Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Sobre Juros e Aplicação de Conceitos Clássicos em Matemática Financeira

Ulysses Orlando Júnior

Brasília

2015

Ulysses Orlando Júnior

Sobre Juros e Aplicação de Conceitos Clássicos em Matemática Financeira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araujo

Brasília

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Orlando Júnior, Ulysses
O71s Sobre Juros e Aplicação de Conceitos Clássicos em Matemática Financeira / Ulysses Orlando Júnior; orientador Kellcio Oliveira Araujo. -- Brasília, 2015.
76 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

1. Matemática Básica. 2. Matemática Financeira. 3. Educação Financeira. I. Araujo, Kellcio Oliveira, orient. II. Título.

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Sobre Juros e Aplicações de Conceitos Clássicos em Matemática Financeira

por

Ulysses Orlando Júnior*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 06 de Agosto de 2015

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo - MAT/UnB (Orientador)

Prof.Dr. Rui Seimetz - UnB - Examinador

Prof. Dr. Antônio Luiz de Melo - FUP/UnB (Examinador)

*O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ulysses Orlando Júnior graduou-se em Matemática pelo Uniceub e atualmente é Professor de Matemática na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal.

A matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.

Stephen Hawking

Este trabalho é dedicado à minha Esposa, filhos e aos meus pais, que muito me apoiaram e me incentivaram.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que sempre me abençoou e me agraciou com mais essa oportunidade, que me deu força e iluminação em todo o trajeto percorrido, possibilitando a conclusão deste curso, tão importante para minha formação acadêmica.

À minha família, minha esposa Silvana e meus filhos Renata, Bruna, Lucas, Gabriel e Rafael que muito me motivam na busca em tornar-me um ser humano melhor, e em ser um esposo e pai à altura do amor que sinto e aos meus pais, fonte maior de inspiração.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araujo, pelas correções, conselhos, orientações e contribuições fundamentais para este trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática, em especial àqueles que ministraram cursos para a turma de 2013, bem como aos colegas de curso, que de alguma forma estiveram envolvidos com o Programa de Mestrado PROFMAT, pelos momentos de partilha e companheirismo que contribuíram para que estreitássemos laços de amizade. De modo especial aos amigos Emmanuel, Emerson, Gustavo e Ricardo que tantas tardes e noites passamos ao longo de 2013 a 2015 nos dedicando a cumprir as gratificantes etapas desse curso de mestrado.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente, contribuíram para a conclusão deste trabalho, que acreditaram e torceram por mim, o meu muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho, abordamos o cálculo de juros aplicações de conceitos clássicos da matemática básica, como por exemplo, frações, números decimais, regra de três, funções afim e exponencial, bem como progressões aritméticas e geométricas, que se revelam como ferramentas eficazes na aplicação do cálculo de juros e porcentagens e na resolução de problemas do ambiente escolar, tanto para o aluno como para o professor. Apresentamos tais conceitos como base dos conceitos da matemática financeira para facilitar o entendimento e implementar a educação financeira que é um procedimento educativo que aplica métodos próprios, em que o professor auxilia o aluno a construir sua autonomia para analisar e argumentar sobre finanças, desenvolver atividades para auxiliar os consumidores a orçar e gerir a sua renda, a poupar e a investir. São elementos e concepções significativas para que o cidadão exerça atividade, trabalho, profissão e lazer, analisando e argumentando diante dos apelos do consumismo. Ao associar noções de Economia com conteúdos de Matemática, focando a Matemática Básica aplicada na Matemática Financeira no ensino a intenção é mostrar possibilidades para melhorar a problemática que reside no panorama financeiro dos estudantes.
Palavras-chave

Matemática Básica; Matemática Financeira; Educação Financeira; Poupar; Investir; Cidadania.

Abstract

In this paper we report the calculation applications interest of classic concepts of basic math, for example, fractions, decimal numbers, three rule in order functions, exponential, and geometric and arithmetic progression, that reveal themselves as effective tools in the application of interest calculation and percentages and resolving problems of the school environment, both for the student and the teacher. Introducing such concepts as the basis of the concepts of financial mathematics to facilitate understanding and implementing financial education which is an educational procedure that applies own methods, in which the teacher helps the student to build their autonomy to analyze and argue about finances, develop activities to help consumers to budget and manage your income, saving and investing. They are significant elements and concepts so that citizens exercise activity, job and leisure, analyzing and arguing appeals before consumerism. By associating notions of economics with mathematics content, focusing on Basic Applied Mathematics in Financial Mathematics in teaching the intention is to show possibilities to improve the problem lies in the financial outlook of students.
Keywords

Basic Mathematics; Financial math; Financial education; Save; Investing; Citizenship.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Alguns especialistas em Educação Financeira conforme [7], por exemplo, entendem que a omissão das escolas em relação a noções do comércio, economia, de impostos e de finanças tem uma consequência perversa: a maioria das pessoas, quando adulta, continua ignorando esses assuntos e segue sem instrução financeira e sem habilidade para manejar dinheiro. As consequências se tornam mais graves, pois ninguém, qualquer que seja a sua profissão, está livre dos problemas ligados ao mundo das finanças pessoais. É importante tomar consciência da necessidade de alfabetização financeira, o que pode ocorrer por iniciativa própria, por orientação dos pais ou por conselhos de amigos.

Infelizmente, para muitas pessoas o alerta chega em virtude de algum desastre financeiro que na maioria dos casos, decorre da falta da educação financeira, como também da falta de controle e planejamento financeiro, gerando problemas no orçamento pessoal.

Existem também outros fatores que afetam o orçamento doméstico, são extrínsecos e fogem ao controle e planejamento das pessoas. É o caso das crises econômicas e suas consequências sobre emprego e renda. Esses eventos podem e devem, em muitos casos, ser minimizados, desde que se adotem algumas providências preventivas, caso contrário, pode haver turbulência passageira no equilíbrio financeiro, mas que, dentro de um processo de planejamento financeiro, conseguem ser razoavelmente contornadas.

Mesmo com um nível de inflação mais baixo nos dias de hoje, a administração do orçamento doméstico exige verdadeiros malabarismos, principalmente para quem já opera nos limites de seus rendimentos, caso da maioria das pessoas.

Para tanto, escolheu-se abordar um tema de importância reconhecida para todas as famílias, "Sobre Juros e Aplicação de Conceitos Clássicos em Matemática Financeira", que tende a ajudar as pessoas a obterem controle do orçamento pessoal e familiar, evitarem as futuras dívidas pessoais, identificar as melhores opções de investimento de acordo com cada objetivo, e entenderem algumas linhas de créditos oferecidas pelo mercado.

Como caracterização deste estudo, tem-se que, embora se observem diversas transformações ocorridas pelas políticas educacionais, exigindo do professor a criação de estratégias que apresentem a realidade extraclasse ao seu aluno, visando a uma facilitação no desenrolar de situações que podem surgir em seu dia-a-dia, o que se vê hoje é um ensino pouco contextualizado, contribuindo para a falta de interesse dos alunos. No tocante à matemática, infelizmente, a ideia figura do mesmo modo, portanto trabalhar essa disciplina de forma a prender a atenção do aluno, a fim de ensiná-lo a lidar com os mais diversos casos é de suma importância.

Nesse contexto, a Matemática financeira se apresenta como uma excelente alternativa para compor o currículo escolar, visto que é contextual por excelência, é atual e de importância fundamental para a formação de um ser humano crítico e para um bom planejamento familiar, pois ela oferece base necessária para a tomada de importantes decisões durante a vida.

Como Situação-Problema, sabe-se que diante da real situação na qual se encontram os jovens atualmente, é que surgiu a necessidade de se estudar abordagens contextualizadas para a Matemática Financeira como forma de se obter um bom planejamento familiar.

Nesse sentido, a pergunta-problema a ser respondida ao final é:

- Qual a importância da Matemática Financeira para o planejamento familiar e o orçamento pessoal?

Como Objetivo Geral deste estudo, buscou-se evidenciar a importância da Matemática Financeira para o planejamento familiar e o orçamento pessoal.

Já os Objetivos Específicos são:

- Analisar fundamentos, ferramentas e melhores técnicas para o estudo de juros e Matemática Financeira no ensino escolar;

- Pesquisar e descrever a importância dos conceitos clássicos da Matemática básica aplicados à Matemática Financeira e sua real necessidade para o planejamento familiar.

Este estudo está dividido em 3 (três) capítulos, além desta introdução, considerações finais e as referências. Os capítulos estão divididos da seguinte forma:

No capítulo 2 apresentaremos uma proposta para introduzir o estudo e o cálculo de juros no Ensino Fundamental através da resolução de problemas.

No capítulo 3 trata-se da percepção financeira do ser humano e sua interação com o dinheiro, definições básicas de Matemática Financeira, juros simples, juros compostos, usando conceitos clássicos da matemática do ensino básico.

Já no capítulo 4, está a educação financeira voltada para jovens, tratando do orçamento familiar, identificação dos ralos por onde escoam as finanças pessoais, além das boas práticas para as financias pessoais.

Neste estudo, procurou-se escrever um trabalho de fácil entendimento para qualquer pessoa que possui matemática básica.

2 Matemática Financeira no Ensino Fundamental

Neste capítulo serão apresentadas algumas propostas de como introduzir o cálculo de juros no ensino fundamental, considerando alguns conceitos básicos do Ensino Fundamental, através de situações do cotidiano, por meio de resolução de problemas.

2.1 As frações e os números decimais no cálculo das porcentagens

Podemos perceber muitas situações presentes no cotidiano do indivíduo que são expressas em porcentagem, que é representada por uma Razão Centesimal, uma fração cujo denominador é 100. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{25}{100} &\equiv 25\% \\ \frac{8}{100} &\equiv 8\% \\ \frac{115}{100} &\equiv 115\% \end{aligned}$$

Para utilizarmos o cálculo mental a fim de determinar a porcentagem de um valor qualquer, se faz necessário conhecer os significados de algumas dessas porcentagens como vemos a seguir:

- 10% = a décima parte ou um décimo;
- $20\ \%$ = a quinta parte ou um quinto;
- 25% = a quarta parte ou um quarto;
- 50% = a metade ou um meio;

- 75% = três vezes a quarta parte ou três quartos do total;
- 100% = um inteiro ou tudo.

Nesse contexto é fácil ver que o conceito de "fração" é um elemento básico fundamental para a introdução de cálculos de porcentagem e consequentemente de juros. Para tal devemos também efetuar as devidas transformações de frações em porcentagens e em números decimas e vice-versa.

2.1.1 Transformações

1. Fração em porcentagem e em número decimal
   - $\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\% = 0,20 =$ [1]$0,2$
   - $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} \equiv 50\% = 0,50 \equiv 0,5$
   - $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} \equiv 75\% \equiv 0,75$
   - $\frac{1}{1} = \frac{100}{100} \equiv 100\% \equiv$ [2]1

2. Porcentagem em fração e em número decimal
   - $30\% \equiv \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$
   - $52\% \equiv \frac{52}{100} = \frac{13}{25} = 0,52$
   - $45\% \equiv \frac{45}{100} = \frac{9}{20} = 0,45$

[1] Vinte centésimos e dois décimos são equivalentes, e essa passagem se faz necessária apenas para elucidar a notação para estudantes não familiarizados.

[2] Os valores 0,2 e 0,5 estão em notação unitária que recebe essa nomenclatura pelo fato de 100%=1.

- $30\% \equiv \frac{16}{100} = \dfrac{4}{25} = 0,16$

3. Número decimal em fração e em porcentagem

   - $0,12 = \dfrac{12}{100} \equiv 12\%$
   - $0,37 = \dfrac{37}{100} \equiv 37\%$
   - $0,6 = \dfrac{6}{10} \equiv \dfrac{60}{100} = 60\%$
   - $0,03 = \dfrac{0,3}{10} \equiv \dfrac{3}{100} = 3\%$

Quando o professor observar que o aluno começa a fazer uso desses conceitos, sugere-se que sejam trabalhados alguns exemplos através de exercícios direcionados ao contexto.

As taxas podem ser apresentadas de duas formas:

- Percentual (%);
- Decimal ou unitária.

Abaixo, na Tabela 1, apresentamos alguns valores de taxas percentuais e decimais ou unitárias.

Tabela 1: Apresentação de Taxas

Taxa Percentual	Taxa Decimal ou Unitária
25%	$0,25$
5%	$0,05$
$1,5\%$	$0,015$
$0,5\%$	$0,005$
$2,5\%$	$0,025$
2%	$0,02$
$0,18\%$	$0,0018$
1500	15

A seguir apresentamos algumas situações propostas para que tais conceitos sejam aplicados.

Exemplo 1. *Numa classe de 35 alunos, 14 são homens. Qual a porcentagem de mulheres nessa classe?*

Solução:

Dos 35 alunos existentes nessa classe, 14 são homens então 21 são mulheres. O que nos mostra que existem 21 mulheres em 35 alunos, ou seja:

$$\frac{21}{35} = 0,6 = 60\%$$

O que nos mostra que a porcentagem de mulheres nessa classe é de 60%.

Exemplo 2. *Um cliente dirige-se a uma loja no dia 25 de junho para comprar um televisor que custa R\$ 1880,00 à vista. Como ele só vai receber seu salário no dia 10 de julho ele resolve comprar a prazo, solicitando que o pagamento deva ser prorrogado para o dia do recebimento de seu salário. O gerente da loja autoriza a compra, informando que o cliente deve pagar 6% de juros sobre o preço à vista do televisor, pelo prazo solicitado. Desse modo, qual o valor que o cliente deverá pagar na data solicitada?*

Solução:

Como sabemos que $6\% = \dfrac{6}{100}$ de R$ 1880,00 devemos calcular o valor acrescido multiplicando o preço à vista por 6 e em seguida dividi-lo por 100 como numa multiplicação de uma fração por um número inteiro. Dessa forma temos:

$$R\$ \ 1880,00 \times \frac{6}{100} = \frac{R\$ \ 11280,00}{100} = R\$ \ 112,80$$

Verificamos então que o valor acrescido (juros) ao preço à vista é de R$ 112,80 e que, o valor a ser pago por esse cliente na data solicitada é de:

$$R\$ \ 1880,00 + R\$ \ 112,80 = R\$ \ 1992,80.$$

Uma outra forma de resolver esse problema, é observando que ao acrescer 6% sobre o preço à vista do televisor o novo preço será de $100\% + 6\% = 106\%$ do preço anterior. Como vimos $106\% = \dfrac{106}{100} = 1,06$ (que chamamos a esse número decimal de fator de correção do preço à vista). Assim, para obtermos o novo preço, basta multiplicarmos o preço anterior pelo seu fator de correção. Deste modo:

$$R\$ \ 1880,00.1,06 = R\$ \ 1992,80.$$

Exemplo 3. *Um investidor comprou um terreno por R$ 15000,00 e vendeu-o um ano depois por R$ 18750,00. Qual o lucro em porcentagem, que esse investidor obteve?*

Solução:

Para calcularmos o lucro em reais devemos diminuir o preço de compra (que também é conhecido como preço de custo) do preço de venda, assim:

O lucro obtido em reais é $R\$ \ 18750,00 - R\$ \ 15000,00 = R\$ \ 3750,00$.

Agora, para calcularmos o lucro obtido em porcentagem, basta tomarmos o quociente entre o lucro obtido em reais e o preço de custo do terreno:

$$\frac{R\$ \ 3750,00}{R\$ \ 15000,00} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

Portanto, o lucro obtido em porcentagem é de 25%.

Exemplo 4. *Uma corrente de ouro cujo preço de tabela é R$ 320,00 é vendida com um desconto de 15%. Qual o preço de venda?*

Solução:

Para calcularmos o desconto em reais multiplicamos o valor de tabela pela fração correspondente a 15%, assim:

$$R\$\ 320,00 \times \frac{15}{100} = R\$\ 48,00.$$

Então o preço, em reais após o desconto é:

$$R\$\ 320,00 - R\$\ 48,00 = R\$\ 272,00.$$

Poderíamos também concluir que, se foi concedido 15% de desconto, então o comprador pagou $100\% - 15\% = 85\%$ do valor de tabela. Multiplicando o fator de correção 0,85 pelo preço de tabela, encontramos o preço de venda. Dessa forma:

$$R\$\ 320,00 \times 0,85 = R\$\ 272,00.$$

Assim, a corrente de ouro foi vendida por R$ 272,00.

2.2 A regra de três no cálculo das porcentagens

Os elementos fundamentais nas situações problemas que envolvem porcentagem são: o valor básico, a taxa de porcentagem e a porcentagem do valor básico. Os problemas mais simples consistem em dados dois desses elementos, calcular o terceiro. Nesse momento o professor deve motivar o aluno a aplicar conceitos de regra de três e proporcionalidade. Cada exemplo deve ser pensado para que o aluno desenvolva e analise estes conceitos.

Vamos então apresentar algumas situações para que tais conceitos sejam aplicados.

Exemplo 5. *Um funcionário, cujo salário mensal é de R$ 1080,00 recebe um aumento de 5,2%. Qual é seu novo salário?*

Solução :

Para calcularmos o novo salário devemos usar os conceitos da regra de três que determina a proporcionalidade dos elementos envolvidos através da razão existente entre as grandezas envolvidas, onde X será definido como o valor a ser acrescido no salário desse funcionário. Logo:

Salário	Porcentagem (%)
$R\$ \ 1080,00$	100
x	$5,2$

$$\begin{aligned} 100 \times x &= R\$ \ 1080,00 \times 5,2 \\ x &= R\$ \ 56,16. \end{aligned}$$

Portanto o novo salário desse funcionário será de $R\$ \ 1080,00 + R\$ \ 56,16 = R\$ \ 1136,16$.

Alternativamente, para resolvermos esse problema, poderíamos utilizar o mesmo processo do exemplo 2, ou seja, multiplicando pelo fator de correção 1,052. Então teremos:

$$R\$ \ 1080,00.1,052 = R\$ \ 1136,16.$$

Exemplo 6. *O litro de gasolina sofreu um aumento de 12% e passou a custar R\$ 3,05. Qual é o preço anterior ao aumento do litro de gasolina?*

Solução:

Salário	Porcentagem (%)
$R\$ \ 3,05$	112
x	100

$$\begin{aligned} 12 \times x &= R\$ \ 3,05 \times 100 \\ x &= R\$ \ 2,724. \end{aligned}$$

Assim, observamos que o preço da gasolina anterior ao aumento de 12% é de R$ 2,724.

Exemplo 7. *Uma geladeira sofre um aumento de 25% em seu preço. Um cliente solicita ao vendedor um desconto sobre o novo preço, de modo que ele pague pela geladeira o preço anterior ao aumento. Sendo atendido o seu pedido, qual deverá ser o desconto dado ao cliente?*

Solução:

De modo análogo aos exemplos anteriores e considerando que a geladeira custe $R\$ \ 1800,00$. Com o aumento de 2%, vemos que a geladeira passa a custar $R\$ \ 2250,00$. O vendedor deve conceder um desconto, de tal modo que o preço retorne a $R\$ \ 1800,00$, ou seja, deve conceder um desconto de $R\$ \ 450,00$. Considerando x a porcentagem do desconto, temos que:

Salário	Porcentagem (%)
$R\$ \ 2250,00$	100
$450,00$	x

Daí:

$$\begin{aligned} 2250,00 \times x &= R\$ \ 450,00 \times 100 \\ x &= 20\%. \end{aligned}$$

Logo, o desconto deve ser de 20% para que o cliente pague o preço anterior ao aumento.

Exemplo 8. *Um cliente paga R\$ 2120,00 por um empréstimo de R\$ 2000,00 que ele havia tomado no mês anterior. Qual a porcentagem que ele pagou de juros?*

Solução:

De modo análogo aos anteriores, definindo x como o acréscimo percentual sobre o valor inicial R\$ 2000,00. Assim temos que:

Salário	Porcentagem (%)
$R\$ \ 2000,00$	100
$2120,00$	$100 + x$

Assim,

$$\begin{aligned} 2000,00 \times (100\% + x) &= R\$ \ 2120,00 \times 100 \\ 100\% + x &= 106\%. \\ x &= 106\% - 100\%. \\ x &= 6\%. \end{aligned}$$

Verificamos então que foi pago 6% de juros pelo empréstimo tomado.

Notemos ainda que:

$$R\$ \ 2000,00 \times 1,06 = R\$2120,00.$$

Embora em alguns casos a solução de imediato parece óbvia, mesmo com cálculos simples é necessária uma interpretação correta para não ser induzido ao erro, dessa forma o professor poderá concluir, juntamente com a classe, que todas as movimentações financeiras são baseadas na estipulação prévia de taxas de juros.

Ao realizarmos um empréstimo ou uma compra a prazo a forma de pagamento é feita por meio de prestações mensais acrescidas de juros, isto é, o valor de quitação do empréstimo ou da compra a prazo é superior ao valor inicial. A essa diferença damos o nome de juros.

Juros proporciona aos alunos a revisão de conceitos como frações, números decimais e porcentagens. Também veremos adiante nesse trabalho outros objetos matemáticos que se relacionam com juros.

3 Conceitos Clássicos da Matemática aplicados à Matemática Financeira

Neste capítulo serão apresentados conceitos clássicos da Matemática para compreender a percepção financeira e o desenvolvimento teórico para o entendimento de fórmulas usadas em matemática financeira, juros simples, juros compostos.

É notório que muitas pessoas sofrem impacto negativo nas finanças pela ausência de percepção financeira. Muitas desconhecem a aplicação dos juros, que muitas vezes são aplicados no mercado de forma abusiva, no que diz respeito à eliminação e negociação de dívidas.

3.1 A Matemática Financeira

A matemática comercial e financeira não é nova. Suas aplicações remontam de períodos anteriores a Cristo. A própria Bíblia Sagrada traz referências de juros e de aplicações financeiras, conforme [19].

> É bastante antigo o conceito de juros, tendo sido amplamente divulgado e utilizado ao longo da História. Esse conceito surgiu naturalmente quando o homem percebeu existir uma estreita relação entre o dinheiro e o tempo. Processos de acumulação de capital e a desvalorização da moeda levariam normalmente a idéia de juros, pois se realizavam basicamente devido ao valor temporal do dinheiro.[21]

A matemática financeira tem como objetivo principal estudar o valor do dinheiro em função do tempo, segundo [3].

3.1.1 Porcentagem

O cálculo de porcentagem é uma operação das mais antigas, em termos de cálculos comerciais e financeiros. A expressão por cento é indicada geralmente por meio do sinal %.

Quando se efetua um cálculo de porcentagem, na verdade efetua-se um simples cálculo de proporção.

Exemplo 9. *Qual é a comissão de 10% sobre R$ 800,00?*

Solução:

O raciocínio que se deve empregar na solução deste problema segue: Usando a notação de regra de três, tem-se:

$$\begin{array}{ccc} R\$\ 800,00 & \text{———} & 100\% \\ x & \text{———} & 10\% \end{array}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções (o produto dos meios é igual ao produto dos extremos), teremos que:

$$x = \frac{8000 \times 10\%}{100\%} = R\$\ 80,00.$$

Portanto, a comissão de 10% sobre R$ 800,00 é de R$ 80,00.

3.2 Função Afim

As funções matemáticas, entre tantas características, examinam e especificam tanto os cálculos do dia-a-dia quanto situações de maior complexidade, inclusive a partir do seu ponto de vista, analisam as relações envolvendo grandezas. A matemática financeira relaciona as operações financeiras de capitais nos regimes de juros simples e juros compostos às funções, de modo especial a função afim e a função exponencial.

Definição 1. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ quando existem constantes reais a e b tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, chamamos f de função Afim.*

Podemos determinar uma certa função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ afim mesmo que os coeficientes a e b não sejam explicitamente fornecidos. o número b é o valor que a função representa quando $x = 0$, $f(0) = b$ que, também é conhecido como valor inicial de f. O coeficiente a, é calculado a partir de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que f assume nos pontos x_1 e x_2. Logo:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad \text{e} \quad f(x_2) = ax_2 + b$$

O que nos mostra que:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \\ f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 - ax_1 \\ f(x_2) - f(x_1) &= a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

3.2.1 Função Linear

A função linear é a base matemática para a noção de proporcionalidade e é definida por $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax$.

Definição 2. *Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais m e x tem-se:*

$$f(mx) = m \cdot f(x) \quad \text{ou} \quad f(mx) = \frac{f(x)}{m}, m \neq 0.$$

Observamos que no primeiro caso, f é uma proporcionalidade direta, sendo que, no segundo caso, f apresenta uma proporcionalidade inversa. Os teoremas seguintes, apresentam uma caracterização para a função linear.

Teorema 1. *(Teorema Fundamental da Proporcionalidade). Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $f(q \cdot x) = q \cdot f(x)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

A demontração que utilizaremos pode ser encontrada em [11]

Demonstração. Para mostrar que (i) implica em (ii), provaremos inicialmente que, para todo racional $t = \dfrac{p}{q}$, (i) implica em $f(t \cdot x) = t \cdot f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$q \cdot f(t \cdot x) = f(q \cdot t \cdot x) = f(p \cdot x) = p \cdot f(x)$$

Portanto

$$f(t \cdot x) = \left(\frac{p}{q}\right) f(x) = t \cdot f(x).$$

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Logo, a é positivo. Além disso, temos

$$f(t) = f(t \cdot 1) = t\ .\ f(1) = t \cdot a = a \cdot t \text{ para todo } t \in \mathbb{Q}.$$

Agora mostraremos que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Suponha, por absurdo, que exista algum número real x tal que $f(x) \neq ax$.
Admita que $ax < f(x)$. Temos

$$x < \frac{f(x)}{a}$$

Tome um número racional t tal que

$$x < t < \frac{f(x)}{a}$$

Então $a \cdot x < a \cdot t < f(x)$, ou seja, $a \cdot x < f(t) < f(x)$. Absurdo, pois f é crescente.

(ii) implica em (iii):

Como para $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$;

$$f(x = y) = a(x + y) \longrightarrow f(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

(iii) implica em (i):

$f(q \cdot x + q \cdot y) = f(q \cdot x) + f(q \cdot y)$ implica que $f(q \cdot x + q \cdot y) = q \cdot f(x) + q \cdot f(y)$ implica que $f(q \cdot x + q \cdot y) = q \cdot (f(x) + f(y))$ implica que $f(q \cdot x + q \cdot y) = q \cdot f(x + y)$.

□

Teorema 2. *(Caracterização da Função Afim). Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x + t) - f(x) = g(t)$ não depender de x, mas apenas de t, então f é uma função afim.*

A demontração que utilizaremos pode ser encontrada em [11]

Demonstração. Para $t, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
g(t + r) &= f(x + t + r) - f(x) \\
g(t + r) &= f((x + t) + r) - f(x + t) + f(x + t) - f(x) \\
g(t + r) &= g(t) + g(r)
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo $a = g(1)$, tem-se $g(t) = a\cdot$ t para todo $h \in \mathbb{R}$. Observamos que $f(x + t) - f(x) = a \cdot h$. Fazendo $f(0)$ igual a b, temos que $f(t) = a \cdot t + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

□

Exemplo 10. *Sendo f(x) = ax+b uma função afim e sendo p e q números reais distintos, mostrar que*

$$\frac{f(p) - f(q)}{p - q} = a$$

.

Solução:

Fazendo $p > q$ com $p = q + h$, temos que $f(q+h) - f(q) = a(q+h)$
Logo

$$f(p) - f(q) = a(p-q) \longrightarrow \frac{f(p) - f(q)}{(p-q)} = a.$$

Exemplo 11. *O valor de um carro decresce linearmente com o tempo, devido ao desgaste.Sabendo-se que hoje ele vale R\$ 20.000, 00, e daqui a 5 anos R\$ 2.000,00. Qual o seu valor daqui a 3 anos?*

Solução:

Nesse caso, x representa o tempo de uso do veículo e t tempo que resta para completar cinco anos de uso.

Sabendo que $f(x+t) - f(x) = a \cdot t$ fazendo $x = 0$ e $t = 5$, temos:

$$f(0+5) - f(0) = a \cdot 5$$

Logo,

$$a = -3.600.$$

Portanto, fazendo $x = 3$ e $t = 2$ temos:

$$f(3+2) - f(3) = -3.600 \cdot 2 \longrightarrow f(3) = 9.200 = R\$\ 9.200,00.$$

O valor do carro após três anos de uso é de $R\$\ 9.200,00$.

3.3 Função Exponencial

Sendo $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, denotada por $f(x) = a^x$ que obedece as propriedades a seguir, com $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(ii) $a^1 = a$;

(iii) $x < y$ implica que $a^x < a^y$, quando $a > 1$ e $x < y$ implica que $a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$

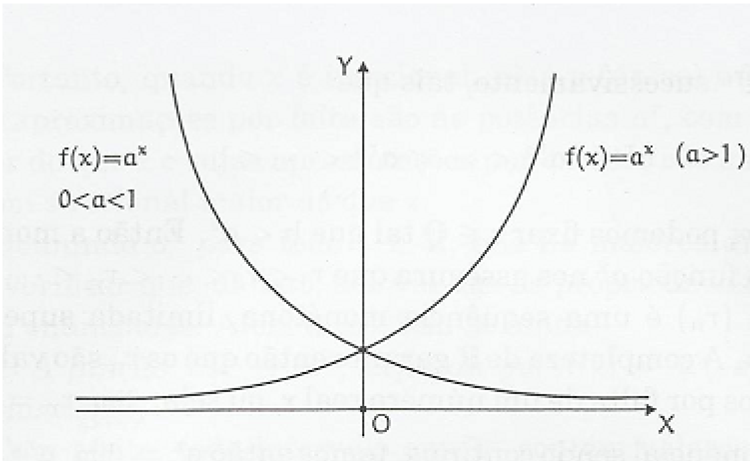

Figura 1: Gráfico da Função Exponencial

Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com a propriedade (i),$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, podemos afirmar que f não será definida no valor 0. Observe que para algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = f(x + (x_0 - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$$

O que nos mostra que f será identicamente nula.

Teorema 3. *(Caracterização da função exponencial). Sendo* $f :\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *uma função monótona injetiva. são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) $f(q \cdot x) = f(x)^q$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *onde* $a = f(1)$.

(iii) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$.

A demonstração que utilizaremos pode ser encontrada em [11]

Demonstração. Observamos que para todo racional $t = \dfrac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$ tem-se $f(t \cdot x) = f(x)^t$. Sabe-se que $q \cdot t = p$, e $f(t \cdot x)^q = f(q \cdot t \cdot x) = f(p \cdot x) = f(x)^p$.

Portanto,

$$f(tx) = f(x)^{\frac{p}{q}} = f(x)^t.$$

Então, sendo, $f(1) = a$, temos que $f(t) = f(1 \cdot t) = f(1)^t = a^t$ para todo $t \in \mathbb{Q}$.

Supondo que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Supondo que exista $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$.

Supondo $a^x < f(x)$, existe um número racional t tal que $a^x < a^t < f(x)$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(t)$ então, concluímos que $t < x$. Por absurdo vemos que $(i) \longrightarrow (ii)$.

Observando $(ii) \longrightarrow (iii)$:

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

Portanto, $(iii) \longrightarrow (i)$:

$$f(q \cdot x + q \cdot y) = f(q \cdot x) \cdot f(q \cdot y) = a^{qx} \cdot a^{qy} = (f(x))^q \cdot (f(y)) = (f(x) \cdot f(y))^q.$$

□

Teorema 4. *(Caracterização das funções exponenciais). Seja $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}+$ uma função monótona injetiva tal que, para $x, t \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{h(x+t) - h(x)}{h(x)}$ não depende de x, mas apenas de t.*
Então, se $b = h(0)$ e $a = \dfrac{h(1)}{h(0)}$, tem-se $h(x) = b \cdot ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Supondo que $\varphi(t) = \dfrac{h(x+t)}{h(x)}$ não depende de x.
Substituindo $f(x) = \dfrac{h(x)}{b}$, onde $b = h(0)$, com $\dfrac{f(x+t)}{f(x)}$ não depende de x e, agora com $f(0) = 1$. Pondo $x = 0$ na relação $\varphi(t) = \dfrac{f(x+t)}{f(x)}$, temos $\varphi(t) = f(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Observe que f cumpre $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$. Portanto $h(x) = b \cdot f(x) = b \cdot a^x$.

$\square$

Exemplo 12. *O valor de um automóvel deprecia a cada ano em 10% com relação ao ano anterior. Se V for valor do carro no ano da compra, após 5 anos qual será o valor desse automóvel?*

Solução:

Nesse caso, x representa o tempo de uso do veículo e t tempo que resta para completar cinco anos de uso.

Considerando $x = 0$ e $t = 1$ vem:

$$\frac{f(x+t)}{f(x)} = a^t \longrightarrow \frac{f(1)}{f(0)} = a \longrightarrow \frac{0,9V}{V} = a \longrightarrow a = 0,9.$$

Para $x = 0$ e $t = 2$ temos:

$$\frac{f(0+2)}{f(0)} = a^2 \longrightarrow \frac{0,9^2V}{V} = a^2 \longrightarrow a = 0,9.$$

Logo, pela caracterização das funções exponenciais temos $\dfrac{f(x+t)}{f(x)} = a^t$ e Substituindo $f(0)$ por V temos:

$$f(t) = V \cdot 0,9^t \longrightarrow f(5) = V \cdot 0,9^5 \ .$$

Exemplo 13. *O valor de um bem imóvel aumenta 10% em relação ao ano anterior. Se o valor do imóvel no ano da compra é de R\$ 300.000, 00, após 8 anos, qual será o valor desse imóvel?*

Solução:

Nesse caso, x representa o tempo de uso do veículo e t tempo que resta para completar oito anos de uso.

Considerando $x = 0$ e $t = 1$ vem:

$$\frac{f(x+t)}{f(x)} = a^t \longrightarrow \frac{f(1)}{f(0)} = a \longrightarrow \tfrac{1,1V}{V} = a \longrightarrow a = 1,1.$$

Para $x = 0$ e $t = 2$ temos:

$$\frac{f(2)}{f(0)} = a^2 \longrightarrow \frac{1,1^2 V}{V} = a^2 \longrightarrow a = 1,1.$$

Logo, pela caracterização das funções exponenciais temos $\frac{f(x+t)}{f(x)} = a^t$ e substituindo f(0) por V temos:

$$f(t) = V \cdot 1,1^t \longrightarrow f(8) = 300.000 \cdot 1,1^8 = 643.076,64.$$

Portanto, após 8 anos será de $R\$$ $643.076,64$.

3.4 Progressões Aritméticas

A Matemática Financeira encontra uma grande ferramenta que se aplica às situações correlatas à sua aplicação que são as progressões aritméticas as quais relacionamos diretamente aos juros simples.

Uma Progressão Aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo termo, é o resultado da soma do termo anterior com uma constante. Tal constante é chamada de razão da Progressão Aritmética, que representaremos por r.

3.4.1 Termo Geral de uma Progressão Aritmética

Numa Progressão Aritmética (PA) o termo geral é dado por:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r \\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r \\
a_5 &= a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r \\
a_6 &= a_5 + r = a_1 + 4r + r = a_1 + 5r \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)r
\end{aligned}
$$

O termo geral da P.G. pode ser também escrito da seguinte forma:

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

Logo, (a_n) é uma P.A. se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$, etc ... representam uma reta, conforme Figura 2.

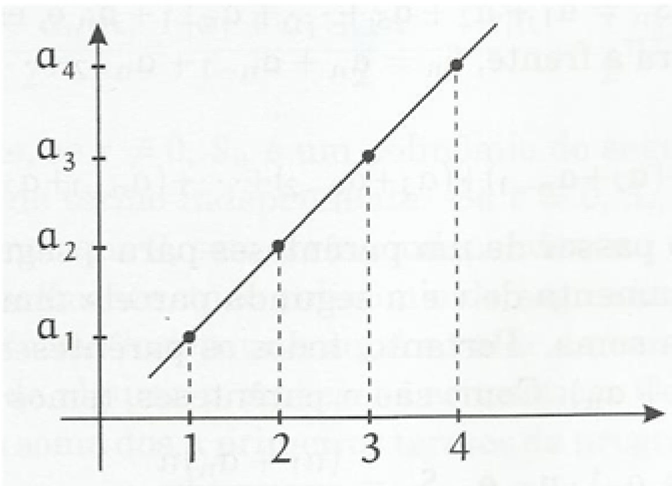

Figura 2: Representação da Progressão Aritmética

3.4.2 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética

Calculando a soma dos números naturais de 1 a 100, percebemos que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Note que a soma do primeiro termo com o centésimo termo $(1 + 100 = 101)$ igual a soma do segundo termo com o nonagésimo nono termo $(2 + 99 = 101)$ que é igual a soma do terceiro termo com o nonagésimo oitavo termo $(3 + 98 = 101)$, e assim por diante, ou seja, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, que é 101.

Como no total são 50 somas iguais a 101, conclui-se que:

$$1 + 2 + 3 + 4 \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$$

Demonstração. Generalizando o procedimento para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma P.A., temos que :

A soma dos n primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Portanto,

(i) $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n - 1 + a_n$

(ii) $S_n = a_n + a_n - 1 + ... + a_2 + a_1$

Somando (i) + (ii), membro a membro, obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_n - 1) + ... + (a_n - 1 + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como em toda P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, temos então:

$$a_1 + a_n = a_2 + a1 = \cdots = a_n - 1 + a_2 = a_n + a_1$$

Logo, obtemos n parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$, portanto:

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

Portanto,

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

□

Exemplo 14. *Uma montadora de automóveis produz 600 veículos em março e aumenta mensalmente sua produção de 50 veículos. Qual o número de veículos que foi produzido em agosto do referido ano?*

Solução:
resolvermos, aplicamos a expressão do Termo Geral da P.A., logo, temos:

$$a_6 = a_1 + 5r = 600 + 5 \cdot 50 = 850$$

Portanto, foram produzidos 850 veículos no mês de agosto.

Também podemos resolver o exemplo acima aplicando a Função Afim.

$$f(x) = 50x + 600.$$

Daí,

$$f(5) = 30 \cdot 5 + 600 = 250 + 600 = 850.$$

Portanto, foram produzidos 850 veículos no mês de agosto.

Exemplo 15. *Um automóvel novo custa R\$ 30.000,00. Sabe-se que esse carro diminui de R\$ 1.000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço dele com 5 anos de uso?*

Solução:

Podemos resolver o problema aplicando o termo geral da P.A. com $a_0 = 30.000$, o quinto ano será o a_5.

Portanto,

$$a_5 = a_0 + 5r = 30.000 + 5 \cdot (-1.000) = 30.000 - 5.000 = R\$\ 25.000,00.$$

De outra forma, podemos obter o valor depreciado usando a função afim dada por:

$$f(x) = 30.000 - 1.000x.$$

Obtendo,

$$f(5) = 30.000 - 1,000 \cdot 5 = 30.000 - 5.000 = R\$\ 25.000,00$$

Portanto, o valor do veículo, após 5 anos de uso é de $R\$\ 25.000,00$.

Exemplo 16. *Ao comprar um apartamento, João paga R\$ 55.000,00 de entrada e assume o compromisso de pagar o restante em 10 anos, com prestações mensais. Sabendo que a 1ª prestação é de R\$ 990, 00; a 2ª de R\$ 987, 00; a 3ª de R\$ 984, 00; e assim por diante, qual o total que João pagará pelo apartamento?*

Solução:

Primeiro vamos determinar o valor do centésimo vigésimo termo da sequência $(990,\ 987,\ 984, ...)$ que representa uma P.A., onde $a_1 = R\$\ 990,00$ e $r = -R\$\ 3,00$,

$$a_120 = a_1 + 119 \cdot r = 990 - 119 \cdot R\$|3,00 = R\$\ 633,00$$

Que também pode ser calculado pela função afim dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= 990 - 3x \\ f(119) &= 990 - 3 \cdot 119 \\ &= R\$\ 633,00 \end{aligned}$$

Daí, temos que o valor da 120ª parcela é de R$ 633,00.

Aplicando a soma $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ dos termos de uma P.A., temos:

$$S_{120} = \frac{120(990 + 633)}{2} = 97380.$$

Observamos que a soma das prestações a vencerem é de$R\$ \ 97.380,00$.

A soma do valor da entrada com o total das prestações a vencerem, temos:

$$R\$ \ 55.000,00 + R\$ \ 97.380,00 = R\$ \ 152.380,00$$

Portanto, João pagará um total de $R\$ \ 152.380,00$ pelo apartamento.

3.5 Progressões Geométricas

Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência numérica onde cada termo, a partir do segundo termo, é o resultado do produto do termo anterior por uma constante q que chamaremos de razão da P.G. A Matemática Financeira encontra uma outra grande ferramenta que se aplica às situações correlatas à sua aplicação que são as Progressões Geométricas que estão diretamente relacionadas aos juros compostos.

3.5.1 Termo Geral de uma Progressão Geométrica

Em uma P.G. o termo geral é dado por

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

onde $q \in \mathbb{R}$ é a razão da Progressão Geométrica.

De fato,

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\
a_5 &= a_4 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \cdot q = a_1 \cdot q^4 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}
$$

Em uma progressão geométrica a_n, a função que associa cada natural n ao valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função exponencial a_n. Portanto, pensando em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial, representado na Figura 3 , abaixo.

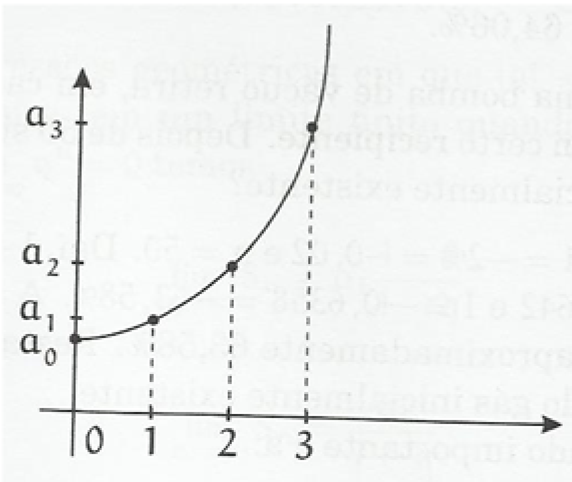

Figura 3: Representação da Progressão Geométrica

3.5.2 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica

A soma dos n primeiros termos da Progressão Geométrica (P.G.) é:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

A demonstração que utilizaremos pode ser encontrada em [12].

Demonstração. Para demonstrarmos, segue que:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + ... + a_n - 1 + a_n \\ S_n &= a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \end{aligned} \tag{1}$$

Multiplicando ambos os membros por q, temos:

$$q \cdot S_n = a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \tag{2}$$

Efetuando (2)$-$ (1) , temos:

$$\begin{aligned} q \cdot S_n - S_n &= (a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n) - (a_1 + a_2 + ... + a_n - 1 + a_n) \\ (q-1) \cdot S_n &= a_1 q^n - a_1 \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por $q - 1$, temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

$\square$

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \longrightarrow +\infty$. Como nesse caso $lim_{n \longrightarrow +\infty}\ q^n = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} S_n &= \frac{a_1(0 - 1)}{(q - 1)} \\
\lim_{n \to +\infty} S_n &= \frac{-a_1}{(q - 1)} \\
\lim_{n \to +\infty} S_n &= \frac{a_1}{(1 - q)}
\end{aligned}$$

Exemplo 17. *A população de uma cidade é aproximadamente igual a 230.000 habitantes e cresce 2% ao ano. Qual será a população dessa cidade daqui a 8 anos?*

Essa sequência $(230.000; 234.600; 239.292; ...)$ é uma P.G. de razão $q = 1,02$, onde $a_0 = 230000$.

Aplicando o termo geral da P.G. temos:

$$a_8 = a_0 \cdot q^8 = 230000 \cdot (1,02)^8 = 269481 \text{ habitantes}$$

Outra solução poderia ser obtida usando a função exponencial $f(x) = b \cdot a^x$.

$$\begin{aligned}
(0, 230000) \longrightarrow f(0) &= b \cdot a^0 \longrightarrow 230.000 = b \\
(1, 234600) \longrightarrow f(1) &= 234600 \cdot a^1 \longrightarrow a = \frac{234600}{230000} = 1,02 \\
f(x) &= 230000 \cdot 1,02^x
\end{aligned}$$

Teremos, portanto, que para x = 8, vem:

$$f(8) = 230000 \cdot 1,02^8 = 269481$$

Portanto, a população será aproximadamente 269481 habitantes.

Exemplo 18. *Maria compra um apartamento no valor de R\$ 370.000,00 num determinado bairro da cidade cuja valorização é de 8% ao ano. Calcule o valor do apartamento de Maria ao final de 10 anos.*

Solução:

Essa sequência (370.000, 399.600; 431.568; 466.093, 44; $\cdots$) é uma P.G. de razão 1,08 onde $a_0 = 370000$.

$$a_{10} = a_0 \cdot q^{10} = 370000 \cdot (1,08)^{10} = 798.802,25$$

Resolvendo a partir da função exponencial $f(x) = 370000 \cdot (1,08)^x$.

Para x = 10, temos:

$$f(10) = 370.000 \cdot 1,08^{10} = 798.802,25$$

Portanto, ao final de 10 anos, o apartamento custará $R\$$ 798.802,25.

Exemplo 19. *Rafael comprou um imóvel com uma parcela inicial de R\$ 1.200,00 reajustados mensalmente a uma taxa de 0,5%a.m. Levando-se em conta que Rafael escolheu um financiamento de 10 anos, qual o valor total a ser pago pelo imóvel ao final do financiamento?*

Solução:
Note que a sequência de prestações é dada pela P.G. (1.200,00; 1.206,00; 1.212,03; $\cdots$), onde $a_1 = R\$1.200,00$ e $q = 1,005$ e $n = 120$ (prestações), temos que:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Logo

$$\begin{aligned} S_{120} &= \frac{1.200,00(1,005^{120} - 1)}{1,005 - 1} = \frac{1.100,00 \times 0,819396734}{0,005} \\ S_{120} &= 196.655,21 \end{aligned}$$

Portanto, Rafael pagará R\$ 196.655,21 pelo seu imóvel.

3.6 Juros Simples

Pode se entender os juros simples como o sistema de capitalização linear. O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor do capital inicial, ou seja, sobre os juros gerados, a cada período, não incidirão novos juros.

3.6.1 Fórmulas de Juros Simples

Admitindo-se um capital (C) ou Valor Presente (PV), aplicado pelo regime de juros simples, a determinada taxa (i), durante certo período (n), tendo (n) como período inteiro, tem-se:

- Juros para o 1º período: $J_1 = C \cdot i$
- Juros para o 2º período: $J_2 = C \cdot i + C \cdot i$ ou $J_2 = (C \cdot i) \cdot 2$
- Juros para o 3º período: $J_3 = C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i$ ou $J_3 = (C \cdot i) \cdot 3$
- Juros para n períodos: $J_n = C \cdot i + C \cdot i + ... + C \cdot i$ ou $J_n = (C \cdot i) \cdot n$

Sendo assim, teremos a expressão que define juros simples:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Na expressão anterior, colocando o C em evidência, tem-se:

$$C = \frac{J}{i \cdot n}$$

Colocando o n em evidência, tem-se:

$$n = \frac{J}{C \cdot i}$$

Colocando o i em evidência, tem-se:

$$i = \frac{J}{C \cdot n}$$

3.6.2 Fórmulas do Montante ou Valor Futuro

Ao se considerar o Valor Futuro (VF) ou Montante (M) como: M = C + J e que o Juro (J) seja $J = C \cdot i$, pode-se deduzir que da relação entre as duas fórmulas, tem-se:

$$i = \frac{M}{C} - 1$$

A fórmula (V) pode ser deduzida de:

$$J = C \cdot i$$

Daí

$$i = \frac{J}{C} = \frac{(M - C)}{C} = \frac{M}{C} - \frac{C}{C} = \frac{M}{C} - 1$$

Antes de apresentar a fórmula do montante ou valor futuro, devemos nos lembrar dos conceitos iniciais, nos quais tínhamos:

$$M = C + J \text{ e } J = C \cdot i$$

Assim, substituindo, teremos:

$$M = C(1 + i \cdot n) \tag{3}$$

3.6.3 Fórmula do Capital ou Valor Presente

A fórmula do capital ou valor presente pode se deduzida a partir da fórmula do montante (M) ou valor futuro (FV).

Isolando C em (3), temos:

$$C = \frac{M}{1 + i \cdot n}$$

3.7 Juros Compostos

Pode-se entender os juros compostos como o que é popularmente chamado de juros sobre juros. Porém, é correto afirmar que os juros incidem sobre o montante. O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia a dia.

No regime de capitalização discreta a juros compostos, no fim de cada período a que se refere a taxa considerada, os juros devido ao capital são incorporados àquele capital. Diz-se que são capitalizados passando esse montante a render juros no período seguinte. Dessa maneira, ao contrário do regime de juros simples em que só o capital inicial rende juros, teremos não apenas juros devido ao principal como também aos juros formados nos períodos anteriores.

Considerando um capital principal C_0 (ou simplesmente C), i a taxa de juros e n o prazo de aplicação, expresso na unidade de período a que se refere a taxa considerada. Pela definição de juros compostos, no fim do primeiro período a que se refere a taxa, teremos juros devido somente a esse principal. Logo, podemos usar a fórmula de juros simples com n = 1 para calcular o montante ao fim do primeiro mês, ou seja, $C_1 = C \cdot (1 + i \cdot 1)$. Sendo assim, $C_1 = C \cdot (1 + i)$. Como é o montante C_1 que renderá no período seguinte, segue-se que serão formados juros iguais a $i \cdot C_1$. Logo o montante ao final do período C_2 será de $C_2 = C_1 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i) \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^2$:

Indutivamente, podemos concluir que o total de capital no fim de n períodos a taxa i, denotado por C_n e que se denomina montante da aplicação do principal C_0, será dado por:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

ou simplesmente,

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Como vimos anteriormente, M = C + J e daí segue-se que J = M - C, onde:

$$J = C \cdot (1 + i)^n - C = C \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

Pode-se obter a expressão para o cálculo do montante no regime de capitalização a juros compostos usando as progressões geométricas. Como os juros para um único período são calculados sobre o montante do período imediatamente anterior ao período considerado, para o n-ésimo período tem-se:

$$M_n = M_n - 1 \cdot (1 + i)$$

Dessa forma, observa-se que a sequência $(M_0; M_1; M_2; \cdots; M_n; \cdots)$ dos montantes no regime de juros compostos, é obtida a partir do capital inicial $C = M_0$ multiplicando-se sempre pelo fator $1+i$ o montante do período anterior, caracterizando uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = C$ e razão $q = 1 + i$. Deve-se observar que esse tipo de progressão geométrica será sempre crescente, uma vez que a razão é sempre maior do que 1 em virtude de i ser sempre um número positivo e $C > 0$.

Voltando ao caso geral da progressão geométrica, ocorre que $M_n = a_n{+}1$. Usando a fórmula do termo geral da PG, tem-se:

$$M_n = a_n + 1 = a_1 \cdot q^{[(n+1)-1]} = a_1 \cdot q^n$$

Por outro lado, substituindo a_1 por C e $q = 1 + i$ na fórmula anterior, obtemos:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n.$$

Deve-se observar que esta é a fórmula comumente usada para se calcular o montante no regime de capitalização a juros compostos.

Uma outra demonstração:

Valor futuro após o período 1:

$$M_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1 + i)$$

Valor futuro após o período 2:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$$

Valor futuro após o período 3:

$$M_3 = M_2 2 + M_2 \cdot i = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^3$$

Valor futuro após o período n:

Logo para um período n é possível perceber que:

$$M_n = C \cdot (1 + i)^n.$$

3.8 Resoluções de problemas aplicando conceitos clássicos da Matemática Básica

Os conceitos apresentados nesse capítulo mostram alguns métodos e conceitos matemáticos para aplicarmos na matemática financeira. A seguir veremos alguns exemplos de situações com diferentes enfoques na solução.

Exemplo 20. *Por quanto se deve vender certa mercadoria que custou R\$ 4.126,75, para obter uma rentabilidade (lucro) de 6%?*

Para obter a solução deste problema, utiliza-se a regra de três, assim:

$$\begin{array}{ccc} R\$\ 4.126,75 & \text{———} & 100\% \\ x & \text{———} & 6\% \end{array}$$

Onde x = lucro

Logo,

$$\text{Lucro} = \frac{4.126,75 \cdot 6}{100} = 247,60$$

Então teremos:

$$\begin{aligned} \text{Lucro} &= R\$\ 247,60 \\ \text{Custo da mercadoria} &= R\$\ 4.126,75 \\ \text{Preço de Venda} &= R\$\ 4.374,55 \end{aligned}$$

Uma outra solução obtemos usando o fator de correção 1,06. Logo:

$$R\$ \ 4.126,75 \cdot 1,06 = R\$ \ 4.374,55.$$

Ou ainda, usando função linear temos:

$$f(x) = 1,06 \cdot x,$$

onde x é o preço da mercadoria

Então,

$$f(4.126,75) = 1,06 \cdot 4.126,75 = R\$ \ 4.374,55$$

Também podemos resolver por P.G.. Para tal basta considerarmos $a_1 = 4.126,75$ e a razão q=1,06. É fácil ver nesse contexto que a_2 (o segundo termo) será o preço da mercadoria reajustado em 6%. Como sabemos que:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_2 &= 4.126,75 \cdot 1,06^{2-1} \\ a_2 &= 4.126,75 \cdot 1,06^1 = R\$ \ 4.374,55. \end{aligned}$$

Logo, para obter lucro de 6% deve-se vender a mercadoria por R$ 4.374,55.

Observe que R$ 4.126,75 representa a parte inteira = 100% ou $\frac{100}{100} = 1$.

Partindo desse raciocínio:

Preço de venda = parte inteira (1) + parte fracionária (0,06), ou seja, podemos dizer que o índice para calcular o preço de venda neste exemplo será 1,06.

Para os próximos exemplos, todas as taxas deverão ser apresentadas em forma decimal, ou seja, todas devem ser divididas por 100. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 100\% &= \frac{100}{100} = 1; \\ 5\% &= \frac{5}{100} = 0,05. \end{aligned}$$

Exemplo 21. *11 Um comerciante ganha R$ 892,14 sobre o custo de certa mercadoria. A taxa de lucro é de 5%. Qual é o custo?*

Solução:

Resolvendo pela regra de três onde $x =$ preço de custo da mercadoria é fácil ver que:

$$\begin{array}{ccc} R\$ \ 892,14 & \text{———} & 0,05 \\ x & \text{———} & 1 \end{array}$$

Logo:

$$x = \frac{892,14}{0,05} = R\$ \ 17.842,80$$

Uma outra solução, podemos encontrar usando os conceitos da P.A. onde consideramos $a_1 = R\$ \ 892,14$ (que corresponde a 5% do preço de custo da mercadoria), logo, notamos que existem 20 termos nessa sequência $(5\% \cdot 20 = 100\%)$ onde a_{20} nos dará o valor do preço de custo da mercadoria, e a razão dessa sequência é $r = R\$ \ 892,14$. Sabendo que:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Então:

$$\begin{aligned} a_{20} &= 892,14 + (20-1) \cdot 892,14 \\ a_{20} &= R\$ \ 17.842,80. \end{aligned}$$

Também podemos resolver usando os conceitos de função afim, onde f é uma função definida por $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 892,14 \cdot x + 892,14$. $Como f(0) = R\$ \ 892,14$ representa 5% que é a vigésima parte do valor do preço de custo da mercadoria, basta calcularmos$f(19)$. Logo:

$$f(19) = 892,14 \cdot 19 + 892,14 = R\$ \ 17.842,80.$$

Exemplo 22. *Uma fatura de R\$ 3.670,00 se concede o abatimento de R\$ 91,75. De quantos por cento é esse abatimento?*

Solução:

De modo análogo ao anterior, resolvendo pela regra de três, temos:

$$\begin{array}{ccc} R\$ \ 3.670,00 & \text{———} & 1 \\ 91,75 & \text{———} & x \end{array}$$

$$x = \frac{R\$ \ 91,75}{R\$ \ 3.670,00} = 0,025 = 2,5\%$$

Podemos também resolver definindo o problema como uma função afim, $f : [0; 3670,00] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{x}{3670,00}$ onde $x =$ valor do abatimento. Logo:

$$f(91,75) = \frac{91,75}{3670,00} = 0,025 = 2,5\%.$$

Portanto verificamos que o abatimento concedido é de 2,5%.

Exemplo 23. *Um comerciante vendeu certa mercadoria com o lucro de 8% sobre o custo por R\$ 12.393,00. Qual é o seu lucro em reais?*

Solução:

Sabemos que podemos resolver esse tipo de problema facilmente usando a regra de três, onde x é o lucro obtido. Desse modo:

$$\begin{array}{ccc} R\$ \ 12.393,00 & \text{———} & 1,08 \\ x & \text{———} & 0,08 \end{array}$$

Logo:

$$x = \frac{12.393,00 \cdot 0,08}{1,08} = R\$ \ 918,00.$$

Uma outra forma de analisar esse problema é considerando o preço da mercadoria como e segundo termo de uma P.G. de apenas dois termos onde a_2 = 12.393,00 e a_1 é o preço da mercadoria sem o lucro. Nesse contexto a razão da P.G. é q = 1,08. Como sabemos que em uma P.G.$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1}$, temos que:

$$\begin{aligned} 12.393,00 &= a_1 \cdot 1,08^1 \\ a_1 &= \frac{12.393,00}{1,08} = R\$ \ 11.475,00 \end{aligned}$$

Como R\$ 11.475,00 é o preço da mercadoria sem o lucro, para calcularmos o lucro obtido basta efetuarmos R\$ 12.393,00 ? R\$ 11475,00 = R\$ 918,00. Observamos também que podemos considerar esse problema como uma P.A. de apenas dois termos onde a_1é o valor da mercadoria sem o lucro e a_2 é o preço da mercadoria com o lucro. Podemos notar que a razão dessa P.A. é $r = 0,08 \cdot a_1$. Como sabemos que em uma P.A., $a_2 = a_1 + (n-1) \cdot r$, temos que:

$$12.393,00 = a_1 + (2-1) \cdot 0,08 \cdot a_1$$

Logo:

$$a_1 = \frac{12.393,00}{1,08} = R\$ \ 11.475,00.$$

Portanto o lucro obtido é dado por $R\$ \ 12.393,00?R\$ \ 11.475,00 = R\$ \ 918,00$.

Exemplo 24. *Um comerciante vendeu certa mercadoria por R\$ 15.825,81 e ganhou R\$ 1.438,71 de lucro. Qual foi a taxa de lucro obtida nessa negociação?*

Solução:

Para esse problema devemos aplicar os conceitos da regra de três, dessa vez considerando x como um acréscimo percentual (ou lucro) e $R\$ \ 1.438,71$ o acréscimo correspondente a x, da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} R\$ \ 15.825,81 & \text{———} & 1+x \\ 1.438,71 & \text{———} & x \end{array}$$

Logo:

$$\begin{aligned} 15825,81 \cdot x &= 1438,71 \cdot (1+x) \\ 1.438,71x &= 15825,81 \cdot x - 1438,71 \cdot \\ 14387,10 \cdot x &= 1438,71 \\ x &= 0,1 = 10\% \end{aligned}$$

4 Educação Financeira voltada para jovens

Este capítulo aborda o foco do estudo, isto é, a educação financeira voltada para os jovens, tratando do orçamento familiar, identificação dos ralos por onde escoam as finanças pessoais, além das boas práticas para as finanças pessoais.

O sistema capitalista impõe a ideia do crédito fácil em que o status é mensurado de acordo com o consumo de bens, induzindo assim o ser humano a utilizar-se de tais facilidades para satisfazer necessidades que lhe são impostas, de tal modo que o ser humano passou a consumir além de sua capacidade financeira, ocasionando um endividamento. De acordo com [20] houve um aumento espantoso no índice de consumo das famílias brasileiras, fator decisivo para tornar o Brasil um dos países campeões de vendas em diversos setores, aumentando mais rapidamente o ranking no consumo comparado a outros países.

Segundo [15] o cenário privilegiado para assimilar novos conhecimentos em relação à construção financeira e ecônomica da vida adulta se encontra na adolescência. A educação financeira não pode ser privilegio só de adultos, pois os adolescentes de hoje serão os adultos de amanhã.

> Cada indivíduo participante do processo de formação do ser humano tem uma parte de responsabilidade nesse processo de mudança pela qual a educação passa. E a Educação Financeira vem ser um elo entre várias áreas do conhecimento, no sentido de fazer com que trabalhem juntas e formem na epistemologia do aluno conceitos capazes de instrumentalizá-lo para a construção de sua autonomia [22].

A importância que se deve dar à educação financeira na vida do indivíduo traz enormes benefícios, quanto antes começá-la, melhor. Uma relação equilibrada com o dinheiro é fator determinante para uma vida mais tranquila. Assim sendo, segundo [7], "a função da educação financeira infantil deve ser somente criar as bases para que na vida adulta os filhos possam lidar de forma saudável, equilibrada e responsável com o dinheiro".

Pesquisas realizadas por [6] trazem números preocupantes em relação à organização financeira doméstica das famílias brasileiras: 36% dos pesquisados declaram ter perfil de tipo gastador, 54% não conseguiram honrar suas dívidas pelo menos uma vez na vida, e apenas 31% poupam regularmente para aposentadoria. Observa-se também que parte crescente da renda familiar tem sido destinada ao consumo, o que torna as atuais taxas de poupança demasiadamente baixas. Essa situação, que aflige milhões de brasileiros, diminui a capacidade de investimento do país, afetando negativamente seu desenvolvimento.

A Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico – OCDE constatou que muitas pessoas, em diferentes países, não só carecem do conhecimento e das competências necessários para lidar de modo adequado com suas finanças pessoais, como também desconhecem sua necessidade de tais conhecimentos, o que assinala a provável origem do problema [17].

Portanto, levar um conjunto amplo de orientações sobre atitudes adequadas no planejamento e no uso dos recursos financeiros, ou seja, educação financeira, para o maior número possível de pessoas pode ajudá-las a resolver suas dificuldades, bem como possibilitar que planejem melhor sua vida, que tenham melhores condições de alcançarem suas metas e sonhos. Nesse sentido, as escolas podem contribuir de forma significativa ao educar os alunos financeiramente, pois eles, por sua vez, levariam esse conhecimento a sua família, com efeito multiplicador.

Para [2], o ambiente escolar proporciona aos estudantes a capacidade para conduzir sua vida em sociedade é um local onde não só se apreende conhecimentos cognitivos, aprende-se a fazer escolhas e a sonhar, como também a descobrir formas e caminhos para concretizar os objetivos. No sistema de Educação do Ensino Médio e Fundamental a Educação Financeira é um tema transversal que dialoga com as diversas disciplinas, sua vivencia em sala de aula permite ao estudante compreender o caminho para transformar seus sonhos em realidade.

Para [22], a propaganda na mídia impõe aos cidadãos a forma como devem viver, consumir e trabalhar, pois é recheada de argumentação altamente preparada. Os jovens são alvos fáceis para as emboscadas infligidas pelo mercado capitalista. Educação financeira deficiente causa sofrimento, os jovens que trabalham, recebem ordenados e, muitas vezes, não conseguem conciliar o desejo de consumir com o valor que recebem como produto do trabalho. Muitos trabalham para auxiliar a família e outros para comprar roupas, tênis, produtos eletrônicos, diversão, etc.

Segundo [2] na atualidade, é exponencial a preocupação com o ensino da educação financeira, para concretizar o progresso na vida das pessoas. É o que reflete o documento "Orientação para Educação Financeira nas Escolas", que embasa e propõe a forma de alinhamento da Educação Financeira e seus conteúdos formais ao currículo da Educação Básica, fundamentado na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e seus instrumentos normativos:

> A proposta é oferecer ao aluno informações e orientações que favoreçam a construção de um pensamento financeiro consistente e o desenvolvimento de comportamentos autônomos e saudáveis. Tanto o modelo pedagógico quanto os conteúdos financeiros possibilitam ao aluno se colocar como protagonista de sua história de vida, dando a ele condições de planejar e fazer acontecer o futuro que deseja para si , em conexão com o grupo familiar e social a que pertence.

O Ibope Mídia, que anualmente divulga os dados de investimento publicitário no Brasil, constatou que foram movimentados cerca de R$ 112 bilhões em 2013 com publicidade. A televisão permanece a principal mídia utilizada pela publicidade, representando 70% do investimento. Ao cruzar essa informação com o fato de a criança brasileira passar em média cinco horas 22 minutos e 11 segundos por dia assistindo à programação televisiva (PAINEL NACIONAL DE TELEVISORES, Ibope 2012) é possível imaginar o impacto da publicidade na infância.

As crianças brasileiras influenciam 80% das decisões de compra de uma família. Carros, roupas, alimentos, eletrodomésticos, quase tudo dentro de casa tem por trás o palpite de uma criança, salvo decisões relacionadas a planos de seguro, combustível e produtos de limpeza que têm pouca influência dos pequenos [5]. Fica claro então que a educação financeira quando introduzida na esfera familiar, e na escola contribui para a formação de pessoas equilibradas, pois ao pautarem eticamente suas ações aproveitam melhor as oportunidades de crescimento e promovem o desenvolvimento sustentável, transformando de forma positiva a qualidade de vida.

Enfim, a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF, instituída pelo Decreto nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010, tem a finalidade de promover a educação financeira e previdenciária e contribuir para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores.

Portanto, podemos concluir que a Educação Financeira não é um conjunto de ferramentas de cálculo, é uma leitura da realidade, de planejamento de vida, de prevenção e de realização individual e coletiva que usa os conceitos clássicos da matemática básica para fundamentá-la . Verificamos que é necessário ministra-la desde as séries iniciais em nossas escolas, pois, é neste espaço que realizamos os primeiros passos, que serão fundamentais na construção do projeto de vida do indivíduo.

4.1 Orçamento Familiar

A família é o alicerce para o desenvolvimento de uma nação. Além dos valores morais e da ética transmitidos a seus membros e decisivos para a formação de indivíduos que irão atuar na sociedade. Deve aprender a buscar a prosperidade financeira administrando as despesas, planejando e orçando os gastos para que não haja sofrimento coletivo.

O economista francês Pierre Guillaume Frédéric Le Play , apud [14], considerava a família e o orçamento familiar fundamentais para se estudarem as condições sociais da sociedade em que estas se encontravam. A família, considerada como base de uma estrutura social, pois é o suporte indispensável de um individuo, e o meio, onde as crianças se socializam e se estabelecem as relações sociais fundamentais.

Nos países desenvolvidos a educação financeira cabe às famílias. Às escolas cabe a função de reforçar a formação adquirida em casa. No Brasil, a educação financeira não está presente no universo familiar, tampouco nas escolas. Assim, a criança não aprende a lidar com dinheiro nem em casa, nem na escola. As consequências deste fato são determinantes para uma vida de oscilações econômicas, com graves repercussões tanto na vida do cidadão, quanto na do país [7].

Podemos observar que o através dos conceitos apresentados até o momento nesse trabalho que orçamento familiar é um recurso que especifica receitas, gastos e possíveis investimentos de todos os componentes pertencentes ao meio familiar, sendo útil ao controle e à apuração dos resultados. De fato vemos que a família deve estruturar-se para atingir os objetivos, sejam eles, financeiros, sociais, econômicos ou emocionais. No entanto, as famílias na sua maioria não possuem o hábito de executar uma gestão familiar.

> "A Fundação Getúlio Vargas apurou que a família padrão brasileira gasta 30% em habitação e moradia, 25% em alimentação, 12% em saúde e cuidados pessoais, 8% em educação e cultura", explica o professor de Economia, Luís Carlos Ewald (2005, p. 178). "E mais 15% em transporte, 5% em vestuário e 5% em despesas diversas"[16]

De acordo com [14], sucessivamente virão os valores das despesas que poderão ser classificadas o critério de destino. As despesas/custos podem ser separadas por categorias, conforme exemplificado a seguir:

a) Alimentação: Supermercado, padaria, açougue;

b) Habitação: Aluguel, condomínio, água, luz, etc;

c) Vestuário: Roupas, sapatos, acessórios;

d) Educação: Mensalidades, material escolar;

e) Saúde: Médico, dentista, remédios;

f) Higiene: Higiene pessoal, produtos de limpeza;

g) Transporte: Ônibus, combustível;

h) Serviços: Faxineiro, cabeleireiro, manicure, costureira;

i) Lazer: Férias, passeios, festas.

Conforme o perfil familiar pode-se criar diversas categorias para despesas, tais como:

> Bens de consumo (eletrodomésticos, informática, telefone etc.), despesas com filhos (babá, educação, lazer, roupas, saúde e outros), despesas domésticas (funcionários, itens de decoração, lavanderia, manutenção, reformas e seguro residencial), despesas financeiras (juros, anuidade de cartão), despesas pessoais (incluindo seguros pessoais), diversos, doações, férias (acomodação, aluguel de carro, passagens, outros) e impostos. Para completar, utilize categorias tais como lazer, presentes, retiradas para pequenas despesas, roupas, pensões a pagar, saúde (dentista, exames, hospital, médicos, planos de saúde, remédios) e tarifas bancárias [1].

"O Analfabetismo, tanto de palavras quanto de números, é a base das dificuldades financeiras" [10].

> Neste contexto, se há dificuldades com as finanças, é porque alguma coisa não está sendo entendida, sejam palavras, sejam números. Acredita-se que, com a iniciativa de disseminar conhecimentos de finanças na esfera doméstica, será possível estimular a qualidade de receitas e gastos familiares multiplicando o patrimônio e contribuindo para a tranquilidade de todos.

Diante do exposto concluímos que a família é a base para o desenvolvimento das pessoas e de uma nação como um todo. Nela é criada a ética e os primeiros valores humanos, por isso, é preciso administrar as despesas, para que haja prosperidade familiar.

4.2 Identificação dos Ralos por onde Escoam as Finanças Pessoais

4.2.1 O Endividamento

A estabilização econômica de 1994, expandiu as formas como o crédito chega até o grande público, a seguir elencaremos algumas das principais e mais populares linhas de crédito disponíveis hoje no mercado.

- Cheque Especial – Limite de crédito atrelado a conta corrente de movimentação;

- Crédito Direto ao Consumidor (CDC) – Financiamento concedido para aquisição de bens e serviços, sua maior utilização é para aquisição de veículos e eletrodomésticos;
- Penhor – Exclusivo da Caixa Econômica Federal tendo como garantia joias, prata, platina, diamante ou outro(s) objeto(s) de valor;
- Microcrédito – Destinado à população de baixa renda e aos microempreendedores;
- Empréstimo Consignado – Com desconto de prestações diretamente na folha de pagamento do tomador;
- Cartão de Crédito – Utilizado para aquisição de bens e serviços nos estabelecimentos credenciados. A forma de pagamento pode ser à vista, a prazo ou parcelado.

> "O endividamento pessoal não está diretamente ligado à renda do indivíduo, e sim a forma como ele administra as suas receitas e despesas. E será um dos fatores preponderantes para aqueles que pretendem gozar de uma saúde financeira equilibrada e tranquila" [4].

Uma das consequências da maior oferta de crédito está diretamente ligada aos prazos de financiamentos que se dilatam cada vez mais, alcançando prazos de 60 meses e em alguns casos 72 meses, principalmente na modalidade de CDC [8] e deixando de atender quase que exclusivamente a bens como veículos e eletrodomésticos e passando a abranger itens que até então não eram contemplados, como por exemplo, pacotes de viagens, material de construção e tratamentos de saúde e beleza [13].

Podemos observar que um dos pontos fundamentais do planejamento é a necessidade de monitorar de forma intensiva as receitas e despesas e isso depende de características individuais de organização e persistência. Verificamos então, que é necessário a elaboração de uma planilha ou um caderno de anotações, para muitos é justamente neste ponto que surge os maiores obstáculos. O problema é decorrente da dificuldade individual em se relacionar com números, tabelas e conceitos básicos de matemática, tais como os da matemática financeira.

Diante de todos os conceitos exposto, concluímos que não existe uma regra que defina o nível ideal de dívidas de um indivíduo, mas o que pode ser adotado como medida preventiva, diz respeito à manutenção de um equilíbrio entre o capital de terceiros e o patrimônio líquido, equilibrando sempre receitas e despesas, e se possível, que o indivíduo deixe sempre uma pequena soma de seu orçamento à título de reserva financeira e/ou poupança.

4.3 O Impacto das "Pequenas" Despesas no Orçamento

Embora não pareça, existem muitas despesas de valores pequenos, que alteram o orçamento. Contudo, analisando que, boa parte dessas despesas é feita de forma sistemática (todos os meses), pode-se avaliar o impacto em longo prazo no orçamento, ou seja, quando capitalizados por longos períodos de tempo, podem representar, ao final de um certo prazo, um montante considerável [9].

Demonstraremos a seguir alguns exemplos do cotidiano para tentar estimar os valores que poderiam ser acumulados, se, em vez de realizar o gastos, as quantias correspondentes fossem poupadas ou aplicadas, ao longo de determinado prazo. Para tanto utilizaremos uma taxa real de juros de 0,5% ao mês. Como são gastos específicos, o cálculo será simplificado e direto usando conceitos clássicos da matemática básica em cada exemplo, estimando apenas o prazo e o valor aproximado dos gastos mensais, determinando uma projeção do montante acumulado para 10, 20 e 30 anos.

Exemplo 25. *Jantar em restaurante uma vez por semana – Considere o custo de um jantar em um restaurante, para duas pessoas, com tudo incluído (entrada, prato principal suficiente para dois, bebida, sobremesa e gorjeta), como sendo* $R\$\ 120,00$. *Sendo o programa semanal e o ano com 52 semanas, logo, o gasto médio anual pode ser calculado e obtemos:* $120,00 \cdot 52 = 6.240,00$ *Ou seja, nessa situação, são gastos* $R\$\ 6.240,00$ *em um ano. Dividindo este valor por 12 meses, temos o valor médio mensal:* $\dfrac{6.240,00}{12} = 520,00$.

Ou seja, são gastos $R\$\ 520,00$ *por mês. O quanto essa despesa pode representar, em termos de valor futuro, para prazos de 10, 20 e 30 anos? Para resolver esse problema, podemos usar os conceitos das progressões geométricas descritas anteriormente, buscando um entendimento mais direto para os alunos do ensino médio.*

Solução:

Note que a sequência numérica (520,00; 522,60; 525,21; $\cdots$) representada pelo valor médio mensal corrigidos em 0,5%a.m.= 0,005 é uma P.G., onde $a_1 = R\$\ 520,00$ e a razão $q = 1,005$. Então temos que:

a) Para 10 anos, n = 120 meses. Daí:

$$S_{120} = \frac{a_1 \cdot (q^{120} - 1)}{(q - 1)} = \frac{520,00 \cdot (1,005^{120} - 1)}{(1,005 - 1)}$$

$$S_{120} = \frac{1201,304}{0,005} = R\$\ 85.217,60$$

Portanto, o valor gasto em 10 anos é de $R\$\ 85.217,60$.

b) Para 20 anos, n = 240 meses. De modo análogo a exemplo anterior temos:

$$S_{240} = \frac{a_1 \cdot (q^{240} - 1)}{(q - 1)} = \frac{520,00 \cdot (1,005^{240} - 1)}{(1,005 - 1)} = R\$\ 240.260,80$$

Portanto, o valor gasto em 20 anos é de R\$ 240.260,80.

c) Para 30 anos, 360 meses. Analogamente, temos:

$$S_{360} = \frac{a_1 \cdot (q^{360} - 1)}{(q - 1)} = \frac{520,00 \cdot (1,005^{360} - 1)}{(1,005 - 1)} = R\$\ 522.348,00$$

Portanto, o valor gasto em 30 anos é de $R\$\ 522.348,00$.

Exemplo 26. *TV por assinatura – Vive-se na Era da Informação, onde ocorre um avanço tecnológico bastante significativo nos serviços de telecomunicação e entretenimento. Essas novidades têm um preço. Um pacote de tv por assinatura custa, em média (programação básica), R\$ 50,00 por mês.*

Solução:

Note que a sequência numérica (R\$ 50,00 ;R\$ 50,25 ;R\$ 50,50 ; $\cdots$) representada pela mensalidade corrigida em $0,5\% a.m. = 0,005$ é uma P.G., onde $a_1 = R\$\ 50,00$ e a razão $q = 1,005$. De modo análogo ao anterior, temos que:

a) Para 10 anos, $n = 120$ meses. Daí:

$$\begin{aligned}
S_{120} &= \frac{a_1 \cdot (q^{120} - 1)}{(q-1)} = \frac{50,00 \cdot (1,005^{120} - 1)}{(1,005 - 1)} \\
S_{120} &= \frac{40,970}{0,005} = R\$ \ 8.194,00
\end{aligned}$$

Portanto, o valor gasto em 10 anos é de $R\$ \ 8.194,00$.

b) Para 20 anos, $n = 240$ meses. De modo análogo a exemplo anterior temos:

$$S_{240} = \frac{a_1 \cdot (q^{240} - 1)}{(q-1)} = \frac{50,00 \cdot (1,005^{240} - 1)}{(1,005 - 1)} = R\$ \ 23.102,00$$

Portanto, o valor gasto em 20 anos é de $R\$ \ 23.102,00$.

c) Para 30 anos, 360 meses. Analogamente, temos:

$$S_{360} = \frac{a_1 \cdot (q^{360} - 1)}{(q-1)} = \tfrac{50,00 \cdot (1,005^{360} - 1)}{(1,005 - 1)} = R\$ \ 50.225,75$$

Portanto, o valor gasto em 30 anos é de $R\$ \ 50.225,75$.

Essa é uma forma de lazer bem mais econômica que jantar fora uma vez por semana, mas, também, no longo prazo, representa um valor significativo.

Exemplo 27. *Consumo com o Tabagismo - Uma pessoa que consome um maço de cigarros por dia, a um custo de* $R\$ \ 6,00$ *por maço, gastará mensalmente* $R\$ \ 180,00$ *em média.*

Solução:

Note que a sequência numérica (R\$ 180,00; R\$ 180,90; R\$ 181,80; $\cdots$) representada pela mensalidade corrigida em 0,5%a.m.= 0,005 é uma P.G., onde $a_1 = R\$ \ 180,00$ e a razão $q = 1,005$. De modo análogo aos anteriores, temos que:

a) Para 10 anos, n = 120 meses. Daí:

$$S_{120} = \frac{a_1 \cdot (q^{120} - 1)}{(q-1)} = \frac{180,00 \cdot (1,005^{120} - 1)}{(1,005 - 1)}$$

$$S_{120} = R\$ \ 29.498,28$$

Portanto, o valor gasto em 10 anos é de R\$ 29.498,28.

b) Para 20 anos, $n = 240$ meses. De modo análogo a exemplo anterior temos:

$$S_{240} = \frac{a_1 \cdot (q^{240} - 1)}{(q-1)} = \frac{180,00 \cdot (1,005^{240} - 1)}{(1,005 - 1)} = R\$ \ 83.167,36$$

Portanto, o valor gasto em 20 anos é de R\$ 83.167,36.

c) Para 30 anos, 360 meses. Analogamente, temos:

$$S_{360} = \frac{a_1 \cdot (q^{360} - 1)}{(q-1)} = \frac{180,00 cdot (1,005^{360} - 1)}{(1,005 - 1)} = R\$ \ 180.812,70$$

Portanto, o valor gasto em 30 anos é de R\$ 180.812,70.

Com essas correções monetárias, pretendeu-se mostrar que tais despesas opcionais "se" poupadas e aplicadas por exemplo em uma caderneta de poupança renderiam aproximadamente os valores descritos nos exemplos anteriores.

4.4 Boas Práticas de Finanças Pessoais

De acordo com [10]:

> [...] a falta de instrução financeira nas escolas que nossos filhos frequentam. Muitos dos jovens de hoje tem cartão de crédito antes de concluir o segundo grau e, todavia, nunca tiveram aulas sobre dinheiro e a maneira de investi-lo, para não falar da compreensão do impacto dos juros compostos sobre os cartões de crédito. Simplesmente, são analfabetos financeiros e, sem o conhecimento de como o dinheiro funciona, eles não estão preparados para enfrentar o mundo que os espera, um mundo que dá mais ênfase à despesa do que à poupança.

Uma situação cotidiana na qual podem ser empregados os ensinamentos trabalhados em educação financeira – Uso do Cartão de Crédito.

— Mãe compra isso pra mim?
— A mamãe tá sem dinheiro, filho.
— Ué, paga com cartão!

Esse diálogo entre uma criança e sua mãe é muito comum. Todo mundo acha graça, mas no fundo, no fundo, muita gente pensa um pouco assim também. Às vezes, você quer muito comprar uma coisa, está sem dinheiro e acaba pensando.

"Ah, é só colocar no cartão". Mas não podemos esquecer que uma hora essa conta chega. E se você não estiver preparado, se não tiver reservado um dinheirinho para isso, essa conta aumenta e você pode acabar endividado. Isso acontece porque as taxas de juros de cartão de crédito são muito altas. Mas sabendo usar, o cartão de crédito se torna um grande aliado.

Exemplo 28. *Paulo comprou um aparelho Celular que estava em promoção, com a seguinte propaganda:*

1. *R$ 1.000,00 em uma parcela no cartão de crédito;*
2. *R$ 900,00 à vista. (10% de desconto);*

Mas tinha um problema, era fim de mês, dia 27, e ele só ia receber no dia 7. Então a solução foi usar o cartão de crédito dele, cujo vencimento era dia 12. Qual será a taxa de juros paga por Paulo se ele compra o Celular por R$ 1.000,00, e:

- *Pagar a fatura em uma parcela no dia 12 do mês seguinte ao da compra;*
- *Pagar R$ 400,00 no dia 12 do mês seguinte ao da compra e deixar os R$ 600,00 para pagar na próxima fatura, sabendo que o cartão de crédito aplica uma taxa de 12% a.m. Paga mais R$ 400,00 na próxima fatura e o saldo devedor restante na fatura posterior.*

Solução:

a) Observe que se Paulo tivesse o dinheiro para comprar a vista ele pagaria R$ 900,00 pelo celular. Como pagou R$ 1.000,00 no dia 12 do mês seguinte, temos que:

$$i = \frac{R\$ \ 1000,00}{R\$ \ 900,00} = 1,111 \cdots = 11,1\%$$

O que nos mostra que Paulo pagou 11,1% (R$ 100,00) de juros sobre o preço à vista do celular (R$ 900,00).

b) Como a dívida de Paulo com a operadora de cartão de crédito é de R$ 1.000,00 e ao pagar R$ 400,00 ele pagará 12% de juros sobre o restante. Logo:

- $R\$ \ 1.000,00 - R\$ \ 400,00 = R\$ \ 600,00$
- $R\$ \ 600,00 \cdot 1,12 = R\$ \ 672,00$ — Saldo devedor (1)
- $R\$ \ 672,00 - R\$ \ 400,00 = R\$ \ 272,00$ — Saldo devedor (2)
- $R\$ \ 272,00 \cdot 1,12 = R\$ \ 304,64$, que foi pago na última fatura.

Portanto, Paulo pagou $R\$ \ 400,00 + R\$ \ 400,00 + R\$ \ 304,64$ que perfaz um montante de$R\$ \ 1.104,64$ pelo celular que custava à vista $R\$ \ 900,00$, Logo:

$$i = \frac{R\$ \ 1.104,64}{R\$ \ 900,00} = 1,22738 = 22,738\%$$

O que nos mostra que Paulo pagou $22,738\%(R\$ \ 204,64)$ de Juros sobre o preço à vista do celular ($R\$ \ 900,00$).

O mesmo raciocínio vale basicamente para o Cheque Especial, que incorrem em juros, além disso, se as despesas ultrapassarem a receita na conta corrente, esta entra no negativo, levando a cheques sem fundo ou a incorrer em juros de cheque especial. Ambas as situações são péssimas.

4.4.1 Ciladas com Cartão de Crédito ou Cheque Especial

O uso do cartão ou cheque estimula a gastar mais do que gostaríamos se estivéssemos usando dinheiro vivo ? isso já foi verificado em várias pesquisas. Parece que ver o dinheiro saindo da carteira ?dói?, mas aquelas máquinas de cartão de crédito ou débito são indolores. O mesmo vale para o preenchimento de um cheque. Afinal, o que os olhos não veem ...

O cartão de crédito não lhe dá mais dinheiro. Só gaste o valor que você consegue pagar porque você terá de pagar em uma única data a soma de todas as despesas pagas

Tabela 2: Vantagens e Desvantagens do Cartão de Crédito

Vantagens	**Desvantagens**
Praticidade	Tendência a gastar demais
Acumulo de "pontos" ou "milhas", que podem ser trocados por prêmios.	Custo de anuidade
Extrato consolidado - informativo que detalha as despesas com o cartão de crédito no mês e as parcelas que estejam sendo pagas por alguma compra financiada (incluindo o número da parcela).	Tentação de endividar-se ou sair do orçamento
Mais tempo para pagar a conta	Clonagem
Pagamento em data única	Alta taxa de juros
Uso em emergências	

com ele ao longo do mês. Podem ser várias pequenas quantias ou uma única grande despesa, mas o fato é que tudo se concentrará em uma mesma data de pagamento.

Apresentação da fatura: as empresas costumam destacar o valor mínimo - às vezes até em negrito. Muitas pessoas acham que aquele é o valor devido no mês, pagam só o mínimo e acabam financiando o resto. Isso implica juros, ou seja, o valor que você não pagou naquele mês ficará acrescido de juros no mês seguinte. A despesa aumenta! Pague o valor total da fatura, sem cair na tentação de realizar apenas o pagamento mínimo escrito na fatura do cartão. Fique atento, pois ao pagar apenas o valor mínimo da fatura de cartão de crédito significa contratar um empréstimo!

Pode-se então verificar, por meio da Tabela 2, as vantagens e desvantagens do cartão de crédito.

Uma dívida contraída de forma impensada pode ser trocada por outra que custe menos. Há pessoas que preferem quitar uma dívida cara (como a do cheque especial) contraindo outra menos custosa (empréstimo consignado). O valor da dívida pode ser o mesmo, mas as condições (juros, prazo etc.) podem fazer uma grande diferença no valor das parcelas.

Por exemplo, se o cidadão está entrando e uma "bola de neve" com dívidas de cartão de crédito com juros de 12% ao mês, pode ser interessante fazer um empréstimo no banco para pagar com débito automático em conta com taxa de juros de 5% ao mês e um prazo maior.

Vale lembrar que esse é um passo intermediário para voltar ao equilíbrio ou pelo menos a uma situação financeiramente mais confortável. A pessoa ainda terá uma dívida para quitar e deverá rever suas receitas e despesas!

Para [4] "é preciso manter olhar vigilante e atento sobre os pequenos valores, arredondamentos e o descaso pela negociação, pois são nestes itens que se esconde um dos maiores ralos, por onde escorre grande parte dos rendimentos familiar". O autor ressalta que:

> O primeiro passo para poupar é fazer sobrar dinheiro. Tenham certeza de que boa parte dos motivos para o fato de não sobrarem recursos para poupar não está nos grandes gastos do orçamento, está nos pequenos, aqueles que fogem ao controle. Todos sabem quanto ganham e quanto pagam de aluguel, prestações, escola, transporte, supermercado. Mas muitos se assustam no fim do mês, quando as contas entram no vermelho, porque os pequenos gastos diários com padaria, feira, presentes, banca de jornal e outros somam-se e criam um rombo no orçamento. Passar a controlar esses gastos requer intensa disciplina durante um curto período de tempo, até que comecemos a prestar mais atenção neles. Minha sugestão: ponham no papel todos os gastos que vocês tiverem durante um mês. Sejam rigorosos, andem com uma folha de papel na carteira e anotem TUDO, das caixinhas dadas ao "flanelinha" à moeda perdida no ônibus. Percebam como é impressionante a soma dos valores que não relacionaríamos em nosso orçamento.

De acordo com o pensamento dos autores a composição das dívidas tem peso fundamental no sucesso das finanças pessoais. Uma vez que a postura frente a elas mostra o quão preparado está o indivíduo a lidar com o seu viés.

> Trate suas dívidas como trataria uma arma carregada. [...] é importante saber a diferença entre dívida boa e dívida ruim porque a dívida tinha o poder de nos deixar ricos ou pobres. Da mesma forma que uma arma carregada pode nos proteger ou nos matar [10].

Observamos então que nos contextos literários da educação financeira apresentados até o momento a não abordagem nos bancos escolares é um fator fundamental para formar adultos incapazes em lidar com suas próprias finanças. Não fornecendo o preparo necessário para tratar do assunto que estará tão presente na vida de qualquer indivíduo economicamente ativo.

5 Considerações finais

Este estudo teve o objetivo de realizar uma revisão bibliográfica acerca da importância “Sobre Juros e Aplicações de Conceitos Clássicos em Matemática Financeira”. Nesse sentido, revisaram-se os conceitos básicos da Matemática Financeira e os desdobramentos e as suas melhores práticas no sentido de permitir que esta seja inserida e verdadeiramente utilizada em todos os segmentos especialmente no ensino para jovens da educação básica.

A pesquisa que se realizou procurou apresentar um trabalho com uma linguagem de fácil entendimento para qualquer pessoa que possui matemática básica. Assim, vale mencionar que ao incluir o ensino da matemática financeira na escola o objetivo maior será o de contribuir para que os jovens de hoje tenham condições de administrar os conhecimentos adquiridos em todos os aspectos de sua vida pessoal e principalmente financeira.

No que tange aos fazeres financeiro e à gestão econômica do estudante entende-se que a família também é outra fonte de aprendizagem, isto é, o aprender financeiro, na concepção de alguns autores, está relacionado ao viver histórias positivas ou negativas dentro do seio familiar, ou seja, o que se observa cotidianamente é que a escola tem tido pouca participação neste aspecto, mesmo em se tratando nas aulas de Matemática as concepções quantitativas do universo racional.

Entende-se que aqueles que não aprendem a administrar sua vida financeira enfrentam grandes dificuldades, que só são superadas quando se tornam adultos e assumem a responsabilidade de controlar seu dinheiro, colaborando para que se tornem cidadãos conscientes, pois o futuro do país está presente na educação que os jovens recebem hoje. Por oportuno, é importante enfatizar que a Matemática Financeira ao ser incluída no cenário curricular das escolas torna-se um instrumental de relevância para as reflexões do cotidiano do futuro trabalhador.

Ao longo do período da coleta de dados para a realização deste estudo foi possível se descobrir que há material didático ricamente desenvolvido no período de 2010 a 2013 pelo Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF, em conjunto com o Ministério da Educação – MEC. Importante que se mencione que o CONEF foi criado em 2010 com o objetivo de coordenar a execução e definir planos, programas e ações da Estratégia Nacional da Educação Financeira – ENEF.

O Programa de Educação Financeira nas Escolas é uma ação relevante e estratégica para toda a sociedade brasileira. Ao inserir a Educação Financeira na formação dos estudantes o Programa contribui para o desenvolvimento da cultura de planejamento, prevenção, poupança, investimento e consumo consciente. O conjunto oferecido pelo MEC/CONEF se compõe de livros acerca de Educação Financeira nas Escolas, destinado às três séries do Ensino Médio, bem como livros para professores, para alunos, além disso, completando a série, cadernos de atividades e auto avaliação. Ao que se pôde observar ao longo da coleta do material para este estudo foi que o kit do CONEF – apesar de uma elaboração criteriosa, iniciada em 2008 e terminada em 2013 – "pareceu", infelizmente subutilizado nas escolas de Ensino Médio da Secretaria de Educação do Distrito Federal.

Por derradeiro, vale dizer que outro foco desta pesquisa teve como objetivo final apresentar a matemática financeira voltada para jovens, na qual se pudesse tratar do orçamento familiar, identificação de alguns ralos por onde podem escoar as finanças pessoais, além das boas práticas para as finanças, com vistas a que tal educação financeira venha a alcançar em um futuro não muito longe uma gama enorme de cidadãos brasileiros como se numa Progressão Geométrica.

Referências

[1] ABECS, *50 dicas para cuidar da sua saúde financeira. Disponível em: www.abecs.org.br/filesAbecs/Dicas_ Visa.pdf, acesso em: 15 mai. 2015.*

[2] Associação de Educação Financeira do Brasil., *Educação Financeira nas Escolas. Disponível em: www.aefbrasil.org.br/index.php/programas-e-projetos/educacao-financeira-nas-escolas/, acesso em: 5 abr. 2015.*

[3] CASTELO BRANCO, a. c. *Matemática Financeira Aplicada: Método algébrico, HP-12c, Microsoft Excel. 3. ed. rev. ? São Paulo : Cengage Learning, 2010.*

[4] CERBASI g. p., *Dinheiro os segredos de quem tem: como conquistar e manter sua independência financeira. 4 ed. São Paulo: Editora Gente, 2003.*

[5] CRIANÇA E CONSUMO, *Por que a publicidade faz mal para as crianças? Disponível em: http://criancaeconsumo.org.br/wp-content/uploads/2014/02/porque-a-publicidade-faz-mal-para-as-criancas.pdf, acesso em: 12 mai. 2015.*

[6] DATA POPULAR, *Educação Financeira no Brasil: relatório quali-quanti. 2008.*

[7] FILOCRE, c. d., *A importância de a escola investir na educação financeira. 2007. Disponível em: www.educacional.com.br/articulistas/outros Educacao_ artigo.asp?artigo=artigo0013>. Acesso em: 8 mai. 2015.*

[8] FORTUNA, e., *Mercado financeiro: produtos e serviços. 17ª edição. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2008.*

[9] HERNANI FILHO, v. v., *Opa, meu dinheiro não é capim, Salvador: Editora Ideia Livre, 2003*

[10] KIYOSAKI, r. t., *Pai Rico, Pai Pobre. Tradução: Maria Monteiro. 46. Ed. Editora Elsevier, 2000, 187 p.*

[11] LIMA, e. l et al, *A Matemática do Ensino Médio Volume 1, 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006*

[12] LIMA, e. l et al, *A Matemática do Ensino Médio Volume 2, 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006*

[13] MAIS DINHEIRO, *Empréstimos. Disponível em: www.maisdinheiro.com.br/dicas/emprestimos. Acesso em: 10 abr. 2015.*

[14] MIRANDA, E. J. ET AL, *Orçamento Familiar. Faculdade Cenecista de Varginha. Revista Eletrônica Acadêmica da Faceca, v. 1, n. 12, 2015.*

[15] NEGRI, A. L. L., *Educação financeira para o Ensino Médio da rede pública: uma proposta inovadora. ? Americana: Centro Universitário Salesiano de São Paulo, 2010.*

[16] NEXUS ADMINISTRADORA DE CONDOMÍNIOS E CONTABILIDADE. ORÇAMENTO, *Aprenda a fazer o seu. Disponível em: www.nexusadministradora.com.br/informativos.php?id=32, acesso em: 8 jun. 2015.*

[17] OCDE/OECD, *Organization for Economic and Co-Operation Development. Improving Financial Literacy. Analysis of Issues and Policies. Paris. 2005.*

[18] RAMBO, A. C., *O perfil do investidor e melhores investimentos: da teoria à prática do mercado brasileiro. 2014. Disponível em:https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle /123456789/123812/Monografia%20da%20Andrea%20Rambo.pdf?sequence=1. Acesso em: 28 Mar. 2015.*

[19] ROSETTI JUNIOR, H. ET AL, *Educação matemática financeira: conhecimentos financeiros para a cidadania e inclusão. Revista Cientifica Internacional, ano 2, n. 09, set./out., 2011.*

[20] SEGALLA, A. ET AL, *Como os brasileiros gastam. Revista ISTOÉ Independente, 2210. ed. mar. 2012. Disponível em http://www.istoe.com.br/reportagens/195047- _COMO+BRASILEIROS+GASTAM., acesso em: 10 mai. 2015.*

[21] SOMATEMATICA, *http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php acessado em 10 mai. 2015*

[22] STEPHANI, M., *Educação Financeira: uma perspectiva interdisciplinar na construção da autonomia do aluno. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre-RS: PUCRS, 2005.*