



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# Cônicas, Álgebra Linear e GeoGebra, uma Combinação que Deu Certo.

Vitor Rodrigues Braga de Souza

Goiânia

2014

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:** **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

**2. Identificação do Trabalho**

Autor (a):	<b>VITOR RODRIGUES BRAGA DE SOUZA</b>		
E-mail:	<b>Vitao_braga@hotmail.com</b>		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo empregatício do autor	<b>PROFESSOR DO COLÉGIO SANTO AGOSTINHO</b>		
Agência de fomento:		Sigla:	
País:	<b>BRASIL</b>	UF:	<b>GO</b> CNPJ:
Título:	<b>CÔNICAS, ÁLGEBRA LINEAR E GEOGEBRA, UMA COMBINAÇÃO QUE DEU CERTO.</b>		
Palavras-chave:	<b>Elipse, Hipérbole, Parábola, Transformações Lineares, GeoGebra.</b>		
Título em outra língua:	<b>Conical, linear algebra and Geogebra, a right combination.</b>		
Palavras-chave em outra língua:	<b>Ellipse, Hyperbola, Parabola, Linear Transformations, GeoGebra.</b>		
Área de concentração:	<b>MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO</b>		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	<b>26/09/2014</b>		
Programa de Pós-Graduação:	<b>MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA ProfMat-IME-UFG</b>		
Orientador (a):	<b>DR. OLE PETER SMITH</b>		
E-mail:	<b>ole@ufg.br</b>		
Co-orientador(a):*	<b>Não houve</b>		
E-mail:	<b>Não houve</b>		

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

\_\_\_\_\_  
Assinatura do(a) autor (a)

Data: 26 / 10 / 2014

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Vitor Rodrigues Braga de Souza

Cônicas, Álgebra Linear e GeoGebra, uma  
Combinação que Deu Certo.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith.

Goiânia

2014

Ficha catalográfica elaborada automaticamente  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Souza, Vitor Rodrigues Braga de  
Cônicas, Algebra Linear e GeoGebra, uma Combinação que Deu Certo  
[manuscrito] / Vitor Rodrigues Braga de Souza. - 2014.  
lxxxii, 82 f.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de  
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Goiânia, 2014.

Bibliografia.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, tabelas, lista de figuras.

1. Elipse. 2. Hiperbole. 3. Parabola. 4. Transformações Lineares. 5.  
GeoGebra. I. Smith, Ole Peter, orient. II. Título.

**Vitor Rodrigues Braga de Souza**

**Cônicas, Álgebra Linear e GeoGebra, uma  
Combinação que Deu Certo**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 26 de setembro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. Ole Peter Smith**

Instituto de Matemática e Estatística-UFG  
Presidente da Banca, orientador



---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sílvia Cristina Belo e Silva**

Membro, MAF/PUC-GO



---

**Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues**

Membro, Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Vitor Rodrigues Braga de Souza** graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, é especialista em Matemática pela Universidade Federal de Goiás. É professor no Ensino Médio, na rede particular de ensino, em Goiânia - GO e em Palmas - TO. É professor universitário da rede particular, também em Goiânia - Go .

Dedico este trabalho a Deus, a minha esposa Emily e  
aos meus pais Vitorino e Maria Celia.

# Agradecimentos

- À Deus, pela proteção durante este percurso da minha carreira estudantil, por ter me dado a oportunidade e a capacidade, pois sem Deus nada disso seria possível. À ele toda honra e toda glória.
- Aos meus pais, “Vitorino e Maria Celia” pelo apoio e incentivo desde os tempos de graduação, nas horas difíceis e também nas horas de alegria.
- À minha esposa Emilly, compreensiva, companheira e amorosa, que sempre me apoiou e sempre compreendeu a minha ausência, momentos estes, onde dedicava tempo e forças para a elaboração deste trabalho e para conclusão deste mestrado.
- Às minhas irmãs, Juliana e Viviane, que sempre estiveram ali, dando carinho e amor.
- Em especial, ao Prof. Dr. Ole Peter Smith, pela amizade, paciência e dedicação que foram indispensáveis para a concretização deste trabalho.
- A todos os meus familiares e amigos, que apoiaram-me em mais um degrau de minha vida.
- Aos colegas de PROFMAT: Gleisson Santana, Mário Jonas e José Morais, que dedicaram juntos comigo horas de estudo, empenho e dedicação.
- Gostaria de agradecer ao professor Dr. Clodoaldo Valverde, amigo que sempre me incentivou a seguir o caminho do aprendizado. Qualificar-se é preciso.



- Finalmente, gostaria de agradecer também aos idealizadores desse projeto - IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). O PROFMAT me fez crescer exponencialmente enquanto professor, melhorou significativamente o meu conhecimento. Minhas aulas preparatórias para as Olimpíadas de Matemática - OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática) e OMEG (Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás) - se tornaram infinitamente mais produtivas.

## Resumo

Na primeira parte desse trabalho, apresentamos todas as cônicas com suas respectivas equações cartesianas e seus respectivos gráficos. Em seguida, fizemos uma abordagem de conceitos de Álgebra Linear, espaços vetoriais, transformações lineares, autovalores e autovetores afim de, construir as matrizes de transformações lineares capazes de rotacionar, transladar ou até fazer o cisalhamento destas cônicas. Construídas as matrizes, foi utilizado o software GeoGebra para a construção dos gráficos obtidos pelas matrizes de transformação. Além dessa parte geométrica, abordamos as formas quadráticas no intuito de identificar uma cônica analisando apenas os coeficientes da sua forma quadrática e os autovalores associados. O resultado final foi um excelente material visual construído a partir do software GeoGebra aplicando os conceitos de Álgebra Linear. Não podemos deixar de citar que foram implementadas técnicas de construção das cônicas no GeoGebra que substituem a régua, o compasso e o barbante utilizados pelos gregos antigos.

**Palavras-chave**

Elipse, Hipérbole, Parábola, Autovalores, Autovetores, Transformações Lineares, Matrizes de Transformações Lineares, GeoGebra.

## **Abstract**

In the first part of this work, we present all conical with their cartesian equations and their graphs. Then, we made an approach to concepts of linear algebra, vector spaces, linear transformations, eigenvalues and eigenvectors in order to build matrices of linear transformations able to rotate, translate or even make these conical shear. Constructed matrices, GeoGebra software for constructing graphs obtained by transformation matrices were used. Besides this geometric part, we discuss the quadratic forms in order to identify a conic analyzing only the coefficients of its quadratic form and the eigenvalues. The end result was an excellent visual material built from software GeoGebra applying the concepts of Linear Algebra. We can not fail to mention that the construction of the taper in GeoGebra techniques that replace the ruler, compass and the string used by the ancient Greeks were implemented.

**Keywords**

Ellipse, Hyperbola, Parabola, Eigenvalues??, Eigenvectors, Linear Transformations, Matrices of Linear Transformations, GeoGebra.

# Lista de Figuras

1.1	Elipse construída com o auxílio do software GeoGebra. . . . .	22
1.2	Elipse construída com o auxílio do software GeoGebra. . . . .	23
1.3	Elipse centrada na origem, com eixo maior $2a$ sobre o eixo $Ox$ . . . . .	24
1.4	Elipse centrada na origem, com eixo maior $2a$ sobre o eixo $Oy$ . . . . .	25
1.5	Propriedade: $a^2 = b^2 + c^2$ . . . . .	26
1.6	Hipérbole construída com o Software Geogebra. . . . .	27
1.7	Hipérbole construída com o Software Geogebra. . . . .	29
1.8	Hipérbole com eixo focal sobre o eixo $Ox$ . . . . .	29
1.9	Hipérbole com eixo focal sobre o eixo $Oy$ . . . . .	30
1.10	Parábola construída com o Software GeoGebra. . . . .	32
1.11	Parábola construída com o Software GeoGebra. . . . .	33
1.12	Parábola com eixo focal sobre o eixo $Oy$ . . . . .	34
1.13	Parábola com eixo focal sobre o eixo $Ox$ . . . . .	34
1.14	Parábola com eixo focal sobre o eixo $Oy$ . . . . .	35
1.15	Parábola com eixo focal sobre o eixo $Ox$ . . . . .	35
2.1	Cisalhamento feito no software GeoGebra . . . . .	39
2.2	Cisalhamento feito no software GeoGebra . . . . .	41
2.3	Cisalhamento feito no software GeoGebra . . . . .	43
2.4	Cisalhamento feito no software GeoGebra . . . . .	43
2.5	Cisalhamento feito no software GeoGebra . . . . .	45
2.6	Reflexão em torno do eixo $Ox$ feito no software GeoGebra . . . . .	45
2.7	Reflexão em torno do eixo $Oy$ feito no software GeoGebra . . . . .	46
2.8	Reflexão com relação à origem feito no software GeoGebra . . . . .	47
2.9	Reflexão com relação à origem feito no software GeoGebra . . . . .	48
2.10	Projeção sobre o eixo $Ox$ feito no software GeoGebra . . . . .	49

2.11	Projeção sobre o eixo $Ox$ feito no software GeoGebra . . . . .	49
2.12	Projeção ortogonal sobre o eixo $Oy$ feito no software GeoGebra . . . . .	50
2.13	Projeção ortogonal sobre o eixo $Oy$ feito no software GeoGebra . . . . .	51
2.14	Rotação no sentido anti-horário. . . . .	51
2.15	Rotação feita no software GeoGebra . . . . .	53
3.1	Operador linear $T(v) = 2v$ . . . . .	55
4.1	Mudança de coordenadas. . . . .	60
4.2	Ângulo $\theta$ entre os eixos $x$ e $y$ e os novos eixos $x'$ e $y'$ . . . . .	62
5.1	Circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(3, 1)$ . . . . .	65
5.2	Elipse. Eixos vermelhos $x'y'$ . Eixos azuis $x''y''$ . . . . .	72
5.3	Hipérbole construída a partir do software GeoGebra descrito no capítulo ' Hipérbole. . . . .	77
5.4	Elipse construída a partir do software GeoGebra. . . . .	78

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>18</b>
<b>1 Cônicas</b>	<b>21</b>
1.1 Elipse . . . . .	21
1.1.1 Forma Canônica da Elipse . . . . .	23
1.2 Hipérbole . . . . .	25
1.2.1 Forma Canônica da Hipérbole . . . . .	28
1.3 Parábola . . . . .	31
1.3.1 Forma Canônica da Parábola . . . . .	33
<b>2 Operações Geométricas</b>	<b>37</b>
2.1 Transformações Lineares . . . . .	37
2.1.1 Cisalhamento Horizontal . . . . .	38
2.1.2 Cisalhamento Vertical . . . . .	42
2.1.3 Reflexão em Torno do Eixo $Ox$ . . . . .	44
2.1.4 Reflexão em Torno do Eixo $Oy$ . . . . .	45
2.1.5 Reflexão com Relação à Origem . . . . .	46
2.1.6 Projeção Ortogonal Sobre o Eixo $Ox$ . . . . .	47
2.1.7 Projeção Ortogonal Sobre o Eixo $Oy$ . . . . .	50
2.1.8 Rotação de um Ângulo $\theta$ . . . . .	50
2.1.9 Translação . . . . .	53
<b>3 Autovalor e Autovetor</b>	<b>54</b>
<b>4 Sistema de Coordenadas</b>	<b>58</b>
4.1 Rotação dos Eixos Coordenados . . . . .	61



<b>5</b>	<b>Aplicações dos Autovalores e Autovetores nas Cônicas</b>	<b>64</b>
5.1	Generalização das Cônicas . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>81</b>

# Introdução

Este trabalho é composto de 5 capítulos, nos quais foram feitos estudos que associam Geometria Analítica e Álgebra Linear, no que diz respeito as seguintes cônicas: elipse, hipérbole e parábola. O principal objetivo era construir os seus gráficos e efetuar algumas transformações lineares nas cônicas utilizando o Software GeoGebra e também, o processo inverso, a partir da equação de uma cônica, identificar os autovalores e autovetores associados, encontrar seus componentes e fazer o seu gráfico utilizando também o Software GeoGebra.

Para começar o estudo, foi necessário o uso de algumas definições preliminares. No início de cada capítulo foram apresentadas as definições importantes e relevantes para sua compreensão. Todos os capítulos tem essa estrutura, inicia-se com a apresentação das definições preliminares e em seguida apresenta-se alguns exemplos e gráficos que ilustram cada caso.

No capítulo 1 foram apresentadas todas as cônicas através de seus conceitos geométricos e a partir dessas definições, suas equações foram determinadas. Também foram apresentados os seu gráficos nos dois aspectos, um apenas geométrico mostrando uma estratégia de construção no GeoGebra diferente do clássico método que utiliza régua e compasso, já o outro no sistema cartesiano buscando as condições necessárias e suficientes para determinar cada uma das equações.

O capítulo 2 apresenta as transformações lineares e um exemplo de cada uma delas feito no software GeoGebra. O exemplo 3 é o que mais chama atenção, nele é feito o cisalhamento horizontal de uma elipse, a seguir, é retomado no último capítulo para mostrar que de fato, o resultado obtido é uma nova elipse. Utilizando este exemplo, foi feito um roteiro de como utilizar a matriz de transformação para gerar a elipse "cisalhada" no GeoGebra.

O capítulo 3 foi reservado para os autovalores e autovetores, definindo e mostrando

como determiná-los.

As mudanças de sistemas de coordenadas por translação ou por rotação, são mostrados no capítulo 4.

O núcleo deste trabalho ocorre no capítulo 5. Neste capítulo é feita a generalização de uma cônica e é apresentada a forma matricial, que está associada aos autovalores da matriz associada a sua equação. Foi enunciado e demonstrado o teorema que segue:

**Teorema 0.0.1.** *Se  $B \neq 0$  na equação geral das cônicas*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

a matriz

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

tem dois autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reais e distintos.

Foi observado que os autovetores da matriz  $M$  tem as propriedades descritas no teorema abaixo:

**Teorema 0.0.2.** *Sejam  $v_1 = (a_{11}, a_{21})$  e  $v_2 = (a_{12}, a_{22})$  autovetores da matriz  $M$  descrita no teorema 5.1.1, respectivamente, associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Então,*

a)  $v_1$  e  $v_2$  são perpendiculares entre si, isto é,

$$v_1 \cdot v_2 = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

b) Se  $v_1$  e  $v_2$  são vetores unitários e

$$N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

A partir destes dois teoremas e das definições apresentadas nos capítulos anteriores, podemos caracterizar a equação de uma cônica e classificá-la. Porém, o trabalho ainda continua árduo, as contas continuam grandes. Finalmente, foi demonstrado o seguinte teorema, que facilita ainda mais o processo de identificação da cônica:

**Teorema 0.0.3.** *Dada uma cônica definida pela equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , com  $B \neq 0$ . Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os auto valores associados à sua forma quadrática, então:*

- i) Se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$  esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações (um ponto ou o vazio).*
- ii) Se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$  esta equação representa uma hipérbole ou sua degeneração (par de retas concorrentes).*
- iii)  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$  esta equação representa uma parábola ou suas degenerações (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio).*

Pudemos enfim, associar os coeficientes da equação da cônica com os autovalores associados a matriz  $M$ , assim, o teorema acima pode ser interpretado como segue:

**Teorema 0.0.4.** *Dada a equação:  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , com  $B \neq 0$ , esta equação no plano representará:*

- i) uma elipse ou suas degenerações, se  $B^2 - 4AC < 0$ ;*
- ii) uma parábola ou suas degenerações, se  $B^2 - 4AC = 0$ ;*
- iii) uma hipérbole, se  $B^2 - 4AC > 0$ .*

# Capítulo 1

## Cônicas

### 1.1 Elipse

Sejam  $F_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $F_2 \in \mathbb{R}^2$  e  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Chamamos de elipse  $\mathcal{E}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  e eixo maior  $2a$ , o conjunto de pontos  $P \in \mathbb{R}^2$  cuja soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2a$ . Sendo  $2a > 2c$ , e  $2c \in \mathbb{R}_+^*$  é a distância focal, ou seja,  $d(F_1, F_2) = 2c$ .

$$\mathcal{E} = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a\} \quad (1.1)$$

Graficamente, podemos construir a elipse fazendo uso do software GeoGebra seguindo os seguintes passos:

- Escolha dois pontos  $F_1$  e  $F_2$ ;
- Trace a semirreta de origem  $F_1$  passando por  $F_2$ ;
- Trace um círculo de centro  $F_1$  contendo  $F_2$  no seu interior;
- Escolha um ponto  $D$  no círculo não pertencente à semirreta  $\overline{F_1F_2}$ ;
- Trace os segmentos  $\overline{DF_1}$  e  $\overline{DF_2}$ ;
- Trace a mediatriz do segmento  $\overline{DF_2}$  e determine o ponto  $P$  onde ela intersecta o segmento  $\overline{DF_1}$ ;

Note que o ponto  $P$  pertence à elipse  $\mathcal{E}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  com  $2a = d(F_1, D)$ . Isso é verdade pois, como o ponto  $P$  pertence à mediatriz de  $\overline{DF_2}$ , temos  $d(P, D) = d(P, F_2)$  e, portanto,  $2a = d(F_1, D) = d(F_1, P) + d(P, D) = d(F_1, P) + d(P, F_2)$ .

Feito isso, o resultado é o da figura 1.1.

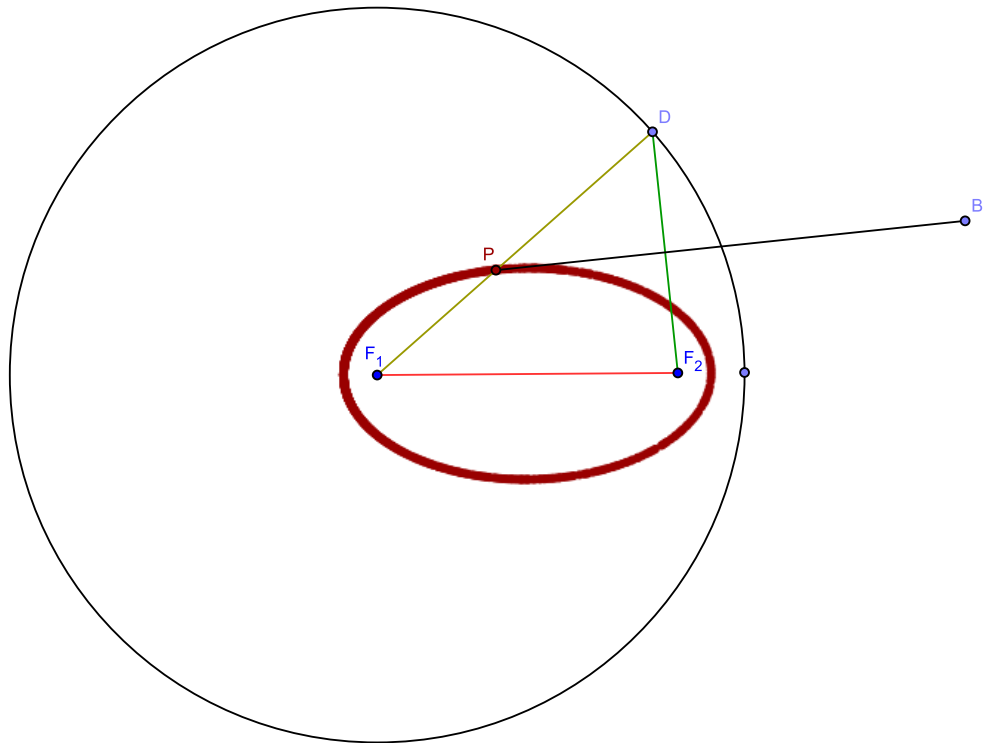


Figura 1.1: Elipse construída com o auxílio do software GeoGebra.

### Notação

- Seja  $r$  a reta focal, ou seja, a reta que contem os focos  $F_1$  e  $F_2$ .
- A intersecção da reta  $r$  com a elipse tem dois pontos:  $A_1$  e  $A_2$ ; que serão chamados de **vértices da elipse**. Tais pontos são distintos dos focos  $F_1$  e  $F_2$  e são externos ao segmento  $\overline{F_1F_2}$ .
- O ponto  $O$ , que é ponto médio de  $A_1$  e  $A_2$ , será chamado de **centro da elipse**.

- A reta  $s$ , que passa por  $O$  e é perpendicular a reta  $r$ , chamaremos de **reta não focal**.
- A intersecção da reta  $s$  com a elipse tem dois pontos:  $B_1$  e  $B_2$ ; esses pontos também serão chamados de **vértices da elipse**.
- O número  $e = \frac{c}{a}$  será chamado de excentricidade da elipse. Note que  $0 \leq e < 1$ .
- O número real positivo  $b$ , é a distância do centro da elipse a quaisquer um dos vértices que estão sobre a reta não focal.

A figura 1.2 mostra a elipse e seus componentes.

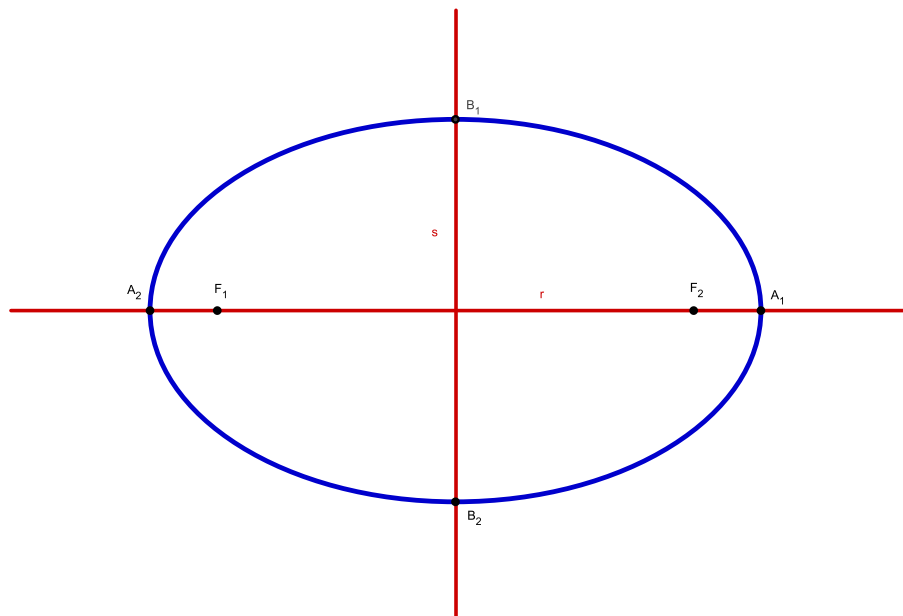


Figura 1.2: Elipse construída com o auxílio do software GeoGebra.

### 1.1.1 Forma Canônica da Elipse

A seguir, vamos deduzir uma equação da elipse na situação particular em que seu centro coincide com a origem do Plano Cartesiano e os focos estão sobre os eixos coordenados. Temos dois casos, conforme figura 1.3 e figura 1.4.

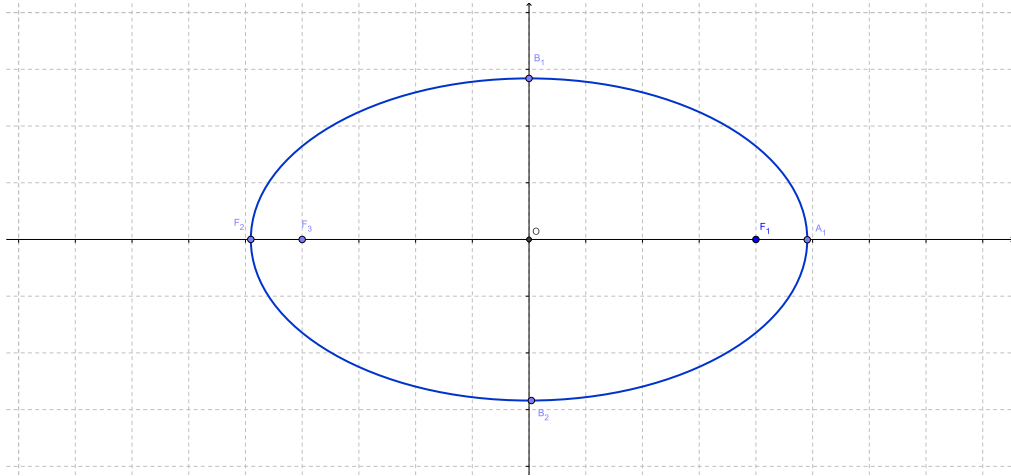


Figura 1.3: Elipse centrada na origem, com eixo maior  $2a$  sobre o eixo  $Ox$ .

**Primeiro caso:** Suponha que os focos estejam sobre o eixo  $Ox$ , como na figura 1.4, assim teremos:

$A_1 = (a, 0)$ ,  $A_2 = (-a, 0)$ ,  $B_1 = (0, b)$ ,  $B_2 = (0, -b)$ ,  $F_1 = (c, 0)$ ,  $F_2 = (-c, 0)$  e  $0 = (0, 0)$ .

Aplicando a definição de elipse,  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , tal que  $P(x, y)$  é um ponto qualquer da elipse, teremos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando os dois membros da última equação acima ao quadrado, obtemos a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.2}$$

Note que  $a^2 = b^2 + c^2$ , ilustrado na figura 1.5.

**Segundo caso:** Suponha que os focos estejam sobre o eixo  $Oy$ , assim teremos:

$A_1 = (0, a)$ ,  $A_2 = (0, -a)$ ,  $B_1 = (b, 0)$ ,  $B_2 = (-b, 0)$ ,  $F_1 = (0, c)$ ,  $F_2 = (0, -c)$  e  $0 = (0, 0)$ .

Aplicando a definição de elipse,  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , tal que  $P(x, y)$  é um ponto qualquer da elipse, teremos:



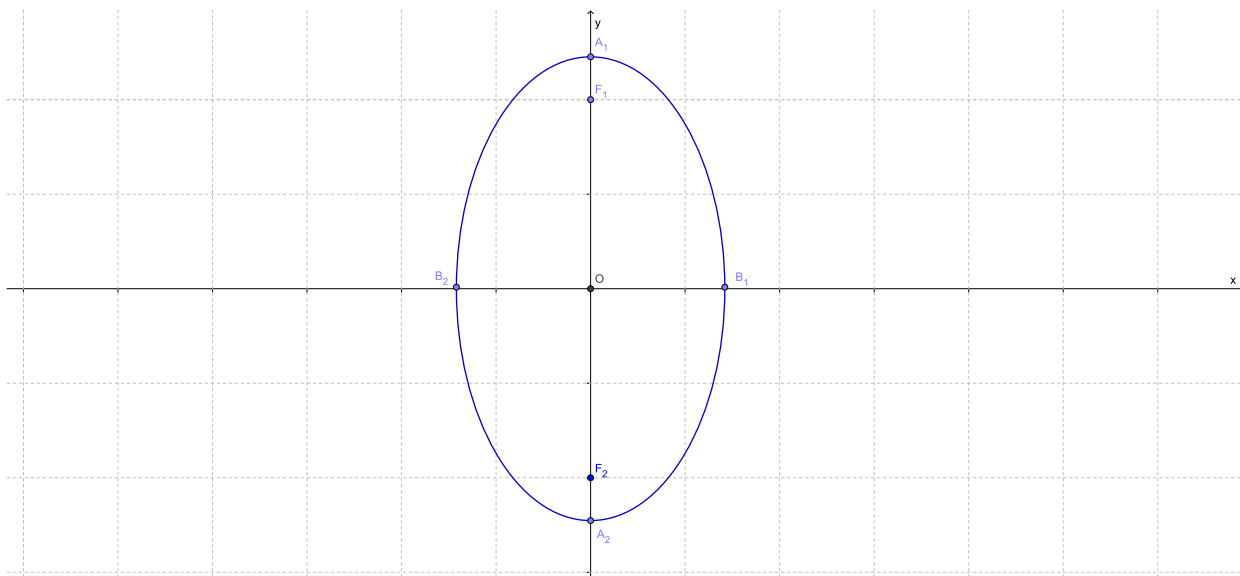


Figura 1.4: Elipse centrada na origem, com eixo maior  $2a$  sobre o eixo  $Oy$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y - c)^2} + \sqrt{x^2 + (y + c)^2} &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + (y - c)^2} &= 2a - \sqrt{x^2 + (y + c)^2} \end{aligned}$$

Elevando os dois membros da última equação acima ao quadrado, obtemos a equação:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{1.3}$$

## 1.2 Hipérbole

Sejam  $F_1 \in \mathbb{R}^2$ ,  $F_2 \in \mathbb{R}^2$  e  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . Chamamos de hipérbole  $\mathcal{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  e eixo  $2a$ , o conjunto de pontos  $P \in \mathbb{R}^2$  cujo módulo da diferença das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2a > 0$  e menor que a distância focal  $2c$ . Sendo  $0 < a < c$ , e  $2c \in \mathbb{R}_+^*$  é a distância focal, ou seja,  $d(F_1, F_2) = 2c$ .

$$\mathcal{H} = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a\} \tag{1.4}$$

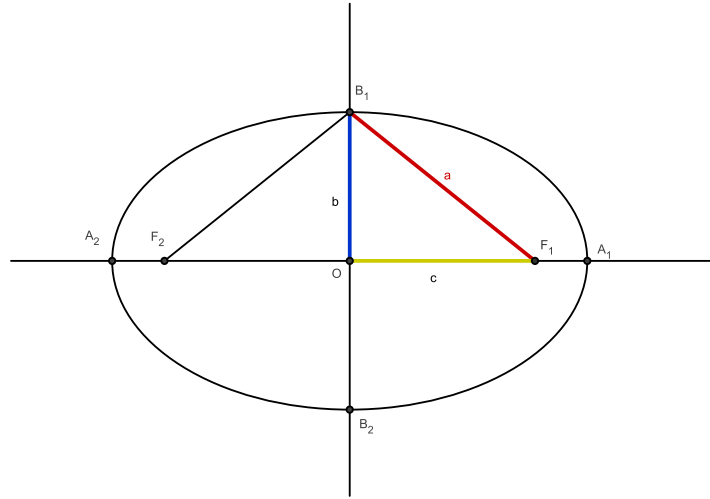


Figura 1.5: Propriedade:  $a^2 = b^2 + c^2$ .

Graficamente, podemos construir a hipérbole fazendo uso do software GeoGebra seguindo os seguintes passos:

- Escolha os pontos  $F_1$  e  $F_2$  e trace a semirreta  $r$  de origem  $F_1$  passando por  $F_2$ ;
- Escolha um ponto  $A$  na semirreta  $r$  entre  $F_1$  e  $F_2$ ;
- Trace o círculo  $\mathcal{C}$  de centro  $F_1$  que passa pelo ponto  $A$ ;
- Escolha um ponto  $B$  no círculo  $\mathcal{C}$  diferente de  $A$ ;
- Trace a reta  $s$  que passa por  $F_1$  e  $B$ ;
- Trace a mediatriz  $m$  do segmento  $\overline{BF_2}$ ;
- Determine o ponto  $P$  dado pela intersecção da reta  $s$  com a mediatriz  $m$ ;
- O ponto  $P$  descreve uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ , quando o ponto  $B$  se move ao longo do círculo  $\mathcal{C}$ .
- Habilite o rastro no ponto  $P$  e mova o ponto  $B$  para desenhar a hipérbole.

Note que o ponto  $P$  pertence à hipérbole  $\mathcal{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  com  $2a = d(F_1, B)$ . Isso é verdade pois, como o ponto  $P$  pertence à mediatriz de  $\overline{BF_2}$ , temos  $d(P, B) = d(P, F_2)$  e, portanto,  $2a = d(F_1, B) = d(F_1, P) - d(P, B) = d(F_1, P) - d(P, F_2)$ . Devemos ressaltar que esta última diferença deve estar em módulo para garantirmos que  $2a$  seja um número real positivo, pois se trata do comprimento de um segmento. Portanto, temos:

$$|d(F_1, P) - d(P, F_2)| = 2a$$

Feito isso, o resultado é o da figura 1.6.

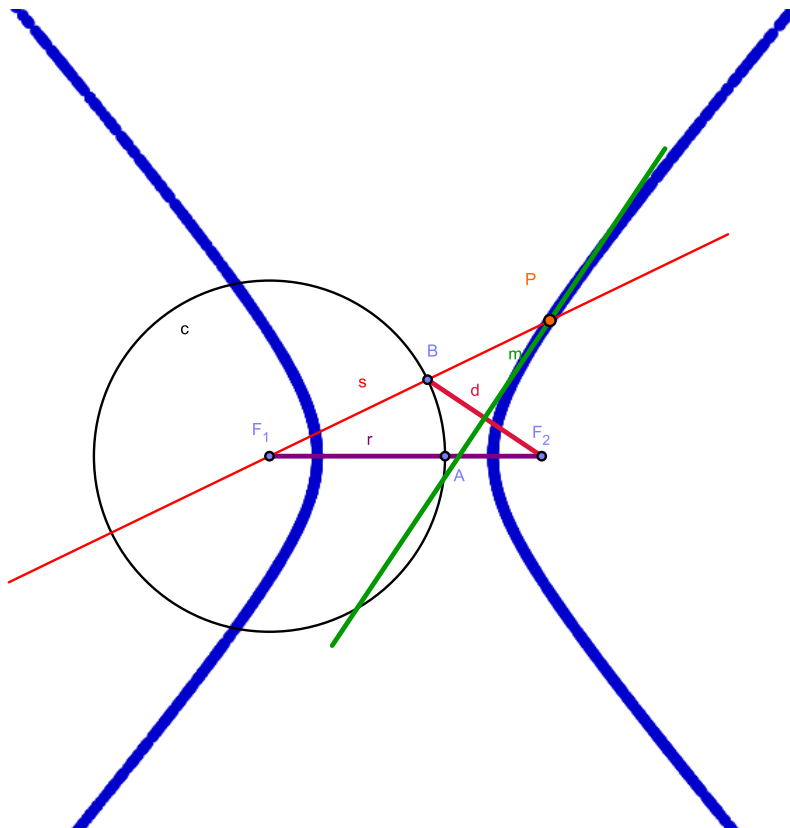


Figura 1.6: Hipérbole construída com o Software Geogebra.

### Notação

- Seja  $r$  a reta focal, ou seja, a reta que contem os focos  $F_1$  e  $F_2$ .
- A intersecção da reta  $r$  com a hipérbole tem dois pontos:  $A_1$  e  $A_2$ ; que serão chamados de **vértices da hipérbole**. Tais pontos são distintos dos focos  $F_1$  e  $F_2$  e são internos ao segmento  $\overline{F_1F_2}$ .

- O ponto  $O$ , que é ponto médio de  $A_1$  e  $A_2$ , será chamado de **centro da hipérbole**.
- A reta  $s$ , que passa por  $O$  e é perpendicular a reta  $r$ , chamaremos de **reta não focal**.
- O segmento  $\overline{B_1B_2}$  perpendicular ao eixo focal, que tem ponto médio  $O$  e comprimento  $2b$ , onde  $b^2 = c^2 - a^2$ , pertence a reta não focal, e  $B_1$  e  $B_2$  são os vértices imaginários da hipérbole.
- A excentricidade da hipérbole  $\mathcal{H}$  é:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Note que  $e > 1$ , pois  $c > a$ .

- O **Retângulo da Base** da hipérbole é o retângulo cujos lados tem  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  como pontos médios. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as **assíntotas** da hipérbole. Portanto, as assíntotas de  $\mathcal{H}$  são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação  $\pm \frac{b}{a}$  em relação à reta focal. Assim,  $r$  e  $s$  são as bissetrizes das assíntotas.

A hipérbole  $\mathcal{H}$  e seus componentes podem ser vistos na figura 1.7.

### 1.2.1 Forma Canônica da Hipérbole

A seguir, vamos deduzir uma equação da hipérbole na situação particular em que seu centro coincide com a origem do Plano Cartesiano e os focos estão sobre os eixos coordenados. Temos dois casos, que podem ser vistos nas figuras 1.8 e 1.9.

**Primeiro caso:** Suponha que os focos estejam sobre o eixo  $Ox$ , como na figura 1.8, assim teremos:

$A_1 = (a, 0)$ ,  $A_2 = (-a, 0)$ ,  $B_1 = (0, b)$ ,  $B_2 = (0, -b)$ ,  $F_1 = (c, 0)$ ,  $F_2 = (-c, 0)$  e  $O = (0, 0)$ .

Vamos aplicar a definição da hipérbole,  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ , tal que  $P(x, y)$  é um ponto qualquer da hipérbole. Pela definição de módulo temos dois casos:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \tag{1.5}$$

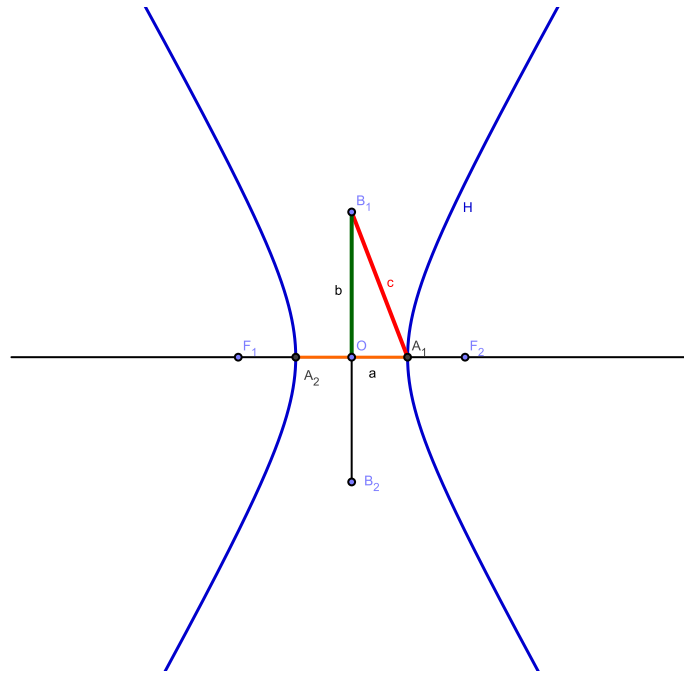


Figura 1.7: Hipérbole construída com o Software Geogebra.

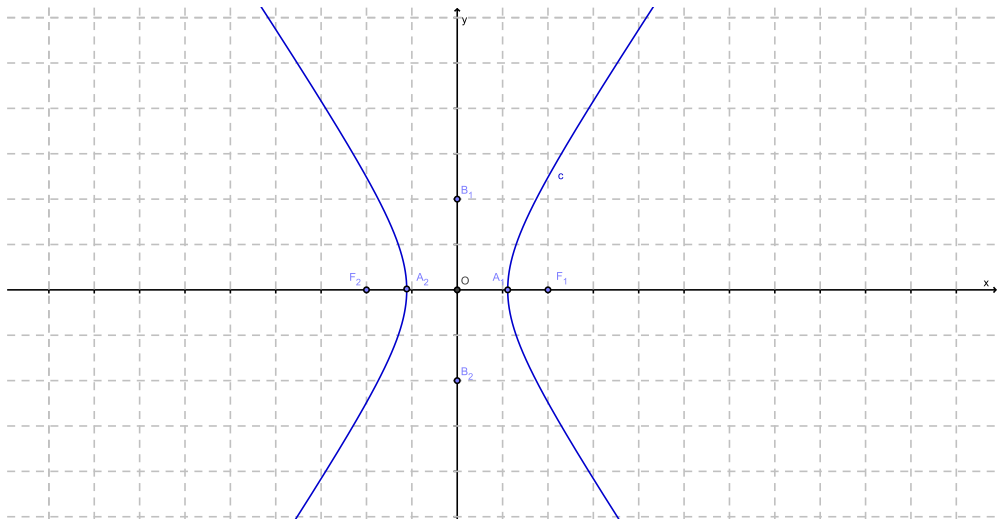


Figura 1.8: Hipérbole com eixo focal sobre o eixo  $Ox$ .

e

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a. \tag{1.6}$$

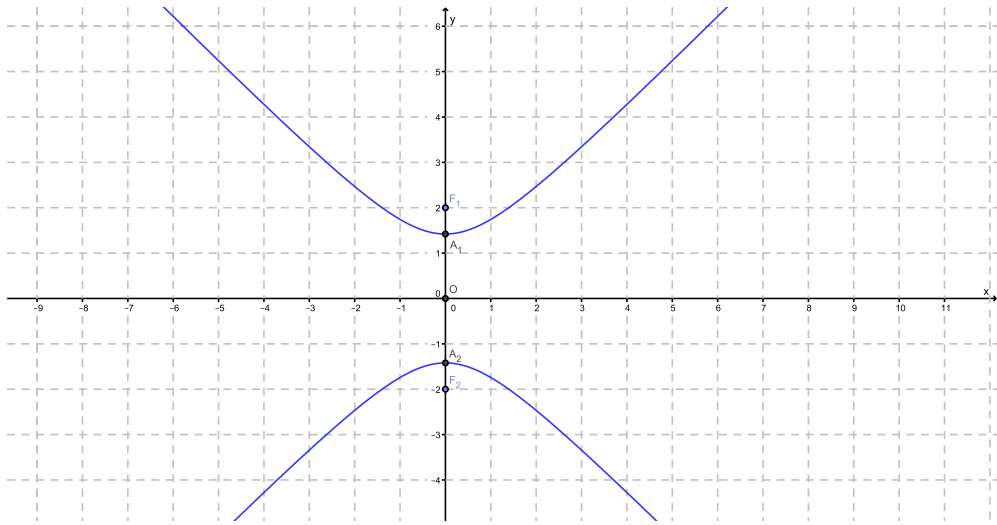


Figura 1.9: Hipérbole com eixo focal sobre o eixo  $Oy$ .

Resolveremos apenas a equação 1.5 isolando uma das raízes e elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, a equação 1.6 se torna equivalente quando elevamos os dois membros ao quadrado. Desse modo temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Efetuando as contas necessárias temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.7)$$

**Segundo caso:** Suponha que os focos estejam sobre o eixo  $Oy$ , como na figura 1.9, assim teremos:

$A_1 = (0, b)$ ,  $A_2 = (0, -b)$ ,  $B_1 = (a, 0)$ ,  $B_2 = (-a, 0)$ ,  $F_1 = (0, c)$ ,  $F_2 = (0, -c)$  e  $O = (0, 0)$ .

Vamos aplicar a definição da hipérbole,  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ , tal que  $P(x, y)$  é um ponto qualquer da hipérbole. Pela definição de módulo temos dois casos:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \quad (1.8)$$

e

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = -2a. \quad (1.9)$$

Resolveremos apenas a equação 1.8 isolando uma das raízes e elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, a equação 1.9 se torna equivalente quando elevamos os dois membros ao quadrado. Desse modo temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x^2 + (y - c)^2)} - \sqrt{x^2 + (y + c)^2} &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + (y - c)^2} &= 2a + \sqrt{x^2 + (y + c)^2}. \end{aligned}$$

Efetuando as contas necessárias temos:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (1.10)$$

### 1.3 Parábola

Sejam  $F \in \mathbb{R}^2$  e  $r$  uma reta. Chamamos de parábola  $\mathcal{P}$  de foco  $F$  e diretriz  $r$ , o conjunto de pontos  $P \in \mathbb{R}^2$  tais que  $d(P, F) = d(P, r)$ .

$$\mathcal{P} = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / d(P, F) = d(P, r)\} \quad (1.11)$$

Graficamente, podemos construir a parábola fazendo o uso do software GeoGebra seguindo os seguintes passos:

- Numa janela do GeoGebra, trace a reta  $r$  por dois pontos  $A$  e  $B$  (diretriz da parábola);
- Escolha um ponto  $F$ , para ser o foco da parábola, fora de  $r$ ;
- Escolha um ponto  $D$  em  $r$ ;
- Trace a reta mediatriz  $s$  do segmento  $\overline{FD}$ ;

- Trace a reta  $t$  perpendicular à diretriz  $r$  que passa pelo ponto  $D$ ;
- Determine a intersecção  $P$  da mediatriz  $s$  com a reta  $t$
- Habilite o rastro no ponto  $P$ ;
- Descreva a parábola de foco  $F$  e diretriz  $r$ , movendo o ponto  $D$  da diretriz.

Note que o ponto  $P$  pertence à parábola  $\mathcal{P}$  de foco  $F$  e diretriz  $r$ . Isso é verdade pois, como o ponto  $P$  pertence à mediatriz de  $\overline{FD}$ , temos  $d(P, D) = d(P, F)$ , tendo em vista que o triângulo  $FDP$  é isóceles, cujo lado diferente é o segmento  $\overline{FD}$ .

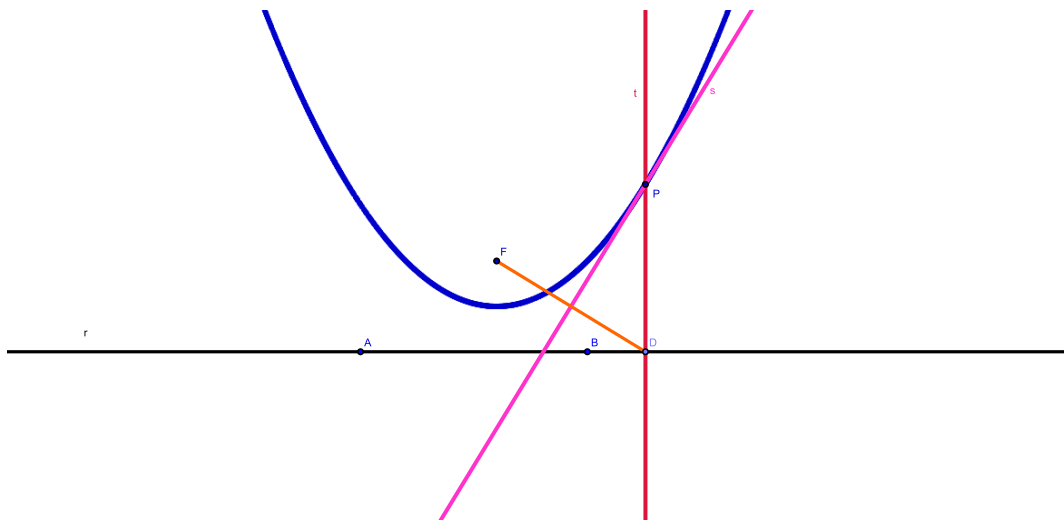


Figura 1.10: Parábola construída com o Software GeoGebra.

Feito isso, o resultado é o da figura 1.10.

#### Notação

- A reta  $r$  é a **reta diretriz da parábola  $\mathcal{P}$** ;
- A reta  $l$  que é perpendicular à reta diretriz da parábola  $\mathcal{P}$ , será chamada de **reta focal da parábola**;
- O ponto  $V$  da parábola que pertence à reta focal, é o **vértice da parábola**. Em particular, se  $A$  é o ponto onde  $r$  intersepta  $l$ , então  $V$  é o ponto médio do segmento  $\overline{AF}$ ;
- O ponto  $F$  é o **foco da parábola**;



- O número  $2a = d(F, r)$  é o **parâmetro da parábola**. Note que  $d(F, V) = a$ .

A parábola  $\mathcal{P}$  e seus componentes podem ser vistos na figura 1.11.

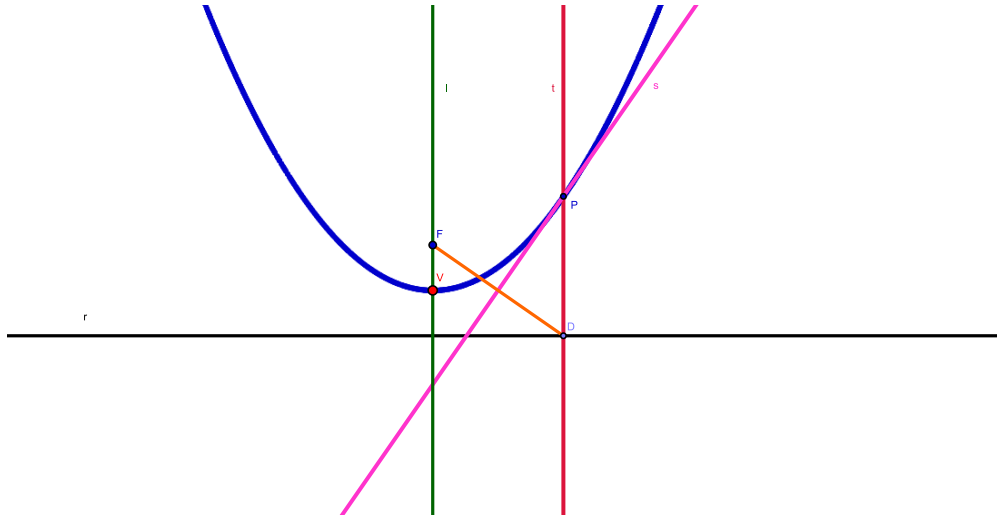


Figura 1.11: Parábola construída com o Software GeoGebra.

### 1.3.1 Forma Canônica da Parábola

A seguir, vamos deduzir uma equação para a parábola na situação particular em que seu vértice coincide com a origem do Plano Cartesiano e cujo foco está sobre algum dos eixos coordenados. Desse modo, temos quatro casos a serem analisados, que estão representados nas figuras 1.12, 1.13, 1.14 e 1.15.

**Primeiro caso:** Suponha que o eixo focal  $l$  seja coincidente com o eixo  $Ox$ , conforme figura 1.12. Sendo assim a reta diretriz da parábola será paralela ao eixo  $Ox$ . Se  $d(F, r) = 2a$ , então o foco é  $F(0, a)$  e a equação da diretriz é

$$r : y = -a.$$

Um ponto  $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pertencerá a parábola  $\mathcal{P}$  se, e somente se,

$$d(P, F) = d(P, r) \tag{1.12}$$

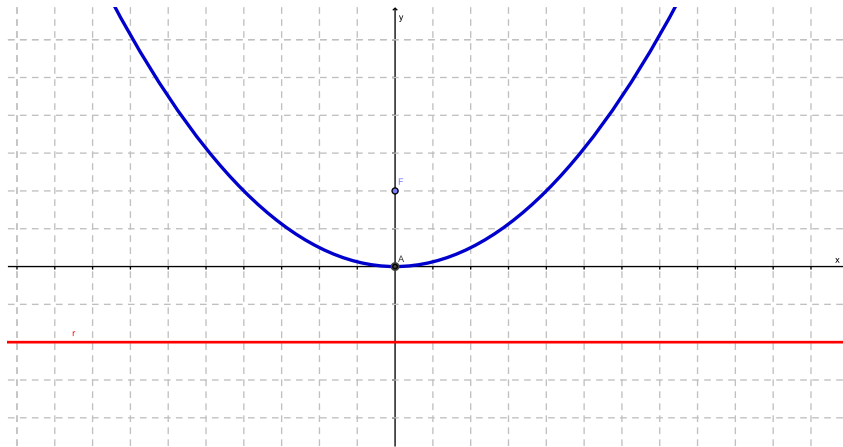


Figura 1.12: Parábola com eixo focal sobre o eixo Oy.

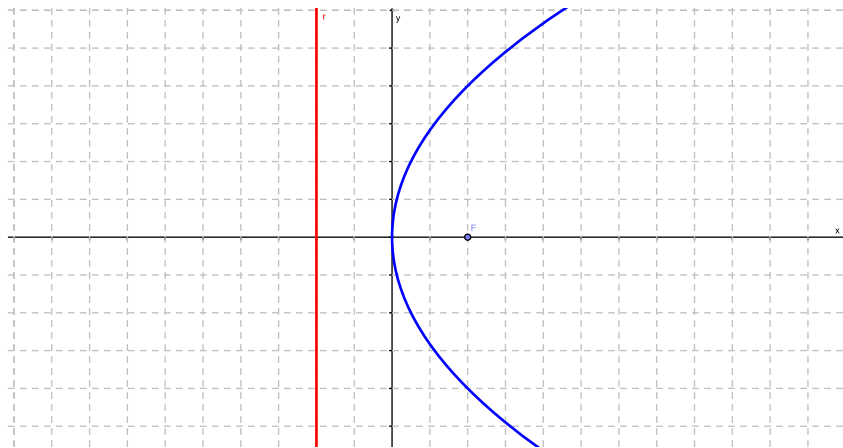


Figura 1.13: Parábola com eixo focal sobre o eixo Ox.

ou seja

$$\sqrt{x^2 + (y - a)^2} = |y + a|.$$

Ao elevarmos ambos os lados da equação ao quadrado e simplificando o resultado, obtemos a sua equação equivalente

$$4ay = x^2 \tag{1.13}$$

ou

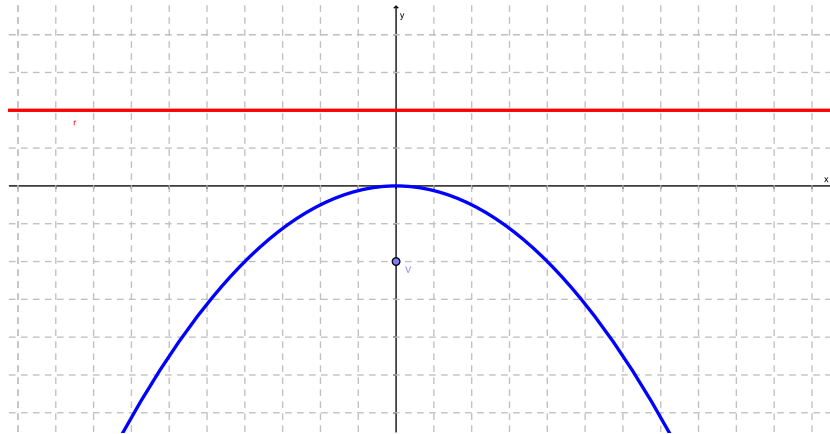


Figura 1.14: Parábola com eixo focal sobre o eixo Oy.

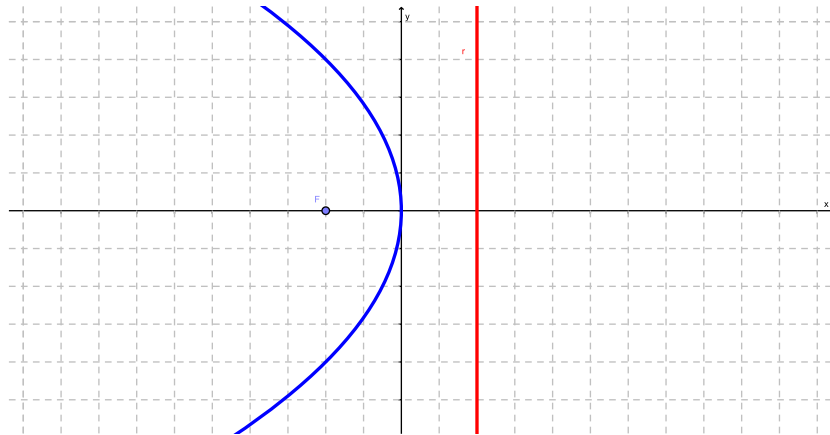


Figura 1.15: Parábola com eixo focal sobre o eixo Ox.

$$y = \frac{1}{4a}x^2 \tag{1.14}$$

que é a equação da parábola.

Nos demais casos, efetuando-se contas semelhantes, obtemos

$$x = \frac{1}{4a}y^2 \tag{1.15}$$

$$y = -\frac{1}{4a}x^2 \quad (1.16)$$

$$x = -\frac{1}{4a}y^2 \quad (1.17)$$

# Capítulo 2

## Operações Geométricas

### 2.1 Transformações Lineares

**Definição 1.** Um espaço vetorial real é um conjunto  $V$ , não vazio, com duas operações:

a) Soma,  $(+): V \times V \rightarrow V$

b) Multiplicação por escalar,  $(\cdot): V \times V \rightarrow V$

tais que, para quaisquer  $u, v, w \in V$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , as seguintes propriedades sejam satisfeitas.

**Propriedades:**

i)  $(u + v) + w = u + (v + w)$

ii)  $u + v = v + u$

iii) Existe  $0 \in V$  tal que  $u + 0 = u$ . ( $0$  é chamado vetor nulo.)

iv) Existe  $-u \in V$  tal que  $u + (-u) = 0$ .

v)  $a(u + v) = au + av$

$$vi) (a + b)v = av + bv$$

$$vii) (ab)v = a(bv)$$

$$viii) 1u = u$$

Funções lineares descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis. Muitos problemas podem ser representados por tais funções.

**Definição 2.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de  $V$  em  $W$ ,  $T:V \rightarrow W$ , que satisfaz as seguintes condições:*

$$i) \text{ Quaisquer que sejam } u \text{ e } v \text{ em } V, T(u + v) = T(u) + T(v).$$

$$ii) \text{ Quaisquer que sejam } k \in \mathbb{R} \text{ e } v \in V, T(kv) = kT(v).$$

**Exemplo 1.** *Se o preço de uma passagem de ônibus custa R\$2,75 e uma pessoa deseja comprar  $x$  viagens durante algum mês, então ela deverá pagar R\$2,75. $x$ .*

Escrevendo na forma de função, teremos  $P(x) = 2,75x$ , onde  $P$  = valor pago pelas passagens e  $x$  = quantidade de viagens.

Essa função tem a seguinte propriedade: para calcular o preço pago por  $(x + y)$  viagens, podemos multiplicar  $(x + y)$  pelo valor unitário 2,75, isto é,  $P(x + y) = (x + y) \cdot 2,75 = x \cdot 2,75 + y \cdot 2,75 = P(x) + P(y)$ . E ainda, se a quantidade de passagens for multiplicada por um fator  $k$ , o valor pago pelo total de passagens será multiplicada por esse fator, ou seja,  $P(kx) = 2,75 \cdot x \cdot k = k \cdot (2,75 \cdot x) = k \cdot P(x)$ . Portanto, se o domínio e o contradomínio dessa função forem espaços vetoriais, a função acima será uma transformação linear.

Chamaremos a transformação linear  $T : V \rightarrow V$  de operador linear.

### 2.1.1 Cisalhamento Horizontal

**Definição 3.** *O operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x + \alpha y, y)$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$  é chamado de cisalhamento horizontal.*

**Exemplo 2.** Tome  $T(x, y) = (x + 2y, y)$ . Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Essa transformação do plano no plano vista no exemplo 2 é uma transformação linear, e pode facilmente ser verificada pelo leitor a partir da definição 2. Toda transformação linear possui uma matriz associada que chamaremos de matriz de transformação. O resultado dessa transformação linear pode ser visto na figura 2.1.

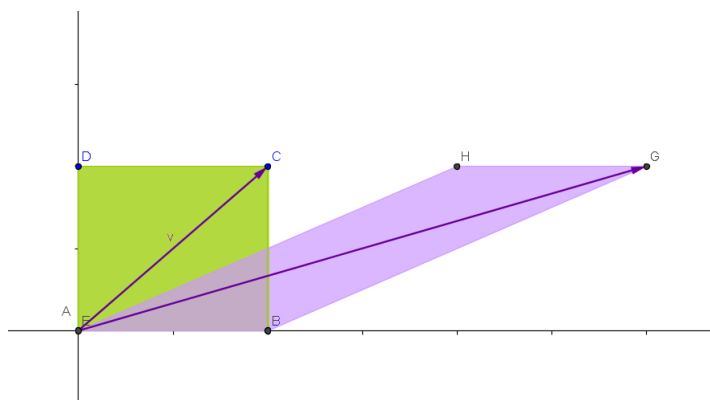


Figura 2.1: Cisalhamento feito no software GeoGebra

Para calcular a transformação linear no GeoGebra, basta seguir os seguintes passos:

- Em uma janela do GeoGebra vá no menu exibir e selecione a opção planilha;
- Na planilha coloque os valores da matriz de transformação linear;
- Selecione os valores da matriz clicando na primeira célula e arrastando o mouse até que toda a matriz esteja selecionada;
- Clique no ícone (na nova barra de ícones que surge) criar matriz, em seguida nomeie-a por  $T$ ;
- Crie um polígono qualquer para aplicar a transformação usando a função criar polígono;
- Multiplique a Matriz por cada um dos pontos do polígono a partir do comando  $T * A$  (campo de entrada), neste caso,  $T$  é o nome da matriz transformação e  $A$  é um ponto do polígono;

- Crie um novo polígono com o comando **Polígono[inserir pontos]** (na linha do comando de entrada), esse novo polígono é o resultado da transformação linear.

**Exemplo 3.** Considere a elipse de equação  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  e o cisalhamento  $T(x, y) = (x + 2y, y)$ . Na forma de matriz o cisalhamento fica

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 2y' \\ y = y'. \end{cases}$$

Substituindo  $x'$  e  $y'$  na equação da elipse acima obtém-se

$$\frac{(x' - 2y')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1,$$

que é equivalente a

$$4(x')^2 - 16x'y' + 25(y')^2 - 36 = 0.$$

*Obs.: O gráfico desta equação pode ser gerado no GeoGebra, veja figura 2.2. Porém, surge uma pergunta: será que esta equação descreve uma elipse? A resposta a esta pergunta será dada apenas no Capítulo 5.*

A situação do exemplo acima pode ser abordada de maneira geométrica utilizando o GeoGebra. Para isso, primeiramente façamos a parametrização da elipse tomando

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

logo



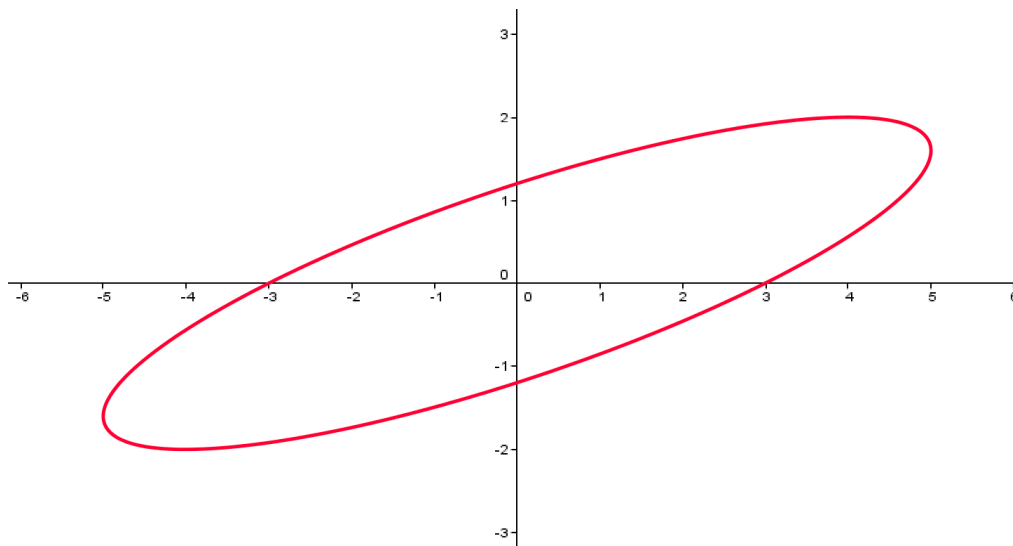


Figura 2.2: Cisalhamento feito no software GeoGebra

$$\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta. \end{cases}$$

No Geogebra, construa a matriz de transformação (cisalhamento)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

seguindo os seguintes passos:

- Clique no menu exibir e em seguida, selecione o menu planilha. Ela irá aparecer na lado direito da tela;
- Coloque os números da matriz na tabela, na mesma ordem em que aparecem na matriz;
- Clique na primeira célula da planilha, onde está o número 1, arraste o mouse até que todos os números estejam selecionados;
- Aparecerá uma nova lista de ícones, abaixo do menu principal. Selecione o ícone **Criar Matriz**, nomeie-a de T.

Clique com o mouse no ícone **Controle Deslizante**. Aparecerá uma caixa de diálogo, na qual, devemos escolher o nome do controle clicando com o mouse no símbolo da letra  $\alpha$ , que aparece ao final da caixa de texto **Nome**. Escolha a letra  $\theta$ . Na verdade podemos escolher qualquer letra, neste caso, desejo escolher a letra  $\theta$ . Na aba intervalo, coloque 0 no mínimo, e  $2 * \pi$  no máximo, assim estamos definindo o controle deslizante variando de 0 a  $2\pi$ . Ainda na aba intervalo, coloque o número 0.05 na caixa **Incremento**. Clique no botão **aplicar**.

Agora, desenhe a elipse no Geogebra, digitando sua equação na linha de comando. Em seguida, também na linha de comando, defina o ponto  $P = (3 \cos \theta, 2 \cos \theta)$ . Clique com o botão direito do mouse no ponto  $P$  que aparecerá, pode ser no ponto ou nas suas coordenadas que estão na janela algébrica, e selecione **habilitar rastro**.

Ao clicar com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante  $\theta$  que criamos, selecione **animar**. Neste momento, veremos o ponto  $P$  deslizar em cima da elipse descrita pela equação que digitamos. Clique mais uma vez sobre o controle deslizante e selecione a opção animar, isso fará com que a animação pare.

Finalmente, façamos o cisalhamento. Na linha de comando **Entrada**, digite  $T * P$ , isso fará a multiplicação da matriz  $T$  pelo ponto  $P$ . O Geogebra criará um novo ponto e dará um nome a ele, observe na janela algébrica qual foi esse nome. Suponhamos que o Geogebra nomeou o ponto de  $A$ . Clique com o botão direito do mouse no ponto  $A$  e selecione habilitar rastro. Habilite a animação no controle deslizante. O resultado é o da figura 2.3.

## 2.1.2 Cisalhamento Vertical

**Definição 4.** O operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x, y + \alpha x)$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$  é chamado de cisalhamento vertical.

**Exemplo 4.** Tome  $T(x, y) = (x, y + 2x)$ . Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser vista na figura 2.4.

A construção da figura 2.4 no software GeoGebra, foi feita de modo análogo ao do exemplo 2.

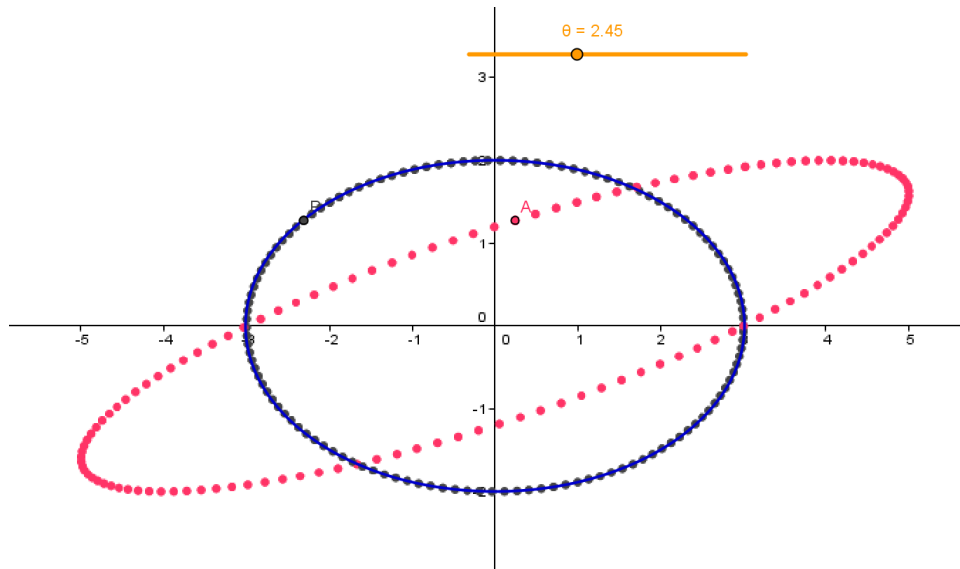


Figura 2.3: Cisalhamento feito no software GeoGebra

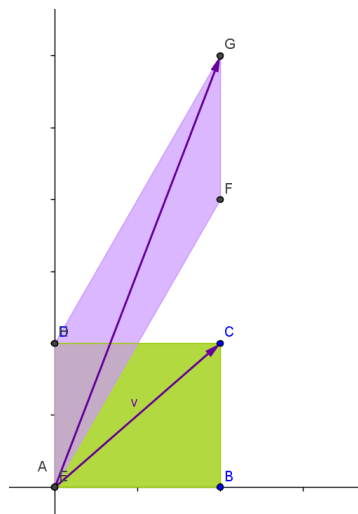


Figura 2.4: Cisalhamento feito no software GeoGebra

**Exemplo 5.** Considere a parábola cuja reta diretriz é  $r : y + \frac{1}{4} = 0$  e cujo foco é  $F \left( 0, \frac{1}{4} \right)$ . Agora tome o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x, y + 2x)$  que é um cisalhamento vertical. Procedendo como no exemplo 3, tomando o ponto  $P(x, x^2)$ , o resultado é o obtido na figura 2.5. Essa figura seria uma cônica?

Na forma de matrizes temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x + y \end{bmatrix}$$

o que é equivalente a

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

finalmente temos

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' - 2x'. \end{cases}$$

Substituindo  $x'$  e  $y'$  na equação da parábola, temos

$$y' - 2x' = (x')^2 \Rightarrow y' = (x')^2 + 2x',$$

que é uma equação do segundo grau, que já sabemos, descreve uma parábola.

### 2.1.3 Reflexão em Torno do Eixo $Ox$

**Definição 5.** O operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x, -y)$ , é chamado de reflexão em torno do eixo  $Ox$ .

Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser vista na figura 2.6.

A construção da figura 2.6 no software GeoGebra, foi feita de modo análogo ao do exemplo 2.

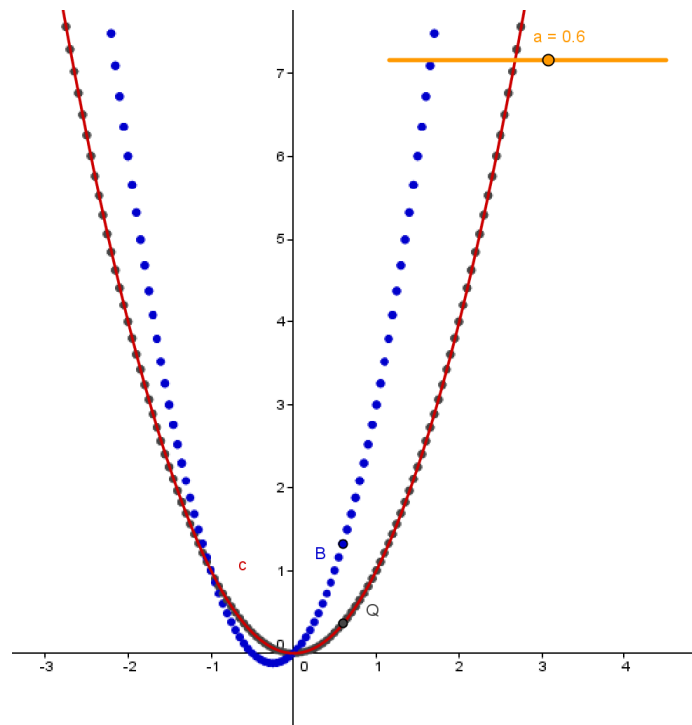


Figura 2.5: Cisalhamento feito no software GeoGebra

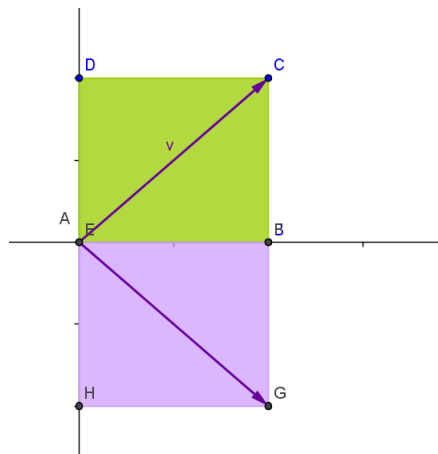


Figura 2.6: Reflexão em torno do eixo  $Ox$  feito no software GeoGebra

### 2.1.4 Reflexão em Torno do Eixo $Oy$

**Definição 6.** O operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (-x, y)$ , é chamado de

reflexão em torno do eixo  $Oy$ .

Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser vista na figura 2.7.

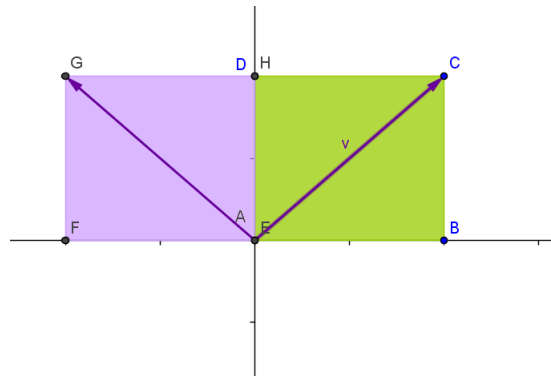


Figura 2.7: Reflexão em torno do eixo  $Oy$  feito no software GeoGebra

A construção da figura 2.7 no software GeoGebra, foi feita de modo análogo ao do exemplo 2.

### 2.1.5 Reflexão com Relação à Origem

**Definição 7.** O operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (-x, -y)$ , é chamado de reflexão com relação à origem.

Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser vista na figura 2.8.

A construção da figura 2.8 no software GeoGebra, foi feita de modo análogo ao do exemplo 2.

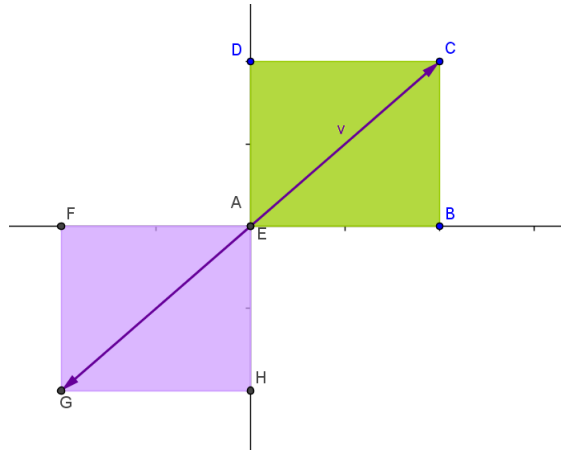


Figura 2.8: Reflexão com relação à origem feito no software GeoGebra

**Exemplo 6.** *Do mesmo modo que procedemos anteriormente, a reflexão da parábola com relação à origem, cuja reta diretriz é  $r : y + \frac{1}{4} = 0$  e cujo foco é  $F \left( 0, \frac{1}{4} \right)$  com relação à origem, pode ser vista na figura 2.9.*

*Note que a equação dessa parábola é  $y = x^2$ , obtida a partir da definição, de acordo com o que foi exposto no capítulo 1.*

*A reflexão com relação à origem, segundo o operador linear  $T(x, y) = (-x, -y)$  escrito em forma de matriz e aplicada no ponto  $(x, x^2)$  fica*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

*Esta última igualdade mostra que a curva obtida depois de aplicar a transformação linear continua sendo uma parábola, cuja equação é  $y = -x^2$ .*

### 2.1.6 Projeção Ortogonal Sobre o Eixo $Ox$

**Definição 8.** *O operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x, 0)$ , é chamado de projeção ortogonal sobre o eixo  $Ox$ .*

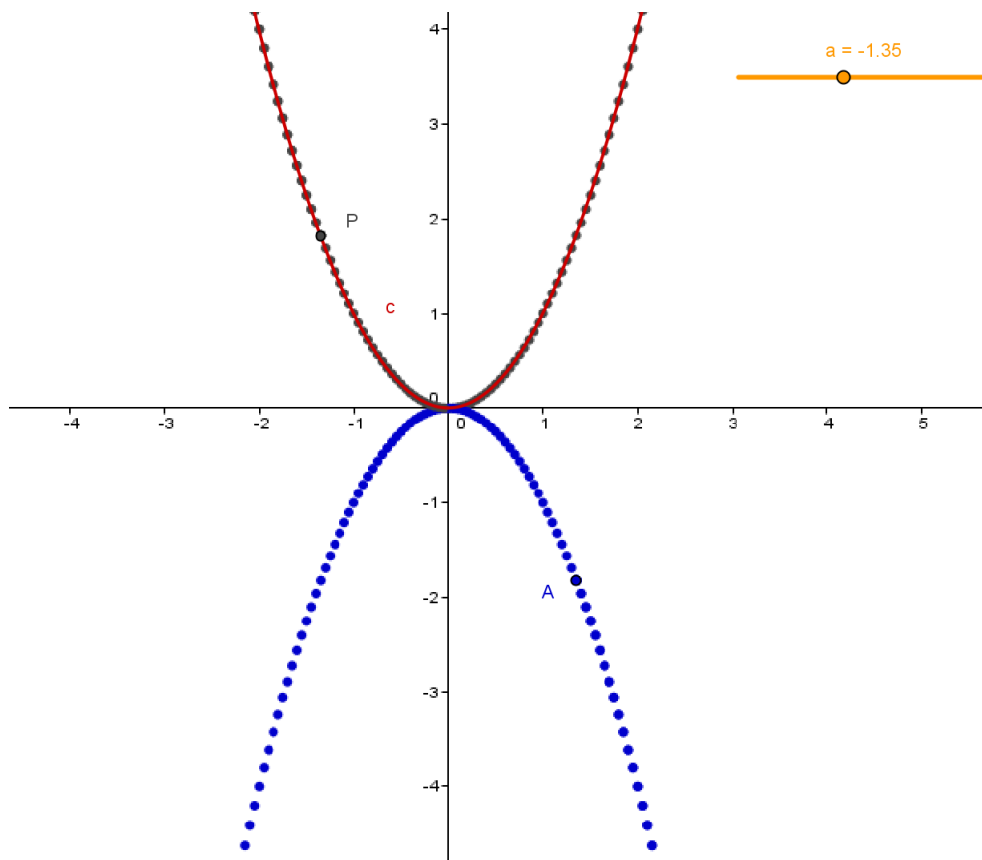


Figura 2.9: Reflexão com relação à origem feito no software GeoGebra

Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser vista na figura 2.10.

A construção da figura 2.10 no software GeoGebra, foi feita de modo análogo ao do exemplo 2.

**Exemplo 7.** Considere a mesma parábola descrita no exemplo 6 com equação  $y = x^2$ . Vamos utilizar a matriz da definição 8 para ver o que acontece com a parábola quando fazemos sua projeção ortogonal sobre o eixo  $Ox$ . O ponto que descreve a parábola é o



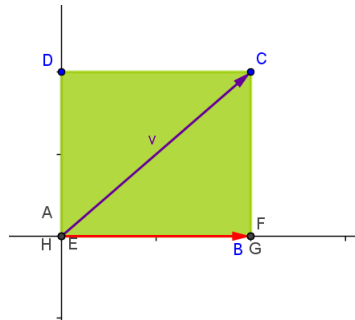


Figura 2.10: Projeção sobre o eixo  $Ox$  feito no software GeoGebra

ponto  $P(x, x^2)$ , e efetuando a multiplicação das matrizes temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

que descreve a reta  $y = 0$ .

O resultado pode ser visto na figura 2.11.

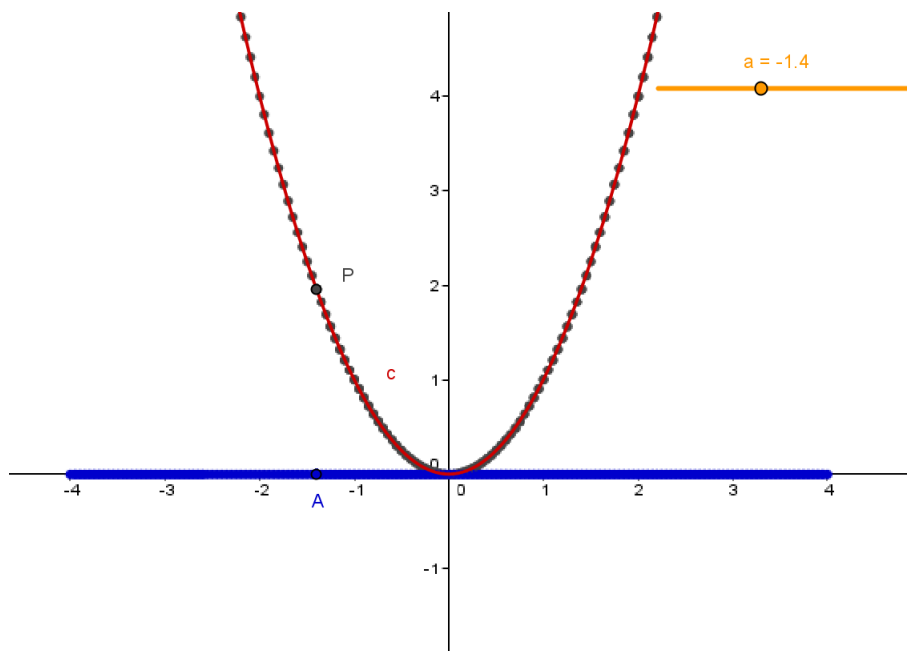


Figura 2.11: Projeção sobre o eixo  $Ox$  feito no software GeoGebra

### 2.1.7 Projeção Ortogonal Sobre o Eixo $Oy$

**Definição 9.** O operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (0, y)$ , é chamado de projeção ortogonal sobre o eixo  $Oy$ .

Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O resultado dessa transformação linear pode ser vista na figura 2.12.

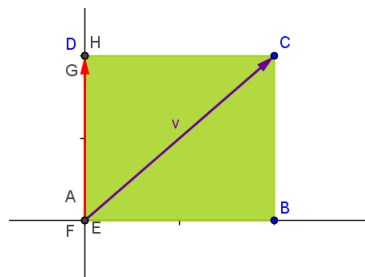


Figura 2.12: Projeção ortogonal sobre o eixo  $Oy$  feito no software GeoGebra

A construção da figura 2.12 no software GeoGebra, foi feita de modo análogo ao do exemplo 2.

**Exemplo 8.** Considere a elipse de equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Para fazer a projeção ortogonal desta elipse sobre o eixo  $Oy$ , basta multiplicar a matriz descrita na definição 9 pelo ponto  $P(2 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ , que como já vimos, é uma forma de parametrizar a elipse. Todo o processo de construção das figuras no GeoGebra pode ser feito como no exemplo 3. O resultado está na figura 2.13.

### 2.1.8 Rotação de um Ângulo $\theta$

A partir da figura 2.14a podemos observar que:

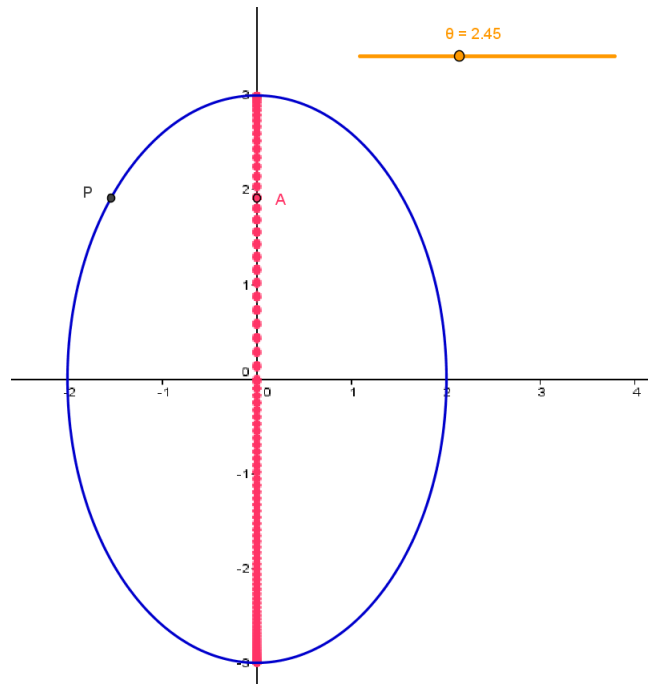
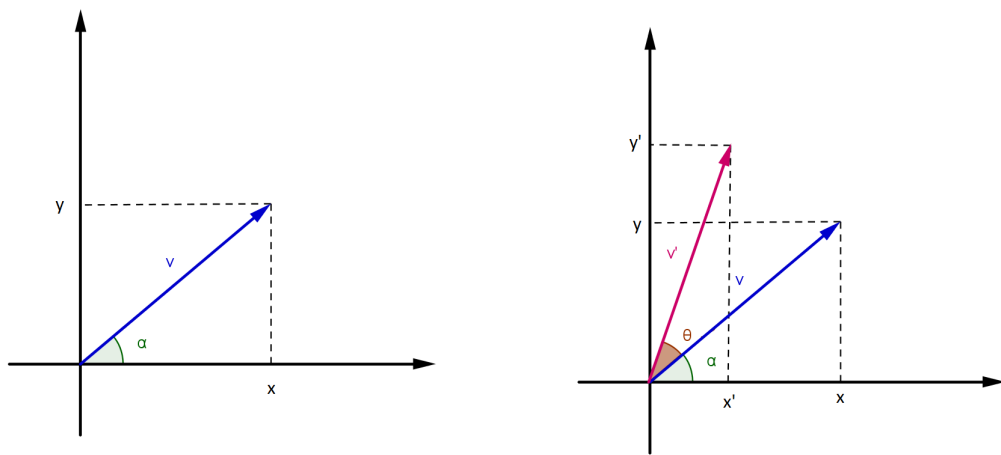


Figura 2.13: Projeção ortogonal sobre o eixo  $Oy$  feito no software GeoGebra



(a) O vetor  $v$

(b) O vetor  $v$  rotacionado um ângulo  $\theta$

Figura 2.14: Rotação no sentido anti-horário.

$$x = r \cos \theta \tag{2.1}$$

em que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , e ainda

$$y = r \sin \theta. \quad (2.2)$$

A partir da figura 2.14b podemos observar que:

$$x' = r \cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \quad (2.3)$$

Substituindo as equações 2.1 e 2.2 na equação 2.3 obtemos:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta.$$

Analogamente,

$$y' = r \sin(\alpha + \theta) = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta = y \cos \theta + x \sin \theta$$

Escrevendo na forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ y \cos \theta + x \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

**Definição 10.** O operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta)$ , é chamado de Rotação de um Ângulo  $\theta$ .

Se tomarmos  $\theta = \pi/3$  teremos a transformação na forma matricial abaixo, e também pode ser vista na figura 2.15.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}y}{2} \\ \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}x}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

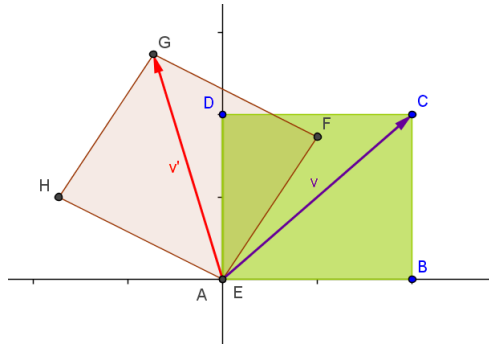


Figura 2.15: Rotação feita no software GeoGebra

### 2.1.9 Translação

**Definição 11.** A aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (x + a, y + b)$ , é chamada de *Translação*.

A aplicação da definição 11 não é uma transformação linear. De fato, sejam  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , em que  $u = (x_1, y_1)$ ,  $v = (x_2, y_2)$  e  $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ . Assim,  $T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + a, y_1 + y_2 + b) = (x_1 + a, y_1 + b) + (x_2, y_2) = T(u) + (x_2, y_2) \neq T(u) + T(v)$ .

## Capítulo 3

### Autovalor e Autovetor

**Definição 12.** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Se existirem  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que  $T(v) = \lambda v$ ,  $\lambda$  é um auto valor de  $T$  e  $v$  um autovetor de  $T$  associado a  $\lambda$ .*

**Exemplo 9.** *Seja o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(v) = 2v$ .*

Note que, neste caso,  $v$  é um vetor de  $\mathbb{R}^2$ , e escrevendo em notação matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, 2 é um autovalor de  $T$  e qualquer  $(x, y) \neq (0, 0)$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor 2.

Observe geometricamente na figura ??.

O objetivo desta seção é determinar os autovalores de uma dada aplicação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Se  $\lambda$  é um autovalor real de  $T$ , existe um vetor não nulo  $v = (x, y)$  tal que

$$T(v) = \lambda v$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

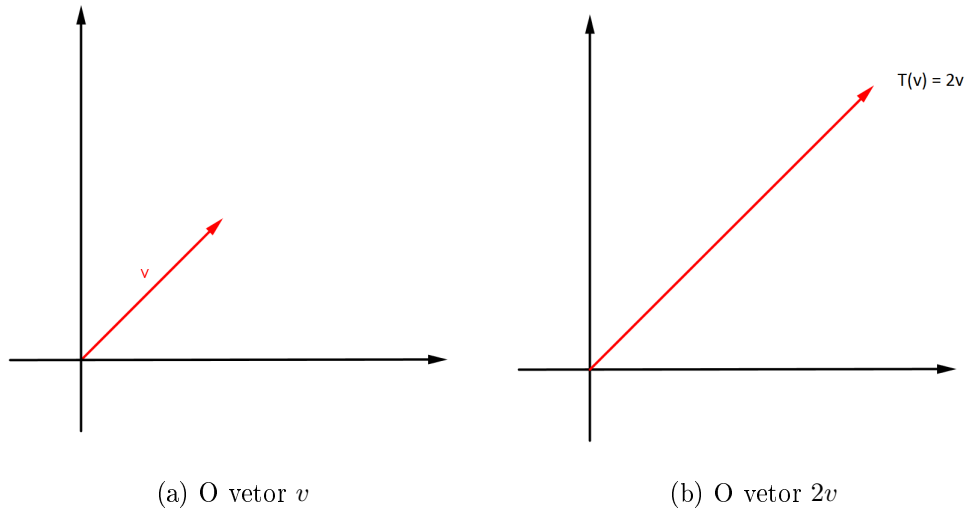


Figura 3.1: Operador linear  $T(v) = 2v$

Como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e daí

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta equação é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

O sistema 3.1 possui solução não nula se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

Desenvolvendo este determinante, obtemos a equação

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{12}a_{21} = 0 \quad (3.3)$$

Portanto,  $\lambda$  é um autovalor real do operador linear cuja matriz é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

se, e somente se, for uma raiz real da equação algébrica 3.3.

Chamaremos a equação 3.2 de **equação característica** do operador linear  $T$ .

**Exemplo 10.** *Os autovalores reais do operador linear*

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

*são as raízes da equação*

$$\lambda^2 - (2 + 3)\lambda + 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 0$$

*ou*

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

*ou seja, são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 3$ .*

A dificuldade de se calcular os autovalores de um operador linear reside na solução de sua equação característica. Nem sempre a equação característica de um operador linear terá autovalores reais. Veja o exemplo que segue.

**Exemplo 11.** *O operador linear*

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



*cuja ação é uma rotação no plano de um ângulo de  $30^\circ$ , não tem autovalor real, já que sua equação característica*

$$\lambda^2 - \sqrt{3}\lambda + 1 = 0,$$

*não tem raízes reais.*

Geometricamente, é fácil entender por que  $T$  não tem autovalor real, pois sendo  $30^\circ$  o ângulo entre  $v$  e  $T(v)$ , é claro que não pode existir  $\lambda$  tal que  $T(v) = \lambda v$ , para  $v \neq (0, 0)$ .

# Capítulo 4

## Sistema de Coordenadas

**Definição 13.** *Sejam  $V$  um espaço vetorial e  $v_1, \dots, v_n \in V$ . Dizemos que o conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é **linearmente independente (LI)**, ou que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são LI, se a equação*

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$$

*implica que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . No caso em que exista algum  $a_i \neq 0$  dizemos que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é **linearmente dependente (LD)**, ou que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são LD.*

**Definição 14.** *Um conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de vetores de  $V$  será uma base de  $V$  se:*

i)  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é LI

b)  $[v_1, \dots, v_n] = V$

A notação  $[v_1, \dots, v_n] = V$  diz que o conjunto de vetores  $\{v_1, \dots, v_n\}$  geram o espaço vetorial  $V$ , ou seja, qualquer vetor de  $V$  pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores.

**Exemplo 12.**  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ .  $\{e_1, e_2\}$  é base de  $V$ , conhecida como base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . De fato, seja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Por outro lado, dados os números reais  $a$  e  $b$  temos

$$a(1, 0) + b(0, 1) = (a, b)$$

que equivale a

$$(a, 0) + (0, b) = (0, 0)$$

assim

$$(a, b) = (0, 0)$$

o que implica  $a = 0$  e  $b = 0$ .

Portanto os vetores  $\{e_1, e_2\}$  são LI.

**Exemplo 13.** O conjunto  $\{(1, 1), (0, 1)\}$  também é **uma base** de  $V = \mathbb{R}^2$ . De fato. Se

$$(0, 0) = a(1, 1) + b(0, 1) = (a, a + b),$$

então  $a = b = 0$ . Isto é,  $\{(1, 1), (0, 1)\}$  é LI. Ainda  $[(1, 1), (0, 1)] = V$ , pois dado  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$$

ou seja, todo vetor de  $\mathbb{R}^2$  é uma combinação linear dos vetores  $\{(1, 1), (0, 1)\}$ .

Considere o sistema de coordenadas usual  $xy$ , cujos eixos têm direção e sentido dos vetores  $\{e_1, e_2\}$ , e  $zw$  é o sistema cujos eixos tem direção e sentido dos vetores  $v_1$  e  $v_2$ . Um ponto  $(a, b)$  ter coordenadas no sistema  $xy$  significa que

$$\overrightarrow{OP} = ae_1 + be_2.$$

Da mesma forma,  $P$  ter coordenadas  $(a', b')$  no sistema  $zw$  significa que

$$\overrightarrow{OP} = a'v_1 + b'v_2.$$

Observe que os vetores  $v_1$  e  $v_2$  devem formar uma base de  $\mathbb{R}^2$  para que os números  $a'$  e  $b'$  sejam determinados de modo único.

**Exemplo 14.** Seja o ponto  $(2, 4)$  relativamente ao sistema usual  $xy$ . Se as coordenadas de  $P$  em relação ao sistema  $zw$  associado à base  $\{v_1 = (2, 1), v_2 = (-2, 2)\}$ , são  $x'$  e  $y'$ , então

$$\overrightarrow{OP} = x'(2, 1) + y'(-2, 2)$$

ou

$$(2, 4) = x'(2, 1) + y'(-2, 2).$$

Resolvendo esta equação, obtemos  $x' = 2$  e  $y' = 1$ . Logo, em relação ao sistema  $zw$ ,  $P$  é o ponto  $(2, 1)$ . Veja figura 4.1.

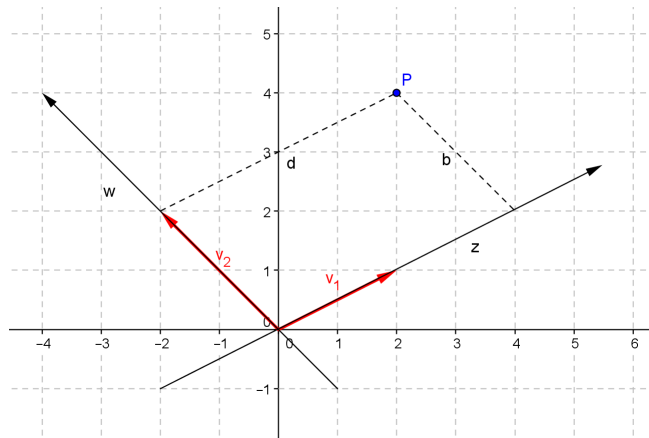


Figura 4.1: Mudança de coordenadas.

Para um ponto genérico  $P(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , temos

$$(x, y) = x'(2, 1) + y'(-2, 2),$$

sendo  $x'$  e  $y'$  as coordenadas de  $P$  relativamente ao sistema ao novo sistema  $zw$ . Logo,

$$\begin{cases} x = 2x' - 2y' \\ y = x' + 2y' \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Observe que as colunas da matriz acima são os vetores  $\{v_1 = (2, 1), v_2 = (-2, 2)\}$  da base associada ao sistema  $zw$ . De acordo com esta observação, uma equação como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

pode ser interpretada como uma mudança de coordenadas do sistema usual  $xy$  para o sistema  $zw$  associado à base  $\{v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 1)\}$

**Exemplo 15.** *Vamos determinar a equação da reta*

$$2x + 3y = 6 \tag{4.1}$$

relativamente ao sistema  $zw$  tal que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

basta escrever 4.1 na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \quad (4.3)$$

e introduzir em 4.3 o valor de

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dado por 4.2. Temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 6$$

e daí, efetuando o produto obtemos  $14x' + 11y' = 6$ .

## 4.1 Rotação dos Eixos Coordenados

Seja  $xy$  o sistema de coordenadas usual. Dado um ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$ , seja  $x'y'$  um sistema obtido a partir da rotação dos eixos  $Ox$  e  $Oy$  do ângulo  $\theta$  no sentido positivo. Tome os vetores  $v_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$  e  $v_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$ , que são unitários e estão na direção e no sentido dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente.

Tome um ponto  $P$  do plano. Os vetores  $v_1$  e  $v_2$  formam uma base de  $\mathbb{R}^2$ , logo existem os números reais  $x'$  e  $y'$  de modo que  $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$ . Logo  $(x', y')$  são as coordenadas do ponto  $P$  com respeito ao novo sistema  $x'y'$ .

Sejam  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $P$  no sistema de coordenadas  $xy$ , note que  $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$ . Então podemos ter a seguinte igualdade:

$$xe_1 + ye_2 = xe_1 + ye_2$$

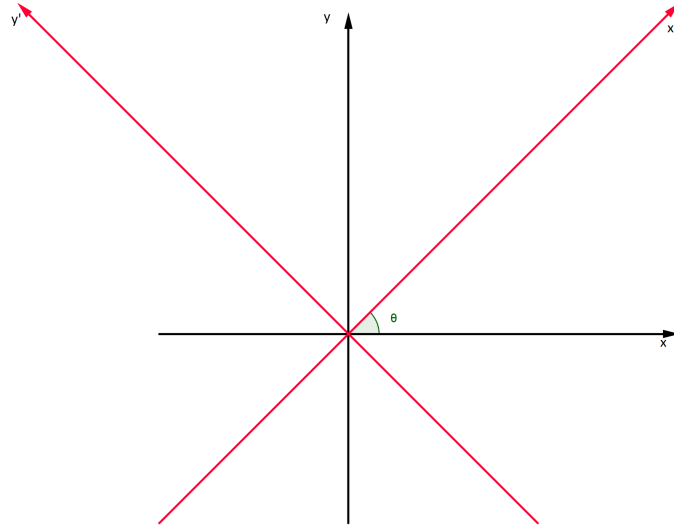


Figura 4.2: Ângulo  $\theta$  entre os eixos  $x$  e  $y$  e os novos eixos  $x'$  e  $y'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x'(v_1 \cdot e_1) + y'(v_2 \cdot e_1) \\ y = x'(v_1 \cdot e_2) + y'(v_2 \cdot e_2) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x' = x(e_1 \cdot v_1) + y(e_2 \cdot v_1) \\ y' = x(e_1 \cdot v_2) + y(e_2 \cdot v_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = y' \sin \theta + x' \cos \theta \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -y \sin \theta + x \cos \theta \end{cases}$$

e

$$\Leftrightarrow (x', y') = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} (x, y)$$

e

$$(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} (x', y')$$

A matriz

$$N = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

é a matriz de passagem das coordenadas  $(x', y')$  para as coordenadas  $(x, y)$  e, por sua vez,

$$N^t = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

é a matriz de passagem das coordenadas  $(x, y)$  para as coordenadas  $(x', y')$ .

# Capítulo 5

## Aplicações dos Autovalores e Autovetores nas Cônicas

### 5.1 Generalização das Cônicas

**Definição 15.** *Uma cônica em  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

com  $A$  ou  $B$  ou  $C \neq 0$ .

As equações das cônicas apresentadas no capítulo 1, no início deste trabalho estão na **forma reduzida**, isto é,  $B = 0$ ; se  $A \neq 0$ ,  $D = 0$  e se  $C \neq 0$ ,  $E = 0$ . Veremos a seguir, através de uma mudança de coordenadas conveniente, que toda cônica toma uma das formas que foram citadas no referido capítulo.

É de nosso interesse, as cônicas definidas algebricamente. Mas como vimos no início deste trabalho, cada cônica pode ser perfeitamente caracterizada por propriedades geométricas, como foram introduzidas pelos gregos.

**Exemplo 16.**

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

$$9x^2 - 4y^2 = 36$$



$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

que é uma hipérbole.

**Exemplo 17.**

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

$$(x')^2 + (y')^2 = 2$$

é uma circunferência obtida por uma translação  $T(x, y) = (x - 3, y - 1)$ . Veja figura 5.1.

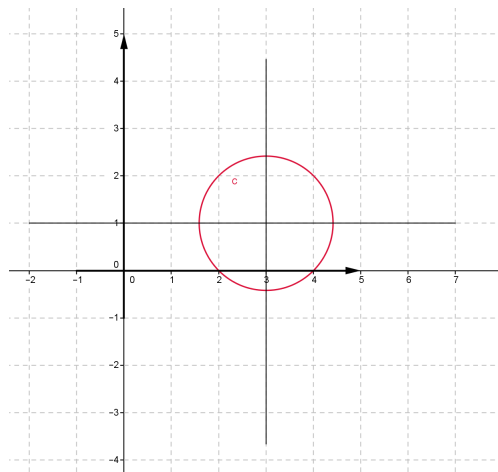


Figura 5.1: Circunferência de raio  $\sqrt{2}$  e centro  $(3, 1)$ .

Agora vamos voltar a equação geral de uma cônica  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , que tem a seguinte expressão em termos de matrizes

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

Portanto, relativamente ao sistema  $zw$ , onde

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

a equação desta cônica é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + F = 0 \end{aligned}$$

Da expressão acima, vê-se que com uma escolha conveniente do sistema  $zw$  é possível simplificar a equação da cônica. De fato, escolhendo a base  $\{(a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22})\}$  de modo que o produto

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

seja da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

podemos eliminar da equação da cônica o termo misto  $x'y'$  pois

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2.$$

Consequentemente, a equação da cônica pode ser reescrita como segue

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + D'x + E'y + F = 0$$

e, depois de uma translação conveniente de eixos, reduzida "a forma canônica que segue no capítulo 1.

Para esclarecer alguns fatos que ainda podem ser dúvida para o leitor, demonstraremos os dois teoremas que seguem.

**Teorema 5.1.1.** Se  $B \neq 0$  (na equação geral das cônicas) a matriz

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

tem dois autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  reais e distintos.

Para demonstrar esse teorema vamos recorrer a equação característica de  $A$ , que é

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4} = 0$$

e suas raízes são

$$\lambda_1 = \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{2}$$

Como  $(A - C)^2 + B^2 > 0$  pois  $b \neq 0$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e distintos.

**Teorema 5.1.2.** Sejam  $v_1 = (a_{11}, a_{21})$  e  $v_2 = (a_{12}, a_{22})$  autovetores da matriz  $M$  descrita no teorema 5.1.1, respectivamente, associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Então,

a)  $v_1$  e  $v_2$  são perpendiculares entre si, isto é,

$$v_1 \cdot v_2 = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

b) Se  $v_1$  e  $v_2$  são vetores unitários e

$$N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Para demonstrar a parte a) determinaremos primeiramente os autovetores de  $M$  associados.

$$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Ax + \frac{B}{2}y = \lambda_1 x \\ \frac{B}{2}x + Cy = \lambda_1 y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (A - \lambda_1)x + \frac{B}{2}y = 0 \\ \frac{B}{2}x + (C - \lambda_1)y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$By = 2(\lambda_1 - A)x \Rightarrow$$

$$v_1 = (B, 2\lambda_1 - 2A).$$

De modo análogo obtemos:

$$v_2 = (B, 2\lambda_2 - 2A).$$

Logo

$$v_1 \cdot v_2 = B^2 + (2\lambda_1 - 2A) \cdot (2\lambda_2 - 2A) = B^2 + 4[\lambda_1 \lambda_2 - 4(\lambda_1 + \lambda_2) + A^2] \quad (5.1)$$

Sendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  raízes da equação

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4} = 0$$

vale

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + C$$

e

$$\lambda_1 \lambda_2 = AC - \frac{B^2}{4}.$$

Substituindo estes valores em 5.1, obtemos

$$v_1 \cdot v_2 = B^2 + 4\left[AC - \frac{B^2}{4} - A(A + C) + A^2\right] = B^2 + 4AC - B^2 - 4A^2 - 4AC + 4A^2 = 0.$$

Para demonstrar a parte *b*) do teorema efetuamos o produto  $N^t M N$ . Encontramos

$$\left[ \begin{array}{cc} a_{11} \left( Aa_{11} + \frac{B}{2}a_{21} \right) + a_{21} \left( \frac{B}{2}a_{11} + Ca_{21} \right) & a_{11} \left( Aa_{12} + \frac{B}{2}a_{22} \right) + a_{21} \left( \frac{B}{2}a_{12} + Ca_{22} \right) \\ a_{11} \left( Aa_{12} + \frac{B}{2}a_{22} \right) + a_{21} \left( \frac{B}{2}a_{12} + Ca_{22} \right) & a_{12} \left( Aa_{12} + \frac{B}{2}a_{22} \right) + a_{22} \left( \frac{B}{2}a_{12} + Ca_{22} \right) \end{array} \right]$$

Sendo  $v_1 = (a_{11}, a_{21})$  e  $v_2 = (a_{12}, a_{22})$  autovetores de  $M$ , temos

$$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{cases} Aa_{11} + \frac{B}{2}a_{21} = \lambda_1 a_{11} \\ \frac{B}{2}a_{11} + Ca_{21} = \lambda_1 a_{21} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Aa_{12} + \frac{B}{2}a_{22} = \lambda_2 a_{12} \\ \frac{B}{2}a_{12} + Ca_{22} = \lambda_2 a_{22} \end{cases}$$

Logo,  $N^t M N =$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\lambda_1 a_{11} + a_{21}\lambda_1 a_{21} & a_{11}\lambda_2 a_{12} + a_{21}\lambda_2 a_{22} \\ a_{11}\lambda_2 a_{12} + a_{21}\lambda_2 a_{22} & a_{12}\lambda_2 a_{12} + a_{22}\lambda_2 a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(a_{11}^2 + a_{21}^2) & \lambda_2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) \\ \lambda_2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) & \lambda_2(a_{12}^2 + a_{22}^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

pois

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$$

e

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0.$$

**Exemplo 18.** Usando os resultados anteriores vamos identificar a cônica cuja equação é

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 10 = 0.$$

Primeiramente vamos escrever a equação na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 10.$$

Agora determinamos os autovalores de

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Feito isso encontramos  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$ . Agora precisamos determinar os autovetores associados aos autovetores.

Para  $\lambda_1 = 2$ , devemos resolver

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Efetuada os cálculos obtemos  $v_1 = (1, 1)$ .

Analogamente, resolvendo

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

encontramos  $v_2 = (-1, 1)$ .

Portanto, uma base de  $\mathbb{R}^2$  formada de autovetores unitários de  $M$  é

$$\left\{ v_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), v_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Seja  $zw$  o sistema de coordenadas associado a esta base. Então

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Substituindo esta última expressão matricial na cônica escrita na forma matricial, temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 10 \end{aligned}$$

que, de acordo com a parte b) do teorema 5.1.2, reduz-se a

$$2(x')^2 + 4(y')^2 + \begin{bmatrix} 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 10$$

ou

$$2(x')^2 + 4(y')^2 + 4x' - 8y' = 10.$$

Como esta equação não contém o termo em  $x'y'$ , ou seja,  $B = 0$ , podemos completar os quadrados em  $x'$  e  $y'$  e reescrevê-la na forma

$$2(x' + 1)^2 + 4(y' - 1)^2 = 16$$

ou na forma

$$2(x'')^2 + 4(y'')^2 = 16,$$

em que

$$x'' = x' + 1 \text{ e } y'' = y' - 1$$

Observe que  $x'' = x' + 1$  e  $y'' = y' - 1$  definem uma translação de eixos cuja nova origem, no sistema  $zw$ , é o ponto  $O_1(-1, 1)$ . Escrevendo a equação

$$2(x'')^2 + 4(y'')^2 = 16,$$

na forma

$$\frac{(x'')^2}{8} + \frac{(y'')^2}{4} = 1$$

vemos que a cônica é uma elipse cujos vértices, no sistema  $z'w'$ , são

$$A_1(\sqrt{8}, 0), A_2(-\sqrt{8}, 0), B_1(0, 2), B_2(0, -2).$$

Veja figura 5.2.

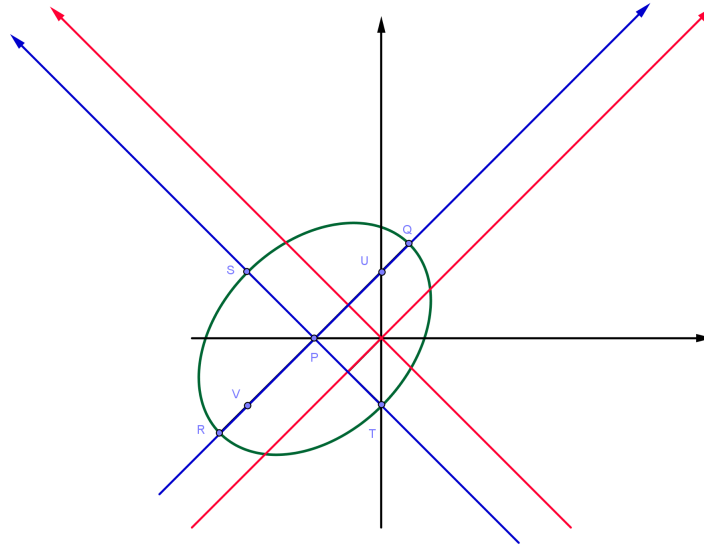


Figura 5.2: Elipse. Eixos vermelhos  $x'y'$ . Eixos azuis  $x''y''$ .

É possível apenas classificar a cônica dada por uma equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , sem determinar suas dimensões e localização. Para solucionar este problema de modo mais rápido, podemos discutir as possibilidades que temos em função dos sinais dos autovalores associados à forma quadrática.

Como vimos, a matriz

$$M = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix},$$

obtida a partir dos coeficientes da equação da cônica, possui autovalores reais e distintos, caso  $B \neq 0$ . Vimos ainda que, obtemos depois da eliminação do termo misto uma equação da forma

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + A'x' + B'y' + F = 0 \tag{5.2}$$

e que, através de uma translação conveniente, obtemos a equação  $\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + F' = 0$ . Vamos analisar inicialmente, a situação em que  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$ . Note que se:

- i)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem ambos positivos, teremos para  $f < 0$  uma elipse; para  $f = 0$  teremos um ponto ( $x'' = y'' = 0$ ) e para  $f > 0$  teremos um conjunto vazio;



- ii)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem ambos negativos, também teremos uma elipse, um ponto ou um vazio, conforme  $f$  seja positivo, nulo ou negativo;
- iii)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tiverem sinais opostos, poderemos ter uma hipérbole, quanto  $f \neq 0$ , ou um par de retas concorrentes se  $f = 0$ .

Agora vamos considerar a situação em que  $\lambda_1 = 0$  e, portanto  $\lambda_2 \neq 0$ . A partir da equação ??, chegamos a equação  $\lambda_2(y'')^2 + A'x'' + f = 0$ .

Note que:

- i) se  $A' \neq 0$  teremos uma parábola;
- ii) se  $A' = 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  e  $f < 0$  teremos o vazio;
- iii) se  $A' = 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  e  $f < 0$  teremos um par de retas paralelas;
- iv) se  $A' = 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  e  $f > 0$  teremos um par de retas paralelas;
- v) se  $A' = 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  e  $f > 0$  teremos o vazio;
- vi) se  $A' = 0$  e  $f = 0$  teremos uma reta.

O caso em que  $\lambda_2 = 0$  é discutido de maneira análogo ao anterior.

Resumiremos estes resultados até aqui obtidos no seguinte teorema:

**Teorema 5.1.3.** *Dada uma cônica definida pela equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , com  $B \neq 0$ . Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os auto valores associados à sua forma quadrática, então:*

- i) Se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$  esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações (um ponto ou o vazio).*
- ii) Se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$  esta equação representa uma hipérbole ou sua degeneração (par de retas concorrentes).*
- iii)  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$  esta equação representa uma parábola ou suas degenerações (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio).*

Pela parte *b*) do teorema 5.1.2 temos que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

ou

$$N^t.M.N = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Deste modo temos que

$$\det(N^t.M.N) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

o que é equivalente a

$$\det(N^t).\det(M).\det(N) = \lambda_1.\lambda_2,$$

consequentemente temos

$$\det(M) = \lambda_1.\lambda_2,$$

pois,  $\det(N^t) = \det(N) = 1$  quando tomamos

$$t.4N = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Sendo assim o sinal de  $\lambda_1.\lambda_2$  é o mesmo de  $\det(M) = -\left(\frac{B^2}{4} - AC\right)$ , que por sua vez tem o mesmo sinal de  $-(B^2 - 4AC)$ . Podemos assim reescrever o teorema anterior em função do "discriminante"  $B^2 - 4AC$  do polinômio característico  $\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - \frac{B^2}{4} = 0$  da matriz  $M$ .

**Teorema 5.1.4.** *Dada a equação:  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , com  $B \neq 0$ , esta equação no plano representará:*

- i) uma elipse ou suas degenerações, se  $B^2 - 4AC < 0$ ;*
- ii) uma parábola ou suas degenerações, se  $B^2 - 4AC = 0$ ;*
- iii) uma hipérbole, se  $B^2 - 4AC > 0$ .*

**Exemplo 19.** Voltando ao exemplo 3 da seção ???. Agora iremos responder se, a equação quadrática obtida pelo cisalhamento da elipse de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

que foi

$$4x^2 - 16xy + 25y^2 - 36 = 0,$$

é uma elipse.

O teorema 5.1.4 garante que precisamos analisar o discriminante  $B^2 - 4AC$ , que neste caso é igual a

$$(16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 256 - 400 = -144 < 0$$

logo, temos uma elipse.

**Exemplo 20.** Dado um sistema de eixos coordenados  $xy$ , considere o sistema de eixos ortogonais  $x'y'$  obtido pela rotação positiva de  $45^\circ$  dos eixos do sistema  $xy$  em torno da origem. Uma hipérbole nas coordenadas  $x'y'$  tem centro na origem, um de seus vértices no ponto  $(\sqrt{2}, 0)$  e a reta  $y' = 2x'$  como uma de suas assíntotas.

- Determine a equação da hipérbole nas coordenadas  $x'y'$  e nas coordenadas  $xy$ .
- Obtenha o centro, os vértices, os vértices imaginários, os focos e as assíntotas da hipérbole nas coordenadas  $xy$ .
- Faça um esboço da curva no sistema de eixos  $xy$ , indicando todos os elementos encontrados no item b) usando o software GeoGebra.

**Solução.**

a) Nas coordenadas  $x'y'$ , a reta focal  $l$  é o eixo  $Ox'$ , pois o centro  $C(0, 0)$  e o vértice  $V(\sqrt{2}, 0)$  pertencem ao eixo  $Ox'$ . Além disso,  $a = d(C, V) = \sqrt{2}$  e  $\frac{b}{a} = 2$ , pois  $y' = 2x'$  é uma assíntota da hipérbole. Então  $b = 2a = 2\sqrt{2}$ , e

$$\mathcal{H} : \frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{8} = 1$$

é a equação da hipérbole  $\mathcal{H}$  nas coordenadas  $x'y'$ .

Usando as relações de mudança de coordenadas mostradas na seção 1.4.1 temos

$$\begin{cases} x' = \cos 45^\circ x + \sin 45^\circ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y' = -\sin 45^\circ x + \cos 45^\circ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y), \end{cases} \quad (5.3)$$

obtemos que a equação da hipérbole nas coordenadas  $xy$  é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{4}(-x + y)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4(x + y)^2 - (-x + y)^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow 4(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) &= 16 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 10xy + 3y^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

**b)** Nas coordenadas  $x'y'$ , a hipérbole tem: centro  $C(0,0)$ ; vértices  $A_1(\sqrt{2},0)$  e  $A_2(-\sqrt{2},0)$ ; vértices imaginários  $B_1(0,2\sqrt{2})$  e  $B_2(0,-2\sqrt{2})$ ; para determinar os focos  $F_1(\sqrt{10},0)$  e  $F_2(-\sqrt{10},0)$  utilizamos a relação  $c^2 = a^2 + b^2$ ; reta focal  $l : y' = 0$ ; reta não focal  $l' : x' = 0$ ; assíntotas  $y' = \pm 2x'$ .

Por 5.3, obtemos que a reta foca é  $l : -x + y = 0$ ; a reta não focal é  $l' : x + y = 0$  e  $\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)$ , conseqüentemente,  $r_1 : y = -3x$  e  $r_2 : y = -\frac{1}{3}x$  são as assíntotas da hipérbole nas coordenadas  $xy$ .

E, pelas relações de mudança de coordenadas da seção 1.4.1, equacionamos

$$\begin{cases} x = \cos 45^\circ x' - \sin 45^\circ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \sin 45^\circ x' + \cos 45^\circ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \end{cases}$$

donde podemos concluir que, o centro é  $C(0,0)$ ;  $A_1(1,1)$  e  $A_2(-1,-1)$  são os vértices;  $B_1(-2,2)$  e  $B_2(2,-2)$  são os vértices imaginários e  $F_1(\sqrt{5},\sqrt{5})$  e  $F_2(-\sqrt{5},-\sqrt{5})$  são os focos da hipérbole nas coordenadas  $xy$ .

**c)** Na figura 5.3 mostramos o esboço da hipérbole  $\mathcal{H}$ .

**Exemplo 21.** Considere uma elipse de focos  $F_1(5,0)$  e  $F_2(-5,0)$  com eixo maior 12. Faça o gráfico dessa elipse no GeoGebra executando uma rotação de  $60^\circ$  e uma translação do centro para o ponto  $C'(3,2)$ . Em seguida determine a equação da nova elipse no sistema de coordenadas  $xy$  e no sistema de coordenadas  $x'y'$ .

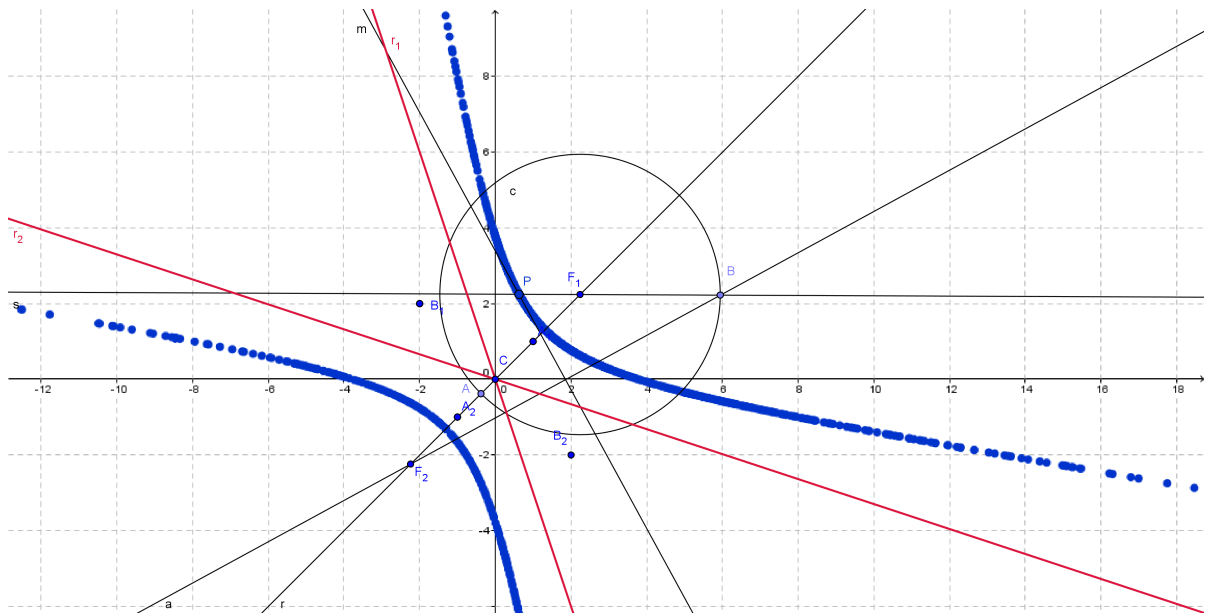


Figura 5.3: Hipérbole construída a partir do software GeoGebra descrito no capítulo 'Hipérbole'.

**Solução.**

Como  $a^2 = b^2 + c^2$ , o valor de  $b = \sqrt{11}$ . Seguindo os passos do exemplo 2 construa a matriz

$$M = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$$

no GeoGebra, que é a matriz que fará a rotação.

Agora marque os pontos principais da elipse a partir da linha de comando, por exemplo, para adicionar o foco  $F_1$  digite:  $F_1 = (5,0)$ , em seguida clique a tecla enter. O foco aparecerá no gráfico. Faça isso com todos os vértices e com o outro foco. Agora construa a elipse clicando no ícone "elipse", em seguida, selecione os dois focos e um ponto qualquer da elipse, assim, o software criará a elipse.

Na linha de comando digite  $M * A_1$ , isso fará a multiplicação da matriz  $M$  pelo ponto  $A_1$ , portanto, a rotação neste ponto. Repita essa multiplicação por todos os outros pontos. Construa a elipse obtida pela rotação clicando no ícone "elipse", em seguida, selecionando os dois focos, em qualquer ordem, e um ponto qualquer da elipse

assim, o software criará a elipse.

Agora crie a matriz

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

procedendo de modo análogo a criação da matriz  $M$ , só que agora clicando no ícone criar lista de pontos.

Para concluir, pegue todos os pontos criados depois da multiplicação por  $M$  e escreva na linha de comando  $A + N$ , por exemplo. Isso fará a translação do centro da elipse para o ponto  $(3, 2)$ . O resultado segue na figura 5.4

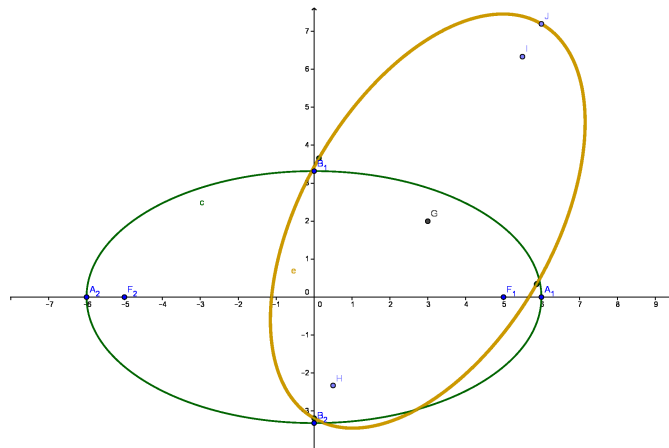


Figura 5.4: Elipse construída a partir do software GeoGebra.

Para determinar a equação da elipse no sistema  $x'y'$  depois da rotação, precisamos apenas do valor de  $a = 6$  e de  $b = \sqrt{11}$ , logo sua equação é

$$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{11} = 1.$$

Além disso, foi feita uma translação de eixos cartesianos, na qual, a origem do novo sistema é o ponto  $(3, 2)$ , logo a equação da elipse depois da translação é

$$\frac{(x' - x_0)^2}{36} + \frac{(y' - y_0)^2}{11} = 1,$$

com  $x_0$  e  $y_0$  sendo as coordenadas do novo centro dos eixos ainda no sistema  $x'y'$ . Desse modo, estamos fazendo uma translação de eixos no sistema  $x'y'$ . Devemos determinar as coordenadas do ponto  $(3, 2)$  (que está no sistema  $xy$ ) no sistema  $x'y'$ .

Temos que

$$(3, 2) = x'(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) + y'(-\sin 60^\circ, \cos 60^\circ)$$

$$\Leftrightarrow (3, 2) = x' \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + y' \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y') \\ 2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = (x' - \sqrt{3}y') \\ 4 = (\sqrt{3}x' + y') \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = (x' - \sqrt{3}y') \\ 4\sqrt{3} = (3x' + \sqrt{3}y') \end{cases}$$

somando as duas equações temos

$$x' = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$

e, substituindo  $x'$  na primeira equação do sistema temos

$$\sqrt{3}y' = -6 + \frac{3}{2} + \sqrt{3},$$

portanto,

$$y' = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Assim a equação da elipse no sistema  $x'y'$  é a seguinte:

$$\frac{\left(x' - \frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)^2}{36} + \frac{\left(y' - 1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{11} = 1.$$

Para determinar a equação da elipse no sistema  $xy$  precisamos utilizar a mudança de coordenadas proposta na seção 1.4.1 como segue.

$$\begin{cases} x' = \cos 60^\circ x + \sin 60^\circ y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \\ y' = -\sin 60^\circ x + \cos 60^\circ y = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}x + y). \end{cases}$$

Substituindo  $x'$  e  $y'$  na equação da elipse acima e resolvendo as contas, obtemos

$$\frac{119}{1584}x^2 - \frac{25}{264\sqrt{3}}xy + \frac{23}{528}y^2 + \left(\frac{25}{132\sqrt{3}} - \frac{119}{264}\right)x + \left(\frac{25}{88\sqrt{3}} - \frac{23}{132}\right)y - \frac{79}{528} - \frac{25}{44\sqrt{3}} = 0.$$



## Capítulo 6

### Considerações finais

O GeoGebra é um software livre muito eficiente no estudo de Geometria. Se todos os professores sentassem, estudassem, fossem criativos, as aulas de matemática poderiam ser muito mais interessantes e muito mais paupáveis aos alunos, tornando-se mais interessantes, chamativas, intrigantes e eficientes. Neste trabalho, pudemos mostrar um pouco disso, cabe agora aos leitores se sentirem inspirados e encorajados a levar essa ideia adiante.

## Referências Bibliográficas

- [1] BOLDRINI, J.L., *Álgebra Linear*, Depto. de Matemática da Universidade Estadual de Campinas, editora HARBRA ltda., 3ª edição.
- [2] REIS, G.L., SILVA, V.V. *Geometria Analítica*, 4ª reimpressão, (1993).
- [3] LIMA, E.L., *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, 5ª edição (2001), RJ.
- [4] SILVA, V.V., *Álgebra Linear*, editora da UFG, 2ª edição (1999).
- [5] LIMA, E.L., *Geometria Analítica*, Coleção Profmat, IMPA, 1ª edição (2013).