Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Revisitando os Algoritmos para Operações Aritméticas Fundamentais

Emmanuel Cristiano Lopes de Moraes

Brasília

2015

Emmanuel Cristiano Lopes de Moraes

Revisitando os Algoritmos para Operações Aritméticas Fundamentais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araujo

Brasília

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M827r

Moraes, Emmanuel Cristiano Lopes de
Revisitando os Algoritmos para Operações Aritméticas Fundamentais / Emmanuel Cristiano Lopes de Moraes; orientador Kellcio Oliveira Araujo. -- Brasília, 2015.
94 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

1. Aritmética. 2. Operações fundamentais. 3. Algoritmos. I. Araujo, Kellcio Oliveira, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Revisitando os Algoritmos para Operações Aritméticas Fundamentais

por

Emmanuel Cristiano Lopes de Moraes*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 06 de agosto de 2015.

Comissão Examinadora:

Kellcio O. Araujo
Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo - MAT/UnB (Orientador)

Antonio Luiz de Melo
Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo - FUP/UnB (Membro)

Ricardo Ruviaro
Prof. Dr. Ricardo Ruviaro - MAT/UnB (Membro)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Emmanuel Cristiano Lopes de Moraes graduou-se em Matemática pela Universidade de Brasília e atualmente é professor de Matemática na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal.

Em tudo vejo o Teu amor; Em tudo vejo Tuas mãos; E Te agradeço ó Criador; Por que tudo que existe, só existe, por que Tu és Senhor.

T. Grulha

Dedico este trabalho a minha esposa Ana Paula, aos meus filhos Isaque e Levi e aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço ao Senhor por todos os benefícios que me tem feito e por sua bondade e amor que me seguem por todos os dias da minha vida.

Agradeço à minha esposa, Ana Paula, que com muito esforço e perseverança me apoiou durante a realização desse curso de mestrado e a elaboração desse trabalho. Ela cuidou do nosso maior bem, nossos filhos Isaque e Levi que são herança do Senhor em nossas vidas.

Agradeço à minha Mãe e ao meu Pai que me deram valiosas lições durante a minha mocidade e por sua preocupação e cuidado com meu bem estar e da minha família.

Agradeço às minhas irmãs: Luana, Lorena e Emanuela por todas as palavras de bom ânimo que proferiram e por todo o incentivo que recebi delas.

Agradeço ao orientador desse trabalho, Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araujo, por sua contribuição e paciência durante a orientação, além de suas correções que foram preponderantes para o meu êxito.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília que com tanto profissionalismo e dedicação ministraram durante o curso de mestrado.

Agradeço aos brilhantes colegas de curso que muito me ensinaram durante as nossas vivências. Em especial aos companheiros de estudo Emerson, Gustavo, Ricardo e Ulysses que compartilharam seu conhecimento, amizade e tempo.

Agradeço à CAPES pelo apoio e suporte financeiro.

Resumo

A presente pesquisa refere-se ao estudo dos algoritmos convencionais para operações fundamentais, a saber: adição, subtração, multiplicação e divisão. Parte do trabalho é o resultado do esforço do autor em compreender o funcionamento de tais algoritmos e as propriedades das operações envolvidas em suas execuções. É também objetivo dessa pesquisa ofertar aos professores da educação básica, principalmente aos de ensino fundamental, uma forma alternativa e um pouco esquecida de desenvolver a aritmética, através da operação de algoritmos convencionais, obtendo-se a partir disso outra benesse: a cristalização das propriedades que dão completude às operações fundamentais.

Palavras-chave

Operações fundamentais, Algoritmos, Aritmética.

Abstract

This research refers to the study of conventional algorithms for basic operations - addition, subtraction, multiplication and division . Part of the work is the result of the author's effort to understand the functioning of such algorithms and the properties of the operations involved in their executions. It also aims to offer basic education teachers, especially for those working in elementary school, an alternative and somewhat forgotten method to develop arithmetics, through conventional algorithms, obtaining from that another advantage: the crystallization of properties that give completeness to the basic operations.

Keywords

Fundamental operations, Algorithms, Arithmetic.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Todos que desejam ensinar, não só Matemática, mas qualquer área do saber necessitam de um conhecimento bem fundamentado daquilo que vão lecionar. Sobre o funcionamento dos algoritmos convencionais que utilizamos para as quatro operações fundamentais, não se tem tantas informações. Apenas repetimos aquilo que ouvíamos quando alunos da educação básica. Como ensinar tais tópicos sem um conhecimento profundo? Podemos evidenciar isso também a partir do conhecimento que os alunos têm dos algoritmos para operações básicas, da falta de domínio da tabuada e até mesmo o que os leva a reproduzirem tantos procedimentos referentes ao algoritmo sem, de fato, saber o porquê. Nós professores sofremos as mesmas limitações dos alunos. Usaremos a seguinte definição para algoritmo encontrada em [2]:

> **ALGORITMO**, s.m. Conjunto predeterminado e definido de regras e processos destinados à solução de um problema, com um número finito de etapas.

Infelizmente, na prática docente temos aplicado esse conjunto de regras a fim de obter o resultado sem saber, de fato, o entendimento sobre as etapas e o funcionamento. Quando nos referimos às operações fundamentais estamos fazendo alusão às quatro operações, quais sejam: adição, subtração, multiplicação e divisão. O que temos visto a partir de nossa experiência é que os alunos vindos de séries do primeiro ciclo do ensino fundamental, 1º ao 5º ano, não desenvolveram a habilidade de utilizar corretamente tais algoritmos.

As evidências que temos a partir da pesquisa desenvolvida em [12] é que nem sempre os professores de ensino fundamental desenvolvem um conhecimento profundo da Matemática básica, isto é, não tem o embasamento devido para lecionar aquilo que se dispõem a ensinar. A pesquisa a qual nos referimos analisou professores americanos e chineses. É claro que não queremos dizer que o desenvolvimento de [12] se amolda perfeitamente ao sistema que temos no Brasil, mas em muitos momentos tivemos a impressão que o que está sendo tratado é bem semelhante ao que temos em nosso contexto educacional. Vejamos o que diz a pesquisadora em [12]:

> O conhecimento dos professores sobre uma matéria pode não produzir automaticamente métodos de ensino promissores ou novas concepções de ensino. Mas sem um apoio sólido desse conhecimento, métodos promissores ou novas concepções de ensino não podem ser realizados com sucesso.

Durante a explanação nos capítulos, faremos uma breve introdução histórica sobre as operações e sobre o desenvolvimento do algoritmo, além de apresentar outros métodos utilizados em outras regiões e civilizações de épocas anteriores. Em alguns momentos apresentaremos a operação dos algoritmos em outras bases numéricas e alguns exemplos com desenvolvimento geométrico para facilitar o entendimento.

No Capítulo 2 iniciaremos a discussão com a operação de adição[1] e o funcionamento do algoritmo da adição feita com transporte a fim de elucidar a decomposição da ordem superior no algoritmo da subtração.

No Capítulo 3 faremos o desenvolvimento do algoritmo para subtração[2] e de vários conceitos subjacentes tais como o reagrupamento, decomposição em um uma ordem inferior, a adição com transporte que está ligada com a composição de uma ordem superior no sistema decimal, ou seja, 10 unidades em uma ordem compõem 1 unidade na ordem imediatamente superior. Abordaremos o assunto do ponto de vista de [12] e do desenvolvimento histórico do algoritmo.

Por exemplo, para efetuarmos a subtração recorremos frequentemente ao subterfúgio de "pedir emprestado" para justificar o funcionamento e a eficiência do algoritmo em contas como:

$$\begin{array}{cccc} & 9 & 8 & 1 \\ - & 1 & 9 & 8 \\ \hline & 7 & 8 & 3 \end{array}$$

No Capítulo 4 faremos uma discussão a partir do desenvolvimento histórico dos algoritmos, além de apresentar métodos utilizados para multiplicar na civilização egípcia, na grega, dentre outras. E analisaremos o algoritmo convencional para multiplicar e as propriedades das operações que justificam seu funcionamento.

No Capítulo 5, abordaremos o desenvolvimento histórico da operação e da necessidade de dividir. Apresentaremos o algoritmo egípcio e Método da Galé, onde este último é desenvolvido lado a lado com o algoritmo convencional a fim de verificar a

[1]Em [8]: Arit. Operação de adicionar quantidades; SOMA.

[2]Em [8]: Arit. Operação de subtrair quantidades; DIMINUIÇÃO [Antôn.: adição.].

semelhança entre eles. Finalmente, faremos uma análise do algoritmo convencional a partir do desenvolvimento de Euclides.

2 A adição

Para iniciarmos nossa discussão sobre o algoritmo da subtração propriamente dito vamos percorrer o desenvolvimento da operação de adição e de seu algoritmo usual que teve como precursor o ábaco de contadores soltos também chamado de tábua de contagem. Consideramos esse desenvolvimento preponderante pela importância do conceito de adição com transporte para compor a ordem superior[3]. Essa ideia será complementar no aprendizado do algoritmo da subtração para podermos reagrupar o minuendo[4] de tal forma que possamos decompor a unidade de ordem superior nesse reagrupamento a fim de que o algoritmo funcione bem. Também para que o funcionamento seja bastante elucidativo e com tudo isso se possa superar o procedimento de "pedir emprestado" tão difundido na educação básica brasileira.

Um conjunto numérico que representa um papel importante tanto na contagem quanto no desenvolvimento e definição da adição é o conjunto dos números naturais. O conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ não está aqui descrito completamente, mas a partir desses elementos e com um pouco de imaginação podemos concebê-lo.

Figura 1: Um modo mais sugestivo de vislumbrar os números naturais

Conforme sugere [7] nesse modo mais sugestivo:

> Tudo começa com o número um, simbolizado por 1, que representa a unidade, e com uma lei, simbolizada pelas flechas, que a cada número, começando pelo 1, fornece o seu sucessor, isto é, o número que lhe segue. Sabemos também que esta sequência nunca termina; ou seja, os números naturais são em quantidade infinita.

[3] No sistema decimal não podemos ter mais que 9 unidades, então quando temos 10 ou mais unidades compomos a ordem superior das dezenas onde cada 10 unidades formam uma nova dezena. O mesmo ocorre com a dezena, a centena, o milhar e assim por diante.

[4] Em [8]: DIMINUENDO: sm. Arit. Numa subtração, número de que se subtrai outro; MINUENDO.

A adição é uma operação básica nos naturais. Se escolhermos, arbitrariamente, um número natural a, o sucessor de a será representado por $a + 1$.

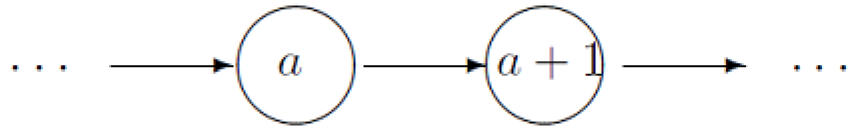

Figura 2: Um número a e seu sucessor

Definição 1. ***(Adição)*** *Sejam dados dois números naturais a e b distintos, quaisquer. Podemos deslocar a de b posições para a direita, obtendo um número que será denotado por $a+b$. Essa operação entre números naturais é chamada de adição e o número $a + b$ é chamado soma*[5] *de a e b.*

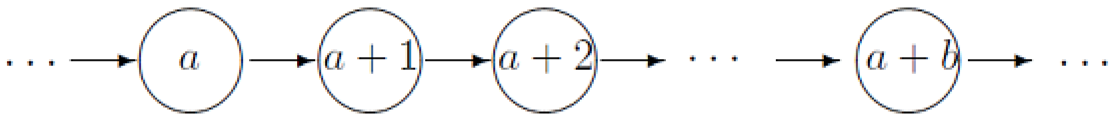

Figura 3: Um número $a + b$

É bem verdade que a maneira como a adição foi conceituada em sua origem não está perfeitamente definida, já que mesmo em épocas mais recentes não temos muitos registros escritos desvendando o processo. O que se sabe a respeito das primeiras práticas de adição surgiu de especulações para a utilização dos primeiros dispositivos de cálculo e da análise de contas financeiras históricas. A exemplo disso, temos a tabuleta de argila de Babilonian Yale Collection datada de 3000 a.C.

Até o século XVI, a tábua de contagem e o ábaco posterior permaneceram como principais dispositivos de cálculo, mas os antecessores do algoritmo convencional surgiram no século XV conforme relatado em [15], quando descreve o trecho da obra "the earliest arithmetics in english" de autoria anônima:

[5]Em [8]: sf. Arit. Operação de adição ou o seu resultado

> Aqui começa o ofício da adição. Neste ofício, você deve saber quatro coisas. Primeiramente, deve saber o que é adição. Em seguida, deve saber quantas linhas de figuras você deve ter. Depois, deve saber quantos casos diferentes acontecem neste ofício. Quanto à primeira, você deve saber que a adição é um somatório de dois números em um único número. Quanto à segunda, deve saber que terá duas linhas de figuras, uma sobre a outra (...). Quanto à terceira, deve saber que existem quatro casos diferentes. Quanto à quarta, deve saber que o resultado deste ofício é dizer qual o número inteiro que resulta da soma desses números diferentes.

$$\begin{array}{c} 147 \\ 271 \end{array}$$

Na terceira coisa a saber, quando se refere aos quatro casos temos que:

1. Nenhuma soma parcial é maior do que 9;
2. Pelo menos uma soma parcial é maior do que 9 (ou seja, 1+2, 4+7 ou 7+1 no exemplo acima);
3. Pelo menos uma soma parcial é 10 ou um múltiplo de 10;
4. Existe um zero na linha superior.

Onde, é claro, um caso exclui os outros. Em tempos mais recentes, esses quatro casos foram cristalizados e a designação de transportes é fruto de épocas mais modernas resultando no mecanismo eficiente que denominamos algoritmo convencional de adição.

2.1 Algoritmo convencional da adição

$$\begin{array}{cccc} & {}^{1}1 & 4 & 7 \\ + & 2 & 7 & 1 \\ \hline & 4 & 1 & 8 \end{array}$$

A passagem da contagem para adição funciona como uma espécie de progressão natural e espontânea. Pode-se passar da contagem de um conjunto de blocos à contagem de dois conjuntos de blocos formando a união de conjuntos.

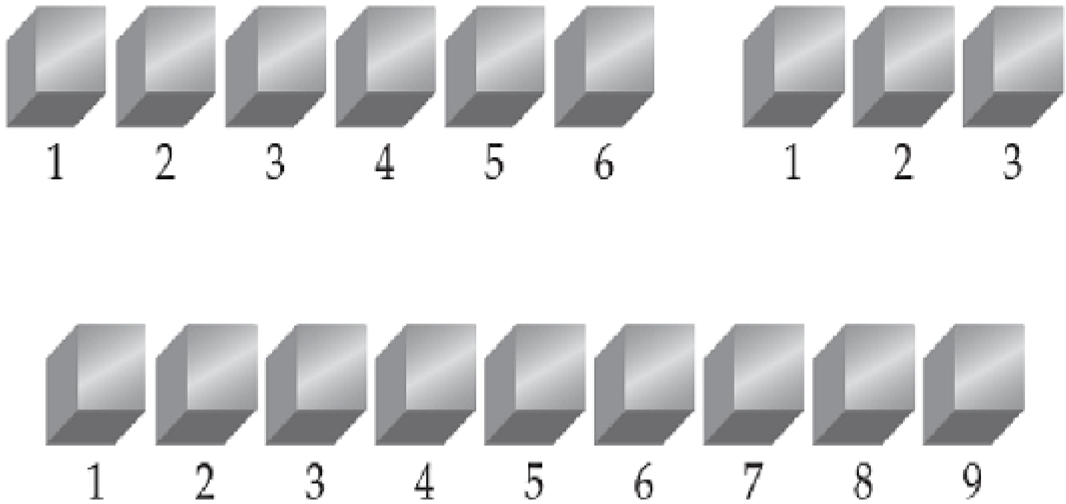

Figura 4: Da contagem de um conjunto de blocos à contagem de dois conjuntos de blocos

Quando percebe-se que o último número contado dentro de um conjunto é o número total de elementos nesse conjunto é possível começar a incluir uma quantidade na outra, ou seja, contar um outro conjunto de objetos a partir do último número falado na contagem dos elementos do primeiro conjunto.

Segundo a perspectiva de [15], na educação americana as crianças estão reforçando esses procedimentos na memória no final do $1^{\underline{o}}$ e no $2^{\underline{o}}$ ano. A tabuada com soma até 5, por exemplo, $2+3=5$ e $1+4=5$, são aprendidos primeiro e pouco depois com soma até 10 e, posteriormente, 20. Um fato especulado é que as crianças norte-americanas apresentam dificuldade, devido a forma irregular das palavras, e não tem o mesmo desempenho das crianças asiáticas, que normalmente no $1^{\underline{o}}$ ano, são ensinadas a fazer dez ao adicionar, por exemplo, $6+5=1+(5+5)$. Essa estratégia é também utilizada quando se utiliza o ábaco. Até alguns adultos japoneses dizem que para somar $6+3$ visualizam na forma $(5+1)+3$. Tais fatos da adição quando apresentados com as noções, na verdade, propriedades de comutatividade e associatividade, são essenciais no ofício de fazer adições.

$$3+5=5+3 \text{ (comutativa)},$$
$$(3+5)+2=3+(5+2) \text{ (associativa)}.$$

Observemos a nota sobre o sistema chinês de número-palavra em [12]:

> O sistema chinês de número-palavra pode contribuir para a atenção particular que os professores chineses dão à composição e decomposição de um 10. Em chinês, todos os números na casa dos 10 têm a forma de «dez, número de um algarismo». Por exemplo, onze é «dez-um,» doze é «dez-dois» e assim sucessivamente. (Vinte é «dois dez», trinta é «três dez» e assim por diante. Vinte e um é chamado «dois dez-um», vinte e dois é «dois dez-dois» e assim sucessivamente.) Por isso, «decompor um 10» tende a ser uma solução óbvia para o problema «Como se subtrai 5 de dez-dois?»

Seria proveitoso fazer uma associação do entendimento do sistema chinês de número-palavra ao nosso sistema de número-palavra em língua portuguesa a fim de propiciar aos alunos do $2^{\underline{o}}$ ciclo do Ensino Fundamental uma concepção diferenciada. Tal concepção pode ser bastante favorável ao se utilizar a soma com transporte, ou seja, a composição de uma ordem superior na base decimal ou ainda decompor uma unidade de ordem superior em unidades de ordem inferior no algoritmo usual para subtração a fim de reagrupar o minuendo. A expressão "decompor uma unidade em ordem superior" é um termo da aritmética chinesa tradicional baseada no ábaco.

Voltando à adição no algoritmo usual:

$$\begin{array}{cccc} & {}^{1}1 & 4 & 7 \\ + & 2 & 7 & 1 \\ \hline & 4 & 1 & 8 \end{array} \tag{1}$$

Se utilizarmos o algoritmo convencional para efetuar a adição acima poderíamos descrever o processo iniciando pela coluna das unidades somando o 7 e o 1, para um resultado 8, e escrevendo esse algarismo na coluna das unidades. Em seguida somaríamos o 4 e o 7 (na verdade, 40 e 70, respectivamente) para um resultado 11 (na verdade, 110). Mas o valor posicional não permite que o 11 represente a coluna das dezenas, logo devemos "transportar" o algarismo 1 desse 11 (que, na verdade, vale 100) à coluna das centenas e escrever o algarismo 1 na coluna das dezenas (que é, na realidade, 10). Depois adicionamos o 1 "transportado", o 1 e o 2 (que são, na verdade, 100, 100 e 200, respectivamente), na terceira coluna resultando em 4 (na, realidade, 400), já que está na coluna das centenas. O resultado final é 418, conforme mostrado em (1).

O que está descrito acima no desenvolvimento do algoritmo convencional para adição é um tanto cansativo na hora de descrever e todos, normalmente, estão familiarizados com esse processo. Agora, a razão pela qual o processo funciona não é muito intuitiva. No sistema posicional de base 10 podemos escrever qualquer número N natural como uma soma linear de potências de 10. A saber,

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0.$$

Sabemos que os números naturais foram representados de diversos modos ao longo da história. A representação decimal posicional é bem difundida e quase universalmente utilizada. Segundo [7] trata-se de uma variante do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios. O sistema decimal posicional foi desenvolvido na China e na Índia. Todo número natural é representado por uma sequência formada pelos 10 algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$.

Exatamente por existirem 10 algarismos nesse sistema é que ele é denominado decimal. Cada algarismo, além de seu valor absoluto, possui uma valoração devida à posição que ocupa dentro da sequência, ou seja, o fator é dado por uma potência de 10 que varia assim:

O algarismo mais à direita tem fator $10^0 = 1$; o próximo, lendo da direita para a esquerda, tem fator $10^1 = 10$; o próximo tem fator $10^2 = 100$; o próximo tem fator $10^3 = 1000$ e assim sucessivamente.

Logo, o número 1132, no sistema decimal representa o número

$$1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 2 \times 10^0.$$

Os números zeros escritos à esquerda de um número são irrelevantes, já que

$$\begin{aligned} 001132 &= 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 2 \times 10^0 \\ &= 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 2 \times 10^0 \\ &= 1132. \end{aligned}$$

Todos os algarismos de um número possuem uma ordem, tomada da direita para a esquerda. No número acima, 1132, o 2 é de primeira ordem, o 3 é de segunda ordem, o 1 é de terceira ordem e o outro 1 é de quarta ordem.

Cada três ordens, também tomadas da direita para esquerda, formam uma classe. As classes podem vir separadas por um ponto. Observe como são denominadas as classes:

$$\text{Classe das Unidades} \begin{cases} \text{Unidades:} & 1^{\underline{a}} \text{ ordem} \\ \text{Dezenas:} & 2^{\underline{a}} \text{ ordem} \\ \text{Centenas:} & 3^{\underline{a}} \text{ ordem} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhar} \begin{cases} \text{Unidades de milhar:} & 4^{\underline{a}} \text{ ordem} \\ \text{Dezenas de milhar:} & 5^{\underline{a}} \text{ ordem} \\ \text{Centenas de milhar:} & 6^{\underline{a}} \text{ ordem} \end{cases}$$

$$\text{Classe do Milhão} \begin{cases} \text{Unidades de milhão:} & 7^{\underline{a}} \text{ ordem} \\ \text{Dezenas de milhão:} & 8^{\underline{a}} \text{ ordem} \\ \text{Centenas de milhão:} & 9^{\underline{a}} \text{ ordem} \end{cases}$$

Quando não especificarmos a base numérica de um sistema é porque estamos nos referindo à base decimal.

O teorema a seguir mostra como escrever qualquer número natural em qualquer base d.

Teorema 1. *Sejam $n \geq 0$ e $d > 1$. Então existe uma única sequência (os "dígitos" de n na base d) $a_0, \ldots, a_k, \ldots$ com as seguintes propriedades:*

1. *para todo k, $0 \leq a_k < d$;*
2. *existe m tal que se $k \geq m$, então $a_k = 0$;*
3. $n = \sum_{k \geq 0} a_k d^k$.

A demonstração que utilizaremos pode ser encontrada em [13].

Demonstração[6] :

Escrevemos $n = n_0 = n_1 d + a_0, \quad 0 \leqslant a_0 < d, \quad n_1 = n_2 d + a_1, \quad 0 \leqslant a_1 < d$ e em geral $n_k = n_{k+1} d + a_k, \quad 0 \leqslant a_k < d$. Nossa primeira afirmação é que $n_k = 0$ para algum valor de k. De fato, se $n_0 < d^m$, então $n_1 = \lfloor \frac{n_0}{d} \rfloor < d^{m-1}$ e mais geralmente, por indução , $n_k < d^{m-k}$; fazendo $k \geqslant m$ temos $n_k < 1$ donde $n_k = 0$. Segue daí que $a_k = 0$ para $k \geqslant m$. A identidade do item 3 é facilmente demonstrada por indução.

Para a unicidade, suponha $\sum_{k \geqslant 0} a_k d^k = \sum_{k \geqslant 0} b_k d^k$. Se as sequências a_k e b_k são distintas existe um menor índice , digamos j, para o qual $a_j \neq b_j$. Podemos escrever $a_j + \sum_{k>j} a_k d^{k-j} = b_j + \sum_{k>j} b_k d^{k-j}$ donde $a_j \equiv b_j (mod \quad d)$, o que é uma contradição, pois $0 < |a_j - b_j| < d$ e portanto $a_j - b_j$ não pode ser múltiplo de d.

□

Voltando ao exemplo anterior, só que utilizando outra abordagem, vamos desenvolver a adição levando em consideração a expansão na base 10.

2.2 Algoritmo da adição usando a expansão na base 10

$$147 = 1 \times 10^2 + 4 \times 10 + 7,$$
$$271 = 2 \times 10^2 + 7 \times 10 + 1.$$

Somando esses números, obtemos

$$147+271 = 1\times10^2+4\times10+7+2\times10^2+7\times10+1 = 1\times100+2\times100+4\times10+7\times10+7+1.$$

O uso da propriedade distributiva nos fornece:

$$147 + 271 = (1 + 2) \times 100 + (4 + 7) \times 10 + (7 + 1). \tag{2}$$

É fundamental que tanto em (1) quanto em (2) as potências de 10 estejam emparelhadas em cada um dos membros ou parcelas[7].

[6] A notação $\lfloor x \rfloor = max\{m \in \mathbb{Z}; m \leq x\}$ representa a parte inteira e a notação $a \equiv b(mod\ n)$ é a relação de congrueência módulo m. Para obter mais informações ver [13].

[7] Em [8]: Mat. Cada uma das quantidades que perfazem uma soma, ou um valor total.

Observação: No algoritmo usual, isso não parece ser tão significativo, mas é importante para minimizar erros comuns, que normalmente são cometidos no início, tais como

$$147 + 271 = 1 \times 1000 + (4 + 2) \times 100 + (7 + 7) \times 10 + 1.$$

No algoritmo de adição, esse erro apareceria da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & {}^{1}4 & 7 & \\ + & & 2 & 7 & 1 \\ \hline & 1 & 7 & 4 & 1 \end{array}$$

Agora, voltando à conta anterior, somando os algarismos na posição das unidades, temos:

$$\begin{aligned} 147 + 271 &= (1 + 2) \times 100 + (4 + 7) \times 10 + (7 + 1) \times 1 \qquad (3) \\ &= (1 + 2) \times 100 + (4 + 7) \times 10 + (8) \times 1. \end{aligned}$$

O próximo passo será somar os algarismos na posição das dezenas:

$$\begin{aligned} 147 + 271 &= (1 + 2) \times 100 + (4 + 7) \times 10 + 8 \times 1 \qquad (4) \\ &= (1 + 2) \times 100 + (11) \times 10 + 8 \times 1. \end{aligned}$$

Agora, vamos somar os algarismos na posição das centenas.

$$\begin{aligned} 147 + 271 &= (1 + 2) \times 100 + 11 \times 10 + 8 \times 1 \qquad (5) \\ &= (3) \times 100 + \underline{11} \times 10 + 8 \times 1. \end{aligned}$$

Mas, no sistema posicional decimal, não podemos ter uma ordem representada por dois algarismos como pode ser visto em (5) quando na posição das dezenas vê-se $\underline{11} \times 10$, ou seja, não pode ocorrer o seguinte:

$$147 + 271 = 3\underline{11}8,$$

Sendo um erro comum encontrado no desenvolvimento do algoritmo por parte de alguns estudantes não tão familiarizados com esse processo de adição.

Agora, trabalharemos na composição da ordem superior que é frequentemente chamado de adição com transporte:

$$\begin{aligned} 11 \times 10 &= 10 \times 10 + 1 \times 10 \\ &= 1 \times 100 + 1 \times 10 \end{aligned} \tag{6}$$

Portanto,

$$147 + 271 = (1 + 2) \times 100 + 1 \times 100 + 1 \times 10 + 8 \times 1 \tag{7}$$
$$= (1 + 2 + \underline{\mathbf{1}}) \times 100 + 1 \times 10 + 8 \times 1 \tag{8}$$

Se examinarmos o algoritmo convencional em (1) quando temos o algarismo "1" em cima do algarismo "1" do número 147, veremos que é exatamente o algarismo "1" que está sublinhado em (8). Finalmente, com a soma dos algarismos na posição das centenas teremos

$$\begin{aligned} 147 + 271 &= 4 \times 100 + 1 \times 10 + 8 \times 1 \\ &= 418 \end{aligned} \tag{9}$$

2.3 Método das somas parciais

Outra forma de representar o processo de adição pode ser visualizado em notação vertical que é conhecido como método de somas parciais:

$$\begin{array}{ccccc} 100 & + & 40 & + & 7 \\ 200 & + & 70 & + & 1 \\ \hline 300 & + & 110 & + & 8 \end{array} \tag{10}$$

Faremos a decomposição dos números envolvidos em centenas inteiras (ou exatas), dezenas também inteiras e unidades. É claro que podemos utilizar o mesmo processo com ordens superiores de milhar, dezena de milhar e assim por diante.

Com o reagrupamento teremos o resultado final. Mais especificamente a composição da ordem superior das centenas a partir da ordem das dezenas dará como resultado da adição o número 418. Esse processo é chamado de adição com transporte.

O método esboçado em (10) é bem parecido com estratégias que utilizamos para calcular a soma de forma mental. Por exemplo, vejamos o seguinte caso onde iniciamos a adição pela coluna das centenas

$$\begin{aligned} 147 + 271 &= (1+2)\times 100 + (4+7)\times 10 + (7+1)\times 1 \\ &= 3\times 100 + (4+7)\times 10 + (7+1)\times 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Em seguida passamos à soma dos algarismos na coluna das dezenas

$$\begin{aligned} &= 3\times 100 + 11\times 10 + (7+1)\times 1 \qquad (12) \\ &= 410 + (7+1)\times 1 \end{aligned}$$

e, por último, somamos os algarismos da coluna das unidades,

$$147 + 271 = 410 + 8\times 1 = 418. \tag{13}$$

Uma variação bastante semelhante do processo realizado em (11) e (12) seria o agrupamento "formando um 10" a partir de $4 + 7 = 10 + 1$ bem comum na concepção chinesa de ensino, o que frequentemente fazemos de forma mental.

$$\begin{aligned} 147 + 271 &= (1+2)\times 100 + (4+7)\times 10 + (7+1)\times 1 \\ &= 3\times 100 + (10+1)\times 10 + (7+1)\times 1 \qquad (14) \\ &= 300 + 100 + 1\times 10 + (7+1)\times 1 \\ &= 400 + 1\times 10 + (7+1)\times 1 \\ &= 418 \end{aligned}$$

Tanto no processo desenvolvido em (14), quanto nos processos desenvolvidos em (11) e (12) estamos começando a adição pela coluna das centenas, justamente o contrário do que se faz no algoritmo habitual para a adição onde sempre começamos a adicionar pela coluna dos algarismos da unidades.

A vantagem que temos quando começamos a somar da esquerda para a direita é que temos uma estimativa do resultado final da adição, enquanto que começando a adicionar da direita para esquerda não poderemos estimar o valor da soma.

Não é de se espantar que o algoritmo convencional de adição funcione em outras bases, com poucas adaptações, é claro. Pode ser utilizado para calcular a soma em qualquer sistema e não apenas no decimal. Vamos, para exemplificar, efetuar a soma de numeros naturais representados na base 2, mas antes vejamos como transformar um número na base decimal para base 2.

Proposição 1. ***(Segundo Princípio de Indução)*** *Seja $p(n)$ uma função proposicional cujo universo é o conjunto dos números inteiros maiores do que ou iguais a um inteiro dado $\boldsymbol{a}$. Suponhamos que sejam válidos:*

(i) *$p(a)$ é verdadeira;*

(ii) *Se r é um número inteiro maior que $\boldsymbol{a}$ e $p(s)$ é verdadeira para todo s satisfazendo $a \leq s < r$, então $p(r)$ é verdadeira.*

Então temos que $p(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Teorema 2. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$ com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_1, \ldots, c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que*

$$a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \ldots + c_n b^n. \tag{15}$$

A demonstração que utilizaremos pode ser encontrada em [6].

Demonstração:

Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do Princípio de Indução Matemática sobre a. Se $a = 0$ ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$.

Supondo que o resultado seja válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão[8] euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } r < b.$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais n' e $d_0, d_1, \ldots, d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo j, tais que

$$q = d_0 + d_1 b + \ldots + d_{n'} b^{n'}.$$

Levando em conta as desigualdades acima destacadas, temos que

$$a = bq + r = b(d_0 + d_1 b + \ldots + d_{n'} b^{n'}) + r,$$

donde o resultado segue-se pondo $c_0 = r$, $n = n' + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, \ldots, n$.

A unicidade segue-se facilmente das unicidades acima estabelecidas.

□

[8] Em [8]: Arit. Operação aritmética que consiste em determinar quantas parcelas (quociente) de uma certa quantidade (divisor) somadas, formam um número (dividendo).

A expressão mostrada em (15) é denominada de expansão relativa à base b. Se tomarmos $b = 10$ então essa expansão é chamada decimal e se $b = 2$, binária.

A partir da demonstração do Teorema 2 temos um algoritmo para determinar a expansão de um número qualquer na base b. Basta que apliquemos, repetidas vezes, a divisão euclidiana, como a seguir:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0, r_0 < b, \\ q_0 &= bq_1 + r_1, r_1 < b, \\ q_1 &= bq_2 + r_2, r_2 < b, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Como $a > q_0 > q_1 > \cdots$, em algum momento teremos $q_{n-1} < b$ e, portanto, de $q_{n-1} = bq_n + r_n$ decorre que $q_n = 0$, implicando em $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots$, e, consequentemente, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \cdots$.

Então,

$$a = r_0 + r_1 b + \cdots + r_n b^n. \tag{16}$$

A expansão em (16) permite representar os números naturais a partir de um conjunto S de símbolos com cardinalidade[9] b, ou seja, se $b = 2$, então $S = \{0, 1\}$. Na base decimal, onde $b = 10$, temos $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Representaremos os números $8_{(10)}$ e $9_{(10)}$ na base binária. Para tanto, faremos as divisões repetidas dos números $8_{(10)}$ e $9_{(10)}$ por 2.

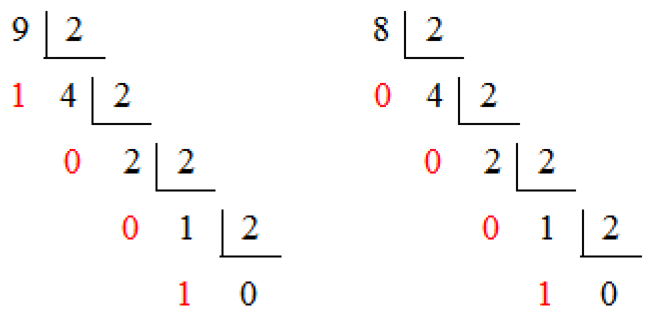

Figura 5: Processo para converter 8 e 9 para base binária

[9] Em: [8] Mat. Número de elementos diferentes em um determinado conjunto.

Agora, podemos escrever:

$$9_{(10)} = 1001_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0,$$

$$8_{(10)} = 1000_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0.$$

Como a base 2 é um sistema de valores posicionais, precisamos considerar que $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=10_{(2)}$, ou seja, esses são os fatos da adição para base binária.

Exemplo 1. *Agora, utilizaremos o algoritmo convencional na adição para realizar a operação* $9+8$*, na base 2*

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 0 & 1_{(2)} \\ + & 1 & 0 & 0 & 0_{(2)} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1_{(2)} \end{array} \tag{17}$$

Vejamos o que acontece quando colocamos, em expansão na base binária, o resultado da soma em (17)

$$10001_{(2)} = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 16 + 1.$$

O que temos é justamente o resultado da adição $9+8=17$ que teríamos se tivéssemos utilizado o algoritmo convencional para adição na base decimal.

Exemplo 2. *(OBMEP 2014) Na conta indicada a seguir, as letras* X*,* Y *e* Z *representam algarismos distintos. Qual é o algarismo representado pela letra* Z*?*

$$\begin{array}{ccccc} & X & X & X & X \\ + & Y & Y & Y & Y \\ & Z & Z & Z & Z \\ \hline Y & X & X & X & Z \end{array}$$

Solução:

Estamos considerando, pelo enunciado, os algarismos $X \neq Y \neq Z$. Quando somamos os três números de 4 algarismos distintos, obtemos um número de 5 algarismos, $YXXXZ$. O algarismo Y pode assumir, em análise preliminar, dois valores, isto é, $Y = 1$ ou $Y = 2$. De fato, observe as contas abaixo que exemplificam o nosso raciocínio:

$9999 + 8888 + 7777 = 26664$ (consideramos os algarismos X, Y e Z os maiores possíveis para que a soma resulte em um número de 5 algarismos).

$3333 + 4444 + 5555 = 13332$ (consideramos os algarismos X, Y e Z os menores possíveis para que a soma resulte em um número de 5 algarismos).

Se $Y = 1$, então, teremos o seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} & X & X & X & X \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & Z & Z & Z & Z \\ \hline 1 & X & X & X & Z \end{array}$$

Quando procedemos a operação, somando os algarismos das unidades, obtemos na soma o algarismo Z na posição das unidades, logo devemos ter $X+1+Z = 10+Z$, ou seja, $X+1 = 10$ e na composição da ordem superior as 10 unidades formam 1 dezena e na coluna das unidades fica o algarismo Z (de maneira menos formal dizemos que "vai 1 para as dezenas e fica Z nas unidades"). Agora, se $X + 1 = 10$, então $X = 9$. Logo devemos ter:

$$\begin{array}{ccccc} & 9 & 9 & \overset{1}{9} & 9 \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & Z & Z & Z & Z \\ \hline 1 & 9 & 9 & 9 & Z \end{array}$$

Observando a soma na posição das dezenas temos $1 + 9 + 1 + Z = 19$, onde na composição da ordem superior 10 dezenas formam 1 centena e anotamos o algarismo 9 na posição das dezenas. O mesmo acontece na posição das centenas e das unidades de milhar.

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{1}{9} & \overset{1}{9} & \overset{1}{9} & 9 \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & Z & Z & Z & Z \\ \hline 1 & 9 & 9 & 9 & Z \end{array}$$

Voltando ao raciocínio $1+9+1+Z=19$, temos que $Z=19-(1+9+1)=19-11$ e, portanto, $Z=8$. Teremos então o seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{1}{9} & \overset{1}{9} & \overset{1}{9} & 9 \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 8 & 8 & 8 & 8 \\ \hline 1 & 9 & 9 & 9 & 8 \end{array}$$

Consideremos aqui o caso onde, em análise preliminar, $Y=2$. O caso em que Y assume o valor 2 nos leva a uma contradição, já que encontraríamos $X=8$ e $Z=7$. E teríamos então o seguinte $8888+2222+7777=28887$, o que não está correto, pois o correto seria $8888+2222+7777=18887$.

3 A subtração

Agora, passaremos a desenvolver a subtração desde uma perspectiva histórica até o seu algoritmo convencional. A exemplo do que aconteceu com a adição, a subtração não possui muitos registros históricos. O que sabemos sobre a subtração é meramente especulativo e vem do uso dos primeiros dispositivos para cálculo e de documentos antigos tais como a análise de contas judiciais e financeiras históricas. Conforme descrição de [15], existe uma série de operações fundamentais aritméticas em um clássico escrito chinês de natureza jurídica. Tais cálculos não costumavam ser escritos e podiam ser realizados com a utilização de numerais formados a partir de hastes retas. Um fato curioso é que as pessoas versadas nesse tipo de cálculo não usavam contagem nem as hastes representativas dos números. Veja, na figura que consta em [15], uma antiga representação dos nove algarismos através das hastes retas.

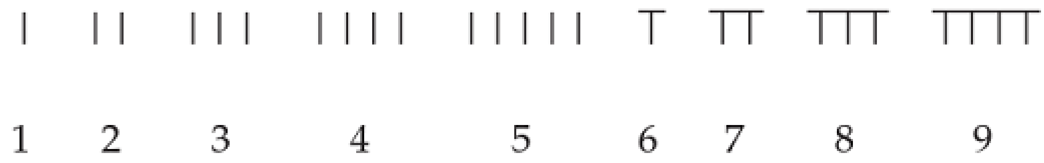

Figura 6: Os primeiros nove algarismos

3.1 Algoritmo da compensação

Segundo [15], uma caracterização[10] datada do século XV nos diz que subtrair ou descontar é retirar ou diminuir uma soma de outra, respectivamente, diminuir o subtraendo[11] do minuendo. Nesse processo, podem surgir algumas dificuldades, por exemplo, o fato de não podermos "tirar 8 de 1" como representado abaixo

$$\begin{array}{rcc} & 8 & 1 \\ - & 6 & 8 \\ \hline \end{array}$$

[10]Nessa caracterização o minuendo e o subtraendo são chamados de somas superiores e inferiores, respectivamente.

[11]Em [8]: sm. Arit. Número que se subtrai de outro numa subtração.

Procedendo conforme essa caracterização, se tivermos em qualquer soma um algarismo da soma inferior [subtraendo] maior do que a cifra[12] da soma que está sobre ela [minuendo], então, soma-se 10 à cifra acima e da soma total retira-se a cifra inferior. Observemos também que quando colocamos 10 em qualquer cifra, ainda devemos somar 1 à cifra da posição que segue na linha inferior. Com isso tem-se definida toda a teoria da subtração segundo esse procedimento.

Esse método é utilizado em algumas partes do mundo, apesar de não ser usual. Vamos exemplificar o funcionamento desse processo.

Não é possível subtrair 8 de 1, portanto, modificamos o problema adicionando 10 ao 1 (ou seja, ao 1 de 81), o que dá 11:

$$\begin{array}{ccc} & 8 & {}^{1}1 \\ - & 6 & 8 \\ \hline & & 3 \end{array}$$

e depois subtraímos 8 de 11. Agora, devemos somar 1 ao 6 (ou seja, ao 6 de 68):

$$\begin{array}{ccc} & 8 & {}^{1}1 \\ - & \cancel{6}^{7} & 8 \\ \hline & & 3 \end{array}$$

o que dá exatamente 7. Finalmente, subtraímos 7 de 8, obtendo 1, de tal forma que a diferença[13] é 13. Observemos:

$$\begin{array}{ccc} & 8 & {}^{1}1 \\ - & \cancel{6}^{7} & 8 \\ \hline & 1 & 3 \end{array}$$

No Brasil, esse método é conhecido como "algoritmo da compensação" e utiliza a propriedade que, em uma subtração, se somarmos um mesmo valor (no caso 10) ao minuendo e ao subtraendo, a diferença não se altera. Na verdade, utilizamos muito essa propriedade para efetuarmos cálculo mental na subtração.

[12]Em [8]: sf. Algarismo ou conjunto de algarismos que se usam para representar um número ou registrar determinada quantidade.

[13]Em [8]: Mat. Resultado de uma subtração.

Poderíamos também, em vez de somar 10 ao minuendo e ao subtraendo, somarmos o número 2 a ambos. Faríamos uma espécie de "arredondamento" fazendo o minuendo 83 e o subtraendo 70, tornando a conta mais atrativa para uma estratégia de cálculo mental. Na verdade, as contas $81 - 68$ e $83 - 70$ terão o mesmo resultado, como pode ser visto abaixo.

$$\begin{array}{rcc} & 8 & 3 \\ - & 7 & 0 \\ \hline & 1 & 3 \end{array}$$

Definição 2. ***(Diferença)*** *Dados dois números naturais a e b tais que $a \leq b$, o número de deslocamentos para a direita partindo de a para atingir b será representado por $b - a$ e será chamado de diferença entre b e a.*

Logo, pela definição de $b - a$, temos que

$$a + (b - a) = b. \tag{18}$$

O número $b - a$ representa o quanto devemos deslocar b para esquerda a fim de alcançar a. A interpretação que devemos ter, a partir de (18), é que o número $b - a$ é o quanto falta a a para alcançar b.

Notemos que $a - a = 0$, pois devemos deslocar a de zero unidades para atingir a e que $a - 0 = a$, pois devemos deslocar 0 de a para a direita para alcançar a.

Definição 3. ***(Subtração)*** *Quando $a \leq b$, a diferença $b - a$, entre b e a, define uma operação que chamamos de subtração.*

A subtração é a operação inversa da adição, já que se deslocarmos a para a direita de b posições encontramos $a + b$, depois ao deslocarmos $a + b$ para a esquerda de b posições voltamos para a. Representamos assim:

$$(a + b) - b = a.$$

Se deslocarmos b para a esquerda de a posições encontraremos $b - a$, depois ao deslocarmos $b - a$ para a direita de a posições encontramos b, o que seria representado assim:

$$(b - a) + a = b.$$

Se $b > a$, o número $b - a$ nos ajuda na contagem de quantos números inteiros maiores ou iguais a a e menores ou iguais a b existem. Para realizar a contagem desses números consideremos a sequência:

$$a + 0, a + 1, a + 2, a + 3, \ldots, a + (b - a) = b,$$

cuja quantidade de elementos é igual ao número de naturais entre 0 e $b - a$, inclusive, o que nos fornece exatamente $b - a + 1$ números. Assim:

$$\boxed{\text{se } a < b, \text{ o intervalo } [a, b] \text{ possui exatamente } b - a + 1 \text{ números naturais.}}$$

A partir da perspectiva de [15] encontramos relatos que, em 1927, existiam três algoritmos gerais para a subtração em utilização nos Estados Unidos e no continente europeu, a saber: algoritmos de *adição*, de *adições iguais* e *decomposição*. O algoritmo de *adições iguais* é semelhante ao que foi proposto acima, e o algoritmo de *decomposição* é basicamente o algoritmo utilizado atualmente. O algoritmo de *adição* é bem parecido como algoritmo de *adições iguais*, muito embora subtrair, neste caso, 8 de 11, é visto como a solução para a equação

$$8 + x = 11, \tag{19}$$

e não a forma comumente utilizada

$$x = 11 - 8.$$

Assim, para calcularmos

$$\begin{array}{rcc} & 8 & 1 \\ - & 6 & 8 \\ \hline \end{array}$$

seguiríamos o seguinte procedimento:

- Iniciando pela coluna das unidades, observemos que a soma de 8 e 3 dá como resultado 11.
- Anotamos 3 na coluna das unidades e adicionamos o 10 de 11 ao 6 de 68 (uma variação deste método seria subtrair o 10 de 11 do 8 de 81).

$$\begin{array}{rcc} & 8 & {}^{1}1 \\ - & \cancel{6}^{7} & 8 \\ \hline & & 3 \end{array}$$

- Agora, na coluna das dezenas, podemos observar que a soma de 7 e 1 dá 8.
- Em seguida, efetivamente, escrevemos o 1 na coluna das dezenas.

Logo, teremos o resultado final

$$\begin{array}{rcc} & 8 & {}^{1}1 \\ - & \cancel{6}^{7} & 8 \\ \hline & 1 & 3 \end{array}$$

Se observarmos bem, não temos uma diferença extrema na execução dos dois métodos acima. A grande diferença entre esses métodos está justamente na concepção adotada em (19) na hora de realizar a subtração. A diferença pode parecer bem sutil, mas a consideramos intrigante e engenhosa, quase uma quebra de paradigma. Não temos experimentado concepções como essa em nossas aulas, é como se concebêssemos a subtração de um ponto de vista bem diverso do habitual.

Agora, abordaremos a operação de subtração sob uma perspectiva de desenvolvimento, conforme está proposto por [15]. Nestes termos, a subtração tem desenvolvimento bastante semelhante ao da adição. Por exemplo, para calcularmos $9-3$ recorremos ao processo de contagem de um conjunto de blocos à contagem de um subconjunto formado a partir da retirada de alguns desses blocos, conforme ilustrado na figura 7.

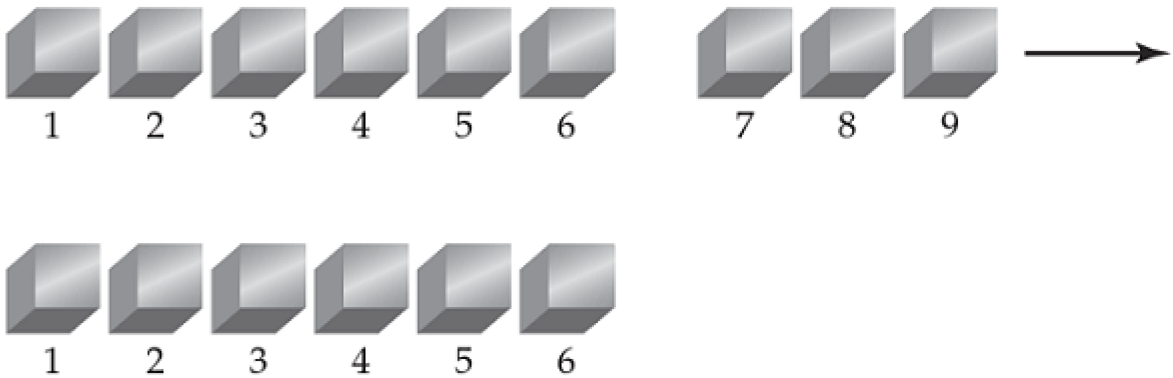

Figura 7: Contagem de um conjunto de blocos à contagem de um subconjunto formado pela remoção de alguns destes blocos

Se estivermos bem familiarizados com noções de cardinalidade, também poderemos realizar *contagem regressiva* ou *contagem progressiva* a partir da utilização de blocos.

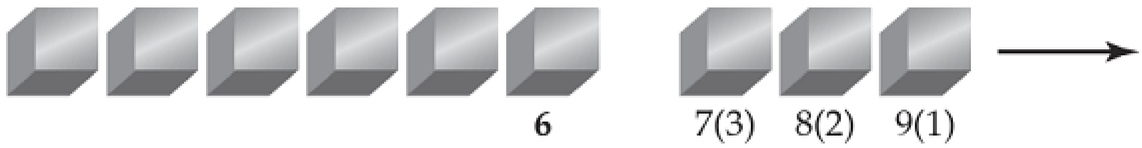

Figura 8: Contagem regressiva

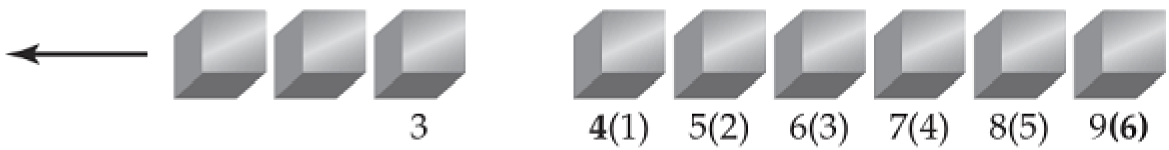

Figura 9: Contagem progressiva

A *contagem regressiva* pode oferecer alguma dificuldade, já que começamos com o último bloco contado em vez de, como na *contagem progressiva*, com o próximo bloco consecutivo. Tais técnicas aditivas, que são basicamente a forma do algoritmo de subtração de *adições*, reforçam-se a partir de problemas do tipo:

$$8 + \boxed{?} = 11.$$

Segundo [15], as crianças do $2^{\underline{o}}$ e $3^{\underline{o}}$ anos das séries iniciais do Ensino Fundamental estão consolidando esses fatos da subtração com diferença até 5, por exemplo, $5-2=3$

e $3-3=0$. Pouco depois são introduzidas contas com fatos com diferença de até 10 e, mais tarde até 20. Da mesma forma como se desenvolve com a adição, as crianças do continente asiático se utilizam do 10. Vejamos como isso acontece:

$$\begin{aligned} 15-7 &= (10-7)+5 \\ &= 3+5 \\ &= 8. \end{aligned}$$

3.2 Algoritmo convencional da subtração

Consideremos o cálculo utilizando o algoritmo convencional:

$$\begin{array}{cccc} & 6 & 3 & 7 \\ - & 2 & 4 & 9 \\ \hline & 3 & 8 & 8 \end{array}$$

Começamos à direita na coluna das unidades para utilização do algoritmo convencional. Como, nesse algoritmo, não é possível subtrair 9 de 7 (o que, naturalmente, não é verdade já que $7-9=-2$) utilizamos a decomposição da ordem superior das dezenas. Também não é possível, na coluna das dezenas, subtrair 4 de 3 nesse algoritmo (o que não é verdade, pois $3-4=-1$). Teremos então que decompor a ordem das centenas para prosseguirmos. Pois bem, com a decomposição de uma centena das seis existentes teremos 10 dezenas na ordem seguinte.

$$\begin{array}{cccc} & \overset{5}{\cancel{6}} & {}^{1}3 & 7 \\ - & 2 & 4 & 9 \\ \hline & & & \end{array}$$

Em seguida, faremos a decomposição de 13 dezenas para continuar prosseguindo com o algoritmo e concluir a conta na coluna das unidades, das dezenas e das centenas.

$$\begin{array}{cccc} & \overset{5}{\cancel{6}} & \overset{12}{\cancel{3}} & \overset{17}{\cancel{7}} \\ - & 2 & 4 & 9 \\ \hline & 3 & 8 & 8 \end{array}$$

Para melhor visualização das decomposições realizadas, representaremos o processo descrito com o auxílio de tabelas:

	Centenas	Dezenas	Unidades
Minuendo	6	3	7
Subtraendo	2	4	9

	Centenas	Dezenas	Unidades
Minuendo	5	12	17
Subtraendo	2	4	9
Resultado	3	8	8

Não utilizamos a expressão "pedir emprestado" tão comumente utilizada no desenvolvimento do algoritmo convencional. Realizamos também a decomposição do minuendo para que o algoritmo pudesse funcionar. É claro que não poderíamos, no sistema posicional decimal, representar a coluna das unidades com o número 17 e tampouco a coluna das dezenas com o número 12 como fizemos na tabela acima. Trata-se da decomposição conveniente do minuendo para que pudéssemos desvendar o funcionamento do algoritmo e o porquê dele funcionar com tanta eficiência. Vejamos a decomposição tal qual é representada levando em conta o valor posicional:

$$637 = 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0, \tag{20}$$

$$637 = 5 \times 10^2 + 12 \times 10^1 + 17 \times 10^0 = 500 + 120 + 17. \tag{21}$$

Temos a expansão na base decimal do número 637 e temos ainda uma decomposição possível do minuendo que é bastante elucidativa para compreensão dos processos intrínsecos do algoritmo, que é justamente o que pode ser visto em (20) e (21).

Por que a subtração dá certo no algoritmo convencional? Vamos representar o minuendo e o subtraendo em expansão decimal, ou seja, em termos de potências de 10.

$$637 = 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0,$$

$$249 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^0.$$

Efetuando a subtração, temos

$$637 - 249 = 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 - (2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^0).$$

Agora organizando convenientemente para que fique tal como acontece no algoritmo convencional, temos

$$637 - 249 = (6 \times 10^2 - 2 \times 10^2) + (3 \times 10^1 - 4 \times 10^1) + (7 \times 1 - 9 \times 1).$$

Assim, chegamos ao ponto controverso: ou seja, como podemos retirar 4 de 3 nas dezenas ou como podemos tirar 9 de 7 na coluna das unidades? Observe que temos evitado as expressões "empréstimo ou pedir emprestado", pois estas acabam por disseminar ideias errôneas e não explicitam o correto funcionamento do algoritmo. No entanto, o que efetivamente estamos fazendo é decompor o minuendo,

$$\boxed{3 \times 10 = 2 \times 10 + 1 \times 10}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
637 - 249 &= (6 \times 10^2 - 2 \times 10^2) + (2 \times 10^1 + 10 - 4 \times 10^1) + (7 \times 1 - 9 \times 1) \\
&= (6 \times 10^2 - 2 \times 10^2) + (2 \times 10^1 - 4 \times 10^1) + ((10 \times 1 + 7 \times 1) - 9 \times 1) \\
&= (6 \times 10^2 - 2 \times 10^2) + (2 \times 10^1 - 4 \times 10^1) + (\underline{17} \times 1 - 9 \times 1) \\
&= (6 \times 10^2 - 2 \times 10^2) + (2 \times 10^1 - 4 \times 10^1) + 8 \times 1.
\end{aligned}$$

Agora, decompondo 6×10^2 da mesma maneira, temos

$$\begin{aligned}
637 - 249 &= (5 \times 10^2 + 1 \times 10^2 - 2 \times 10^2) + (2 \times 10^1 - 4 \times 10^1) + 8 \times 1 \\
&= (5 \times 10^2 - 2 \times 10^2) + (1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 - 4 \times 10^1) + 8 \times 1 \\
&= (5 \times 10^2 - 2 \times 10^2) + (10 \times 10^1 + 2 \times 10^1 - 4 \times 10^1) + 8 \times 1.
\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade distributiva, temos

$$\begin{aligned}637 - 249 &= (5\times 10^2 - 2\times 10^2) + ((10+2)\times 10^1 - 4\times 10^1) + 8\times 1\\ &= (5\times 10^2 - 2\times 10^2) + ((\underline{12}\times 10^1 - 4\times 10^1) + 8\times 1\\ &= (5\times 10^2 - 2\times 10^2) + 8\times 10 + 8\times 1.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}637 - 249 &= 3\times 10^2 + 8\times 10^1 + 8\times 1\\ &= 3\times 100 + 8\times 10 + 8\times 1\\ &= 300 + 80 + 8\\ &= 388.\end{aligned}$$

3.3 Algoritmo de igualdade de adições

Passaremos, a partir de agora, a analisar o algoritmo de *igualdade de adições* para efetuar

$$\begin{array}{rccc} & 6 & 3 & 7\\ - & 2 & 4 & 9\\ \hline \end{array}$$

Com as devidas marcações passaremos ao seguinte:

$$\begin{array}{rccc} & 6 & {}^{1}3 & {}^{1}7\\ - & {}^{3}\cancel{2} & {}^{5}\cancel{4} & 9\\ \hline & 3 & 8 & 8\end{array}$$

Para explicar esse processo começamos pela direita, ou seja, a posição das unidades. Tal como no algoritmo convencional, não podemos subtrair 9 de 7, então somamos 10 ao 7 do minuendo, tornando-o 17 e subtraindo 9 de 17, obtemos 8 e registramos na coluna apropriada. Adicionamos 10 ao 40 do subtraendo para obter uma soma de 50. Indo agora à próxima coluna à esquerda, verificamos que não é possível retirar 5 de 3 (na verdade, 50 do 30), logo somamos 10 (na verdade, 100) ao 3 do minuendo, transformando-o em 13, retiramos 5 de 13, com uma diferença de 8 (na realidade, 80), e anotamos isso na coluna apropriada. Agora, na próxima coluna à esquerda, acrescentamos 100 ao 200 do subtraendo, tornando-o 300. Em seguida subtraímos 300 de 600, com diferença 300 e anotamos na coluna das centenas. Há de se destacar que quando adicionamos valores ao subtraendo, estamos compensando o que foi adicionado ao minuendo nos casos de impossibilidade de retirar um número maior de um número menor no contexto de utilização do algoritmo.

A explicação parece bastante enfadonha, mas na execução do algoritmo não há grandes dificuldades. Mas por que funciona? A partir da expansão na base 10 tanto do minuendo quanto do subtraendo, temos, respectivamente,

$$637 = 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0,$$

$$249 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^0.$$

Subtraindo, temos

$$\begin{aligned} 637 - 249 &= 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 - (2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 9 \times 10^0) \\ &= (6 \times 10^2 - 2 \times 10^2) + (3 \times 10^1 - 4 \times 10^1) + (7 \times 10^0 - 9 \times 10^0). \end{aligned}$$

Reorganizaremos essa diferença para que se desenvolva tal qual o algoritmo de igualdade de adições e passaremos a ter o seguinte:

$$\begin{aligned} 637 - 249 &= 6 \times 10^2 - 2 \times 10^2 \underline{-1 \times 10^2 + 1 \times 10^2} + 3 \times 10^1 - 4 \times 10^1 \qquad (22) \\ &\quad \underline{-1 \times 10^1 + 1 \times 10^1} + 7 \times 10^0 - 9 \times 10^0 \\ &= 6 \times 10^2 - (2 \times 10^2 + 1 \times 10^2) + (1 \times 10^2 + 3 \times 10^1) - (4 \times 10^1 + 1 \times 10^1) \\ &\quad + (1 \times 10^1 + 7 \times 10^0) - 9 \times 10^0 \\ &= 6 \times 10^2 - ((2+1) \times 10^2) + (1 \times 100 + 3 \times 10) - ((4+1) \times 10^1) \\ &\quad + (1 \times 10 + 7 \times 1) - 9 \times 1 \\ &= (6 \times 10^2 - 3 \times 10^2) + (10 \times 10 + 3 \times 10) - 5 \times 10 \\ &\quad + (10 \times 1 + 7 \times 1) - 9 \times 1 \\ &= ((6-3) \times 100) + ((10+3) \times 10) - 5 \times 10 + ((10+7) \times 1) - 9 \times 1 \\ &= 3 \times 100 + 13 \times 10 - 5 \times 10 + 17 \times 1 - 9 \times 1 \\ &= 3 \times 100 + (13-5) \times 10 + (17-9) \times 1 \\ &= 3 \times 100 + 8 \times 10 + 8 \times 1. \end{aligned}$$

Observemos que as expressões sublinhadas em (22) não alteram o valor do resultado, já que estamos somando números simétricos ou inversos aditivos à expressão aritmética, que é o mesmo que somar zero e não altera o resultado.

3.4 Algoritmo de subtração da esquerda para direita

Ambos os algoritmos de subtração analisados realizam a operação da direita para a esquerda, ou seja, começam subtraindo na coluna das unidades, depois passam para a coluna das dezenas e assim sucessivamente. Nesse momento, trataremos de um algoritmo que faz justamente o contrário, começa operando pela ordem mais elevada até que chegue à ordem das unidades. Discutiremos o processo que acontece no *Algoritmo de subtração da esquerda para a direita*, conhecido também como um método de "riscar" conforme [15].

Faremos a mesma subtração anterior, só que agora, utilizando o método que opera da esquerda para direita. Relembremos o algoritmo convencional:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 6 & 3 & 7 \\
- & 2 & 4 & 9 \\
\hline
 & 3 & 8 & 8
\end{array}
$$

Com as marcas, no algoritmo da esquerda para a direita, teríamos o seguinte:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 3 & 8 & \\
 & \cancel{4} & \cancel{9} & 8 \\
 & \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{7} \\
- & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{9}
\end{array}
$$

O resultado é expresso pelos números que não estão "cancelados", que é o mesmo resultado encontrado quando aplicamos os dois algoritmos anteriores. Não está muito claro o modo como chegamos ao número 388. Esclarecer isso é o que faremos a seguir.

1. $$
\begin{array}{cccc}
 & \underline{4} & & \\
 & \cancel{6} & 3 & 7 \\
- & \cancel{2} & 4 & 9
\end{array}
$$
Ou seja, $600 - 200 = 400$ que é representado pelo 4 sublinhado que ocupa a coluna das centenas.

2.	$\begin{array}{cccc} & \underline{3} & & \\ & \cancel{4} & \underline{9} & \\ & \cancel{6} & \cancel{3} & 7 \\ - & \cancel{2} & \cancel{4} & 9 \end{array}$	Ou seja, $430-40=390$ que é representado pelos números 3 e 9 sublinhados que ocupam as colunas das centenas e dezenas, respectivamente.
3.	$\begin{array}{cccc} & 3 & \underline{8} & \\ & \cancel{4} & \cancel{9} & \underline{8} \\ & \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{7} \\ - & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{9} \end{array}$	Ou seja, $97-9=88$ que é representado pelos números 8 e 8 sublinhados que ocupam as colunas das dezenas e unidades, respectivamente.
4.	$\begin{array}{cccc} & \underline{3} & \underline{8} & \\ & \cancel{4} & \cancel{9} & \underline{8} \\ & \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{7} \\ - & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{9} \end{array}$	Finalmente, o resultado 388 que é representado pelos números 3, 8 e 8 sublinhados que ocupam as colunas das centenas, dezenas e unidades, respectivamente.

Faremos agora a resolução de uma questão aplicada na última edição da OBMEP, onde é utilizado o algoritmo convencional da subtração.

Exemplo 3. *(OBMEP 2015) Na subtração abaixo cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo que C representa?*

$$\begin{array}{ccc} A & B & A \\ - & C & A \\ \hline & A & B \end{array}$$

Solução:

Conforme o enunciado, $A \neq B \neq C$. Utilizando o desenvolvimento do algoritmo convencional para subtração, começaremos a subtrair da direita para a esquerda. Na posição das unidades temos que $A - A = B$, e a partir disso só podemos concluir que $B = 0$.

$$\begin{array}{ccc} A & 0 & A \\ - & C & A \\ \hline & A & 0 \end{array}$$

Prosseguiremos com a subtração em seu algoritmo convencional, só que agora operaremos na coluna das dezenas. Nos deparamos com a impossibilidade de efetuar, no algoritmo, a subtração $0 - C$. Para continuarmos, faremos a decomposição da unidade de ordem superior das centenas a fim de que o algoritmo funcione a contento. Admitiremos também um algarismo zero à esquerda do resultado da subtração, já que isso não influi no número. Donde teremos:

$$\begin{array}{ccc} \overset{A-1}{\cancel{A}} & \overset{10}{\cancel{0}} & A \\ - & C & A \\ \hline 0 & A & 0 \end{array}$$

Agora, na posição das dezenas temos a subtração $10 - C = A$. Na coluna das centenas, temos que $A - 1 = 0$, o que nos leva ao resultado $A = 1$. Retornamos então a $10 - C = A$ que se torna $10 - C = 1$ com a determinação de A. Resolvendo $10 - C = 1$ chegamos ao resultado desejado $C = 9$. Logo, o algoritmo com todos os algarismos A, B e C determinados é da forma:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ - & 9 & 1 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$$

Exemplo 4. *Efetuar a subtração $237 - 45$ utilizando uma* ***decomposição do subtraendo****.*

Solução:

Como o subtraendo $45 = 40 + 5$, temos a possibilidade de efetuar $237 - 45$ da seguinte maneira:

$$237 - 40 = 197 \quad \text{e} \quad 197 - 5 = 192.$$

Temos então o número 192 como diferença. Esse processo pode funcionar perfeitamente para cálculo mental.

Exemplo 5. *Vamos efetuar a subtração* $50000 - 9738$.

Solução:

Quando temos o minuendo terminando em zeros, é possível facilitar os cálculos decompondo o minuendo de forma a "encontrar os noves". Vejamos como isso pode ser feito para efetuar a subtração proposta no exemplo:

Como $50000 = 49999 + 1$ podemos reescrever o algoritmo da seguinte forma e, assim "encontrar os noves":

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & & 9 & 0 & 3 & 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & 4 & 9 & 9 & 9 & 9 & + & 1 \\ - & & 9 & 0 & 3 & 8 & & \\ \hline & 4 & 0 & 9 & 6 & 1 & + & 1 \end{array}$$

Reservamos o número 1 para somá-lo ao resultado, ou seja, $40961 + 1 = 40962$ que é a resposta desejada. Notemos, pois, que quando utilizamos esse artifício a subtração pode ser realizada começando pela coluna das unidades, como fazemos habitualmente ou pode ser iniciada a partir da posição mais a esquerda, o que não altera o resultado.

Exemplo 6. *Vamos efetuar a subtração* $3003 - 685$.

Solução:

Quando temos o minuendo que tenha zeros intercalados, é possível facilitar os cálculos a subtraindo uma mesma quantidade do minuendo e do subtraendo de forma a "encontrar os noves". Vejamos como isso pode ser feito para efetuar a subtração proposta no exemplo:

Vamos subtrair 4 unidades do minuendo e do subtraendo a fim de "encontrar os noves":

$$\begin{array}{ccccccc} & 3 & 0 & 0 & 3 & - & 4 \\ - & & 6 & 8 & 5 & - & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 2 & 9 & 9 & 9 \\ - & & 6 & 8 & 1 \\ \hline & 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}$$

É claro que após efetuar esse procedimento o cálculo $3003 - 685$ se torna $2999 - 681$ que não é o mesmo, mas tem como resultado a mesma diferença. Com esse procedimento a subtração pode ser realizada começando pela coluna das unidades, como fazemos habitualmente ou pode ser iniciada a partir da posição mais a esquerda, o que também não altera o resultado.

4 A multiplicação

4.1 Método de multiplicação utilizado pelos egípcios

Pensando em um entendimento matemático estrito, a multiplicação[14] é uma adição repetida e tal noção possivelmente apareceu bastante precocemente na história dos homens. Em registros datados de 1650 a. C. tem-se notícia dos métodos de multiplicação. Segundo [15], no papiro de Rhind existem problemas que relatam o método em que os egípcios tomavam sempre o dobro de números sucessivos e, então, somavam os múltiplos adequados a fim de obter o resultado. Dessa forma, a multiplicação dependia exclusivamente da possibilidade de que se pudesse somar. Vejamos um exemplo disso.

Exemplo 7. *Faremos a multiplicação* 13×131 *utilizando o método egípcio.*

$$\begin{aligned} {}^{*}1 \times 131 &= 131 \\ 2 \times 131 &= 262 \\ {}^{*}4 \times 131 &= 524 \\ {}^{*}8 \times 131 &= 1048 \end{aligned}$$

$$1 + 4 + 8 = 13, \quad \text{logo} \quad 13 \times 131 = 131 + 524 + 1048 = 1703.$$

A descrição da técnica utilizada pelos egípcios nesse método é tal que

1. Escrevemos duas colunas de números sendo que a primeira começa pelo número 1 e a segunda por um dos fatores da multiplicação desejada.

2. Duplicamos os números dessas duas colunas, até que a soma dos números da coluna começada pelo 1 dê um resultado maior ou igual ao outro fator.

3. Escolhemos, na coluna começada pelo 1, os valores que somados tenham resultado igual ao outro fator.

4. Somamos os números da outra coluna, correspondentes aos valores que foram escolhidos na etapa anterior.

Este método pode ser justificado por duas simples propriedades: A decomposição de um número natural em uma soma de potências distintas de base 2 que é uma

[14] Em [8]: Arit. Operação elementar em que um mesmo número é somado um determinado número de vezes.

propriedade do sistema binário e na propriedade distributiva da multiplicação sobre a adição. É muito interessante o fato de que os egípcios já utilizavam o binário, de forma bem intutiva, é claro, já que não conheciam essa terminologia. Vejamos a expansão binária do número 13

$$\begin{aligned} 13 &= 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0, \\ 13 &= 8 + 4 + 1. \end{aligned}$$

Agora, apliquemos a propriedade distributiva

$$\begin{aligned} 13 \times 131 &= \\ &= (2^3 + 2^2 + 2^0) \times 131 \\ &= 8 \times 131 + 4 \times 131 + 1 \times 131 \\ &= 1048 + 524 + 131 \\ &= 1703. \end{aligned}$$

4.2 Método de multiplicação utilizado por camponeses russos

Segundo [15], durante a Idade Média tem-se relatos de uma variação desse método, onde há a operação de *duplicação e mediação*, ou seja, dobrar e reduzir à metade. Essa variação do método egípcio é frequentemente chamada de multiplicação russa em virtude de sua utilização por camponeses russos. O procedimento consiste em dobrar o multiplicando e reduzir o multiplicador[15] à metade. E quando essa divisão por 2 não é exata, o multiplicador é arredondado para o menor inteiro mais próximo. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 8. *Faremos a mesma multiplicação* 13×131*, só que agora utilizaremos o método de multiplicação russa.*[16]

$$\begin{array}{rcl} ^*131 & \times & 13 \\ 262 & \times & 6 \\ ^*524 & \times & 3 \\ ^*1048 & \times & 1 \end{array}$$

[15]Em [8]: Arit. Número que indica quantas parcelas há na multiplicação de um outro número.

[16]Esse método representa o fator 13 em binário, isto é, $13 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$$13 \times 131 = \underbrace{131 \times 2^0}_{131} + \underbrace{131 \times 2^2}_{524} + \underbrace{131 \times 2^3}_{1048} =$$
$$\underbrace{(1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0)}_{13} \times 131 = 1703.$$

Para elucidar o método de multiplicação russa utilizaremos um argumento geométrico. Vamos pensar na multiplicação como uma área.

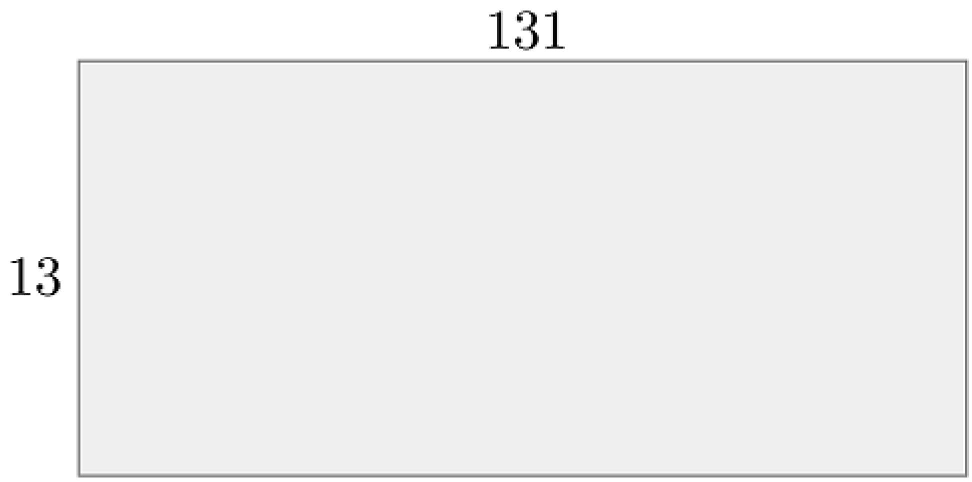

Figura 10: 13×131 representado como área de um retângulo

Não sendo possível dobrar e reduzir pela metade, vamos subdividir o 13 como segue:

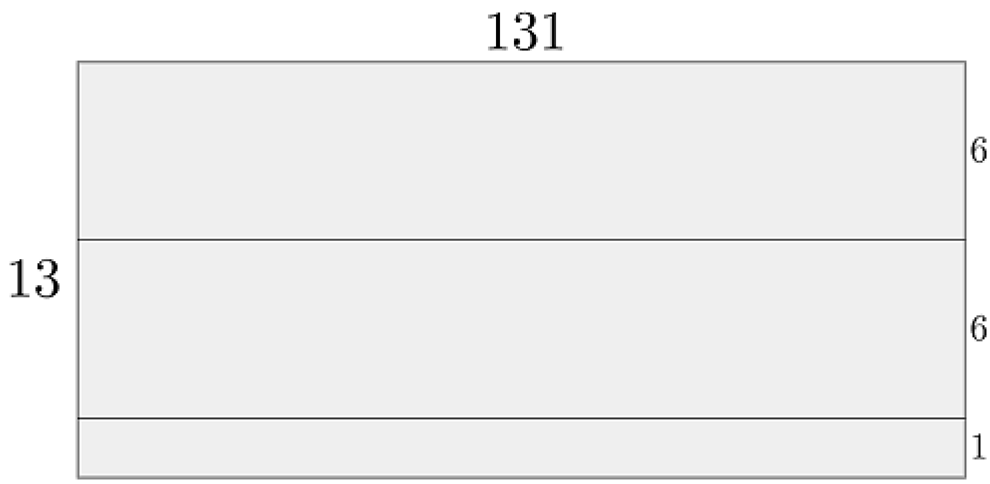

Figura 11: Retângulo subdividido

Com o rearranjo do retângulo subdividido teremos

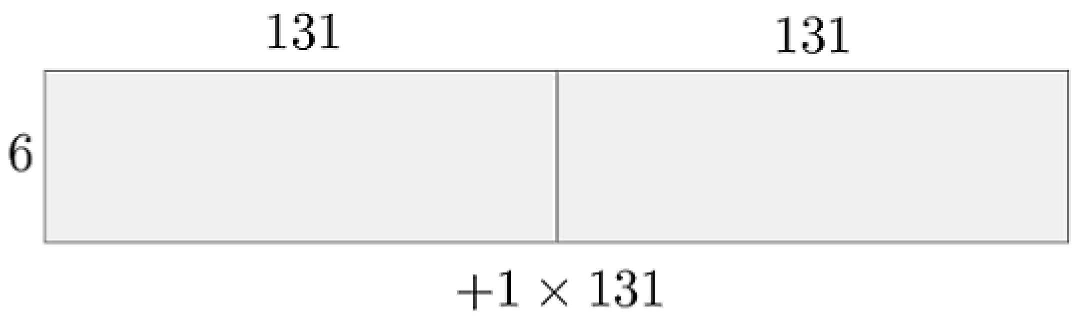

Figura 12: Retângulo rearranjado

Agora, poderemos duplicar e reduzir à metade o retângulo da figura 12 para obtermos o que segue

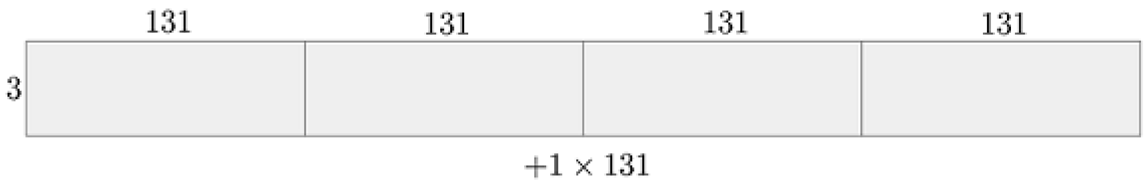

Figura 13: Retângulo após novo rearranjo

Novamente não será possível dobrar e reduzir pela metade, então subdividiremos o retângulo da figura 13 e teremos o seguinte

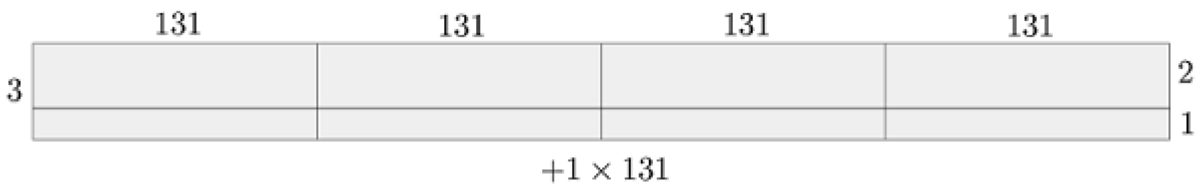

Figura 14: Retângulo subdivido novamente

Duplicaremos e reduziremos à metade para obtermos

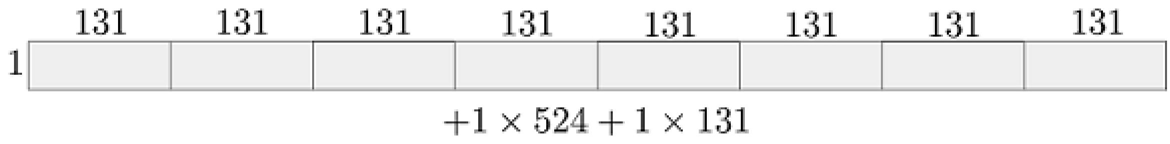

Figura 15: Retângulo após novo rearranjo

Donde teremos o seguinte

$$1 \times 1048 + 1 \times 524 + 1 \times 131 = 1703. \tag{23}$$

O processo de duplicar a quantidade de retângulos e reduzir à metade a altura desses retângulos não altera a área do retângulo original da figura 10, e tampouco altera as áreas dos retângulos subsequentes que têm exatamente a mesma área do retângulo original. Tomemos nota que quando há necessidade de subdividir um retângulo na representação geométrica, o que está acontecendo no algoritmo é justamente o "arredondamento" para o menor inteiro mais próximo. A parte restante da subdivisão está escrita abaixo da figura subsequente ao processo de subdividir e consta no resultado explanado em (23).

Uma outra ideia que pode ser associada ao processo de duplicar e reduzir à metade é a seguinte: suponha que tenhamos 2 notas de 20 reais e seguindo o procedimento de dobrar e tomar a metade teríamos 4 notas de 10 reais e repetindo o processo teríamos 8 notas de 5 reais. É de fácil percepção que a cada etapa do processo teríamos a mesma quantia de 40 reais, só que com o dobro de notas de metade do valor das notas da etapa anterior.

Em síntese, o método de multiplicação russa pode ser realizado seguindo os passos abaixo:

1. Dividimos por dois os números da coluna da direita. Quando a divisão não for exata, consideramos apenas a parte inteira. O critério de parada é quando obtemos o número 1 nessa coluna.

2. Simultaneamente, multiplicamos por 2 os números da coluna da esquerda.

3. Somamos todos os números da coluna da esquerda, que tenham à direita, como correspondente, um número ímpar a fim de obter o resultado da multiplicação.

4.3 Método de multiplicação utilizado pelos gregos

Os babilônios, por volta de 2000 a.C., já realizavam multiplicações com base em tabuadas próprias, que possivelmente foram compiladas por adição. Já na Grécia antiga, conforme relatado em [15] existem registros na obra *A medição do Círculo* de Arquimedes que a multiplicação era realizada expressando-se os numerais em forma alfabética, onde cada algarismo do multiplicador, iniciando com o mais alto, era operado com cada algarismo do multiplicando[17], também iniciando com o mais alto. A última etapa era somar os valores obtidos anteriormente.

Utilizando os algarismos hindu arábicos, teríamos algo semelhante com o que segue:

Exemplo 9. *Faremos a multiplicação* 13×131 *utilizando o método utilizado pelos gregos.*

$$\begin{array}{rrrr}
 & 1 & 3 & 1 \\
\times & & 1 & 3 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 3 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 0 \\
 & 3 & 0 & 0 \\
 & & 9 & 0 \\
 & & & 3 \\
\hline
1 & 7 & 0 & 3
\end{array}$$

[17] Em [8]: Arit. Na multiplicação, número que será somado repetidamente.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 3 & 1 \\
\times & & 1 & 3 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 3 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 0 \\
 & 3 & 0 & 0 \\
 & & 9 & 0 \\
 & & & 3 \\
\hline
1 & 7 & 0 & 3
\end{array}
\qquad (24)
$$

Observemos que:

A soma dos três primeiros termos é $1310 = 10 \times 131$.

A soma dos três últimos termos é $393 = 3 \times 131$.

Conclui-se que a forma acima é muito semelhante ao nosso algoritmo convencional utilizado atualmente, tendo como diferença o fato de anotarmos os produtos parciais de forma mais compacta e sintética. Na verdade, o que vemos aqui é muito parecido com o procedimento realizado pela propriedade distributiva, ou seja, $131 \times 13 = 131 \times (10 + 3) = 1310 + 393$, justamente a soma das parciais que podem ser vistas no algoritmo em (24).

4.4 Método de multiplicação utilizado pelos árabes

Segundo [15], a Matemática desenvolvida pelos hindus tinha um caráter bastante prático e intuitivo, o que contrastava como o formalismo grego. Os matemáticos hindus desenvolveram um método de multiplicação que era realizado através de tábuas quadriculadas. Os árabes difundiram esse método na Europa.

O sistema de numeração hindu arábico, com o valor posicional e a implementação do zero, começou a ser disseminado na Europa no fim do século XIII. Os precursores calculistas, admitindo a simplicidade desse sistema, começaram com o trabalho para criar métodos de multiplicação de números. Apenas no final do século XV a aritmética começou a tomar uma forma mais aproximada da modernidade. Por volta de 100 d.C. o livro *Introductio arithmetica*, de Nicômano de Gerasa, apresentou uma espécie de tabuada que possuía 10×10 casas, porém nela não existiam regras de multiplicação nem divisão.

Os italianos "importaram" métodos hindus e a partir destes desenvolveram algumas formas de multiplicar, é o que consta na obra *Summa de arithimetica, geometrica, pro-*

portioni et proportionolitá, conhecida também como *Süma*, escrita por Luca Pacioli e que teve publicação em 1494. Dentre os métodos descritos nesta obra, temos o método de nome bastante curioso, a *graticola* ou *gelosia* ("multiplicação em grade"). Vejamos o que [15] diz a respeito do método da gelosia:

> Os italianos, imitando o que fizeram os hindus, antes deles, desenvolveram um interesse na elaboração de esquemas para multiplicação e divisão. (...) Este último foi assim chamado porque sugeria as grades colocadas nas janelas venezianas para proteger os moradores do olhar de um público curioso.

Exemplo 10. *Faremos a multiplicação* 13×131 *utilizando o método da gelosia.*

Vejamos, agora, como funciona esse método de multiplicação em grade. Para tanto, utilizaremos a multiplicação 131×13 a fim de elucidar o referido processo.

Primeiramente, construiremos uma tabela com dimensões 2×3, ou seja, com 2 linhas e 3 colunas em virtude da quantidade de algarismos dos fatores envolvidos nessa operação.

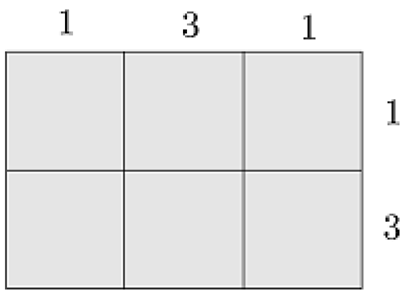

Figura 16: Tabela 2×3

Em seguida traçaremos as diagonais de cada célula da tabela, conforme a seguir.

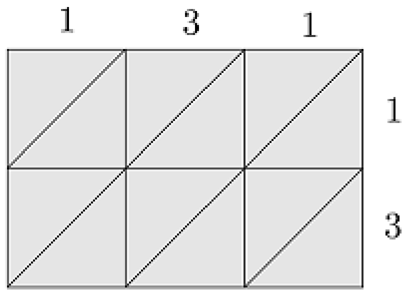

Figura 17: Tabela com as diagonais traçadas

Dentro de cada uma das células da tabela, colocaremos os resultados das multiplicações dos algarismos correspondentes da linha e da coluna. Se tal resultado for de apenas um dígito, então deve ser escrito precedido de um algarismo zero.

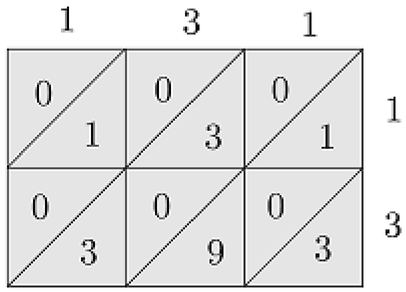

Figura 18: Tabela com os produtos parciais

Logo em seguida, somamos os algarismos que estão nas mesmas "diagonais da tabela", sendo que nestas somas observaremos a composição da ordem superior tal qual ocorre no algoritmo convencional para adição com transporte. Na verdade, o que estamos fazendo é somar os produtos parciais, o que é bastante semelhante ao que ocorre no algoritmo convencional para multiplicação. Começaremos essas somas pela diagonal inferior da célula que está situada na ultima linha e na coluna mais à direita e continuaremos com a diagonal logo acima e assim sucessivamente.

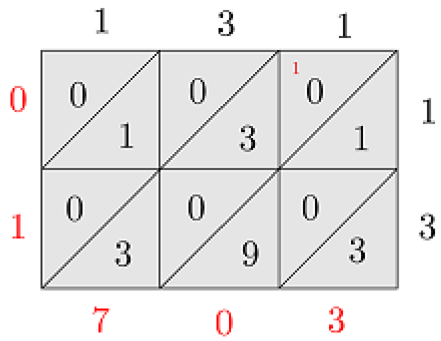

Figura 19: Somas dos produtos parciais

Agora, teremos o resultado da multiplicação seguindo o sentido das setas em torno da tabela que será lido da esquerda para direita.

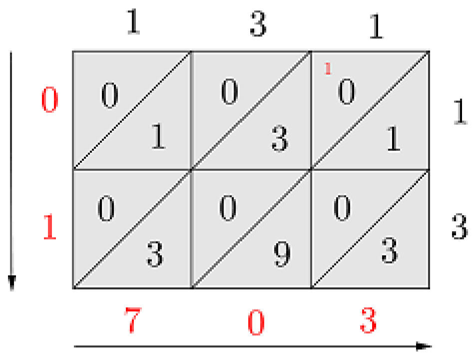

Figura 20: Registro do resultado

Finalmente, lendo da esquerda para direita os algarismos conforme indicado nas setas em torno da tabela temos o resultado da multiplicação $131 \times 13 = 1703$.

Mas por que esse método funciona tão bem? Para justificar tal questionamento, precisamos nos lembrar que na multiplicação 131×13, o que temos na realidade é $(100 + 30 + 1) \times (10 + 3)$. Então, aplicando a propriedade distributiva teremos:

$$
\begin{array}{ccccccc|c|c|c|c|}
1 & 0 & 0 & \times & 1 & 0 & = & 1 & \overset{1}{0} & 0 & 0 \\
 & 3 & 0 & \times & 1 & 0 & = & & 3 & 0 & 0 \\
 & & 1 & \times & 1 & 0 & = & & & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \times & & 3 & = & & 3 & 0 & 0 \\
 & 3 & 0 & \times & & 3 & = & & & 9 & 0 \\
 & & 1 & \times & & 3 & = & & & & 3 \\
\hline
 & & & & & & & 1 & 7 & 0 & 3
\end{array}
$$

Verifiquemos, pois, que as somas em cada coluna que obtivemos correspondem, exatamente, às somas das diagonais no método da gelosia. Esse é um forte indício de que os antigos hindus já conheciam o valor posicional dos algarismos no sistema de base decimal.

4.5 Método de multiplicação utilizado pelos chineses

Os chineses utilizavam um método prático que se amolda ao sistema de base decimal e que, em certo grau, funciona de forma semelhante ao método hindu que foi difundido na Europa e recebeu o nome de gelosia. Para isso os chineses utilizavam varas de bambu. As varas de bambu eram dispostas na direção horizontal e na vertical, respectivamente, representando o multiplicador e o multiplicando. Era feita a contagem levando em conta as interseções entre as varetas. Vejamos mais um exemplo para realizar a multiplicação a fim de conhecer o método chinês.

Exemplo 11. *Faremos a multiplicação* 13×131 *utilizando o método utilizado pelos chineses.*

As retas horizontais representam o multiplicando 13, lidas de cima para baixo. Já as retas em diagonal aproximadas da direção vertical representam o multiplicando 131, conforme figura 21.

Agora, configuraremos as interseções entre as varetas conforme as regiões A, B, C, D, E e F. Observemos o diagrama abaixo a fim de fazer considerações sobre o método e chegar ao resultado da multiplicação, conforme figura 22.

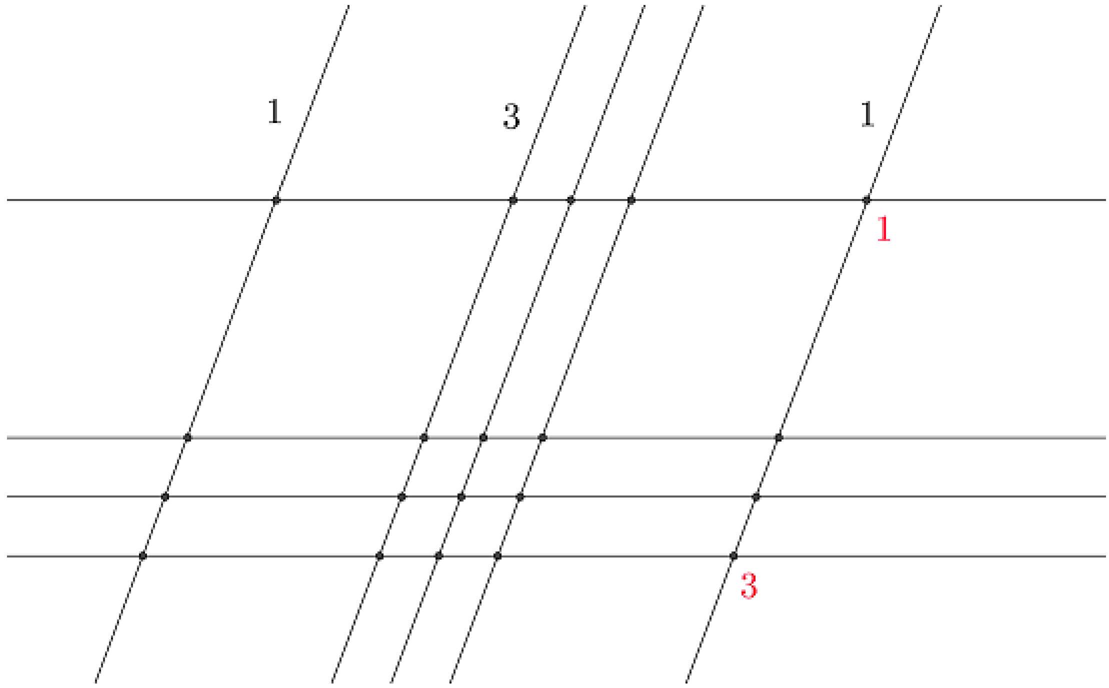

Figura 21: Representando o multiplicador 13 e o multiplicando 131

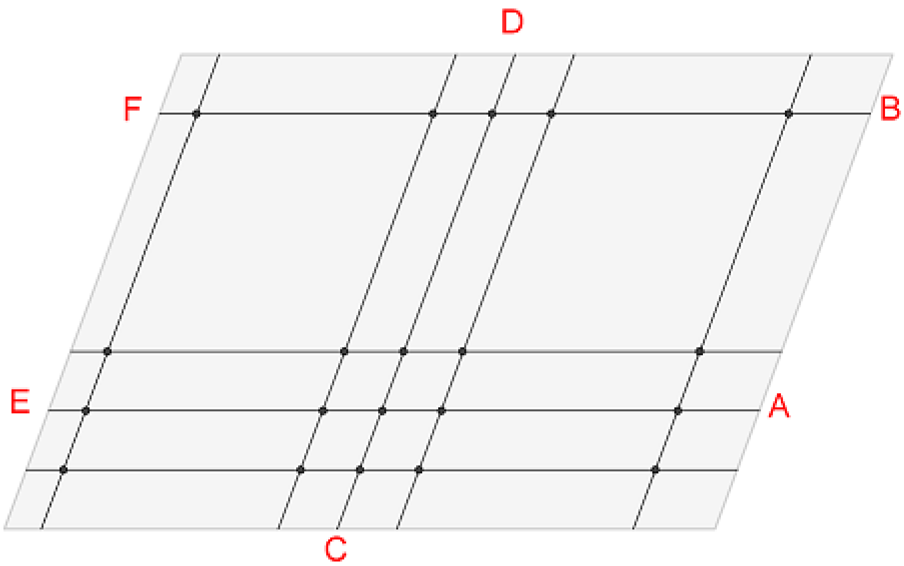

Figura 22: Somando a partir das regiões de interseção de A até F

Iniciando em A, observemos que há 3 interseções, então, anotamos 3. Em B, existe apenas uma interseção, de modo que podemos somar $3 + 10 = 13$. Em C, existem 9 interseções, então, somamos $13 + 90 = 103$. Em D, há 3 interseções, e somamos $103 + 300 = 403$. Em E, existem 3 interseções, donde somamos $403 + 300 = 703$. Finalmente, em F, temos apenas 1 interseção, e somamos $703 + 1000 = 1703$ que é o resultado para essa multiplicação.

Encontramos trabalhos sobre esse algoritmo e vídeos no YOUTUBE afirmando que esse método teria sido inventado pela extinta civilização maia. Os japoneses também utilizam o mesmo método, tanto é que algumas apresentações e sítios da internet o denominam método japonês, conforme [11].

4.6 Um olhar geométrico sobre a propriedade distributiva

Podemos utilizar uma abordagem geométrica para que os estudantes possam vislumbrar esse processo de forma mais concreta. Nessa perspectiva utilizaremos o conceito de área na malha quadriculada, onde cada unidade de área é um quadrado de lado 1 unidade de comprimento.

Exemplo 12. *Vamos efetuar a multipilicação* 12×13

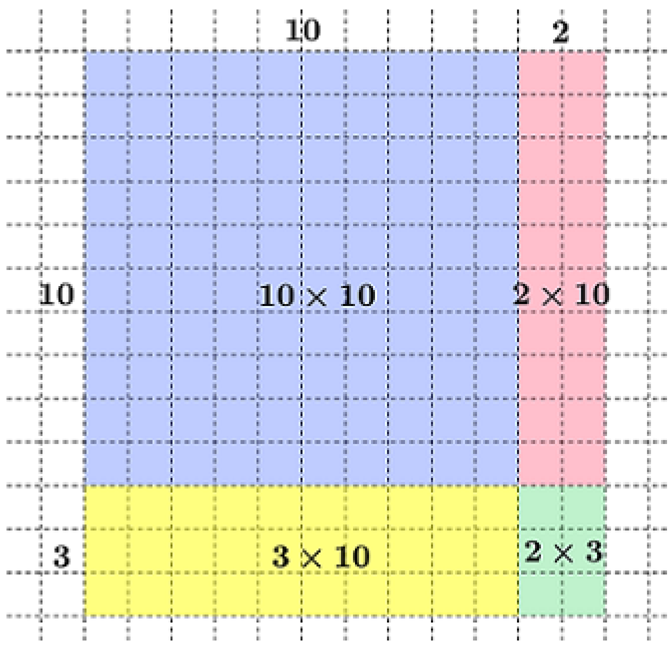

Figura 23: 12×13 com representação geométrica

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 0 & \times & 1 & 0 & = & 1 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & \times & & 2 & = & & 2 & 0 & \\
& 3 & \times & 1 & 0 & = & & 3 & 0 & \\
& 2 & \times & & 3 & = & & & 6 & + \\
\hline
& & & & & & 1 & 5 & 6 &
\end{array}
$$

Logo, $12 \times 13 = 156$.

4.7 Algoritmo convencional da multiplicação

A partir de agora, para analisarmos o algoritmo convencional para multiplicação, tomaremos uma perspectiva de desenvolvimento. Os estudantes norte americanos aprendem a multiplicar através de uma progressão experimental gradual de métodos, semelhantemente ao que ocorre no aprendizado da adição, segundo [15]. As primeiras estratégias são adição repetida e contagem saltada, por exemplo, contando de 3 em 3 tem-se $3, 6, 9, 12$ e assim por diante. Essa contagem saltada, muitas vezes, pode ocorrer para cima ou para baixo nessas listas de números a fim de encontrar produtos diferentes. Também trabalha-se um método de combinação em que começam com um produto conhecido e seguem contando por unidades até chegar no produto "desconhecido". Para exemplificar, 3×7, os estudantes podem desenvolver $3\times 6 = 18$ e seguindo a contagem $19, 20, 21$ chegam ao resultado desejado. Dessa forma, concebem estratégias de raciocínio que permite deduzir produtos desconhecidos a partir de produtos que já conhecem. Para desenvolver o produto 7×8 podem calcular dois produtos parciais $3 \times 8 = 24$ e $4 \times 8 = 32$ e somá-los a fim de obter o resultado 56.

Muitos desses métodos desenvolvidos pelos estudantes não são objeto de estudo da educação básica e tampouco são abordados em livros didáticos e no ensino. Em diversos casos os professores ensinam a multiplicação apenas como memorização, sem caracterizar fatos isolados e propriedades, utilizando apenas associações mecânicas.

Definição 4. ***(Múltiplos)*** *Dado $a \in \mathbb{N}$, podemos considerar os múltiplos de a: 0 vezes a (nenhuma vezes a), uma vezes a, duas vezes a, três vezes a, etc., obtendo assim a sequência:*

$$0 \times a = 0,\ 1 \times a = a,\ 2 \times a = a + a,\ 3 \times a = a + a + a, \cdots$$

Note que o único múltiplo de 0 é apenas o 0. Todos os números são múltiplos de 1 e de si próprios. Note também que, pela definição de múltiplo, um múltiplo não nulo, isto é diferente de zero, de um número $a > 0$ é sempre maior do que a.

Assim teremos a seguinte propriedade importante:

$$\boxed{\text{Se } a \times b = 0, \text{ então } a = 0 \text{ ou } b = 0.}$$

Definição 5. ***(Multiplicação)*** *Tomar múltiplos define uma operação nos números naturais, $a \times b$, que se lê a vezes b, representando o múltiplo de b, a vezes b, onde $b > 1$. Assim,*

$$a \times b = \begin{cases} 0, & se\ a = 0, \\ b, & se\ a = 1, \\ \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a \quad parcelas}, & se\ a > 1. \end{cases}$$

O número $a \times b$ será chamado o produto de a por b e será denotado também por ab, quando não houver risco de confusão.

Definição 6. ***(Propriedade comutativa da multiplicação)*** *Quaisquer que sejam os números naturais a e b, temos que*

$$\boxed{a \times b = b \times a.}$$

Definição 7. ***(Propriedade associativa da multiplicação)*** *Quaisquer que sejam os números naturais a, b e c, temos que*

$$\boxed{a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.}$$

Observemos mais de perto os *fatos da multiplicação*[18] utilizando a tabuada que sempre está associada ao ensino. Para tanto, utilizaremos a base 6, excluindo os fatos da multiplicação envolvendo o zero. Portanto os múltiplos utilizados serão os de $1, 2, 3, 4$ e 5. No sistema de base 6 os símbolos utilizados são os algarismos de um conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e omitindo os fatos do zero diminuiremos de 36 fatos para 25 fatos. Comparando com a tabuada do sistema decimal que teríamos que memorizar 100 fatos, agora teremos um total de 25 fatos. Abaixo temos uma tabela que resume os fatos da multiplicação na base 6.

[18]Cada multiplicação da tabuada.

Tabuada na base 6					
×	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	10	12	14
3	3	10	13	20	23
4	4	12	20	24	32
5	5	14	23	32	41

A Matemática tem uma estrutura e alguns padrões e propriedades se manifestam independentemente da base numérica, são características próprias da operação. Vejamos alguns desses padrões:

1. Observemos que a tabuada expressa na tabela acima é simétrica em torno da diagonal principal (destacada em vermelho). Temos essa simetria devido à propriedade comutativa da multiplicação (na verdade, a regra comutativa seria válida em uma tabuada de qualquer tamanho).

2. Temos um elemento neutro. Este fato pode ser notado nas 2ª linha e na 2ª coluna da tabela, pois não há alteração no produto quando o 1 é multiplicador e nem quando é multiplicando.

3. Nos produtos envolvendo o número 3 temos uma alternância no algarismo das unidades que ora é 3 e ora é 0, o que corresponde a uma multiplicação por 5 na base 10 com a alternância entre 5 e 0. E na segunda posição à esquerda, que chamaremos "de posição 6" (se estivéssemos operando na base 10 chamaríamos de posição das dezenas) temos dois $1'^s$, dois $2'^s$ também característica da multiplicação por 5 na base 10.

4. Na multiplicação envolvendo o número 5 na base 6, ou seja, nos produtos da 5ª linha e da 5ª coluna temos a "posição 6" aumentando em uma unidade e a posição das unidades decresce em um; a soma dos algarismo desses produtos é sempre 5 (respectivamente: $5, 1 + 4 = 5, 2 + 3 = 5$ e $4 + 1 = 5$). Temos justamente o que acontece na multiplicação por $9'^s$ na base 10.

Vejamos um ponto de vista de [15] quando incentiva uma abordagem de ensino que não seja tão "mecanizada":

> Abordar a aprendizagem da multiplicação como busca de padrões embasa e simplifica a tarefa. De uma maneira fundamental, a matemática é o estudo e o uso desses padrões. Observe que não é que a memorização não seja importante – o aluno ainda deverá reconhecer padrões relevantes – mas a compreensão da estrutura de uma tabuada 10×10 em base 10 pode abrir possibilidades dentro e fora de uma tabela 10×10

4.8 Multiplicação por 10

Para compreendermos melhor a multiplicação de fatores com mais de um algarismo, é fundamental que conheçamos a multiplicação por 10 e a propriedade distributiva.

Definição 8. ***(Propriedade distributiva da multiplicação com relação à adição)*** *Em geral, dados números naturais a, b e c, tem se que*

$$\boxed{(a+b) \times c = a \times c + b \times c.}$$

A multiplicação por 10 (ou por potências de 10) tem a estrutura do sistema de numeração de base decimal. Podemos escrever o número 131 da seguinte forma:

1000	100	10	1
	1	3	1

onde sua posição na tabela indica seu valor posicional na base decimal. Se multiplicarmos 131 por 10, ele simplesmente é deslocado para esquerda:

1000	100	10	1
1	3	1	

ficando, na prática, zero na coluna das unidades. Dessa forma, $10 \times 131 = 1310$. Essa característica também pode ser descrita no sistema de base decimal utilizando a notação de expansão em potências de 10:

$$131 = 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

então

$$
\begin{aligned}
10 \times 131 &= 10 \times (1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0) \\
&= 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 \\
&= 1310.
\end{aligned}
$$

Temos agora os componentes fundamentais para fazer considerações sobre o funcionamento da multiplicação de fatores com mais de um algarismo. Vamos considerar a multiplicação 131×16 e escrevendo ambos em expansão decimal, teremos:

$$
\begin{aligned}
131 \times 16 &= (1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0) \times (1 \times 10^1 + 6 \times 10^0) \\
&= (1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1) \times (1 \times 10^1 + 6).
\end{aligned}
$$

Utilizando as propriedades comutativa e distributiva, temos

$$
\begin{aligned}
131 \times 16 = 16 \times 131 &= (1 \times 10^1) \times (1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1) + (6) \times (1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1) \\
&= (1 \times 10^1) \times (1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1) + (6 \times 10^2 + 18 \times 10^1 + 6).
\end{aligned}
$$

Devemos observar que o número $6 \times 10^2 + \underline{18} \times 10^1 + 6$ não é um número da base 10 (já que 18 não é um algarismo da base decimal) e que, para que o seja, temos de reagrupar e, em essência, *transportar*:

$$
\begin{aligned}
6 \times 10^2 + \underline{18} \times 10^1 + 6 &= 6 \times 10^2 + \underline{1 \times 10^2 + 8 \times 10^1} + 6 \\
&= 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 6 \\
&= 786.
\end{aligned}
$$

Desse modo,

$$
\begin{aligned}
131 \times 16 = 16 \times 131 &= (1 \times 10^1) \times (1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1) + 786 \\
&= (10^1) \times (1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1) + 786 \\
&= (1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1) + 786 \\
&= 1310 + 786 \\
&= 2096.
\end{aligned}
$$

Observemos, agora, o algoritmo convencional da multiplicação em ação:

$$\begin{array}{cccc} & \overset{1}{1} & 3 & 1 \\ \times & & 1 & 6 \\ \hline & 7 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 9 & 6 \end{array}$$

De onde vem os vários passos do algoritmo? A primeira e a segunda linhas surgem da utilização da propriedade distributiva e da decomposição tanto do multiplicador quanto do multiplicando em relação ao valor posicional. O "transporte" do 1 ocorre em virtude da necessidade de escrever o número corretamente no sistema de base 10 e o zero na coluna das unidades no número 1310 vem da multiplicação por 10, já que $16 = 10 + 6$.

Consideremos o algoritmo em sua forma mais "simplificada", se é que podemos assim dizer (na nossa concepção, o fato de não registrar alguns passos como o transporte do 1 e o zero em 1310 pode parecer mais simplificado, mas também pode causar confusão quando for necessário explicitar os porquês de cada procedimento):

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 3 & 1 \\ \times & & 1 & 6 \\ \hline & 7 & 8 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & \\ \hline 2 & 0 & 9 & 6 \end{array}$$

4.9 Um erro comum

Daqui por diante analisaremos um erro comum cometido pelos alunos ao multiplicar números de vários algarismos utilizando o algoritmo convencional. Discorreremos sobre as possíveis soluções adotadas para minimizar tais erros e sobre como um ensino conceitual se sobrepõe ao ensino procedimental para o algoritmo. A pesquisa em [12] sugere a professores norte americanos e chineses que analisem os erros comuns na execução do cálculo 123×645. Ilustraremos abaixo o erro cometido no posicionamento adequado dos produtos parciais.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
\times & 6 & 4 & 5 \\
\hline
 & 6 & 1 & 5 \\
 & 4 & 9 & 2 \\
 & 7 & 3 & 8 \\
\hline
1 & 8 & 4 & 5
\end{array}
$$

Quando, na verdade, deveríamos ter

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 \\
 & & \times & 6 & 4 & 5 \\
\hline
 & & & 6 & 1 & 5 \\
+ & & 4 & 9 & 2 & \\
 & 7 & 3 & 8 & & \\
\hline
 & 7 & 9 & 3 & 3 & 5
\end{array}
$$

Não houve consenso entre os professores entrevistados quanto ao tratamento do problema, embora todos concordassem com a existência deste. Concordavam que se tratava de um erro matemático e não de um mero descuido. Várias ideias foram apresentadas. Os professores norte americanos se dividiram nas seguintes possibilidades para o erro: 70% focaram no fato de que o problema estava na execução do procedimento de alinhamento enquanto que os 30% restantes acreditavam que os alunos não entendiam a fundamentação lógica do algoritmo. Ou seja, a maioria tinha um enfoque procedimental do algoritmo e a minoria tinham orientação em um enfoque conceitual.

A pesquisadora relatou que durante as entrevistas com os professores, frequentemente ouviu a expressão "o aluno não tem um bom entendimento do valor posicional", mas o termo tinha significado diferente para os professores dos dois grupos. Alguns deles entendiam por valor posicional apenas a segunda metade da expressão, ou seja, a posição. Estavam focando apenas na localização dos algarismos e não no seu valor quando ocupavam determinada posição.

Vejamos, em [12], o relato da fala de uma professora norte americana que, por motivo de anonimato, foi citada na pesquisa com o pseudônimo de Prof.ª Bernice:

> Não vejo nenhum problema com a multiplicação por 5. Na multiplicação seguinte, ou seja, na multiplicação da coluna das dezenas, deveriam mover-se para a coluna das dezenas para começarem a colocar a resposta. E depois teriam de multiplicar a coluna das centenas, de forma que deveriam passar à terceira coluna.

Os professores com enfoque procedimental do algoritmo, quando se referiam à "coluna das dezenas" ou "coluna das centenas", não levavam em conta o valor desses algarismos nestas colunas, utilizavam os termos dezenas e centenas com uma espécie de marcação ou etiqueta para as colunas. Acreditavam que essas etiquetas contribuíam para verbalizar o algoritmo a fim de efetuá-lo de forma correta. Alguns até utilizavam os números do multiplicador, 40 ou 600, mas não se referiam ao seu devido valor e sim utilizavam-nos para "etiquetar" uma coluna.

Vejamos, em [12], o relato da fala de uma professora norte americana que, por motivo de anonimato, foi citada na pesquisa com o pseudônimo de Prof.ª Fay:

> Penso que talvez estivessem apenas um pouco confusos sobre os valores posicionais (...) Em primeiro lugar estamos a multiplicar por 5 nas unidades. Depois avançamos e não estamos a multiplicar por 4, mas sim por 40. Assim, temos de modificar o valor posicionai para cima. Trata-se apenas de recordar o processo de onde se coloca, onde se inicia a coluna.

A Prof.ª Fay tem uma concepção quase adequada quando reconhece os valores posicionais do multiplicador, mas não vislumbra o real valor dos produtos parciais que são, respectivamente, $615, 4920$ e 73800. Na verdade, detinha o conhecimento de como mover os números e não do porquê.

Já no grupo de professores com entendimento conceitual do algoritmo, usando os mesmos termos utilizados pela Sr.ª Fay tinham um diagnóstico diferente para o problema encontrado na execução do cálculo. Observemos o que foi dito, em [12], pela Prof.ª Francesca:

> Diria que as crianças, os alunos não têm ideia disso, não entendem de facto o valor posicional. Não entendem o conceito, porque estão a fazer 4 vezes 3, que é o que parece, mas tem que ser visto como 40 vezes 3 e eles não compreendem isso. Por isso não colocam os valores de modo correcto... O problema é que não viram como cada número é formado.

A preocupação dos professores de entendimento conceitual do algoritmo residia no fato de os alunos não entenderem a razão pela qual o algoritmo requer que os produtos parciais sejam alinhados de tal forma, não bastava saber onde colocar a resposta dos produtos parciais.

O que ocorre é a reprodução de passos até que se chegue a resposta, sem sequer se preocupar com a razão de seguir tais passos e tampouco ter qualquer entendimento sobre a fundamentação do algoritmo.

Vejamos, em [12], o relato da fala de uma experiente professora norte americana que, por motivo de anonimato, foi citada na pesquisa com o pseudônimo de Prof.ª Belle:

> Não penso que os alunos entendam o que estão a multiplicar. Acho que, se compreendessem de fato o conceito, se lembrariam de onde colocar os números. Acho que, frequentemente, são ensinados passos às crianças, dás este passo, dás aquele passo e moves este número uma vez e moves aquele número duas vezes; mas elas não sabem realmente porque estão a fazer tudo isso. Acho que se elas, de facto, compreendessem o que estão a fazer, colocariam os números no devido lugar.

A conclusão da pesquisa aponta para um norte, no que diz respeito ao conhecimento adquirido pelo professor quando do diagnóstico e solução de problemas dessa natureza. Veja o que nos diz a autora da pesquisa em [12]:

> O que os professores achavam ser a causa do erro dos alunos determinou a orientação da aprendizagem que pretendiam promover ao lidar com este problema. Contudo, a perspectiva procedimental ou conceptual de um professor ao definir o problema parecia largamente determinada pelo conhecimento que o professor tinha da multiplicação com números de vários algarismos.

Acreditamos que a saída mais adequada para os professores seja buscar conhecimento com outros colegas e também adquirir "fomento" em publicações especializadas e livros paradidáticos. Não existem tantas fontes para pesquisa mais aprofundada em livrarias comuns. Uma grande alternativa para isso é a Revista do Professor de Matemática, publicação da SBM, Sociedade Brasileira de Matemática.

Observemos ainda, outra conclusão da pesquisadora em [12], a partir dos relatos dos professores entrevistados durante a pesquisa:

> Outros professores articularam uma resposta, mas falharam ao tentar dar uma explicação matemática real: «É difícil... Porque é o modo como sempre fazemos... Quer dizer, foi assim que nos ensinaram a fazer» (Sr.ª Fay). «Porque é o modo correto. Foi assim que aprendi. Está certo» (Sr.ª Fiona). «Não consigo lembrar-me da regra. Não consigo lembrar-me porque se faz deste modo. Apenas faço como me ensinaram» (Sr.ª Felice). O conhecimento matemático é baseado na convenção e na lógica. Contudo, neste caso a convenção funciona como um abrigo para aqueles que não têm um entendimento conceptual de um procedimento matemático.

Vejamos como fica o algoritmo, quando completamos com zeros as posições vagas na 2ª e na 3ª soma parcial:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 \\
 & & \times & 6 & 4 & 5 \\
\hline
 & & & 6 & 1 & 5 \\
+ & & 4 & 9 & 2 & 0 \\
 & 7 & 3 & 8 & 0 & 0 \\
\hline
 & 7 & 9 & 3 & 3 & 5
\end{array}
$$

Com a inserção de zeros nos produtos parciais fica bastante elucidativo o fato de 492, ser na verdade 4920 e 738, ser 73800. Além do que, quando é explicado o algoritmo convencional da multiplicação, adota-se uma terminologia um tanto estranha na adição dos produtos parciais. Para proceder a adição dos produtos parciais iniciando da direita para esquerda na coluna das unidades, por exemplo, apenas é dito: "abaixa o cinco" e na verdade o que se tem é $5+0+0 = 5$. A postura de se omitir algumas marcações contribui para que o uso dos algoritmo convencional para multiplicação seja um tanto focado no procedimento e pouco se saiba sobre a fundamentação verdadeira do algoritmo. Impede que seja explícito o padrão do sistema de base decimal e da propriedade distributiva nesse algoritmo.

Alguns professores colocam nos espaços vagos dos produtos parciais símbolos como o asterisco ou fazem alguma marcação apenas para não confundir as posições. Alegam que os zeros podem causar ainda mais confusão para os estudantes. Havia ainda professores que utilizavam os zeros apenas como um marcador sem lhes atribuir qualquer valor no sistema de base decimal, funcionava como se não houvesse nenhum sentido matemático para esses algarismos zero.

Observemos as ponderações relatadas pelos professores em entrevistas da pesquisa, conforme relatado em [12]:

> Não sendo capazes de explicar o imbróglio, a Sr.ª Fay e a Prof.ª Bernadette apenas queriam evitar enfrentar o desafio. A Sr.ª Francine, contudo, argumentou que o número nunca seria alterado porque «mais zero significa mais nada»: «Eu diria, o que é 5 mais nada? É adicionar alguma coisa? Não, não é.» O argumento da Sr.ª Francine sugere que ela confundia «adicionar um zero» a um número ($5 + 0 = 5$ ou $492 + 0 = 492$) com o papel do 0 num número (50 ou 4920). Os professores do grupo de orientação procedimental usavam o zero para se lembrarem do movimento: não o consideravam diferente de um qualquer marcador de lugar. Pôr um zero é simplesmente como colocar um x sem significado

Entretanto, conforme registra a pesquisa, os professores do grupo que foi classificado com um entendimento conceitual do algoritmo produziram argumentações matemáticas bastante adequadas, explicando que quando se multiplica por 645 está, na verdade a multiplicar por 5 e por 40 e por 600 de tal sorte que os produtos parciais são efetivamente $615, 4920$ e 73800. Quando, durante as entrevistas, foram indagados se o acréscimo de zeros estava de alguma forma modificando os números dos produtos parciais muito responderam que sim, embora alguns respondessem que não. Vejamos algumas das argumentações nesse sentido, que fazem parte da pesquisa em [12]:

> Eu diria que sim, isso é mudar o número. Porque 123 x 40 não é igual a 492, este não é o número correto, e estamos a mudar o número porque estamos a multiplicar por mais do que 4, estamos a multiplicar por 40.

A pesquisadora relata uma excelente concepção de uma das entrevistadas, sob o pseudônimo de Prof.ª Frances, conforme [12]:

> A Sr.ª Frances, tendo outro ponto de vista, argumentou que, já que 492 não é um número vulgar mas sim um número que começa na coluna das dezenas, acrescentar um zero não o muda, mas revela o seu verdadeiro valor

Outra forma bastante eficiente seria utilizar os conceitos de base decimal e do valor posicional no multiplicando e em cada um dos produtos parciais. Para exemplificar isso, observemos a fala da Sr.ª S, pseudônimo dado a uma professora chinesa, o que está registrado em [12]:

> Já que o 5 em 645 está na posição das unidades, representa 5 unidades. 123 x 5 = 615, são 615 unidades. Por isso pomos o 5 na posição das unidades. O 4 em 645 está na posição das dezenas, representa 4 dezenas. 123 x 4 = 492, são 492 dezenas. Por isso pomos o 2 na posição das dezenas. O 6 em 645 está na posição das centenas, portanto representa 6 centenas. 123 x 6 = 738, são 738 centenas. Por isso colocamos o 8 na posição das centenas. (Sr.ª S.)

Seguindo tal processo de renomear 4920 de 492 dezenas e 73800 como 738 centenas, é possível evitar o acréscimo de zeros nos espaços vagos. Essa é outra possibilidade que manteria, pelo menos enquanto a criança estiver cursando as séries iniciais da educação básica. Nas séries finais e no ensino médio não há tantos transtornos ao se inserir zeros no espaços vagos.

5 A divisão

Trataremos sobre a operação de divisão em seu desenvolvimento histórico, analisaremos alguns métodos de divisão ao longo da história e ao final faremos uma análise do algoritmo convencional geral utilizado para a divisão longa que pode ser ilustrado por

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 & \\
\cline{6-8}
- & 1 & 6 & & & 1 & 1 & 1 \\
\cline{2-3}
 & & 1 & 8 & & & & \\
 & - & 1 & 6 & & & & \\
\cline{3-4}
 & & & 2 & 3 & & & \\
 & & - & 1 & 6 & & & \\
\cline{4-5}
 & & & 0 & 7 & & & \\
\end{array}
$$

Nos Estados Unidos o algoritmo tem o seguinte formato

$$
\begin{array}{rl}
 & 111 \\
16) & \overline{1783} \\
 & -\underline{16} \\
 & 18 \\
 & -\underline{16} \\
 & 23 \\
 & -\underline{16} \\
 & 7 \\
\end{array}
$$

Figura 24: Algoritmo convencional de divisão utilizado nos EUA

5.1 Método de divisão utilizado pelos egípcios

Sob uma perspectiva histórica, o Papiro de Rhind (conhecido também como Papiro de Ahmes) é uma das principais fontes históricas sobre as raízes da aritmética. Encontramos, registrado no papiro, o problema "dividir 19 por 8" (ou "calcular com 8 até que se encontre 19"). Utilizando uma notação moderna para solução do problema temos o seguinte:

$$\begin{array}{rrcl} & 1 \times 8 & = & 8 \\ (*) & 2 \times 8 & = & 16 \\ & \dfrac{1}{2} \times 8 & = & 4 \\ (*) & \dfrac{1}{4} \times 8 & = & 2 \\ (*) & \dfrac{1}{8} \times 8 & = & 1 \end{array}$$

As linhas marcadas com (*) somam 19, de tal sorte que a solução para o problema é dada por

$$19 \div 8 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

Percebamos que, em essência, utiliza-se a duplicação para determinar o quociente[19], e a redução à metade, para determinação do resto[20]. Temos ainda que $19 \div 8$ dá como quociente 2 e deixa resto 3, o que pode ser representado pela fração mista $2\frac{3}{8}$, que é o mesmo que $2 + 1/4 + 1/8$ ($1/4 + 1/8 = 3/8$ e $3/8$ de 8 é igual a 3, que é justamente o resto da divisão $19 \div 8$).

[19]Em [8]: Arit. resultado da divisão; quantidade que designa o número de vezes que o divisor cabe no dividendo; cociente.

[20]Em [8]: Arit. Na divisão, a diferença entre o dividendo e o produto do divisor pelo quociente.

Exemplo 13. *Utilizando o método egípcio para calcular a divisão* $1783 \div 16$.

Calculemos, agora, $1783 \div 16$ para observarmos como o método se desenvolve com uma multiplicação mais "complexa". Precisamos então calcular com 16 até encontrar 1783:

$$\begin{array}{rrcl}
(*) & 1 \times 16 & = & 16 \\
(*) & 2 \times 16 & = & 32 \\
(*) & 4 \times 16 & = & 64 \\
(*) & 8 \times 16 & = & 128 \\
 & 16 \times 16 & = & 256 \\
(*) & 32 \times 16 & = & 512 \\
(*) & 64 \times 16 & = & 1024
\end{array}$$

As linhas marcadas com (*) somam 1776, ou seja, 111×16. Precisamos então encontrar uma expressão para o resto 7.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \frac{1}{2} \times 16 & = & 8 \\
(*) & \frac{1}{4} \times 16 & = & 4 \\
(*) & \frac{1}{8} \times 16 & = & 2 \\
(*) & \frac{1}{16} \times 16 & = & 1
\end{array}$$

As linhas marcadas com (*) determinam uma soma que dá o resto, ou seja, $(1/4 + 1/8 + 1/16) \times 16 = 7$. Caso a divisão seja exata, não há representação em fração. Na verdade, não é necessário o procedimento de redução à metade para determinação de resto.

Assim, a solução obtida é

$$1786 \div 16 = 111 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

5.2 “Método da Galé”

O método utilizado pelos gregos era semelhante ao método egípcio. Entretanto, por volta de 895 d. C. a 1600 d. C., aproximadamente, surgiu um método que provavelmente tinha origem hindu que consistia em “riscar”, segundo [15]. Era a forma de divisão mais utilizada e ainda é praticado em locais do norte da África. Vejamos seu funcionamento para calcular $1783 \div 16$.

Exemplo 14. *Utilizando o “Método da Galé” para calcular a divisão* $1783 \div 16$.

1.	1 7 8 3 (1 6	Configuração inicial do dispositivo com o dividendo[a] 1783 e o divisor[b] 16. (Se o divisor fosse 26, por exemplo, deslocaríamos uma posição para a direita, já que $26 > 17$). [a] Em [8]: Arit. Na operação de divisão, o número dado para se dividir. [b] Em [8]: Arit. Na operação de divisão, número pelo qual se divide outro.
2.	1 7 8 3 (1 1 6	Procuramos um multiplicador experimental (1 funciona), então anotamos no dispositivo.

3.

0	1			
$\cancel{1}$	$\cancel{7}$	8	3	(1
$\cancel{1}$	$\cancel{6}$			

Em seguida, multiplicamos o multiplicador pelo divisor e, em essência, usamos o método de subtração de "riscar" para calcularmos a diferença, então temos $1 - 1 \times 1 = 0$ e $7 - 1 \times 6 = 1$.

4.

0	1			
$\cancel{1}$	$\cancel{7}$	8	3	(1
$\cancel{1}$	$\cancel{6}$	6		
	1			

Em seguida, deslocando um espaço para a direita, reescrevemos o divisor 16 e procuramos um múltiplo deste, a fim de aproximar do 18.

5.

0	1			
$\cancel{1}$	$\cancel{7}$	8	3	(11
$\cancel{1}$	$\cancel{6}$	6		
	1			

O multiplicador procurado é o 1, então anotamos o mesmo.

6.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & & & & \\
0 & \cancel{1} & 2 & & & \\
\cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & 3 & & (11 \\
\cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & & & \\
 & \cancel{1} & & & &
\end{array}$$

Utilizando, em essência, o método de subtração por "risco" para calcularmos a diferença, temos $1 - 1 \times 1 = 0$ e $8 - 1 \times 6 = 2$.

7.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & & & & \\
0 & \cancel{1} & 2 & & & \\
\cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & 3 & & (11 \\
\cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & 6 & & \\
 & \cancel{1} & 1 & & &
\end{array}$$

Em seguida, desloco uma posição para a direita e reescrevo o divisor 16.

8.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & & & & \\
0 & \cancel{1} & 2 & & & \\
\cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & 3 & & (111 \\
\cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & 6 & & \\
 & \cancel{1} & 1 & & &
\end{array}$$

Procuramos um múltiplo de 16 que se aproxime de 23, então o multiplicador é 1.

9.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 1 & & & \\
0 & \cancel{1} & \cancel{2} & & & \\
\cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & 3 & & (111 \\
\cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & 6 & & \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & & &
\end{array}$$

Utilizando, novamente, o método de subtração por "risco" para calcularmos a diferença, temos $2 - 1 \times 1 = 1$.

10.

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & \cancel{1} & & \\ 0 & \cancel{1} & \cancel{2} & 7 & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{3} & (111 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & \\ & \cancel{1} & \cancel{1} & & \end{array}$$

Usando, ainda, o método de subtração por "risco" para calcularmos a diferença, temos $13 - 6 \times 1 = 7$.

11.

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & \cancel{1} & & \\ 0 & \cancel{1} & \cancel{2} & 7 & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{3} & (111 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & \\ & \cancel{1} & \cancel{1} & & \end{array}$$

Temos então, na divisão $1783 \div 16$, quociente 111 e resto 7.

Faremos agora o desenvolvimento do algoritmo tradicional e do Método da Galé a fim de verificar suas semelhanças, onde o dividendo é 1783 e o divisor é 16.

1.

$$\begin{array}{cccc|cc} 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ \cline{5-6} & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 7 & 8 & 3 & (\\ 1 & 6 & & & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{ccccc|cc} & 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ \cline{6-7} - & 1 & 6 & & & 1 & \\ \cline{2-3} & 0 & 1 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & 8 & 3 & (1 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & & & \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rrrrr|rr} & 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ \cline{6-7} - & 1 & 6 & & & 1 & \\ \cline{2-3} & 0 & 1 & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & 8 & 3 & (1 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & & & \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rrrrr|rr} & 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ \cline{6-7} - & 1 & 6 & & & 1 & 1 \\ \cline{2-3} & & 1 & 8 & & & \\ & - & 1 & 6 & & & \\ \cline{3-4} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & 8 & 3 & (1 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & 6 & & \\ & 1 & & & \end{array}$$

5.

$$\begin{array}{rrrrr|rr} & 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ \cline{6-7} - & 1 & 6 & & & 1 & 1 \\ \cline{2-3} & & 1 & 8 & & & \\ & - & 1 & 6 & & & \\ \cline{3-4} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & 8 & 3 & (11 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & 6 & & \\ & 1 & & & \end{array}$$

Nas etapas 4 e 5 (respectivamente 7 e 8) verifiquemos, pois, que no algoritmo convencional, para escrevermos o subtraendo 16 (que é multiplo do divisor) antes determinamos o multiplicador 1. Já no Método da Galé, antes repetimos o divisor 16 para depois determinarmos o multiplicador 1 que faz com que se aproxime do minuendo 18 (respectivamente 23).

6.

$$\begin{array}{rrrrr|rr} & 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ \cline{6-7} - & 1 & 6 & & & 1 & 1 \\ \cline{2-3} & & 1 & 8 & & & \\ & - & 1 & 6 & & & \\ \cline{3-4} & & 0 & 2 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 0 & & & \\ 0 & \cancel{1} & 2 & & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & 3 & (11 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & & \\ & \cancel{1} & & & \end{array}$$

7.

$$\begin{array}{rrrr|l} & 1 & 7 & 8 \; 3 & 1 \; 6 \\ \cline{5-5} - & 1 & 6 & & 1 \; 1 \; \boxed{1} \\ \cline{2-3} & & 1 & 8 & \\ & - & 1 & 6 & \\ \cline{3-4} & & & \boxed{2} \; \boxed{3} & \\ & & - & \boxed{1} \; \boxed{6} & \\ \cline{4-4} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 0 & & & & \\ 0 & \cancel{1} & \boxed{2} & & & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & \boxed{3} & & (11 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & \boxed{6} & & \\ & \cancel{1} & \boxed{1} & & & \end{array}$$

8.

$$\begin{array}{rrrr|l} & 1 & 7 & 8 \; 3 & 1 \; 6 \\ \cline{5-5} - & 1 & 6 & & 1 \; 1 \; 1 \\ \cline{2-3} & & 1 & 8 & \\ & - & 1 & 6 & \\ \cline{3-4} & & & 2 \; 3 & \\ & & - & 1 \; 6 & \\ \cline{4-4} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 0 & & & & \\ 0 & \cancel{1} & 2 & & & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & 3 & & (11\boxed{1} \\ \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & 6 & & \\ & \cancel{1} & 1 & & & \end{array}$$

9.

$$\begin{array}{rrrr|l} & 1 & 7 & 8 \; 3 & 1 \; 6 \\ \cline{5-5} - & 1 & 6 & & 1 \; 1 \; 1 \\ \cline{2-3} & & 1 & 8 & \\ & - & 1 & 6 & \\ \cline{3-4} & & & \; \boxed{13} & \\ & & & {}^{1}\boxed{\cancel{2}} \; \boxed{\cancel{3}} & \\ & & - & 1 \; \boxed{6} & \\ \cline{4-4} & & & \boxed{7} & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 0 & \boxed{1} & & & \\ 0 & \cancel{1} & \cancel{2} & & & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & 3 & & (111 \\ \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & 6 & & \\ & \cancel{1} & \cancel{1} & & & \end{array}$$

No passo 9, temos, no método da galé, $2 - 1 \times 1 = 1$ onde a subtração ocorre da esquerda para a direita. Já no algoritmo convencional a subtração ocorre da direita para a esquerda, e para tanto há o reagrupamento do minuendo 23 em uma dezena e treze unidades a fim de que a subtração ocorra sem mais dificuldades para obtermos $13 - 6 = 7$.

10.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 & \\ \cline{6-8}
- & 1 & 6 & & & 1 & 1 & 1 \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 8 & & & & \\
 & - & 1 & 6 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & {}^{1}\cancel{2} & \overset{13}{\cancel{3}} & & & \\
 & & - & 1 & 6 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 7 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccl}
 & 0 & \cancel{1} & & \\
0 & \cancel{1} & \cancel{2} & 7 & \\
\cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{3} & (111 \\
\cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & &
\end{array}$$

No passo 10, temos, no método da galé, $13 - 6 \times 1 = 7$ onde a subtração ocorre da esquerda para a direita. Já no algoritmo convencional a subtração ocorre da direita para a esquerda, então, na coluna das dezenas, temos $1 - 1 = 0$.

11.

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 & \\ \cline{6-8}
- & 1 & 6 & & & 1 & 1 & 1 \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 8 & & & & \\
 & - & 1 & 6 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & 3 & & & \\
 & & - & 1 & 6 & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 7 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccl}
 & 0 & \cancel{1} & & \\
0 & \cancel{1} & \cancel{2} & 7 & \\
\cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{3} & (111 \\
\cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & &
\end{array}$$

Agora, em ambos os algoritmos, temos o quociente 111 e o resto 7 no cálculo da divisão $1783 \div 16$.

Temos um problema um pouco mais complicado, resolvido através do Método da Galé, que foi ilustrado em [15]. Vejamos como fica a resolução de 123456789987654321÷ 987654321:

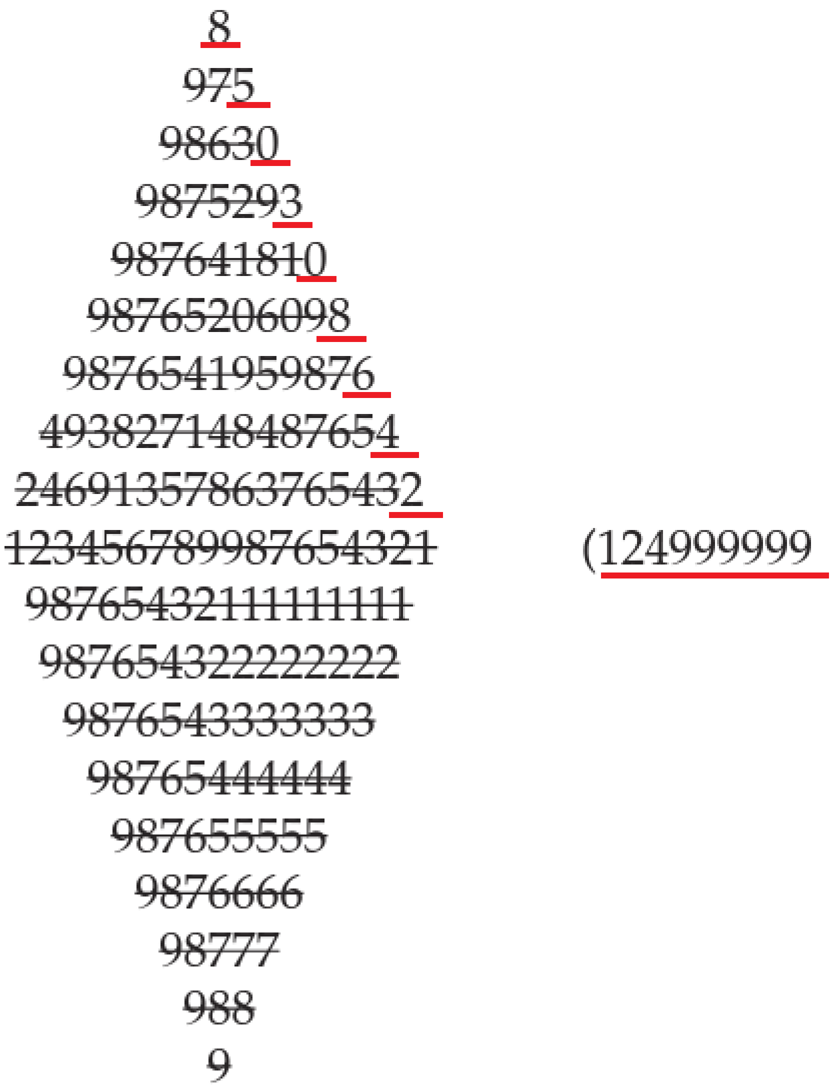

Figura 25: 123456789987654321 ÷ 987654321

O quociente para essa divisão é 124999999 e o resto 850308642. O método recebe esse nome, justamente, por aparentar o formato de um galé ou galeão, espécie de embarcação de guerra comprida e com grandes remos. O formato desse algoritmo forma "o casco" da Galé, que é o que pode ser visto na figura (25).

5.3 Algoritmo convencional da divisão

Uma possível primeira experiência para a divisão que poderia ser apresentada para as estudantes seria o compartilhamento, ou seja, em um problema prático onde uma criança dispõe de 9 bombons, por exemplo, e deseja compartilhá-los com 4 amigos. Nesse caso, a criança pode distribuir os bombons, um por um, a cada um dos seus 4 amigos e, depois de ter feito isso, verificará que restará um bombom (que nada mais é que o resto na divisão). Poderia ainda, essa criança, dividir ou não esse bombom restante em quatro partes aproximadamente iguais e dá-las aos seus amigos.

O Papiro de Rhind, datado de 1650 a. C., é considerado um dos registros mais importantes da matemática egípcia. Uma forma muito comum para pagamento de trabalhadores era com comida e bebida. Conforme o documentário em [10], nesse papiro temos alguns problemas envolvendo pães e cerveja. Um dos problemas consistia em dividir 9 pães entre 10 pessoas. É claro que poderiam ser dados 9 pães para 9 pessoas e cada uma dessas repartiria $\frac{1}{10}$ de sua parte e dariam à pessoa que não havia recebido nada ainda, o que resultaria em $\frac{9}{10}$ de pão para cada pessoa, isto é:

$$1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10} \quad \text{para as 9 pessoas e} \quad \underbrace{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}}_{9}=\frac{9}{10} \quad \text{para a décima pessoa.}$$

Em vez disso, os egípcios desenvolveram uma solução bem mais elegante. Vejamos cada passo dessa solução:

1. Dividir 5 dos pães em metades, obtendo 10 metades de pães;

2. Os outros 4 pães restantes seriam divididos em 3 partes, obtendo 12 pedaços equivalentes a um terço de pão;

3. Tomar 2 dos 12 pedaços obtidos no passo anterior e dividir em 5 partes obtendo 10 pedaços equivalentes à décima quinta parte de um pão;

4. As partes obtidas ao todo são: 10 metades de pão, 10 terços de pão e 10 pedaços de pão que equivalem a $\dfrac{1}{15}$ de pão cada uma;

5. Cada um das dez pessoas receberam: uma metade, um terço e um pedaço que é a décima quinta parte de pão, respectivamente. Ou seja, cada um recebeu:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{15+10+2}{30}=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}.$$

Segundo [15] essa não é uma experiência adotada e o primeiro contato formal que se tem com a divisão é um desfazer da multiplicação. Para exemplificar,

$$4 \times ? = 12.$$

Este procedimento é seguido por uma discussão de fatores e divisores que vem a culminar no algoritmo convencional para divisão.

Definição 9. ***(Divisor)*** *Diremos que um número inteiro d é divisor de um outro inteiro a, se a é múltiplo de d; ou seja, se $a = d \times c$, para algum inteiro c. Quando a é múltiplo de d dizemos também que a é divisível por d ou que d divide a.*

Uma das propriedades fundamentais dos números naturais é o fato de ser possível dividir um número por outro obtendo resto pequeno. Essa é a chamada *divisão euclidiana.*

Teorema 3. ***(Divisão euclidiana em $\mathbb{N}$)*** *Sejam dados dois números naturais a e b, com $a > 0$ e b qualquer. Queremos comparar o número natural b com os múltiplos do número a.*

A demonstração pode ser encontrada em [7], mas faremos ela aqui por uma questão de completude.

Demonstração:

Para isto, considere todos os intervalos da forma $[na, (n+1)a]$, para n um número natural qualquer. Isto nos dá uma partição de $\mathbb{N}$, ou seja,

$$\mathbb{N} = [0, a) \cup [a, 2a) \cup [2a, 3a) \cup \ldots \cup [na, (n+1)a) \cup \ldots$$

os intervalos acima são dois a dois sem elementos em comum.

Portanto, o número b estará em um e apenas um dos intervalos acima. Digamos que b pertença ao intervalo

$$[qa, (q+1)a)].$$

Logo existem dois números naturais q e r, unicamente determinados, tais que

$$b = aq + r, \quad \text{com} \quad 0 \leq r < a.$$

O número b é chamado de *dividendo*, o número a *divisor*, os números q e r são chamados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão de b por a.

Note que dados dois números naturais a e b, nem sempre b é múltiplo de a, este será o caso se, e somente se, $r = 0$.

Os números q e r são determinados na divisão euclidiana conforme os seguintes casos:

1. **(Caso b<a)** Como $b = 0 \times a + b$, temos que $q = 0$ e $r = b$.
2. **(Caso b=a)** Neste caso, tomamos $q = 1$ e $r = 0$.
3. **(Caso b>a)** Podemos considerar a sequência:

$$b - a, b - 2a, \ldots, b - na,$$

até encontrar um número natural q tal que $b - (q+1)a < 0$, com $b - qa \geq 0$. Assim, obtemos $b = qa + r$, onde $r = b - qa$ e, portanto, $0 \leq r < a$.

$\square$

Definição 10. ***(Algoritmo da divisão)*** *Dados inteiros a e b, com $a > 0$, existe um único par de inteiros q e r tal que*

$$b = aq + r, \textit{com} \quad 0 \leq r < a.$$

Teorema 4. ***(Divisão euclidiana)*** *Sejam a e b dois números inteiros com $a \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$b = aq + r, \textit{com} \quad 0 \leq r < |a|.$$

A demonstração que utilizaremos pode ser encontrada em [6], mas faremos ela aqui por uma questão de completude.

Demonstração:

Uma propriedade característica dos números inteiros é a de ser vazio o conjunto $\{x \in \mathbb{Z}; 0 < x < 1\}$. Isto implica que se $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $c > 0$, então $c \geq 1$.

Da propriedade acima decorre a *Propriedade Arquimediana* de $\mathbb{Z}$, ou seja, se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nb > a$.

De fato, com $|b| > 0$, temos que $|b| \geq 1$, logo

$$(|a|+1)|b| \geq |a|+1 > |a| \geq a.$$

O resultado segue se na desigualdade acima tomarmos $n = |a|+1$, se $b > 0$ e $n = -(|a|+1)$, se $b < 0$.

Considere o conjunto

$$S = \{x = b - ay; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

Existência: Pela Propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-a) > -b$, logo $b - na > 0$, o quem mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, logo, pelo princípio da boa ordenação, temos que S possui um menor elemento r. Suponhamos então que $r = b - aq$. Sabemos que $r \geq 0$. Vamos mostrar que $r < |a|$. Suponhamos por absurdo que $r \geq |a|$. Portanto, existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |a| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isto contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = b - (q \pm 1)a \in S$, com $s < r$.
Unicidade: Suponha que $b = aq + r = aq^{'} + r^{'}$, onde $q, q^{'}, r, r^{'} \in \mathbb{Z}$, $\quad 0 \leq r < |a|$ e $0 \leq r^{'} < |a|$. Assim, temos que $-|a| < -r \leq r^{'} - r < |a|$. Logo, $|r^{'} - r| < |a|$. Por outro lado, $a(q - q^{'}) = r^{'} - r$, o que implica que

$$|a||q - q^{'}| = |r^{'} - r| < |a|,$$

o que só é possível se $q = q^{'}$ e consequentemente, $r = r^{'}$.

$\square$

Exemplo 15. *Digamos que se queira dividir* 1783 *por* 16.

Inicialmente, trabalharemos como os múltiplos de 16 que são mais naturais para se desenvolver na base decimal. Abaixo, de forma bastante intuitiva, construímos os múltiplos de 16

	10	6
100	1000	600
10	100	60
1	10	6

O próximo passo é nos familiarizarmos com um algoritmo um pouco mais eficiente (onde escolhemos os múltiplos de 16 com mais cuidado) e, de certo modo, refinamos o processo retirando múltiplos de 16 até que não haja mais.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 & & \\ \cline{5-7}
- & 1 & 6 & 0 & & 1 & 0 & \\ \cline{1-4}
1 & 6 & 2 & 3 & & & & + \\
- & 8 & 0 & 0 & & 5 & 0 & \\ \cline{1-4}
 & 8 & 2 & 3 & & & & + \\
- & 8 & 0 & 0 & & 5 & 0 & \\ \cline{1-4}
 & & 2 & 3 & & & & + \\
 & - & 1 & 6 & & & 1 & \\ \cline{2-7}
 & & 0 & 7 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Em uma versão do algoritmo de divisão que se desenvolverá posteriormente, começaremos a maximizar os múltiplos de 16 a fim de minimizar os passos do algoritmo.

$$\begin{array}{ccccc|cccc}
 & 1 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 & & \\ \cline{6-8}
- & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \cline{2-5}
 & & 1 & 8 & 3 & & & & + \\
 & - & 1 & 6 & 0 & & 1 & 0 & \\ \cline{2-5}
 & & & 2 & 3 & & & & + \\
 & & - & 1 & 6 & & & 1 & \\ \cline{3-8}
 & & & 0 & 7 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

Mais tarde, "simplificamos" o algoritmo eliminando os zeros à direita nos subtraendos. Na verdade, isso causa uma série de dificuldades para os estudantes, a menos que se dê uma assistência adequada. Primeiramente, é exigido que sejam determinados os múltiplos máximos que podem ser tirados do dividendo. Nem sempre é fácil estimar quantos múltiplos serão necessários e costuma-se experimentar produtos até encontrar o exato. Depois, a forma final do algoritmo não dá real ideia do tamanho dos produtos que estão sendo calculados, que é semelhante ao que ocorre nos produtos parciais do algoritmo convencional para multiplicar. Na verdade, estamos sempre multiplicando por um único algarismo e não levamos em conta o valor posicional.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 1 & 7 & 8 & 3 & 1\ 6 \\ \cline{6-6}
- & 1 & 6 & & & 1\ 1\ 1 \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 8 & & \\
 & - & 1 & 6 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 2 & 3 & \\
 & & - & 1 & 6 & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 7 &
\end{array}
$$

Temos ainda a forma rápida para o algoritmo convencional de divisão, que se for aplicado diretamente pode causar grandes dificuldades para os estudantes que não estão familiarizados com o processo.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & 7 & 8 & 3 & 1\ 6 \\ \cline{5-5}
 & 1 & 8 & & 1\ 1\ 1 \\
 & & 2 & 3 & \\
 & & & 7 &
\end{array}
$$

5.4 Uma explicação nos dias de hoje

Uma descrição de como utilizaríamos o algoritmo convencional no cálculo de $1783 \div 16$, onde a faríamos analisando os algarismos do dividendo da esquerda para a direita. Vemos que 16 não divide o algarismo 1 de 1783 (na verdade, vale 1000 que é sim divisível por 16). Então constatamos que 16 divide o 17 de 1783 (que é, na verdade, 1700). Divide com quociente 1 (na verdade, 100) e calculo o resto 1 (propriamente, 100) a partir da subtração $17 - 16 = 1$ (que é, na verdade, $1700 - 1600 = 100$)anotando-o logo abaixo, na coluna das centenas. Temos então:

$$17 = 16 \times 1 + 1 \text{ (realmente, } 1700 = 16 \times 100 + 100).$$

Em seguida o que temos no dividendo é 183 e, novamente, analisando os algarismos da esquerda para direita, constatamos que

$$18 = 16 \times 1 + 2 \text{ (na realidade, } 180 = 16 \times 10 + 20\text{)}.$$

Anotamos 1 no quociente, justamente na posição das dezenas e calculamos o resto a partir da subtração $18-16 = 2$ e registrando-o logo abaixo, exatamente na posição das dezenas. Passamos então a ter como "novo" dividendo o número 23, literalmente! Estamos agora, mais uma vez, à procura de um multiplicador experimental. Observamos que

$$23 = 16 \times 1 + 7.$$

Registramos o quociente 1 na posição das unidades e calculamos o resto a partir da subtração $23 - 16 = 7$. Obtemos então, quociente 111 e resto 7, unicamente determinados, para essa divisão. Notemos, pois, que não há qualquer indicação do valor posicional do quociente quando o registramos. Já no formato de algoritmo utilizado pelos norte americanos temos, no registro do quociente, a indicação do valor posicional deste que é registrado acima do dividendo e devidamente alinhado no que diz respeito às posições das ordens da centena, dezena e unidade, respectivamente e isso nada mais é que a indicação do valor posicional, conforme podemos ver na figura 24.

Faremos um desenvolvimento do que ocorre no algoritmo convencional baseado no algoritmo de Euclides. Seja $d \neq 0$ um número inteiro positivo tomado arbitrariamente (essa escolha poderia ter sido estendida para números inteiros negativos). Tomemos dois inteiros positivos e um em cada dois destes será um múltiplo de d ou estará entre múltiplos consecutivos de d, isto é, entre os números qd e $(q+1)d$. De tal sorte, podemos escrever

$$n = dq + r$$

onde r é um desses números

$$0, 1, 2, \cdots, d-1.$$

Sejam um dividendo n e um divisor d, o que se deseja com a divisão é justamente determinar o quociente q e o resto r. No nosso exemplo acima, isto equivale a encontrar q e r, tais que

$$1783 = 16 \cdot q + r$$

onde r é um número inteiro positivo e $0 \leq r < 16$ (isto é, $r \in \{0, 1, 2, \ldots, 15\}$).

Na base decimal, acaba se tornando um problema de encontrar r e

$$q = q_m 10^m + q_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + q_1 10^1 + q_0$$

tal que

$$\begin{aligned} n &= (q_m 10^m + q_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + q_1 10^1 + q_0) \cdot 16 + r \\ &= q_m 10^m \cdot 16 + q_{m-1} 10^{m-1} \cdot 16 + \ldots + q_1 10^1 \cdot 16 + q_0 \cdot 16 + r \end{aligned}$$

com $0 \leq r < 16$.

Reescrevendo n como

$$n = Q_m \cdot (10^m \cdot 16) + R_m;$$

$$Q_m = q_m$$

e

$$R_m = q_{m-1} 10^{m-1} \cdot 16 + \ldots + q_1 10^1 \cdot 16 + q_0 \cdot 16 + r$$

Notemos que $q_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + q_1 10^1 + q_0 < 10^m$ de forma que $0 \leq R_m < 10^m \cdot 16$. Analogamente, o problema

$$R_m = Q_{m-1} \cdot (10^{m-1} \cdot 16) + R_{m-1}$$

tem a seguinte solução

$$\begin{aligned} Q_{m-1} &= q_{m-1} \\ R_{m-1} &= q_{m-2} 10^{m-2} \cdot 16 + \ldots + q_1 10^1 \cdot 16 + q_0 \cdot 16 + r. \end{aligned}$$

onde $0 \leq R_{m-1} < 10^m \cdot 16$. Continuando de forma iterada, na base decimal, podemos ver que é preciso resolver uma série de divisões que envolvem, efetivamente, quocientes de um algarismo.

Desenvolveremos, tal como acontece, em correspondência com o algoritmo convencional através do nosso exemplo. Escreveremos o dividendo 1783 em expansão na base decimal:

$$1783 = 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 1.$$

Tomando o maior múltiplo de 16 que funcionaria é 16×10^3. Entretanto,

$$\begin{aligned} 1783 &= 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 1 \\ &= 0 \times (16 \times 10^3) + 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 1. \end{aligned}$$

Poderíamos então utilizar o 16×10^2, donde teríamos o seguinte:

$$\begin{aligned} 1783 &= 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 3 \times 1 \\ &= 1 \times (16 \times 10^2) + 183 \end{aligned}$$

e

$$183 = 1 \times (16 \times 10^1) + 23.$$

Finalmente,

$$23 = 1 \times 16 + 7,$$

logo,

$$1783 = 16 \times 111 + 7.$$

6 Considerações finais

Quando propomos uma nova visita aos algoritmos para operações fundamentais, logicamente estávamos pensando na melhoria do ensino de Matemática na educação básica. Buscávamos uma possibilidade de empoderamento do professor a partir de uma perspectiva de aprofundar o conhecimento nesses tópicos. Certamente, a produção desse trabalho desencadeou em nós uma nova visão no que diz respeito ao ensino das operações fundamentais e consequentemente influenciou de forma preponderante nossa prática docente. Desconhecíamos grande parte do que foi aqui explanado e houve rompimento de paradigmas em nossas concepções. Esperamos, sinceramente, que todos aqueles que se engajam no ensino de Matemática encontrem, em nosso trabalho, algumas das respostas que buscam a respeito do tema. Não temos a pretensão de esgotar o tema, já que existe muito mais a ser dito ainda. Vejamos um dos princípios norteadores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional encontrado em [9]:

> O PROFMAT visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente. O Programa opera em ampla escala, com o objetivo de, a médio prazo, ter impacto substantivo na formação matemática do professor em todo o território nacional.

Vejamos a conclusão da pesquisa em [12], que pode parecer um tanto incisiva, mas nos faz refletir:

> “Um conhecimento limitado da matéria restringe a capacidade de um professor promover uma aprendizagem conceitual entre os alunos. Mesmo um forte sentimento de «ensinar matemática para a compreensão» não pode remediar ou complementar uma limitação de um professor no conhecimento da matéria. Alguns professores em início de carreira, no grupo de orientação procedimental, queriam «ensinar para a compreensão». Eles pretendiam envolver os alunos no processo de aprendizagem, e promover uma aprendizagem conceitual que explicasse a fundamentação lógica subjacente ao procedimento. Contudo, devido às suas próprias deficiências no conhecimento da matéria, a sua concepção de ensino não podia ser posta em prática. ”

Acreditamos que a partir de uma fundamentação mais adequada das operações aritméticas fundamentais e seus algoritmos na Educação Básica alcançaremos um norteador para uma prática docente mais efetiva, além de uma produção de conhecimento mais consistente por parte dos estudantes.

Referências

[1] Boyer, c. b., *História da Matemática*, Edgard Blücher, tradução: Elza F. Gomide (1974).

[2] Bueno, s., *Minidicionário da lingua portuguesa*, FTD, Edição revista e atualizada (2000).

[3] Dante, l. r., *Projeto Telaris: Matemática 6º ano*, Ática, (2012).

[4] Eves, h., *Introdução à história da matemática*, Unicamp, tradução: Hygino H. Domingues, 5ª ed (2011).

[5] Gomes, o. r. Silva, j. c., *Estruturas algébricas para licenciatura: Introdução à Teoria dos Números*, Edição do Autor, (2008).

[6] Hefez, a., *Aritmética*, SBM, Coleção PROFMAT, (2013).

[7] Hefez, a., *Iniciação à Aritmética*, IMPA,(2014).

[8] *http://www.aulete.com.br*, acessado em 01.07.2015.

[9] *http://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao* , acessado em 01.07.2015.

[10] *https://www.youtube.com/watch?v=ZXLDJ13lCBg*, acessado em 01.07.2015.

[11] *https://www.youtube.com/watch?v=fXvJIz74tek*, acessado em 01.07.2015.

[12] Ma, l., *Saber e ensinar matemática elementar*, Gradiva,(2009).

[13] Moreira, c. g. t. de a. et al, *Tópicos de Teoria dos Números*, SBM, (2012).

[14] Nunes, t. et al, *Na vida dez, na escola zero*, Cortez, 16ª ed (2011).

[15] Wall, e.s., *Teoria dos Números para Professores do Ensino Fundamental*, AMGH, (2014).