, a fim de colocar as garrafas suspensas. Como o gargalo não permitia a firmeza necessária, braçadeiras de plástico foram usadas para comprimir o barbante e o problema foi solucionado.

As garrafas foram providenciadas pelo professor, assim como os demais materiais (balde, medidor de mililitros, seringa) necessários para a confecção do xilofone. Uma garrafa com 300 ml de água foi utilizada como base e a calculadora foi usada para determinar a quantidade correta de água para cada garrafa de acordo com a nota que se pretendia obter, multiplicando-se ou dividindo-se pela constante 1,0594631, gerada pela exponencial já citada na seção 2.1.1. Assim as notas da escala temperada foram surgindo, como era esperado.

É importante destacar que ao calcular as quantidades de água a serem colocadas em cada garrafa para a confecção do xilofone, os alunos perceberam o emprego do conceito de progressão geométrica na formação da escala temperada.

Algumas variáveis observadas devem ser consideradas, como o ponto em que cada garrafa foi batida (este ponto variando, mais para cima ou para baixo) interfere na nota musical executada, a espessura da haste usada para tocar na garrafa também é um fator importante e a força com que o toque é dado deve ser observado (não bater exageradamente forte, para não quebrar a garrafa).

Nas três primeiras tentativas de executar a valsa, os momentos corretos de cada aluno tocar não ocorreram de forma precisa. Mas aos poucos, a medida que se repetiam os movimentos de execução das notas musicais, a música foi tomando forma. É claro que a execução não foi perfeita, mas esse não era realmente o objetivo final, mas sim colocar em prática o que foi discutido anteriormente, como o tempo das notas musicais, os intervalos e, principalmente, na formação das notas musicais com a colocação de água nas garrafas, onde a relação entre a matemática e a música foi estabelecida.

Não foram usados CDs ou outras mídias para relacionar a matemática e a música. Estabeleceu-se esta relação na prática, executando-se a valsa de Strauss e possibilitando um exercício de reflexão sobre como a música, a partir das notas musicais construídas, relaciona-se diretamente com a matemática.

Na Figura 26 podemos visualizar o xilofone de garrafas construído pelos alunos. A distância entre as garrafas e o chão não é importante, mas entre elas sim. Esta última distância deve ter uma medida suficiente de modo a permitir a aproximação do aluno à garrafa.

Figura 26 – Xilofone de garrafas - visão frontal

Na Figura 27, com a visão lateral do xilofone de garrafas, é possível visualizar com mais clareza a posição dos cavaletes e a posição da ripa de madeira colocada sobre eles. Também a posição das garrafas em linha, o que facilita na hora da execução da música.

No capítulo a seguir, os resultados são analisados e alguns aspectos importantes são discutidos.

Figura 27 – Xilofone de garrafas - visão lateral

7 Análise dos Resultados

De um modo geral, foram observados os seguintes aspectos relativos aos estudantes, em relação:

- à participação na apresentação das respostas dos questionários: alguns alunos se sentiram mais seguros para responder as questões propostas, e isso está associado à pesquisa prévia sobre o assunto;
- ao empenho: a maioria das respostas foram obtidas a partir de uma simples busca na internet, mesmo assim o trabalho colaborativo e as relações interpessoais foram estimulados através dos grupos, o que proporcionou a troca de ideias;
- ao comprometimento com a atividade: a conexão entre a matemática e a música tornaram interessante os encontros e motivou a presença dos alunos; os alunos compareceram voluntariamente em um turno inverso ao escolar mesmo sabendo que estas atividades não seriam consideradas na avaliação quantitativa trimestral;
- ao trabalho em grupo: as discussões prévias, dentro do grupo, facilitaram o desenvolvimento do trabalho, possibilitando uma maior interatividade entre os alunos;
- às conexões entre matemática, música e física: a indução à pesquisa tornou possível perceber as conexões entre matemática, música e física, facilitando assim o conhecimento sobre as correlações entre os assuntos acima citados, através da acústica, por exemplo;
- à abordagem histórica: a pesquisa sobre fatos históricos foram considerados interessantes pela maioria dos alunos, quando esse questionamento foi levantado nas discussões do trabalho;
- à construção do xilofone de garrafas: a construção foi realizada com muito entusiasmo e curiosidade em relação ao resultado do trabalho; também foi interessante o pedido, por parte dos alunos, de mais atividades nos mesmos moldes do trabalho proposto, o que corrobora para a satisfação de ambas as partes no processo de ensino-aprendizagem.

A partir da construção do xilofone de garrafas foi possível aproximar as teorias matemáticas e musicais e a prática, estabelecer relações entre os dois assuntos colaborando para a melhor compreensão dos conceitos matemáticos abordados ao longo de toda a atividade.

Uma análise mais detalhada dos resultados é apresentada na seção 7.1.

7.1 Resultados

Os questionários foram disponibilizados aos alunos como um estudo dirigido afim de embasar a construção de conceitos que constituem a relação entre a matemática e a música.

7.1.1 Questionário 1

No Questionário 1 (Anexo A), para a pergunta número um "Você tem algum conhecimento sobre música?", 4 alunos responderam que não tinham conhecimento sobre música e 12 que sim. O resultado obtido pode ser visualizado na Figura 28.

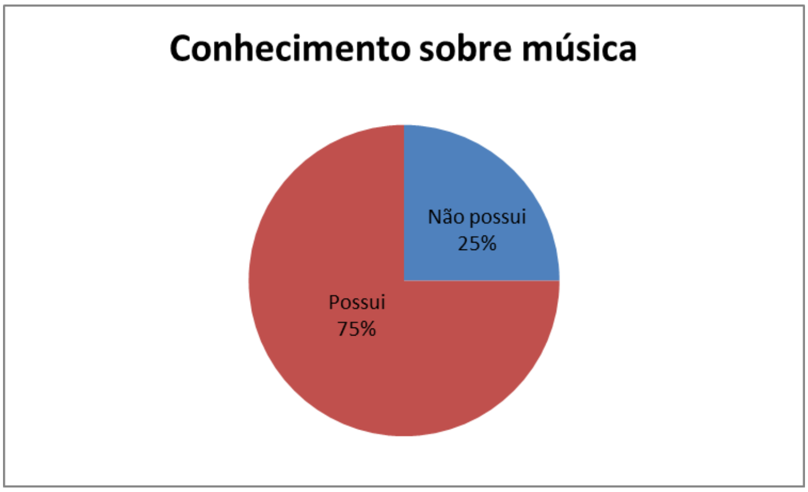

Figura 28 – Resultados para a questão "Você tem algum conhecimento sobre música?"

Para a segunda pergunta, "Se a resposta da primeira pergunta foi sim, você acha que a música ajuda na concentração para executar outras tarefas?", dez (10) pessoas responderam sim, duas (2) não e quatro (4) responderam que depende da música, de acordo com a Figura 29.

Para a pergunta de número três, "Você percebe alguma relação entre a matemática e a música, ou vice-versa? Em caso afirmativo, qual ou quais são elas?", 8 alunos responderam sim e 8 não. As respostas obtidas estão distribuídas conforme a Figura 30.

Observou-se que as relações entre a matemática e a música conhecidas e citadas pelos estudantes foram: "Nos acordes e nas notas musicais", "nas notas musicais", "tanto na matemática como na música temos de seguir uma sequência de regras, como por exemplo fórmulas na matemática e notas na música", "na leitura de uma partitura ou para tirar um solo", "quase tudo está, de algum modo, ligado a matemática".

Com base nas respostas, observa-se que os alunos percebem a ligação entre a música e a matemática, isso pode ser comprovado pelo número de vezes em que as notas

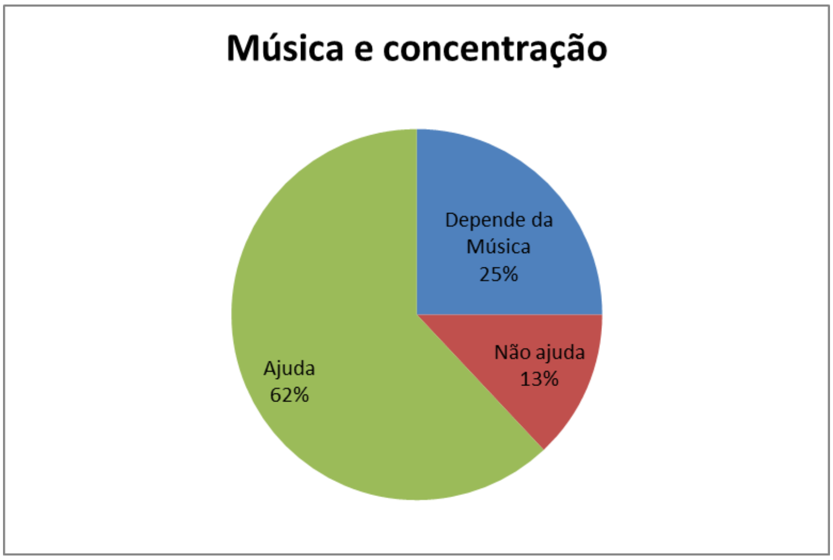

Figura 29 – Resultados para a questão "Se a resposta da primeira pergunta foi sim, você acha que a música ajuda na concentração para executar outras tarefas?"

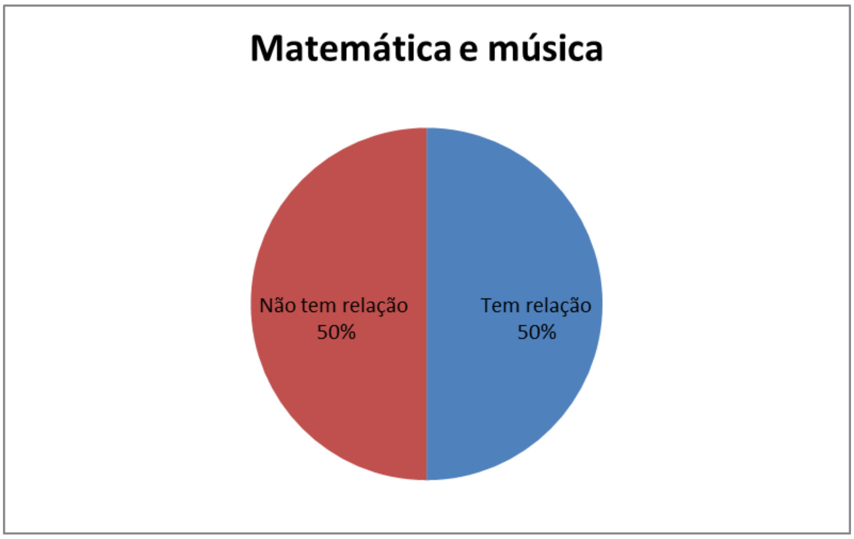

Figura 30 – Resultados para a questão "Você percebe alguma relação entre a matemática e a música, ou vice-versa? Em caso afirmativo, qual ou quais são elas?"

musicais são mencionadas.

7.1.2 Questionário 2

Analisando as respostas dos alunos, percebe-se que eles não apresentaram dificuldades em responder as questões relacionadas à pesquisa do Questionário 2. Constatou-se, ainda, que a maioria optou por busca em *sites* na internet. Este fato é facilmente comprovado ao inserir a questão 1: "O que é som?" em um buscador da internet. Os resultados que aparecem no topo da página estão entre as principais respostas apresentadas pelos estudantes. Nessa ótica, uma falha neste trabalho foi ter deixado livre a procura pelas informações, daí era de se esperar respostas advindas apenas da internet, sem o cuidado e a preocupação por parte dos alunos em buscar livros para obter as informações necessárias. Sugere-se, ainda, que as referências sejam pedidas pelo professor como parte da pesquisa e que a fonte das informações não seja apenas a internet. Outra possibilidade seria dividir os grupos, um buscaria as respostas na internet, outro em livros, outro em revistas e depois fariam uma comparação entre as respostas.

O professor pode, ainda, aproveitar esta atividade para esclarecer ao aluno alguns fatores que são próprios da rede e que não fazem parte do universo da pesquisa em livros. O primeiro desses fatores é que qualquer um pode publicar o que quiser na internet. Essa democracia faz com que existam conteúdos incorretos, incompletos ou completamente questionáveis. É importante ensiná-los a comparar os resultados de vários *sites*.

A pesquisa é uma importante ferramenta didática que pode ser utilizada em todas as disciplinas, inclusive a matemática. Segundo Moço (MOÇO, 2014), ensinar os alunos a estudar para que se saiam bem em toda a Educação Básica, no Ensino Superior e por toda a vida é, sem dúvida, uma das grandes responsabilidades da escola. Ele afirma ainda que poucas atividades atendem tão bem a essa demanda como a pesquisa - que tem como procedimentos básicos ler para estudar e ler para escrever. Devemos ensinar aos estudantes como pesquisar em livros, jornais e revistas, mas a importância da pesquisa na internet e de seu conteúdo não pode e nem deve ser menosprezada, pois o mercado de trabalho exige cada vez mais jovens altamente tecnológicos.

Os resultados da análise mostraram, ainda, que o conhecimento sobre logaritmos, que deveria perdurar do primeiro ano, não estava propriamente estabelecido. A Figura 31 apresenta a resposta de um dos alunos ao item a) da questão 21.

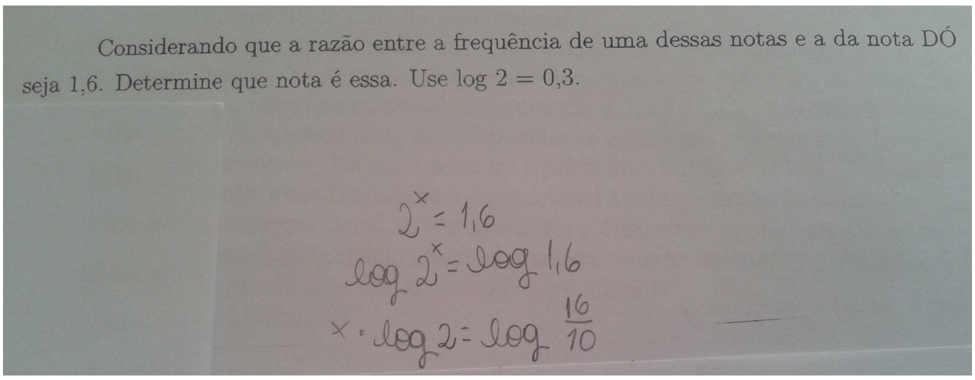

Figura 31 – Resposta ao item a) da questão 21 do Questionário 2

Analisando a solução obtida (Figura 31), observa-se a dificuldade do aluno em concluir o raciocínio. Acreditamos que isso deva-se ao fato da falta de domínio do aluno ao trabalhar com as propriedades operatórias do logaritmos, uma vez que o enunciado do exercício fornecia apenas o valor do $\log 2$. Os demais participantes da atividade não conseguiram sequer iniciar o raciocínio para obter a solução do problema proposto e deixaram a questão em branco.

A dificuldade em resolver um problema que envolve logaritmos ficou clara e, nesse contexto, sugere-se que esse trabalho seja aplicado em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, justamente quando o estudo de logaritmos é apresentado, podendo, assim, melhorar o desempenho dos alunos e estabelecer uma ligação da matemática com a música tornando o assunto muito mais interessante sob o ponto de vista dos alunos. Outra alternativa, é uma revisão dos conteúdos antes da aplicação da atividade.

A fim de tornar a aprendizagem mais significativa aconselhamos a realização de um quarto encontro com o objetivo de identificar os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas e progressão geométrica empregados durante a construção do xilofone de garrafas. Sugerimos também ao professor a elaboração e aplicação de um questionário de avaliação do grau de satisfação dos estudantes com a realização da atividade. Além disso, propõe-se a construção de um glossário, da qual os alunos participarão sugerindo as palavras e procurando seus significados em fontes confiáveis. O glossário deverá conter as referências das bibliografias consultadas. Um exemplo para o glossário está disponível no anexo D.

Para realçar o caráter interdisciplinar da atividade e torná-la ainda mais atrativa, sugerimos convidar professores das áreas de Física, de Biologia, de História e da Arte para estabelecer relações com os conceitos físicos e biológicos, datas, os acontecimentos de cada época e as várias formas artísticas envolvidas no trabalho.

Sugere-se também a realização de um seminário, uma feira ou uma exposição na escola como uma forma de demonstrar, na prática, o que foi estudado e a relação entre a matemática e a música e valorizar o trabalho dos alunos.

8 Sugestão de Atividades Complementares

Com a intenção de ampliar o estudo dos tópicos matemáticos envolvidos, sugerem-se mais atividades que podem ser aplicadas pelo professor conforme o tempo que tiver disponível e/ou seu objetivo principal, isto é, se pretende revisar, introduzir ou praticar os conceitos envolvidos. Também uma atividade de fechamento, para ser realizada em um quarto encontro. A seguir as sugestões de atividades são apresentadas.

Atividade 1:

• **Título:** Frequências na escala temperada.

• **Pré-requisitos:** Conhecimento da formação da escala temperada associada a uma função exponencial e a aplicação da progressão geométrica.

• **Objetivo:** Praticar a aproximação entre a matemática e a música, explorando os conteúdos abordados na atividade.

• **Enunciado:** De acordo com a escala temperada ou cromática adotada musicalmente hoje em dia, resolva a questão a seguir:

Considerando as notas LÁ - LÁ# - SI - DÓ - DÓ# - RÉ - RÉ# - MI - FÁ - FÁ# - SOL - SOL# - LÁ, e aplicando a função $f(x) = 440 \times 2^{\frac{x}{12}}$ para calcular a altura das notas ou suas frequências (onde x é a distância de uma nota a outra), determine:

a) a frequência da nota Dó, primeiro seguinte ao Lá padrão;

b) a frequência do sinal de discar de um telefone, que é o primeiro Sol anterior ao Lá padrão;

c) a nota cuja frequência é 186 Hz.

• **Solução:**

a) A frequência da nota Lá padrão é calculada pela função $f(x) = 440 \times 2^{\frac{x}{12}}$, para $x = 0$. Assim,

$$f(0) = 440 \times 2^{\frac{0}{12}}$$

$$f(0) = 440 \times 1$$

$$f(0) = 440, \text{ daí a frequência da nota Lá padrão é de 440 Hz.}$$

Para o cálculo da frequência da nota Dó, pedida na atividade, aplica-se a função exponencial $f(x)$ para $x = 3$,

$$f(3) = 440 \times 2^{\frac{3}{12}}.$$

Com o uso de uma calculadora obtém-se,

$$f(3) \cong 440 \times 1,19$$

$$f(3) \cong 523.$$

Utiliza-se $x = 3$, pois deve-se contar da nota Lá até o Dó, quantos semi tons existem: do Lá até o Lá $\sharp$ existe meio tom, do Lá $\sharp$ ao Si mais meio e do Si ao Dó, mais meio, totalizando em três semi tons de diferença.

Portanto, a frequência da nota Dó, primeiro seguinte ao Lá padrão é de aproximadamente 523 Hz.

b) Como a frequência do Lá padrão é obtida por 440 Hz multiplicado por $2^{\frac{0}{12}}$, para determinar a frequência da nota Sol anterior ao Lá padrão será necessário um cálculo para regredir na escala e não para progredir, daí a operação de divisão ao invés da multiplicação é utilizada.

Primeiramente devemos contar quantos semi tons existem da nota Sol até a nota Lá: do Sol até o Sol $\sharp$ temos um semi tom e do Sol$\sharp$ ao Lá, mais meio tom, totalizando em dois semi tons entre a nota Sol e a nota Lá.

Então, para determinar a frequência do Sol anterior ao Lá padrão calcula-se o valor para $f(x)$ quando $x = 2$:

$$f(2) = 440 \div 2^{\frac{2}{12}}$$

$$f(2) \cong 440 \div 1,12$$

$$f(2) \cong 392.$$

Assim, a frequência do sinal de discar de um telefone é de 392 Hz, aproximadamente.

c) Para determinar a nota que está relacionada à frequência de 186 Hz, deve-se aplicar a função:

$$f(x) = 440 \times 2^{\frac{x}{12}}.$$

Como a frequência dada é de 186 Hz, tem-se:

$$186 = 440 \cdot 2^{\frac{x}{12}}.$$

Dividindo-se cada lado da equação por 440, obtém-se:

$$\frac{186}{440} = 2^{\frac{x}{12}}.$$

Para determinar o valor de x, uma vez que ele está no expoente, deve-se aplicar logaritmo nos dois lados da equação:

$$\log\left(\frac{186}{440}\right) = \log 2^{\frac{x}{12}}.$$

Com o auxílio de uma calculadora, obtém-se:

$$-0,37393973226827111900220686259399 = \frac{x}{12} \cdot \log 2$$

Usando o valor de $\log 2$, procurado em uma tabela de logaritmos ou através do uso de uma calculadora:

$$-0,38 \cdot 12 = x \cdot 0,30102999566398119521373889472449.$$

Dividindo ambos os lados da equação por 0,3:

$$-\frac{4,56}{0,3} = x$$

obtém-se o resultado $x = -15$. Contando, a partir do Lá padrão 15 semitons para trás (em função do sinal negativo de x), alcançamos a nota Fá$\sharp$.

Fonte: Este problema foi retirado do livro A Matemática do Ensino Médio (Volume 2) de Elon Lages Lima (LIMA et al., 2006), Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, grandes nomes da matemática brasileira atual. Este livro é distribuído pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e pertence à coleção do professor de matemática.

Atividade 2:

• **Título:** Braço do violão.

• **Pré-requisitos:** Conhecimento sobre as relações entre os comprimentos da corda e suas partes.

• **Objetivo:** Perceber a relação existente entre as medidas das casas do braço de um violão e a frequência das notas obtidas.

• **Enunciado:** Por que as casas do violão vão ficando mais estreitas, a medida que se avança no braço?

• **Solução:** Isso deve-se ao fato de que a frequência e o comprimento da corda são inversamente proporcionais: aumentando a frequência, diminui o comprimento da corda.

Fonte: Atividade retirada do Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT (PEREIRA, 2013).

Atividade 3:

• **Título:** Nível sonoro e intensidade de um som.

• **Pré-requisitos:** Propriedades operatórias dos logaritmos.

• **Objetivos:** Perceber quais as propriedades operatórias dos logaritmos são necessárias para resolver a atividade e aplicá-las.

• **Enunciado:** (UFC - CE) Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \cdot \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I, em watt por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar condicionado.

A razão $\dfrac{I_1}{I_2}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{10}$

b) 1

c) 10

d) 100

e) 1000

• **Solução:**

Utilizando as informações contidas na atividade, as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$80 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_1, \tag{8.1}$$

$$60 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_2. \tag{8.2}$$

Diminuindo a equação 8.2 de 8.1 tem-se:

$$80 - 60 = 120 - 120 + 10 \cdot \log_{10} I_1 - 10 \cdot \log_{10} I_2.$$

Efetuando as subtrações:

$$20 = 10 \cdot \log_{10} I_1 - 10 \cdot \log_{10} I_2.$$

Colocando o fator comum em evidência na direita da igualdade:

$$20 = 10 \cdot (\log_{10} I_1 - \log_{10} I_2).$$

Dividindo cada lado da igualdade por 10, tem-se:

$$\frac{20}{10} = \log_{10} \frac{I_1}{I_2}.$$

Efetuando a divisão na esquerda da igualdade e aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos na direita da igualdade tem-se:

$$2 = \log_{10} \frac{I_1}{I_2}.$$

Aplicando a definição de logaritmo, obtém-se:

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^2,$$

Calculando a potência:

$$\frac{I_1}{I_2} = 100. \quad \text{Resposta correta: letra d.}$$

Fonte: Retirado do livro do professor Dante (DANTE, 2006), do Ensino Médio.

Atividade 4:

• **Título:** Notas do piano.

• **Pré-requisitos:** Função exponencial.

• **Objetivo:** Perceber a relação entre notas que se distanciam uma oitava.

• **Enunciado:** O tom de uma nota musical é determinado pela frequência da vibração que a gerou. O C médio no piano, por exemplo, corresponde a uma frequência de 263 Hertz (ciclos por segundo). Uma nota que estiver duas oitavas acima de C médio vibra em 1052 Hertz.

Quando se sobe uma oitava, a frequência da vibração dobra. De fato, nossos ouvidos identificam uma nota como sendo uma oitava acima, justamente porque ela vibra duas vezes mais rápido.

Tabela 2 – Tom das notas acima do C médio

Número n de oitavas acima do C médio	Número de Hertz $V = f(n)$
0	263
1	526
2	1052
3	2104
4	4208

Responda às perguntas, de acordo com o texto e a tabela.

a) Escreva a fórmula da função exponencial $f(n)$.

b) A função é crescente ou decrescente?

• **Solução:**

a) Lembrando que a função exponencial é definida por $f(n) = a \cdot b^n$, tem-se

$$f(0) = a \cdot b^0.$$

Observando a Tabela 2 e lembrando que $b^0 = 1$, chega-se ao resultado:

$$263 = a.$$

Para $n = 1$, $f(1) = 263 \cdot b^1$. Portanto,

$$526 = 263 \cdot b.$$

Dividindo ambos os lados da equação por 263:

$$\frac{526}{263} = b.$$

Logo, $b = 2$.

Então a função exponencial para este problema é definida por $f(n) = 263 \cdot 2^n$.

b) Para classificar a função logarítmica como crescente ou decrescente, deve-se verificar a base. Se a base estiver entre zero e um, a função será decrescente e se a base for maior do que um a função será crescente. Neste caso, a base é igual a dois e, portanto, maior que um. O que resulta em uma função logarítmica crescente.

Fonte: Retirado do livro do professor Domenico (DOMENICO, 2004), do Ensino Médio.

Atividade de Fechamento:

A fim de estabelecer a relação da atividade proposta com os conteúdos matemáticos, função exponencial e logarítmica e a sequência numérica progressão geométrica, sugere-se a realização de um quarto encontro. Para este encontro, estão previstas as seguintes etapas:

Etapa 1: aplicação de um questionário para a avaliação do grau de satisfação dos alunos;

Etapa 2: discussão a respeito de como e quais conteúdos matemáticos foram abordados durante a construção do xilofone de garrafas.

Perguntas relacionando as funções exponencial e logarítmica e a progressão geométrica, exploradas no trabalho poderão contribuir para concretizar e finalizar a atividade. A seguir, sugestões de questões que poderiam ser colocadas aos alunos:

- Você consegue imaginar como Pitágoras, a mais de dois mil anos atrás, pensou e começou o estudo sobre a música?
- Como era feita a comunicação no século XVII, quando Mersenne tentava obter informação e também divulgá-las?
- Ficou claro que a progressão geométrica foi usada para calcular a quantidade de água a ser colocada em cada garrafa para produzir a nota esperada?
- As propriedades operatórias das potenciações e dos logaritmos foram relembradas?
- Para você, a relação entre a matemática e a música ficou bem estabelecida?

Este encontro tem como objetivo finalizar a atividade proposta esclarecendo as dúvidas dos alunos com relação aos conteúdos matemáticos e sua aplicação durante a construção do xilofone de garrafas.

9 Conclusões

Acredita-se que este trabalho representa uma tentativa inicial de agregar o ensino da matemática às teorias musicais e que poderá contribuir significativamente no que diz respeito ao uso de novas abordagens de ensino para as funções exponenciais, logarítmicas e progressão geométrica.

Neste trabalho apresenta-se uma atividade que relaciona a matemática, a música e além disso a história. Mostramos as etapas de sua aplicação a alunos do segundo ano do ensino Médio com o objetivo de revisar os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas e apresentamos discussões e reflexões acerca da aplicação da atividade.

Aos alunos que participaram voluntariamente dos encontros, em turno inverso ao de suas aulas, foi sugerida uma pesquisa bibliográfica em grupo, tarefa importante para sua vida acadêmica e para o seu futuro profissional. Observou-se o uso excessivo de sítios eletrônicos não confiáveis nas respostas entregues. Aproveitou-se esta oportunidade para comentar sobre a confiabilidade das informações obtidas na rede e a necessidade de informar a referência utilizada nos trabalhos da escola. Comentou-se ainda sobre os plágios. Esta pesquisa auxiliou os estudantes a entenderem a contribuição de Mersenne na construção da escala temperada percebendo o uso dos logaritmos em sua formação.

A fase seguinte incluiu a apresentação das respostas do questionário 2, incentivou-se a participação de todos os alunos, comentou-se sobre a postura na forma de responder e a clareza das respostas. Entende-se que em muitas situações da vida profissional é importante ter desenvolvida a capacidade de oratória. Percebeu-se que os colegas interagiam entre si colaborando em cada momento. Na terceira etapa, percebeu-se expressiva motivação e satisfação do grupo com a montagem do xilofone de garrafas e a execução da valsa Danúbio Azul. Durante a montagem do instrumento, os alunos verificaram a presença da sequência numérica progressão geométrica quando foram calculadas as quantidades de água a serem colocadas em cada garrafa. Cabe salientar a alegria que contagiou a turma com esse trabalho. Cada tarefa desta atividade prática, tais como usar a braçadeira, o cordão, colocar a quantidade certa de água na garrafa, para posteriormente pendurá-las e construir efetivamente o xilofone de garrafas para executar a valsa tão esperada, foi executada com atenção e cuidado.

As atividades aplicadas aos alunos, em forma de questionário, estão em anexo, podendo ser impressas e aplicadas pelo professor diretamente. Se preferir o docente pode, ainda, mudar a ordem da execução dos encontros: no primeiro, o xilofone de garrafas poderia introduzir melhor a relação entre a matemática e a música, promovendo uma discussão mais real entre esses dois assuntos.

Acredita-se que as ações propostas neste trabalho são uma possibilidade de aproximar o ensino da matemática da música e de desenvolver importantes habilidades nos estudantes, tais como a oratória, a autonomia e a capacidade de trabalhar em equipe. Além disso, esta atividade permite ao professor, através de uma aula dialogada, utilizar a história da matemática bem como a resolução de problemas para abordar os conteúdos. O uso destas abordagens é uma tentativa de romper com o paradigma de que uma típica aula de matemática deve ser totalmente expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante sem considerar os conhecimentos prévios dos estudantes. A atividade não substitui a aula expositiva, mas é capaz de torná-la mais atraente e originar o interesse por parte dos alunos.

Uma proposta pessoal é a de dar continuidade a este trabalho nos próximos anos, passando a ser uma característica daquela parte da vida escolar, incentivando a curiosidade e promovendo a interatividade entre as séries da escola. Poderia fazer parte de um projeto, ou do seminário integrado (nas escolas estaduais) intensificando a interação entre disciplinas, áreas, séries, anos, alunos e professores, abrindo um leque de possibilidades atraentes a toda comunidade escolar.

Sabendo que a leitura de música e a aprendizagem de um instrumento envolvem e propiciam o desenvolvimento de capacidades especiais, observa-se a associação entre o tipo de instrumento musical, o raciocínio espacial e o desempenho da matemática. Acredita-se que as vantagens de um estudo de música trará benefícios como disciplina, concentração e outros, não só para a matemática, mas também para todos os componentes curriculares e para a vida dos alunos e professores envolvidos nas atividades escolares.

Não espera-se que os alunos (todos) se tornem músicos, mas que o conhecimento musical torne-os “alfabetizados” no que diz respeito à música e assim saibam apreciar uma boa música com propriedade. Além disso, respeitar e reconhecer o trabalho de um músico.

Finalmente, acredita-se que todo o trabalho, desde a sugestão de uma discussão, fundamentada na articulação dos elementos que o compõem, contrastando-os, somando-os, criando confrontações e corroborações, previamente aprovada pelos alunos, através da introdução, do questionário e da parte prática, tornou o assunto interessante e, com viés educativo, atingiu os objetivos almejados.

Referências

A influência da matemática na música. Rede Globo, 2012. Sítio Globo Educação. Disponível em: <http://redeglobo.globo.com/globoeducacao/noticia/2012/04/influencia-da-matematica-na-musica.htmll>. Acesso em: 17.03.2015. Citado na página 14.

ABDOUNUR, O. J. *Matemática e Música - O pensamento analógico na construção de significados*. 4. ed. São Paulo: Escrituras, 2002. Citado 10 vezes nas páginas 14, 25, 26, 29, 32, 33, 36, 38, 39 e 92.

BENTO, R. F. A surdez de beethoven, o desafio de um gênio. *Arq. Int. Otorrinolaringolia / Intl. Arch. Otorhinolaryngol*, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 317–321, 2009. Citado na página 47.

BIBBY, N. *Music and mathematics: From Pythagoras to Fractals*. Oxford: Oxford University Press, 2003. Citado na página 14.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R.; JÚNIOR, J. R. G. *Matemática Fundamental uma nova abordagem*. São Paulo: Editora FTD, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 90.

BOYER, C. B. *Matemática e Música - O pensamento analógico na construção de significados*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996. Citado 5 vezes nas páginas 26, 29, 33, 35 e 92.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, 1998. 152 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Citado na página 15.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte III*. Brasília, 2000. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Citado na página 15.

BRITAIN, T. J. S. S. of G. *Johan Sebastian Strauss*. 2015. Disponível em: <www.johan-strauss.org.uk/strauss.php?id=121l>. Acesso em: 22.07.2015. Citado na página 45.

BRUNO, S. da S. *O último Teorema de Fermat para n = 3*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, agosto 2014. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/TCCSALVADOR01.10.2014VERSAOFINAL.pdf>. Acesso em: 05.06.2015. Citado na página 34.

CAMPOS, G. P. da S. *Matemática e Música: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, abrill 2009. Disponível em: <http://portais4.ufes.br/posgrad/teses/nometese_165_GEAN%20PIERRE%20DA%20SILVA%20CAMPOS.pdf>. Acesso em: 17.03.2015. Citado 3 vezes nas páginas 14, 26 e 29.

CARDOSO, S. H. *Cérebro e Mente*. 2015. Disponível em: <cerebromente.org.br/n12/fundamentos/neurotransmissores/neurotransmitters2_p.html>. Acesso em: 22.07.2015. Citado na página 90.

CARVALHO, P. C. P. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. Citado na página 55.

CAVALCANTI, V. de S.; LINS, A. F. Musicalizando o currículo: Uma proposta de ensino e aprendizagem da matemática. *Espaço do Currículo*, v. 3, n. 1, p. 363–379, 2010. Citado na página 15.

COHEN, H. F. *Quantifying music: the science of music at the first stage of the scientific revolution*. Boston: D. Reidel Publishing, 1984. Citado na página 26.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. Citado na página 91.

CORRÊA, R. de A. Logaritmos – aspectos históricos e didáticos. *Anais do Iº Encontro Paulista de Educação Matemática*, Campinas, p. 85 – 86, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 57.

CRUZ, A. M. L. *Matemática e Música: compondo um cenário educacional com harmonia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Santa Cruz, março 2013. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/578>. Acesso em: 05.06.2015. Citado na página 16.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debates SBEM*, II, n. 2, 1989. Citado na página 16.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática.* Campinas: Editora Universidade Estadual de Campinas, 1986. Citado na página 15.

DANTE, L. R. *Matemática contexto e aplicações, Volume 1 , 3ª edição, 4ª impressão.* São Paulo: Editora Ática, 2006. Citado na página 75.

DANTE, L. R. *Matemática contexto e aplicações*. São Paulo: Editora Ática, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 52.

DOMENICO, L. C. D. *Matemática , ensino médio, Coleção Vitória Régia*. São Paulo: Editora Lago Ltda, 2004. Citado na página 77.

ENSINO musical na escola agora é lei. Rede Globo, 2012. Sítio Globo Educação. Disponível em: <http://redeglobo.globo.com/globoeducacao/noticia/2012/04/ensino-musical-nas-escolas-agora-e-lei.html>. Acesso em: 17.03.2015. Citado na página 15.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Editora Unicamp, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 37, 55 e 92.

FONSECA, D. F. *Aspectos estruturais e históricos que relacionam a música e a matemática: uma abordagem interdisciplinar para a a aplicação de médias, progressões e logaritmos, no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Lavras, setembro 2013. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1021>. Acesso em: 05.06.2015. Citado na página 16.

GAY, P. *Mozart*. Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 1999. Citado na página 39.

GOMES, C. E. da C. *Curso de Especialização em Ciências Humanas e Saúde*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2009. Disponível em: <http:chaquedcouverte.blogspot.com.br/2011/03/universidade-federal-de-juiz-de-fora_25html>. Acesso em: 04.06.2015. Citado na página 33.

HAYDT, R. C. *Curso de didática geral*. São Paulo: Ática, 1995. Citado na página 61.

JOHANN Sebastian Bach - Músico Alemão. MiniWeb Educação, 2012. Disponível em: <www.miniweb.com.br/Artes/artigos/bach.htmll>. Acesso em: 27.08.2015. Citado na página 43.

JOHANN Sebastian Bach: Gênio traduz mistérios do sagrado. Folha online, 2015. Disponível em: <http://musicaclassica.folha.com.br/cds/17/biografia.html>. Acesso em: 22.07.2015. Citado na página 44.

JOURDAIN, R. *Música, Cérebro e Êxtase*. Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 94.

JULIANI, J. P. *Matemática e música*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, dezembro 2003. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/~dplm/TGMatematicaMusica.pdf>. Acesso em: 05.06.2015. Citado na página 31.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 49, 51, 54 e 72.

LUDWIG Van Beethoven: Fúria ataca "Napoleão da música". Folha online, 2015. Disponível em: <http://musicaclassica.folha.com.br/cds/03/biografia.html>. Acesso em: 20.07.2015. Citado na página 47.

LUIZ, C. dos S. *Crianças que estudam música têm melhores notas em matemática*. Ciência Hoje, 2014. Disponível em: <www.cienciahojept./index.php?oid=58605&op=all>. Acesso em: 17.06.2015. Citado na página 18.

LUIZ, E. A. J.; COL, L. de. Alternativas metodológicas para o ensino de matemática visando uma aprendizagem significativa. *Anais VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática*, Canoas, 2013. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1015/115>. Acesso em: 30.07.2015. Citado na página 25.

MARTINEAU, J. *Quadrivium*. São Paulo: Realizações Editora, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 20, 90, 91 e 94.

MATHEMATICS, S. of; ANDREWS, S. U. of S. *Marin Mersenne*. Escócia: [s.n.], 2015. Disponível em: <www.learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id-Mersenne>. Acesso em: 22.07.2015. Citado na página 92.

MAZZA, J. L. *O Último Teorema de Fermat: a trajetória histórica do "enigma"*. 2014. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Mazza_M1_FM_2014.pdf>. Acesso em: 05.06.2015. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

MED, B. *Teoria da Música*. Brasília: Brasília Artes Gráficas, 1996. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 90 e 91.

MOÇO, A. *Como ensinar por meio da pesquisa*. Revista Nova Escola, 2014. Sítio Nova Escola. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/formacao/como-ensinar-meio-pesquisa-607943.shtmll>. Acesso em: 27.03.2015. Citado na página 68.

NUNES, J. M. V.; SILVA, F. H. S. da. História da matemática na educação matemática, uma tendência necessária. *Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Pernambuco, 2006. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/SIPEMAT06/artigos/nunessilva.pdf>. Acesso em: 30.07.2015. Citado na página 25.

OLIVEIRA, A. P. de S.; SABBA, C. G. Utilizando frações da música à matemática. *Anais do VII CBEM*, Montevideo, Uruguai, 2013. Citado na página 26.

PEREIRA, M. do C. *Matemática e Mísica - De Pitágoras aos dias de hoje*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, março 2013. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/tcc-marcos>. Acesso em: 13.07.2015. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 73.

PERES, L. S. *Matemática e Música: em busca da harmonia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Grande ABC, junho 2006. Disponível em: <http://www.sed.ms.gov.br/index.php?templat=vis&site=98&id_comp=247&id_reg=215&voltar=lista&site_reg=98&id_comp_orig=247>. Acesso em: 17.03.2015. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 29.

PFAFFENSELLER, F. *Matemática e Música*. fabi-matematicaemusica.blogspot.com.br/2008/08/johan-napier.html, 2008. Fabi-matematicaemusica. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Johan_Napier>. Acesso em: 12.06.2015. Citado na página 30.

PRADO, F. B. *Ensino de gráficos de funções trigonométricas e uma aplicação em música*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, março 2013. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/278>. Acesso em: 05.06.2015. Citado na página 16.

RIBEIRO, S. A. *Mozart: matemática para os ouvidos*. Público, 2008. Disponível em: <http://www.publico.pt/culturaipsilon/noticia/mozart-matematica-para-os-ouvidos-1344593>. Acesso em: 17.04.2015. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

RODRIGUES, A. *28 de julho de 1750 - Morre J.S.Bach*. movimento.com, 2014. Disponível em: <www.movimento.com/2014/07/28-de-julho-de-1750-morre-j-s-bach/>. Acesso em: 30.06.2015. Citado na página 43.

SANTOS, P. P. dos. *Beethoven*. 2007. Disponível em: <www.infoescola.com/biografias/beethoven/>. Acesso em: 20.06.2015. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.

SINGH, S. *O último teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Editora Record, 2014. Citado na página 33.

SOUZA, D. G. de. *Anatomia e Fisiologia do Ouvido Humano*. 2007. Disponível em: <www.dgsotorrinolaringologia.med.br/apost_ouvido.htm>. Acesso em: 18.06.2015. Citado na página 23.

SOUZA, J. *Aprender e Ensinar Música no Cotidiano*. Porto Alegre: Sulina, 2012. Citado na página 89.

SOUZA, L. G. S. *Uma abordagem Didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado na página 40.

SOUZA, L. G. S.; ABDOUNUR, O. J. *A Razão Áurea x Mozart*. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática, 2011. Disponível em: <www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_L_G_S_Raz~ao_Áurea_x_Mozart_Villa_Lobos_e_Bartók.pdf>. Acesso em: 17.06.2015. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 43.

STRECKER, H. *Filósofo e matemático francês René Descartes*. 2014. Disponível em: <educacao.uol.com.br/biografias/rene-descartes.jhtm>. Acesso em: 30.06.2015. Citado na página 31.

VIANNA, C. R. História da matemática na educação matemática. *Anais VI Encontro Paranaense de Educação Matemática*, Londrina, p. 15 – 19, 2000. Disponível em: <pt.slideshare.net/fabricioehf/tendncia-histria-da-matemtica>. Acesso em: 30.07.2015. Citado na página 25.

XAVIER, C.; BARRETO, B. *Matemática Aula por Aula*. São Paulo: Editora FTD, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 49, 53 e 55.

Anexos

ANEXO A – Questionário 1

Atividade: Matemática e Música

Nome do aluno: ______________________________

Escola: ______________________________

Professor: ______________________________

1) Você tem algum conhecimento sobre música?

2) Se a resposta da primeira pergunta foi sim, você acha que a música ajuda na concentração para executar outras tarefas?

3) Você percebe alguma relação entre a matemática e a música, ou vice versa? Em caso afirmativo, qual ou quais são?

ANEXO B – Questionário 2

Atividade: Matemática e Música

Nome do aluno: ____

Escola: ____

Professor: ____

1) O que é som?
2) O que é frequência?
3) O que significa Hertz?
4) O que são sensações neurais?
5) O que é nota musical?
6) O que é intervalo?
7) O que é acorde?
8) O que é melodia?
9) O que é ritmo?
10) O que é timbre?
11) O que é duração?
12) O que é intensidade?
13) O que é altura?
14) Quais são os nomes dos tempos de cada nota e qual a relação entre eles?
15) O que é escala musical?
16) O que é pauta?
17) Quem foi Pitágoras e qual sua contribuição para a Música?
18) Quem foi John Napier e qual sua contribuição para a Matemática?
19) Quem foi Marin Mersenne e qual sua contribuição para Música e para a Matemática?

20) Em qual cidade e em qual país nasceu Marin Mersenne?

Além de responder as questões, os alunos deverão resolver o seguinte problema (SOUZA, 2012a): A fim de melhorar o aproveitmento desta questão, poderiam ser feitas perguntas sobre propriedades dos logaritmos antes, para induzi-los a responder corretamente.

21) A Música tem ligações muito fortes com a Matemática; uma delas diz respeito à escala musical temperada, que contém 12 semi tons (notas). A Tabela 4 apresenta a relação de cada nota com uma potência de base 2, que é a razão entre a frequência da nota considerada e a frequência da nota DÓ.

Tabela 3 – Relação entre cada nota com uma potência de base 2

Dó	2^0
Dó #	$2^{1/12}$
Ré	$2^{2/12}$
Ré #	$2^{3/12}$
Mi	$2^{4/12}$
Fá	$2^{5/12}$
Fá #	$2^{6/12}$
Sol	$2^{7/12}$
Sol #	$2^{8/12}$
Lá	$2^{9/12}$
Lá #	$2^{10/12}$
Si	$2^{11/12}$

a) Considerando que a razão entre a frequência de uma dessas notas e a da nota DÓ seja 1,6. Determine que nota é essa. Use $\log 2 = 0,3$.

b) A frequência padrão atual para a nota Lá, é 440 Hz. Sabendo que o próximo Lá tem o dobro da frequência do anterior, qual deve ser a frequência da nota Sol, entre esses dois Lás?

c) Qual é a função que está relacionada a formação da escala temperada?

d) Existe uma série numérica que relaciona as notas da escala temperada? Se sim, qual é essa série ?

e) Qual é a razão entre as frequências de duas notas Dó que diferem em uma oitava?

22)Qual é a razão da progressão geométrica existente na formação da escala temperada, em relação à frequência das notas ?

ANEXO C – Respostas do Questionário 2

1) O que é som?

   Segundo Med (MED, 1996), som é a sensação produzida no ouvido pelas vibrações de corpos elásticos. Uma vibração põe em movimento o ar na forma de ondas sonoras que se propagam em todas as direções simultaneamente. Estas atingem a membrana do tímpano fazendo-a vibrar. Transformadas em impulsos nervosos, as vibrações são transmitidas ao cérebro que as identifica como tipos diferentes de sons. Consequentemente, o som só é decodificado através do cérebro.

2) O que é frequência?

   De acordo com Bonjorno (BONJORNO; GIOVANNI; JÚNIOR, 2011), frequência é o número de vezes que o movimento periódico se repete em uma unidade de tempo, que pode ser um segundo, um minuto, etc.

3) O que significa Hertz?

   Segundo Bonjorno (BONJORNO; GIOVANNI; JÚNIOR, 2011), Hertz (Hz) é a unidade usada, no Sistema Internacional, para determinar a frequência.

4) O que são sensações neurais?

   Segundo Cardoso (CARDOSO, 2015), PhD, psico bióloga, mestre e doutora em Ciências, fundadora e editora-chefe da revista Cérebro e Mente, sensações neurais são aquelas transmitidas pelos neurônios.

5) O que é nota musical?

   De acordo com Med (MED, 1996), notas musicais são representações gráficas de formato oval que, pelas posições tomadas na pauta ou pentagrama, indicam sons mais graves ou mais agudos.

6) O que é intervalo?

   Segundo Martineau (MARTINEAU, 2014), intervalo é a diferença de altura entre dois sons.

7) O que é acorde?

   De acordo com Med (MED, 1996), acorde é a combinação de três ou mais sons simultâneos diferentes.

8) O que é melodia?

Segundo Martineau (MARTINEAU, 2014) , melodia é uma sucessão de tons no tempo, organizados em um padrão significativo, e que podem ter durações variadas.

9) O que é ritmo?

   De acordo com Med (MED, 1996), ritmo é a ordem e proporção em que estão dispostos os sons que constituem a melodia e a harmonia.

10) O que é timbre?

    Segundo Jourdain (JOURDAIN, 1998), timbre é o som característico de um instrumento ou voz. O timbre varia segundo os percentuais de início e queda dos sons harmônicos e suas intensidades relativas.

11) O que é duração?

    De acordo com Med (MED, 1996), duração é a extensão de um som, é determinada pelo tempo de emissão das vibrações.

12) O que é intensidade?

    Segundo Med (MED, 1996), intensidade é a amplitude das vibrações, é determinada pela força ou pelo volume do agente que as produz. É o grau de volume sonoro.

13) O que é altura?

    De acordo com Med (MED, 1996), altura é a característica do som determinada pela frequência das vibrações, isto é, da sua velocidade. Quanto maior for a velocidade da vibração, mais agudo será o som.

14) Quais são os nomes dos tempos de cada nota e qual sua relação entre elas?

    Segundo Martineau (MARTINEAU, 2014), os nomes dos tempos são semibreve (1), mínima (2), semínima (4), colcheia (8), semicolcheia (16), fusa (32) e semifusa (64).

15) O que é escala musical?

    De acordo com Med (MED, 1996), escala musical é uma sucessão ascendente ou descendente de notas diferentes consecutivas.

16) O que é pauta?

    Segundo Jourdain (JOURDAIN, 1998), pauta ou pentagrama é a disposição de cinco linhas paralelas horizontais e quatro espaços intermediários, onde se escrevem as notas musicais.

17) Quem foi Pitágoras e qual sua contribuição para a Música?

    De acordo com Contador (CONTADOR, 2006), Pitágoras foi um viajante, filósofo, matemático, astrônomo que construiu o monocórdio, instrumento de uma corda usado para ensaiar e demonstrar o estudo das notas musicais que o levou a descobrir que cordas em vibração emitem sons que dependem de seus comprimentos.

18) Quem foi John Napier?

    Segundo Boyer (BOYER, 1996), Napier era um proprietário que administrava suas grandes propriedades e escrevia sobre vários assuntos. Napier conta que trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados.

19) Quem foi Marin Mersenne e qual sua contribuição para Música e Matemática?

    Segundo Eves (EVES, 2008), Mersenne foi um escritor prolífico em muitos campos e manteve correspondência constante com os maiores matemáticos de seus dias e funcionou admiravelmente, numa época em que não havia revistas especializadas, como uma espécie de câmara de compensação de ideias matemáticas. Para Abdounur (ABDOUNUR, 2002), embora o matemático francês não fosse compositor, intérprete ou artista, ele estabeleceu uma teoria baseada na prática, por exemplo, ao defender e fundamentar um temperamento igual na construção de instrumentos e ao explicar racionalmente as afinações.

20) Em qual cidade nasceu Marin Mersenne?

    Segundo o site math.info (MATHEMATICS; ANDREWS, 2015), Marin Mersenne nasceu na cidade de Oizé, na França.

21) A Música tem ligações muito fortes com a Matemática; uma delas diz respeito à escala musical temperada, que contém 12 semi tons (notas). A Tabela 4 apresenta a relação de cada nota com uma potência de base 2, que é a razão entre a frequência da nota considerada e a frequência da nota DÓ.

Tabela 4 – Relação entre cada nota com uma potência de base 2

Dó	2^0
Dó #	$2^{1/12}$
Ré	$2^{2/12}$
Ré #	$2^{3/12}$
Mi	$2^{4/12}$
Fá	$2^{5/12}$
Fá #	$2^{6/12}$
Sol	$2^{7/12}$
Sol #	$2^{8/12}$
Lá	$2^{9/12}$
Lá #	$2^{10/12}$
Si	$2^{11/12}$

a) Considerando que a razão entre a frequência de uma dessas notas e a da nota DÓ seja 1,6. Determine que nota é essa. Use $\log 2 = 0,3$.

Resolução:

$2^x = 1,6$

$\log 2^x = \log 1,6$

$x \log 2 = \log \frac{16}{10}$

$x(0,3) = \log 16 - \log 10$

$0,3x = \log 2^4 - 1$

$0,3x = 4 \log 2 - 1$

$0,3x = 4(0,3) - 1$

$0,3x = 1,2 - 1$

$0,3x = 0,2$

$x = \frac{0,2}{0,3}$

$x = \frac{2}{3}$.

Então a nota procurada é Sol #.

b) A frequência padrão atual para a nota Lá, é 440 Hz. Sabendo que o próximo Lá tem o dobro da frequência do anterior, qual deve ser a frequência da nota Sol, entre esses dois Lás?

A nota Lá mais próxima da nota Sol procurada possui a frequência de 880 Hz, então para determinar a frequência deste Sol basta dividir 880 por 1,0594631 elevado ao quadrada, chegando ao resultado de 784 Hz, aproximadamente.

c) Qual é a função que está relacionada a formação da escala temperada?

A função que está relacionada a formação da escala temperada é a função exponencial.

d) Existe uma série numérica que relaciona as notas da escala temperada? Se sim, qual é essa série ?

Sim, a série que relaciona as notas da escala temperada é chamada de progressão geométrica.

e) Qual é a razão entre as frequências de duas notas Dó que diferem em uma oitava?

A razão entre as frequências de duas notas Dó que diferem em uma oitava é 2:1.

22) A razão é 1,0594631, aproximadamente.

ANEXO D – Glossário

O glossário a seguir foi elaborado tomando-se como referência os autores Martineau (MARTINEAU, 2014) e Jourdain (JOURDAIN, 1998).

Escala musical temperada - é a escala musical onde as notas são divididas de forma exponencial.

Monocórdio - instrumento idealizado por Pitágoras que originou o estudo da música.

Xilofone - instrumento de percussão, de sons determinados, que consta basicamente de lâminas percutíveis com vários tipos de baquetas.

Oitava - intervalo de oito graus entre duas notas do mesmo nome.

Série harmônica - conjunto de frequências sonoras que soam em simultaneidade com uma nota principal.

Consonância - conjunto agradável de sons, harmonia. Afinidade entre os sons.

Dissonante - som desagradável de ouvir. Desarmonia.

Solfejar - ler ou entoar um trecho musical modulando a voz ou pronunciando o nome das notas.

Frações - número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais.

Aritmética - parte da matemática que investiga as propriedades elementares dos números.

Cosmogônica - relativo aos princípios que governam o mundo, o universo.

Hipérbole - curva plana e aberta que reúne os pontos de um plano cujas distâncias a dois pontos fixos desse plano têm determinada diferença constante.

Elipse - curva plana fechada que reúne todos os pontos que têm como propriedade comum a soma das suas distâncias em relação a dois pontos fixos no interior da curva.

Número primo - número natural que possui somente dois divisores que são ele mesmo e a unidade (um).

Oboé - instrumento musical, de sopro, feito de madeira, com palheta dupla.