UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ – UECE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA – PROPGPq
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ALINE TÉRCIA DE SOUZA SABINO SOARES

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E APLICAÇÕES

FORTALEZA – CEARÁ
2015

ALINE TÉRCIA DE SOUZA SABINO SOARES

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

FORTALEZA – CEARÁ

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Soares, Aline Tercia de Souza Sabino.
Construções geométricas e aplicações [recurso eletrônico] / Aline Tercia de Souza Sabino Soares. - 2015.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 63 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Construções Geométricas. 2. Aplicações. 3. Equações. 4. Sequencias. 5. Trigonometria. I. Título.

ALINE TERCIA DE SOUZA SABINO SOARES

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional(PROFMAT) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 07/08/2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. João Marques Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes
Universidade Federal do Ceará – UFC

Dedico esse trabalho a Deus, meus pais, meu marido e toda a minha família pelo grande incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me iluminar, me dar força e inteligência para seguir esse curso com tanto afinco.

A toda a minha família em especial os meus pais e minha irmã que tanto me incentivaram e compreenderam a minha ausência por ter que me dedicar ao curso.

A meu marido pela paciência, compreensão, e apoio, pois muitos foram os momentos de ausência, de recusa às viagens e aos momentos de lazer.

Ao meu orientador Prof.: Dr. José Othon Dantas Lopes por dedicar seu tempo e conhecimento a minha orientação.

Aos professores Drs. João Marques e José Vagner por participarem da banca Examinadora e as contribuições dada ao meu trabalho.

Aos meus nobres colegas de curso que juntos nos apoiamos e ajudamos, sem eles não conseguiria esta aqui.

Aos meus colegas de trabalho da EEFM João Nogueira Jucá pela força e apoio e que sempre me incentivaram.

A Verônica Virginia e Isabel Sabino por suas considerações e ajuda no Abstract.

A todos que direta ou indiretamente mesmo não citados contribuíram para que eu concluísse esse trabalho.

“Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.”

(François Viète)

RESUMO

Neste trabalho, fizemos um breve estudo sobre as construções com régua e compasso, um legado deixado pelos gregos. Apresentamos demonstrações de identidades trigonométricas, progressões, seqüências e resoluções de equações do primeiro e segundo grau utilizando construções geométricas, tendo como base a interpretação de algumas demonstrações contidas no livro *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Concluímos que essas demonstrações podem ser aplicadas no Ensino Médio, melhorando a compreensão de alguns assuntos.

Palavras chave: Construções Geométricas, Demonstrações, Aplicações, Ensino Médio.

ABSTRACT

In this study, we made a brief study of the constructions with ruler and compass, a legacy left by the Greeks. We showed demonstrations of trigonometric identities, progressions, sequences and resolutions of the first and second degree equations using geometric constructions. Based on the interpretation of certain statements contained in the book Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking. We conclude that these statements may be applied in high school by improving the understanding of some issues.

Keywords: Geometric constructions, Statements, Applications, High School.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ato de ensinar Matemática somente por meio de conceitos e executando uma extensa lista de exercícios não está sendo suficiente para o aprendizado. Existe a necessidade de se compreender a Matemática o que nos ajudará a enxergar as regras e fórmulas de uma forma mais crítica e visualizar suas práticas e aplicações. Quando o aluno tem um estudo de Geometria este desenvolve “habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas” (BRASIL, 2002, p.257).

> A Matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, além de ser uma ferramenta para tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 1999, p. 256).

A Geometria é um dos assuntos da Matemática mais complicados de se ensinar o que pode até gerar certa rejeição nos professores. Nos livros mais antigos de Matemática os conteúdos de Geometria eram localizados apenas em suas últimas páginas e de forma isolada das outras áreas. Já os livros mais atuais, em sua maioria, conseguem unificar os conteúdos das mais diversas áreas da Matemática, além de trazer o estudo de Geometria nas páginas iniciais dos livros didáticos.

Faz-se necessário a intensificação das pesquisas e desenvolvimento de metodologias para o ensino de Geometria dando mais relevância a uma aprendizagem mais dinâmica. Onde o aluno possa compreender o que lhe é apresentado. De acordo com Fainguelernt (1999), o estudo da Geometria é de fundamental importância para o desenvolvimento do pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida.

Com base nisto elaboramos um material que aborde não somente as construções fundamentais, mas também apresenta demonstrações de fórmulas do dia a dia escolar, utilizando construções geométricas, possibilitando tanto ao professor como aos alunos a ampliação de seus conhecimentos.

Neste sentido é de extrema necessidade a oferta de subsídios para que nós professores possamos contar com material de pesquisa para atividades que enfoquem as construções geométricas como meio de despertar no aluno o gosto pela Geometria e uma compreensão maior dos conteúdos abordados.

O trabalho foi organizado em quatro capítulos. O primeiro capítulo trata de uma fundamentação teórica apresentando o legado grego deixado com as construções com régua e compasso o que contribuíram para o desenvolvimento do trabalho proposto. O segundo capítulo tem o propósito demonstrar as identidades trigonométricas de uma maneira mais visível utilizando-se de área de figuras planas e relações métricas na circunferência.

No terceiro apresentamos de algumas demonstrações de seqüências e progressões utilizando-se de construções. No último capítulo enfocaremos a resolução de equações do primeiro e do segundo grau fazendo o uso de construções geométricas com régua e compasso e a apresentação do método geométrico de resolução de equações do segundo grau.

O presente trabalho teve como base as demonstrações trazidas no livro *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, de Roger B. Nelsem, onde fizemos uma interpretação e transcrição de algumas demonstrações feitas somente com imagens.

Visamos motivar o desenvolvimento de projetos similares, de modo que venham a surgir outros abordando conceitos diferentes. É nossa intenção propiciar a aprendizagem dos conceitos geométricos e que estes aconteçam de maneira eficaz, através de aulas que associem construções geométricas, propriedades e conceitos.

Objetivamos mudar o olhar do professor de Matemática, que ele passe a apresentar as fórmulas matemáticas de uma maneira mais construtiva e que os alunos consigam absorver o sentido delas.

2 CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO

A evolução do homem está atrelada ao desenvolvimento da escrita, dos números e da sua necessidade de medir. Nos primórdios da humanidade o “homem das cavernas” já tinha a necessidade de registrar os seus feitos e seus rebanhos, e para isto utilizavam pedras, sacos, pedaços de madeira qualquer objeto em que ele pudesse fazer esse comparativo.

A escrita desenvolveu-se muito tempo, quando os conceitos de números já eram utilizados na prática mesmo sem o conhecimento abstrato e nem de simbologias. A percepção das formas e do registro das quantidades de objetos, animais já era um conhecimento matemático embora bem primitivo.

> Para recapitular, a Idade da Pedra durou vários milhares de anos, começando talvez já em 5 milhões a.C. e indo ate por volta de 3000 a.C. Num mundo de vastas pastagens e savanas onde abundavam os animais selvagens e as pessoas eram principalmente caçadores e colhedores. Suas vidas eram agrestes e difíceis, de maneira que elas viviam demasiado ocupadas e em permanente agitação para poderem desenvolver tradições cientificas. Depois de 3000 a.C. emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio e ao longo do rio Amarelo na China. Essas comunidades criaram culturas nas quais a ciência e a matemática começam a se desenvolver (EVES, HOWARD 2002 p.24).

Eves afirma que essa revolução agrícola deu uma grande contribuição para desenvolvimento de uma revolução intelectual e tecnológica culminado, depois de muitos anos, em sociedades culturalmente elevadas e organizadas, chamadas de berço das civilizações, onde se destacaram Oriente Médio, Egito e China.

Uma grande contribuição para a Matemática foi deixada por esses povos, marcadas com obras gigantescas como as pirâmides do Egito, a construção de jardins suspensos, esfinges e grandes projetos de irrigação, além das suas contribuições na astrologia e metalúrgia.

As colônias gregas eram distribuídas entre o Mar Negro e Mediterrâneo, era um país cortado por íngremes cadeias montanhosas e baías sinuosas, com estreitos vales pontilhados de grandes pedras e com solo ressecado e rios rasos. Apesar de suas dezenas de cidades-Estado algumas se destacavam como a militar Esparta e a comercial Atenas, Argos e Corintos também por sua importância comercial e portuária.

Apesar de todas essas adversidades a civilização grega conseguiu desenvolver um conhecimento mais apurado e filosófico da matemática. Os primeiros três séculos da matemática grega são marcados por extraordinárias contribuições iniciando em 600 a.C com Tales e sua geometria de demonstrações e culminado com os *Elementos* de Euclides, responsável por apresentar a geometria como ciência dedutiva. A palavra Geometria é derivada do grego onde Geo (terra) e Metron (medida).

A civilização grega desempenhou um papel muito significativo para a construção da matemática sendo na Grécia antiga onde a evolução matemática sofre uma mudança de rumo. Passando a ser uma ciência mais organizada, sistemática e com elementos racionais. Até então no Egito e Mesopotâmia a matemática era essencialmente de conceitos e práticas, tendo na Grécia uma forma mais abstrata e independente em relação às aplicações práticas. Os gregos introduziram a utilização de instrumentos e demonstrações para a validação de conceitos de argumentação puramente racional.

A idéia de números racionais ainda estava a muitos anos de ser desenvolvida, estava-se aí no século V a.C mas os gregos tinham a necessidade de representar uma grandeza, e foi aí que nasceu a idéia de representar uma grandeza por um segmento de reta. Nascendo uma perspectiva matemática, mais geométrica em que as resoluções eram sinônimas de construções. Conforme Wagner (2009, p.5), “O fato importante das construções geométricas é que não basta encontrar a solução. É preciso justificar por que ela é correta.”

A régua, que não deve ser graduada, e o compasso, que deve ser dobradiço, foram introduzidos para essas construções. Não se sabe ao certo quando eles foram criados e quem os criou, mas, que foram utilizados seguindo algumas regras, atribuídas a Platão, em 390 a.C.

> E importante ser claro quanto ao que é permitido fazer com régua e compasso. Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado (EVES, HOWARD 2002 p.134).

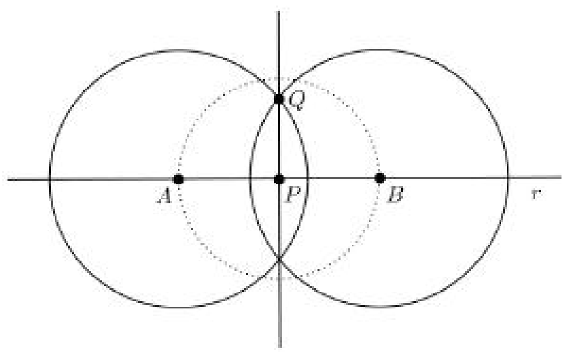
Dentre inúmeras construções geométricas que os gregos realizavam com régua e compasso, destacamos a seguir algumas.

2.1 Dado um ponto P e uma reta r, traçar uma reta perpendicular à r passando pelo ponto P.

2.1.1 Com ponto P pertencente a reta r

- Com centro no ponto P, trace um círculo de raio qualquer R, esse círculo deve interceptar a reta em pelo menos dois pontos A e B.
- Com o centro no ponto A e um raio maior do que R ,trace uma semicircunferência, o mesmo faça para o ponto B.
- As duas semicircunferências se interceptarão em dois pontos, que ligados com a régua serão a nova reta s perpendicular a r. Conforme figura abaixo.

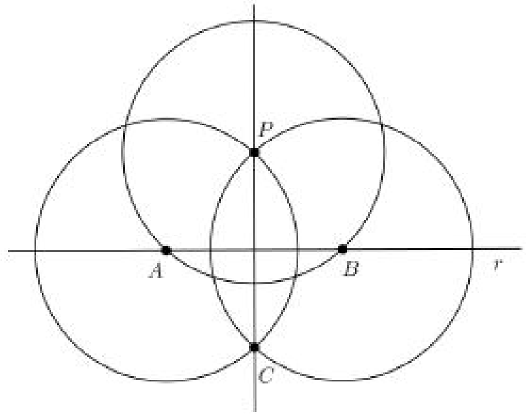
Figura1- Reta perpendicular com P pertencente a r



2.1.2 Com o ponto P não pertencendo a reta r.

- Com centro em P e raio R, maior do que sua distância até a reta r, trace uma circunferência, que intercepte a reta em dois pontos A e B.
- Com centro em A e o raio R, trace uma semicircunferência, o mesmo faça para o ponto B.
- As duas semicircunferências se interceptarão em dois pontos, um deles sendo o ponto P e ligando esses dois pontos traçamos uma nova reta s perpendicular a r. Conforme figura abaixo.

Figura 2 – Reta perpendicular com P não pertencendo a r

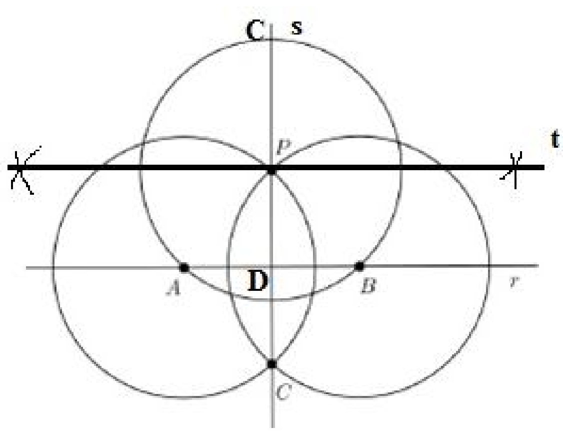


2.2 Dados uma reta r e um ponto P fora de r, traçar por P uma reta paralela à reta r

Essa construção consiste na aplicação dupla da construção anterior.

- Com centro no ponto P trace uma reta s perpendicular a reta r conforme construção 2.1.2
- Na reta s perpendicular a reta r, intercepta a circunferência de centro em P em dois pontos C e D.
- Com centro e C e D trace duas semicircunferências de raio maior que R e onde as duas semicircunferências se interceptarem trace um reta t perpendicular a reta s.
- A reta t será a reta paralela a reta r.

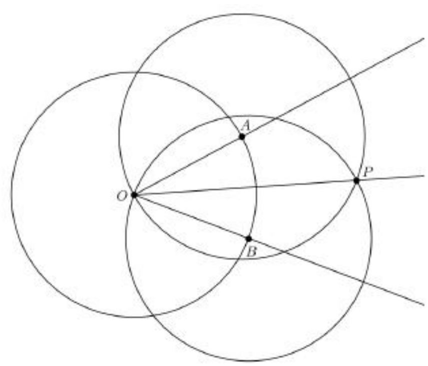
Figura3 – Reta paralela à r



2.3 Bissecção de um ângulo.

- Com centro no vértice O do ângulo e uma abertura qualquer trace uma semicircunferência, a qual intercepte os lados do ângulo em dois pontos A e B.
- Com centro em A e mesmo raio trace uma circunferência, o mesmo com centro em B.
- As duas circunferências se interceptarão em dois pontos, um deles sendo o vértice do ângulo.
- Trace uma reta ligando esses dois pontos. Essa reta bissecta o ângulo.

Figura 4 – Bissecção de um ângulo



2.4 Transportar, somar e subtrair ângulos.

2.4.1 Transportar ângulos

Seja θ o ângulo dado com vértice no ponto O

- Pelo ponto P trace uma reta paralela à reta determinada pelo ângulo θ
- Com centro em O e uma abertura qualquer trace uma semicircunferência maior do que o ângulo θ, onde A e B são os pontos de intersecção com os lados do ângulo.
- Com a mesma abertura e centro em P trace uma outra semicircunferência.
- Com o compasso meça a distância do ponto A ao B.
- Com centro no ponto de intersecção da reta com a semicircunferência de centro em P marque e a abertura de distância AB interceptando a semicircunferência no ponto C.

- Trace a semirreta PC e o ângulo estará transportado.

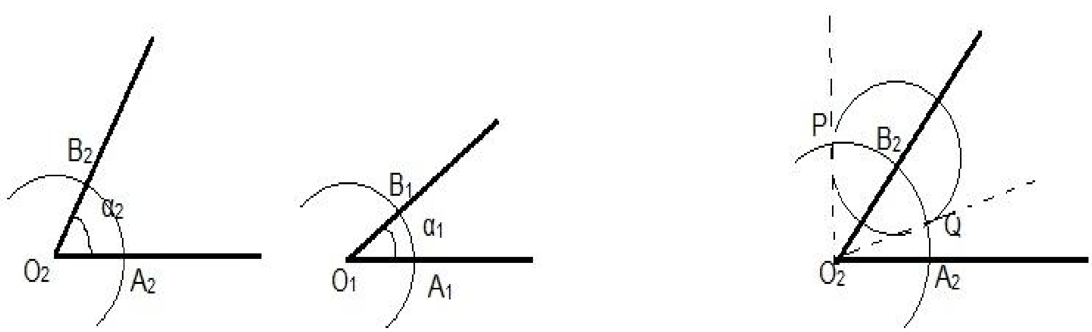
Figura 5 – Transporte te um ângulo

2.4.2 Somar e subtrair ângulos

Sejam dados os ângulos α_1 e α_2 de vértices em O_1 e O_2 e $\alpha_1 \leq \alpha_2$

- Com centro em O_1 e uma abertura qualquer maior do que α_2 trace um semicírculo.
- Com a mesma abertura e centro em O_2 trace outro semicírculo.
- Os pontos de intersecção das semirretas de α_1 e α_2 com os semicírculos são A_1 e B_1 , A_2 e B_2 respectivamente.
- Com o compasso e centro em A_1 marque a abertura A_1B_1.
- Com centro em B_2 e a abertura marcada trace um círculo, que interceptará o semicírculo de centro em O_2 em dois pontos P e Q nomeados no sentido anti-horário.
- $\alpha_1 + \alpha_2$ será o ângulo de abertura PO_2A_2 e $\alpha_2 - \alpha_1$ será o ângulo de abertura QO_2A_2.

Figura 6 – Soma e subtração de ângulos

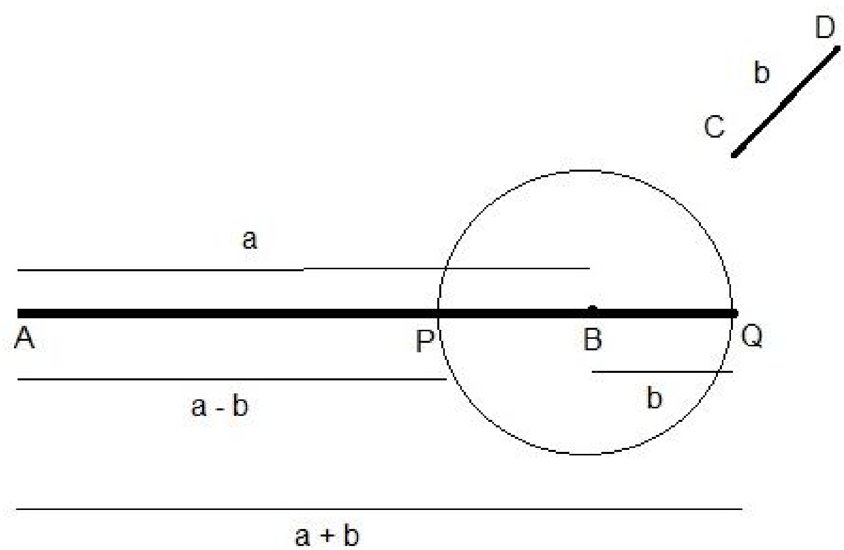


2.5 Dados segmentos a e b, construir segmentos de comprimento a + b e a – b.

Chamemos de AB e CD os segmentos de comprimento a e b e r uma reta que passe por A e B, com a≥b

- Com o compasso e centro em C marque a abertura de tamanho CD.
- Com centro em B e abertura CD trace um círculo.
- O círculo marcará sobre a reta r dois pontos P e Q nomeados no sentido anti-horário.
- a + b será o segmento AQ e a – b será o segmento AP

Figura 7 – Soma e subtração de segmentos



2.6 Dados segmentos a e b e uma unidade de medida, construir segmentos de comprimentos axb e a/b.

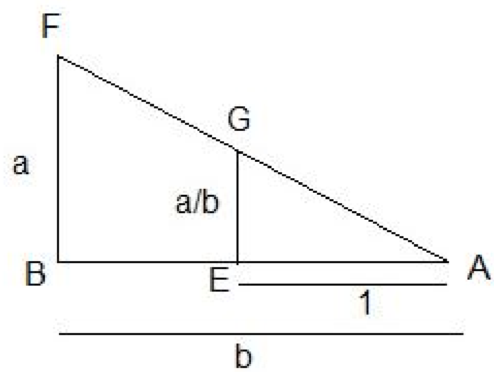
Chamemos de AB o segmento de medida b e CD o segmento de medida a.

2.6.1 Segmento a/b

- Com um compasso e centro em A marque o segmento de medida de uma unidade interceptando AB no ponto E

- Por B trace uma reta perpendicular a AB.
- Com o compasso marque a abertura CD e marque sobre a reta perpendicular partindo de B marque o ponto F.
- Ligue as extremidades A e F tendo assim um triângulo retângulo ABF.
- Pelo ponto E trace uma perpendicular ao segmento AB que interceptará AF no ponto G.
- O segmento EG = a/b

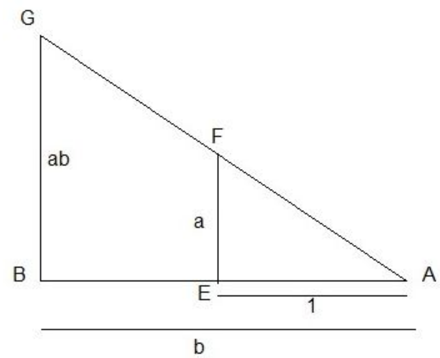
Figura 8 – Segmento a/b



2.6.2 Segmento axb

- Com um compasso e centro em A marque o segmento de medida CD interceptando AB no ponto E.
- Por E trace uma reta perpendicular a AB.
- Com o compasso marque uma unidade sobre a reta perpendicular com centro em E interceptando a reta no ponto F
- Por B trace uma reta perpendicular a AB
- Trace uma reta passando por AF até interceptar a reta perpendicular em B no ponto G.
- O segmento BG = axb

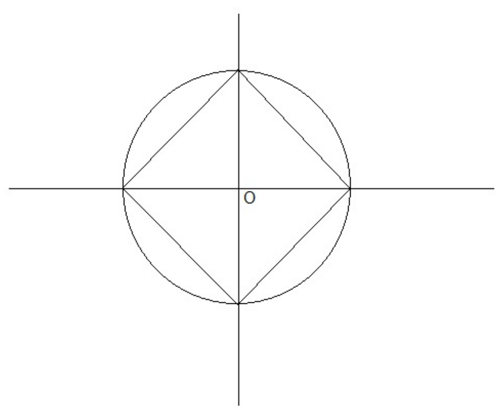
Figura 9- Segmento axb



2.7 Construção de um quadrado inscrito no círculo

- Com uma abertura qualquer e centro em O trace um círculo.
- Trace uma reta qualquer passando pelo centro do círculo.
- Trace uma perpendicular a essa reta traçada anteriormente passando pelo centro O.
- Os quatro pontos de intersecção dessas duas retas com o círculo são os vértices do quadrado.

Figura 10 – Quadrado inscrito

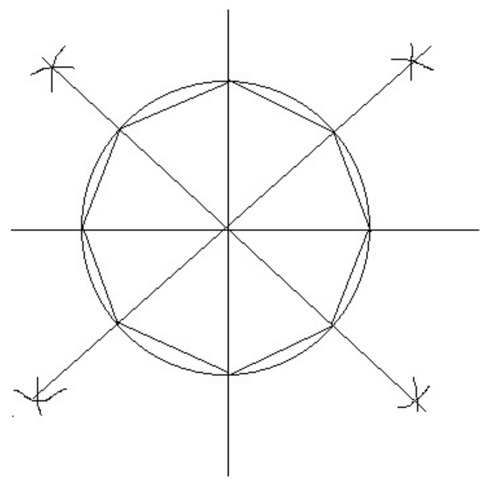


2.8 Construção de um hexágono e de triângulos regulares inscritos em círculos

- Com uma abertura qualquer e centro em O trace um círculo.
- Com a mesma abertura e um ponto qualquer do círculo trace seis medidas (seis pontos).
- Os seis pontos de intersecção no círculo formarão um hexágono regular.

- A junção de três pontos intercalados formará o triângulo regular inscrito no círculo.

Figura 11 – Hexágono inscrito



2.9 Construção dos polígonos regulares de 2^n lados inscritos em um círculo, com $n \geq 3$

Essa é uma construção por recorrência.

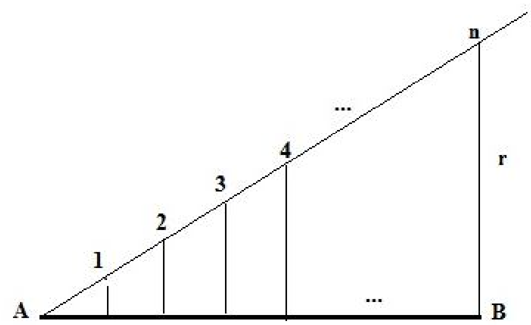
- Com uma abertura qualquer e centro em O trace um círculo.
- Construa um quadrado (conforme demonstração anterior)
- Bissectando os seus ângulos internos construímos um octógono regular e assim sucessivamente.
- Por bissecção a partir do polígono de 2^{n-1} lados obtêm-se um polígono de 2^n lados.

2.10 Divisão do segmento AB em qualquer número n de partes iguais.

- Em uma reta qualquer marque os pontos A e B formando o segmento AB.
- Com centro em A trace uma reta que não contenha o segmento.
- Sobre essa reta, partindo de A, marque com o compasso com uma abertura qualquer, os n segmentos.
- Ligue a extremidade do último segmento, no ponto N, com o ponto B.

- Pelos outros pontos marcados trace retas paralelas ao segmento NB.
- Os pontos de intersecção dessas retas com o segmento AB dividirão o segmento em n partes iguais.

Figura 12 – Divisão de segmento AB em n partes iguais



Os Gregos nos deixaram um legado de muitos problemas geométricos que poderiam ou não ser resolvidos com o uso da régua e compasso. Os mais conhecidos são a trissecção de um ângulo, ou seja, dividir um ângulo em três partes iguais. A duplicação do cubo: dado uma aresta de um cubo, construir um cubo que tenha o dobro do volume do cubo cuja aresta é dada e a quadratura de um círculo: que consiste em construir um quadrado de área igual a área de um círculo qualquer dado.

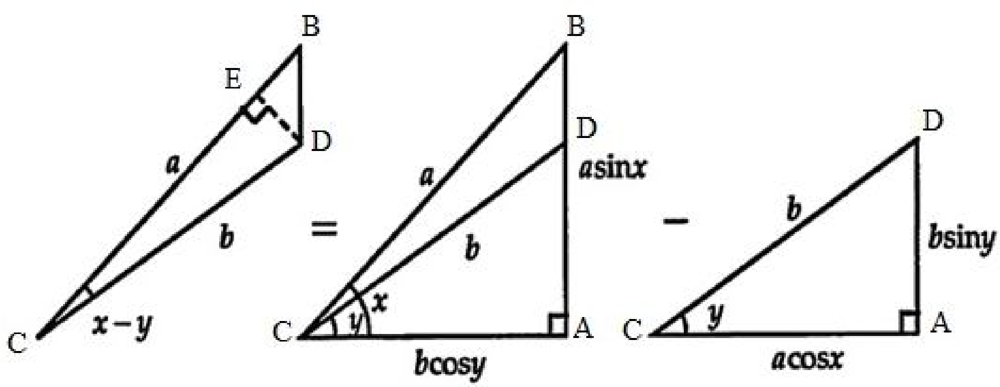
Esses problemas desafiaram o homem por muitos séculos e só obtiveram uma solução através Álgebra e Análise que se desenvolviam no século XIX.

3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

A origem da Trigonometria está relacionada a questões práticas relacionadas a medições de distâncias inacessíveis e a estudos astronômicos. A trigonometria é um dos tópicos da matemática onde podemos trabalhar de forma contextualizada. Sendo rica de atividades práticas e envolventes e que provocam grande interesse dos alunos. No presente capítulos iremos demonstrar algumas identidades trigonométricas como lei dos senos, lei dos cossenos, o seno, cosseno e tangente da soma e da diferença de dois ângulos utilizaremos área de figuras planas e relações métricas num triângulo retângulo e na circunferência.

3.1 Seno da diferença de dois ângulos

Figura 13 – Seno da diferença de dois ângulos

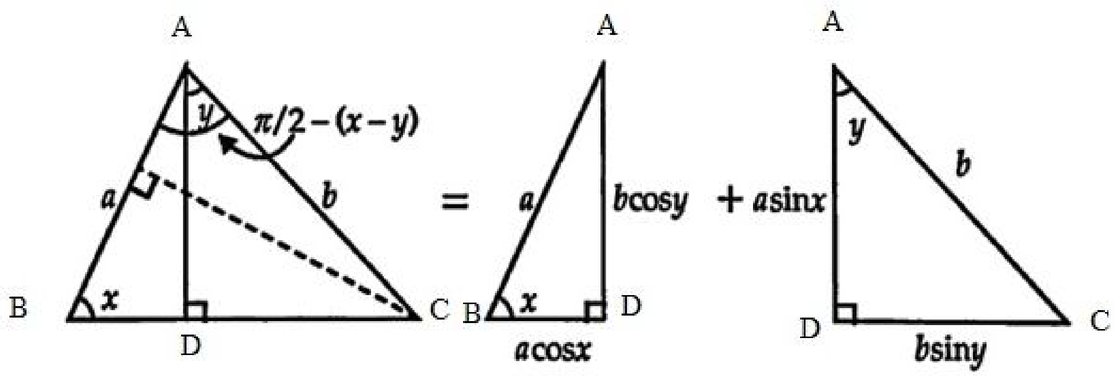


- Num triângulo retângulo ΔABC trace pelo vértice C uma semirreta até encontrar o lado AB e marque o ponto D.
- Por D trace a altura relativa ao lado CB.
- Chamamos de X o ângulo BCA, e de Y o ângulo DCA, logo BCD = X – Y.
- Chamaremos de **a** o lado CB e de **b** o lado CD.
- Utilizando as relações trigonométricas num triangulo retângulo podemos perceber que em ΔCAD temos:
- SenY = $\frac{DA}{b}$ → DA = bSenY
- CosY =$\frac{CA}{b}$ → CA = aCosY

- No ΔABC temos:
- SenX = $\frac{AB}{a}$ → AB = aSenX
- CosX =$\frac{CA}{a}$ → CA = aCosX
- No ΔCBD temos:
- Sem(X – Y)= $\frac{ED}{b}$ → ED = bSen(X – Y)
- A area do ΔCBD = ΔABC - ΔCAD (I)
- Área ΔCBD = $\frac{axED}{2}$ = $\frac{axbSen(X-Y)}{2}$ (II)
- Área ΔABC = $\frac{bCosYxaSenX}{2}$ = $\frac{abSenXCosY}{2}$ (III)
- Área ΔCAD = $\frac{aCosXxbSenY}{2}$ = $\frac{abSenYCosX}{2}$ (IV)
- Substituindo (II), (III) e (IV) em (I)
- $\frac{axbSen(X-Y)}{2}$ = $\frac{abSenXCosY}{2}$ - $\frac{abSenYCosX}{2}$.:
- $\left(\frac{axb}{2}\right) Sen(X-Y) = \left(\frac{axb}{2}\right)(SenXCosY - SenyCosX)$.:
- $Sen(X-Y) = (SenXCosY - SenyCosX)$

3.2 Cosseno da diferença de dois ângulos

Figura 14 – Cosseno da diferença de dois ângulos

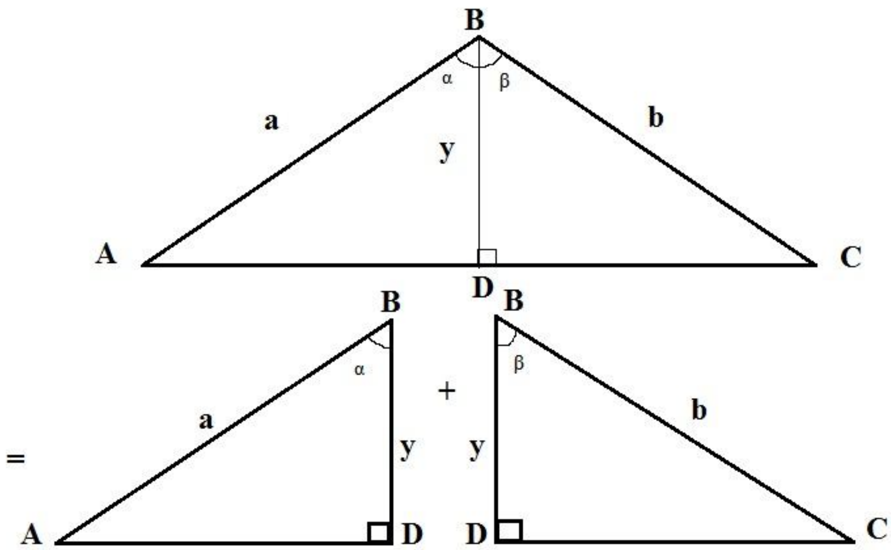


- Num triangulo qualquer ΔABC trace a altura relativa ao lado BC formando o ponto D. Dividindo assim o ΔABC em dois triângulos ΔABD e ΔADC.
- Chamamos de **a** o lado AB e de **b** o lado AC
- Chamaremos de X o ângulo ABC e de Y o ângulo DAC

- Temos em ΔABD:
- $\text{SenX} = \frac{AD}{a} \rightarrow AD = a\text{SenX}$
- $\text{CosX} = \frac{BD}{a} \rightarrow BD = a\text{CosX}$
- No ΔDAC temos:
- $\text{SenY} = \frac{DC}{b} \rightarrow DC = b\text{SenY}$
- $\text{CosY} = \frac{AD}{b} \rightarrow AD = b\text{CosY}$
- A área do ΔABD $= \frac{axED}{2} = \frac{aCosXxbCosY}{2} = \frac{abCosXCosY}{2}$ (I)
- A área do ΔADC $= \frac{aSenXxbSenY}{2} = \frac{abSenXSenY}{2}$ (II)
- A área do ΔABC = ΔABD + ΔADC $= \frac{abCosXCosY}{2} + \frac{abSenXSenY}{2} =$ $= \frac{ab(SenXSenY + CosXCosY)}{2}$ (III)
- Traçando uma altura relativa ao lado AB marcamos E, formamos os triângulos ΔBEC e ΔEAC.
- Em ΔBEC, B = x, E = 90° e C= z
- Em ΔEAC, E = 90°, A = z + y e C = k
- Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180°, daí:
- z = 180° - 90° - x = 90° - x
- k + 90 + z + y = 180°
- k =180° - 90° - 90° + x – y = x – y
- $\text{Cosk} = \text{Cos}(x - y) = \frac{EC}{b} \rightarrow EC = b\text{Cos}(X - Y)$
- A área do ΔABC também pode ser calculada como:
- Área ΔABC $= \frac{ABxEC}{2} = \frac{axbCos(X-Y)}{2}$ (IV)
- Igualando (III) e (IV):
- $\frac{axbCos(X-Y)}{2} = \frac{ab(SenXSenY + CosXCosY)}{2}$.:
- .: Cos(X – Y) = SenXSenY + CosXCosY

3.3 Seno da soma de dois ângulos

Figura 15 – Seno da soma de dois ângulos

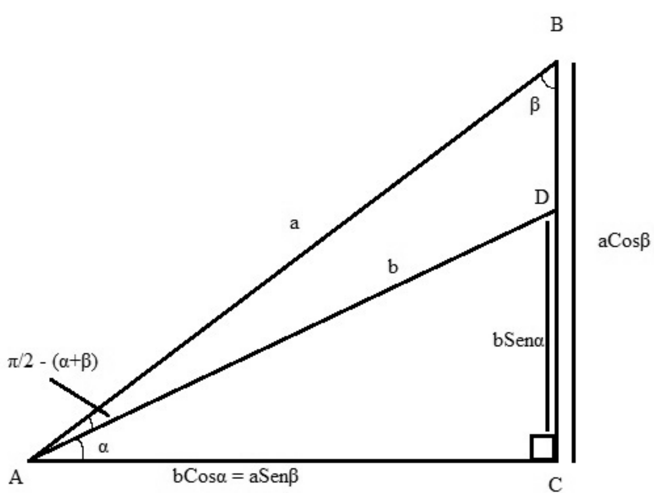


- Num triângulo qualquer ΔABC traçamos uma altura relativa ao lado AC, marcando D.
- Dividimos ΔABC em dois triângulos retângulos ΔABD e ΔBDC retângulos em D.
- Chamamos de **a** o lado AB e de **b** o lado BC e de **y** a altura AD.
- No triângulo ΔABD temos:
- $Cos\alpha = \frac{y}{a} \rightarrow\ y = aCos\alpha$
- $Sen\alpha = \frac{AD}{a} \rightarrow\ AD = aSen\alpha$
- No triângulo ΔBDC
- $Cos\beta = \frac{y}{b} \rightarrow\ y = bCos\beta$
- $Sen\beta = \frac{DC}{b} \rightarrow\ DC = bSen\beta$
- A área do ΔABC é igual a área ΔABD somado a área de ΔBDC. Assim:
- Área ΔABD = $\frac{aSen\alpha x bCos\beta}{2} = \frac{ab(Sen\alpha Cos\beta)}{2}$ (I)
- Área do ΔBDC = $\frac{bSen\beta x aCos\alpha}{2} = \frac{ab(Sen\beta Cos\alpha)}{2}$ (II)
- A área do ΔABC é igual a soma de (I) e (II):
- Área = = $\frac{ab(Sen\alpha Cos\beta)}{2} + \frac{ab(Sen\beta Cos\alpha)}{2} = \frac{ab(Sen\beta Cos\alpha + Sen\alpha Cos\beta)}{2}$ (III)
- A área do ΔABC também pode ser representada como:

- Área do ΔABC = $\frac{ab(Sen(\alpha+\beta)}{2}$ (IV)
- Igualando (III) e (IV) temos:
- $\frac{ab(Sen(\alpha+\beta)}{2} = \frac{ab(Sen\beta Cos\alpha + Sen\alpha Cos\beta\ )}{2}$
- .: Sen(α+β) = SenαCosβ + SenβCosα

3.4 Cosseno da soma de dois ângulos

Figura 16 – Cosseno da soma de dois ângulos

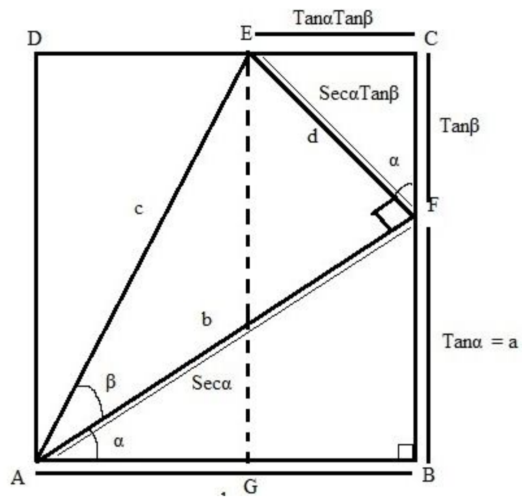


- Em um triângulo retângulo ΔABC, chamemos de **a** o lado AB, assim:
- Senβ = $\frac{AC}{a}$ → AC = aSenβ
- Cosβ = $\frac{BC}{a}$ → BC = aCosβ
- Traçamos uma semirreta partindo de A em direção a BC marcando D, chamamos de **b** o lado AD e de α o ângulo DAC, daí:
- Senα = $\frac{DC}{b}$ → DC = bSenα
- Cosα = $\frac{AC}{b}$ → AC = bCosα

- A area do triângulo ΔABD pode ser calculada como a diferença da área do triângulo ΔABC e a área do triângulo ΔADC.
- A área de ΔABC = $\frac{bCos\beta xaCos\alpha}{2}$ (I)
- A área de ΔADC = $\frac{aSen\beta xbSen\alpha}{2}$ (II)
- Fazendo da diferença de (I) e (II) temos:
- Área de ΔABD = $\frac{bCos\beta xaCos\alpha}{2}$ - $\frac{aSen\beta xbSen\alpha}{2}$ (III)
- A área do triângulo ΔABD também pode ser calculada como
- Área de ΔABD = $\frac{abSen(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta))}{2}$ (IV), sabe-se que Sen(π/2 – (α+β)) = Cos(α+β) pois são ângulos complementares, substituindo em (IV) teremos:
- Área de ΔABD = $\frac{abSen(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta))}{2}$ = $\frac{abCos(\alpha+\beta)}{2}$ (V)
- Igualando (III) e (V)
- $\frac{abCos(\alpha+\beta)}{2}$ = $\frac{bCos\beta xaCos\alpha}{2}$ - $\frac{aSen\beta xbSen\alpha}{2}$
- .: Cos(α+β) = CosαCosβ – SenαSenβ

3.5 Tangente da soma de dois ângulos

Figura 17 – Tangente da soma de dois ângulos

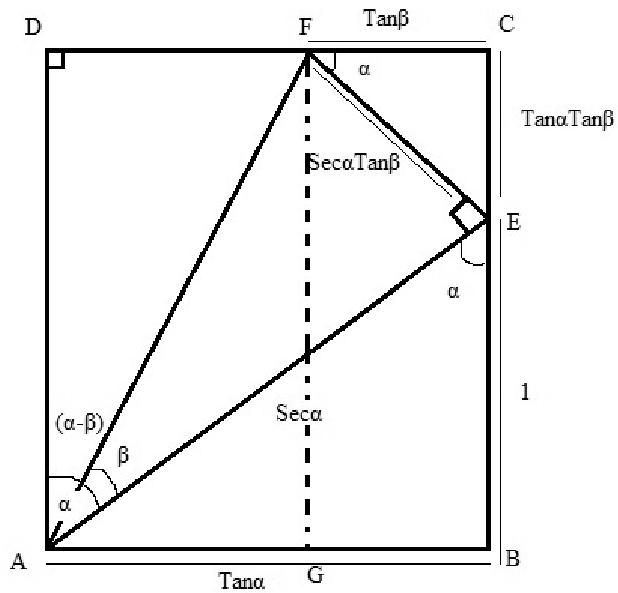


- Num retângulo ABCD de base AB medindo uma unidade traçamos uma semirreta partindo de A em direção a CB marcando F e por F traçamos uma semirreta em direção a CD marcando E de forma que o ângulo AFE formado seja 90°.
- No quadrilátero ABCD formamos quatro triângulos retângulos ΔABF, ΔAFE, ΔFCE e ΔADE.
- Chamamos de **a** o lado BF, de **b** o lado AF, de **c** o lado AE, de **d** o lado EF e nomeamos de α o ângulo FAB e de β o ângulo EAF.
- Analisando o triângulo ΔABF temos:
- $Sen\alpha = \frac{a}{b} \rightarrow a = bSen\alpha$ (I)
- $Cos\alpha = \frac{1}{b} \rightarrow b = \frac{1}{Cos\alpha} = Sec\alpha$ (II)
- Substituindo (II) em (I):
- $a = bSen\alpha = \frac{1}{Cos\alpha}$ x $Sen\alpha = \frac{Sen\alpha}{Cos\alpha} = Tan\alpha$
- Analisando o triângulo ΔAFE temos:
- $Cos\beta = \frac{b}{c} = \frac{Sec\alpha}{c} \rightarrow c = \frac{Sec\alpha}{Cos\beta}$ (III)
- $Sen\beta = \frac{d}{c} = \rightarrow d = cSen\beta$ (IV)
- Substituindo (III) em (IV):
- $d = \frac{Sec\alpha}{Cos\beta}$ x $Sen\beta = Sec\alpha$ x $\frac{Sen\beta}{Cos\beta} = Sec\alpha Tan\beta$
- Analisando o ΔFCE:
- $Cos\alpha = \frac{CD}{Sec\alpha Tan\beta} \rightarrow CF = Cos\alpha x Sec\alpha x Tan\beta = Cos\alpha x \frac{1}{Cos\alpha} x Tan\beta = Tan\beta$
- $Sen\alpha = \frac{EC}{Sec\alpha Tan\beta} \rightarrow EC = Sen\alpha x Sec\alpha x Tan\beta = Sen\alpha x \frac{1}{Cos\alpha} x Tan\beta = \frac{Sen\alpha}{Cos\alpha} x Tan\beta$

  .: $EC = Tan\alpha Tan\beta$
- Por E traçamos uma reta paralela a BC tocando o lado AB no ponto G. Formando um um triângulo retângulo ΔAGE de ângulo GAE = (α+β) e de lados AG = 1 – TanαTanβ e EG = Tanα + Tanβ.
- Daí $Tan(\alpha+\beta) = \frac{EG}{AG} = \frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}$

3.6 Tangente da diferença de dois ângulos

Figura 18 – Tangente da diferença de dois ângulos

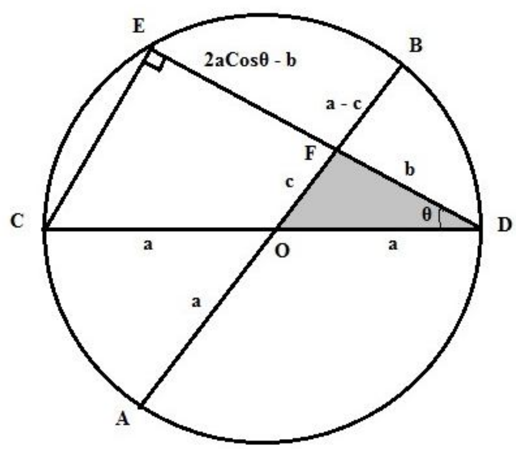


- Num retângulo ABCD de base AB e cuja medida do lado BC seja maior que a unidade traçamos uma semirreta partindo de A em direção a CB marcando E de forma que EB medindo uma unidade e por E traçamos uma semirreta em direção a CD marcando F de forma que o ângulo AEF formado seja 90°.
- No quadriláreto ABCD formamos quatro triângulos retângulos ΔABE, ΔAFE, ΔFCE e ΔADF.
- Analisando ΔABE temos:
- $\text{Sen}\alpha = \frac{AB}{AE} \rightarrow AB = AE\text{Sen}\alpha$ (I)
- $\text{Cos}\alpha = \frac{1}{AB} \rightarrow AE = \frac{1}{Cos\alpha} = \text{Sec}\alpha$ (II)
- Substituindo (II) em (I) :
- $AB = \frac{1}{Cos\alpha} x\text{Sen}\alpha = \text{Tan}\alpha$
- Analisando ΔAEF temos:
- $\text{Sen}\beta = \frac{EF}{AF} \rightarrow EF = AF\text{Sen}\beta \rightarrow AF = \frac{EF}{Sen\beta}$ (III)

- $\text{Cos}\beta = \frac{AE}{AF} \rightarrow AE = AF\text{Cos}\beta$ (IV)
- Igualando (II) e (IV) e substituindo (III) em (IV)
- $\text{Sec}\alpha = AF\text{Cos}\beta = \frac{EF}{\text{Sen}\beta} \text{x}\text{Cos}\beta \rightarrow EF = \text{Sec}\alpha \text{x} \frac{\text{Sen}\beta}{\text{Cos}\beta} = \text{Sec}\alpha\text{Tan}\beta$
- Analisando ΔECF temos:
- $\text{Sen}\alpha = \frac{EC}{\text{Sec}\alpha\text{Tan}\beta} \rightarrow EC = \text{Sen}\alpha \text{x} \text{Sec}\alpha \text{x} \text{Tan}\beta = \text{Sen}\alpha \text{ x } \frac{1}{\text{Cos}\alpha} \text{x}\text{Tan}\beta = \frac{\text{Sen}\alpha}{\text{Cos}\alpha} \text{x}\text{Tan}\beta$
- .: $EC = \text{Tan}\alpha\text{Tan}\beta$
- $\text{Cos}\alpha = \frac{FC}{\text{Sec}\alpha\text{Tan}\beta} \rightarrow FC = \text{Cos}\alpha \text{x} \text{Sec}\alpha \text{x} \text{Tan}\beta = \text{Cos}\alpha \text{ x } \frac{1}{\text{Cos}\alpha} \text{x}\text{Tan}\beta$
- .: $FC = \text{Tan}\beta$
- Analisando ΔADF temos:
- $\text{Tan}(\alpha\text{-}\beta) = \frac{DF}{AD} = \frac{\text{Tan}\alpha - \text{Tan}\beta}{1 + \text{Tan}\alpha\text{Tan}\beta}$
- .: $\text{Tan}(\alpha\text{-}\beta) = \frac{\text{Tan}\alpha - \text{Tan}\beta}{1 + \text{Tan}\alpha\text{Tan}\beta}$

3.7 Lei dos Cossenos

Figura 19 – Lei dos Cossenos

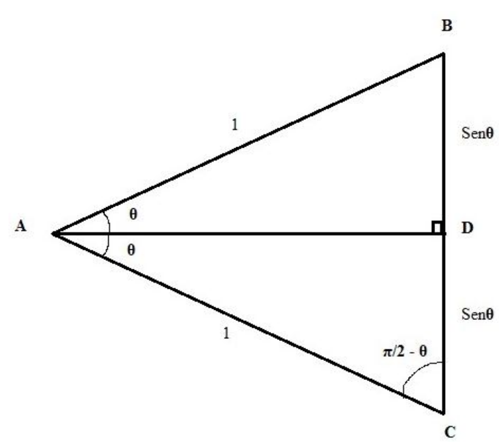


- Com uma abertura qualquer e centro em O trace uma circunferência de raio **a**.
- Passando pelo centro O trace dois segmentos AB e CD.

- Tomando o diâmetro CD marque um ponto E qualquer na circunferência e ligue aos pontos C e D formando um triângulo ΔCDE retângulo inscrito na semicircunferência, retângulo em E.
- Chamamos de θ o ângulo EDC e temos CD de comprimento 2a.
- O segmento OB corta o triangulo ΔECD em duas partes formando um triângulo interno a ele ΔODF e denominaremos o segmento OF de c e o externo de a-c. E chamemos que b o segmento FD
- No triângulo ΔCDE Cosθ = $\frac{ED}{CD} = \frac{ED}{2a}$ → ED = 2aCosθ.
- Assim podemos observar que segmento EF = 2aCosθ – b.
- Utilizando as relações métricas na circunferência temos que EFxFD = AFxFB, substituindo os valores temos:
- (2aCosθ – b)x(b) = (a + c)x(a – c)
- .: $2abCos\theta - b^2 = a^2 - ac + ac - c^2$
- .: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos\theta}$

3.8 O Arco Duplo

Figura 20 – Arco duplo



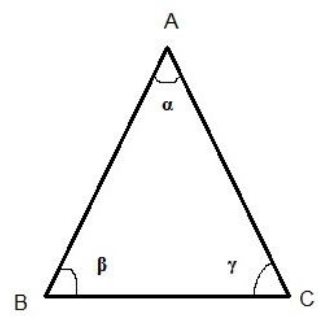
- Seja ΔABC um triângulo isósceles de base BC e lados AB e AC iguais a uma unidade.
- Por A tracemos uma altura relativa ao lado BC marcando D.

- No triângulo isósceles a altura também e bissetriz, logo chamemos de θ os ângulos formados pela bissetriz AD.
- No ΔABD observemos que $Sen\theta = \frac{BD}{1} \rightarrow BD = Sen\theta$. O mesmo vale para o ΔADC, onde $DC = Sen\theta$. Também temos que $Cos\theta = \frac{AD}{1} \rightarrow AD = Cos\theta$.
- A área do ΔABC é calculada por:
- $\Delta ABC = \frac{ABxACxSen2\theta}{2} = \frac{1x1xSen2\theta}{2} = \frac{Sen2\theta}{2}$ (I)
- Uma outra forma de calcular a área de ΔABC é como somatório das áreas de ΔABD e ΔADC.
- A área de ΔABD = ΔADC, pois são dois triângulos congruentes, assim:
- Área $\Delta ADC = \frac{ABxADxSen\theta}{2} = \frac{1xCos\theta xSen\theta}{2} = \frac{Cos\theta Sen\theta}{2}$ (II)
- Sabemos que a área de ΔABC é igual duas vezes a área de ΔADC de (I) e (II) temos:
- $\frac{Sen2\theta}{2} = 2x\frac{Cos\theta Sen\theta}{2}$
- **.: $Sen2\theta = 2xCos\theta Sen\theta$**

- Aplicando a lei dos cossenos no ΔABC temos:
- $(2xSen\theta)^2 = 1^2 + 1^2 - 2x1x1xCos2\theta$
- .: $4xSen^2\theta = 1 + 1 - 2xCos2\theta$
- .: $4xSen^2\theta = 2 - 2xCos2\theta$ (dividindo tudo por 2)
- .: $2xSen^2\theta = 1 - Cos2\theta$
- .: **$Cos2\theta = 1 - 2xSen^2\theta$**

3.9 Lei dos Senos

Figura 21 – Lei dos Senos



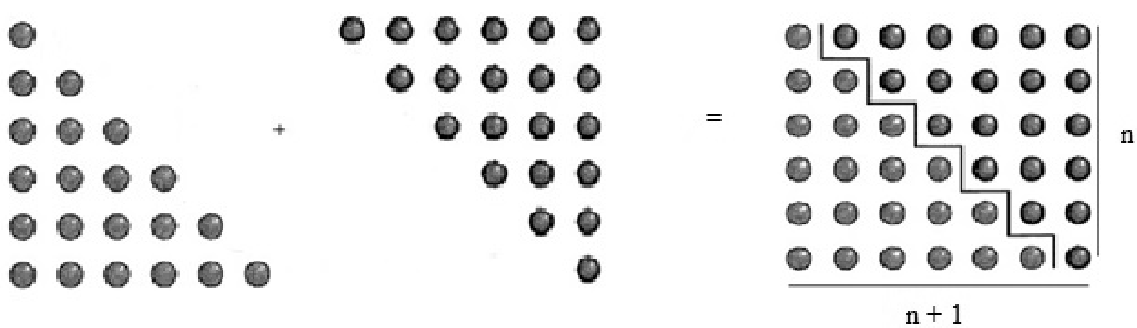
- Tomemos um ΔABC qualquer de ângulos A = α, B = β e C = γ e calculemos a sua área teremos:
- Área ΔABC = $\frac{ABxACxSen\alpha}{2} = \frac{ABxBCxSen\beta}{2} = \frac{ACxBCxSen\gamma}{2}$
- Separando as igualdades duas a duas tomemos as duas primeiras assim:
- $\frac{ABxACxSen\alpha}{2} = \frac{ABxBCxSen\beta}{2}$
- .: ACxSenα = BCxSenβ
- .: $\frac{Sen\alpha}{BC} = \frac{Sen\beta}{AC}$ (I)
- Igualando a segunda e terceira:
- $\frac{ABxBCxSen\beta}{2} = \frac{ACxBCxSen\gamma}{2}$
- .: ABxSenβ = ACxSenγ
- .: $\frac{Sen\beta}{AC} = \frac{Sen\gamma}{AB}$ (II)
- Tomando a primeira e terceira igualdades:
- $\frac{ABxACxSen\alpha}{2} = \frac{ACxBCxSen\gamma}{2}$
- .: ABxSenα = BCxSenγ
- .: $\frac{Sen\alpha}{BC} = \frac{Sen\gamma}{AB}$ (III)
- De (I), (II) e (III) concluímos que $\frac{Sen\alpha}{BC} = \frac{Sen\beta}{AC} = \frac{Sen\gamma}{AB}$

4 SEQUENCIAS E PROGRESSÕES

No Ensino Médio o estudo das progressões limita-se às progressões, aritméticas e geométricas. Já o estudo das seqüências destina-se apenas a encontrar o próximo número ou um valor mais distante. Utilizando-se de algumas situações contextualizas ou não, esses não são assuntos de maior dificuldade porém pouco ou até mesmo nem explorados. Neste Capítulo iremos demonstrar algumas seqüências e progressões.

4.1 Soma de números inteiros (I)

Figura 22 – Soma de números inteiros



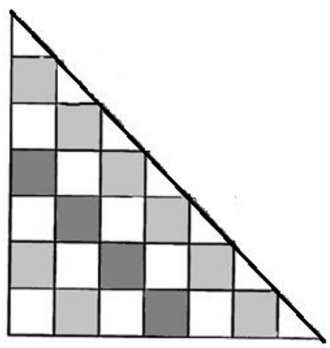
S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n

- Representando simbolicamente por bolas os números inteiros e os organizando de maneira triangular;
- Duplicamos esse triangulo e giramos 180° graus;
- A junção dos dois triângulos de bolas irá formar um retângulo de dimensões **n** e **n + 1**
- Para saber o total de bolas basta calcularmos a área desse retângulo assim:
- $A_r = n(n + 1)$
- Para calcularmos a soma dos inteiros formadores do triângulo, como o foi duplicado basta dividirmos por dois, logo:
- $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
-

4.2 Soma de números inteiros (II)

Figura 23 – Soma de números inteiros II

n



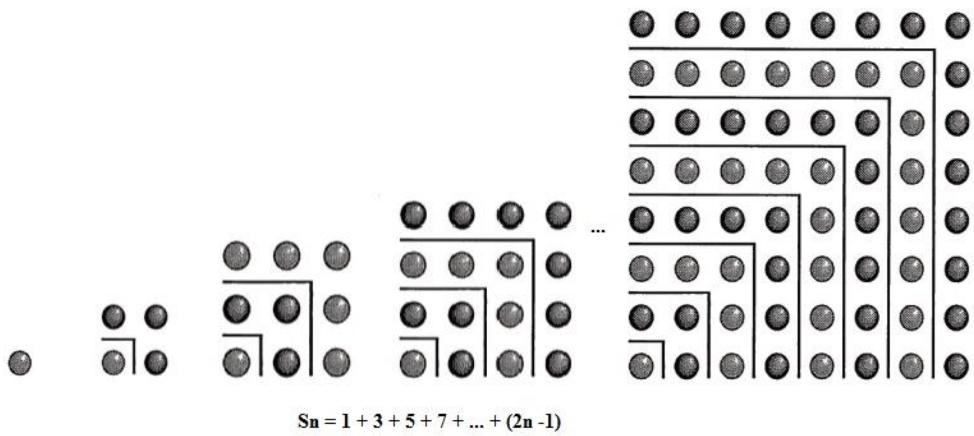
n

S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n

- Outra maneira de visualizarmos a soma de inteiros é os representado por quadrados de lado 1 e também os agrupar empilhados de forma a formar um triângulo;
- Traçarmos uma diagonal dos quadrados das pontas de modo que formaremos um triângulo retângulo isósceles;
- Duplicado a figura e unindo as duas partes é fácil perceber que formará um quadrado;
- Para calcularmos a soma dos inteiros temos a metade da área do quadrado adicionado a metade do somatório das áreas dos n triângulos das pontas, assim:
- $S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{(1xn)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

4.3 Soma de números inteiros ímpares

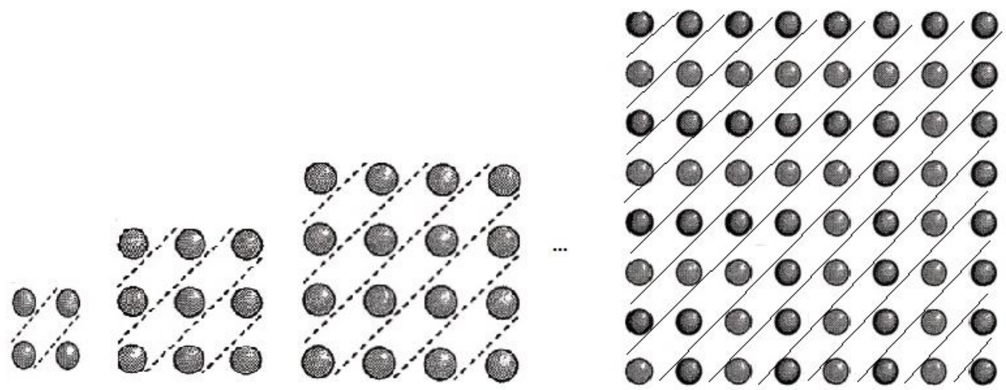
Figura 24 – Soma de números ímpares



- Através da figura percebemos:
- $1 = 1^2 = 1$
- $1 + 3 = 4 = 2^2$
- $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
- ...
- $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n -1) = n^2$
- Ou seja, o somatório de números ímpares é igual a área de um quadrado de lado n, onde n é a quantidade de números ímpares somados.
- **$S_n = 1 + 3 + ...+ (2n -1) = n^2$**

4.4 Quadrado da Soma de Inteiros

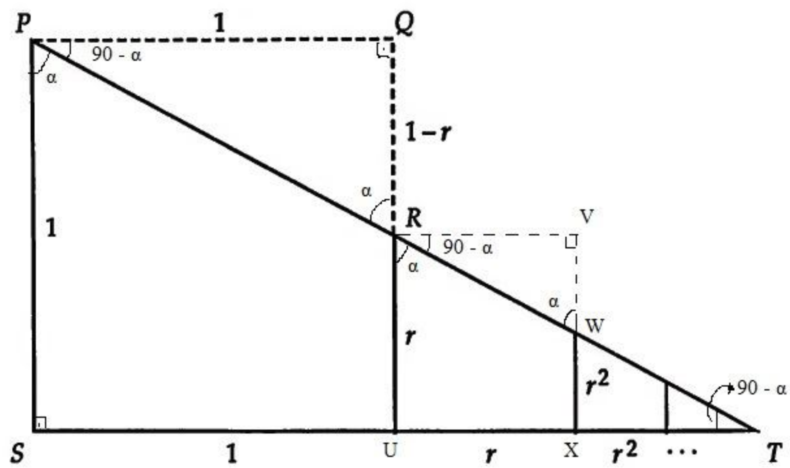
Figura 25 – Quadrado da soma de inteiros



- Podemos visualizar através da figura que os quadrados podem ser decompostos como soma de inteiros, de modo que:
- $2^2 = 1 + 2 + 1$
- $3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$
- $4^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$
- ...
- $8^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
- ...
- $\mathbf{n^2 = 1 + 2 + 3 + ... + (n – 1) + n + (n – 1) + ...+ 3 + 2 + 1}$

4.5 Séries Geométricas (I)

Figura 26 – Soma de PG Infinita (I)

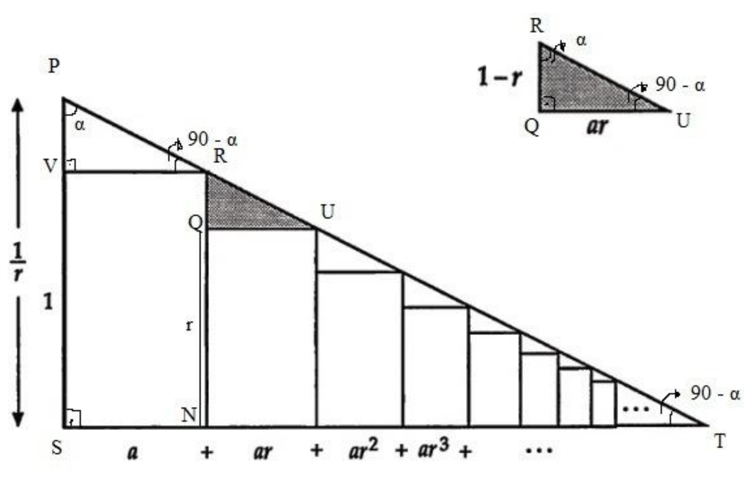


- Tomemos um triângulo retângulo ΔPST de modo que a medida do lado PS = 1
- Tracemos PQ // ST de modo que PQ = 1
- Tracemos uma semirreta partindo de Q e paralela a PS e marquemos R ponto de intersecção da semirreta com o lado PT.
- Chamemos de r a distancia de R ao lado ST, assim QR= 1 – r;
- Repetindo por R os passos anteriores e marcando um segmento RV de dimensão r formaremos um novo triângulo ΔRVW
- Analisando o ΔPQR temos que o ângulo $\hat{P}$ = 90°– α, $\hat{Q}$= 90° e $\hat{R}$= α e analisando os triângulos ΔPST e ΔRVW temos os ângulos $\hat{P}$ = α, $\hat{S}$ = 90° e $\hat{T}$ = 90° - α .
- Assim ΔPST ≈ ΔPQR ≈ ΔRVW pelo caso AA (Ângulo Ângulo), logo os seus lados são proporcionais, daí segue que:
- Obervando os triângulos ΔPST e ΔRVW teremos:
- $\frac{PQ}{RV} = \frac{QR}{VW}$

- .: $\frac{1}{r} = \frac{1-r}{VW}$
- .: VM = r – r², assim podemos afirmar que WX = r², repetindo os mesmos passos teremos que os outros segmentos serão r³, r^4, ..., logo o segmento ST = 1 + r + r² + r³ + ...
- Seguindo o mesmo princípio e analisando ΔPST ≈ ΔPQR temos:
- $\frac{PS}{QR} = \frac{ST}{PQ}$
- $\frac{1}{1-r} = \frac{1+r+r^2+\dots}{1}$
- .: 1 + r + r² + ... = $\frac{1}{1-r}$

4.6 Séries Geométricas (II)

Figura 27 – Soma de PG Infinita (II)

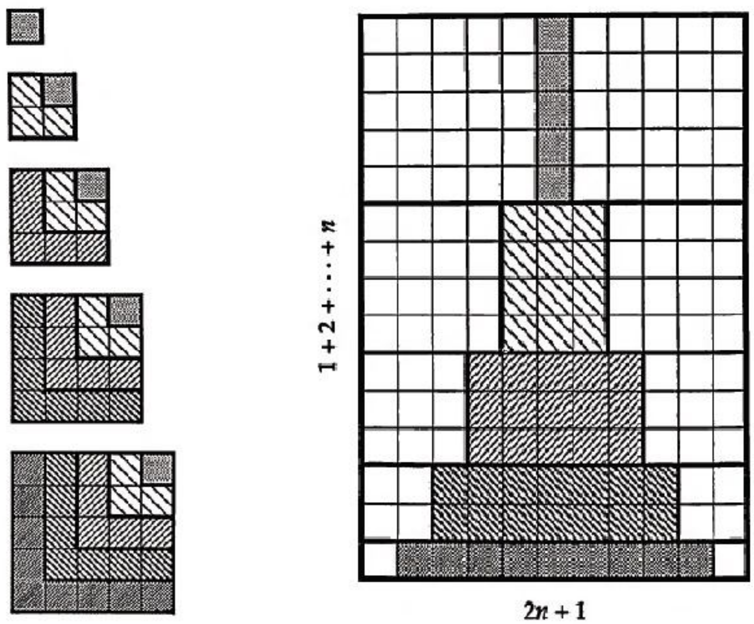


- Construímos um triângulo retângulo ΔPST de modo que PS= $\frac{1}{r}$ com 0< r < 1.
- Com centro em S marque um segmento SV sobre SP de dimensão 1, por V trace uma paralela a ST que intercepta o lado PT no ponto R, formando um segmento de dimensão *a*.

- Por R trace uma semirreta paralela a PS de modo a interceptar ST no ponto N, sobre esse segmento partindo de N marque um segmento NQ de dimensão r.
- Utilizando o mesmo princípio da demonstração anterior (Séries Geométricas (I)) temos que ΔPST ≈ ΔRQU ≈ΔPVR
- Assim temos PV= $\frac{1}{r}$ - 1 = $\frac{1-r}{r}$, VR = a, RQ= 1 – r, analisando ΔRQU ≈ΔPVR teremos:
- $\frac{PV}{RQ} = \frac{VR}{QU}$
- .: $\frac{\frac{1-r}{r}}{1-r} = \frac{a}{QU}$
- .: $\frac{QU\,(1-r)}{r} = a\text{x}(1-\text{r})$
- .: QU = ar
- O mesmo acontecerá nos próximos triângulos daí temos que ST = a + ar + ar^2 + ar^3 +...
- Analisando ΔPST ≈ ΔRQU temos:
- $\frac{PS}{RQ} - \frac{ST}{QU}$
- .: $\frac{\frac{1}{r}}{1-r} - \frac{a+ar+ar^2+ar^3+\cdots}{ar}$
- .: $\frac{ar}{r} = (a + ar + ar^2 + \ ar^3 + \ \ldots)x(1-r)$
- .: $a = (a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots)x(1-r)$
- **.: $\boldsymbol{a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots} = \frac{a}{(1-r)}$**

4.7 Soma de Quadrados

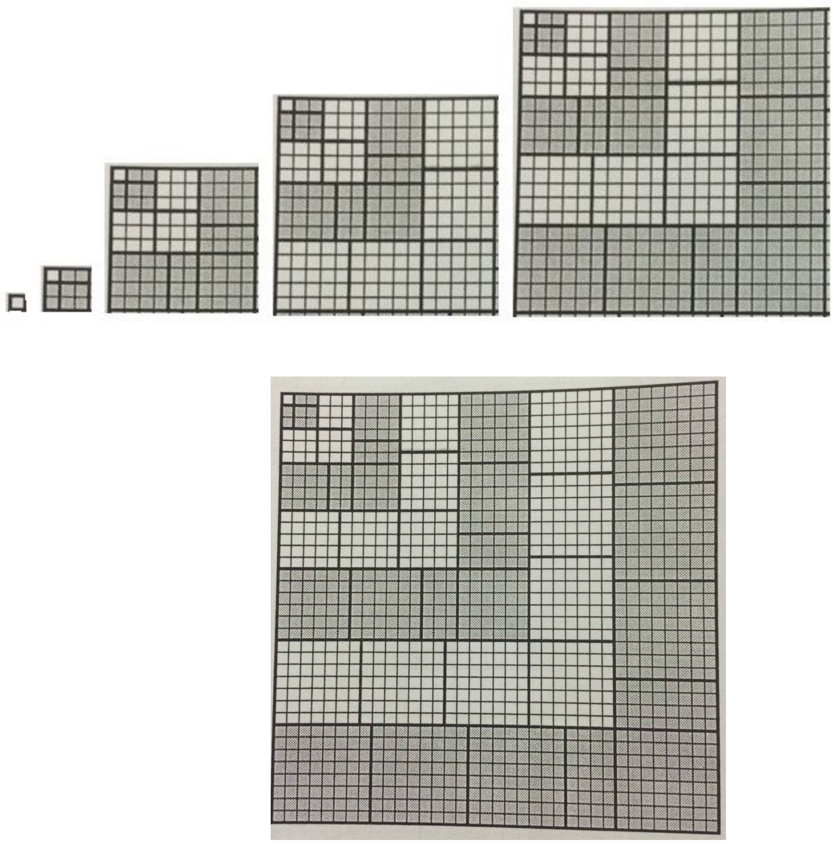
Figura 28 – Soma de quadrados



- Representemos o quadrado do número inteiro positivo n como um bloco quadrado cuja medida do lado seja n e divididos em blocos de quadrados de lado 1;
- Reagrupando os quadrados e completando os espaços e formando um retângulo, construímos um retângulo de base 2n + 1 altura igual a (1 + 2 + 3 + ... + n)
- Observa-se que o retângulo formado tem área igual a três vezes a soma de quadrados assim :
- $3x(1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2) = (2n + 1)x(1 + 2 + 3 + ...+ n)$
- $.: 3x(1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+n^2) = (2n + 1)x\frac{(n)x(n+1)}{2}$
- $.: (1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+n^2) = (2n + 1)x\frac{(n)x(n+1)}{2\,x\,3}$
- **$.: (1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+n^2) = \frac{(n)x(n+1)x(2n+1)}{6}$**

4.8 Soma de Cubos

Figura 29 – Soma de cubos



- Representado os números inteiros como blocos de quadrados 1 x1 e os organizando observamos que a medida que vão se acrescentando os cubos dos números inteiros vão se formando quadrados de lados igual a soma dos números inteiros utilizados assim:
- $1^3 = 1^2$
- $1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$
- ...
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n)^2$.

5 EQUAÇÕES

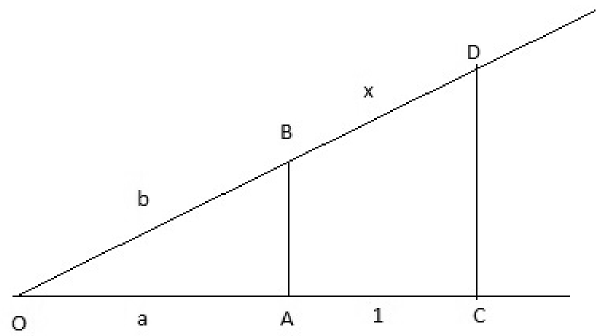
No presente capítulo apresentaremos a resolução de equações do primeiro grau utilizando régua e compasso e a do segundo grau por dois métodos, o primeiro com régua e compasso e o segundo completando quadrados.

5.1 Resolução de Equação do 1° Grau

Uma equação do 1° grau pode ser representada na forma ax = b, sendo a e b números reais positivos. Dessa forma podemos ver x como o quarto proporcional de mais três segmentos a, b e 1, assim $\frac{a}{1} = \frac{b}{x}$, assim podemos fazer essa construção e resolver a equação geometricamente.

- Por um ponto O qualquer tracemos as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com uma abertura qualquer.
- Em $\overrightarrow{OA}$ marque um segmento de comprimento a e marque o ponto A, prolongue a semirreta e marque outro segmento de comprimento 1 e marque o ponto C.
- Na semirreta $\overrightarrow{OB}$, partindo de O marque um segmento de comprimento b.
- Ligue os pontos A e B.
- Por C trace uma semirreta paralela a AB tocando o prolongamento da semirreta $\overrightarrow{OR}$ no ponto D.
- Formamos assim dois triângulos ΔOAB e ΔODC, semelhantes pelo caso AA (Ângulo Ângulo), tendo os três ângulos congruentes.
- Logo: $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$
- .: $\frac{b}{a} = \frac{(b+x)}{(a+1)}$
- .: a(b + x) = b(a + 1)
- .: ab + ax = ab + b
- .: ax = b
- Assim o segmento $\overline{BD}$ de comprimento x é a solução da equação é o b/a.

Figura 30 – Resolução de equação do 1º grau com régua e compasso.



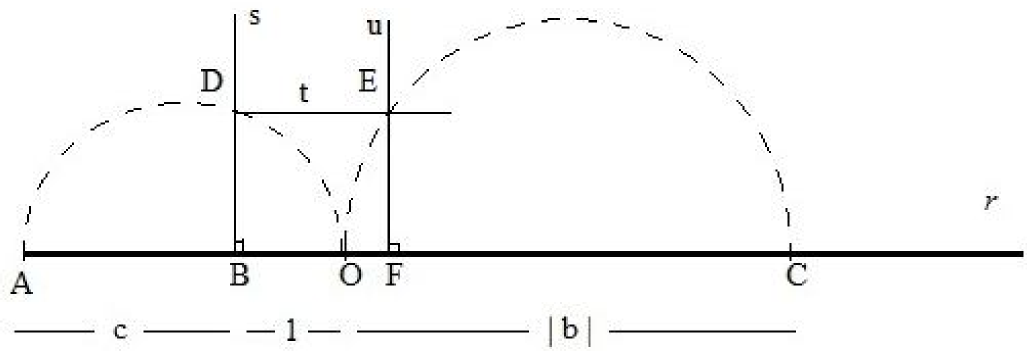
5.2 Resolução de Equações do 2° grau utilizando régua e compasso

Uma importante conseqüência do legado dos gregos com as construções com régua e compasso é a possibilidade de resolução de uma equação do 2º grau da forma $x^2 + bx + c = 0$. Iremos dividir essa construção em dois casos com $c \neq 0$, pois quando $c = 0$ as raízes são 0 e -b, o primeiro com $c > 0$, assim as raízes x_1 e x_2 terão o mesmo sinal e o segundo caso quando $c < 0$ e as raízes terão sinais diferentes.

1° Caso c > 0

Tomemos o 1° caso onde $c > 0$, assim as raízes x_1 e x_2 terão o mesmo sinal e como trabalhamos com construção geométrica não utilizamos números negativos trabalharemos o módulo. Neste caso $|x_1| + |x_2| = |b|$ e $|x_1| \cdot |x_2| = c$. Assim iremos determinar dois segmentos cuja soma seja $|b|$ e cujo produto seja c.

Figura 31 – Resolução de equação do 2º grau com c > 0



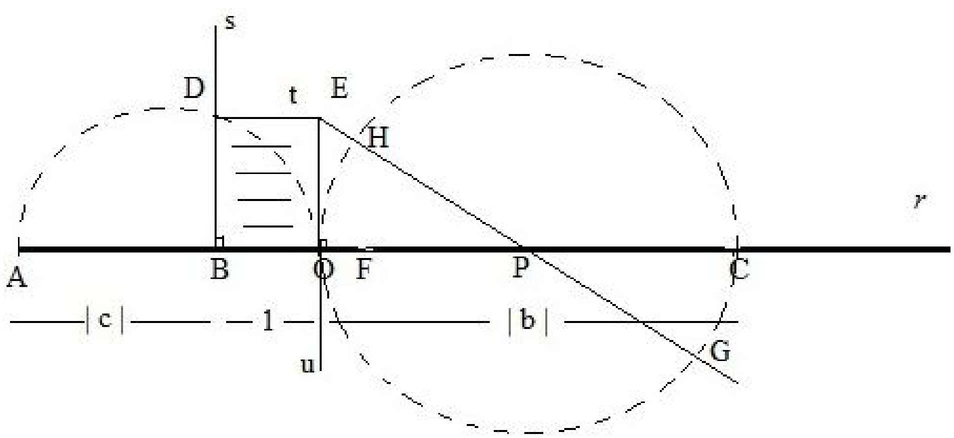
- Tracemos uma reta r e sobre ela marquemos os segmentos $\overline{AB}$= c, $\overline{BO}$ = 1 e $\overline{OC}$ = |b|
- Construímos duas semircircunferencias, uma de diâmetro $\overline{AO}$ e outra de diâmetro $\overline{OC}$
- Com centro em B trace uma reta s perpendicular a reta r de modo a interceptar a semicircunferência no ponto D.
- Por D trace uma reta t paralela a reta r de modo a interceptar a semicircunferência $\overline{OC}$ no ponto E.
- Por E trace uma reta u perpendicular a reta r de modo a interceptar a reta no ponto F.
- Assim, podemos concluir que o segmento $\overline{DB}^2$= $\overline{AB}$x$\overline{BO}$ = c x 1 = c, logo $\overline{DB}$= √c
- Do mesmo modo que $\overline{EF}^2$=$\overline{OF}$x$\overline{FC}$ e como $\overline{EF}$=$\overline{DB}$ temos $\overline{EF}$= √c = $\sqrt{\overline{OF}x\overline{FC}}$, daí:
- .: $\overline{OF}$ + $\overline{FC}$ = | b | e $\overline{OF}$ x $\overline{FC}$ = c, sendo os segmentos $\overline{OF}$ e $\overline{FC}$ as raízes da equação x^2 + bx + c = 0.
- Analisando os valores de b temos:
- Se b < 0, x_1= $\overline{OF}$ e x_2 = $\overline{FC}$;
- Se b > 0, x_1= - $\overline{OF}$ e x_2 = - $\overline{FC}$;

Se $\sqrt{c}$ = $\frac{|b|}{2}$, a reta t não interceptar a semicircunferência OC, temos que as raízes dessa equação são imaginárias e não podemos determiná-las através de construção e o mesmo ocorre quando b = 0 (com c > 0).

2° Caso c < 0

Com $c < 0$ iremos determinar duas raízes de modo que $|x_1| - |x_2| = |b|$ e $|x_1| \cdot |x_2| = | c |$ ou seja determinar dois segmentos em que sua diferença seja | b | e seu produto | c |.

Figura 32 – Resolução de equação do 2º grau com c < 0



- Seguiremos os passos iniciais da construção anterior, tracemos a reta r, masquemos os segmentos $\overline{AB}$= c, $\overline{BO}$ = 1 e $\overline{OC}$ = |b|, construímos a semicircunferência AO e a circunferência de diâmetro OC e por B traçamos uma reta s perpendicular a r de modo a interceptar a semicircunferência AO n o ponto D e por D traçar uma reta t perpendicular a s.
- Pelo ponto O trace uma reta u perpendicular a reta r de modo a interceptar a reta t no ponto E.
- Por E trace uma semirreta passando pelo ponto P, centro da circunferência, interceptando a circunferência nos pontos H e G.
- Conforme a demonstração anterior temos que $\overline{DB}^2 = \overline{AB} \mathrm{x} \overline{BO}$ = c x 1 = c, logo $\overline{DB} = \sqrt{c}$, de forma que $\overline{DB} = \overline{EO}$.

Também observamos que $\overline{EO}$ é tangente e $\overline{EG}$ é secante a circunferência, assim concluímos pelas relações métricas na circunferência que $\overline{EO}^2 = \overline{EH}x\overline{HG}$

- Assim: $\overline{DB}^2 = \overline{EO}^2 = \sqrt{\overline{EH}x\overline{EG}} = \sqrt{C}$
- .: $\overline{EH}x\overline{EG}$ = c.
- Logo, $\overline{EH}$ *e* $\overline{EG}$são os dois segmentos procurados visto que :
- | b | = $\overline{OC} = \overline{HG} = \overline{EG} - \overline{EH}$
- Tomando x_1 como a maior raiz concluímos que:
- Se b > 0, temos $x_1 = - \overline{EG}$ e $x_2 = \overline{EH}$;
- Se b < 0, teremos $x_1 = \overline{EG}$ e $x_2 = - \overline{EH}$.

Nesse segundo caso é possível determinar as raízes quando b = 0 pois a circunferência de centro em P terá raio zero e as raízes serão $x_1 = \overline{EO}$ e $x_2 = - \overline{EO}$.

5.3 Método Geométrico (Completando quadrados)

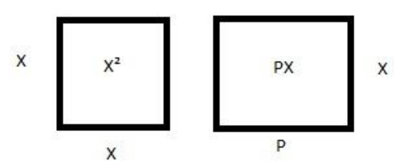
O matemático, astrônomo, astrólogo, geógrafo e autor persa Abū ‘Abd Allāh Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizm, mais conhecido como Al-Khwarizmi, 780 – 850d.C, foi quem apresentou as primeiras resoluções sistemáticas de equações lineares e quadráticas no seu livro Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala (O *Livro da Restauração e do Balanceamento* - de nome completo *Livro Compêndio sobre Cálculo por Restauração e Balanceamento*) onde é escrito em árabe entre 813 e 833d.C, uma síntese de idéias e regras para resolução de equações quadráticas e outros problemas.

Al-Khwarizmi proporciona métodos algébricos e geométricos para resolver as equações quadráticas mais simples, sem usar notações abstratas, é válido lembrar que os mulçumanos não consideravam os números negativos. Na última parte do livro é discutido exemplos práticos de aplicação destas regras, problemas aplicados à medida de áreas e volumes sendo que nenhum destes capítulos requer de conhecimentos sobre resolução de equações quadráticas.

Temos dois métodos geométrico de Al-Khwarizmi completando quadrados, que iremos exemplificá-los a seguir:

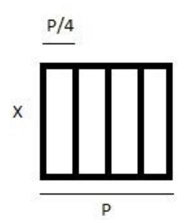
5.3.1 Método 1

Tomemos uma equação geral $X^2 + PX = Q$, representado geométricamente temos um quadrado de lado X de área X^2 e um retângulo de lados X e P.



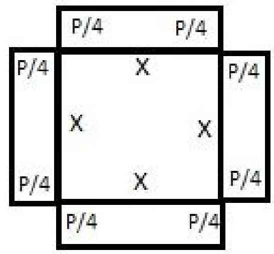
Construção da Figura 33- Etapa 1

Dividiremos o retângulo de área PX em quatro partes iguais, formado quatro retângulos menores de lados X e P/4.



Construção da Figura 33- Etapa 2

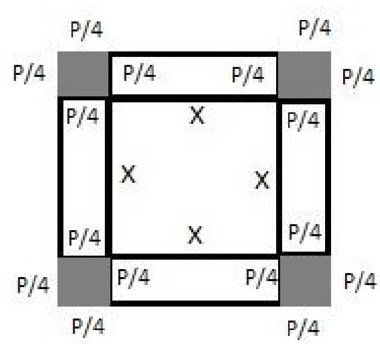
Em seguida colocaremos cada retângulo menor em um dos lados do quadrado de lado X, formando uma nova figura



Construção da Figura 33- Etapa 3

Completaremos essa cruz com quatro quadrados de lado P/4, de modo a formar um novo quadrado.

Figura 33 – Resolução de equação do 2º pelo método 1.



Obtemos assim um quadrado de lado X + 2xP/4 = X + P/2. A partir dessa resolução geométrica temos:

$X^2 + PX = Q$

$X^2 + PX + 4P^2/16 = (X + P/2)^2 = Q + 4P^2/16$

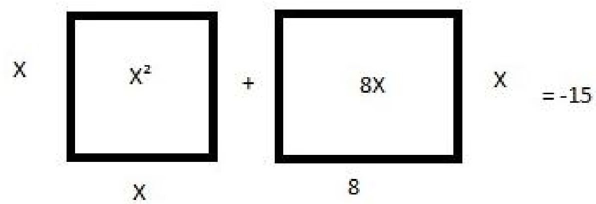
$X + P/2 = \pm\sqrt{Q + 4P^2/16}$

$X = -P/2 \pm\sqrt{Q + 4P^2/16}$

O que gera a fórmula de Bhaskara, criada pelo matemático hindu Bhaskara Akaria que viveu na Indiade 1114 à 1185, com base nos estudos de Al-kwarizmi, conhecida atualmente.

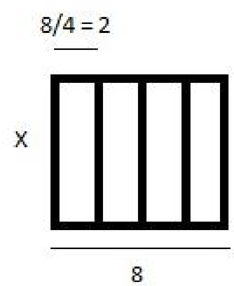
Na prática tomemos o exemplo $X^2 + 8X + 15 = 0$

Organizando a equação temos $X^2 + 8X = -15$

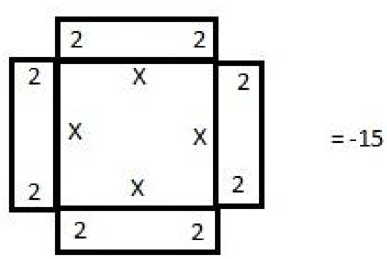


Construção da Figura 34- Etapa1

Dividindo 8X em 4 partes iguais e reorganizando a equação:



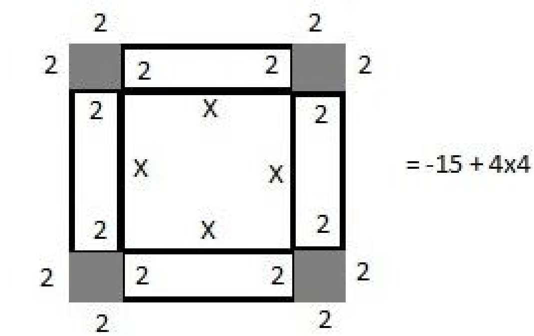
Construção da Figura 34- Etapa 2



Construção da Figura 34- Etapa 3

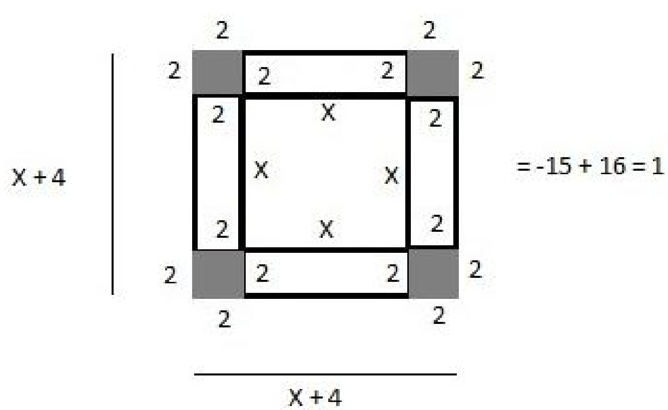
Completando os quadrados da cruz teremos quatro quadrados de lado 2, logo de área igual a 4, assim:

Construção da Figura 34- Etapa 4



Formando um novo quadrado de lado X + 2 + 2 = X + 4

Figura 34- Resolução da equação $X^2 + 8X + 15 = 0$



Daí:

$(X + 4)^2 = 1$

.: $X + 4 = \pm\sqrt{1}$

.: $X + 4 = \pm 1$

.: $X + 4 = 1$

.: $X = 1 – 4 = - 3$

Ou

$X + 4 = -1$

.: $X = -1 - 4$

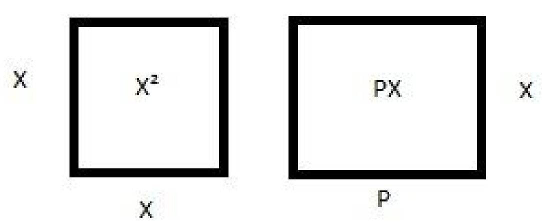
.: $X = - 5$

Para A-Khwarizmi os números negativos careciam de sentido, mas podemos utilizar seu método de completar quadrados e chegar a soluções negativas também.

5.3.2 Método 2

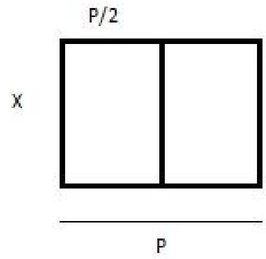
O segundo método é semelhante ao primeiro, porém Al-Khwarizmi, divide o retângulo ao meio e completa a área restante, chegando a mesma equação como vemos a seguir:

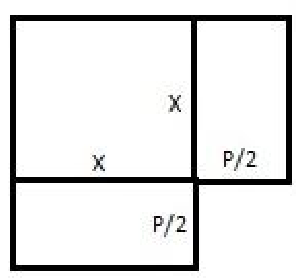
Tomemos a equação inicial $X^2 + PX + Q = 0$ e representamos geometricamente como um quadrado de lado X e um retângulo de lados X e P, com áreas X^2 e PX respectivamente.



Construção da Figura 35- Etapa1

Dividimos o retângulo PX ao meio e o acrescentamos as laterais do quadrado de lado X.

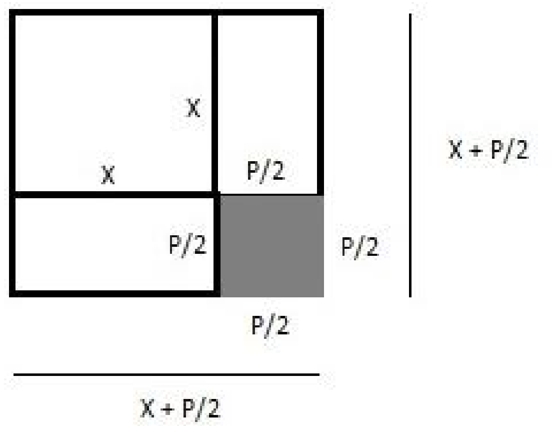




Construção da Figura 35- Etapas 2 e 3

Completamos o canto da figura formada com um quadrado de lado P/2, e teremos um novo quadrado de lado X + P/2.

Figura 35- Resolução da equação do 2º grau pelo método II



Daí teremos:

$X^2 + PX = Q$

.: $X^2 + PX + (P/2)^2 + Q - Q = - Q + (P/2)^2$

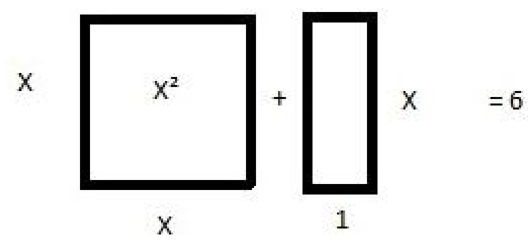
.: $(X + P/2)^2 = - Q + P^2/4$

.: $X + P/2 = \pm\sqrt{-Q + P^2/4}$

.: $X = -P/2 \pm\sqrt{-Q + P^2/4}$, que de uma maneira mais organizada temos:

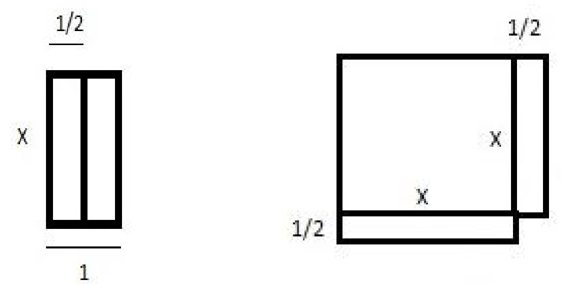
.: $X = \frac{-P\pm\sqrt{P^2-4Q}}{2}$, a conhecida fórmula de Bháskara citada anteriormente.

Utilizando o método na prática tomemos a equação $X^2 + X – 6 = 0$, organizando teremos $X^2 + X = 6$, construímos um quadrado de lado X e um retângulo de lados X e 1, conforme a figura a seguir



Construção da Figura 36 - Etapa 1

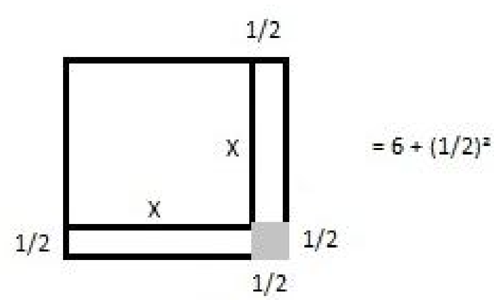
Dividimos o retângulo de lados X e 1 ao meio formando dois retângulos de lados X e 1/2 e em seguida acrescentamos esses retângulos aos lados do quadrado de lado X.



Construção da Figura 36 - Etapas 2 e 3

Assim teremos a equação da seguinte forma:

Figura 36 - Resolução da equação $X^2 + X - 6 = 0$



$X^2 + 2x1/2X + (1/2)^2 = 6 + (1/2)^2$

.: $(X + 1/2)^2 = 6 + 1/4 = 25/4$

.: $X + 1/2 = \pm\sqrt{25/4}$

.: $X + 1/2 = \pm 5/2$

.: $X = 5/2 – 1/2$

.: $X = 4/2$

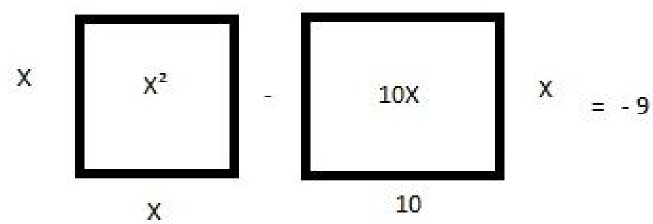
.: $X = 2$ ou

.: $X = - 5/2 – 1/2$

.: $X = - 6/2$

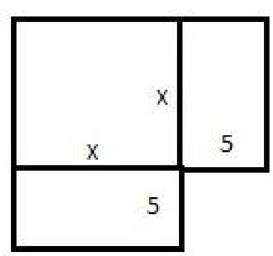
.: $X = - 3$

Utilizaremos esse método para resolver a equação do 2º grau $X^2 - 10X + 9 = 0$. Organizando a equação, isolaremos o termo independente, conforme imagem a seguir



Construção da Figura 37 – Etapa 1

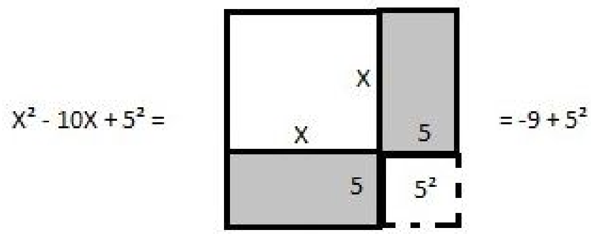
Dividimos o retângulo de lados X e 10 ao meio formando dois retângulos de lados X e 5 e em seguida acrescentamos esses retângulos aos lados do quadrado de lado X..



Construção da Figura 37 – Etapa 2

Completaremos o quadrado e destacaremos os retângulos de forma a representar que são números negativos. Assim teremos a equação da seguinte forma:

Figura 37 – Resolução da equação $X^2 - 10X + 9 = 0$



$X^2 - 10X + 5^2 = -9 + 5^2$

.: $(X - 5)^2 = -9 + 25 = 16$

.: $X - 5 = \pm\sqrt{16}$

.: $X = 4 + 5$

.: $X = 9$ ou

.: $X = -4 + 5$

.: $X = 1$

Conforme ressaltado anteriormente os números negativos por Al-khwarizmi não eram considerados, mas podemos observar que mesmo por esse método é possível se chegar a um resultado negativo e resolvermos equações com valor de P negativo.

6 **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A Matemática é uma disciplina conhecida por seus números, suas formas, regras e fórmulas. Tem-se uma visão inicial de que apenas decorando e aplicando essas fórmulas aprendemos matemática. Uma parte da matemática de grande importância, a geometria, que vem a cada dia sendo deixada de lado na realidade escolar, perdendo seu espaço para a algebrização dos conteúdos.

A proposta inicial desse trabalho teve como objetivo mudar o olhar sobre essas fórmulas e regras e perceber que elas podem ser apresentadas e demonstradas de uma maneira mais concreta e construtiva para os professores podendo ser utilizada para os alunos, visto que todos os assuntos abordados fazem parte do currículo escolar do ensino fundamental e médio.

Acreditamos que este trabalho sobre construções poderá ser associado às ferramentas de auxílio para compreensão de alguns conteúdos usados no Ensino Médio. No primeiro capítulo apresentamos a importância do legado dos gregos deixado nas construções com régua e compasso e que fundamentaram outras demonstrações utilizadas em capítulos posteriores. Nos capítulos 2 e 3 trabalhamos com demonstrações das identidades trigonométricas, algumas seqüências e progressões utilizando áreas e relações métricas na circunferência. No capítulo 4 apresentamos métodos de resolução de equações do primeiro e segundo grau utilizando-se de construções com régua e compasso e o método de Al-Kwarizmi completando quadrados.

O presente trabalho teve em grande parte como base as demonstrações apresentadas no livro *Proofs Witghout Words: Exercises in Visual Thinking*, onde realizamos a interpretação e transcrição das demonstrações existentes apenas em imagens sem palavras.

Admitimos que quando apresentamos um conceito de uma forma mais concreta notamos que propiciarmos condições do aluno relacionar as construções aos conceitos, e os instigamos a descoberta, tornando o aprendizado mais significativo.

Quando aproximamos o educando do processo das construções estamos nos apropriando dos conceitos, evitando definições decoradas e não aprendidas. O aluno nesse processo deixa de ser apenas um observador e passa a ser protagonista na execução dos passos que os levam aos resultados. Assim, o planejamento prévio do professor é extremamente importante para que este material não o seja encarado como pronto e sim como um instrumento auxiliar na busca de aulas mais prazerosas e de melhores resultados no processo ensino-aprendizagem.

Sugerimos para trabalhos futuros a exploração de outras demonstrações utilizando as construções visto que esse é um campo vasto e pouco explorado e que se torne uma ferramenta importante para auxiliar os professores no ensino de matemática nas escolas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: Ensino Médio. Brasília, DF, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica**.** **Parâmetros curriculares nacionais**: Ensino Médio. Brasília, DF, 2002.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 20 11.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática**: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e equações algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NELSEN, Roger B. **Proofs without words:** Exercises in visual thinking. No. 1. MAA, 1993.

NELSEN, Roger B. **Proofs without words ii**: More exercises in visual thinking. USA: Mathematical Association of America, 2000.

PASTOR, A Leonardo P. **Equações do 2º grau**: completando quadrados. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 6 (1985): 36-38.

TULANA, N. Resolução Geométrica da Equação do 2º Grau. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 12, (1988): 33-35.

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro, 2009.